T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEK TÜRLÜ ÇARPANLARINA AYRILABİLEN MODÜLLER

ELİF ÖZBULUR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
DOÇ. DR. MURAT ALAN

İSTANBUL, 2018

Bu çalışma, Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü' nün 2016-01-03-YL05 numaralı projesi ile desteklenmiştir

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanmasında her türlü desteğini benden esirgemeyen gerek lisansımda gerek yüksek lisansımda beni cesaretlendiren, sabrıyla, anlayışıyla ve çalışkanlığıyla örnek aldığım Sayın Hocam Doç. Dr. Murat Alan'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bugünlere gelmemde benden maddi ve manevi desteğini esirgemeyen aileme de sonsuz şükranlarımı sunarım.

Aralık, 2018

Elif ÖZBULUR

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ vi

ÖZET vii

ABSTRACT viii

BÖLÜM 1

GİRİŞ 1

1.1 Literatür Özeti 1
1.2 Tezin Amacı 1
1.3 Hipotez 1

BÖLÜM 2

TEK TÜRLÜ ÇARPANLARINA AYRILABİLEN MODÜLLER 2

2.1 Bölgeler 2
2.2 Halkalar 9
2.3 Modüller 14

BÖLÜM 3 18

SONUÇ VE ÖNERİLER 18

KAYNAKLAR 19

ÖZGEÇMİŞ 20

SİMGE LİSTESİ

$\in$	Elemanıdır
$\notin$	Elemanı değildir
$\sim$	İlgilidir
(a,b)	a ile b nin en büyük ortak böleni
$[a,b]$	a ile b nin en küçük ortak katı
$a \mid b$	a elemanı b yi böler

ÖZET

TEK TÜRLÜ ÇARPANLARINA AYRILABİLEN MODÜLLER

Elif ÖZBULUR

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Murat ALAN

D tamlık bölgesi olsun. Bilinir ki D tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölge olduğunda sıfırdan ve birimselden farklı her eleman ilgililik ve sıra farkıyla tek türlü çarpanlarına ayrılabilirdir. Burada da tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölgelerdeki özellikler değişmeli halkaların ardından birimli modüllerde genellenecektir.

Anahtar Kelimeler: Tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modüller, U-ayrışımı

ABSTRACT

ON UNIQUE FACTORIZATION MODULES

Elif ÖZBULUR

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Adviser: Assoc. Prof. Dr. Murat ALAN

Let D be an integral domain. It is well known that D is a Unique Factorization Domain (UFD) if and only if every nonzero non unit of D is a product of irreducibles, and this factorization into irreducibles is unique up to order and associates. There are several generalizations of this notion UFD to unitary modules over commutative rings.

Keywords: Unique factorization module, U-decomposition

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Matematiği anlamada ve anlamlandırmada önemli yeri olan cebir dersinin içinde halkalar konusu önemli yapıtaşlarından birisidir. Öyle ki bir çok konuda olduğu gibi bu konuda da yapılan çalışmalar sürekli yenisini doğurmakta ve çalışma alanını genişletmektedir. Bu tezde şimdiye kadar tek türlü çarpanlarına ayrılabilen halkalarda uygulanan özellikleri biraz genişletilerek modüller üzerindeki uygulamalarına odaklanılmıştır.Bunun için Sıfır Bölenli Değişmeli Halkalarda Çarpanlarına Ayrılabilme ve Sıfır Bölenli Değişmeli Halkalarda Çarpanlarına Ayrılabilme 2 yol gösterici olmuştur.

1.2 Tezin Amacı

Bu tezde amaç lisansüstü eğitimde faydalanılabilecek halkalar,bölgeler ve modüller üzerine tanımları genişletmek ve bakış açısı kazandırmak olmuştur. Tek türlü çarpanlarına ayrılabilen halkalarda lisansta kullanılan özellikler şimdi tek türlü çarpanlarına ayrılabilen sıfır bölenli halkalarda incelenecek ve ardından bunlar tek türlü çarpanlarına ayrılabilen birimli modüllerde incelenecek,U-ayrışımından yararlanılacak ve bu esnada torsion free, non-torsion free modül kavramlarına da değinilecektir.

1.3 Hipotez

M bir D-modül olsun. 0'ın M modülünde indirgenemez bir ayrışımı vardır ve modülden alınan indirgenemez bir elemanın U-ayrışımı vardır. M'deki her elemanın bir U-ayrışımı varsa M atomiktir ve eğer M'den alınan bir elemanın iki U-ayrışımı varsa da bu elemanlar birbiri ile ilgilidir.Ayrıca modülden alınan ve bir U-ayrışımına sahip elemanın ürettiği ideal ayrışımın ürettiği ideale eşitse M modülü devirli bir modüldür.

BÖLÜM 2

TEK TÜRLÜ ÇARPANLARINA AYRILABİLEN MODÜLLER

D tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bir halka olsun. Konunun daha iyi kavranabilmesi için ilk olarak tek türlü çarpanlarına ayrılabilen halkalar ve bu kısım ile ilgili ihtiyaç duyulabilecek birkaç tanıma yer verilecektir. Ardından değişmeli olmayan birimli halkalarda çarpanlarına ayrılabilme incelenecektir. Bu kısımda U-ayrışımı, special halka ve pseudo bölgelerin üzerinde durulduktan sonra son kısımda anlatılan bu özellikler tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modüller üzerinde incelenecektir.

2.1 Bölgeler

Tanım 2.1.1 Birimli, değişmeli ve sıfır bölensiz halkalara tamlık bölgesi denir. Özel olarak seçilen bir tamlık bölgesinde sıfırdan farklı olarak seçilen her elemanın tersi de mevcutsa bu tamlık bölgelerine cisim denir [1].

Örnek 2.1.2 $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası tamlık bölgesidir.

Tanım 2.1.3 a,b D tamlık bölgesinin elemanları olsun. D tamlık bölgesinden alınan bir c elemanı için $b=ac$ oluyorsa a , b yi böler denir ve $a \mid b$ şeklinde gösterilir [1].

Örnek 2.1.4 $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i$ tamsayılar halkasında $2+i \mid 5$ tir. Çünkü $5=(2+i)(2-i)$ şeklinde yazılırsa $2+i \in \mathbb{Z}+\mathbb{Z}i$ olduğundan $2+i \mid 5$ olur ya da benzer şekilde $2-i \mid 5$ dir.

Tanım 2.1.5 D tamlık bölgesi olsun.Öyleyse birim eleman daima 1 ile gösterilirse 1'in bölenlerine de birimsel eleman denir. Tüm birimsel elemanların kümesi U(D) ile gösterilir [1].

Örnek 2.1.6 $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i$ nin birimsel elemanlarından biri i dir. Öyle ki $i^4=1|1$ dir.

Tanım 2.1.7 D tamlık bölgesinden alınan iki a ve b elemanı için $a|b$ ve $b|a$ oluyorsa a ile b ilgilidir denir ve $a\sim b$ şeklinde gösterilir [1].

Örnek 2.1.8 $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i$ tamsayılar halkasında $1+i$ ile $1-i$ elemanları ilgili elemanlardır. Yani biri diğerinin birimsel kadar katıdır.

$$1+i=i(1-i) \tag{2.1}$$

Tanım 2.1.9 D tamlık bölgesinde alınan sıfırdan ve birimselden farklı bir p elemanı ve $a,b\in D$ için $p|ab$ ise $p|a$ veya $p|b$ ise p asal eleman denir [1].

Örnek 2.1.10 Tamsayılar halkasındaki 7 elemanı asal elemandır öyle ki $7=1.7=(-1).7$ olarak düşünüldüğü takdirde 7'nin kendisi ve birimsel eleman hariç bir çarpanı olmadığı görülür. Dolayısıyla 7 tamsayılar halkasında asal elemandır.

