KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DEĞİŞKEN KESİTLİ KOLONLARIN ELASTİK BURKULMA YÜKLERİNİN KUVVET SERİLERİ YÖNTEMİYLE BELİRLENMESİ

AYŞE POLAT YAZICI

KOCAELİ 2018

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ
ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DEĞİŞKEN KESİTLİ KOLONLARIN ELASTİK BURKULMA YÜKLERİNİN KUVVET SERİLERİ YÖNTEMİYLE BELİRLENMESİ

AYŞE POLAT YAZICI

Doç.Dr. Fuad OKAY
Danışman, Kocaeli Üniv. .....

Doç.Dr. Seval P. ÇUHADAROĞLU
Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv. .....

Prof. Dr. Şemsi Burhanettin ALTAN
Jüri Üyesi, Giresun Üniv. .....

Tezin Savunulduğu Tarih: 13.07.2018

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın her safhasında çalışmalarıma yön veren, karşılaştığım problemlere çözümler öneren, değerli vaktini, bilgisini, teşvik ve yardımlarını esirgemeyerek her türlü desteği sağlayan danışman hocam, Doç.Dr. Fuad OKAY'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmamın tüm aşamalarında bilgi ve görüşleri ile çalışmalarıma katkıda bulunan, desteğini ve zamanını esirgemeyen hocam Doç.Dr. Seval PINARBAŞI ÇUHADAROĞLU'na teşekkürlerimi sunarım.

Çalışma süresince her zaman yanımda olarak desteğini esirgemeyen başta sevgili eşim Uğur YAZICI olmak üzere, tüm eğitim hayatım boyunca yanımda olarak desteklerini esirgemeyen sevgili babam Halim POLAT, annem Fadime POLAT'a teşekkürlerimi sunarım.

Temmuz - 2018 Ayşe POLAT YAZICI

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR i
İÇİNDEKİLER ii
ŞEKİLLER DİZİNİ iii
SİMGELER DİZİNİ iv
ÖZET v
ABSTRACT vi
GİRİŞ 1
1. KUVVET SERİLERİ YÖNTEMİYLE KOLON BURKULMA ANALİZİ 3
1.1. Kolon Burkulma Analizi 3
1.2. Burkulma Denkleminin Kuvvet Serileri Yöntemiyle Çözümü 6
2. SABİT KESİTLİ KOLONLARIN BURKULMA YÜKLERİNİN KUVVET SERİLERİ YÖNTEMİYLE BELİRLENMESİ 8
2.1. İki Ucu Mafsallı Kolon 10
2.1.1. Birinci burkulma modu 10
2.1.2. İkinci ve üçüncü burkulma modları 13
2.2. Bir Ucu Ankastre Bir Ucu Serbest Kolon 22
2.2.1. Birinci burkulma modu 22
2.2.2. İkinci ve üçüncü burkulma modları 28
3. DEĞİŞKEN KESİTLİ KOLONLARIN BURKULMA YÜKLERİNİN KUVVET SERİLERİ YÖNTEMİYLE BELİRLENMESİ 42
3.1. İki Ucu Mafsallı Kolon 45
3.1.1. Birinci burkulma modu 47
3.1.2. İkinci ve üçüncü burkulma modları 47
3.2. Bir Ucu Ankastre Bir Ucu Serbest Kolon 48
3.2.1. Birinci burkulma modu 48
3.2.2. İkinci ve üçüncü burkulma modları 55
4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 58
KAYNAKLAR 59
KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER 60
ÖZGEÇMİŞ 61

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. İki ucu mafsallı bir kolonun burkulma şekli 3
Şekil 1.2. İki ucu mafsallı bir kolonun ve bir parçasının burkulma anındaki serbest cisim diyagramları..... 4
Şekil 2.1. İki ucu mafsallı kolonun birinci burkulma modu..... 20
Şekil 2.2. İki ucu mafsallı kolonun ikinci burkulma modu 20
Şekil 2.3. İki ucu mafsallı kolonun üçüncü burkulma modu..... 21
Şekil 2.4. Bir ucu ankastre bir ucu serbest kolon 22
Şekil 2.5. Bir ucu ankastre bir ucu serbest kolonun birinci burkulma modu 39
Şekil 2.6. Bir ucu ankastre bir ucu serbest kolonun ikinci burkulma modu..... 39
Şekil 2.7. Bir ucu ankastre bir ucu serbest kolonun üçüncü burkulma modu 40
Şekil 3.1. Değişken kesitli kolon..... 43

SİMGELER DİZİNİ

P	:	Basınç yükü, (N)
P_{kr}	:	Kritik burkulma yükü, (N)
M	:	Moment, (Nm)
EI	:	Eğilme rijitliği, (Nm^2)
w	:	Burkulmuş kolonun herhangi bir noktasının yer değiştirmesi, (m)
I_0	:	Kolunun alt ucundaki atalet momenti, (m^4)
a_i	:	Yer değiştirme fonksiyonunu tanımlayan seri katsayıları
L	:	Kolonun uzunluğu, (m)
E	:	Elastisite modülü, (N/m^2)
I	:	Atalet momenti, (m^4)

DEĞİŞKEN KESİTLİ KOLONLARIN ELASTİK BURKULMA YÜKLERİNİN KUVVET SERİLERİ YÖNTEMİYLE BELİRLENMESİ

ÖZET

Yapı mekaniğinde pek çok burkulma türü vardır. Bunların en basiti kolonların eğilmeli burkulmasıdır. En genel haliyle, eğilmeli burkulma bir kolonun basınç etkisinde kararlılığını kaybetmesi olarak tanımlanabilir. Problem, ilk kez 1757 yılında İsviçreli matematikçi Leonhard Euler tarafından incelenmiştir. Euler iki ucu mafsallı bir kolonun burkulma şeklinden sabit katsayılı doğrusal bir diferansiyel denklem çıkarıp, bu tip denklemlerin çözümünde sıkça kullanılan belirsiz katsayılar yöntemini kullanarak problemin çözümüne ulaşmıştır. Sözü edilen yöntem, farklı mesnet koşullarına sahip sabit enkesitli kolonlar için de iyi sonuçlar vermiştir. Değişken kesitli kolonlarda burkulma denkleminin değişken katsayılı olması nedeniyle belirsiz katsayılar yöntemi bu tip kolonların çözümünde yetersiz kalmaktadır.

Bu çalışmada değişken kesitli kolonların burkulma yükünü belirlemek için kuvvet serileri yöntemi kullanılmıştır. Yöntem, ilk olarak iki farklı sınır durumu için (iki ucu mafsallı, bir ucu ankastre bir ucu serbest) sabit enkesitli kolonlarda uygulanarak kontrol edilmiştir. Sabit enkesitli elemanların burkulma analizlerinde, seri çözümlerinin hızla yakınsadığı ve oldukça başarılı sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir. Böylece, yöntemin değişken kesitli kolonların burkulma analizinde de kullanılabileceği kanaatine varılmıştır.

Çalışmada değişken kesitli iki durum incelenmiştir. Bu durumlar; İki ucu mafsallı ve bir ucu ankastre bir ucu serbesttir. Yöntemin değişken kesitli kolonların kritik burkulma yükünü bulmak için uygun olduğu sonucuna varılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Burkulma, Değişken Kesitli Kolonlar, Euler Kolonu, Kuvvet Serileri Yöntemi.

DETERMINATION OF THE ELASTIC BUCKLING LOAD OF COLUMNS WITH VARIABLE CROSS-SECTION BY USING THE METHOD OF POWER SERIES

ABSTRACT

There are several types of buckling in structural mechanics. The most simple case is the flexural buckling of columns. In general way of thinking, flexural buckling can be defined as losing the stability of a column under compression. The problem was first studied by the Swiss mathematician Leonhard Euler in 1757. He derived a linear differential equation with constant coefficients, from the buckled shape of pinned-pinned ended column and achieved the solution of the problem by using the method of undetermined coefficients. This method gives accurate results for uniform columns with different end conditions. However, for the case with variable cross-sections, the buckling equations come out with variable coefficients; consequently, the method of undetermined coefficients become insufficient for the solution of the problem.

In this study, the flexural buckling load of a variable cross-section column is determined using the method of power series. The method is checked for constant cross-sectional columns for two different end conditions (pinned-pinned, fixed-free). It is observed that the series converge rapidly and give satisfactory results. Thus, it is concluded that the method is viable for determining the critical loads of columns with variable cross-sections.

Two cases of variable cross-sections are investigated in the study. These cases are pinned-pinned and fixed-free. Analysis result show that the method of power series is suitable for determining buckling loads of columns with variable cross-sections.

Keywords: Buckling, Non-uniform Columns, Euler Column, Power Series Method.

GİRİŞ

İnşaat mühendisliğinde tasarlanacak yapıların güvenliği oldukça önemlidir. Burkulma, kolonların tasarım ve boyutlandırılmasında üzerinde durulması gereken önemli bir konudur ve en genel haliyle bir kolonun basınç yükü altında kararlılığını kaybetmesi olarak tanımlanabilir. Yapı elemanları, basınç yükleri altında düzlemleri dışına doğru eğilme eğilimindedirler. Kritik yüke erişildiğinde kolon aniden eğilir. Bu eğilme elemanda büyük deformasyonlar oluşturarak elemanın yük taşıma kapasitesini azaltır. Bu sebeple burkulma yükü basınç elemanları için bir tasarım kriteridir [1].

Değişken kesitli kolonlar köprü, direk ve vinç gibi çok çeşitli taşıyıcı sistemlerde kullanılabilirler. Mühendislik yapılarının tasarımında üzerinde durulması gereken birçok parametre bulunmaktadır. Çoğu zaman ekonomiklik ve güvenlik sözü edilen parametreler arasında ilk sıralarda yer almaktadır. Değişken kesitli kolonlar, kullanıldıkları sistemler de hafiflik ve ekonomiklik açısından oldukça önemlidir ancak bu tip elemanların tasarımında ilk akla gelen stabilite probleminin varlığıdır. Değişken kesitli kolonların burkulması, üzerinde çalışmalar yapılan özel bir konudur. Sadece ülkemizde değil, dünyada da değişken kesitli kolonların burkulmasının analizi yoğun olarak çalışılmaktadır.

Burkulma problemi ilk kez 1757 yılında İsviçreli matematikçi Leohard Euler tarafından incelenmiştir. Euler, iki ucu mafsallı bir kolon için burkulma denklemini oluşturup, belirsiz katsayılar yöntemi kullanarak denklemi çözmüş ve kolonun kritik burkulma yükünü elde etmiştir. Sözü edilen yöntem, uçlarında farklı mesnet koşullarına sahip sabit kesitli kolonlar için de iyi sonuçlar vermiştir. Değişken kesitli kolonlarda, burkulma diferansiyel denklemi değişken katsayılara sahiptir. Dolayısıyla, bu yöntem değişken kesitli kolonların çözümü için yetersizdir.

Değişken kesitli kolonların analizi için yapılan çalışmalarda birçok farklı yöntem uygulanmıştır. Bunlar; sayısal, analitik ve enerji yöntemleri olarak gruplandırılabilir.

Örnek olarak; Ashok ve Biggers [6], Newmark'ın sayısal yöntemini kullanarak prizmatik olmayan kiriş-kolon elemanları için rijitlik matrisi üreten bir algoritma sunmuşlardır. Bu algoritma ile bir bilgisayar programı geliştirerek elde ettikleri sonuçların uygun olduğu sonucuna ulaşmışlardır.

Hamoush, Terro ve Mcginley [7], eksenel kuvvetlerin etki ettiği prizmatik olmayan elemanların elastik ve elastik ötesi davranışlarını ortaya koymuşlardır. Değişken kesitli elemanların sehimlerini göstermek için eğim-sehim ilişkilerine dayanan sonlu fark tekniği uygulamışlardır. Li [4], basınç yüküne maruz kalan değişken kesitli kolonların burkulma problemini incelemiştir. Eğilme rijitliği kolon boyunca lineer olarak değişkenlik gösteren değişken kesitli kolonun analizi birçok adımda analitik yöntemlerle yapılmıştır. Teter [12], burkulma problemini, Koiter pertürbasyon yöntemini kullanılarak analitik-sayısal yöntem ile çözmüştür. Hareketin diferansiyel denklemleri, tüm eylemsizlik kuvvetleri bileşenlerini dikkate alarak Hamilton İlkesi'nden elde edilmiştir. Bu çalışmada, iki küresel modun iki yerel ile etkileşimleri sunulmuştur. Analitik - sayısal yöntem ile elde edilen sonuçlar sonlu elemanlar yöntemi ile karşılaştırılmıştır.

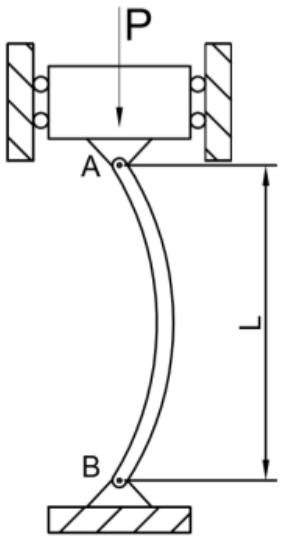
Bu çalışmada, değişken kesitli kolonların burkulma yükünü belirlemek için analitik bir yöntem olan kuvvet serileri yöntemi kullanılmıştır. İlk olarak eğilmeli burkulma üzerinde durulmuş ve Euler kolonuyla çalışmaya başlanmıştır. Belirtilen yöntemle iki ucu mafsallı ve bir ucu ankastre bir ucu serbest sabit kesitli kolonlar için burkulma yükü belirlenmiştir. Kuvvet serileri yöntemi belirli sınır koşulları altında bir değer vermiş ve gerçek çözüme çok hızlı yakınsamıştır. Euler kolonu için bilinen sonuçlar elde edilmiştir ve yöntemin tutarlılığı gözlemlenmiştir. İleri mod değerleri için de çalışmaya devam edilmiş; ilk üç modda Euler kolonu modlarıyla oldukça yakın sonuçlara ulaşıldığı görülmüştür. Sonrasında bir ucu ankastre bir ucu serbest değişken kesitli bir kolon seçilmiştir. Kolonun alt ucunda kesitin eğilme rijitliğinin EI_0, üst ucunda ise $0{,}9EI_0$ olduğu varsayılmıştır. Değişken kesitli kolon için bulunan burkulma yükünün, eğilme rijitliği EI_0 ve $0{,}9EI_0$ olan sabit kesitli kolonların burkulma yükleri arasında bir değer olduğu görülmüştür. Benzer çalışma iki ucu mafsallı değişken kesitli kolonlar için de yapılmıştır. İncelenen bütün vakalarda istenen sonuçlara ulaşıldığı gözlemlenmiştir.

1. KUVVET SERİLERİ YÖNTEMİYLE KOLON BURKULMA ANALİZİ

Kolonlarda, kritik burkulma yükünün belirlenebilmesi için öncelikle kolon burkulma analizi ve burkulma denkleminin kuvvet serileri yöntemiyle çözümü üzerine çalışılmıştır.

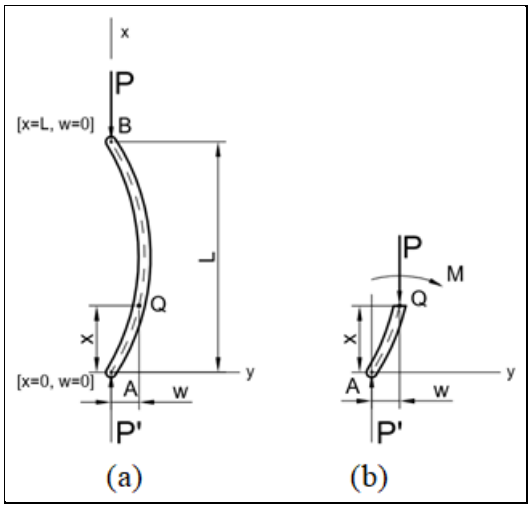
1.1. Kolon Burkulma Analizi

P basınç yükü etkisi altında iki ucu mafsallı, L uzunluğundaki bir kolonun burkulmasını ele alalım. Stabil durumu sona erdiren P_{kr} kritik burkulma yükünü bulalım. P yükünün P_{kr} yükünden büyük olması durumunda burkulma gerçekleşecektir. L kolonun uzunluğudur. Şekil 1.1'de iki ucu mafsallı bir kolonun burkulması verilmiştir.



Şekil 1.1. İki ucu mafsallı bir kolonun burkulma şekli

Kolonun serbest cisim diyagramı ve eksen takımının tanımı Şekil 1.2'de verilmiştir. Şekil değiştirmeye uğramış kolonun yerdeğiştirmesini hesaplamak için, alt uçtan x uzaklığında bulunan keyfi Q noktası seçilmiştir. AQ parçasının serbest cisim diyagramı Şekil 1.2'de çizilmiştir. Burada w, Q noktasının yerdeğiştirmesidir.



Şekil 1.2. (a) İki ucu mafsallı bir kolonun, (b) bir parçasının burkulma anındaki serbest cisim diyagramları

AQ kesitinin serbest cisim diyagramından Q noktasındaki eğilme momenti şu şekilde yazılabilir;

$$M + Pw = 0 \tag{1.1}$$

Eğilme momenti ve sehim arasındaki ilişkiyi hatırlarsak, eğilme momenti, EI eğilme rijitliği ile kolonun Q noktasındaki yerdeğiştirmesinin x'e göre ikinci türevinin çarpımına eşittir [9];

$$M = EI\frac{d^2w}{dx^2} \tag{1. 2}$$

Denge denklemi şu şekilde yeniden yazılabilir;

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{P}{EI}w = 0 \tag{1.3}$$

Bu denklem, sabit katsayılı ikinci dereceden doğrusal diferansiyel denklemdir. ω aşağıdaki gibi tanımlanırsa;

$$\omega^2 = \frac{P}{EI} \tag{1.4}$$

Denklem (1.3)'ün çözümü şu şekildedir;

$$w=A\sin\omega x+B\cos\omega x \tag{1.5}$$

Eğer kolon kesiti sabit kesitli değil de değişken kesitli ise denge denklemi daha karmaşık bir hal alır. EI(x) eğilme rijitliğinin kolon boyunca değiştiğini göstermektedir yani kolonun değişken kesitli olduğunu ifade etmektedir. Bu çalışmada EI(x) doğrusal olarak değişmektedir [11].

$$EI(x)=\alpha(1-bx) \tag{1.6}$$

Değişken kesitli kolonun denge denklemine ulaşabilmek için, Denklem (1.3) yeniden düzenlenir.

$$EI(x)w_{,xx}+Pw=0 \tag{1.7}$$

Denklem (1.7)'nin iki kez türevini alalım.

$$EI(x)_{,x}w_{,xx}+EI(x)w_{,xxx}+Pw_{,x}=0 \tag{1.8}$$

$$EI(x)w_{,xxxx}+2EI(x)_{,x}w_{,xxx}+EI(x)_{,xx}w_{,xx}+Pw_{,xx}=0 \tag{1.9}$$

Denklem (1.9)'i EI(x)'e bölelim, Denklem (1.10).

$$w_{,xxxx}+2\frac{EI(x)_{,x}}{EI(x)}w_{,xxx}+\frac{1}{EI(x)}\left[P+EI(x)_{,xx}\right]w_{,xx}=0 \tag{1.10}$$

Sabit kesitli kolonlarda $EI(x)=EI_0$ olduğundan, Denklem (1.10) Denklem (1.11)'e indirgenebilir.

$$w_{,xxxx}+\frac{P}{EI_0}w_{,xx}=0 \tag{1.11}$$

Denklem (1.10) ve Denklem (1.11)'in kuvvet serileri yöntemiye çözümünün yapılabilmesi için sınır koşullarının bilinmesi gerekir. Farklı mesnet durumları için sınır koşulları değişiklik gösterir. Bu durumlar; mafsallı, ankastre ve serbest şeklinde örneklendirilebilir.

Mafsallı durum için;

1. Yer değiştirme sıfıra eşittir.

$$w = 0 \tag{1.12}$$

2. Moment sıfıra eşittir. Bunun sonucu olarak da, yer değiştirmenin ikinci türevi sıfıra eşittir.

$$w'' = 0 \tag{1.13}$$

Ankastre durum için;

1. Yer değiştirme sıfıra eşittir.

$$w = 0 \tag{1.14}$$

2. Yer değiştirmenin birinci türevi sıfıra eşittir.

$$w' = 0 \tag{1.15}$$

Serbest durum için.

