ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

STURM-LIOUVILLE DENKLEMLERİ İÇİN LEVINSON FORMÜLÜ

Dilara KARSLIOĞLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2019

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Dilara KARSLIOĞLU tarafından hazırlanan " **Sturm-Liouville Denklemleri için Levinson Formülü** " adlı tez çalışması 14/01/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Yelda AYGAR KÜÇÜKEVCİLİOĞLU

Jüri Üyeleri:

Başkan: Prof. Dr. Elgiz BAYRAM

Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Esra KIR ARPAT

Gazi Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Yelda AYGAR KÜÇÜKEVCİLİOĞLU

Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Atila YETİŞEMİYEN
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

14/01/2019



Dilara KARSLIOĞLU

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

STURM-LIOUVILLE DENKLEMLERİ İÇİN LEVINSON FORMÜLÜ

Dilara KARSLIOĞLU

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Yelda AYGAR KÜÇÜKEVCİLİOĞLU

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde ana konu ile ilgili temel kavram ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölüm üç kısımdan oluşmaktadır. Bu bölümde yarım eksen üzerinde tanımlı self adjoint Sturm-Liouville problemi ele alınmıştır. Bu problemin Jost çözümü ile Jost fonksiyonu bulunmuş ve Jost fonksiyonunun özellikleri incelenmiştir. Bununla birlikte, ele alınan problemin saçılım fonksiyonu ve saçılım fonksiyonunun özellikleri bulunmuştur. Ayrıca, bu problemin Levinson formülü elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde Sturm-Liouville denklemi ile üretilen sınır koşulunda kuadratik spektral parametre bulunduran sınır değer problemi ele alınmıştır. Bu sınır değer problemi için de bir önceki probleme benzer olarak Jost fonksiyonu, saçılım fonksiyonu ve saçılım fonksiyonunun özellikleri incelenmiş. Bu özellikler kullanılarak ele alınan sınır değer problemi için Levinson formülü elde edilmiştir.

Son bölümde, önceki bölümlerde elde edilen sonuçların analizi ve kıyaslaması yapılmıştır.

Ocak 2019, 59 sayfa

Anahtar Kelimeler: Jost çözümü, Jost fonksiyonu, Levinson formülü, saçılım fonksiyonu, saçılım fonksiyonunun sürekliliği, saçılım verileri

ABSTRACT

Master Thesis

LEVINSON FORMULA FOR STURM-LIOUVILLE EQUATIONS

Dilara KARSLIOĞLU

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Yelda AYGAR KÜÇÜKEVCİLİOĞLU

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, some basic concepts and theorems related to main topic are given.

The third chapter is composed of three sections. In this chapter, self adjoint Sturm-Liouville problem defined on the half line is considered. The Jost solution and Jost function of this problem are found and the properties of Jost function are investigated. Moreover, the scattering function of this problem and the properties of the scattering function are found. Also, the Levinson formula of this problem is obtained.

In the fourth chapter a boundary value problem is considered which is generated by a Sturm-Liouville equation and boundary condition with quadratic spectral parameter. Similarly to the previous problem, Jost function, scattering function and the properties of the scattering function of this boundary value problem are investigated. By using these properties, the Levinson formula of the related boundary value problem is obtained.

Finally, the last chapter is devoted to the analysis and comparison of the results considered in previous chapters.

January 2019, 59 pages

Key Words: Jost solution, Jost function, Levinson formula, scattering function, continuity of the scattering function, scattering datas

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamın yürütülmesi sırasında desteğini esirgemeyen danışman hocam Doç. Dr. Yelda AYGAR KÜÇÜKEVCİLİOĞLU'na ve İstanbul'dan gelmeme rağmen bana zamanını ayırıp beni özenle ve sabırla dinleyen değerli hocam Prof. Dr. Elgiz BAYRAM'a, kendisinin her zaman bana destek olduğunu bildiğim hocam Prof. Dr. Cihan ORHAN'a, çalışmamı yürütebilmem için Ankara'ya gidip gelmeme her zaman izin veren Yeditepe Üniversitesi matematik bölümü başkanı hocam Prof. Dr. Okay ÇELEBİ'ye, kendisini lisans eğitimimden bu yana hem bir hocam hemde bir ablam gibi çok sevdiğim hocam Doç. Dr. Canay AYKOL'a, lisans birinci sınıftan, son sınıfa kadar hemen hemen her dersime giren ve akademisyenlik mesleğini tercih etmem de yeri çok büyük olan hocam Dr. Öğr. Üyesi Tuğba YURDAKADİM'e, Ankara ve Yeditepe Üniversitesinde çalışan değerli hocalarıma, bu alanda bana engin bilgisiyle her zaman yardımcı olan canım arkadaşım Şeyda SOLMAZ'a, bana bilgisayar konusunda her zaman yardımcı olan iş arkadaşım Araş. Gör. Serdar NAİR'e, Yeditepe Üniversitesi matematik bölümü sekreteri Burcu ATALAY'a, tüm arkadaşlarıma ve hayatım boyunca her zaman yanımda olan, bana her zaman fedakarlıklar gösteren, bu tezi yazmamı aslında kendilerine borçlu olduğum canım aileme çok teşekkür ederim.

Dilara KARSLIOĞLU

Ankara, Ocak 2019

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI
ETİK . . . . . **i**
ÖZET . . . . . **ii**
ABSTRACT . . . . . **iii**
TEŞEKKÜR . . . . . **iv**
SİMGELER DİZİNİ . . . . . **vi**
1. GİRİŞ **1**
2. TEMEL KAVRAMLAR **3**
3. YARIM EKSEN ÜZERİNDE TANIMLI SELFADJOINT STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ **9**
3.1 Jost çözümü ve Jost fonksiyonu **9**
3.2 Saçılım fonksiyonu ve özellikleri **25**
3.3 Levinson Formülü **29**
4. SINIR KOŞULU KUADRATİK SPEKTRAL PARAMETRELİ STURM-LİOUVİLLE DENKLEMİ İÇEREN SINIR DEĞER PROBLEMİNİN SAÇILIM VERİLERİ VE LEVINSON FORMÜLÜ **32**
4.1 Sınır değer probleminin saçılım fonksiyonunun sürekliliği **45**
4.2 Sınır değer probleminin Levinson formülü **50**
5. SONUÇ **55**
KAYNAKLAR **57**
ÖZGEÇMİŞ **59**

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^-$	Negatif reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
$\overline{\mathbb{C}}_+$	Kapalı üst-yarı düzlem
$\overline{\mathbb{C}}_-$	Kapalı alt-yarı düzlem
S-L	Sturm-Liouville denklemi
$\mathrm{Im}(\lambda)$	λ sayısının sanal kısmı
$\mathrm{Re}(\lambda)$	λ Sayısının gerçek kısmı
$\arg(e(\lambda))$	$e(\lambda)$ sayısının argümenti
$L_1(0,\infty)$	$(0,\infty)$ aralığında mutlak değerce integrallenebilir fonksiyonların uzayı
$L_2(0,\infty)$	$(0,\infty)$ aralığında karesi integrallenebilir fonksiyonların uzayı

1. GİRİŞ

Fizikte maddenin yapısına karar verme konusunda ciddi bir rol üstlenen saçılım problemleri ve problemlerin analizi, matematiksel fizik ve teorik fizik alanının önemli bir araştırma konusudur. Temel bilimlerde bir çok alanda uygulamalara sahiptir. Bu tür problemlere ait ilk çalışmalar sürekli Schrödinger denklemleri için ele alınmıştır (Agranovich 1963), (Jaulent ve Jean 1972). Marchenko 1986 yılında, q reel değerli fonksiyon, λ spektral parametre olmak üzere $L_2(0,\infty)$ uzayında

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y \quad , \quad 0 \leq x < \infty \tag{1.1}$$