Örnek 2.1.11

$\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i$ tamsayılar halkasında 2 asal eleman değildir.

$2|(1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})=6$ yazılırsa burada $2\nmid(1+\sqrt{-5})$ ve $2\nmid(1-\sqrt{-5})$ olduğundan 2 asal eleman değildir.

Tanım 2.1.12 Tamlık bölgesinin sıfırdan ve birimselden farklı bir p elemanı için p=ab iken $a\in U(D)$ ya da $b\in U(D)$ oluyorsa p ye indirgenemez eleman denir [1].

Örnek 2.1.13 2 tamsayılar halkasında indirgenemezdir çünkü $2=1.2=2.1$ şeklinde yazıldığında çarpanları ya birimsel ya da kendisi olduğundan ve başka türlü bir yazılışı olmadığından hem asal hem indirgenemez elemandır.

Örnek 2.1.14 $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i$ tamsayılar halkasında 11 indirgenebilirdir. Öyle ki $11=(1+\sqrt{-10})(1-\sqrt{-10})$ yazılırsa $1+\sqrt{-10}$ ya da $1-\sqrt{-10}$ birimsel olmadığından 11 $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i$ tamsayılar halkasında indirgenebilirdir ancak $\mathbb{Z}$ de indirgenemezdir.

Teorem 2.1.15 D tamlık bölgesi olsun. Herhangi bir tamlık bölgesinde asal eleman indirgenemez elemandır ancak bu teoremin tersi doğru değildir [1].

İspat. D tamlık bölgesi ve $p\in D$ sıfırdan ve birimselden farklı asal bir eleman olsun. Öyleyse $p=ab$ yazılır.. Burada $p.1=ab$ ise p asal kabul edildiğinden $p\mid ab$ dir ve burada $p\mid a$ veya $p\mid b$ dir. Örneğin $p\mid a$ olsun. Bu durumda $a=px, x\in D$ dir.Öyleyse $p.1=ab$ denkleminde $a=px$ yerine yazılırsa $pxb=p1$ olur. D tamlık bölgesi olduğundan denklem soldan kısaltma özelliğini kullanarak $xb=1$ haline getirilir. Sonuç olarak buradan b birimsel çıkar. $p=ab$ eşitliğinde b birimsel olduğundan $a=p$ elde edilir.

Tersine, örneğin $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i$ tamsayılar halkasından 2 elemanı ele alınacak olursa 2 , $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\sqrt{5}$ kümesinde indirgenemezdir ancak asal değildir. Çünkü $2\mid(1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})=6$ yazıldığında $2\nmid(1+\sqrt{-5})$ ya da $2\nmid(1-\sqrt{-5})$ olduğundan asallığından söz edilemez.

Tanım 2.1.16 D tamlık bölgesinin boştan farklı bir alt kümesi I olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa I ya D nin bir ideali denir.

i) $a\in I, b\in I$ için $a-b\in I$ (2.2)

ii) $a\in I, r\in D$ için $ra\in I$ oluyorsa I , D nin bir idealidir [1].

Tanım 2.1.17 I , D nin bir ideali olsun. Eğer I ideali sadece bir a elemanı tarafından üretiliyorsa I ya temel ideal denir.Bu durumda $I=\langle a\rangle$ şeklinde gösterilir [1].

Tanım 2.1.18 D tamlık bölgesinin her ideali temel idealse D ye temel ideal bölgesi denir [1].

Teorem 2.1.19 Temel ideal bölgesinde indirgenemez eleman asal elemandır [1].

İspat. D bir temel ideal bölgesi olsun. $p \in D$ indirgenemez eleman olsun. Öyleyse $p \mid ab$ için $p \mid a$ veya $p \mid b$ olmalıdır. Burada $p \nmid a$ olduğunu kabul edilirse I ideali $\langle p, a \rangle$ ile üretilir. Madem ki D bir temel ideal bölgesi o halde $c \in D$ için c elemanı $\langle p, a \rangle$ ile üretilebilir. Yani $I = \langle p, a \rangle = \langle c \rangle$ dir. Dolayısıyla $c = ax + py$ denilebilir.

$$\begin{aligned} 1 &= cd = adx + pdy \\ b &= cdb = adxb + pdyb = (dx)ab + (bdy)p \end{aligned} \tag{2.3}$$

Eşitliklerinde $p \mid b$ olduğundan son eşitliklikte $p \mid ab$ olduğu görülür. Sonuç olarak p asal elemandır.

Tanım 2.1.20 D bir temel ideal bölgesi olsun. D nin elemanları $a_1, a_2, ..., a_n$ şeklinde olsun.

i) $d \mid a_1, a_2, ..., a_n$ olacak şekilde $d \in D$ ye bir ortak bölen denir.

ii) d burada herhangi bir ortak bölen olsun. Eğer buradaki her ortak bölen için

örneğin bir c elemanı için $c \mid d$ oluyorsa d elemanına en büyük ortak bölen denir [1].

Tanım 2.1.21 D bir temel ideal bölgesi olsun. D nin elemanları $a_1, a_2, ..., a_n$ şeklinde olsun. Burada sıfırdan ve birimselden farklı bir $d \in D$ için bu d sayısı D deki her elemanın katıysa d ye bir ortak kat denir. Eğer benzer şekilde başka bir $c \in D$ için c elemanı da D deki her elemanın katıysa c de ortak kat olur ve burada $c \mid d$ oluyorsa d ye ortak katların en küçüğü denir ve $[a_1, a_2, ..., a_n] = d$ ile gösterilir [1].

Tanım 2.1.22 D birimli, değişmeli bir halka olsun. D den alınan sıfırdan ve birimselden farklı bir eleman sonlu sayıda indirgenemezin çarpımı şeklinde yazılabiliyorsa bu elemana çarpanlarına ayrılabilirdir denir. Yani $0 \neq p_1, p_2, ..., p_n \in D$ için $a = p_1 p_2 ... p_n$, p_i ler indirgenemez oluyorsa $a \in D$ çarpanlarına ayrılabilirdir [1].

Tanım 2.1.23 D birimli, değişmeli bir halka olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa D ye tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölge denir.

i) D çarpanlarına ayrılabilen bölgedir. Yani D 'nin sıfırdan ve birimselden farklı her

elemanı çarpanlarına ayrılabilirdir.

ii) D deki her elemanın çarpanlarına ayrılışı ilgililik farkıyla tek türlüdür [1].

Teorem 2.1.24 Tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölgede her indirgenemez eleman asal elemandır [1].

İspat. D tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bir halka olsun. Halkadan alınan indirgenemez bir p elemanı için $p \mid ab$ ve $a,b \in D$ olsun. Burada eğer a birimselse $p \mid b$ olur veya b birimselse $p \mid a$ olur.Dolayısıyla p asal eleman olur. Peki burada a ya da b birimselden farklı olursa ne olur? Şimdi de a ve b nin birimsel olmadığı kabul edilsin. Öyleyse $p \mid ab$ için $ab = pc$ olacak şekilde sıfırdan ve birimselden farklı bir $c \in D$ olsun. Burada a ya da b birimsel olmadığından bir $d \in D$ için $d = ab = pc$ yazılırsa d de birimselden farklı olur. Eğer c birimsel eleman olsaydı $d = pc$ eşitliğinde d indirgenemez olurdu bu da $d = ab = pc$ eşitliğinde a veya b nin birimsel olmasını gerektirir. Bu da başlangıçta bu elemanların birimselden farklı seçilmesiyle çelişir. Dolayısıyla c kesinlikle birimselden farklıdır. D tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölge olduğundan $c_1,...,c_n,a_1,...a_m,b_1,...,b_k$ şeklinde indirgenemez elemanlara sahiptir. O yüzden $c = c_1...c_n, a = a_1...a_m, b = b_1...b_k$ şeklinde yazılabilir. Buradan da $d = pc_1...c_n = a_1...a_m b_1...b_k$ d nin iki farklı çarpanlarına ayrıldığını gösterir. Ancak D tek türlü kabul edildiğinden bu bir çelişki olur. O yüzden p elemanı $a_1,...a_m$ ya da $b_1,...,b_k$ lardan biriyle ilgilidir. Örneğin, p , $b_1,...,b_k$ ile ilgili olsun. Buradan $p \mid b$ elde edilir.Ya da benzer şekilde $p \mid a$ elde edilir. Sonuç olarak p asal elemandır.