1. Yer değiştirmenin ikinci türevi sıfıra eşittir.

$$w'' = 0 \tag{1.16}$$

1.2. Burkulma Denkleminin Kuvvet Serileri Yöntemiyle Çözümü

Kuvvet Serileri yöntemi, doğrusal diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılır. Bu yöntemle problem çözerken, çözüm bir kuvvet serisiyle gösterilir. Bu çözümün katsayıları sabit veya değişken olabilir.

Denklem (1.10), denge denkleminin çözümü, sabit kesitli elemanlar için elde edilen denge denkleminin çözümünden oldukça zordur. Değişken kesitli elemanlar için çıkarılan denge denkleminin çözümü için sonsuz bir seri çözüm önerilebilir [5].

$$w = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7 + a_8x^8 + a_9x^9 + \ldots \tag{1.17}$$

Denklem (1.10)'da (,x) x'e göre türevi ifade etmektedir. Virgülen sonraki x adedi denklemin x'e göre kaç defa türevi alınması gerektiğini belirtmektedir, örneğin; (,x) denklemin x'e göre birinci türevi demektir.

Ve bu serinin ilgili türevleri şu şekildedir;

$$\frac{dw}{dx} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + 6a_6x^5 + 7a_7x^6 + 8a_8x^7 + \ldots$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + 30a_6x^4 + 42a_7x^5 + 56a_8x^6 + 72a_9x^7 + \ldots$$

$$\frac{d^3w}{dx^3} = 6a_3 + 24a_4x + 60a_5x^2 + 120a_6x^3 + 210a_7x^4 + 336a_8x^5 + 504a_9x^6 + \ldots \quad (1.18)$$

$$\frac{d^4w}{dx^4} = 24a_4 + 120a_5x + 360a_6x^2 + 840a_7x^3 + 1680a_8x^4 + 3024a_9x^5 + 5040a_{10}x^6 + \ldots$$

2. SABİT KESİTLİ KOLONLARIN BURKULMA YÜKLERİNİN KUVVET SERİLERİ YÖNTEMİYLE BELİRLENMESİ

İlk olarak sabit kesitli bir kolonun çözümü, kuvvet serileri yöntemiyle denenmiştir. Bunun için değişken kesitli kolonun denge denkleminden yola çıkılmıştır. Denklem (1.10) dördüncü dereceden bir denklem olduğu için, çözümü dört sınır koşulu gerektirir.

Sabit kesitli kolon için Denklem (1.10) aşağıdaki gibi basitleştirilebilir.

$$w'' + \frac{P}{EI} w = 0 \tag{2.1}$$

Denklem (2.1) İkinci dereceden bir denklem olduğu için, çözümü için iki sınır koşulu yeterlidir.

Özel bir durum olarak sabit kesit göz önüne alındığında EI eğilme rijitliğinin ilgili türevleri sıfıra eşit olacaktır. Bu durum Denklem (1.10)'da uygulandığında, ilgili denklem Denklem (1.11)'e dönüşmüştür.

Yer değiştirme fonksiyonu için Denklem (1.17)'deki gibi bir sonsuz seri önerilmiştir ve serinin ilgili türevleri Denklem (1.18)'de gösterilmiştir. Denklem (1.18), Denklem (1.17)'de yerine yazıldığında Denklem (2.2)'deki eşitlik elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} &24(EI_0)a_4 + 120(EI_0)a_5 x + 360(EI_0)a_6 x^2 + 840(EI_0)a_7 x^3 + 1680(EI_0)a_8 x^4 \\ &+ 3024(EI_0)a_9 x^5 ... \\ &= \\ &-2Pa_2 - 6Pa_3 x - 12Pa_4 x^2 - 20Pa_5 x^3 - 30Pa_6 x^4 - 42Pa_7 x^5 - 56Pa_8 x^6 \\ &- 72Pa_9 x^7 ... \end{aligned} \tag{2.2}$$

Denklem (2.2)'deki eşitliğin sol tarafındaki sabit terimle eşitliğin sağ tarafındaki sabit terim, x'li terimle eşitliğin diğer tarafındaki x'li terim eşitlenmiş ve bu işleme denklemin her iki tarafında yer alan serilerdeki x'in her kuvveti için devam edilip, a_i

değerleri arasında bağıntılar elde edilmiştir. İşlem adımlarının devamında tüm a_i değerleri için tekrarlanıp, denklem a_2 ve a_3 cinsinden yazılmıştır. Burada I_0 kolonun alt ucundaki kesitin atalet momentidir ve bu problem için kolon uzunluğunun her konumunda değeri aynıdır.

$$a_4 = -\frac{1}{12}\frac{P}{(EI_0)}a_2 \tag{2.3}$$

$$a_5 = -\frac{1}{20}\frac{P}{(EI_0)}a_3 \tag{2.4}$$

$$a_6 = \frac{1}{360}\frac{P^2}{(EI_0)^2}a_2 \tag{2.5}$$

$$a_7 = \frac{1}{840}\frac{P^2}{(EI_0)^2}a_3 \tag{2.6}$$

$$a_8 = -\frac{1}{20160}\frac{P^3}{(EI_0)^3}a_2 \tag{2.7}$$

$$a_9 = -\frac{1}{60480}\frac{P^3}{(EI_0)^3}a_3 \tag{2.8}$$

$$a_{10} = \frac{1}{1814400}\frac{P^4}{(EI_0)^4}a_2 \tag{2.9}$$

…

Hesaplanan tüm a_i katsayılarının a_2 ve a_3 cinsinden değerleri Denklem (1.17)'de ilgili yerlere yazıldığında, yerdeğiştirme fonksiyonu a_0, a_1, a_2 ve a_3 cinsinden elde edilmiş olur, Denklem (2.10).

$$w=\left\{\begin{array}{l} a_0+a_1x+a_2\left[\begin{array}{l} x^2-\frac{1}{12}\frac{P}{(EI_0)}x^4+\frac{1}{360}\frac{P^2}{(EI_0)^2}x^6-\frac{1}{20160}\frac{P^3}{(EI_0)^3}x^8 \\ +\frac{1}{1814400}\frac{P^4}{(EI_0)^4}x^{10}-4{,}1754\times10^{-9}\frac{P^5}{(EI_0)^5}x^{12}+\ldots \end{array}\right] \\ +a_3\left[\begin{array}{l} x^3-\frac{1}{20}\frac{P}{(EI_0)}x^5+\frac{1}{840}\frac{P^2}{(EI_0)^2}x^7-\frac{1}{60480}\frac{P^3}{(EI_0)^3}x^9 \\ +\frac{1}{6652800}\frac{P^4}{(EI_0)^4}x^{11}-9{,}6354\times10^{-10}\frac{P^5}{(EI_0)^5}x^{13}+\ldots \end{array}\right] \end{array}\right\} \quad (2.10)$$

2.1. İki Ucu Mafsallı Kolon

2.1.1. Birinci burkulma modu

Seri 14. terime kadar açılmıştır. Bunun nedeni ise her terim açıldığında hata payı hesaplanmış ve hata payının mühendislik açısından sonucu fazla etkilemeyecek kadar terim sayısı baz alınmıştır. Elde edilen çözüme sınır koşulları uygulanmalıdır. İlgili koşulları, basit mesnedin bulunduğu noktalarda, yer değiştirmenin ve momentin olmaması durumunun matematiksel ifadeleridir;

x=0 ve x=L iken Denklem (1.12) ve (1.13) ‘deki sınır koşulları uygulamıştır.

Bu bilgiler doğrultusunda sınır koşulların Denklem (2.10)’a sınır koşullarının uygulanma adımları aşağıdaki gibidir.

$$w(0)=\left\{\begin{array}{l} a_0+a_1 0+a_2\left[\begin{array}{l} 0^2-\frac{1}{12}\frac{P}{(EI_0)}0^4+\frac{1}{360}\frac{P^2}{(EI_0)^2}0^6-\frac{1}{20160}\frac{P^3}{(EI_0)^3}0^8 \\ +\frac{1}{1814400}\frac{P^4}{(EI_0)^4}0^{10}-4{,}1754\times10^{-9}\frac{P^5}{(EI_0)^5}0^{12} \end{array}\right] \\ +a_3\left[\begin{array}{l} 0^3-\frac{1}{20}\frac{P}{(EI_0)}0^5+\frac{1}{840}\frac{P^2}{(EI_0)^2}0^7-\frac{1}{60480}\frac{P^3}{(EI_0)^3}0^9 \\ +\frac{1}{6652800}\frac{P^4}{(EI_0)^4}0^{11}-9{,}6354\times10^{-10}\frac{P^5}{(EI_0)^5}0^{13} \end{array}\right] \end{array}\right\}=0 \quad (2.11)$$

Denklem (2.11)’in sonucunda yani seride x=0 uygulandığında ve seri sıfıra eşitlendiğinde Denklem (2.12) bulunur.

$$a_0=0 \quad (2.12)$$

$$w(L)=\left\{\begin{array}{l} a_1 L + a_2\left[\begin{array}{l} L^2-\frac{1}{12}\frac{P}{(EI_0)}L^4+\frac{1}{360}\frac{P^2}{(EI_0)^2}L^6-\frac{1}{20160}\frac{P^3}{(EI_0)^3}L^8 \\ +\frac{1}{1814400}\frac{P^4}{(EI_0)^4}L^{10}-4{,}1754\times10^{-9}\frac{P^5}{(EI_0)^5}L^{12}+\ldots \end{array}\right] \\ +a_3\left[\begin{array}{l} L^3-\frac{1}{20}\frac{P}{(EI_0)}L^5+\frac{1}{840}\frac{P^2}{(EI_0)^2}L^7-\frac{1}{60480}\frac{P^3}{(EI_0)^3}L^9 \\ +\frac{1}{6652800}\frac{P^4}{(EI_0)^4}L^{11}-9{,}6354\times10^{-10}\frac{P^5}{(EI_0)^5}L^{13}+\ldots \end{array}\right] \end{array}\right\}=0 \quad (2.13)$$

Denklem (2.10)'nun ilgili birinci ve ikinci türevleri aşağıdadır. Üçüncü ve dördüncü sınır koşullarının uygulamasında Denklem (2.15) kullanılmıştır.

$$w'=\left\{\begin{array}{l} a_1 + a_2\left[\begin{array}{l} 2x-\frac{1}{3}\frac{P}{(EI_0)}x^3+\frac{1}{60}\frac{P^2}{(EI_0)^2}x^5-\frac{1}{2520}\frac{P^3}{(EI_0)^3}x^7 \\ +\frac{1}{181440}\frac{P^4}{(EI_0)^4}x^9-5{,}0105\times10^{-8}\frac{P^5}{(EI_0)^5}x^{11}+\ldots \end{array}\right] \\ +a_3\left[\begin{array}{l} 3x^2-\frac{1}{4}\frac{P}{(EI_0)}x^4+\frac{1}{120}\frac{P^2}{(EI_0)^2}x^6-\frac{1}{6720}\frac{P^3}{(EI_0)^3}x^8 \\ +\frac{1}{604800}\frac{P^4}{(EI_0)^4}x^{10}-1{,}2526\times10^{-8}\frac{P^5}{(EI_0)^5}x^{12}+\ldots \end{array}\right] \end{array}\right\} \quad (2.14)$$

$$w''=\left\{\begin{array}{l} a_2\left[\begin{array}{l} 2-\frac{P}{(EI_0)}x^2+\frac{1}{12}\frac{P^2}{(EI_0)^2}x^4-\frac{1}{360}\frac{P^3}{(EI_0)^3}x^6+\frac{1}{20160}\frac{P^4}{(EI_0)^4}x^8 \\ -5{,}5116\times10^{-7}\frac{P^5}{(EI_0)^5}x^{10}+\ldots \end{array}\right] \\ +a_3\left[\begin{array}{l} 6x-\frac{P}{(EI_0)}x^3+\frac{1}{20}\frac{P^2}{(EI_0)^2}x^5-\frac{1}{840}\frac{P^3}{(EI_0)^3}x^7 \\ +\frac{1}{60480}\frac{P^4}{(EI_0)^4}x^9-1{,}5031\times10^{-7}\frac{P^5}{(EI_0)^5}x^{11}+\ldots \end{array}\right] \end{array}\right\} \quad (2.15)$$

Denklem (2.16)'da serinin ikinci türevinde x yerine sıfır yazıldığında $2a_2$ değeri sıfıra eşit olmaktadır, bu ifadeden a_2 değerinin sıfır olduğu görülür.

$$w''(0)=\left\{\begin{array}{l} a_2\left[\begin{array}{l} 2-\dfrac{P}{(EI_0)}0^2+\dfrac{1}{12}\dfrac{P^2}{(EI_0)^2}0^4-\dfrac{1}{360}\dfrac{P^3}{(EI_0)^3}0^6 \\ +\dfrac{1}{20160}\dfrac{P^4}{(EI_0)^4}0^8-5{,}5116\times10^{-7}\dfrac{P^5}{(EI_0)^5}0^{10} \end{array}\right] \\ +a_3\left[\begin{array}{l} 6\times0-\dfrac{P}{(EI_0)}0^3+\dfrac{1}{20}\dfrac{P^2}{(EI_0)^2}0^5-\dfrac{1}{840}\dfrac{P^3}{(EI_0)^3}0^7 \\ +\dfrac{1}{60480}\dfrac{P^4}{(EI_0)^4}0^9-1{,}5031\times10^{-7}\dfrac{P^5}{(EI_0)^5}0^{11} \end{array}\right] \end{array}\right\}=0 \tag{2.16}$$

$$a_2=0 \tag{2.17}$$

Ve önerilen seri yeniden düzenlenmiştir, Denklem (2.18).

$$w=a_1x+a_3\left[\begin{array}{l} x^3-\dfrac{1}{20}\dfrac{P}{(EI_0)}x^5+\dfrac{1}{840}\dfrac{P^2}{(EI_0)^2}x^7-\dfrac{1}{60480}\dfrac{P^3}{(EI_0)^3}x^9 \\ +\dfrac{1}{6652800}\dfrac{P^4}{(EI_0)^4}x^{11}-9{,}6354\times10^{-10}\dfrac{P^5}{(EI_0)^5}x^{13} \end{array}\right] \tag{2.18}$$

$$w''(L)=a_3\left[\begin{array}{l} 6L-\dfrac{P}{(EI_0)}L^3+\dfrac{1}{20}\dfrac{P^2}{(EI_0)^2}L^5-\dfrac{1}{840}\dfrac{P^3}{(EI_0)^3}L^7 \\ +\dfrac{1}{60480}\dfrac{P^4}{(EI_0)^4}L^9-1{,}5031\times10^{-7}\dfrac{P^5}{(EI_0)^5}L^{11} \end{array}\right]=0 \tag{2.19}$$

Denklem (2.19), L parantezine alınıp yeniden düzenlenmiştir.

$$a_3L\left[\begin{array}{l} 6-\dfrac{P}{(EI_0)}L^2+\dfrac{1}{20}\dfrac{P^2}{(EI_0)^2}L^4-\dfrac{1}{840}\dfrac{P^3}{(EI_0)^3}L^6+\dfrac{1}{60480}\dfrac{P^4}{(EI_0)^4}L^8 \\ -1{,}5031\times10^{-7}\dfrac{P^5}{(EI_0)^5}L^{10} \end{array}\right]=0 \tag{2.20}$$

Düzenlenmiş Denklem (2.20)'de parantez içi sıfıra eşitlenmiştir, Denklem (2.21).

$$\left[\begin{array}{l} 6-\dfrac{P}{(EI_0)}L^2+\dfrac{1}{20}\dfrac{P^2}{(EI_0)^2}L^4-\dfrac{1}{840}\dfrac{P^3}{(EI_0)^3}L^6+\dfrac{1}{60480}\dfrac{P^4}{(EI_0)^4}L^8 \\ -1{,}5031\times10^{-7}\dfrac{P^5}{(EI_0)^5}L^{10} \end{array}\right]=0 \tag{2.21}$$

$$\gamma = \frac{PL^2}{(EI_0)} \tag{2.22}$$

olarak tanımlanırsa, Denklem (2.22), Denklem (2.21)'de yerine yazılarak, Denklem (2.23) elde edilmiştir.

$$6 - \gamma + 0{,}05\gamma^2 - 1{,}1905 \times 10^{-3}\gamma^3 + 1{,}6534 \times 10^{-5}\gamma^4 - 1{,}5031 \times 10^{-7}\gamma^5 ... = 0 \tag{2.23}$$

Denklem (2.23) Microsoft Mathematics programında yazılarak çözdürülmüştür. İlk beş terimle oldukça hızlı yakınsadığı görülmüştür ve aşağıdaki değer bulunmuştur, Denklem (2.24).

$$\gamma = 9{,}8696 \tag{2.24}$$

Bulunan değerler Denklem (2.22)'de yazılarak, Denklem (2.25) elde edilmiştir. İki ucu mafsallı sabit kesitli bir kolonun kuvvet serileri yöntemiyle analizi sonucunda bulunan P yükü, Euler formülündeki kritik P yüküne neredeyse eşit olarak bulunmuştur, Denklem (2.25). Denklem (2.23) daha fazla terim içerecek şekilde açıldığında, gerçek sonuca daha fazla yaklaşılacağı öngörülebilir.

$$P = 9{,}8696\frac{EI_0}{L^2} \cong P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{2.25}$$

Birinci burkulma modu için hata oranı; binde 0,0004 olarak hesaplanmıştır. Terim sayısı hata oranına göre belirlenmiştir. Terim sayısı birer birer artırılıp hata oranı her aşamada göz önüne alınmıştır.