Sturm-Liouville denklemini

$$y(0) = 0 \tag{1.2}$$

sınır koşulu ile birlikte detaylı bir biçimde incelemiştir. Bu problemde sınır koşulu spektral parametre içermemektedir. Bu sınır değer probleminin Jost fonksiyonunu $e(\lambda)$ ile göstermiştir. Ayrıca Jost fonksiyonunun açık üst düzlemde sonlu sayıda basit sıfırlara sahip olduğunu vermiştir (Marchenko 1986). $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n$ şartı altında Jost fonksiyonunun sıfırları $i\lambda_k$; $k = 1, 2, 3, ..., n$ gösterimi ile, Jost çözümünün $\lambda = i\lambda_k$ için $L_2(0,\infty)$ uzayındaki normları da m_k^{-1} ile gösterilmiştir. Ele alınan problemin saçılım fonksiyonu ise Jost fonksiyonunun eşleniğinin Jost fonksiyonuna oranı ile tanımlanmış ve $S(\lambda)$ ile gösterilmiştir. Literatürde $\lambda \in (-\infty, \infty)$ olmak üzere, saçılım fonksiyonu, Jost fonksiyonun açık üst düzlemdeki sıfırları ve m_k^{-1} normlarından oluşan kümeye, problemin saçılım verileri denilmektedir. Potansiyel fonksiyon verildiğinde saçılım verilerinin bulunması ve bu verilerin özelliklerinin incelenmesi saçılım teorisinde düz problem, tersine saçılım verilerine göre potansiyel fonksiyonun belirlenmesi saçılım teorisinde ters problem olarak adlandırılmaktadır. Sturm-Liouville, Schrödinger ve Dirac denklemleri için sürekli ve diskre durumlarda, ters ve düz saçılım problemleri içeren çok sayıda çalışma bulunmaktadır (Case 1973-1976), (Naimark 1968). Marchenko, ele aldığı problemde ayrıca ters problem için büyük önem arz eden Levinson formülünü (1.1)-(1.2) problemi için elde etmiştir. Çünkü bulunan veya verilen saçılım verileri ancak Levinson formülünü gerçeklediği

zaman, kullanılan saçılım verilerinden bir tek q potansiyel fonksiyonunun var olduğu söylenebilir. Saçılım verilerinin, denklemin veya problemin saçılım verileri kümesini oluşturabilmesi için Levinson formülünü sağlaması gerekir.

Guseinov ve arkadaşları yarım eksen ve tüm eksende bir boyutlu diskre Schrödinger denklemi için ters saçılım probleminin çözümünün varlığına ait gerek ve yeter koşulları vermişlerdir (Guseinov 1976-1995). Benzer çalışmalar sürekli Schrödinger denklemi için (Bohner ve Koyunbakan 2016), (Case 1973), (Guseinov ve H. Tuncay 1995) çalışmalarında ele alınmıştır. Diğer yandan, (Mamedov ve Menken 2009) ve (Mamedov ve Koşar 2010) çalışmalarında sınır koşulunda kuadratik spektral parametre bulunduran sınır değer problemleri için Levinson formülünü vermişlerdir. Ayrıca Mızrak, Mamedov ve Akhtyamov, 2017 yılında "Sınır değer probleminin saçılım verilerinin karakteristik özellikleri" isimli çalışmalarında Levinson formülünü $\rho(x)$,

$$\rho(x) = \begin{cases} \alpha^2, 0 \leq x < a \\ 1, x \geq a \end{cases}$$

şeklinde tanımlı reel değerli parçalı sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$-(\alpha_1 y(0) - \alpha_2 y'(0)) = \lambda^2(\beta_1 y(0) - \beta_2 y'(0))$$

sınır koşulu ile birlikte tanımlı

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 \rho(x) y \quad , \quad 0 < x < \infty$$

denklemi için elde etmişlerdir.

Literatürde ilk defa 1949 yılında, yarım eksende Sturm-Liouville operatörü için elde edilen Levinson formülü, bu tezde farklı operatörler için ele alınıp ayrıntılı bir şekilde incelenecektir. Bu tez çalışması, saçılım problemi çalışan fizik ve matematikçiler yanında çeşitli alanlarda çalışan bilim adamlarına kaynak oluşturacaktır. Çünkü bu tür problemler genelde ısı, madde transferi, yay titreşimi problemleriyle ilişkili olmakla birlikte biyoloji, mühendislik, bilgisayar alanlarındaki gelişmelerle alan olarak genişlemektedir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.0.1 X boş olmayan bir küme olsun. X kümesi üzerinde tanımlı

$$+ : X \times X \to X$$

ve

$$\cdot : X \times \mathbb{k} \to X$$

işlemleri ile birlikte, her bir x, y, $z \in X$ ve μ ile λ skalerleri için aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X kümesine bir vektör uzayı denir (Naimark 1960):

1. $x + y \in X$
2. $x + y = y + x$
3. $(x + y) + z = x + (y + z)$
4. $x + 0 = x$ olacak şekilde bir $0 \in X$ vardır
5. $-x \in X$
6. $\lambda x \in X$
7. $\lambda (\mu x) = \lambda \mu x$
8. $1x = x$ olacak şekilde bir $1 \in X$ vardır
9. $\lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y$
10. $(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$.

Tanım 2.0.2 Eğer X, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ise, X uzayına reel vektör uzayı; eğer $\mathbb{C}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ise de X uzayına, kompleks vektör uzayı adı verilir (Naimark 1960).

Tanım 2.0.3 X reel veya kompleks bir vektör uzayı olmak üzere, her bir x, $y \in X$ ve λ skaleri için

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|x\| = 0$ ancak ve ancak $x = 0$
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

özelliklerini sağlayan $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm denir. Üzerinde norm tanımlanan X vektör uzayına ise normlu uzay adı verilir (Naimark 1968).

Tanım 2.0.4 X reel veya kompleks bir vektör uzayı olmak üzere, her x, y, $z \in X$ ve bir λ skaleri için

1. $(x, x) \geq 0$
2. $(x, x) = 0$ ancak ve ancak $x = 0$
3. $(x, y) = \overline{(y, x)}$
4. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
5. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$

özelliklerini sağlayan $(\cdot, \cdot)$ fonksiyonuna X üzerinde bir iç çarpım denir. Böyle bir iç çarpımla donatılan X uzayına ise iç çarpım uzayı adı verilir (Naimark 1968).

Tanım 2.0.5 Herhangi bir vektör uzayı ya da normlu uzay üzerinde tanımlı olan dönüşümlere operatör adı verilir (Kreyszig 1978).

Tanım 2.0.6 Tanım ve görüntü kümesi aynı cisim üzerine birer vektör uzayı olan bir T dönüşümü, tanım kümesindeki her bir x, y elemanları ve cisimdeki her α skaleri için

1. $T(x + y) = Tx + Ty$

2. $T(\alpha x) = \alpha T x$

koşullarını sağlıyorsa, T dönüşümüne tanım kümesi $D(T)$ olan lineer operatör denir (Naimark 1968).

Tanım 2.0.7 X bir kompleks vektör uzay ve $T : X \to Y$ lineer bir operatör olsun. λ kompleks sayısı için $Tx = \lambda x$ denkleminin aşikar olmayan bir $x \in X$ çözümü varsa λ sayısına T operatörünün özdeğeri denir (Lusternik ve Sobolev 1974).

Tanım 2.0.8 $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ ise f fonksiyonuna a noktasında sürekli fonksiyon denir. Eğer f fonksiyonu A kümesinin her noktasında sürekli ise fonksiyona A kümesi üzerinde sürekli fonksiyon denir (Balcı 2008).

Tanım 2.0.9 $L_1(0,\infty) = \left\{ f : \int\limits_0^\infty |f(x)|\, dx < \infty \right\}$ şeklinde tanımlanan $L_1(0,\infty)$ uzayı üzerindeki iç çarpım ve norm, $f,\ g \in L_1(0,\infty)$ için sırasıyla

$$(f,g) := \int\limits_0^\infty f(x)\overline{g(x)}\, dx,$$

ve

$$\|f(x)\| := \int\limits_0^\infty |f(x)|\, dx$$

olarak tanımlanır. Burada, keyfi bir $f \in L_1(0,\infty)$ fonksiyonu reel değişkenli, ancak kompleks değerli bir fonksiyondur (Kreyszig 1978).

Tanım 2.0.10 $L_2(0,\infty) = \left\{ f : \int\limits_0^\infty |f(x)|^2\, dx < \infty \right\}$ şeklinde tanımlanan $L_2(0,\infty)$ uzayı üzerindeki iç çarpım ve norm, $f,\ g \in L_2(0,\infty)$ için sırasıyla

$$(f,g) := \int\limits_0^\infty f(x)\overline{g(x)}\, dx,$$

ve

$$\|f(x)\| := \left\{ \int\limits_0^\infty |f(x)|^2\, dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

olarak tanımlanır. Burada, keyfi bir $f \in L_2(0,\infty)$ fonksiyonu reel değişkenli, ancak kompleks değerli bir fonksiyondur (Kreyszig 1978).

Tanım 2.0.11 Bir $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının ε komşuluğu,

$$D(z_0,\varepsilon) = \{z : |z - z_0| < \varepsilon\}$$

olarak tanımlanan kümedir. Buradaki z_0 noktasına komşuluğun merkezi, ε sayısına da komşuluğun yarıçapı denir (Başkan 2012).

Tanım 2.0.12 Bir f karmaşık fonksiyonu bir z_0 noktasının belli bir $D(z_0,\delta)$ komşuluğundaki bütün noktalarda diferensiyellenebiliyorsa, f fonksiyonuna z_0 noktasında analitik fonksiyon denir (Başkan 2012).