Teorem 2.1.25 Tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölgede herhangi iki elemanın en büyük ortak böleni vardır [2].

İspat. D tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölge olsun. $a,b \in D$ sıfırdan ve birimselden farklı elemanlar olsunlar. a ya da b birimsel olursa $(a,b) = 1$ olur. O yüzden a ya da b birimselden farklı olsun. D tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölge olduğundan a elemanı $a = p_1^{t_1} p_2^{t_2} ... p_k^{t_k}$ şeklinde indirgenemez elemanların çarpımı şeklinde yazılabilir.Benzer şekilde b elemanı da $b = q_1^{r_1} q_2^{r_2} ... q_k^{r_k}$ şeklinde indirgenemez elemanların çarpımı şeklinde yazılabilir. Burada b nin herhangi bir çarpanı a nın

herhangi bir çarpanıyla ilgili olmasın. Örneğin q_1 elemanı ele alınsın. q_1, p_i lerle ilgili değilse $a = p_1^{t_1} p_2^{t_2} ... p_k^{t_k} q_1^{0}$ şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde q_2, p_i lerle ilgili olmasın. Yine $a = p_1^{t_1} p_2^{t_2} ... p_k^{t_k} q_1^{0} q_2^{0}$ yazılabilir. Şimdi de q_3 elemanı ele alınsın. Eğer q_3 herhangi bir p_i ile ilgiliyse bu eleman atlanıp q_4e bakılır. q_4 elemanı q_1 ve q_2 de olduğu gibi $p_i$lerle ilgili değilse $a = p_1^{t_1} p_2^{t_2} ... p_k^{t_k} q_1^{0} q_2^{0} q_4^{0} ... q_n^{r_n}$ yazılabilir. Aynı şeyler b elemanı için de yapılabilir. Şimdi $a = u_1^{n_1} ... u_m^{n_m}$ ve $b = u_1^{l_1} ... u_m^{l_m}$ yazılırsa burada u_i ler indirgenemezdir ve herhangi bir u_i , u_j ile ilgili değildir. Burada bir d elemanı $d = u_1^{k_1} ... u_m^{k_m}$ olarak alınırsa $d \mid a$ ve $d \mid b$ olduğu görülür. Yazılan bu çarpanlarına ayrılışta $k_i = \min\{n_i, l_i\}$ dir. Benzer şekilde başka bir c elemanı için de aynı şeyler yazılıp $c \mid a$ ve $c \mid b$ olduğu görülürse c nin herhangi bir indirgenemez çarpanı $u_1, ..., u_m$ ile ilgili olur. Yani $c = u_1^{h_1} ... u_m^{h_m}$ denilirse $h_i \geq 0, h_i \leq n_i, h_i \leq l_i, i = 1, ..., m$ olmak üzere $h_i \leq k_i$ olduğundan $c \mid d$ elde edilir. Sonuç olarak $(a,b) = d$ olduğu görülür.

Teorem 2.1.26 Tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölgede iki temel idealin arakesiti yine bir temel idealdir. Bu eleman da alınan herhangi iki elemanın bir en küçük ortak katını ifade eder [2].

İspat. D tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölge olsun. a, b elemanları D nin sıfırdan ve birimselden farklı elemanları olsun. Burada a ile b nin ürettiği idealler (a) ve (b) ile gösterilirse $(a) \cap (b) = I$ dir.Burada $a = 0$ ise $I = (0)$ olacağından $a, b \neq 0$ olsun. D den sıfırdan farklı bir x elemanı alınırsa D tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölge olduğundan $x = p_1^{a_1} ... p_n^{a_n}$ şeklinde indirgenemezlerin çarpımı şeklinde yazılabilir. Şimdi burada x'in iki indirgenemez ayrışımı $x = ak = bl$ şeklinde olsun. $a, b, l, k \in D$ olduğundan a ve b indirgenemezlerin bir çarpımı olarak ifade edilebilir. Yani $a = q_1 ... q_m$ ve $b = r_1 ... r_s$ yazılabilir. Öyleyse $x = q_1 ... q_m k = r_1 ... r_s l$ yazılırsa D tek türlü çarpanlarına ayrıldığından burada q_i ler herhangi bir r_j ile ilgilidir. O halde u ve v birimsel olmak üzere $q_1 ... q_m = u p_1^{\delta_1} ... p_n^{\delta_n}$ ya da $r_1 ... r_s = v p_1^{\beta_1} ... p_n^{\beta_n}$ yazılabilir. Burada $0 \leq \delta_i, \beta_i \leq \alpha_i$ olmak üzere $\sigma_i = \max(\delta_i, \beta_i) \leq \alpha_i$ için $c = p_1^{\sigma_1} ... p_n^{\sigma_n}$ yazılırsa $c \mid x$ olur ve böylece $x \in (c)$ elde edilir. Başlangıçta verilen $(a) \cap (b) = I$ eşitliğinden $I \subset (c)$ ve

buradan da $c \in (a), c \in (b)$ olduğu görülür. Sonuç olarak $(c) \in I$ olur ki bu da $I = (c)$ olmasını gerektirir.

Teorem 2.1.27 Aşağıdaki koşullar denktir.

i) D tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölgedir.

ii) D^* ın birimselden farklı her elemanı asalların çarpımıyla ifade edilebilir.

iii) Halkadan ve sıfırdan farklı her asal ideal sıfırdan farklı bir temel ideal içerir [2].

İspat.

$i \Rightarrow ii$ Bir önceki teoremde gösterildi.

$ii \Rightarrow iii$ P , halkadan ve sıfırdan farklı D nin bir asal ideali olsun. D tek türlü çarpanlarına ayrılabildiğinden bir $a \in P$ için a elemanı asalların çarpımı şeklinde yazılabilir. Yani $a = p_1 ... p_n$ şeklindedir. Bundan dolayı $p_i \in P$ için $(p_i) \subset P$ dir.

$iii \Rightarrow ii$ S sonlu sayıdaki birimsel ve asal elemanların çarpımlarının bir kümesi olsun. O zaman S , D nin çarpımsal kapalı bir alt kümesi ve saturated kümedir yani $ab \in S$ olmak üzere $a \in S, b \in S$ dir. Burada $ab = p_1 ... p_n$ bir asal ayrışım olsun. Öyleyse $p_1 \mid a$ dır ve $a = p_1 k$ yazılır. Dolayısıyla $p_1 kb = p_1 ... p_n$ yazılırsa tümevarımdan sonuca ulaşılır. Burada $S = D^*$ olursa ispat tamamlanmış olur. O halde $S \neq D^*$ kabul edilsin. Öyleyse S de sıfırdan farklı bir a elemanı vardır öyle ki S saturated olduğundan $(a) \cap S = \varnothing$ dir. Bu şekilde bir zincirin birleşimi olan S kümesi boş kümeyle bileşimi olan ve Zorn lemmadan bir I maksimal ideali olan tüm ideallerin kümesidir. I ideali de D deki asal idealdir. $x, y \notin I$ ise $(I, x) \cap S \neq \varnothing$ ve $s_1 \in S$ ve $i_1 \in I$ için $s_1 = i_1 + xr_1$ dir. Benzer şekilde $s_2 = i_2 + xr_2$ dir. Dolayısıyla $s_1 s_2 = i_1 s_2 + iyr_2 + xr_1 i_2 + xr_1 yr_2$ ve $xy \notin I$ dır. Hipotezden bir p asalı vardır öyle ki $(p) \subseteq I$ dır. Öyleyse $p \notin S$ olur ki bu da çelişkidir.