2.1.2. İkinci ve üçüncü burkulma modları

Kolonun burkulma yükü ilk modda elde edilmiş, dolayısıyla daha az sayıda terim açıldığında sonuca ulaşılabilmiştir; ama daha ileri modlar söz konusu olduğunda, daha duyarlı sonuçlar elde edebilmek için serinin yüksek terimlerde açılması gerekmiştir. Euler kolonunun ileri modlarını bulabilmek için seri 44. terime kadar

açılmıştır. Terim sayısı belirlenirken hata payından faydalanılmıştır. a_2=0 olduğu için seri a_3'e bağlı yani tek sayılı değerler açılmıştır. Bu değerler, Denklem (2.19)'a eklenmiştir. Ve serinin çözümünde aynı işlem adımları tekrar edilmiştir.

$$a_{15} = 4{,}5883\times10^{-12}\,\frac{P^6}{(EI_0)^6}\,a_3 \tag{2.26}$$

$$a_{17} = -1{,}6869\times10^{-14}\,\frac{P^7}{(EI_0)^7}\,a_3 \tag{2.27}$$

$$a_{19} = 4{,}9325\times10^{-17}\,\frac{P^8}{(EI_0)^8}\,a_3 \tag{2.28}$$

$$a_{21} = -1{,}1744\times10^{-19}\,\frac{P^9}{(EI_0)^9}\,a_3 \tag{2.29}$$

$$a_{23} = 2{,}3209\times10^{-22}\,\frac{P^{10}}{(EI_0)^{10}}\,a_3 \tag{2.30}$$

$$a_{25} = -3{,}8682\times10^{-25}\,\frac{P^{11}}{(EI_0)^{11}}\,a_3 \tag{2.31}$$

$$a_{27} = 5{,}5103\times10^{-28}\,\frac{P^{12}}{(EI_0)^{12}}\,a_3 \tag{2.32}$$

$$a_{29} = -6{,}7861\times10^{-31}\,\frac{P^{13}}{(EI_0)^{13}}\,a_3 \tag{2.33}$$

$$a_{31} = 7{,}2969\times10^{-34}\,\frac{P^{14}}{(EI_0)^{14}}\,a_3 \tag{2.34}$$

$$a_{33} = -6{,}9099\times10^{-37}\,\frac{P^{15}}{(EI_0)^{15}}\,a_3 \tag{2.35}$$

$$a_{35} = 5{,}8066\times10^{-40}\,\frac{P^{16}}{(EI_0)^{16}}\,a_3 \tag{2.36}$$

$$a_{37} = -4{,}3593\times10^{-43}\frac{P^{17}}{(EI_0)^{17}}a_3 \tag{2.37}$$

$$a_{39} = 2{,}9415\times10^{-46}\frac{P^{18}}{(EI_0)^{18}}a_3 \tag{2.38}$$

$$a_{41} = -1{,}7936\times10^{-49}\frac{P^{19}}{(EI_0)^{19}}a_3 \tag{2.39}$$

$$a_{43} = 9{,}9313\times10^{-53}\frac{P^{20}}{(EI_0)^{20}}a_3 \tag{2.40}$$

Denklem (2.10) tekrar düzenlenmiştir ve Denklem (2.41) olarak aşağıda belirtilmiştir.

$$\begin{aligned} w = a_1x + a_3\Bigg[& x^3 - \frac{1}{20}\frac{P}{(EI_0)}x^5 + \frac{1}{840}\frac{P^2}{(EI_0)^2}x^7 - \frac{1}{60480}\frac{P^3}{(EI_0)^3}x^9 \\ & + \frac{1}{6652800}\frac{P^4}{(EI_0)^4}x^{11} - 9{,}6354\times10^{-10}\frac{P^5}{(EI_0)^5}x^{13} \\ & + 4{,}5883\times10^{-12}\frac{P^6}{(EI_0)^6}x^{15} - 1{,}6869\times10^{-14}\frac{P^7}{(EI_0)^7}x^{17} \\ & + 4{,}9325\times10^{-17}\frac{P^8}{(EI_0)^8}x^{19} - 1{,}1744\times10^{-19}\frac{P^9}{(EI_0)^9}x^{21} \\ & + 2{,}3209\times10^{-22}\frac{P^{10}}{(EI_0)^{10}}x^{23} - 3{,}8682\times10^{-25}\frac{P^{11}}{(EI_0)^{11}}x^{25} \\ & + 5{,}5103\times10^{-28}\frac{P^{12}}{(EI_0)^{12}}x^{27} - 6{,}7861\times10^{-31}\frac{P^{13}}{(EI_0)^{13}}x^{29} \\ & + 7{,}2969\times10^{-34}\frac{P^{14}}{(EI_0)^{14}}x^{31} - 6{,}9099\times10^{-37}\frac{P^{15}}{(EI_0)^{15}}x^{33} \\ & + 5{,}8066\times10^{-40}\frac{P^{16}}{(EI_0)^{16}}x^{35} - 4{,}3593\times10^{-43}\frac{P^{17}}{(EI_0)^{17}}x^{37} \\ & + 2{,}9415\times10^{-46}\frac{P^{18}}{(EI_0)^{18}}x^{39} - 1{,}7936\times10^{-49}\frac{P^{19}}{(EI_0)^{19}}x^{41} \\ & + 9{,}9313\times10^{-53}\frac{P^{20}}{(EI_0)^{20}}x^{43} \Bigg] \end{aligned} \tag{2.41}$$

Denklem (2.41)'in ilgili birinci ve ikinci türevleri alınmıştır, Denklem (2.42) ve Denklem (2.43). Daha sonra x'in L'ye eşit olduğu durumda denklemin ikinci türevinin sıfıra eşit olduğu sınır koşulu uygulanmıştır, Denklem (2.44).

$$
\begin{aligned}
w' = a_1 + a_3 \Bigg[& 3x^2 - \frac{1}{4}\frac{P}{(EI_0)}x^4 + \frac{1}{120}\frac{P^2}{(EI_0)^2}x^6 - \frac{1}{6720}\frac{P^3}{(EI_0)^3}x^8 \\
& + \frac{1}{604800}\frac{P^4}{(EI_0)^4}x^{10} - 1{,}2526\times10^{-8}\frac{P^5}{(EI_0)^5}x^{12} \\
& + 6{,}8825\times10^{-11}\frac{P^6}{(EI_0)^6}x^{14} - 2{,}8677\times10^{-13}\frac{P^7}{(EI_0)^7}x^{16} \\
& + 9{,}3718\times10^{-16}\frac{P^8}{(EI_0)^8}x^{18} - 2{,}4662\times10^{-18}\frac{P^9}{(EI_0)^9}x^{20} \\
& + 5{,}3381\times10^{-21}\frac{P^{10}}{(EI_0)^{10}}x^{22} - 9{,}6705\times10^{-24}\frac{P^{11}}{(EI_0)^{11}}x^{24} \\
& + 1{,}4878\times10^{-26}\frac{P^{12}}{(EI_0)^{12}}x^{26} - 1{,}9680\times10^{-29}\frac{P^{13}}{(EI_0)^{13}}x^{28} \\
& + 2{,}2620\times10^{-32}\frac{P^{14}}{(EI_0)^{14}}x^{30} - 2{,}2803\times10^{-35}\frac{P^{15}}{(EI_0)^{15}}x^{32} \\
& + 2{,}0323\times10^{-38}\frac{P^{16}}{(EI_0)^{16}}x^{34} - 1{,}6129\times10^{-41}\frac{P^{17}}{(EI_0)^{17}}x^{36} \\
& + 1{,}1472\times10^{-44}\frac{P^{18}}{(EI_0)^{18}}x^{38} - 7{,}3538\times10^{-48}\frac{P^{19}}{(EI_0)^{19}}x^{40} \\
& + 4{,}2705\times10^{-51}\frac{P^{20}}{(EI_0)^{20}}x^{42} \Bigg]
\end{aligned}
\tag{2.42}
$$

$$w'' = a_3 \left[\begin{array}{l} 6x - \frac{P}{(EI_0)} x^3 + \frac{1}{20} \frac{P^2}{(EI_0)^2} x^5 - \frac{1}{840} \frac{P^3}{(EI_0)^3} x^7 + \frac{1}{60480} \frac{P^4}{(EI_0)^4} x^9 \\ -1{,}5031 \times 10^{-7} \frac{P^5}{(EI_0)^5} x^{11} + 9{,}6355 \times 10^{-10} \frac{P^6}{(EI_0)^6} x^{13} \\ -4{,}5883 \times 10^{-12} \frac{P^7}{(EI_0)^7} x^{15} + 1{,}6869 \times 10^{-14} \frac{P^8}{(EI_0)^8} x^{17} \\ -4{,}9324 \times 10^{-17} \frac{P^9}{(EI_0)^9} x^{19} + 1{,}1744 \times 10^{-19} \frac{P^{10}}{(EI_0)^{10}} x^{21} \\ -2{,}3209 \times 10^{-22} \frac{P^{11}}{(EI_0)^{11}} x^{23} + 3{,}8683 \times 10^{-25} \frac{P^{12}}{(EI_0)^{12}} x^{25} \\ -5{,}5104 \times 10^{-28} \frac{P^{13}}{(EI_0)^{13}} x^{27} + 6{,}786 \times 10^{-31} \frac{P^{14}}{(EI_0)^{14}} x^{29} \\ -7{,}2970 \times 10^{-34} \frac{P^{15}}{(EI_0)^{15}} x^{31} + 6{,}9098 \times 10^{-37} \frac{P^{16}}{(EI_0)^{16}} x^{33} \\ -5{,}8064 \times 10^{-40} \frac{P^{17}}{(EI_0)^{17}} x^{35} + 4{,}3594 \times 10^{-43} \frac{P^{18}}{(EI_0)^{18}} x^{37} \\ -2{,}9415 \times 10^{-46} \frac{P^{19}}{(EI_0)^{19}} x^{39} + 1{,}7936 \times 10^{-49} \frac{P^{20}}{(EI_0)^{20}} x^{41} \end{array} \right] \quad (2.43)$$

$$w''(L)=a_3\left[\begin{array}{l}6L-\frac{PL^3}{(EI_0)}+\frac{1}{20}\frac{P^2L^5}{(EI_0)^2}-\frac{1}{840}\frac{P^3L^7}{(EI_0)^3}+\frac{1}{60480}\frac{P^4L^9}{(EI_0)^4}\\ -1{,}5031\times10^{-7}\frac{P^5L^{11}}{(EI_0)^5}+9{,}6355\times10^{-10}\frac{P^6L^{13}}{(EI_0)^6}\\ -4{,}5883\times10^{-12}\frac{P^7L^{15}}{(EI_0)^7}+1{,}6869\times10^{-14}\frac{P^8L^{17}}{(EI_0)^8}\\ -4{,}9324\times10^{-17}\frac{P^9L^{19}}{(EI_0)^9}+1{,}1744\times10^{-19}\frac{P^{10}L^{21}}{(EI_0)^{10}}\\ -2{,}3209\times10^{-22}\frac{P^{11}L^{23}}{(EI_0)^{11}}+3{,}8683\times10^{-25}\frac{P^{12}L^{25}}{(EI_0)^{12}}\\ -5{,}5104\times10^{-28}\frac{P^{13}L^{27}}{(EI_0)^{13}}+6{,}786\times10^{-31}\frac{P^{14}L^{29}}{(EI_0)^{14}}\\ -7{,}2970\times10^{-34}\frac{P^{15}L^{31}}{(EI_0)^{15}}+6{,}9098\times10^{-37}\frac{P^{16}L^{33}}{(EI_0)^{16}}\\ -5{,}8064\times10^{-40}\frac{P^{17}L^{35}}{(EI_0)^{17}}+4{,}3594\times10^{-43}\frac{P^{18}L^{37}}{(EI_0)^{18}}\\ -2{,}9415\times10^{-46}\frac{P^{19}L^{39}}{(EI_0)^{19}}+1{,}7936\times10^{-49}\frac{P^{20}L^{41}}{(EI_0)^{20}}\end{array}\right]=0 \tag{2.44}$$

Denklem (2.44), L parantezine alınıp yeniden düzenlenmiştir, Denklem (2.45).

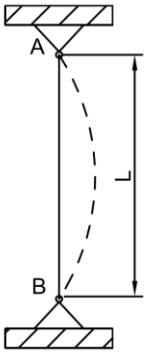
$$a_3L\left[\begin{array}{l}6-\frac{PL^2}{(EI_0)}+\frac{1}{20}\frac{P^2L^4}{(EI_0)^2}-\frac{1}{840}\frac{P^3L^6}{(EI_0)^3}+\frac{1}{60480}\frac{P^4L^8}{(EI_0)^4}\\ -1{,}5031\times10^{-7}\frac{P^5L^{10}}{(EI_0)^5}+9{,}6355\times10^{-10}\frac{P^6L^{12}}{(EI_0)^6}-4{,}5883\times10^{-12}\frac{P^7L^{14}}{(EI_0)^7}\\ +1{,}6869\times10^{-14}\frac{P^8L^{16}}{(EI_0)^8}-4{,}9324\times10^{-17}\frac{P^9L^{18}}{(EI_0)^9}+1{,}1744\times10^{-19}\frac{P^{10}L^{20}}{(EI_0)^{10}}\\ -2{,}3209\times10^{-22}\frac{P^{11}L^{22}}{(EI_0)^{11}}+3{,}8683\times10^{-25}\frac{P^{12}L^{24}}{(EI_0)^{12}}-5{,}5104\times10^{-28}\frac{P^{13}L^{26}}{(EI_0)^{13}}\\ +6{,}786\times10^{-31}\frac{P^{14}L^{28}}{(EI_0)^{14}}-7{,}2970\times10^{-34}\frac{P^{15}L^{30}}{(EI_0)^{15}}+6{,}9098\times10^{-37}\frac{P^{16}L^{32}}{(EI_0)^{16}}\\ -5{,}8064\times10^{-40}\frac{P^{17}L^{34}}{(EI_0)^{17}}+4{,}3594\times10^{-43}\frac{P^{18}L^{36}}{(EI_0)^{18}}\\ -2{,}9415\times10^{-46}\frac{P^{19}L^{38}}{(EI_0)^{19}}+1{,}7936\times10^{-49}\frac{P^{20}L^{40}}{(EI_0)^{20}}\end{array}\right]=0 \tag{2.45}$$

Düzenlenmiş Denklem (2.45)'de parantez içi sıfıra eşitlenmiştir, Denklem (2.46).

$$\left[\begin{array}{l} 6-\dfrac{PL^2}{(EI_0)}+\dfrac{1}{20}\dfrac{P^2L^4}{(EI_0)^2}-\dfrac{1}{840}\dfrac{P^3L^6}{(EI_0)^3}+\dfrac{1}{60480}\dfrac{P^4L^8}{(EI_0)^4} \\ -1{,}5031\times10^{-7}\dfrac{P^5L^{10}}{(EI_0)^5}+9{,}6355\times10^{-10}\dfrac{P^6L^{12}}{(EI_0)^6}-4{,}5883\times10^{-12}\dfrac{P^7L^{14}}{(EI_0)^7} \\ +1{,}6869\times10^{-14}\dfrac{P^8L^{16}}{(EI_0)^8}-4{,}9324\times10^{-17}\dfrac{P^9L^{18}}{(EI_0)^9}+1{,}1744\times10^{-19}\dfrac{P^{10}L^{20}}{(EI_0)^{10}} \\ -2{,}3209\times10^{-22}\dfrac{P^{11}L^{22}}{(EI_0)^{11}}+3{,}8683\times10^{-25}\dfrac{P^{12}L^{24}}{(EI_0)^{12}}-5{,}5104\times10^{-28}\dfrac{P^{13}L^{26}}{(EI_0)^{13}} \\ +6{,}786\times10^{-31}\dfrac{P^{14}L^{28}}{(EI_0)^{14}}-7{,}2970\times10^{-34}\dfrac{P^{15}L^{30}}{(EI_0)^{15}}+6{,}9098\times10^{-37}\dfrac{P^{16}L^{32}}{(EI_0)^{16}} \\ -5{,}8064\times10^{-40}\dfrac{P^{17}L^{34}}{(EI_0)^{17}}+4{,}3594\times10^{-43}\dfrac{P^{18}L^{36}}{(EI_0)^{18}}-2{,}9415\times10^{-46}\dfrac{P^{19}L^{38}}{(EI_0)^{19}} \\ +1{,}7936\times10^{-49}\dfrac{P^{20}L^{40}}{(EI_0)^{20}} \end{array}\right]=0 \quad (2.46)$$

Daha önce tanımlamış olduğumuz Denklem (2.24), Denklem (2.46)'de yerine yazılarak, Denklem (2.47) elde edilmiştir ve Denklem (2.47) Microsoft Mathematics programında yazılıp çözdürülmüştür. Burkulma modları bulunmuştur ve Euler formülünde olması gereken burkulma modlarıyla karşılaştırılmıştır [1].

$$\begin{array}{l} 6-\gamma+0{,}05\gamma^2-1{,}1905\times10^{-3}\gamma^3+1{,}6534\times10^{-5}\gamma^4-1{,}5031\times10^{-7}\gamma^5 \\ +9{,}6355\times10^{-10}\gamma^6-4{,}5883\times10^{-12}\gamma^7+1{,}6869\times10^{-14}\gamma^8-4{,}9324\times10^{-17}\gamma^9 \\ +1{,}1744\times10^{-19}\gamma^{10}-2{,}3209\times10^{-22}\gamma^{11}+3{,}8683\times10^{-25}\gamma^{12}-5{,}5104\times10^{-28}\gamma^{13} \\ +6{,}786\times10^{-31}\gamma^{14}-7{,}2970\times10^{-34}\gamma^{15}+6{,}9098\times10^{-37}\gamma^{16}-5{,}8064\times10^{-40}\gamma^{17} \\ +4{,}3594\times10^{-43}\gamma^{18}-2{,}9415\times10^{-46}\gamma^{19}+1{,}7936\times10^{-49}\gamma^{20}=0 \end{array} \quad (2.47)$$



Şekil 2.1. İki ucu mafsallı kolonun birinci burkulma modu

Bulunan birinci burkulma modu;

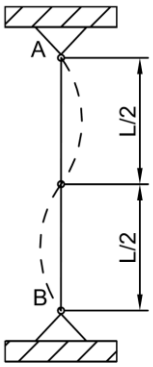
$$P = 9{,}8696\frac{EI_0}{L^2} \tag{2.48}$$

Euler'in birinci burkulma modu;

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{2.49}$$

Hata oranı;

$$‰\, 4{,}4592 \times 10^{-4} \tag{2.50}$$



Şekil 2.2. İki ucu mafsallı kolonun ikinci burkulma modu

Bulunan ikinci burkulma modu;

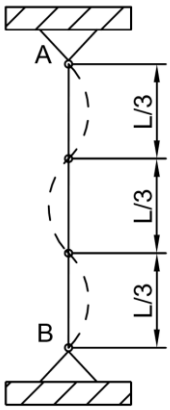
$$P = 39{,}4754\frac{EI_0}{L^2} \tag{2.51}$$

Euler'in ikinci burkulma modu;

$$P_{kr} = 4\frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{2.52}$$

Hata oranı;

$$‰\,0{,}07644 \tag{2.53}$$



Şekil 2.3. İki ucu mafsallı kolonun üçüncü burkulma modu

Bulunan üçüncü burkulma modu;

$$P = 89{,}1147\frac{EI_0}{L^2} \tag{2.54}$$

Euler'in üçüncü burkulma modu;

$$P_{kr} = 9\frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{2.55}$$

Hata oranı;

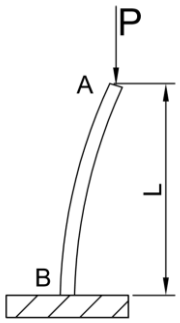
$$‰ 3{,}2452 \tag{2.56}$$

İki ucu mafsallı kolon için ilk üç mod (Şekil 2.1.), (Şekil 2.2.), (Şekil 2.3.) ve karşılık gelen kritik burkulma yükleri Denklem (2.49), Denklem (2.52), Denklem (2.55)'te verilmiştir. Bu değerler, yarım sinüs dalgalarının uzunluklarından elde edilmiştir. Kuvvet serileri yöntemindeki polinom denklemlerin çözümünden elde edilen kritik burkulma yük değerleri Denklem (2.48), Denklem (2.51), Denklem (2.54)'de verilmiştir. Kritik burkulma yükleri ile sözü edilen yöntemle bulunan burkulma yüklerinin birbirine çok yakın olduğu verilen hata oranlarından Denklem (2.50), Denklem (2.53), Denklem (2.56)'de görülmüştür.

2.2. Bir Ucu Ankastre Bir Ucu Serbest Kolon

2.2.1. Birinci burkulma modu

İki ucu mafsallı sabit kesitli kolonda uygulanan işlem adımları, bir ucu ankastre bir ucu serbest sabit kesitli kolonda tekrarlanmıştır.



Şekil 2.4. Bir ucu ankastre bir ucu serbest kolon

Aynı şekilde Denklem (1.11) baz alınarak çalışmaya başlanmış ve önerdiğimiz kuvvet serileri metodu ile çözümün uygulama adımları yinelenmiştir. Seri de hata oranı göz önüne alınıp 11 terim açılmıştır.