- $[a,b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir

  $$\gamma : [a,b] \to C$$

  fonksiyonuna C düzleminde bir eğri denir. Burada $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına sırayla eğrinin başlangıç ve bitiş noktaları denir.

- Bir γ eğrisi verildiğinde $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ eğrisine kapalı eğri denir.

- Bir γ eğrisi sadece $t_1 = t_2$ için $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ oluyorsa bu eğriye basit eğri denir. Bazen basit eğrilere Jordan eğrisi de denir. γ basit bir eğri ve $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise, eğriye basit kapalı eğri (kapalı Jordan eğrisi) denir.

- Bir γ eğrisi verildiğinde γ' türevi var ve sürekli ise, γ diferensiyellenebilir eğri olarak adlandırılır.

- γ diferensiyellenebilir bir eğri olsun. Eğer $\gamma'(t) \neq 0$ ise, γ eğrisine düzgün eğri denir (Başkan 2010).

Teorem 2.0.1 (Taylor Teoremi) f fonksiyonu bir z_0 noktasında analitik ise bu noktanın bir komşuluğundaki z noktaları için

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

açılımı vardır. Bu açılıma f fonksiyonunun z_0 noktası civarındaki Taylor serisi denir (Başkan 2012).

Tanım 2.0.13 Bir $w = f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının bir $D(z_0, r) - \{z_0\}$ delinmiş komşuluğunda analitik fakat z_0 noktasında analitik değilse f, z_0 noktasında bir ayrık aykırı noktaya sahiptir denir (Başkan 2012).

Teorem 2.0.2 (Laurent Teoremi) Eğer $w = f(z)$ fonksiyonunun bir z_0 noktasında ayrık aykırılığı varsa, bu noktanın delinmiş bir

$$A = \{z : s_1 < |z - z_0| < s_2\}$$

komşuluğunda, f fonksiyonunun

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

açılımı vardır. Burada,

$$\gamma = \{z : |z - z_0| = r,\ s_1 < r < s_2\}$$

olmak üzere,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

şeklindedir (Başkan 2012).

Tanım 2.0.14 f analitik fonksiyonu z_0 noktasında bir ayrık aykırılığa sahip ise z_0 noktasının delinmiş bir komşuluğunda,

$$f(z) = ... + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + ...$$

biçiminde bir Laurent açılımına sahiptir. Bu açılımdaki a_{-1} sayısına f fonksiyonunun z_0 noktasındaki rezidüsü adı verilir ve $a_{-1} = \text{Re}(f, z_0)$ şeklinde gösterilir (Başkan 2012).

Lemma 2.0.1 (Jordan) f fonksiyonu, $|z|$ yeterince büyük olacak biçimdeki z noktaları için sürekli ve $M_R = \max_{|z|=R} |f(z)|$ olmak üzere, $\lim_{R \to \infty} M_R = 0$ olsun. Bu durumda $m > 0$ ve γ_R orijin merkezli, R yarıçaplı çemberin üst yarı-düzlemdeki kısmını gösteriyorsa,

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} e^{imz} f(z) dz = 0$$

eşitliği sağlanır (Başkan 2012).

Teorem 2.0.3 (Argüment Prensibi) f fonksiyonu, bir B bölgesinde analitik olan ve bu bölgenin bir C çevresinde sıfırı bulunmayan bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonunun B içindeki sıfırları $b_1, ..., b_m$, bunların katları $k_1, ..., k_m$ ve kutuplarının mertebeleri de $l_1, ..., l_m$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{i=1}^{m} k_i - \sum_{i=1}^{p} l_i$$

eşitliği sağlanır (İdemen 1999).

Tanım 2.0.15 (Argüment Değişimi) γ kapalı bir eğri ve z_0, γ üzerinde bulunmayan herhangi bir nokta olsun. Eğer z, γ eğrisini tararsa $(z - z_0)$ sayısının argümentinde meydana gelen değişim

$$\Delta_\gamma \arg(z - z_0)$$

simgesi ile gösterilir ve buna argüment değişimi denir (Başkan 2012).

3. YARIM EKSEN ÜZERİNDE TANIMLI SELFADJOINT STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ

$L_2(0,\infty)$ uzayında

$$y(0) = 0 \tag{3.1}$$

sınır koşulu yardımıyla ve

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y \quad , \quad 0 \le x < \infty \tag{3.2}$$

diferensiyel ifadesiyle birlikte tanımlanan probleme Sturm-Liouville problemi denir. Buradaki q potansiyel fonksiyonu

$$\int_0^\infty x\,|q(x)|\,dx < \infty \tag{3.3}$$

koşulunu sağlayan reel değerli bir fonksiyondur. Bu kısımda bu problemin Jost çözümü ve Jost fonksiyonu elde edilerek bunların özellikleri incelenmiştir. Bununla birlikte, problemin saçılım fonksiyonu ve saçılım fonksiyonun özellikleri belirlenmiştir. Son olarak ise bu probleme ait Levinson formülü verilmiştir.

3.1 Jost çözümü ve Jost fonksiyonu

Tanım 3.1.1 q potansiyel fonksiyonunun sağladığı (3.3) koşulu altında (3.1)-(3.2) Sturm-Liouville probleminin her $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ := \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\lambda \ge 0\}$ için

$$\lim_{x\to\infty} y(x,\lambda)e^{-i\lambda x} = 1 \tag{3.4}$$

koşulunu sağlayan çözümüne Jost çözümü denir ve $e(x,\lambda)$ ile gösterilir.

Teorem 3.1.1 Potansiyel fonksiyonun sağladığı (3.3) koşulu altında (3.1)-(3.2) Sturm-Liouville probleminin $e(x,\lambda)$ Jost çözümü

$$e(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty \frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda} q(t)e(t,\lambda)\,dt, \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ \tag{3.5}$$

şeklindedir.

İspat. Jost çözümünü elde etmek için (3.2) Sturm-Liouville denklemine parametrelerin değişimi yöntemi uygulanırsa

$$y'' + \lambda^2 y = q(x)y \tag{3.6}$$

denkleminin homogen denklemi

$$y'' + \lambda^2 y = 0 \tag{3.7}$$

olup homogen denklemin genel çözümü,

$$\widetilde{y}(x,\lambda) = c_1 e^{i\lambda x} + c_2 e^{-i\lambda x}, \;\; |c_1| + |c_2| \neq 0$$

şeklinde verilir. Burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir. O halde (3.6) denkleminin genel çözümü,

$$y(x,\lambda) = c_1(x)e^{i\lambda x} + c_2(x)e^{-i\lambda x} \tag{3.8}$$

biçimindedir. (3.8) genel çözümünde x değişkenine göre türev alınırsa

$$y'(x,\lambda) = c_1'(x)e^{i\lambda x} + c_2'(x)e^{-i\lambda x} + i\lambda c_1(x)e^{i\lambda x} - i\lambda c_2(x)e^{-i\lambda x}$$

eşitliği elde edilir. Yöntem gereğince

$$c_1'(x)e^{i\lambda x} + c_2'(x)e^{-i\lambda x} = 0 \tag{3.9}$$

için

$$y'(x,\lambda) = i\lambda c_1(x)e^{i\lambda x} - i\lambda c_2(x)e^{-i\lambda x}$$

olup

$$y''(x,\lambda) = i\lambda c_1'(x)e^{i\lambda x} - i\lambda c_2'(x)e^{-i\lambda x} - \lambda^2 c_1(x)e^{i\lambda x} - \lambda^2 c_2(x)e^{-i\lambda x} \tag{3.10}$$

olarak bulunur. (3.8) ile (3.10) eşitlikleri, (3.6) denkleminde dikkate alınırsa,

$$i\lambda c_1'(x)e^{i\lambda x} - i\lambda c_2'(x)e^{-i\lambda x} = q(x)y(x,\lambda) \tag{3.11}$$

eşitliği elde edilir. (3.9)-(3.11) eşitliklerinden elde edilen

$$c_1'(x) = \frac{e^{-i\lambda x}}{2i\lambda} q(x)y(x,\lambda)$$

ve

$$c_2'(x) = -\frac{e^{i\lambda x}}{2i\lambda} q(x) y(x,\lambda)$$

türevleri

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \lim_{t\to\infty} c_1(t) \\ \alpha_2 &= \lim_{t\to\infty} c_2(t) \end{aligned}$$

olmak üzere sırasıyla

$$c_1(x) = \alpha_1 - \int_x^\infty \frac{e^{-i\lambda t}}{2i\lambda} q(t) y(t,\lambda) dt$$