$ii \Rightarrow i$ Tek türlü çarpanlarına ayrılabilmenin birinci şartı sağlansın. $q \in R$ herhangi bir indirgenemez eleman olsun. Hipotezden p_i asalları için $q = p_1 ... p_n$ olur. Dolayısıyla q ve p_1 ilgilidir ve $p_2 ... p_n$ birimseldir. Bu da $n = 1$ ve $q = p_1$ olmasını gerektirir ve bundan dolayı D nin tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölge olduğu görülür.

Teorem 2.1.28 D tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölge ise $D[x]$ polinom halkası da tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölgedir [2].

İspat. D tek türlü çapanlarına ayrılabildiğinden $D[x]$ in sıfırdan ve birimselden farklı her $f(x)$ polinomu indirgenemezlerin çarpımı şeklindedir. Bu çarpım $c_1...c_m p_k(x) = d_1...d_n q_1(x)...q_t(x)$ şeklinde olsun. Burada c_i ile d_j ler D de, $p_i(x)$ ve $q_j(x)$ ler de $D[x]$ de indirgenemezdir. Burada D tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölge olduğundan $c_1,...,c_m$ elemanları $d_1,...,d_n$ lerle ve $p_1(x),...,p_k(x)$ ler de $q_1(x),...,q_t(x)$ lerle ilgilidir. Bundan dolayı $c_1...c_m = ud_1...d_n$ şeklindedir. İndirgenemez elemanla ilgili olan eleman indirgenemez olacağından $m = n$ dir ve uygun bir sıralamaya göre c_1 , ud_1 ile ilgili olur. Benzer şekilde c_i ler d_j lerle ilgili olur. Şimdi de D nin bir kesir cismi olarak F cismi ele alınsın. Burada aldığımız $p_i(x)$ ve $q_j(x)$ polinomları $F[x]$ de indirgenemezdir. Dolayısıyla $F[x]$, F cismi D nin tek türlü çarpanlarına ayrılabilen halkasında bir kesir cismi olduğundan $D[x]$ de alınan indirgenemez bir eleman $F[x]$ de de indirgenemez olur ve uygun bir sıralamanın ardından $p_i(x)$ ler $q_j(x)$ lerle ilgili olur. Sonuç olarak $p_i(x)$ ve $q_j(x)$ ilgilidir ve $D[x]$ tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölgedir.

2.2 Halkalar

Bu bölümde sıfır bölen de içeren birimli halkalarda tek türlü çarpanlarına ayrılabilme özellikleri incelenecektir.

Tanım 2.2.1 $i = 1,...,n$ olmak üzere $d \in D$ elemanı $d = a_1...a_n$ şeklinde yazılabiliyorsa bu d elemanına a_i lerin bir iceltilmişi denir [2].

Tanım 2.2.2 İndirgenemezlik tanımı

Birimselden farklı bir $p \in D$ nin her çarpanı yine p yi içeren bir incelme içeriyorsa $p \in D$ ye indirgenemez eleman denir [2].

Tanım 2.2.3 Bir $d \in D$ nin U-sınıfı $U(d)$ ile gösterilir ve $U(d) = \{\alpha \in D \mid \alpha\beta d = d, \beta \in D\}$ dir [2].

Teorem 2.2.4

i) $\alpha, \beta \in U(d)$ ise $\alpha\beta \in U(d)$ dir.

ii) $\alpha \in U(ds)$ ve $d \in U(s)$ ise $\alpha \in U(s)$ dir.

iii) $U(d) \subseteq U(ds)$ dir.

iv)Sıfırdan farklı bir α için $U(\alpha d) = U(d)$ dir [2].

İspat.

i) $\alpha \in U(d)$ ise $\alpha xd = d$ ve

$\beta \in U(d)$ ise $\beta yd = d$ olacak şekilde $x, y \in D$ vardır.

Buradaki eşitliklerden $\alpha\beta xyd = d$ olduğundan $\alpha\beta \in U(d)$ olur.

ii) $\alpha \in U(ds)$ ise $\alpha xds = ds$ olacak şekilde $x \in D$ vardır. Bu ifade bir $y \in D$ ile

genişletilirse $\alpha yxds = yds$ elde edilir. Uygun bir şekilde paranteze alınırsa $\alpha(xyd)s = (yd)s$ yazıldığında y de bir U-sınıfı olduğundan $\alpha(xyd)s = s$ olacaktır. Dolayısıyla buradan da $\alpha \in U(s)$ ve $d \in U(s)$ olduğu görülür.

iii) $U(d) \subseteq U(ds)$ için $\alpha \in U(d)$ ise $\alpha xd = d$ olacak şekilde $x \in D$ vardır. Bu eşitlik

bir $s \in D$ ile genişletilirse $\alpha xds = ds$ elde edilir. Bu son eşitlikten $\alpha \in U(ds)$ olduğunda göre $U(d) \subseteq U(ds)$ olduğu görülür.

iv) $x \in U(\alpha d)$ olsun. Dolayısıyla $xy\alpha d = \alpha d$ olacak şekilde bir $y \in D$ vardır.

Öyleyse αd eşitliğin diğer tarafına atılırsa, $xy\alpha d - \alpha d = 0$ elde edilir. Bu ifade uygun şekilde paranteze alınırsa $\alpha(xyd - d) = 0$ olduğu görülür. Burada $\alpha \neq 0$ olduğundan $xyd - d = 0$ olur. Yani $xyd = d$ denilirse $x \in U(d)$ elde edilir.

Tanım 2.2.5 $d \in D$ nin bir çarpanlarına ayrılışı $d = (p_1'...p_k')(p_1...p_n)$ şeklinde olsun. Öyle ki bu çarpanlarına ayrılışta p_i' ve p_j ler indirgenemezdir ve $p_i' \in U(p_1...p_n)$ ve $p_j \notin U(p_1...\tilde{p}_j...p_n)$ dir. Bu çarpanlarına ayrılışa d nin bir U-ayrışımı denir ve $d = ()(p_1...p_n)$ şeklinde gösterilir [2].

Teorem 2.2.6 Bir $d \in D$ nin indirgenemez ayrışımı varsa U-ayrışımı da vardır [2].

İspat. $d \in D$ indirgenemez bir ayrışımı $d = p_1...p_n$ olsun. Buradan ya $d = ()(p_1...p_n)$ şeklinde bir U-ayrışımıdır ya da $p_i \in U(p_1...p_{i-1}p_{i+1}...p_n)$ dir. Zaten ilk durum kabul edilirse ispat biter o yüzden kabul edilsin ki $p_1 \in U(p_2...p_n)$, $p_2 \in U(p_1p_3...p_n)$ ve benzer şekilde tüm p_i ler için bu yazılsın. O zaman d nin madem ki indirgenemez bir ayrışımı var o halde $d = (p_1...p_k)(p_{k+1}...p_n)$ şeklinde yazılabilir. Bu durumda $p_{k+1}...p_n \notin U(p_{k+1}...p_n)$ elde edilir. Buradan da d nin bir U-ayrışımı olduğu görülür.