Sonrasında düzenlenen seriye sınır koşulları uygulanmıştır. Bu sınır koşulları, ankastre mesnedin getirdiği fiziksel koşullardır ve ankastre mesnedin bulunduğu

noktada, yer değiştirmenin ve eğimin olmaması durumunun matematiksel ifadesidir. x=0 ve x=L iken Denklem (1.14), (1.15) ve (1.16) 'daki sınır koşulları uygulamıştır. Denklem (2.57)'nin işlemi sonucunda x=0 değeri seride yerine yazılıp, seri sıfıra eşitlendiğinde, a_0'ın sıfır olduğu görülmüştür.

$$w(0)=\left\{\begin{array}{l} a_0+a_1 0+a_2\left[\begin{array}{l} 0^2-\frac{1}{12}\frac{P}{(EI_0)}0^4+\frac{1}{360}\frac{P^2}{(EI_0)^2}0^6 \\ -\frac{1}{20160}\frac{P^3}{(EI_0)^3}0^8+\frac{1}{1814400}\frac{P^4}{(EI_0)^4}0^{10} \end{array}\right] \\ +a_3\left[0^3-\frac{1}{20}\frac{P}{(EI_0)}0^5+\frac{1}{840}\frac{P^2}{(EI_0)^2}0^7-\frac{1}{60480}\frac{P^3}{(EI_0)^3}0^9\right] \end{array}\right\}=0 \qquad (2.57)$$

$$a_0=0 \qquad (2.58)$$

$$w'=\left\{\begin{array}{l} a_1+a_2\left[\begin{array}{l} 2x-\frac{1}{3}\frac{P}{(EI_0)}x^3+\frac{1}{60}\frac{P^2}{(EI_0)^2}x^5-\frac{1}{2520}\frac{P^3}{(EI_0)^3}x^7 \\ +\frac{1}{181440}\frac{P^4}{(EI_0)^4}x^9 \end{array}\right] \\ +a_3\left[3x^2-\frac{1}{4}\frac{P}{(EI_0)}x^4+\frac{1}{120}\frac{P^2}{(EI_0)^2}x^6-\frac{1}{6720}\frac{P^3}{(EI_0)^3}x^8\right] \end{array}\right\}=0 \qquad (2.59)$$

Denklem (2.59)'da ikinci sınır koşulu uygulandığında, Denklem (2.60)'ın çözümünden a_1=0 olarak bulunduğu aşağıda görülmektedir, Denklem (2.61).

$$w'=\left\{\begin{array}{l} a_1+a_2\left[\begin{array}{l} 2.0-\frac{1}{3}\frac{P}{(EI_0)}0^3+\frac{1}{60}\frac{P^2}{(EI_0)^2}0^5-\frac{1}{2520}\frac{P^3}{(EI_0)^3}0^7 \\ +\frac{1}{181440}\frac{P^4}{(EI_0)^4}0^9 \end{array}\right] \\ +a_3\left[3.0^2-\frac{1}{4}\frac{P}{(EI_0)}0^4+\frac{1}{120}\frac{P^2}{(EI_0)^2}0^6-\frac{1}{6720}\frac{P^3}{(EI_0)^3}0^8\right] \end{array}\right\}=0 \qquad (2.60)$$

$$a_1=0 \qquad (2.61)$$

$$w'' = \left\{ \begin{array}{l} a_2\left[2 - \dfrac{P}{(EI_0)}x^2 + \dfrac{1}{12}\dfrac{P^2}{(EI_0)^2}x^4 - \dfrac{1}{360}\dfrac{P^3}{(EI_0)^3}x^6 + \dfrac{1}{20160}\dfrac{P^4}{(EI_0)^4}x^8 \right] \\ + a_3\left[6x - \dfrac{P}{(EI_0)}x^3 + \dfrac{1}{20}\dfrac{P^2}{(EI_0)^2}x^5 - \dfrac{1}{840}\dfrac{P^3}{(EI_0)^3}x^7 \right] \end{array} \right\} = 0 \quad (2.62)$$

Üçüncü sınır koşulu Denklem (2.62)'de uygulanmıştır, aşağıdaki Denklem (2.63) elde edilmiştir.

$$w''(L) = \left\{ \begin{array}{l} a_2\left[\begin{array}{l} 2 - \dfrac{P}{(EI_0)}L^2 + \dfrac{1}{12}\dfrac{P^2}{(EI_0)^2}L^4 - \dfrac{1}{360}\dfrac{P^3}{(EI_0)^3}L^6 \\ + \dfrac{1}{20160}\dfrac{P^4}{(EI_0)^4}L^8 \end{array} \right] \\ + a_3\left[6L - \dfrac{P}{(EI_0)}L^3 + \dfrac{1}{20}\dfrac{P^2}{(EI_0)^2}L^5 - \dfrac{1}{840}\dfrac{P^3}{(EI_0)^3}L^7 \right] \end{array} \right\} = 0 \quad (2.63)$$

Denklem (2.63)'te a_3, a_2 cinsinden yazılacak şekilde düzenlenmiştir, Denklem (2.64).

$$a_3 = -\frac{a_2}{L}\left\{ \frac{\left[2 - \dfrac{PL^2}{(EI_0)} + \dfrac{1}{12}\dfrac{(PL^2)^2}{(EI_0)^2} - \dfrac{1}{360}\dfrac{(PL^2)^3}{(EI_0)^3} + \dfrac{1}{20160}\dfrac{(PL^2)^4}{(EI_0)^4} \right]}{\left[6 - \dfrac{PL^2}{(EI_0)} + \dfrac{1}{20}\dfrac{(PL^2)^2}{(EI_0)^2} - \dfrac{1}{840}\dfrac{(PL^2)^3}{(EI_0)^3} \right]} \right\} \quad (2.64)$$

Denklem (2.65)'te k olarak tanımlanan bağıntı verilmiştir;

$$k = \left\{ \frac{\left[2 - \dfrac{PL^2}{(EI_0)} + \dfrac{1}{12}\dfrac{(PL^2)^2}{(EI_0)^2} - \dfrac{1}{360}\dfrac{(PL^2)^3}{(EI_0)^3} + \dfrac{1}{20160}\dfrac{(PL^2)^4}{(EI_0)^4} - \ldots \right]}{\left[6 - \dfrac{PL^2}{(EI_0)} + \dfrac{1}{20}\dfrac{(PL^2)^2}{(EI_0)^2} - \dfrac{1}{840}\dfrac{(PL^2)^3}{(EI_0)^3} + \ldots \right]} \right\} \quad (2.65)$$

Ve Denklem (2.64) yeniden düzenlenmiştir, denklem (2.66).

$$a_3 = -\frac{a_2}{L}k \quad (2.66)$$

Düzenlenen Denklem (2.66)'daki bağıntı bir ucu ankastre bir ucu serbest kolon için tanımlanan seride, Denklem (2.57) uygulanmıştır. Tüm denklem a_2 cinsinden oluşturularak, Denklem (2.67) elde edilmiştir. Ve bu serinin birinci, ikinci ve üçüncü türevi alınmış, sırasıyla Denklem (2.68), Denklem (2.69), Denklem (2.70) çıkarılmış, son sınır koşulu uygulanmıştır.

Son sınır koşulu; x=L'de iken P basınç yükünün yatay bileşeni bize P ile yer değiştirmenin birinci türevinin çarpımını verecektir yer değiştirmenin ikinci türevinin EI_0 ile çarpımı momenti, üçüncü türevinin EI_0 ile çarpımı kesme kuvvetini verecektir. [1]

$$w = a_2\left[\begin{array}{l} x^2 - \frac{k}{L}x^3 - \frac{1}{12}\frac{P}{(EI_0)}x^4 + \frac{1}{20}\frac{k}{L}\frac{P}{(EI_0)}x^5 + \frac{1}{360}\frac{P^2}{(EI_0)^2}x^6 \\ -\frac{1}{840}\frac{k}{L}\frac{P^2}{(EI_0)^2}x^7 - \frac{1}{20160}\frac{P^3}{(EI_0)^3}x^8 \\ +\frac{1}{60480}\frac{k}{L}\frac{P^3}{(EI_0)^3}x^9 + \frac{1}{1814400}\frac{P^4}{(EI_0)^4}x^{10} \end{array}\right] \tag{2.67}$$

$$w' = a_2\left[\begin{array}{l} 2x - 3\frac{k}{L}x^2 - \frac{1}{3}\frac{P}{(EI_0)}x^3 + \frac{1}{4}\frac{k}{L}\frac{P}{(EI_0)}x^4 + \frac{1}{60}\frac{P^2}{(EI_0)^2}x^5 \\ -\frac{1}{120}\frac{k}{L}\frac{P^2}{(EI_0)^2}x^6 - \frac{1}{2520}\frac{P^3}{(EI_0)^3}x^7 + \frac{1}{6720}\frac{k}{L}\frac{P^3}{(EI_0)^3}x^8 \\ +\frac{1}{181440}\frac{P^4}{(EI_0)^4}x^9 \end{array}\right] \tag{2.68}$$

$$w'' = a_2\left[\begin{array}{l} 2 - 6\frac{k}{L}x - \frac{P}{(EI_0)}x^2 + \frac{k}{L}\frac{P}{(EI_0)}x^3 + \frac{1}{12}\frac{P^2}{(EI_0)^2}x^4 - \frac{1}{20}\frac{k}{L}\frac{P^2}{(EI_0)^2}x^5 \\ -\frac{1}{360}\frac{P^3}{(EI_0)^3}x^6 + \frac{1}{840}\frac{k}{L}\frac{P^3}{(EI_0)^3}x^7 + \frac{1}{20160}\frac{P^4}{(EI_0)^4}x^8 \end{array}\right] \tag{2.69}$$

$$w''' = a_2\left[\begin{array}{l} -6\frac{k}{L} - 2\frac{P}{(EI_0)}x + 3\frac{k}{L}\frac{P}{(EI_0)}x^2 + \frac{1}{3}\frac{P^2}{(EI_0)^2}x^3 - \frac{1}{4}\frac{k}{L}\frac{P^2}{(EI_0)^2}x^4 \\ -\frac{1}{60}\frac{P^3}{(EI_0)^3}x^5 + \frac{1}{120}\frac{k}{L}\frac{P^3}{(EI_0)^3}x^6 + \frac{1}{2520}\frac{P^4}{(EI_0)^4}x^7 \end{array}\right] \tag{2.70}$$

$$(Pw'+EI_0 w''')(L) = 0 \tag{2.71}$$

$$Pw' = a_2\left[\begin{array}{l} 2Px - 3P\frac{k}{L}x^2 - \frac{1}{3}\frac{P^2}{(EI_0)}x^3 + \frac{1}{4}\frac{k}{L}\frac{P^2}{(EI_0)}x^4 + \frac{1}{60}\frac{P^3}{(EI_0)^2}x^5 \\ -\frac{1}{120}\frac{k}{L}\frac{P^3}{(EI_0)^2}x^6 - \frac{1}{2520}\frac{P^4}{(EI_0)^3}x^7 + \frac{1}{6720}\frac{k}{L}\frac{P^4}{(EI_0)^3}x^8 \\ +\frac{1}{181440}\frac{P^5}{(EI_0)^4}x^9 \end{array}\right] \tag{2.72}$$

$$(EI_0)w''' = a_2\left[\begin{array}{l} -6(EI_0)\frac{k}{L} - 2Px + 3P\frac{k}{L}x^2 + \frac{1}{3}\frac{P^2}{(EI_0)}x^3 - \frac{1}{4}\frac{k}{L}\frac{P^2}{(EI_0)}x^4 \\ -\frac{1}{60}\frac{P^3}{(EI_0)^2}x^5 + \frac{1}{120}\frac{k}{L}\frac{P^3}{(EI_0)^2}x^6 + \frac{1}{2520}\frac{P^4}{(EI_0)^3}x^7 \end{array}\right] \tag{2.73}$$

Denklem (2.72) ve (2.73), Denklem (2.71)'de yerine yazılmıştır, Denklem (2.74).

$$(Pw'+EI_0 w''')(L) = a_2\left[\begin{array}{l} 2PL - 3P\frac{k}{L}L^2 - \frac{1}{3}\frac{P^2}{(EI_0)}L^3 + \frac{1}{4}\frac{k}{L}\frac{P^2}{(EI_0)}L^4 \\ +\frac{1}{60}\frac{P^3}{(EI_0)^2}L^5 - \frac{1}{120}\frac{k}{L}\frac{P^3}{(EI_0)^2}L^6 - \frac{1}{2520}\frac{P^4}{(EI_0)^3}L^7 \\ +\frac{1}{6720}\frac{k}{L}\frac{P^4}{(EI_0)^3}L^8 + \frac{1}{181440}\frac{P^5}{(EI_0)^4}L^9 - 6(EI_0)\frac{k}{L} \\ -2PL + 3P\frac{k}{L}L^2 + \frac{1}{3}\frac{P^2}{(EI_0)}L^3 - \frac{1}{4}\frac{k}{L}\frac{P^2}{(EI_0)}L^4 \\ -\frac{1}{60}\frac{P^3}{(EI_0)^2}L^5 + \frac{1}{120}\frac{k}{L}\frac{P^3}{(EI_0)^2}L^6 + \frac{1}{2520}\frac{P^4}{(EI_0)^3}L^7 \end{array}\right] \tag{2.74}$$

Denklem (2.74) elde edilmiştir ve parantez içindeki işlemler yapıldığında aşağıdaki Denklem (2.75)'e ulaşılmıştır.

$$\frac{1}{181440}\frac{P^5L^9}{(EI_0)^4} = k\left(6\frac{(EI_0)}{L} - \frac{1}{6720}\frac{P^4L^7}{(EI_0)^3}\right) \tag{2.75}$$

Denklem (2.75) L/(EI_0) ile genişletilince;

$$5{,}5115\times10^{-6}\frac{(PL)^5}{(EI_0)^5}=k\left(6-1{,}4881\times10^{-4}\frac{(PL)^4}{(EI_0)^4}\right) \tag{2.76}$$

Denklem (2.65)'deki bağıntı, Denklem (2.76)'da yerine yazılmıştır.

$$\begin{aligned}&5{,}5115\times10^{-6}\frac{(PL^2)^5}{(EI_0)^5}\left(6-\frac{(PL^2)}{(EI_0)}+\frac{1}{20}\frac{(PL^2)^2}{(EI_0)^2}-\frac{1}{840}\frac{(PL^2)^3}{(EI_0)^3}\right)\\&=\\&\left(6-1{,}4881\times10^{-4}\frac{(PL^2)^4}{(EI_0)^4}\right)\left(2-\frac{(PL^2)}{(EI_0)}+\frac{1}{12}\frac{(PL^2)^2}{(EI_0)^2}-\frac{1}{360}\frac{(PL^2)^3}{(EI_0)^3}+\frac{1}{20160}\frac{(PL^2)^4}{(EI_0)^4}\right)\end{aligned} \tag{2.77}$$

Denklem (2.24), Denklem (2.77)'de uygulandığında Denklem (2.78)'e ulaşılmıştır. Daha sonrasında işlemler devam ettirildiğinde Denklem (2.79) bulunmuştur. Denklem (2.79) Microsoft Mathematics Programında çözüldüğünde, bir ucu ankastre bir ucu serbest kolonun burkulma yüküne ulaşılmıştır.

$$\begin{aligned}&3{,}3069\times10^{-5}\gamma^5-5{,}5115\times10^{-6}\gamma^6+2{,}7558\times10^{-7}\gamma^7-6{,}5613\times10^{-9}\gamma^8\\&=\\&12-6\gamma+0{,}5\gamma^2-0{,}0167\gamma^3+2{,}9762\times10^{-4}\gamma^4-2{,}9762\times10^{-4}\gamma^4\\&+1{,}4881\times10^{-4}\gamma^5-1{,}2401\times10^{-5}\gamma^6+4{,}1336\times10^{-7}\gamma^7-7{,}3814\times10^{-9}\gamma^8\end{aligned} \tag{2.78}$$

$$\begin{aligned}&12-6\gamma+0{,}5\gamma^2-0{,}0167\gamma^3-9{,}5238\times10^{-10}\gamma^4+1{,}1574\times10^{-4}\gamma^5\\&-6{,}8895\times10^{-6}\gamma^6+1{,}3778\times10^{-7}\gamma^7-8{,}201\times10^{-10}\gamma^8=0\end{aligned} \tag{2.79}$$

Seri ilk onbir terimle çok hızlı bir şekilde yakınsamıştır. Bulunan burkulma yükünün Euler'in kritik burkulma

$$\gamma=2{,}4668 \tag{2.80}$$

$$P = 2{,}4668\frac{EI_0}{L^2} \cong P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2} \tag{2.81}$$

2.2.2. İkinci ve üçüncü burkulma modları

Kolonun burkulma yükü ilk modda elde edilmiş, dolayısıyla daha az sayıda terim açıldığında sonuca ulaşılabilmiştir; ama daha ileri modlar söz konusu olduğunda, daha duyarlı sonuçlar elde edebilmek için serinin daha ileri terimlerde açılması gerekmiştir. Bu kolonun modlarını bulabilmek için seride a_i değeri a_{23} değerine kadar açılmış. Tüm değerler için seri a_2 ve a_3'e bağlı hale getirilmiş ve aynı işlem adımları tekrar edilmiştir.

$$a_{14} = 2{,}2942\times10^{-11}\frac{P^6}{(EI_0)^6}a_2 \tag{2.82}$$

$$a_{16} = -9{,}5592\times10^{-14}\frac{P^7}{(EI_0)^7}a_2 \tag{2.83}$$

$$a_{18} = 3{,}1239\times10^{-16}\frac{P^8}{(EI_0)^8}a_2 \tag{2.84}$$

$$a_{20} = -8{,}2208\times10^{-19}\frac{P^9}{(EI_0)^9}a_2 \tag{2.85}$$

$$a_{22} = 1{,}7794\times10^{-21}\frac{P^{10}}{(EI_0)^{10}}a_2 \tag{2.86}$$

Açılan yirmi dört terimle Denklem (2.10) revize edilmiştir, Denklem (2.87).

$$w = a_0 + a_1 x + a_2 \left[\begin{array}{l} x^2 - \frac{1}{12}\frac{P}{(EI_0)}x^4 + \frac{1}{360}\frac{P^2}{(EI_0)^2}x^6 - \frac{1}{20160}\frac{P^3}{(EI_0)^3}x^8 \\ + \frac{1}{1814400}\frac{P^4}{(EI_0)^4}x^{10} - 4{,}1754\times10^{-9}\frac{P^5}{(EI_0)^5}x^{12} \\ + 2{,}2942\times10^{-11}\frac{P^6}{(EI_0)^6}x^{14} - 9{,}5592\times10^{-14}\frac{P^7}{(EI_0)^7}x^{16} \\ + 3{,}1239\times10^{-16}\frac{P^8}{(EI_0)^8}x^{18} - 8{,}2208\times10^{-19}\frac{P^9}{(EI_0)^9}x^{20} \\ + 1{,}7794\times10^{-21}\frac{P^{10}}{(EI_0)^{10}}x^{22} - \ldots \end{array} \right]$$

$$+ a_3 \left[\begin{array}{l} x^3 - \frac{1}{20}\frac{P}{(EI_0)}x^5 + \frac{1}{840}\frac{P^2}{(EI_0)^2}x^7 - \frac{1}{60480}\frac{P^3}{(EI_0)^3}x^9 \\ + \frac{1}{6652800}\frac{P^4}{(EI_0)^4}x^{11} - 9{,}6354\times10^{-10}\frac{P^5}{(EI_0)^5}x^{13} \\ + 4{,}5883\times10^{-12}\frac{P^6}{(EI_0)^6}x^{15} - 1{,}6869\times10^{-14}\frac{P^7}{(EI_0)^7}x^{17} \\ + 4{,}9325\times10^{-17}\frac{P^8}{(EI_0)^8}x^{19} - 1{,}1744\times10^{-19}\frac{P^9}{(EI_0)^9}x^{21} \\ + 2{,}3209\times10^{-22}\frac{P^{10}}{(EI_0)^{10}}x^{23} - \ldots \end{array} \right] \qquad (2.87)$$

Birinci sınır koşulu uygulandığında a_0=0 bulunmuştur. İkinci, üçüncü ve dördüncü sınır koşullarını uygulayabilmek için Denklem (2.87)'ün türevleri alınmıştır, Denklem (2.88), Denklem (2.90), Denklem (2.92).