$$c_2(x) = \alpha_2 + \int_x^\infty \frac{e^{i\lambda t}}{2i\lambda} q(t) y(t,\lambda) dt$$

olarak bulunurlar. Elde edilen $c_1(x)$ ile $c_2(x)$ fonksiyonları, (3.8) ifadesinde dikkate alınırsa (3.8) çözümü;

$$\begin{aligned} y(x,\lambda) &= \alpha_1 e^{i\lambda x} + \alpha_2 e^{-i\lambda x} + \int_x^\infty \frac{e^{i\lambda(t-x)} - e^{-i\lambda(t-x)}}{2i\lambda} q(t) y(t,\lambda) dt \\ &= \alpha_1 e^{i\lambda x} + \alpha_2 e^{-i\lambda x} + \int_x^\infty \frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda} q(t) y(t,\lambda) dt \end{aligned} \tag{3.12}$$

formuna dönüşür. Son eşitlikten

$$y(x,\lambda)e^{-i\lambda x} = \alpha_1 + \alpha_2 e^{-2i\lambda x} + \int_x^\infty \frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda(t-x)} e^{i\lambda(t-x)} \frac{t-x}{t} t q(t) y(t,\lambda) e^{-i\lambda t} dt$$

eşitliği elde edilir. Her $x \in [0,\infty)$ ve $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$ için

$$\left| \frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda(t-x)} e^{i\lambda(t-x)} \right| \leq 1 \quad , \quad 0 \leq x \leq \infty,\ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$$

eşitsizliği elde edilen son eşitlikte dikkate alınırsa

$$\lim_{x\to\infty} y(x,\lambda)e^{-i\lambda x} = \lim_{x\to\infty} \left\{ \alpha_1 + \alpha_2 e^{-i\lambda x} \right\}$$

olur. Buradan (3.4) koşulunun sağlanması için $\alpha_1 = 1$ ve $\alpha_2 = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla, bu bulunan α_1 ve α_2 değerleri (3.12) eşitliğinde dikkate alınırsa (3.6) homogen olmayan denklemin genel çözümü

$$y(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty \frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda} q(t) y(t,\lambda) dt \quad , \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$$

olarak elde edilir. ■

Teorem 3.1.2 Potansiyel fonksiyonun gerçeklediği (3.3) koşulu altında $e(x,\lambda)$ Jost çözümü

$$\sigma(x) \;:=\; \int_x^\infty |q(t)|\,dt$$

$$\sigma_1(x) \;:=\; \int_x^\infty \sigma(t)dt = \int_x^\infty (\xi - x)\,|q(t)|\,d\xi$$

olmak üzere

$$e(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K(x,t)e^{i\lambda t}dt \tag{3.13}$$

şeklinde bir integral gösterime sahiptir ve bu gösterim tek türlüdür. Burada $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu $0 \le x < t < \infty$ için

$$K(x,t) = \frac{1}{2}\int_{\frac{x+t}{2}}^\infty q(\xi)d\xi + \frac{1}{2}\int_{\frac{x+t}{2}}^\infty \int_\xi^{t+\xi-x} q(\xi)K(\xi,\eta)d\eta d\xi + \frac{1}{2}\int_x^{\frac{x+t}{2}} \int_{t+x-\xi}^{t+\xi-x} q(\xi)K(\xi,\eta)d\eta d\xi \tag{3.14}$$

eşitliğini sağlar.

İspat. Kabul edelim ki (3.13) eşitliğini gerçekleyen $K(x,t)$ fonksiyonu bulunsun. Bu durumda

$$e(\xi,\lambda) = e^{i\lambda\xi} + \int_\xi^\infty K(\xi,\eta)e^{i\lambda\eta}d\eta \tag{3.15}$$

yazılır. (3.13) ile (3.15) eşitlikleri bir önceki teoremde elde edilen

$$e(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty \frac{\sin\lambda(\xi - x)}{\lambda} q(\xi)e(\xi,\lambda)d\xi$$

şeklinde tanımlı Jost çözümünde dikkate alınırlarsa

$$e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K(x,t)e^{i\lambda t}dt = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty \frac{\sin\lambda(\xi - x)}{\lambda} q(\xi)\left\{ e^{i\lambda\xi} + \int_\xi^\infty K(\xi,\eta)e^{i\lambda\eta}d\eta \right\} d\xi$$

yazılır. Son eşitlik kullanılarak

$$\int_x^\infty K(x,t)e^{i\lambda t}dt = \int_x^\infty \frac{\sin\lambda(\xi - x)}{\lambda} e^{i\lambda\xi}q(\xi)d\xi + \int_x^\infty \int_\xi^\infty \frac{\sin\lambda(\xi - x)}{\lambda} e^{i\lambda\eta}q(\xi)K(\xi,\eta)d\eta d\xi \tag{3.16}$$

denklemi elde edilir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}\frac{\sin\lambda(\xi-x)}{\lambda}e^{i\lambda\xi} &= \frac{e^{i\lambda(\xi-x)}-e^{-i\lambda(\xi-x)}}{2i\lambda}e^{i\lambda\xi}\\ &= \frac{e^{i\lambda(2\xi-x)}-e^{-i\lambda x}}{2i\lambda}\\ &= \frac{1}{2}\int_x^{2\xi-x} e^{i\lambda t}dt\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\frac{\sin\lambda(\xi-x)}{\lambda}e^{i\lambda\eta} &= \frac{e^{i\lambda(\xi-x)}-e^{-i\lambda(\xi-x)}}{2i\lambda}e^{i\lambda\eta}\\ &= \frac{e^{i\lambda(\xi+\eta-x)}-e^{-i\lambda(-\xi+\eta+x)}}{2i\lambda}\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\xi+\eta+x}^{\xi+\eta-x} e^{i\lambda t}dt\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından, bu eşitlikler (3.16) eşitliğinde kullanılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned}j_1 &= \frac{1}{2}\int_x^\infty\int_x^{2\xi-x} q(\xi)e^{i\lambda t}dtd\xi\\ &= \frac{1}{2}\int_x^\infty\int_{\frac{x+t}{2}}^\infty q(\xi)e^{i\lambda t}d\xi dt\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}j_2 &= \frac{1}{2}\int_x^\infty\int_\xi^\infty\int_{-\xi+\eta+x}^{\xi+\eta-x} K(\xi,\eta)q(\xi)e^{i\lambda t}dtd\eta d\xi\\ &= \frac{1}{2}\int_x^\infty\int_{\frac{x+t}{2}}^\infty\int_\xi^{t+\xi-x} q(\xi)K(\xi,\eta)e^{i\lambda t}d\eta d\xi dt + \frac{1}{2}\int_x^\infty\int_x^{\frac{x+t}{2}}\int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} q(\xi)K(\xi,\eta)e^{i\lambda t}d\eta d\xi dt\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\int_x^\infty K(x,t)e^{i\lambda t}dt = j_1 + j_2$$

olarak yazılır. Buradan

$$\int_x^\infty K(x,t)e^{i\lambda t}dt = \frac{1}{2}\int_x^\infty \left\{ \int_{\frac{x+t}{2}}^\infty q(\xi)d\xi + \int_{\frac{x+t}{2}}^\infty \int_\xi^{t+\xi-x} q(\xi)K(\xi,\eta)d\eta d\xi \right.$$
$$\left. + \int_x^{\frac{x+t}{2}} \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} q(\xi)K(\xi,\eta)d\eta d\xi \right\} e^{i\lambda t}dt$$

elde edilir. Fourier dönüşüm özellikleri kullanılarak $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu (3.14) eşitliği ile verilir

İkinci adımda, (3.13) integral denkleminin var ve tek olduğunu göstermek için (3.14) denklemine ardışık yaklaşımlar metodunu uygulayalım.

$$K_0(x,t) := \frac{1}{2}\int_{\frac{x+t}{2}}^\infty q(\xi)d\xi \tag{3.17}$$

$m = 0, 1, ...$ için

$$K_{m+1}(x,t) := \frac{1}{2}\int_x^{\frac{x+t}{2}} \int_{t+x-\xi}^{t+\xi-x} q(\xi)K_m(\xi,\eta)d\eta d\xi + \frac{1}{2}\int_{\frac{x+t}{2}}^\infty \int_\xi^{t+\xi-x} q(\xi)K_m(\xi,\eta)d\eta d\xi \tag{3.18}$$

olmak üzere

$$\sum_{m=0}^\infty K_m(x,t) \tag{3.19}$$

serisini tanımlayalım.

(i) Eğer (3.19) serisi $0 \le x < \infty$ için mutlak ve düzgün yakınsak ise

$$K(x,t) = \sum_{m=0}^\infty K_m(x,t) \tag{3.20}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu serinin mutlak ve düzgün yakınsaklığını göstermek için (3.17)-(3.18) eşitliklerini kullanalım.