Tanım 2.2.7 $a,b \in D$ olsun. $a \mid b$ ve $b \mid a$ oluyorsa a ile b ilgilidir denir. Bir U-ayrışımında U-sınıfının elemanları yardımcı kısmı indirgenemez elemanlar ise asıl kısmı oluşturur. Yani $d = (p_1'...p_k')(p_1...p_n)$ indirgenemez ayrışımında $p_1',...,p_k'$ ler yardımcı kısmı $p_1,...,p_n$ ler ise asıl kısmı oluşturur [2].

Teorem 2.2.8 Tanımdan yola çıkarak $d = (p_1'...p_k')(p_1...p_n)$ ayrışımı bir U-ayrışımı ise $p_1...p_n$ ler d ile ilgilidir [2].

İspat. U-ayrışımı tanımından $i = 1,...,k$ olmak üzere $p_i' \in U(p_1...p_n)$ dir. Dolayısıyla $p_1'...p_k' \in U(p_1...p_n)$ olurdu ki o zaman da d elemanı ile $p_1...p_n$ ler ilgili olur.

Tanım 2.2.9

D halkası tek türlü çarpanlarına ayrılabilen halka ise aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) D nin birimselden farklı her elemanının bir U-ayrışımı vardır.

ii) $d \in D$ nin iki U-ayrışımı $r = (p_1 '...p_k ')(p_1 ...p_n) = (q_1 '...q_l ')(q_1 ...q_m)$ olsun. Burada $m = n$ ve p_i ler de q_j lerle ilgilidir. Bu durum gerçekleşiyorsa bu çarpanlarına ayrılış tek türlüdür. Özel olarak tamlık bölgelerinde tek türlü çarpanlarına ayrılabilen halka tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölgeye denktir [2].

Teorem 2.2.10 D tamlık bölgesi olduğunda tek türlü çarpanlarına ayrılabilen halka ile tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölge, tanımdan birbirine denktir [2].

İspat.

$\Rightarrow D$ tek türlü çarpanlarına ayrılabilen halka olsun. D nin sıfırdan ve birimselden farklı her elemanı U-sınıfının elemanı oluyorsa D halkası tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölgedir.

$\Leftarrow$ D tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölge olsun. Öyleyse D nin sıfırdan ve birimselden farklı her elemanının tek türlü çarpanlarına ayrılışı vardır. Burada 0 (sıfır) elemanı ele alınırsa sıfırın daima bir U-ayrışımı vardır. Öyle ki 0 ın U-sınıfı $U(0) = D$ olduğundan $0 \notin U(a), 0 \neq a \in D$, 0 ın her zaman bir U-ayrışımı vardır öyle ki $0 = (p_1 '...p_m ')()$ şeklindedir.

Teorem 2.2.11 D tek türlü çarpanlarına ayrılabilen halka ve $0 = (p_1 '...p_m ')()$ ise

i) $\alpha_i \notin U(\alpha_1^{m_1} ...\alpha_i^{d_i} ...\alpha_n^{m_n})$, $0 \leq d_i < m_i, i = 1,...,n$ (2.4)

ii) $\alpha_i \in U(\alpha_i^{m_i}), i = 1,...,n$ [4] (2.5)

İspat.

i) $\alpha_i \in U(\alpha_1^{m_1} ...\alpha_i^{d_i} ...\alpha_n^{m_n})$ olsun. Öyleyse $0 = \alpha_1^{m_1} ...\alpha_i^{m_i} \alpha_n^{m_n}$ olur ancak bu da $\alpha_i \in U(\alpha_1^{m_1} ...\alpha_n^{m_n})$ olmasıyla çelişir.

ii) $i = 1, \alpha_1 = \alpha, m_1 = m$ olsun.

$n = 1$ ise o zaman $0 = \alpha^m$ ve $\alpha \in U(\alpha^m)$ olur. Böylece

ispat biter.

$n > 1$ ise $0 = \alpha^m (\alpha - (\alpha - \alpha_2^{m_2} ...\alpha_n^{m_n}))$ elde edilir. Eğer burada $\alpha - (\alpha - \alpha_2^{m_2} ...\alpha_n^{m_n})$ birimsel ise $\alpha - (\alpha - \alpha_2^{m_2} ...\alpha_n^{m_n}) = u$ şeklinde gösterilir. Öyleyse $\alpha^{m+1} = u\alpha^m$ ve $\alpha \in U(\alpha^m)$ olur. Aksi takdirde $\alpha - (\alpha - \alpha_2^{m_2} ...\alpha_n^{m_n})$ nin indirgenemez bir ayrışımı olacaktır ve bu ayrışım $d_1 ...d_g$ ve $\alpha^{m+1} = \alpha^m d_1 ...d_g$ şeklindedir. (i) den α^{m+1} in

U-ayrışımı $(\alpha)(\alpha^m)$ ya da $()(\alpha^{m+1})$ şeklindedir. Örneğin bu ayrışım $(\alpha)(\alpha^m)$ şeklinde ise $\alpha \in U(\alpha^m)$ olur. Eğer bu ayrışım $()(\alpha^{m+1})$ şeklinde ise $m+1$ tane asıl kısım olur ve burada d_i ler α ile ilgili olur. Bu ilgililikten $d_1 = \alpha d$ yazılırsa $\alpha_2^{m_2} ...\alpha_n^{m_n} = \alpha(1 - d_2 ...d_g)$ yazılabilir. U-ayrışımından dolayı $\alpha \in U(\alpha_2^{m_2} ...\alpha_n^{m_n})$ olamayacağından $\alpha_i \in U(\alpha_i^{m_i})$ gerçekleşir.

Tanım 2.2.12 D nin sıfırdan farklı her $d \in D$ elemanı için U(d) sadece birimsellerden oluşuyorsa D ye pseudo domain denir [2].

Teorem 2.2.13 q , D nin indirgenemez bir elemanı olan p yi bölüyorsa p ile q ilgilidir ve $q \in U(p)$ dir [2].

İspat. $p \in D$ olsun.

$q \mid p$ ise $p = aq$ olacak şekilde bir $a \in U(D)$ vardır. Burada $p = aq$ eşitliği p ile genişletilirse $qap = p$ olduğu görülür. Dolayısıyla $q \in U(p)$ dir.

Teorem 2.2.14 Pseudo bölgede indirgenemezle ilgili olan eleman da indirgenemezdir [2].

Teorem 2.2.15 D tek türlü çarpanlarına ayrılabilen pseudo bölge ise D nin ilgililik farkıyla bir tane sıfır bölen indirgenemez elemanı vardır [2].