$$w' = a_1 + a_2 \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{1}{3}\frac{P}{(EI_0)}x^3 + \frac{1}{60}\frac{P^2}{(EI_0)^2}x^5 - \frac{1}{2520}\frac{P^3}{(EI_0)^3}x^7 + \frac{1}{181440}\frac{P^4}{(EI_0)^4}x^9 \\ - 5{,}0105\times10^{-8}\frac{P^5}{(EI_0)^5}x^{11} + 3{,}2119\times10^{-10}\frac{P^6}{(EI_0)^6}x^{13} \\ - 1{,}5295\times10^{-12}\frac{P^7}{(EI_0)^7}x^{15} + 5{,}6230\times10^{-15}\frac{P^8}{(EI_0)^8}x^{17} \\ - 1{,}6442\times10^{-17}\frac{P^9}{(EI_0)^9}x^{19} + 3{,}9147\times10^{-20}\frac{P^{10}}{(EI_0)^{10}}x^{21} \end{array} \right]$$

$$+a_3\left[\begin{array}{l} 3x^2-\frac{1}{4}\frac{P}{(EI_0)}x^4+\frac{1}{120}\frac{P^2}{(EI_0)^2}x^6-\frac{1}{6720}\frac{P^3}{(EI_0)^3}x^8 \\ +\frac{1}{604800}\frac{P^4}{(EI_0)^4}x^{10}-1{,}2526\times10^{-8}\frac{P^5}{(EI_0)^5}x^{12} \\ +6{,}8825\times10^{-11}\frac{P^6}{(EI_0)^6}x^{14}-2{,}8677\times10^{-13}\frac{P^7}{(EI_0)^7}x^{16} \\ +9{,}3718\times10^{-16}\frac{P^8}{(EI_0)^8}x^{18}-2{,}4662\times10^{-18}\frac{P^9}{(EI_0)^9}x^{20} \\ +5{,}3381\times10^{-21}\frac{P^{10}}{(EI_0)^{10}}x^{22} \end{array}\right] \tag{2.88}$$

$$a_0=0 \tag{2.89}$$

İkinci sınır koşulu seride uygulandığında $a_1=0$ bulunmuştur.

$$w''=a_2\left[\begin{array}{l} 2-\frac{P}{(EI_0)}x^2+\frac{1}{12}\frac{P^2}{(EI_0)^2}x^4-\frac{1}{360}\frac{P^3}{(EI_0)^3}x^6+\frac{1}{20160}\frac{P^4}{(EI_0)^4}x^8 \\ -5{,}5115\times10^{-7}\frac{P^5}{(EI_0)^5}x^{10}+4{,}1754\times10^{-9}\frac{P^6}{(EI_0)^6}x^{12} \\ -2{,}2942\times10^{-11}\frac{P^7}{(EI_0)^7}x^{14}+9{,}5591\times10^{-14}\frac{P^8}{(EI_0)^8}x^{16} \\ -3{,}1239\times10^{-16}\frac{P^9}{(EI_0)^9}x^{18}+8{,}2208\times10^{-19}\frac{P^{10}}{(EI_0)^{10}}x^{20} \end{array}\right]$$

$$+a_3\left[\begin{array}{l} 6x-\frac{P}{(EI_0)}x^3+\frac{1}{20}\frac{P^2}{(EI_0)^2}x^5-\frac{1}{840}\frac{P^3}{(EI_0)^3}x^7+\frac{1}{60480}\frac{P^4}{(EI_0)^4}x^9 \\ -1{,}5031\times10^{-7}\frac{P^5}{(EI_0)^5}x^{11}+9{,}6354\times10^{-10}\frac{P^6}{(EI_0)^6}x^{13} \\ -4{,}5883\times10^{-12}\frac{P^7}{(EI_0)^7}x^{15}+1{,}6869\times10^{-14}\frac{P^8}{(EI_0)^8}x^{17} \\ -4{,}9325\times10^{-17}\frac{P^9}{(EI_0)^9}x^{19}+1{,}1744\times10^{-19}\frac{P^{10}}{(EI_0)^{10}}x^{21} \end{array}\right] \tag{2.90}$$

$$a_1=0 \tag{2.91}$$

Üçüncü sınır koşulu Denklem (2.90)' a uygulanmış, Denklem (2.92) elde edilmiştir.

$$w'' = a_2\left[\begin{array}{l} 2-\frac{P}{(EI_0)}L^2+\frac{1}{12}\frac{P^2}{(EI_0)^2}L^4-\frac{1}{360}\frac{P^3}{(EI_0)^3}L^6+\frac{1}{20160}\frac{P^4}{(EI_0)^4}L^8 \\ -5{,}5115\times10^{-7}\frac{P^5}{(EI_0)^5}L^{10}+4{,}1754\times10^{-9}\frac{P^6}{(EI_0)^6}L^{12} \\ -2{,}2942\times10^{-11}\frac{P^7}{(EI_0)^7}L^{14}+9{,}5591\times10^{-14}\frac{P^8}{(EI_0)^8}L^{16} \\ -3{,}1239\times10^{-16}\frac{P^9}{(EI_0)^9}L^{18}+8{,}2208\times10^{-19}\frac{P^{10}}{(EI_0)^{10}}L^{20} \end{array}\right]$$

$$+a_3\left[\begin{array}{l} 6L-\frac{P}{(EI_0)}L^3+\frac{1}{20}\frac{P^2}{(EI_0)^2}L^5-\frac{1}{840}\frac{P^3}{(EI_0)^3}L^7+\frac{1}{60480}\frac{P^4}{(EI_0)^4}L^9 \\ -1{,}5031\times10^{-7}\frac{P^5}{(EI_0)^5}L^{11}+9{,}6354\times10^{-10}\frac{P^6}{(EI_0)^6}L^{13} \\ -4{,}5883\times10^{-12}\frac{P^7}{(EI_0)^7}L^{15}+1{,}6869\times10^{-14}\frac{P^8}{(EI_0)^8}L^{17} \\ -4{,}9325\times10^{-17}\frac{P^9}{(EI_0)^9}L^{19}+1{,}1744\times10^{-19}\frac{P^{10}}{(EI_0)^{10}}L^{21} \end{array}\right]=0 \qquad (2.92)$$

Denklem (2.92)'de a_3, a_2 cinsinden yazılacak şekilde düzenlenmiştir, Denklem (2.93).

$$a_3 = -\frac{a_2}{L}\left\{\frac{\left[2-\frac{PL^2}{(EI_0)}+\frac{1}{12}\frac{(PL^2)^2}{(EI_0)^2}-\frac{1}{360}\frac{(PL^2)^3}{(EI_0)^3}+\frac{1}{20160}\frac{(PL^2)^4}{(EI_0)^4}-5{,}5115\times10^{-7}\frac{(PL^2)^5}{(EI_0)^5}+4{,}1754\times10^{-9}\frac{(PL^2)^6}{(EI_0)^6}-2{,}2942\times10^{-11}\frac{(PL^2)^7}{(EI_0)^7}+9{,}5591\times10^{-14}\frac{(PL^2)^8}{(EI_0)^8}-3{,}1239\times10^{-16}\frac{(PL^2)^9}{(EI_0)^9}+8{,}2208\times10^{-19}\frac{(PL^2)^{10}}{(EI_0)^{10}}\right]}{\left[6-\frac{PL^2}{(EI_0)}+\frac{1}{20}\frac{(PL^2)^2}{(EI_0)^2}-\frac{1}{840}\frac{(PL^2)^3}{(EI_0)^3}+\frac{1}{60480}\frac{(PL^2)^4}{(EI_0)^4}-1{,}5031\times10^{-7}\frac{(PL^2)^5}{(EI_0)^5}+9{,}6354\times10^{-10}\frac{(PL^2)^6}{(EI_0)^6}-4{,}5883\times10^{-12}\frac{(PL^2)^7}{(EI_0)^7}+1{,}6869\times10^{-14}\frac{(PL^2)^8}{(EI_0)^8}-4{,}9325\times10^{-17}\frac{(PL^2)^9}{(EI_0)^9}+1{,}1744\times10^{-19}\frac{(PL^2)^{10}}{(EI_0)^{10}}\right]}\right\} \quad (2.93)$$

Denklem (2.94)'te k olarak tanımlanan bağıntı verilmiştir.

$$k = \left\{\frac{\left[2-\frac{PL^2}{(EI_0)}+\frac{1}{12}\frac{(PL^2)^2}{(EI_0)^2}-\frac{1}{360}\frac{(PL^2)^3}{(EI_0)^3}+\frac{1}{20160}\frac{(PL^2)^4}{(EI_0)^4}-5{,}5115\times10^{-7}\frac{(PL^2)^5}{(EI_0)^5}+4{,}1754\times10^{-9}\frac{(PL^2)^6}{(EI_0)^6}-2{,}2942\times10^{-11}\frac{(PL^2)^7}{(EI_0)^7}+9{,}5591\times10^{-14}\frac{(PL^2)^8}{(EI_0)^8}-3{,}1239\times10^{-16}\frac{(PL^2)^9}{(EI_0)^9}+8{,}2208\times10^{-19}\frac{(PL^2)^{10}}{(EI_0)^{10}}\ldots\right]}{\left[6-\frac{PL^2}{(EI_0)}+\frac{1}{20}\frac{(PL^2)^2}{(EI_0)^2}-\frac{1}{840}\frac{(PL^2)^3}{(EI_0)^3}+\frac{1}{60480}\frac{(PL^2)^4}{(EI_0)^4}-1{,}5031\times10^{-7}\frac{(PL^2)^5}{(EI_0)^5}+9{,}6354\times10^{-10}\frac{(PL^2)^6}{(EI_0)^6}-4{,}5883\times10^{-12}\frac{(PL^2)^7}{(EI_0)^7}+1{,}6869\times10^{-14}\frac{(PL^2)^8}{(EI_0)^8}-4{,}9325\times10^{-17}\frac{(PL^2)^9}{(EI_0)^9}+1{,}1744\times10^{-19}\frac{(PL^2)^{10}}{(EI_0)^{10}}\ldots\right]}\right\} \quad (2.94)$$

Ve denklem (2.93) yeniden düzenlenmiştir, Denklem (2.95).

$$a_3 = -\frac{a_2}{L}k \tag{2.95}$$

Düzenlenen Denklem (2.95)'teki bağıntı bir ucu ankastre bir ucu serbest kolon için tanımlanan seride, Denklem (2.87) yerine yazılmıştır. Tüm denklem a_2 cinsinden oluşturulmuştur, Denklem (2.96). Ve bu serinin birinci, ikinci ve üçüncü türevi alınarak, Denklem (2.97), Denklem (2.98), Denklem (2.99), son sınır koşulu uygulanmıştır, Denklem (2.71).

$$w = a_2\left[\begin{array}{l} x^2 - \frac{k}{L}x^3 - \frac{1}{12}\frac{P}{(EI_0)}x^4 + \frac{1}{20}\frac{k}{L}\frac{P}{(EI_0)}x^5 + \frac{1}{360}\frac{P^2}{(EI_0)^2}x^6 \\ -\frac{1}{840}\frac{k}{L}\frac{P^2}{(EI_0)^2}x^7 - \frac{1}{20160}\frac{P^3}{(EI_0)^3}x^8 + \frac{1}{60480}\frac{k}{L}\frac{P^3}{(EI_0)^3}x^9 \\ +\frac{1}{1814400}\frac{P^4}{(EI_0)^4}x^{10} - \frac{1}{6652800}\frac{k}{L}\frac{P^4}{(EI_0)^4}x^{11} \\ -4{,}1754\times10^{-9}\frac{P^5}{(EI_0)^5}x^{12} + 9{,}6354\times10^{-10}\frac{k}{L}\frac{P^5}{(EI_0)^5}x^{13} \\ +2{,}2942\times10^{-11}\frac{P^6}{(EI_0)^6}x^{14} - 4{,}5883\times10^{-12}\frac{k}{L}\frac{P^6}{(EI_0)^6}x^{15} \\ -9{,}5592\times10^{-14}\frac{P^7}{(EI_0)^7}x^{16} + 1{,}6869\times10^{-14}\frac{k}{L}\frac{P^7}{(EI_0)^7}x^{17} \\ +3{,}1239\times10^{-16}\frac{P^8}{(EI_0)^8}x^{18} - 4{,}9325\times10^{-17}\frac{k}{L}\frac{P^8}{(EI_0)^8}x^{19} \\ -8{,}2208\times10^{-19}\frac{P^9}{(EI_0)^9}x^{20} + 1{,}1744\times10^{-19}\frac{k}{L}\frac{P^9}{(EI_0)^9}x^{21} \\ +1{,}7794\times10^{-21}\frac{P^{10}}{(EI_0)^{10}}x^{22} - 2{,}3209\times10^{-22}\frac{k}{L}\frac{P^{10}}{(EI_0)^{10}}x^{23} \end{array}\right] \tag{2.96}$$

$$w' = a_2 \left[\begin{array}{l} 2x - 3\frac{k}{L}x^2 - \frac{1}{3}\frac{P}{(EI_0)}x^3 + \frac{1}{4}\frac{k}{L}\frac{P}{(EI_0)}x^4 + \frac{1}{60}\frac{P^2}{(EI_0)^2}x^5 \\ -\frac{1}{120}\frac{k}{L}\frac{P^2}{(EI_0)^2}x^6 - \frac{1}{2520}\frac{P^3}{(EI_0)^3}x^7 + \frac{1}{6720}\frac{k}{L}\frac{P^3}{(EI_0)^3}x^8 \\ +\frac{1}{181440}\frac{P^4}{(EI_0)^4}x^9 - \frac{1}{604800}\frac{k}{L}\frac{P^4}{(EI_0)^4}x^{10} \\ -5{,}0105\times10^{-8}\frac{P^5}{(EI_0)^5}x^{11} + 1{,}2526\times10^{-8}\frac{k}{L}\frac{P^5}{(EI_0)^5}x^{12} \\ +3{,}2119\times10^{-10}\frac{P^6}{(EI_0)^6}x^{13} - 6{,}8825\times10^{-11}\frac{k}{L}\frac{P^6}{(EI_0)^6}x^{14} \\ -1{,}5295\times10^{-12}\frac{P^7}{(EI_0)^7}x^{15} + 2{,}8677\times10^{-13}\frac{k}{L}\frac{P^7}{(EI_0)^7}x^{16} \\ +5{,}6230\times10^{-15}\frac{P^8}{(EI_0)^8}x^{17} - 9{,}3718\times10^{-16}\frac{k}{L}\frac{P^8}{(EI_0)^8}x^{18} \\ -1{,}6442\times10^{-17}\frac{P^9}{(EI_0)^9}x^{19} + 2{,}4662\times10^{-18}\frac{k}{L}\frac{P^9}{(EI_0)^9}x^{20} \\ +3{,}9147\times10^{-20}\frac{P^{10}}{(EI_0)^{10}}x^{21} \\ -5{,}3381\times10^{-21}\frac{k}{L}\frac{P^{10}}{(EI_0)^{10}}x^{22} \end{array} \right] \quad (2.97)$$

$$w'' = a_2 \left[\begin{array}{l} 2 - 6\frac{k}{L}x - \frac{P}{(EI_0)}x^2 + \frac{k}{L}\frac{P}{(EI_0)}x^3 + \frac{1}{12}\frac{P^2}{(EI_0)^2}x^4 - \frac{1}{20}\frac{k}{L}\frac{P^2}{(EI_0)^2}x^5 \\ -\frac{1}{360}\frac{P^3}{(EI_0)^3}x^6 + \frac{1}{840}\frac{k}{L}\frac{P^3}{(EI_0)^3}x^7 + \frac{1}{20160}\frac{P^4}{(EI_0)^4}x^8 \\ -\frac{1}{60480}\frac{k}{L}\frac{P^4}{(EI_0)^4}x^9 - 5{,}5116\times10^{-7}\frac{P^5}{(EI_0)^5}x^{10} \\ +1{,}5031\times10^{-7}\frac{k}{L}\frac{P^5}{(EI_0)^5}x^{11} + 4{,}1755\times10^{-9}\frac{P^6}{(EI_0)^6}x^{12} \\ -9{,}6355\times10^{-10}\frac{k}{L}\frac{P^6}{(EI_0)^6}x^{13} - 2{,}2943\times10^{-11}\frac{P^7}{(EI_0)^7}x^{14} \\ +4{,}5883\times10^{-12}\frac{k}{L}\frac{P^7}{(EI_0)^7}x^{15} + 9{,}5591\times10^{-14}\frac{P^8}{(EI_0)^8}x^{16} \\ -1{,}6869\times10^{-14}\frac{k}{L}\frac{P^8}{(EI_0)^8}x^{17} - 3{,}1240\times10^{-16}\frac{P^9}{(EI_0)^9}x^{18} \\ +4{,}9324\times10^{-17}\frac{k}{L}\frac{P^9}{(EI_0)^9}x^{19} + 8{,}2209\times10^{-19}\frac{P^{10}}{(EI_0)^{10}}x^{20} \\ -1{,}1744\times10^{-19}\frac{k}{L}\frac{P^{10}}{(EI_0)^{10}}x^{21} \end{array} \right] \quad (2.98)$$

$$w''' = a_2 \left[\begin{array}{l} -6\frac{k}{L} - 2\frac{P}{(EI_0)}x^2 + 3\frac{k}{L}\frac{P}{(EI_0)}x^2 + \frac{1}{3}\frac{P^2}{(EI_0)^2}x^3 - \frac{1}{4}\frac{k}{L}\frac{P^2}{(EI_0)^2}x^4 \\ -\frac{1}{60}\frac{P^3}{(EI_0)^3}x^5 + \frac{1}{120}\frac{k}{L}\frac{P^3}{(EI_0)^3}x^6 + \frac{1}{2520}\frac{P^4}{(EI_0)^4}x^7 \\ -\frac{1}{6720}\frac{k}{L}\frac{P^4}{(EI_0)^4}x^8 - 5{,}5116\times10^{-6}\frac{P^5}{(EI_0)^5}x^9 \\ +1{,}6534\times10^{-6}\frac{k}{L}\frac{P^5}{(EI_0)^5}x^{10} + 5{,}0106\times10^{-8}\frac{P^6}{(EI_0)^6}x^{11} \\ -1{,}2526\times10^{-8}\frac{k}{L}\frac{P^6}{(EI_0)^6}x^{12} - 3{,}2120\times10^{-10}\frac{P^7}{(EI_0)^7}x^{13} \\ +6{,}8825\times10^{-11}\frac{k}{L}\frac{P^7}{(EI_0)^7}x^{14} + 1{,}5295\times10^{-12}\frac{P^8}{(EI_0)^8}x^{15} \\ -2{,}8677\times10^{-13}\frac{k}{L}\frac{P^8}{(EI_0)^8}x^{16} - 5{,}6232\times10^{-15}\frac{P^9}{(EI_0)^9}x^{17} \\ +9{,}3716\times10^{-16}\frac{k}{L}\frac{P^9}{(EI_0)^9}x^{18} + 1{,}6442\times10^{-17}\frac{P^{10}}{(EI_0)^{10}}x^{19} \\ -2{,}4662\times10^{-18}\frac{k}{L}\frac{P^{10}}{(EI_0)^{10}}x^{20} \end{array} \right] \quad (2.99)$$

Denklem (2.100) ve Denklem (2.101), Denklem (2.71)'den elde edilen Denklem (2.74)'deki değerlere eklenmiştir. Birinci burkulma modunda yapılan işlem adımları tekarlanmıştır.