İlk olarak (3.17) eşitliği için

$$\begin{aligned} |K_0(x,t)| &\le \frac{1}{2}\int_{\frac{x+t}{2}}^\infty |q(\xi)|\, d\xi \\ &= \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right) \end{aligned} \tag{3.21}$$

eşitsizliği bulunur.

İkinci olarak (3.18) eşitliği incelenirse gerekli düzenlemeler yapıldığında ve σ fonksiyonunun azalanlığı kullanıldığında

$$j_3 := \frac{1}{2}\int_{x}^{\frac{x+t}{2}}\int_{t+x-\xi}^{t+\xi-x} |q(\xi)|\,|K_0(\xi,\eta)|\,d\eta d\xi$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} j_3 &\leq \frac{1}{4}\int_{x}^{\frac{x+t}{2}}\int_{t+x-\xi}^{t+\xi-x} |q(\xi)|\,\sigma\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) d\eta d\xi \\ &= \frac{1}{4}\int_{x}^{\frac{x+t}{2}} |q(\xi)|\,\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)\int_{t+x-\xi}^{t+\xi-x} d\eta d\xi \\ &\leq \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)\int_{x}^{\frac{x+t}{2}} |q(\xi)|\,(\xi-x)d\xi \end{aligned}$$

eşitsizliği ve

$$j_4 := \frac{1}{2}\int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty}\int_{\xi}^{t+\xi-x} |q(\xi)|\,|K_0(\xi,\eta)|\,d\eta d\xi$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} j_4 &\leq \frac{1}{4}\int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} |q(\xi)|\int_{\xi}^{t+\xi-x}\sigma\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) d\eta d\xi \\ &= \frac{1}{4}\int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} |q(\xi)|\,\sigma(\xi)\int_{\xi}^{t+\xi-x} d\eta d\xi \\ &= \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)\int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty}(\frac{x+t}{2}-x)\,|q(\xi)|\,d\xi \\ &\leq \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)\int_{x}^{\infty}(\xi-x)\,|q(\xi)|\,d\xi \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. j_3 ve j_4 için elde edilen eşitsizliklerden yararlanarak

$$|K_1(x,t)| \leq j_3 + j_4$$

için

$$|K_1(x,t)| \leq \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)\sigma_1(x)$$

yazılır. Buradan tümevarım yöntemi kullanılarak

$$|K_m(x,t)| \leq \tfrac{1}{2}\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)\frac{\sigma_1^m(x)}{m!} \quad , \quad m = 0,1,2,...$$

yazılıp

$$\begin{aligned} \left|\sum_{m=0}^{\infty} K_m(x,t)\right| &\leq \sum_{m=0}^{\infty} |K_m(x,t)| \\ &\leq \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sigma_1^m(x)}{m!} \\ &= \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{\sigma_1(x)} \end{aligned} \tag{3.22}$$

sonucu elde edilir. O halde Weierstrass kriteri gereğince $0 \leq x < \infty$ için (3.19) serisi mutlak ve düzgün yakınsaktır. Yani (3.19) serisi (3.20) şeklinde ifade edilebilir.

(ii) Mutlak ve düzgün yakınsak olduğundan tek bir toplam şeklinde ifade edilebilen (3.19) serisi, (3.14) eşitliğini sağlar. Bunun ispatı için (3.20) serisi

$$K(x,t) = K_0(x,t) + \sum_{m=1}^{\infty} K_m(x,t)$$

şeklinde açılıp, (3.17) ile (3.18) ardışık yaklaşımları kullanılarak

$$\begin{aligned}
K(x,t) &= K_0(x,t) + \sum_{m=1}^{\infty} K_m(x,t) \\
&= K_0(x,t) + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} \int_{x}^{\frac{x+t}{2}} \int_{t+x-\xi}^{t+\xi-x} q(\xi) K_{m-1}(\xi,\eta) d\eta d\xi \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{2} \int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} \int_{\xi}^{t+\xi-x} q(\xi) K_{m-1}(\xi,\eta) d\eta d\xi \right\} \\
&= K_0(x,t) + \frac{1}{2} \int_{x}^{\frac{x+t}{2}} \int_{t+x-\xi}^{t+\xi-x} q(\xi) \sum_{m=1}^{\infty} K_{m-1}(\xi,\eta) d\eta d\xi \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} \int_{\xi}^{t+\xi-x} q(\xi) \sum_{m=1}^{\infty} K_{m-1}(\xi,\eta) d\eta d\xi \\
&= K_0(x,t) + \frac{1}{2} \int_{x}^{\frac{x+t}{2}} \int_{t+x-\xi}^{t+\xi-x} q(\xi) \sum_{m=0}^{\infty} K_{m}(\xi,\eta) d\eta d\xi \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} \int_{\xi}^{t+\xi-x} q(\xi) \sum_{m=0}^{\infty} K_{m}(\xi,\eta) d\eta d\xi \\
&= \frac{1}{2} \int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} q(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_{x}^{\frac{x+t}{2}} \int_{t+x-\xi}^{t+\xi-x} q(\xi) \sum_{m=0}^{\infty} K_{m}(\xi,\eta) d\eta d\xi \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} \int_{\xi}^{t+\xi-x} q(\xi) \sum_{m=0}^{\infty} K_{m}(\xi,\eta) d\eta d\xi \\
&= \frac{1}{2} \int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} q(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_{x}^{\frac{x+t}{2}} \int_{t+x-\xi}^{t+\xi-x} q(\xi) K(\xi,\eta) d\eta d\xi \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} \int_{\xi}^{t+\xi-x} q(\xi) K(\xi,\eta) d\eta d\xi
\end{aligned}$$

olarak yazılır. Bu ise, $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonunun (3.14) eşitliğini sağladığını verir.

Dolayısıyla, **(i)** ve **(ii)** şıklarından da kolayca görülür ki $e(x,\lambda)$ Jost çözümü (3.13) şeklinde bir gösterime sahiptir ve bu gösterim tek türlüdür. ■

Teorem 3.1.3 Ele alınan (3.3) koşulu altında, $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu ve türevleri için $C_0 = \frac{1}{2}e^{\sigma_1(0)}$ ve $C = C_0 \int_0^\infty |q(\xi)|\, d\xi$ olmak üzere,

$$|K(x,t)| \leq C_0 \sigma\left(\frac{x+t}{2}\right) \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned} |K_x(x,t)| &\leq \frac{1}{4}\left|q\left(\frac{x+t}{2}\right)\right| + C\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right) \\ |K_t(x,t)| &\leq \frac{1}{4}\left|q\left(\frac{x+t}{2}\right)\right| + C\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right) \end{aligned} \tag{3.24}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. Her $x > 0$ için σ fonksiyonu azalan fonksiyon olduğundan (3.22) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} |K(x,t)| &\leq \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right) e^{\sigma_1(x)} \\ &\leq \frac{1}{2}e^{\sigma_1(0)}\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right) \end{aligned}$$

yazılır. Bu ise (3.23) eşitsizliğini verir. $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonunun x ve t değişkenlerine göre kısmi türevleri sırasıyla

$$\begin{aligned} K_x(x,t) &= -\frac{1}{4}q\left(\frac{x+t}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_x^{\frac{x+t}{2}} q(\xi)K(\xi, t+x-\xi)d\xi - \frac{1}{2}\int_x^\infty q(\xi)K(\xi, t+\xi-x)d\xi \\ K_t(x,t) &= -\frac{1}{4}q\left(\frac{x+t}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_x^{\frac{x+t}{2}} q(\xi)K(\xi, t+x-\xi)d\xi + \frac{1}{2}\int_x^\infty q(\xi)K(\xi, t+\xi-x)d\xi \end{aligned}$$

olup σ fonksiyonu tanımı kullanılarak $0 \leq x < \infty$ için

$$\begin{aligned} |K_x(x,t)| &\leq \frac{1}{4}\left|q\left(\frac{x+t}{2}\right)\right| + \frac{1}{2}\int_x^{\frac{x+t}{2}} C_0\sigma\left(\frac{\xi+t+x-\xi}{2}\right)|q(\xi)|\,d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_x^{\infty} C_0\sigma\left(\frac{\xi+t+\xi-x}{2}\right)|q(\xi)|\,d\xi \\ &\leq \frac{1}{4}\left|q\left(\frac{x+t}{2}\right)\right| + C_0\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)\int_x^{\infty}|q(\xi)|\,d\xi \\ &\leq \frac{1}{4}\left|q\left(\frac{x+t}{2}\right)\right| + C_0\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)\int_0^{\infty}|q(\xi)|\,d\xi \end{aligned}$$

yazılır. (3.3) koşulu kullanılarak ise

$$|K_x(x,t)| \leq \frac{1}{4}\left|q\left(\frac{x+t}{2}\right)\right| + C\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)$$

elde edilir. Benzer işlemler yapılarak

$$|K_t(x,t)| \leq \frac{1}{4}\left|q\left(\frac{x+t}{2}\right)\right| + C\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)$$

eşitsizliği de ispatlanır. ■

Teorem 3.1.3 kullanılarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.1.1 $K(x,t)$, $K_x(x,t)$ ve $K_t(x,t)$ fonksiyonları her x için t değişkenine göre ve her t için x değişknenine göre ayrı ayrı $L_1(0,\infty)$ uzayına aittir.