İspat. İspatı tersini kabul ederek yapalım. Bunun için D nin ilgili olmayan sıfır bölenli iki indirgenemez elemanı p ve q olsun. Tek türlülükten 0 ın indirgenemez bir ayrışımı $0 = ()(a_1 ... a_m p) = ()(b_1 ... b_n q)$ şeklinde yazıldığında buradaki b_j ler a_i lerle ilgili olmadığından $p \sim q$ olacaktır. Burada $q = ap$ yazılırsa $0 = ()(a_1 ... a_m p) = ()(b_1 ... b_n ap)$ eşitliği elde edilir. Burada eşitlik düzenlendiğinde $0 = p^r (p - (p - q^s c_1 ... c_n))$ eşitliği elde edilir. Burada c_i ler p veya q ile ilgili değildir. Diyelim ki $p - q^s c_1 ... c_n$ birimsel olsun. $p - q^s c_1 ... c_n = u$ olsun. O zaman $p^{r+1} = pu$ eşitliğine ulaşılır ki $p^r \neq 0$ olduğundan burada p birimsel olur. Ancak p indirgenemez kabul edildiğinden bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $p - q^s c_1 ... c_n$ birimsel değildir ve indirgenemez bir ayrışıma sahiptir. Öyle ki $p^{r+1} = p^r d_1 ... d_g$ yazılırsa d_i lerin her biri indirgenemezdir. Tek türlülükten $g = 1$ olduğunda $p \sim d_1$ olur. Dolayısıyla bu durumda $0 = p^r (p - (p - q^s c_1 ... c_n))$ eşitliğinde bu ilgililik kullanılırsa $q^s c_1 ... c_n = p(1 - v)$ olacak şekilde bir v birimsel elemanı vardır. $1 - v \neq 0$ ve $p \notin U(1 - v)$ olduğundan p nin U-ayrışımı gereği p ya q ya da c_i lerle ilgilidir. Bu da p ve q nun indirgenemezliği ile çelişir. Dolayısıyla D nin en fazla bir tane sıfır bölenli indirgenemez elemanı vardır fazlası olduğunda birbiriyle ilgilidir yani ilgililik farkıyla tek türlüdür. Fakat 0 ın indirgenemez bir ayrışımı olması gerektiğinden sıfır böleni içermek zorundadır. Böylece ispat tamamlanmış olur. Yani $0 = (p_1 ' ... p_k ')(\alpha^m)$ yazılırsa α burada halkanın sıfır bölenli indirgenemez elemanını gösterir.

Önerme 2.2.16 D pseudo bölge ise aşağıdaki özellikleri sağlar.

i) Birimselden farklı her elemanın indirgenemez bir ayrışımı vardır.

ii)Her indirgenemez eleman asal elemandır.

i ve ii şartından D nin ilgililik farkıyla bir tane sıfır bölenli indirgenemez elemanı vardır. Eğer bu eleman sıfırdan farklıysa D nin regular indirgenemez bir ayrışımı yoktur [2].

Teorem 2.2.17 D pseudo bölge ise birimselden farklı her elemanın indirgenemez bir ayrışımı vardır. Öyleyse aşağıdakiler sağlanır.

i) D tek türlü çarpanlarına ayrılabilen halkadır.

ii) D de her indirgenemez eleman asal elemandır [2].

İspat.

$i \Rightarrow ii$ D tek türlü çarpanlarına ayrılabilen halka olsun. Dolayısıyla D nin bir tane sıfı bölenli indirgenemez bir elemanı vardır ve bu eleman birimselden farklı her elemanı böler ve asal olur. D tamlık bölgesi olduğu için de sıfırdan farklı her indirgenemez eleman asal eleman olur. Yani buradan sıfır elemanı asal elemandır.

$ii \Rightarrow i$ D nin bir tane indirgenemez elemanı var ve D tamlık bölgesi olsun. D den sıfır elemanı seçilirse ispat biter. O yüzden D nin sıfırdan farklı bir elemanı ele alınsın. $\alpha \in D$, D nin sıfır bölenli bir elemanı olsun. Burada D nin her elemanı $u\alpha^k, u \in U(D)$ şeklinde yazılabilir. Sıfırdan farklı bir $d \in D$ için $d = u\alpha^k = v\alpha^l$ denilirse $\alpha \in U(\alpha^l)$ olacaktır. Burada $k = l$ olduğundan D tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bir halkadır.

Tanım 2.2.18 Bir temel ideal halkasında halkanın kendinden farklı yalnız bir tane nilpotent asal ideali varsa bu halkaya special temel ideal halka denir. Öyle ki P , D den ve boştan bir farklı alt küme yani $P \subset D$, $P \neq D$ için $P^m = (0), m > 0$ dır [2].

Teorem 2.2.19 Her temel ideal halkası sonlu sayıda temel ideal bölgesi ve special temel ideal halkasının direkt toplamıdır [2].

Teorem 2.2.20 D special temel ideal halkası ise tek türlü çarpanlarına ayrılabilen halkadır [2].

İspat. İndirgenemez elemanı olmayan bir temel ideal halkası ele alınsın ve bu halkanın üreteçleri birimselden farklı olsun. Alınan bir $a \in D$ elemanı için bu eleman indirgenemez olmadığından $a = a_1 ... a_n$ yazılabilir. D noetherian olduğundan (a) nın ürettiği ideal maksimal ve $(a) \subset (a_1)$, $i = 1, ..., n$ dir. Burada a_i lerin indirgenemez ayrışımları olduğundan 0 ın da indirgenemez bir ayrışımı vardır. Bu ise a nın indirgenemez olmasıyla çelişir öyle ki D nin elemanlarını birimselden farklı kabul ettiğimizden birimselden farklı her elemanın indirgenemez bir ayrışımı vardır. Şimdi $P \in D$ tek asal ideal, $P^m = (0)$ ve m ise minimal olsun. Burada eğer $m = 1$ ise D cisim ve tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bir halka belirtir. Eğer $m > 1$ ise $P = (\alpha)$ dır. Öyleyse bir $d \in D$ için $d \notin (\alpha)$ ise d birimsel olur aksi takdirde (d) yi d eiçeren maksimal bir ideal olması gerekir. O zaman da α , D nin ilgililik farkıyla tek indirgenemez elemanı olur. Şimdi kabul edelim ki D nin başka bir indirgenemez elemanı β olsun. Burada $\alpha \neq \beta$ dir. $\beta \in (\alpha)$ birimsel olmadığından $\beta = \alpha d$ olacak şekilde bir $d \in D$ vardır. β indirgenemez olduğundan $d = \beta s$ olacak şekilde $s \in D$ vardır. Dolayısıyla $\beta = \beta s \alpha$ ve uygun bir düzenlemenin ardından $\beta(1 - s\alpha) = 0$ elde edilir. O halde $1 = 1 - (s\alpha)^m = (1 - s\alpha)(1 + s\alpha + ... + (s\alpha)^{m-1})$ ve sonucunda da $1 - \alpha$ birimsel olur. Bu da $m > 1$ olması ile çelişir. Sonuç olarak birimselden farklı her $d \in D$ için $d = u\alpha^k$ şeklindedir ve burada u birimsel, $0 < k < l \leq m$ dir. Bunu sağlayan bir tane k sayısı vardır. Çünkü $u\alpha^k = v\alpha^l$ olsaydı $\alpha^{-l+k+m} = 0$ olması gerekirdi bu da m nin en

küçük olmasıyla çelişir. Sonuç olarak $d = ()((u\alpha)\alpha^{k-1})$ ve $0 = (p_1'...p_l')(\alpha^m)$ tek U-ayrışımlarıdır. Yani D tek türlü çarpanlarına ayrılabilen halkadır.

Sonuç 2.2.21 Her temel ideal halkası tek türlü çarpanlarına ayrılabilen halkadır [2].

Örnek 2.2.22 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tek türlü çarpanlarına ayrılabilen halkadır [2].

Örnek 2.2.23 $\mathbb{Z}_4$ temel ideal halkası tek türlü çarpanlarına ayrılabilen halkadır [2].

Sonuç D nin tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölge olması için gerek ve yeter koşul D'nin tek türlü çarpanlarına ayrılabilen halka ve special temel ideal halkalaının direkt toplamı şeklinde olmasıdır.