$$
Pw' = a_2 \left[\begin{array}{l}
2Px - 3P\frac{k}{L}x^2 - \frac{1}{3}\frac{P^2}{(EI_0)}x^3 + \frac{1}{4}\frac{k}{L}\frac{P^2}{(EI_0)}x^4 + \frac{1}{60}\frac{P^3}{(EI_0)^2}x^5 \\
-\frac{1}{120}\frac{k}{L}\frac{P^3}{(EI_0)^2}x^6 - \frac{1}{2520}\frac{P^4}{(EI_0)^3}x^7 + \frac{1}{6720}\frac{k}{L}\frac{P^4}{(EI_0)^3}x^8 \\
+\frac{1}{181440}\frac{P^5}{(EI_0)^4}x^9 - \frac{1}{604800}\frac{k}{L}\frac{P^5}{(EI_0)^4}x^{10} \\
-5{,}0105\times10^{-8}\frac{P^6}{(EI_0)^5}x^{11} + 1{,}2526\times10^{-8}\frac{k}{L}\frac{P^6}{(EI_0)^5}x^{12} \\
+3{,}2119\times10^{-10}\frac{P^7}{(EI_0)^6}x^{13} - 6{,}8825\times10^{-11}\frac{k}{L}\frac{P^7}{(EI_0)^6}x^{14} \\
-1{,}5295\times10^{-12}\frac{P^8}{(EI_0)^7}x^{15} + 2{,}8677\times10^{-13}\frac{k}{L}\frac{P^8}{(EI_0)^7}x^{16} \\
+5{,}6230\times10^{-15}\frac{P^9}{(EI_0)^8}x^{17} - 9{,}3718\times10^{-16}\frac{k}{L}\frac{P^9}{(EI_0)^8}x^{18} \\
-1{,}6442\times10^{-17}\frac{P^{10}}{(EI_0)^9}x^{19} + 2{,}4662\times10^{-18}\frac{k}{L}\frac{P^{10}}{(EI_0)^9}x^{20} \\
+3{,}9147\times10^{-20}\frac{P^{11}}{(EI_0)^{10}}x^{21} - 5{,}3381\times10^{-21}\frac{k}{L}\frac{P^{10}}{(EI_0)^{10}}x^{22}
\end{array} \right] \qquad (2.100)
$$

$$(EI_0)w''' = a_2\left[\begin{array}{l} -6(EI_0)\frac{k}{L} - 2Px^2 + 3\frac{k}{L}Px^2 + \frac{1}{3}\frac{P^2}{(EI_0)}x^3 - \frac{1}{4}\frac{k}{L}\frac{P^2}{(EI_0)}x^4 \\ -\frac{1}{60}\frac{P^3}{(EI_0)^2}x^5 + \frac{1}{120}\frac{k}{L}\frac{P^3}{(EI_0)^2}x^6 + \frac{1}{2520}\frac{P^4}{(EI_0)^3}x^7 \\ -\frac{1}{6720}\frac{k}{L}\frac{P^4}{(EI_0)^3}x^8 - 5{,}5116\times10^{-6}\frac{P^5}{(EI_0)^4}x^9 \\ +1{,}6534\times10^{-6}\frac{k}{L}\frac{P^5}{(EI_0)^4}x^{10} + 5{,}0106\times10^{-8}\frac{P^6}{(EI_0)^5}x^{11} \\ -1{,}2526\times10^{-8}\frac{k}{L}\frac{P^6}{(EI_0)^5}x^{12} - 3{,}2120\times10^{-10}\frac{P^7}{(EI_0)^6}x^{13} \\ +6{,}8825\times10^{-11}\frac{k}{L}\frac{P^7}{(EI_0)^6}x^{14} + 1{,}5295\times10^{-12}\frac{P^8}{(EI_0)^7}x^{15} \\ -2{,}8677\times10^{-13}\frac{k}{L}\frac{P^8}{(EI_0)^7}x^{16} - 5{,}6232\times10^{-15}\frac{P^9}{(EI_0)^8}x^{17} \\ +9{,}3716\times10^{-16}\frac{k}{L}\frac{P^9}{(EI_0)^8}x^{18} + 1{,}6442\times10^{-17}\frac{P^{10}}{(EI_0)^9}x^{19} \\ -2{,}4662\times10^{-18}\frac{k}{L}\frac{P^{10}}{(EI_0)^9}x^{20} \end{array}\right] \quad (2.101)$$

Revize edilen Denklem (2.74)'de parantez içindeki işlemler yapıldığında aşağıdaki Denklem (2.102)'ye ulaşılmıştır.

$$3{,}9147\times10^{-20}\frac{P^{11}L^{21}}{(EI_0)^{10}} = k\left(6\frac{(EI_0)}{L} + 5{,}3381\times10^{-21}\frac{P^{11}L^{21}}{(EI_0)^{10}}\right) \quad (2.102)$$

Denklem (2.102) $L/(EI_0)$ ile genişletilince;

$$3{,}9147\times10^{-20}\frac{(PL^2)^{11}}{(EI_0)^{11}} = k\left(6 + 5{,}3381\times10^{-21}\frac{(PL^2)^{11}}{(EI_0)^{11}}\right) \quad (2.103)$$

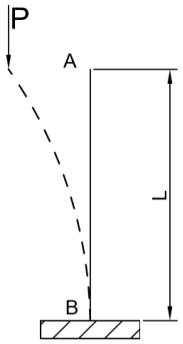
İşlem kolaylığı için daha önceden tanımlamış olduğumuz Denklem (2.22)'deki γ değerini hem Denklem (2.94)'de hem de Denklem (2.103) yerine yazarak adımlara devam edilmiştir, Denklem (2.104) ve Denklem (2.105).

$$3{,}9147\times10^{-20}\gamma^{11} = k\left(6 + 5{,}3381\times10^{-21}\gamma^{11}\right) \quad (2.104)$$

$$k = \left\{ \frac{\left[2 - \gamma + \frac{1}{12}\gamma^2 - \frac{1}{360}\gamma^3 + \frac{1}{20160}\gamma^4 - 5{,}5115\times10^{-7}\gamma^5 + 4{,}1754\times10^{-9}\gamma^6 - 2{,}2942\times10^{-11}\gamma^7 + 9{,}5591\times10^{-14}\gamma^8 - 3{,}1239\times10^{-16}\gamma^9 + 8{,}2208\times10^{-19}\gamma^{10} \ldots \right]}{\left[6 - \gamma + \frac{1}{20}\gamma^2 - \frac{1}{840}\gamma^3 + \frac{1}{60480}\gamma^4 - 1{,}5031\times10^{-7}\gamma^5 + 9{,}6354\times10^{-10}\gamma^6 - 4{,}5883\times10^{-12}\gamma^7 + 1{,}6869\times10^{-14}\gamma^8 - 4{,}9325\times10^{-17}\gamma^9 + 1{,}1744\times10^{-19}\gamma^{10} \ldots \right]} \right\} \tag{2.105}$$

$$\begin{aligned} &12 - 6\gamma + 0{,}5\gamma^2 - 0{,}0167\gamma^3 + 2{,}9762\times10^{-4}\gamma^4 \\ &- 3{,}3069\times10^{-6}\gamma^5 + 2{,}5052\times10^{-8}\gamma^6 - 1{,}3765\times10^{-10}\gamma^7 \\ &+ 5{,}7355\times10^{-13}\gamma^8 - 1{,}8743\times10^{-15}\gamma^9 + 4{,}9325\times10^{-18}\gamma^{10} \\ &- 2{,}2420\times10^{-19}\gamma^{11} + 3{,}3809\times10^{-20}\gamma^{12} - 1{,}5126\times10^{-21}\gamma^{13} \\ &+ 3{,}1776\times10^{-23}\gamma^{14} - 3{,}8248\times10^{-25}\gamma^{15} + 2{,}9421\times10^{-27}\gamma^{16} \\ &- 1{,}5431\times10^{-29}\gamma^{17} + 5{,}715\times10^{-32}\gamma^{18} - 1{,}501\times10^{-34}\gamma^{19} \\ &+ 2{,}633\times10^{-37}\gamma^{20} - 2{,}091\times10^{-40}\gamma^{21} = 0 \end{aligned} \tag{2.106}$$

Denklem (2.106) Microsoft Mathematics programında yazılıp çözdürülmüştür. Burkulma modları bulunmuştur ve Euler formülünde olması gereken burkulma modlarıyla karşılaştırılmıştır. Bir ucu ankastre bir ucu serbest kolon için ilk üç mod (Şekil 2.5.), (Şekil 2.6.), (Şekil 2.7.) ve karşılık gelen kritik burkulma yükleri Denklem (2.108), Denklem (2.111), Denklem (2.114)'de verilmiştir. Bu değerler, yarım sinüs dalgalarının uzunluklarından elde edilmiştir. Kuvvet serileri yöntemindeki polinom denklemlerin çözümünden elde edilen kritik burkulma yük değerleri Denklem (2.107), Denklem (2.110), Denklem (2.113)'te verilmiştir. Kritik burkulma yükleri ile sözü edilen yöntemle bulunan burkulma yüklerinin birbirine çok yakın olduğu görülmüştür, Denklem (2.109), Denklem (2.112), Denklem (2.115).



Şekil 2.5. Bir ucu ankastre bir ucu serbest kolonun birinci burkulma modu

Bulunan birinci burkulma modu;

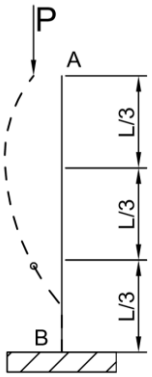
$$P = 2{,}4674\frac{EI_0}{L^2} \tag{2.107}$$

Euler'in birinci burkulma modu;

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \tag{2.108}$$

Hata oranı;

$$‰\, 4{,}45924 \times 10^{-4} \tag{2.109}$$



Şekil 2.6. Bir ucu ankastre bir ucu serbest kolonun ikinci burkulma modu

Bulunan ikinci burkulma modu;

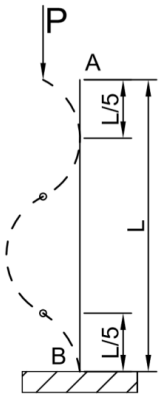
$$P = 22{,}2066\frac{EI_0}{L^2} \tag{2.110}$$

Euler'in ikinci burkulma modu;

$$P_{kr} = \frac{9\pi^2 EI}{4L^2} \tag{2.111}$$

Hata oranı;

$$‰\, 4{,}45924 \times 10^{-4} \tag{2.112}$$



Şekil 2.7. Bir ucu ankastre bir ucu serbest kolonun üçüncü burkulma modu

Bulunan üçüncü burkulma modu;

$$P = 60{,}599\frac{EI_0}{L^2} \tag{2.113}$$

Euler'in üçüncü burkulma modu;

$$P_{kr} = \frac{25\pi^2 EI}{4L^2} \tag{2.114}$$

Hata oranı;

$$\%1{,}7606 \tag{2.115}$$

3. DEĞİŞKEN KESİTLİ KOLONLARIN BURKULMA YÜKLERİNİN KUVVET SERİLERİ YÖNTEMİYLE BELİRLENMESİ

Sabit kesitli problemler için oldukça yakın sonuçlar elde edildikten sonra değişken kesitli problemin çözümüne geçilmiştir. Değişken kesitli problem için denklem, Denklem (1.10)'daki gibidir.

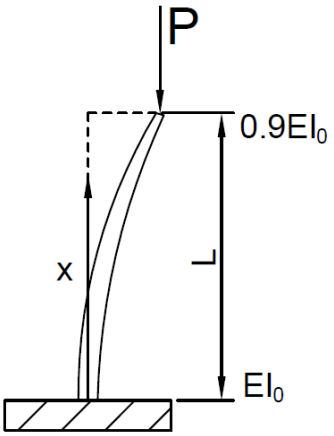
Problemde eğilme rijitliği için doğrusal bir değişim varsayılmıştır. Bu durumda değişken eğilme rijitliği için ilgili türevler aşağıdaki gibidir, Denklem (3.1);

$$\begin{aligned} &\alpha = EI_0 \\ &EI(x) = \alpha(1 - bx) \\ &EI(x)_{,x} = -\alpha b \\ &EI(x)_{,xx} = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Denklem (3.1)'deki değerler, Denklem (1.10)'da yazıldığında Denklem (3.2) elde edilmiştir.

$$(1 - bx)w_{,xxxx} - 2bw_{,xxx} + \frac{P}{\alpha} w_{,xx} = 0 \tag{3.2}$$

Sabit kesitli problemde yaptığımız gibi önce seri önerilmiştir ve b=0,1/*L* alınmıştır. Yani kolonun değişkenliği EI_0 ve $0{,}9EI_0$ arasında olduğu kabul edilmiştir. EI_0 hiç kesit değişikliğine uğramamış sabit kesitli bir kolonun eğilme rijitliği, $0{,}9EI_0$ ise hiç kesit değişikliğine uğramamış sabit kesitli bir diğer kolonun eğilme rijitliğidir.



Şekil 3.1. Değişken kesitli kolon

Seride, Denklem (1.17), on terim açılmıştır,. Serinin ilgili türevleri Denklem (1.18)'deki gibidir. Ve Denklem (3.2)'nin uygulamadaki açılımı aşağıdaki gibidir, Denklem (3.3).

$$24a_4 + 120a_5x + 360a_6x^2 + 840a_7x^3 + 1680a_8x^4 + 3024a_9x^5 \ldots$$

$$-24ba_4x - 120ba_5x^2 - 360ba_6x^3 - 840ba_7x^4 - 1680ba_8x^5$$

$$-12ba_3 - 48ba_4x - 120ba_5x^2 - 240ba_6x^3 - 420ba_7x^4 - 672ba_8x^5$$

$$\frac{2P}{(EI_0)}a_2 + \frac{6P}{(EI_0)}a_3x + \frac{12P}{(EI_0)}a_4x^2 + \frac{20P}{(EI_0)}a_5x^3 + \frac{30P}{(EI_0)}a_6x^4 + \frac{42P}{(EI_0)}a_7x^5 + \ldots = 0 \quad (3.3)$$

İşlem adımlarının devamında tüm a_i değerleri açılarak, seri a_2 ve a_3 cinsinden yazılmıştır. Burada I_0 kolonun alt ucundaki kesitin atalet momentidir ve kesit boyunca doğrusal bir değişim içerisindedir.

$$a_4 = \frac{0{,}05}{L}a_3 - \frac{1}{12}\frac{P}{(EI_0)}a_2 \quad (3.4)$$

$$a_5 = \left(\frac{3\times10^{-3}}{L^2} - \frac{1}{20}\frac{P}{EI_0}\right)a_3 - \frac{5\times10^{-3}}{L}\frac{P}{EI_0}a_2 \quad (3.5)$$

$$a_6 = \left(\frac{2\times10^{-4}}{L^3} - \frac{5\times10^{-3}}{L}\frac{P}{EI_0} \right) a_3 - \left(\frac{3{,}333\times10^{-4}}{L^2}\frac{P}{EI_0} - 2{,}778\times10^{-3}\frac{P^2}{(EI_0)^2} \right) a_2 \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} a_7 = &\left(\frac{1{,}4286\times10^{-5}}{L^4} - \frac{4{,}2857\times10^{-4}}{L^2}\frac{P}{EI_0} + 1{,}1905\times10^{-3}\frac{P^2}{(EI_0)^2} \right) a_3 \\ &- \left(\frac{2{,}3807\times10^{-5}}{L^3}\frac{P}{EI_0} - \frac{3{,}1748\times10^{-4}}{L}\frac{P^2}{(EI_0)^2} \right) a_2 \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} a_8 = &\left(\frac{1{,}0715\times10^{-6}}{L^5} - \frac{3{,}5714\times10^{-5}}{L^3}\frac{P}{EI_0} + \frac{1{,}7857\times10^{-4}}{L}\frac{P^2}{(EI_0)^2} \right) a_3 \\ &- \left(\frac{1{,}7855\times10^{-6}}{L^4}\frac{P}{EI_0} - \frac{2{,}9763\times10^{-5}}{L^2}\frac{P^2}{(EI_0)^2} + 4{,}9607\times10^{-5}\frac{P^3}{(EI_0)^3} \right) a_2 \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} a_9 = &\left(\begin{array}{l} \frac{8{,}334\times10^{-8}}{L^6} - \frac{2{,}9762\times10^{-6}}{L^4}\frac{P}{EI_0} + \frac{1{,}9841\times10^{-5}}{L^2}\frac{P^2}{(EI_0)^2} \\ -1{,}6535\times10^{-5}\frac{P^3}{(EI_0)^3} \end{array} \right) a_3 \\ &- \left(\begin{array}{l} \frac{1{,}3887\times10^{-7}}{L^5}\frac{P}{EI_0} - \frac{2{,}6456\times10^{-6}}{L^3}\frac{P^2}{(EI_0)^2} \\ +\frac{8{,}2677\times10^{-6}}{L}\frac{P^3}{(EI_0)^3} \end{array} \right) a_2 \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$w = a_0 + a_1 x$$

$$+ a_2 \left[\begin{array}{l} x^2 - \frac{1}{12}\frac{P}{(EI_0)}x^4 - \frac{5\times10^{-3}}{L}\frac{P}{(EI_0)}x^5 \\ -\left(\frac{3{,}333\times10^{-4}}{L^2}\frac{P}{(EI_0)} - 2{,}778\times10^{-3}\frac{P^2}{(EI_0)^2} \right)x^6 \\ -\left(\frac{2{,}3807\times10^{-5}}{L^3}\frac{P}{(EI_0)} - \frac{3{,}1748\times10^{-4}}{L}\frac{P^2}{(EI_0)^2} \right)x^7 \\ -\left(\frac{1{,}7855\times10^{-6}}{L^4}\frac{P}{(EI_0)} - \frac{2{,}9763\times10^{-5}}{L^2}\frac{P^2}{(EI_0)^2} + 4{,}9607\times10^{-5}\frac{P^3}{(EI_0)^3} \right)x^8 \\ -\left(\frac{1{,}3887\times10^{-7}}{L^5}\frac{P}{(EI_0)} - \frac{2{,}6456\times10^{-6}}{L^3}\frac{P^2}{(EI_0)^2} + \frac{8{,}2677\times10^{-6}}{L}\frac{P^3}{(EI_0)^3} \right)x^9 \end{array} \right]$$

$$+a_3\left[\begin{array}{l} x^3+\dfrac{0{,}05}{L}x^4+\left(\dfrac{3\times10^{-3}}{L^2}-\dfrac{1}{20}\dfrac{P}{EI_0}\right)x^5+\left(\dfrac{2\times10^{-4}}{L^3}-\dfrac{5\times10^{-3}}{L}\dfrac{P}{EI_0}\right)x^6 \\ +\left(\dfrac{1{,}4286\times10^{-5}}{L^4}-\dfrac{4{,}2857\times10^{-4}}{L^2}\dfrac{P}{EI_0}+1{,}1905\times10^{-3}\dfrac{P^2}{(EI_0)^2}\right)x^7 \\ +\left(\dfrac{1{,}0715\times10^{-6}}{L^5}-\dfrac{3{,}5714\times10^{-5}}{L^3}\dfrac{P}{EI_0}+\dfrac{1{,}7857\times10^{-4}}{L}\dfrac{P^2}{(EI_0)^2}\right)x^8 \\ +\left(\dfrac{8{,}334\times10^{-8}}{L^6}-\dfrac{2{,}9762\times10^{-6}}{L^4}\dfrac{P}{EI_0}+\dfrac{1{,}9841\times10^{-5}}{L^2}\dfrac{P^2}{(EI_0)^2}\right. \\ \left.-1{,}6535\times10^{-5}\dfrac{P^3}{(EI_0)^3}\right)x^9 \end{array}\right] \tag{3.10}$$

3.1. İki Ucu Mafsallı Kolon

Değişken kesitli iki ucu mafsallı kolonun burkulma yükü ilk modda elde edilmiş, oldukça az sayıda terim açılarak sonuca ulaşılabilmiştir; ancak daha ileri modlar söz konusu olduğunda, daha duyarlı sonuçlar elde edebilmek için serinin daha ileri terimlerde açılması gerekmiştir, seride 57 terim açılmıştır. Aşağıda gerekli işlem adımları gerçekleştirilmiştir.