Teorem 3.1.4 Jost çözümü ve onun türevi olan $e_x(x,\lambda)$ fonksiyonu $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$ için (3.3) koşulu altında aşağıdaki asimptotik eşitlikleri gerçekler:

1. $e(x,\lambda) = e^{i\lambda x}[1+o(1)]$, $x \to \infty$
2. $e_x(x,\lambda) = e^{i\lambda x}[i\lambda + o(1)]$, $x \to \infty$.

İspat. 1. Jost çözümü için verilen (3.13) integral denkleminden

$$e(x,\lambda)e^{-i\lambda x} - 1 = \int_x^{\infty} K(x,t)e^{i\lambda(t-x)}dt$$

yazılır. Buradan $0 < x < t$ için

$$\begin{aligned} \left|e(x,\lambda)e^{-i\lambda x} - 1\right| &\leq \int_x^\infty \left|K(x,t)e^{i\lambda(t-x)}\right| dt \\ &= \int_x^\infty |K(x,t)|\, e^{-(t-x)\,\mathrm{Im}\,\lambda} dt \\ &\leq \int_x^\infty |K(x,t)|\, dt \end{aligned}$$

olup $K(x,t) \in L_1(0,\infty)$ olduğundan

$$\lim_{x\to\infty} \int_x^\infty |K(x,t)|\, dt = 0$$

yazılır. O halde,

$$\lim_{x\to\infty} \left|e(x,\lambda)e^{-i\lambda x} - 1\right| dt = 0 \quad , \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$$

olduğundan istenilen asimptotik eşitlik elde edilir.

2. Jost çözümü için verilen (3.13) integral denklemi kullanılarak

$$e_x(x,\lambda)e^{-i\lambda x} - i\lambda = -K(x,x) + \int_x^\infty K_x(x,t)e^{i\lambda(t-x)} dt$$

yazılır. Buradan

$$\left|e_x(x,\lambda)e^{-i\lambda x} - i\lambda\right| \leq |K(x,x)| + \int_x^\infty \left|K_x(x,t)e^{i\lambda(t-x)}\right| dt$$

olup, her $0 < x < t$ için

$$\left|e_x(x,\lambda)e^{-i\lambda x} - i\lambda\right| \leq |K(x,x)| + \int_x^\infty |K_x(x,t)|\ dt$$

eşitsizliği sağlanır. Diğer yandan (3.23) eşitsizliğinden $|K(x,x)| \leq C_0\sigma(x)$ olup σ azalan fonksiyon olduğundan $x \to \infty$ için $|K(x,x)| \to 0$ sağlanır. Benzer şekilde $K_x(x,t) \in L_1(0,\infty)$ olduğundan

$$\lim_{x\to\infty} \int_x^\infty |K_x(x,t)|\, dt = 0$$

olur. O halde,

$$\lim_{x\to\infty} \left| e_x(x,\lambda)e^{-i\lambda x} - i\lambda \right| = 0 \quad , \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$$

yazılacağından ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.1.5 Her $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_-$ için, (3.3) koşulu altında aşağıdaki asimptotik eşitlikler sağlanır:

1. $e(x,-\lambda) = e^{-i\lambda x}[1 + o(1)]$, $x \to \infty$
2. $e_x(x,-\lambda) = e^{-i\lambda x}[-i\lambda + o(1)]$, $x \to \infty$.

İspat. 1. Jost çözümü için verilen (3.13) integral denkleminden

$$e(x,-\lambda)e^{i\lambda x} - 1 = \int_x^\infty K(x,t)e^{-i\lambda(t-x)}dt$$

yazılır. Buradan $0 < x < t$ için

$$\begin{aligned} \left| e(x,-\lambda)e^{i\lambda x} - 1 \right| &= \int_x^\infty |K(x,t)|\, e^{(t-x)\operatorname{Im}\lambda} dt \\ &\leq \int_x^\infty |K(x,t)|\, dt \end{aligned}$$

olup $K(x,t) \in L_1(0,\infty)$ olduğundan

$$\lim_{x\to\infty} \int_x^\infty |K(x,t)|\, dt = 0$$

yazılır. O halde,

$$\lim_{x\to\infty} \left| e(x,\lambda)e^{i\lambda x} - 1 \right| dt = 0 \quad , \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_-$$

olup istenilen asimptotik eşitlik elde edilir.

2. Bir önceki teoremin 2. şıkkına benzer yöntem uygulanarak elde edilir. ■

Tanım 3.1.2 (Çözümlerin Wronskiyeni) Ele alınan (3.1)-(3.2) Sturm-Liouville probleminin herhangi iki çözümü y_1 ve y_2 olsun. Bu durumda

$$W[y_1,y_2] := y_1(x,\lambda)y_2'(x,\lambda) - y_1'(x,\lambda)y_2(x,\lambda)$$

ile tanımlı ifadeye y_1 ve y_2 çözümlerinin wronskiyeni denir.

Lemma 3.1.1

$$W[e(x,\lambda), e(x,-\lambda)] = -2i\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

sağlanır.

İspat. Wronskiyen x değişkeninden bağımsız olduğu için

$$W[e(x,\lambda), e(x,-\lambda)] = \lim_{x\to\infty} W[e(x,\lambda), e(x,-\lambda)]$$

eşitliği yazılabilir. Burada Teorem 3.1.4 ve Teorem 3.1.5 içerisinde verilen asimptotik eşitlikler kullanılarak

$$\begin{aligned} W[e(x,\lambda), e(x,-\lambda)] &= \lim_{x\to\infty} \{e(x,\lambda)e_x(x,-\lambda) - e_x(x,\lambda)e(x,-\lambda)\} \\ &= \lim_{x\to\infty} \{(e(x,\lambda)e^{-i\lambda x})(e_x(x,-\lambda)e^{i\lambda x}) \\ &\qquad -(e_x(x,\lambda)e^{-i\lambda x})(e(x,-\lambda)e^{i\lambda x})\} \\ &= -2i\lambda \end{aligned}$$

olduğu kolayca bulunur. ■

Teorem 3.1.6 Her $\lambda \in \mathbb{R}$ için $e(x,\lambda) = \overline{e(x,\lambda)}$ sağlanır.

İspat. Potansiyel fonksiyon reel değerli olduğundan (3.14) eşitliğindeki $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu da reel değerli olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \overline{e(x,\lambda)} &= e^{-i\lambda x} + \int_x^\infty K(x,t)e^{-i\lambda t}dt \\ &= e(x,-\lambda) \end{aligned}$$

sağlanır. ■

Tanım 3.1.3 Jost çözümünün tanımı olan (3.13) eşitliğinde $x = 0$ alınması halinde elde edilen

$$e(\lambda) := e(0,\lambda) = 1 + \int_0^\infty K(0,t)e^{i\lambda t}dt \tag{3.25}$$

fonksiyona (3.1)-(3.2) Sturm-Liouville probleminin Jost fonksiyonu denir. q reel değerli fonksiyon olmak üzere (3.1) sınır koşulu altında Jost fonksiyonu aşağıda verilen teoremleri ve sonucu gerçekler.

Teorem 3.1.6 kullanılarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.1.2 Her $\lambda \in \mathbb{R}$ için $e(-\lambda) = \overline{e(\lambda)}$ sağlanır.

Teorem 3.1.7 Jost fonksiyonu $\mathbb{C}_+$ üzerinde analitik, reel eksen üzerinde süreklidir.

İspat. İlk olarak $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ için süreklilik tanımını kullanarak

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} e(\lambda) = \lim_{\lambda \to \lambda_0} \left\{ 1 + \int_0^\infty K(0,t) e^{i\lambda t} dt \right\} = e(\lambda_0)$$

yazılır. Bu ise Jost fonksiyonunun keyfi $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ noktasında sürekli olduğunu gösterir. ■

Teorem 3.1.8 Her $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için $e(\lambda) \neq 0$ sağlanır.