2.3 Modüller

Tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölgeler için sıfırdan ve birimselden farklı her elemanın indirgenemez bir ayrışımının olduğu ve bunun ilgililik farkıyla tek türlü olduğu önceki bölümlerde incelenmişti. Değişmeli halkalarda birimli modüllerin bazı genişlemelerinin olduğu [3,4,5,6,7] de açıklanmış ve [6] de tamlık bölgelerinde tek türlü çarpanlarına ayrılabilen torsion free modüller için tanımlarına yer verilmiştir. [8] de ise yazar sıfır bölenli değişmeli halklarda çarpanlara ayrılabilmeyle ilgili detaylı çalışmalar yapmıştır. [3] de ise bunların modüller için olan tanımlarına yer verilmiştir. Biz ise değişmeli halkalarda tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modülleri U-ayrışımını kullanarak inceleyeceğiz.

Tanım 2.3.1 $(M,+)$ değişmeli bir grup ve D bir halka olsun.

$f : D \times M \to M$ fonksiyonu

i) Her $d \in D$ ve her $m, m' \in M$ için $d(m+m') = dm + dm'$ (2.6)

ii) Her $d, d' \in D$ ve her $m \in M$ için $(d+d')m = dm + d'm$ (2.7)

iii) Her $d, d' \in D$ ve her $m \in M$ için $(dd')m = d(d'm)$ (2.8)

iv) Her $m \in M$ için $1_D m = m$ (2.9)

Özelliklerini sağlıyorsa M ye D üzerinde bir modül ya da D-modül denir [9].

Tanım 2.3.2 D değişmeli bir halka ve M , D-modül olsun. M den alınan bir elemanın indirgenemez olması için $0 \neq d \in D$ ve $n \in M$ için $m = dn$ ise $m \sim n$ olmasıdır.

Eğer halka modüle eşitse yani $D = M$ ise o zaman M den alınan bir elemanın indirgenemez olması için $m = m.1$ olacağından $m \in U(D)$ dir. Yani $M = D$ olduğunda M nin indirgenemez elemanları ve D nin birimsel elemanları birbirine denktir. Tanımdan $0 \in M$, M de indirgenemez olsun. Bu durumda M torsion free modüldür [10].

Teorem 2.3.3 D değişmeli bir halka ve M , D-modül olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar sağlanır.

i) $0 \in M$, M de indirgenemezdir.

ii) M , torsion free D-modüldür [10].

İspat.

$i \Rightarrow ii$ $0 \in M$, M de indirgenemez olsun. $0 = dn, d \in D, n \in M$ dir. Burada eğer $d = 0$ ise M -torsion free modül olur. $d \neq 0$ ise 0 elemanı M de n ile ilgili olur. Bu durumda $n = 0$ ve bundan dolayı M -torsion free modüldür.

$ii \Rightarrow i$ M torsion free olsun. Bu durumda $d \neq 0 \in D$, $n \in M$ için $0 = dn$ yazılırsa $d \neq 0$ olduğundan $n = 0$ olur ve böylece $0 \sim n$ olur. Dolayısıyla 0 indirgenemezdir [10].

Teorem 2.3.4 M torsion free modül ve $0 \neq m \in M$ olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar denktir.

i) $m \in M$ indirgenemezdir.

ii) $d \in D$, $n \in M$ olmak üzere $m = dn$ oluyorsa $d \in U(D)$ [10].

İspat.

$i \Rightarrow ii$ $m = dn$ m 'nin indirgenemez bir ayrışımı olsun. $m \neq 0$ olduğundan $d \neq 0$ olacaktır. Dolayısıyla $m \sim n$ ilgili olacağından $n = sm$ olacak şekilde bir $s \in D$ vardır. Öyleyse $m = d(sm)$ denilirse $m - dsm = 0$ elde edilir. Uygun bir düzenlemenin ardından $m(1 - ds) = 0$ olur. $m \neq 0$ olduğundan $(1 - ds) = 0$ denilirse $d \in U(D)$ olur.

$ii \Rightarrow i$ $m = dn$ ve $d \in U(D)$ olsun. Burada $d \in U(D)$ ise $d^{-1} \in U(D)$ dir. Öyleyse $d^{-1}m = n$ yazılırsa $m \sim n$ olduğu ve m nin indirgenemez olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Tanım 2.3.5 Bir $n \in M$ nin U-ayrışımı $n = (q_1 ... q_k)(p_1 ... p_r m)$ olsun. Öyleyse aşağıdakiler sağlanır.

i) $q_i \neq 0, p_j \neq 0$ ve q_i ve p_j ler D de indirgenemez ve $m \in M$ indirgenemezdir.

ii) $q_i(p_1 ... p_r m) = (p_1 ... p_r m)$ M de devirli bir alt modüldür.

iii) $i = 1, ..., r$ ve $\tilde{p}_i$ ihmal edilmek üzere $p_i(p_1 ... \tilde{p}_i ... p_r m) \neq (p_1 ... \tilde{p}_i ... p_r m)$ dir [10].

Halkalarda $p_1 ... p_r m$ relevant kısım diğer kısım ise irrelevant kısımdır.

Tanım 2.3.6 $m \in M$ olsun. p_i ler D de ve m_1 de M de indirgenemez olmak üzere $m \in M$ nin bir çarpanlarına ayrılışı vardır ve bu ayrılış $m = (p_1 ... p_r m_1)$ şeklindedir [10].

Teorem 2.3.7 $m \in M$ nin indirgenemez bir ayrışımı var ise m nin bir U-ayrışımı vardır [10].

İspat. m nin indirgenemez bir ayrışımı $m = (p_1 ... p_k n)$ şeklinde olsun. $p_1 ... p_k \in D$ de $n \in M$ de indirgenemezdir. Eğer $m = ()(p_1 ... p_k n)$ şeklinde ise m nin bir U-ayrışımı vardır. Eğer $p_i(p_1 ... \tilde{p}_i ... p_r n) = (p_1 ... \tilde{p}_i ... p_r n)$ şeklinde ise örneğin p_1 için $p_1(p_2 ... p_k n) = (p_2 ... p_k n)$ yazılır. Bu eşitlik herhangi bir p_t de sağlanmayana kadar devam ettirilir.

$$p_2(p_3...p_k n) = (p_3...p_k n)$$
.
.
. (2.10)

Son olarak $m = (p_1...p_t)(p_{t+1}...p_k n)$ $m \in M$ nin bir U-ayrışımı olur. Sağlamayan bir p_j için $p_j(p_{t+1}...\tilde{p}_j...p_k n) \neq (p_{t+1}...\tilde{p}_j...p_k n)$ yazılırsa tanımın (iii) şartı sağlanmış olur. Tanımın ikinci şartına bakılacak olursa bu durum direkt bir sonuçtur öyle ki $a,b \in D, n \in M$ olmak üzere eğer $a(n) = (n)$ ve $b(n) = (n)$ ise $ab(n) = (n)$ ve eğer $a(bn) = (bn)$ ve $b(n) = (n)$ ise $a(n) = (n)$ gerçekleşir.

Teorem 2.3.8 $n \in M$ nin U-ayrışımı $n = (q_1...q_k)(p_1...p_r m)$ olsun. Öyleyse $(n) = (p_1...p_r m)$ M nin devirli bir alt modülüdür [10].

İspat. Tanımın (ii) şartından
$(n) = (q_1...q_k p_1...p_r m) = q_1...q_k(p_1...p_r m) = (p_1...p_r m)$ yazılırsa ispat tamamlanır.

Tanım 2.3.9 D değişmeli bir halka ve M , D -modül olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa D ye tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modül denir.

i) M deki her elemanın bir U-ayrışımı varsa M atomiktir.

ii) $n \in M$ nin herhangi iki U-ayrışımı ilgilidir [10].