$$\begin{array}{l} a_{10}=\left(\dfrac{6{,}6672\times10^{-9}}{L^7}-\dfrac{2{,}5001\times10^{-7}}{L^5}\dfrac{P}{EI_0}+\dfrac{1{,}9841\times10^{-6}}{L^3}\dfrac{P^2}{(EI_0)^2}\right. \\ \left.-\dfrac{3{,}3069\times10^{-6}}{L}\dfrac{P^3}{(EI_0)^3}\right)a_3 \\ -\left(\dfrac{1{,}1110\times10^{-8}}{L^6}\dfrac{P}{EI_0}-\dfrac{2{,}3149\times10^{-7}}{L^4}\dfrac{P^2}{(EI_0)^2}+\dfrac{9{,}9212\times10^{-7}}{L^2}\dfrac{P^3}{(EI_0)^3}\right. \\ \left.-5{,}5119\times10^{-7}\dfrac{P^4}{(EI_0)^4}\right)a_2 \end{array} \tag{3.11}$$

$$a_{11}=\left(\begin{array}{l}\dfrac{5{,}455\times10^{-10}}{L^{8}}-\dfrac{2{,}1213\times10^{-8}}{L^{6}}\dfrac{P}{EI_0}+\dfrac{1{,}894\times10^{-7}}{L^{4}}\dfrac{P^{2}}{(EI_0)^{2}}\\ -\dfrac{4{,}5093\times10^{-7}}{L^{2}}\dfrac{P^{3}}{(EI_0)^{3}}+1{,}5032\times10^{-7}\dfrac{P^{4}}{(EI_0)^{4}}\end{array}\right)a_3$$
$$-\left(\begin{array}{l}\dfrac{9{,}09\times10^{-10}}{L^{7}}\dfrac{P}{EI_0}-\dfrac{2{,}0203\times10^{-8}}{L^{5}}\dfrac{P^{2}}{(EI_0)^{2}}+\dfrac{1{,}0522\times10^{-7}}{L^{3}}\dfrac{P^{3}}{(EI_0)^{3}}\\ -\dfrac{1{,}2026\times10^{-7}}{L}\dfrac{P^{4}}{(EI_0)^{4}}\end{array}\right)a_2 \tag{3.12}$$

$$a_{12}=\left(\begin{array}{l}\dfrac{4{,}5455\times10^{-11}}{L^{9}}-\dfrac{1{,}8182\times10^{-9}}{L^{7}}\dfrac{P}{EI_0}+\dfrac{1{,}7677\times10^{-8}}{L^{5}}\dfrac{P^{2}}{(EI_0)^{2}}\\ -\dfrac{5{,}2609\times10^{-8}}{L^{3}}\dfrac{P^{3}}{(EI_0)^{3}}+\dfrac{3{,}7578\times10^{-8}}{L}\dfrac{P^{4}}{(EI_0)^{4}}\end{array}\right)a_3$$
$$-\left(\begin{array}{l}\dfrac{7{,}5758\times10^{-11}}{L^{8}}\dfrac{P}{EI_0}-\dfrac{1{,}7677\times10^{-9}}{L^{6}}\dfrac{P^{2}}{(EI_0)^{2}}+\dfrac{1{,}0522\times10^{-8}}{L^{4}}\dfrac{P^{3}}{(EI_0)^{3}}\\ -\dfrac{1{,}7536\times10^{-8}}{L^{2}}\dfrac{P^{4}}{(EI_0)^{4}}+4{,}1754\times10^{-9}\dfrac{P^{5}}{(EI_0)^{5}}\end{array}\right)a_2 \tag{3.13}$$

$$a_{13}=\frac{11}{13}\times\frac{0{,}1}{L}\times a_{12}-\frac{1}{13\times12}\times\frac{P}{EI_0}\times a_{11} \tag{3.14}$$

$$a_{14}=\frac{12}{14}\times\frac{0{,}1}{L}\times a_{13}-\frac{1}{14\times13}\times\frac{P}{EI_0}\times a_{12} \tag{3.15}$$

Serinin diğer terimleri de aşağıdaki Denklem (3.16)'ya uygun olarak, Denklem (3.14) ve (3.15)'teki gibi 57. terime kadar açılmıştır.

$$a_i=\frac{i-2}{i}\times\frac{0{,}1}{L}\times a_{i-1}-\frac{1}{i\times(i-1)}\times\frac{P}{EI_0}\times a_{i-2} \tag{3.16}$$

Hesaplanan tüm a_i değerleri yani a_{56}'ya kadar açılan tüm değerler ile oluşturulan w serisi oluşturulmuştur. Sınır koşulları; Denklem (1.12) ve Denklem (1.13) uygulanarak Denklem (3.17)'ye ulaşılmıştır.

$$1{,}1106\times10^{-72}\gamma^{26}-5{,}0885\times10^{-69}\gamma^{25}+1{,}4124\times10^{-65}\gamma^{24}-3{,}4333\times10^{-62}\gamma^{23}$$
$$+7{,}6673\times10^{-59}\gamma^{22}-1{,}5737\times10^{-55}\gamma^{21}+2{,}9581\times10^{-52}\gamma^{20}-5{,}0717\times10^{-49}\gamma^{19}$$
$$+7{,}8962\times10^{-46}\gamma^{18}-1{,}1109\times10^{-42}\gamma^{17}+1{,}4048\times10^{-39}\gamma^{16}-1{,}5870\times10^{-36}\gamma^{15}$$
$$+1{,}5910\times10^{-33}\gamma^{14}-1{,}4047\times10^{-30}\gamma^{13}+1{,}0828\times10^{-27}\gamma^{12}-7{,}2164\times10^{-25}\gamma^{11} \quad (3.17)$$
$$+4{,}1105\times10^{-22}\gamma^{10}-1{,}9746\times10^{-19}\gamma^{9}+7{,}8731\times10^{-17}\gamma^{8}-2{,}5562\times10^{-14}\gamma^{7}$$
$$+6{,}6007\times10^{-12}\gamma^{6}-1{,}3159\times10^{-9}\gamma^{5}+1{,}6579\times10^{-5}\gamma^{4}-0{,}00154\gamma^{3}+0{,}0616\gamma^{2}$$
$$-1{,}1702\gamma+6{,}6666=0$$

Denklem (3.17) Microsoft Mathematics Programında çözdürülüp birinci ve ikinci mod için değerler bulunmuştur ve bu ilgili değerler için de uygunluk kontrolü yapılmıştır, Denklem (3.20) ve Denklem (3.23), başarılı sonuçlar elde edilmiştir.

3.1.1. Birinci burkulma modu

Sabit kesitli bir kolonun EI_0 eğilme rijitliği için;

$$P_{cr}=9{,}8696\frac{EI_0}{L^2} \quad (3.18)$$

Sabit kesitli bir kolonun $0{,}9EI_0$ eğilme rijitliği için;

$$P_{cr}=8{,}8826\frac{EI_0}{L^2} \quad (3.19)$$

Uygunluk kontrolü;

$$P_{cr}=8{,}8826\frac{EI_0}{L^2}\langle P=9{,}2959\frac{EI_0}{L^2}\langle P_{cr}=9{,}8696\frac{EI_0}{L^2} \quad (3.20)$$

3.1.2. İkinci burkulma modu

Sabit kesitli bir kolonun EI_0 eğilme rijitliği için;

$$P_{cr}=\frac{4\pi^2EI_0}{L^2}=39{,}4784\frac{EI_0}{L^2} \quad (3.21)$$

Sabit kesitli bir kolonun $0,9EI_0$ eğilme rijitliği için;

$$P_{cr} = 35,5306\frac{EI_0}{L^2} \tag{3.22}$$

Uygunluk kontrolü;

$$P_{cr} = 35,5306\frac{EI_0}{L^2} \langle P = 34,8332\frac{EI_0}{L^2} \langle P_{cr} = 39,4784\frac{EI_0}{L^2} \tag{3.23}$$

İkinci mod için 34,8332 değerine ulaşılmıştır, uygunluk kontrolünde bu değerin 35,5306 ve 39,4784 değerleri arasında yer alması gerekliydi, yüzde ikilik bir hata payı olduğu gözlemlenmiştir. Sonucun bu aralıkta olabilmesi için a_i değeri onar onar sayı olarak arttırılıp açılarak işleme dahil edildiğinde çok hızlı yakınsamadığı görülmüştür. Uygun mod değerine çok daha fazla değer açıldığında ulaşılacağı tahmin edilmektedir.

3.2. Bir Ucu Ankastre Bir Ucu Serbest Kolon

Sınır koşullarından ilk üçü sabit kesitli bir ucu ankastre bir ucu serbest kolonla aynıdır, sadece son sınır koşulu farklılık gösterir. Bu sınır koşulları, ankastre mesnedin getirdiği fiziksel koşullardır ve ankastre mesnedin bulunduğu noktada, yer değiştirmenin ve eğimin olmaması durumunun matematiksel ifadesidir, Denklem (1.14), Denklem (1.15) ve Denklem (1.16). Son sınır koşulu sabit kesitli durumun son sınır koşuluna göre farklılık göstermiştir. Bunun nedeni x=L durumunda yer değiştirmenin üçüncü türevi ile $0,9EI_0$'ın çarpımının kesme kuvvetine eşit olmasıdır.

$$(Pw'+(0,9)EI_0 w''')(L) = 0 \tag{3.24}$$

3.2.1. Birinci burkulma modu

Seri de 10 terim açılmıştır.Birinci sınır koşulu, Denklem (1.14) seriye uygulandığında a_0=0 olarak bulunmuştur. Diğer sınır koşullarını uygulayabilmek için Denklem (3.10)'nun birinci, ikinci ve üçüncü türevleri alındı, Denklem (3.25), Denklem (3.26), Denklem (3.27).

$$w' = a_1 + a_2\left[\begin{array}{l} 2x - \frac{1}{3}\frac{P}{(EI_0)}x^3 - \frac{0{,}025}{L}\frac{P}{(EI_0)}x^4 \\ -\left(\frac{1{,}9998\times10^{-3}}{L^2}\frac{P}{(EI_0)} - 0{,}0167\frac{P^2}{(EI_0)^2}\right)x^5 \\ -\left(\frac{1{,}6665\times10^{-4}}{L^3}\frac{P}{(EI_0)} - \frac{2{,}2224\times10^{-3}}{L}\frac{P^2}{(EI_0)^2}\right)x^6 \\ -\left(\frac{1{,}4284\times10^{-5}}{L^4}\frac{P}{(EI_0)} - \frac{2{,}3810\times10^{-4}}{L^2}\frac{P^2}{(EI_0)^2} + 3{,}9686\times10^{-4}\frac{P^3}{(EI_0)^3}\right)x^7 \\ -\left(\frac{1{,}2498\times10^{-6}}{L^5}\frac{P}{(EI_0)} - \frac{2{,}3810\times10^{-5}}{L^3}\frac{P^2}{(EI_0)^2} + \frac{7{,}4409\times10^{-5}}{L}\frac{P^3}{(EI_0)^3}\right)x^8 \\ -\ldots \end{array}\right]$$

$$+ a_3\left[\begin{array}{l} 3x^2 + \frac{0{,}2}{L}x^3 + \left(\frac{0{,}015}{L^2} - \frac{1}{4}\frac{P}{EI_0}\right)x^4 + \left(\frac{1{,}2\times10^{-3}}{L^3} - \frac{0{,}03}{L}\frac{P}{EI_0}\right)x^5 \\ + \left(\frac{1\times10^{-4}}{L^4} - \frac{3\times10^{-3}}{L^2}\frac{P}{EI_0} + 8{,}3335\times10^{-3}\frac{P^2}{(EI_0)^2}\right)x^6 \\ + \left(\frac{8{,}572\times10^{-6}}{L^5} - \frac{2{,}8571\times10^{-4}}{L^3}\frac{P}{EI_0} + \frac{1{,}4286\times10^{-3}}{L}\frac{P^2}{(EI_0)^2}\right)x^7 \\ + \left(\begin{array}{l} \frac{7{,}5006\times10^{-7}}{L^6} - \frac{2{,}6786\times10^{-5}}{L^4}\frac{P}{EI_0} + \frac{1{,}7857\times10^{-4}}{L^2}\frac{P^2}{(EI_0)^2} \\ -1{,}4882\times10^{-4}\frac{P^3}{(EI_0)^3} \end{array}\right)x^8 \\ +\ldots \end{array}\right] \qquad (3.25)$$

İkinci sınır koşulunun seriye uygulamasından sonra $a_1=0$ olduğu görülmüştür.

$$w'' = a_2\left[\begin{array}{l} 2 - \frac{P}{(EI_0)}x^2 - \frac{0{,}1}{L}\frac{P}{(EI_0)}x^3 - \left(\frac{9{,}999\times10^{-3}}{L^2}\frac{P}{(EI_0)} - 0{,}0835\frac{P^2}{(EI_0)^2}\right)x^4 \\ -\left(\frac{9{,}999\times10^{-4}}{L^3}\frac{P}{(EI_0)} - \frac{0{,}0133}{L}\frac{P^2}{(EI_0)^2}\right)x^5 \\ -\left(\frac{9{,}9988\times10^{-5}}{L^4}\frac{P}{(EI_0)} - \frac{1{,}6667\times10^{-3}}{L^2}\frac{P^2}{(EI_0)^2} + 2{,}7780\times10^{-3}\frac{P^3}{(EI_0)^3}\right)x^6 \\ -\left(\frac{9{,}9984\times10^{-6}}{L^5}\frac{P}{(EI_0)} - \frac{1{,}9048\times10^{-4}}{L^3}\frac{P^2}{(EI_0)^2} + \frac{5{,}9527\times10^{-4}}{L}\frac{P^3}{(EI_0)^3}\right)x^7 \\ -\ldots \end{array}\right]$$

$$+a_3\left[\begin{array}{l} 6x+\frac{0,6}{L}x^2+\left(\frac{0,06}{L^2}-\frac{P}{EI_0}\right)x^3+\left(\frac{6\times10^{-3}}{L^3}-\frac{0,15}{L}\frac{P}{EI_0}\right)x^4 \\ +\left(\frac{6\times10^{-4}}{L^4}-\frac{0,018}{L^2}\frac{P}{EI_0}+0,05\frac{P^2}{(EI_0)^2}\right)x^5 \\ +\left(\frac{6\times10^{-5}}{L^5}-\frac{2\times10^{-3}}{L^3}\frac{P}{EI_0}+\frac{0,01}{L}\frac{P^2}{(EI_0)^2}\right)x^6 \\ +\left(\begin{array}{l}\frac{6\times10^{-6}}{L^6}-\frac{2,1429\times10^{-4}}{L^4}\frac{P}{EI_0}+\frac{1,4286\times10^{-3}}{L^2}\frac{P^2}{(EI_0)^2} \\ -1,1906\times10^{-3}\frac{P^3}{(EI_0)^3}\end{array}\right)x^7 \\ +\ldots \end{array}\right] \tag{3.26}$$

$$w''(L)=a_2\left[\begin{array}{l} 2-\frac{P}{(EI_0)}L^2-\frac{0,1}{L}\frac{P}{(EI_0)}L^3-\left(\frac{9,999\times10^{-3}}{L^2}\frac{P}{(EI_0)}-0,0835\frac{P^2}{(EI_0)^2}\right)L^4 \\ -\left(\frac{9,999\times10^{-4}}{L^3}\frac{P}{(EI_0)}-\frac{0,0133}{L}\frac{P^2}{(EI_0)^2}\right)L^5 \\ -\left(\frac{9,9988\times10^{-5}}{L^4}\frac{P}{(EI_0)}-\frac{1,6667\times10^{-3}}{L^2}\frac{P^2}{(EI_0)^2}+2,7780\times10^{-3}\frac{P^3}{(EI_0)^3}\right)L^6 \\ -\left(\frac{9,9984\times10^{-6}}{L^5}\frac{P}{(EI_0)}-\frac{1,9048\times10^{-4}}{L^3}\frac{P^2}{(EI_0)^2}+\frac{5,9527\times10^{-4}}{L}\frac{P^3}{(EI_0)^3}\right)L^7 \\ -\ldots \end{array}\right]$$

$$+a_3\left[\begin{array}{l} 6L+\frac{0,6}{L}L^2+\left(\frac{0,06}{L^2}-\frac{P}{EI_0}\right)L^3+\left(\frac{6\times10^{-3}}{L^3}-\frac{0,15}{L}\frac{P}{EI_0}\right)L^4 \\ +\left(\frac{6\times10^{-4}}{L^4}-\frac{0,018}{L^2}\frac{P}{EI_0}+0,05\frac{P^2}{(EI_0)^2}\right)L^5 \\ +\left(\frac{6\times10^{-5}}{L^5}-\frac{2\times10^{-3}}{L^3}\frac{P}{EI_0}+\frac{0,01}{L}\frac{P^2}{(EI_0)^2}\right)L^6 \\ +\left(\begin{array}{l}\frac{6\times10^{-6}}{L^6}-\frac{2,1429\times10^{-4}}{L^4}\frac{P}{EI_0}+\frac{1,4286\times10^{-3}}{L^2}\frac{P^2}{(EI_0)^2} \\ -1,1906\times10^{-3}\frac{P^3}{(EI_0)^3}\end{array}\right)L^7 \\ +\ldots \end{array}\right]=0 \tag{3.27}$$

Denklem (3.27)'de a_3, a_2 cinsinden yazılacak şekilde düzenlenmiştir, Denklem (3.28).

$$a_3 = -\frac{a_2}{L}\left\{\frac{\left[2 - 1{,}1111\frac{PL^2}{(EI_0)} + 0{,}09866\frac{(PL^2)^2}{(EI_0)^2} - 3{,}3733\times10^{-3}\frac{(PL^2)^3}{(EI_0)^3}\right]}{\left[6{,}6666 - 1{,}1702\frac{PL^2}{(EI_0)} + 0{,}0614\frac{(PL^2)^2}{(EI_0)^2} - 1{,}1906\times10^{-3}\frac{(PL^2)^3}{(EI_0)^3}\right]}\right\} \quad (3.28)$$

$$k = \left\{\frac{\left[2 - 1{,}1111\frac{PL^2}{(EI_0)} + 0{,}09866\frac{(PL^2)^2}{(EI_0)^2} - 3{,}3733\times10^{-3}\frac{(PL^2)^3}{(EI_0)^3}\right]}{\left[6{,}6666 - 1{,}1702\frac{PL^2}{(EI_0)} + 0{,}0614\frac{(PL^2)^2}{(EI_0)^2} - 1{,}1906\times10^{-3}\frac{(PL^2)^3}{(EI_0)^3}\right]}\right\} \quad (3.29)$$

Denklem (3.29)'da k olarak tanımlanan bağıntı verilmiştir ve Denklem (3.28) yeniden düzenlenmiştir, Denklem (3.30).

$$a_3 = -\frac{a_2}{L}k \quad (3.30)$$

$$w''' = a_2\left[\begin{array}{l} -2\frac{P}{(EI_0)}x - \frac{0{,}3}{L}\frac{P}{(EI_0)}x^2 - \left(\frac{0{,}04}{L^2}\frac{P}{(EI_0)} - 0{,}334\frac{P^2}{(EI_0)^2}\right)x^3 \\ -\left(\frac{5\times10^{-3}}{L^3}\frac{P}{(EI_0)} - \frac{0{,}0665}{L}\frac{P^2}{(EI_0)^2}\right)x^4 \\ -\left(\frac{6\times10^{-4}}{L^4}\frac{P}{(EI_0)} - \frac{0{,}01}{L^2}\frac{P^2}{(EI_0)^2} + 0{,}0167\frac{P^3}{(EI_0)^3}\right)x^5 \\ -\left(\frac{7\times10^{-5}}{L^5}\frac{P}{(EI_0)} - \frac{1{,}3334\times10^{-3}}{L^3}\frac{P^2}{(EI_0)^2} + \frac{4{,}1669\times10^{-3}}{L}\frac{P^3}{(EI_0)^3}\right)x^6 \\ -\ldots \end{array}\right]$$

$$+a_3\left[\begin{array}{l} 6+\frac{1,2}{L}x+\left(\frac{0,18}{L^2}-\frac{3P}{EI_0}\right)x^2+\left(\frac{0,024}{L^3}-\frac{0,6}{L}\frac{P}{EI_0}\right)x^3 \\ +\left(\frac{3\times10^{-3}}{L^4}-\frac{0,09}{L^2}\frac{P}{EI_0}+0,25\frac{P^2}{(EI_0)^2}\right)x^4 \\ +\left(\frac{3,6\times10^{-4}}{L^5}-\frac{0,012}{L^3}\frac{P}{EI_0}+\frac{0,06}{L}\frac{P^2}{(EI_0)^2}\right)x^5 \\ +\left(\frac{4,2\times10^{-5}}{L^6}-\frac{1,5\times10^{-3}}{L^4}\frac{P}{EI_0}+\frac{0,01}{L^2}\frac{P^2}{(EI_0)^2}-8,3342\times10^{-3}\frac{P^3}{(EI_0)^3}\right)x^6 \\ +\ldots \end{array}\right] \tag{3.31}$$

Dördüncü sınır koşulu Denklem (3.24) dikkate alınarak Denklem (3.30) düzenlenmiştir, Denklem (3.32).