İspat. $\lambda \in \mathbb{R}$ olması durumunda $W[e(x,\lambda), e(x,-\lambda)] = -2i\lambda$ olduğundan ve Wronskiyen x değişkeninden bağımsız olduğundan

$$e(\lambda) e_x(0,-\lambda) - e_x(0,\lambda) e(-\lambda) = -2i\lambda$$

yazılabilir. Ayrıca, $e(-\lambda) = \overline{e(\lambda)}$ olduğundan

$$e(\lambda) e_x(0,-\lambda) - e_x(0,\lambda) \overline{e(\lambda)} = -2i\lambda$$

sağlanır. O halde, bir an için en az bir $\lambda_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$ sayısı için $e(\lambda_0) = 0$ olduğunu kabul edelim. Buradan

$$e(\lambda_0) e_x(0,-\lambda_0) - e_x(0,\lambda_0) \overline{e(\lambda_0)} = -2i\lambda_0$$

olup, kabulümüz gereğince $2i\lambda_0 = 0$ olduğundan $\lambda_0 = 0$ bulunur. Bu ise $\lambda_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmasıyla çelişir dolayısıyla $e(\lambda) \neq 0$ olmalıdır. ■

Teorem 3.1.9 Jost fonksiyonunun bütün sıfırları üst yarı düzlemde imajiner eksen üzerindedir.

İspat. Kabul edelim ki $\lambda_1 \in \mathbb{C}_+$ Jost fonksiyonunun keyfi sıfırı olsun. Bu durumda $e(\lambda_1) = 0$ yazılır. Diğer yandan $e(x, \lambda_1)$ ve $\overline{e(x, \lambda_1)}$ çözümleri (3.2) denkleminin birer çözümleri olduğundan

$$\begin{aligned} -e''(x, \lambda_1) + q(x)e(x, \lambda_1) &= \lambda_1^2 e(x, \lambda_1) \\ \overline{-e''(x, \lambda_1)} + q(x)\overline{e(x, \lambda_1)} &= \overline{\lambda_1^2 e(x, \lambda_1)} \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılır. O halde bu iki eşitlikten

$$\overline{e''(x, \lambda_1)}e(x, \lambda_1) - e''(x, \lambda_1)\overline{e(x, \lambda_1)} = (\lambda_1^2 - \overline{\lambda_1^2})e(x, \lambda_1)\overline{e(x, \lambda_1)}$$

elde edilir. Elde edilen son eşitliğe gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(\lambda_1^2 - \overline{\lambda_1^2}) \int_0^\infty |e(x, \lambda_1)|^2 \, dx = 0$$

bulunur. Diğer yandan, Jost çözümü aşikar çözümden farklı olacağından

$$\int_0^\infty |e(x, \lambda_1)|^2 \, dx > 0$$

sağlanır. Dolayısıyla, $\lambda_1^2 = \overline{\lambda_1^2}$ olmalıdır. O halde $e(\lambda)$ Jost fonksiyonunun açık üst yarı düzlemde tüm sıfırları $a > 0$ için $\lambda = ai$ şeklinde olup her biri imajiner eksen üzerindedir. ■

Teorem 3.1.10 Jost fonksiyonu açık üst yarı düzlemde sonlu sayıda sıfırlara sahiptir.

İspat. Jost fonksiyonu açık üst yarı düzlemde analitik olduğundan, analitik fonksiyonun özellikleri gereğince sıfırlarının limit noktası analitiklik bölgesinin sınırındadır. Dolayısıyla, Jost fonksiyonu Teorem 3.1.9 gereğince reel eksende hiçbir sıfıra sahip olamaz. Diğer yandan Teorem 3.1.4 kullanılarak

$$e(\lambda) = 1 + o(1) \quad , \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+, \quad x \to \infty$$

yazılacağından yeterince büyük λ sayıları için $e(\lambda) = 1$ olup Jost fonksiyonunun sıfırları $\mathbb{C}_+$ yarı düzleminin sınırlı bir bölgesindedir. Bolzano-Weierstrass teoreminden sınırlı ve sonsuz elemanlı her küme en az bir yığılma noktasına sahip olacağından Jost fonksiyonu sonsuz çoklukta sıfıra sahip olamaz. O halde $\mathbb{C}_+$ yarı düzleminde sonlu adette sıfıra sahiptir. ■

3.2 Saçılım fonksiyonu ve özellikleri

Tanım 3.2.1 Jost fonksiyonu kullanılarak $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$S(\lambda) := \frac{e(-\lambda)}{e(\lambda)} \tag{3.26}$$

şeklinde tanımlanan S fonksiyonuna (3.1)-(3.2) Sturm-Liouville probleminin saçılım fonksiyonu denir. Burada Sonuç 3.1.2 gereğince saçılım fonksiyonu

$$S(\lambda) := \frac{\overline{e(\lambda)}}{e(\lambda)}$$

şeklinde de ifade edilebilir. $e(\lambda)$ fonksiyonunun $k = 1, 2, ..., n$ için $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n$ özelliğine sahip sıfırları $i\lambda_k$ ile, bu sıfırların $\lambda = i\lambda_k$ için $L_2(0, \infty)$ uzayındaki normu ise m_k^{-1} ile gösterilsin. $\lambda \in (-\infty, \infty)$ olmak üzere

$$\{S(\lambda),\ \lambda_k,\ m_k,\ k = 1, 2, ..., n\}$$

kümesine (3.1)-(3.2) Sturm-Liouville probleminin saçılım verileri kümesi denir. Potansiyel fonksiyon kullanılarak bu saçılım verilerinin elde edilmesine, özelliklerinin araştırılmasına saçılım teorisinde düz problem, saçılım verilerinden yola çıkarak potansiyel fonksiyonun bulunmasına ise ters problem denir. Ters problemlerde her veri saçılım verisi olmayabilir. Bu durumda bu verilerin saçılım verileri olup olmadığını anlamak için Levinson formülü diye adlandırılan formül devreye girmektedir. Eğer bu veriler Levinson formülünü sağlıyorlarsa saçılım verileri olurlar ve böylece potansiyel fonksiyonun varlığı ve tekliği söylenilebilir.

Bir sonraki bölümde yukarıda bahsedilen bu Levinson formülü detaylı bir şekilde incelenerek ispatlanmıştır.

Lemma 3.2.1 Jost fonksiyonunun tanımı olan (3.25) eşitliğinde $\lambda = 0$ için $e(0) \neq 0$ ise $S(0) = 1$ olmalıdır.

İspat. Saçılım fonksiyonunun tanımı olan (3.26) eşitliğinde $\lambda = 0$ için, $e(0) \neq 0$ iken

$$S(0) = \frac{e(0)}{e(0)} = 1$$

olduğu kolayca bulunur. ■

Lemma 3.2.2 Jost fonksiyonunun tanımı olan (3.25) eşitliğinde $\lambda = 0$ için $e(0) = 0$ ise

$$\begin{aligned} K_1(t) &= \int_t^\infty K(0,\xi)d\xi \\ A(\lambda) &= \int_0^\infty K_1(t)e^{i\lambda t}dt \end{aligned}$$

olmak üzere, saçılım fonksiyonu

$$S(\lambda) := -\frac{A(-\lambda)}{A(\lambda)}$$

şeklinde tanımlı olup $\lambda = 0$ için

$$S(0) := -\frac{A(0)}{A(0)}$$

şeklinde tanımlanır.

İspat. Jost fonksiyonunun tanımı olan (3.25) ifadesinde $\lambda = 0$ için

$$\int_0^\infty K(0,t)dt = -1 \tag{3.27}$$

bulunur. Ayrıca (3.25) ifadesine kısmi integrasyon uygulanırsa

$$e(\lambda) = i\lambda \int_0^\infty \int_t^\infty K(0,\xi) e^{i\lambda t} d\xi dt \tag{3.28}$$

olup $K(x,t) \in L_1(0,\infty)$ olduğundan ve σ fonksiyonu tanımından

$$\begin{aligned} \left| \int_t^\infty K(0,\xi)\ d\xi \right| &\leq \int_t^\infty |K(0,\xi)|\, d\xi \\ &\leq \int_t^\infty c\sigma\left(\frac{\xi}{2}\right) d\xi \\ &\leq c \int_t^\infty \int_{\frac{\xi}{2}}^\infty |q(s)|\, ds d\xi \end{aligned}$$

olarak yazılır. Son ifadeye gerekli düzenlemeler yapıldığında $\int_t^\infty K(0,\xi)d\xi$ integralinin sonlu bir integral olduğu kolayca görülür, bu sebeple

$$K_1(t) = \int_t^\infty K(0,\xi)d\xi$$

yazılabilir. Böylece (3.28) eşitliği

$$e(\lambda) = i\lambda \int_0^\infty K_1(t) e^{i\lambda t}\ dt$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca, $K_1(t) \in L_1(0,\infty)$ olduğundan bu son eşitlikteki integral sonlu olup

$$A(\lambda) = \int_0^\infty K_1(t) e^{i\lambda t} dt$$

şeklinde ifade edilebileceğinden (3.28) eşitliği

$$e(\lambda) = i\lambda A(\lambda) \tag{3.29}$$

biçiminde yazılabilir.