Özellik M torsion free bir D -modülse U-ayrışımının irrelevant kısmı boştur. Yani buradaki U-ayrışımı halkalardaki gibi sıfırdan farklı elemanların indirgenemez çarpımı şeklindedir. $0 \in M$ indirgenemez olduğundan M torsion freedir ve 0 ın ilgililik farkıyla tek bir U-ayrışımı vardır öyle ki $0 = (...)(0)$ dır. Yani burada tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modüller için verilen tanım torsion free modüller için de geçerlidir. Şimdi de non-torsion free modüller incelenecektir.

Teorem 2.3.10 D değişmeli bir halka ve M bir non-torsion free modül olsun. Kabul edilsin ki M tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modül ve $0 \in M$ nin tek U-ayrışımı $0 = (q_1...q_l)(p_1...p_r m_1)$ olsun. Öyleyse m_1 M nin ilgililik farkıyla tek indirgenemez elemanıdır [10].

İspat. M nin indirgenemez bir elemanı m_2 olsun. Eğer $p_1...p_r m_2 = 0$ oluyorsa $m_1 \sim m_2$ dir.

Eğer $p_1...p_r m_2 \neq 0$ oluyorsa $n = p_1...p_r m_2 = p_1...p_r m_2 + p_1...p_r m_1 = p_1...p_r(m_1 + m_2)$ olur. M tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modül olduğundan $m_1 + m_2 \in M$ nin indirgenemez bir ayrışımı vardır öyle ki $m_1 + m_2 = t_1...t_k m_3$ dir. İki indirgenemezin de U-ayrışımlarına bakılırsa M tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modül olduğundan $p_1...p_r m_2 = p_1...p_r t_1...t_k m_3$'ten $m_2 \sim m_3$ olduğu görülür. Dolayısıyla $m_3 = sm_2, s \in D$ denilirse $m_1 + m_2 = t_1...t_k m_2$ olduğu görülür. Buradan da uygun bir düzenlemenin ardından $m_1 = (t_1...t_k s - 1)m_2$ elde edilir. Yani $m_1 \sim m_2$ olur. Sonuç olarak $m_1 \in M$ indirgenemez bir elemandır.

Sonuç 2.3.11 M non-torsion free tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bir modül ve $0 \in M$ nin bir U-ayrışımı $0 = (q_1 ... q_k)(p_1 ... p_r m_1)$ olsun. Öyleyse $M = (m_1)$ dir [10].

Sonuç 2.3.12 D atomik halka ve M non-torsion free modül olsun.

Eğer M tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modülse ve $0 \in M$ nin U-ayrışımı $0 = (q_1 ... q_k)(p_1 ... p_r m_1)$ ise $Ann(M) = (p_1 ... p_r)$ dir [10].

İspat. Bir önceki sonuçta 0 ın bir U-ayrışımı için $0 = p_1 ... p_r m_1$ olduğu söylenmiştir. Buradan yola çıkarak $p_1 ... p_r m_1 = 0 \Rightarrow p_1 ... p_r M = 0$ denilirse $p_1 ... p_r \subseteq Ann(M)$ olur. Şimdi başka bir $s \in Ann(M)$ alınırsa $sM = 0$ olacaktır. Buradan $sm_1 = 0 = p_1 ... p_r m_1$ gelir. D atomik olduğundan s 'nin de D de $s = t_1 ... t_l$ olacak şekilde bir indirgenemez elemanı vardır. Teklikten $(t_{r+1} ... t_l)(t_1 ... t_r m_1) = (q_1 ... q_k)(p_1 ... p_r m_1)$ yazılır ki burada $t_i \sim p_i$ $i = 1, ...,$ dir. Böylece $s \in (p_1 ... p_r) \Rightarrow Ann(M) \subseteq (p_1 ... p_r)$ elde edilir. Dolayısıyla $Ann(M) = (p_1 ... p_r)$ olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 2.3.13 D değişmeli bir halka ve $D = M$ olsun. M tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modül ve $M = (1)$ ise D tek türlü çarpanlarına ayrılabilen halkadır ve bunun tersi de doğrudur. Özelllikle $D = M = \mathbb{Z}_6$ seçilirse M modülü ne presimplifiable ne de torsion free değildir fakat tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modüldür [10].

Örnek 2.3.14 D tek türlü çarpanlarına ayrılabilen halka ve M devirli bir D -modül olsun. M tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modül olmasın. Öyleyse D tek türlü çarpanlarına ayrılabilen halka, $M = ((1,1))$ devirli bir D modül ve buna göre $D = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ve $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_3$ olsun. O halde $p_1, p_2, p_3 \in D$ indirgenemez ve $m \in M$ de indirgenemez olmak üzere $p_1 = (0,1), p_2 = (1,0), p_3 = (1,3)$ olsun. Burada $0 \in M$ nin iki U-ayrışımı $0 = ()(p_1 p_2 m) = ()(p_1 p_3 m)$ şeklinde olsun. Dolayısıyla M tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bir D -modül değildir [10].

Son olarak, herhangi bir değişmeli D halkasında ve non torsion free modülde tek türlülük aynı zamanda bu D halkasının tek türlü çarpanlarına ayrılabilen halka olmasını gerektirip gerektirmediği incelenebilir.

BÖLÜM 3

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada tek türlü çarpanlarına ayrılabilen halkalardaki özelliklerin modüllerdeki uygulamaları incelendi. Bunun için de U-ayrışımlarından, tek türlü çarpanlarına ayrılabilen sıfır bölenli bölgelerden yararlanıldı.

Tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modüllerden önce ilk olarak halkalar ve bölgeler için genel tanımlara yer verildi.

Bundan sonraki çalışmalarda R değişmeli ve birimli bir halka ve M non-torsion free modülken M nin tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modül olmasının R'nin tek türlü çarpanlarına ayrılabilen halka olmasını gerektirip gerektirmediği sorusunun cevabı araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Hungerford, T.W., (1990). “Abstract Algebra an Introduction”, Saunders College Publishing.

[2] Fletcher, C.R., (1969). “Unique Factorization Rings”, Proc. Camb. Phil. Soc., 65:579-583.

[3] Anderson, D.D. ve Valdes-Leon, S., (1997). “Factorization in commutative rings with zero divisors, II”, Factorization in Integral Domains, Lecture Notes in Pure and Appl. Math, 189:197-219.

[4] Costa, D.L., (1976). “Unique Factorization in Modules and Symmetric Algebras”, Transactions of the American Mathematical Society, 224(2): 267-280.

[5] Lu, Chin-Pi., (1977). “Factorial Domains”, Rocky Mountain J. Math, 7(1): 125-140.

[6] Nicolas, A.M., (1971). “Modules Factoriels”, Bull. Sci. Math. 2(95): 35-52.

[7] Nikseresht, A. A., (2010). “Azizi, On Factorization in Modules”, Communications in Algebra, 39(1): 292-311.

[8] Anderson, D.D. ve Valdes-Leon, S., (1996). “Factorization in commutative rings with zero divisors”, Rocky Mountain J. Math, 26:439-480.

[9] Çallıalp, F., (2001). Değişmeli Halkalar ve Modüller, Birsen Yayınevi, İstanbul.

[10] Alan, M. ve Özbulur, E., (2016). “On Unique Factorization Modules”, international Journal of Pure and Applied Mathematics, 108:23-28.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Elif ÖZBULUR

Doğum Tarihi ve Yeri : 21.03.1991

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : elifozbulur@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2014
Lise	Sayısal	Süleyman Nazif Anadolu Lisesi	2009

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	**Firma/Kurum**	**Görevi**
2010	Sınav Dershanesi	Öğretmen
2014	Kültür Özel Temel Lisesi	Öğretmen
2016	Safranbolu Ovacuma Çok Programlı Anadolu Lisesi	Öğretmen

YAYINLARI

Makale

1. Alan, M. ve Özbulur, E., (2016). “On Unique Factorization Modules”, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 108:23-28.