$$a_2\left[\begin{array}{l} 2PL-\frac{1}{3}\frac{P^2L^3}{(EI_0)}-0,025\frac{P^2L^3}{(EI_0)}-1,9998\times10^{-3}\frac{P^2L^3}{(EI_0)}+0,0167\frac{P^3L^5}{(EI_0)^2} \\ -1,6665\times10^{-4}\frac{P^2L^3}{(EI_0)}+2,2224\times10^{-3}\frac{P^3L^5}{(EI_0)^2}-1,4284\times10^{-5}\frac{P^2L^3}{(EI_0)} \\ +2,381\times10^{-4}\frac{P^3L^5}{(EI_0)^2}-3,9686\times10^{-4}\frac{P^4L^7}{(EI_0)^3}-1,2498\times10^{-6}\frac{P^2L^3}{(EI_0)} \\ +2,381\times10^{-5}\frac{P^3L^5}{(EI_0)^2}-7,4409\times10^{-5}\frac{P^4L^7}{(EI_0)^3}-1,8PL-0,27PL \\ -0,036PL+0,3006\frac{P^2L^3}{(EI_0)}-4,5\times10^{-3}PL+0,0599\frac{P^2L^3}{(EI_0)} \\ -5,4\times10^{-4}PL+9\times10^{-3}\frac{P^2L^3}{(EI_0)}-0,015\frac{P^3L^5}{(EI_0)^2}-6,3\times10^{-5}PL \\ +1,2001\times10^{-3}\frac{P^2L^3}{(EI_0)}-3,7502\times10^{-3}\frac{P^3L^5}{(EI_0)^2} \end{array}\right]$$

$$= ka_2 \left[\begin{array}{l} 3PL + 0{,}2PL + 0{,}015PL - \frac{1}{4}\frac{P^2L^3}{(EI_0)} + 1{,}2\times10^{-3}PL - 0{,}03\frac{P^2L^3}{(EI_0)} \\ + 1\times10^{-4}PL - 3\times10^{-3}\frac{P^2L^3}{(EI_0)} + 8{,}3335\times10^{-3}\frac{P^3L^5}{(EI_0)^2} + 8{,}572\times10^{-6}PL \\ - 2{,}8571\times10^{-4}\frac{P^2L^3}{(EI_0)} + 1{,}4286\times10^{-3}\frac{P^3L^5}{(EI_0)^2} + 7{,}5006\times10^{-7}PL \\ - 2{,}6786\times10^{-5}\frac{P^2L^3}{(EI_0)} + 1{,}7857\times10^{-4}\frac{P^3L^5}{(EI_0)^2} - 1{,}4882\times10^{-4}\frac{P^4L^7}{(EI_0)^3} \\ + 5{,}4\frac{EI_0}{L} + 1{,}08\frac{EI_0}{L} + 0{,}162\frac{EI_0}{L} - 2{,}7PL + 0{,}0216\frac{EI_0}{L} - 0{,}54PL \\ + 2{,}7\times10^{-3}\frac{EI_0}{L} - 0{,}081PL + 0{,}225\frac{P^2L^3}{(EI_0)} + 3{,}24\times10^{-4}\frac{EI_0}{L} - 0{,}0108PL \\ + 0{,}054\frac{P^2L^3}{(EI_0)} + 3{,}78\times10^{-5}\frac{EI_0}{L} - 1{,}35\times10^{-3}PL + 9\times10^{-3}\frac{P^2L^3}{(EI_0)} \\ - 7{,}5008\times10^{-3}\frac{P^3L^5}{(EI_0)^2} \end{array} \right] \quad (3.32)$$

$$\left(- 0{,}1111PL + 0{,}0102\frac{P^2L^3}{(EI_0)} + 4{,}3411\times10^{-4}\frac{P^3L^5}{(EI_0)^2} - 4{,}7127\times10^{-4}\frac{P^4L^7}{(EI_0)^3} \right)$$

$$= k\left(\begin{array}{l} 6{,}6666\frac{EI_0}{L} - 0{,}1168PL + 4{,}6875\times10^{-3}\frac{P^2L^3}{(EI_0)} + 2{,}4399\times10^{-3}\frac{P^3L^5}{(EI_0)^2} \\ - 1{,}4882\times10^{-4}\frac{P^4L^7}{(EI_0)^3} \end{array} \right) \quad (3.33)$$

Denklem (3.33) $L/(EI_0)$ ile genişletilmiştir, Denklem (3.34).

$$\left(- 0{,}1111\frac{PL^2}{(EI_0)} + 0{,}0102\frac{P^2L^4}{(EI_0)^2} + 4{,}3411\times10^{-4}\frac{P^3L^6}{(EI_0)^3} - 4{,}7127\times10^{-4}\frac{P^4L^8}{(EI_0)^4} \right)$$

$$= k\left(\begin{array}{l} 6{,}6666 - 0{,}1168\frac{PL^2}{(EI_0)} + 4{,}6875\times10^{-3}\frac{P^2L^4}{(EI_0)^2} + 2{,}4399\times10^{-3}\frac{P^3L^6}{(EI_0)^3} \\ - 1{,}4882\times10^{-4}\frac{P^4L^8}{(EI_0)^4} \end{array} \right) \quad (3.34)$$

İşlem kolaylığı için daha önceden tanımlamış olduğumuz Denklem (2.22)'deki γ değerini hem Denklem (3.34)'de hem de Denklem (3.29)'da yerine yazarak adımlara devam edilmiştir, Denklem (3.35) ve Denklem (3.36).

$$\begin{aligned}&\left(-0,1111\gamma+0,0102\gamma^2+4,3411\times10^{-4}\gamma^3-4,7127\times10^{-4}\gamma^4\right)\\&=k\left(6,6666-0,1168\gamma+4,6875\times10^{-3}\gamma^2+2,4399\times10^{-3}\gamma^3-1,4882\times10^{-4}\gamma^4\right)\end{aligned}\tag{3.35}$$

$$k=\left\{\frac{\left[2-1,1111\gamma+0,09866\gamma^2-3,3733\times10^{-3}\gamma^3\right]}{\left[6,6666-1,1702\gamma+0,0614\gamma^2-1,1906\times10^{-3}\gamma^3\right]}\right\}\tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}&-13,3332+6,9002\gamma-0,5989\gamma^2+0,0185\gamma^3-7,39\times10^{-4}\gamma^4+1,7573\times10^{-4}\gamma^5\\&-6,539\times10^{-6}\gamma^6+5,908\times10^{-8}\gamma^7=0\end{aligned}\tag{3.37}$$

Denklem (3.37) Microsoft Mathematics Programında çözüldüğünde, bir ucu ankastre bir ucu serbest değişken kesitli kolonun burkulma yüküne ulaşılmıştır. Denklem ilk yedi terimle çok hızlı bir şekilde yakınsamıştır. Denklem (3.37)'nin verdiği sonuç aşağıdaki gibidir, Denklem (3.39).

$$\gamma=2,395\tag{3.38}$$

$$P=2,395\frac{EI_0}{L^2}\tag{3.39}$$

Değişken kesitli bir ucu ankastre bir ucu serbest kolon için bulunan burkulma yükünün uygunluğunun kontrol edilmesi;

Değişken kesitli kolonun EI_0 değerinin EI_0 ve $0,9EI_0$ değerleri arasında değiştiği belirtilmişti, bu bilgi doğrultusunda bulunan burkulma yükünün EI_0 ile başlayan ve hiç kesit değişikliğine uğramamış kolonun burkulma yükü, Denklem (3.41), ile $0,9EI_0$ ile başlayan ve hiç kesit değişikliğine uğramayan kolonun burkulma yükü, Denklem (3.42) arasında olmalıdır. Yani bu iki değer bulduğumuz burkulma yükü için, Denklem (3.39), sınır olmalıdır. Uygunluk kontrolü Denklem (3.43)'teki gibidir.

$$EI(x)=EI_0\left(1-0,1\frac{x}{L}\right)\tag{3.40}$$

Sabit kesitli bir kolonun EI_0 eğilme rijitliği için;

$$P_{cr} = 2{,}4674\frac{EI_0}{L^2} \tag{3.41}$$

Sabit kesitli bir kolonun $0{,}9EI_0$ eğilme rijitliği için;

$$P_{cr} = 2{,}2207\frac{EI_0}{L^2} \tag{3.42}$$

Uygunluk kontrolü;

$$P_{cr} = 2{,}2207\frac{EI_0}{L^2} \langle P = 2{,}395\frac{EI_0}{L^2} \langle P_{cr} = 2{,}4674\frac{EI_0}{L^2} \tag{3.43}$$

3.2.2. İkinci ve üçüncü burkulma modları

Değişken kesitli kolonun burkulma yükü ilk modda elde edilmiş, dolayısıyla 10 terim açıldığında sonuca ulaşılabilmiştir; ama daha ileri modlar söz konusu olduğunda, daha duyarlı sonuçlar elde edebilmek için serinin daha ileri terimlerde açılması gerekmiştir ve seride hata oranları göz önüne alınarak 28 terim açılmıştır. Aşağıda gerekli işlem adımları gerçekleştirilmiştir.

$$\begin{aligned} a_{10} = & \left(\frac{6{,}6672\times10^{-9}}{L^7} - \frac{2{,}5001\times10^{-7}}{L^5}\frac{P}{EI_0} + \frac{1{,}9841\times10^{-6}}{L^3}\frac{P^2}{(EI_0)^2} \right. \\ & \left. - \frac{3{,}3069\times10^{-6}}{L}\frac{P^3}{(EI_0)^3} \right) a_3 \\ & - \left(\frac{1{,}1110\times10^{-8}}{L^6}\frac{P}{EI_0} - \frac{2{,}3149\times10^{-7}}{L^4}\frac{P^2}{(EI_0)^2} + \frac{9{,}9212\times10^{-7}}{L^2}\frac{P^3}{(EI_0)^3} \right. \\ & \left. - 5{,}5119\times10^{-7}\frac{P^4}{(EI_0)^4} \right) a_2 \end{aligned} \tag{3.44}$$

$$a_{11}=\left(\frac{5,455\times10^{-10}}{L^{8}}-\frac{2,1213\times10^{-8}}{L^{6}}\frac{P}{EI_0}+\frac{1,894\times10^{-7}}{L^{4}}\frac{P^{2}}{(EI_0)^{2}}-\frac{4,5093\times10^{-7}}{L^{2}}\frac{P^{3}}{(EI_0)^{3}}+1,5032\times10^{-7}\frac{P^{4}}{(EI_0)^{4}}\right)a_3-\left(\frac{9,09\times10^{-10}}{L^{7}}\frac{P}{EI_0}-\frac{2,0203\times10^{-8}}{L^{5}}\frac{P^{2}}{(EI_0)^{2}}+\frac{1,0522\times10^{-7}}{L^{3}}\frac{P^{3}}{(EI_0)^{3}}-\frac{1,2026\times10^{-7}}{L}\frac{P^{4}}{(EI_0)^{4}}\right)a_2 \tag{3.45}$$

$$a_{12}=\left(\frac{4,5455\times10^{-11}}{L^{9}}-\frac{1,8182\times10^{-9}}{L^{7}}\frac{P}{EI_0}+\frac{1,7677\times10^{-8}}{L^{5}}\frac{P^{2}}{(EI_0)^{2}}-\frac{5,2609\times10^{-8}}{L^{3}}\frac{P^{3}}{(EI_0)^{3}}+\frac{3,7578\times10^{-8}}{L}\frac{P^{4}}{(EI_0)^{4}}\right)a_3-\left(\frac{7,5758\times10^{-11}}{L^{8}}\frac{P}{EI_0}-\frac{1,7677\times10^{-9}}{L^{6}}\frac{P^{2}}{(EI_0)^{2}}+\frac{1,0522\times10^{-8}}{L^{4}}\frac{P^{3}}{(EI_0)^{3}}-\frac{1,7536\times10^{-8}}{L^{2}}\frac{P^{4}}{(EI_0)^{4}}+4,1754\times10^{-9}\frac{P^{5}}{(EI_0)^{5}}\right)a_2 \tag{3.46}$$

$$a_{13}=\frac{11}{13}\times\frac{0,1}{L}\times a_{12}-\frac{1}{13\times12}\times\frac{P}{EI_0}\times a_{11} \tag{3.47}$$

$$a_{14}=\frac{12}{14}\times\frac{0,1}{L}\times a_{13}-\frac{1}{14\times13}\times\frac{P}{EI_0}\times a_{12} \tag{3.48}$$

Serinin diğer terimleri de Denklem (3.16)'ya uygun olarak, Denklem (3.47) ve (3.48)'deki gibi 28. terime kadar açılmıştır.

a_{13} - a_{27} arasındaki değerler seriden elde edilen bağıntıdan hareketle eşitlik olarak ifade edilmiştir ve ifadeler yerlerine yazılarak ve sınır koşulları 3.2.1. bölümde yapıldığı gibi sınır koşulları uygulanarak aşağıdaki seriye ulaşılmıştır, Denklem (3.49).

$$
\begin{aligned}
&2{,}0897\times10^{-40}\gamma^{21}-2{,}3521\times10^{-37}\gamma^{20}+4{,}3343\times10^{-34}\gamma^{19}\\
&-1{,}6939\times10^{-31}\gamma^{18}+4{,}6833\times10^{-29}\gamma^{17}-9{,}996\times10^{-27}\gamma^{16}\\
&+1{,}3233\times10^{-24}\gamma^{15}-1{,}7465\times10^{-22}\gamma^{14}+1{,}5909\times10^{-20}\gamma^{13}\\
&-8{,}9448\times10^{-19}\gamma^{12}+3{,}9257\times10^{-17}\gamma^{11}-3{,}2974\times10^{-15}\gamma^{10}\\
&+4{,}3044\times10^{-13}\gamma^{9}-3{,}6979\times10^{-11}\gamma^{8}+2{,}3961\times10^{-9}\gamma^{7}\\
&-1{,}0628\times10^{-7}\gamma^{6}+5{,}2005\times10^{-6}\gamma^{5}-0{,}000377\gamma^{4}+0{,}02067\gamma^{3}\\
&-0{,}6014\gamma^{2}+6{,}9006\gamma-13{,}3332=0
\end{aligned}
\tag{3.49}
$$

Denklem (3.49) Microsoft Mathematics programında çözdürülüp ikinci mod için değerler bulunmuştur ve bu ilgili değerler için de uygunluk kontrolü yapılmıştır, Denklem (3.52) başarılı sonuçlar elde edilmiştir.

Sabit kesitli bir kolonun EI_0 eğilme rijitliği için;

$$P_{cr}=\frac{9\pi^2EI_0}{4L^2}=22{,}2066\frac{EI_0}{L^2} \tag{3.50}$$

Sabit kesitli bir kolonun $0{,}9EI_0$ eğilme rijitliği için;

$$P_{cr}=18{,}1859\frac{EI_0}{L^2} \tag{3.51}$$

Uygunluk kontrolü;

$$P_{cr}=18{,}1859\frac{EI_0}{L^2}\langle P=20{,}8694\frac{EI_0}{L^2}\langle P_{cr}=22{,}2066\frac{EI_0}{L^2} \tag{3.52}$$

Üçüncü mod için 42,7316 değerine ulaşılmıştır, uygunluk kontrolünde bu değerin 55,5165 ve 61,6850 değerleri arasında yer alması gerekliydi, daha fazla a_i değeri açılarak işleme dahil edildiğinde serinin mod değerleri için seri hızlı yakınsamadığından çok daha fazla değer açıldığında üçüncü moda da ulaşılabileceği tahmin ediliyor.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Çalışmada değişken kesitli kolonların burkulma yükünü belirlemek için analitik bir yöntem olan kuvvet serileri yöntemi kullanılmıştır. Önerilen yöntemle sabit kesitli iki ucu mafsallı ve bir ucu ankastre bir ucu serbest kolonlar için çözüm elde edilmiş ve yöntem detaylı bir şekilde anlatılmıştır. Kuvvet serileri yöntemi özellikle birinci burkulma modlarında çok hızlı yakınsamıştır. Euler kolonuyla birebir sonuçlar elde edilmiştir ve gerekli karşılaştırmalar yapılıp yöntemin tutarlılığı gözlemlenmiştir. İleri burkulma modları için çalışmaya devam edilmiş, serilerde daha çok terim açılmıştır. İlk üç burkulma modu için elde edilen değerler Euler kolonunun değerleriyle karşılaştırıldığında oldukça yakın sonuçlara ulaşıldığı görülmüştür. Çalışmanın ikinci aşamasında, değişken kesitli kolon için kolonun alt ucunda kesitin eğilme rijitliği EI_0, üst ucunda $0{,}9EI_0$ olduğu, eğilme rijitliğinin eleman boyunca doğrusal olarak değiştiği varsayılmıştır. Daha sonra işlem adımları uygulanmış ve problemin çözümü sabit kesitli kolonun çözümü kadar kolay olmasa da olması gereken aralıkta uygun sonuçlara ulaşılmıştır. Bir ucu serbest bir ucu ankastre değişken kesitli kolon ve iki ucu mafsallı değişken kesitli kolon modlarına ulaşmak için seride daha fazla değer açılmıştır. İncelenen bu vakalarda da uygunluk kontrolü yapılıp doyurucu sonuçlara ulaşıldığı gözlemlenmiştir. Kuvvet serileri yönteminin değişken kesitli kolonun burkulma yükünü bulmak için uygulanabilir bir yöntem olduğu sonucuna varılmıştır. Aynı zamanda kuvvet serileri yönteminin, EI değişiminin farklı fonksiyonları için uygulanabileceği düşünülmektedir. Bu foksiyonlar;

$$EI(x) = \alpha e^{-bx} \tag{4.1}$$

$$EI(x) = \alpha(1 - bx)^2 \tag{4.2}$$

şeklinde örneklendirilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Chajes A., *Principles of Structural Stability Theory*, 1st ed., Prentice Hall, Inc.Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.

[2] Coşkun S. B., Analysis of Tilt-Buckling of Euler Columns with Varying Flexural Stifness Using Homotopy Perturbation Method, *Mathematical Modeling and Analysis*, 2010, **15**(3), 275-286.

[3] Higdon A., Ohlsen E. H., Stiles B. S., Weese J. A., Riley W. F., *Mechanics of Materials*, 4 th ed., Published by John Wiley & Sons, USA, 1985.

[4] Li Q. S., Exact Solutions for Buckling of Non-Uniform Columns Under Axial Concentrated and Distributed Loading, *Eur. J. Mech. A/Solids*, **20**(3), 2001, 485-500.

[5] Kreyszig H., Kreyszig E., Norminton E. J., *Advanced Engineering Mathematics*, 10 th ed., Published by John Wiley & Sons, USA, 2010.

[6] Ashok A. K., Biggers S. B., Stiffness Matrix for a Non-Prismatic Beam-Column Element, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1976, **10**(5), 1125-1142.

[7] Hamoush S.A., Terro M.J., Mcginley W.M., Elastic and Inelastic Analysis of Non-Prismatic Members Using Finite Difference, *Kuwait Journal of Science*, 2002, **29**(2), 165-180.

[8] İnan M., *Cisimlerin Mukavemeti*, İTÜ, İstanbul, Türkiye, 1988.

[9] Beer F. P., Johnston E. R., *Cisimlerin Mukavemeti*, İstanbul ,Türkiye, 2003.

[10] Siginer A., Buckling of Columns of Variable Flexural Stiffness, *J. Eng. Mech. ASCE*, 1992, **118**(3), 640.

[11] Biazar J., Ghazvini H., Convergence of The Homotopy Perturbation Method for Partial Differential Equations, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2009, **10**(5), 2633-2640.

[12] Teter A., Dynamic Critical Load Based on Different Stability Criteria forCoupled Buckling of Columns with Stifness Open Cross-Sections, *Thin Walled Structures*, 2011, **49**(5), 589-595.

KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER

[1] **Yazıcı Polat A.**, Okay F.,Determination of the Critical Buckling Load of Columns with Variable Cross-Section by Using the Method of Power Series, *International Conference on Innovations in Natural Science and Engineering (ICINSE 2018)*, Kuzey Kıbrıs Türk Cumhuriyeti, 3-6 Ocak 2018.

ÖZGEÇMİŞ

1991 tarihinde Bursa'da doğdu. İlköğrenimini Kükürtlü Ticaret ve Sanayi Odası İlköğretim Okulu'nda tamamladı. Lise öğrenimini Bursa Cumhuriyet Lisesi'nde tamamladı. 2014 yılında Kocaeli Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü'nü bölüm ikincisi olarak bitirdi. 2015 yılında başlamış olduğu Kocaeli Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine devam etmektedir.