Benzer işlemler, (3.25) eşitliğinde tanımlanan Jost fonksiyonunda λ yerine $-\lambda$ alınarak yapılırsa,

$$e(-\lambda) = -i\lambda A(-\lambda) \tag{3.30}$$

bulunur. O halde (3.29) ve (3.30) eşitlikleri saçılım fonksiyonun tanımı olan (3.26) eşitliğinde yerlerine yazılırlarsa

$$S(\lambda) := -\frac{A(-\lambda)}{A(\lambda)}$$

olup $\lambda = 0$ için

$$S(0) := -\frac{A(0)}{A(0)}$$

olarak elde edilir. Burada $A(0) \neq 0$ olmalıdır. Gerçekten de Wronskiyen tanımı kullanılırsa

$$W[e(x,\lambda), e(x,-\lambda)] = e(\lambda)e'(0,-\lambda) - e(-\lambda)e'(0,\lambda)$$

olduğundan

$$i\lambda A(\lambda)e'(0,-\lambda) + i\lambda A(-\lambda)e'(0,\lambda) = -2i\lambda$$

olarak yazılır. Buradan

$$A(\lambda)e'(0,-\lambda) + A(-\lambda)e'(0,\lambda) = -2$$

olup $\lambda = 0$ alınırsa

$$A(0)e'(0,0) + A(0)e'(0,0) = -2$$

yazılır. Bu ise

$$A(0)e'(0,0) = -1$$

eşitliğini verir. Buradan $A(0) \neq 0$ olduğu kolayca görülür. Yani, $e(0) = 0$ iken $S(0) = -1$ olmalıdır. ■

O halde, Lemma 3.2.1 ve Lemma 3.2.2 sonucu olarak

$$S(0) = \begin{cases} 1, & e(0) \neq 0 \\ -1, & e(0) = 0 \end{cases} \tag{3.31}$$

şeklinde ifade edilir.

3.3 Levinson Formülü

Lemma 3.3.1

$$\begin{aligned} e(\lambda) &= re^{i\nu(\lambda)} \\ e(-\lambda) &= re^{-i\nu(\lambda)} \end{aligned} \tag{3.32}$$

eşitlikleri gerçeklenir.

İspat. Karmaşık fonksiyonların özelliklerinden $\left|\overline{e(\lambda)}\right| = |e(\lambda)|$ yazılacağından sonuç 3.1.2 kullanılarak $|e(-\lambda)| = |e(\lambda)|$ yazılır. Bu ise $e(\lambda)$ ve $e(-\lambda)$ fonksiyonlarının (3.32) biçiminde yazılabileceğini verir. ■

Lemma 3.3.2 $\arg e(\lambda) = \nu(\lambda)$ şeklinde tanımlı olan ν fonksiyonu tek fonksiyondur.

İspat. Sonuç 3.1.2 gereğince her $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$ için $\overline{e(\lambda)}$ ve $e(-\lambda)$ fonksiyonlarının modülleri birbirine eşit olacağından ve (3.32) eşitliklerinden

$$|r|\left|e^{-i\nu(\lambda)}\right| = |r|\left|e^{i\nu(-\lambda)}\right|$$

olup $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$ için $\nu(-\lambda) = -\nu(\lambda)$ olmalıdır. Yani, ν fonksiyonu tek fonksiyondur. ■

Yukarıda verilen Lemma 3.2.1, Lemma 3.2.2, Lemma 3.3.1 ve Lemma 3.3.2 kullanılarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.1 Yarım eksen üzerinde (3.1)-(3.2) ile tanımlanan Sturm-Liouville probleminin Levinson formülü

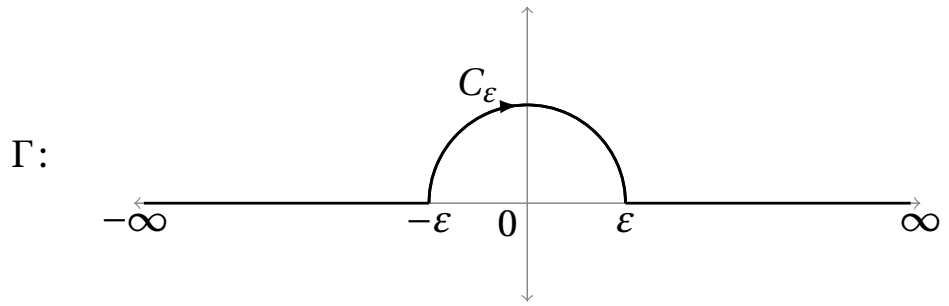
$$\frac{2\left[\nu(\infty) - \nu(0)\right]}{2\pi} = n + \frac{1 - S(0)}{4}$$

biçiminde verilir.

İspat. Γ eğrisini

$$\Gamma : (-\infty, -\epsilon] \cup C_\epsilon \cup [\epsilon, \infty)$$

olacak şekilde



tanımlayalım. Teorem 3.1.10 gereğince üst yarı düzlemde tanımlı olan Jost fonksiyonu, sonlu sayıda sıfırlara sahip olduğundan Jost fonksiyonunun sıfırlarının sayısını n ile ifade edelim. Teorem 3.1.7 gereğince Jost fonksiyonu üst yarı düzlemde analitik olduğundan Argüment prensibi kullanılarak

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{e^{'}(\lambda)}{e(\lambda)}d\lambda = n$$

yazılır. Buradan Γ eğrisi gözönüne alınarak

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{-\infty}^{-\epsilon} d\ln e(\lambda) + \int_{C_\varepsilon} d\ln e(\lambda) + \int_{\varepsilon}^{\infty} d\ln e(\lambda)\right\} = n \tag{3.33}$$

elde edilir. Şimdi ise $e(0) \neq 0$ ve $e(0) = 0$ olması durumları için (3.33) eşitliğini kullanarak Levinson formülünü elde edelim. $e(0) \neq 0$ için

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon} d\ln e(\lambda) = i(\nu(0) - \nu(0)) = 0$$

ve

$$2\pi i n = \lim_{\epsilon\to 0}\left\{i\left[\nu(-\epsilon) - \nu(-\infty)\right] + i\left[\nu(\infty) - \nu(\epsilon)\right]\right\} = 2i\left[\nu(\infty) - \nu(0)\right]$$

olup

$$n = \frac{\nu(\infty) - \nu(0)}{\pi}$$

sonucu bulunur. Diğer yandan $e(0) = 0$ için (3.29) ve (3.30) eşitliklerinden

$$\nu(\lambda) = \arg e(\lambda) = \tfrac{\pi}{2} + \varphi + \arg A(\lambda)$$
$$\nu(-\lambda) = \arg e(-\lambda) = \tfrac{3\pi}{2} + \varphi + \arg A(-\lambda)$$

olup

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon} d\ln e(\lambda) = \lim_{\varepsilon\to 0} i\left[\nu(\varepsilon)-\nu(-\varepsilon)\right] = -i\pi$$

ve

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{i\left[\nu(-\varepsilon)-\nu(-\infty)\right]-i\pi+i\left[\nu(\infty)-\nu(\varepsilon)\right]\right\} = n$$

olmalıdır. Buradan $e(0)=0$ için

$$n+\frac{1}{2} = \frac{\nu(\infty)-\nu(0)}{\pi}$$

sonucu elde edilir. Sonuç olarak

$$\frac{2\left[\nu(\infty)-\nu(0)\right]}{2\pi} = n+\begin{cases} 0, & e(0)\neq 0 \\ \dfrac{1}{2}, & e(0)=0 \end{cases} \tag{3.34}$$

yazılabilir. Ayrıca, Lemma 3.2.1 ve Lemma 3.2.2 kullanılarak

$$\frac{1-S(0)}{4} = \begin{cases} 0, & e(0)\neq 0 \\ \dfrac{1}{2}, & e(0)=0 \end{cases}$$

olduğundan (3.34) eşitliği

$$\frac{2\left[\nu(\infty)-\nu(0)\right]}{2\pi} = n+\frac{1-S(0)}{4}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Sonuç 3.3.1 Potansiyel fonksiyonun sağladığı (3.1)-(3.2) Sturm-Liouville probleminin Levinson formülü

$$\frac{\ln S(0)-\ln S(0)}{2\pi i} = n+\frac{1-S(0)}{4}$$

şeklinde de bir gösterime sahiptir.

İspat. Saçılım fonksiyonu tanımı ve Lemma 3.3.1 kullanılarak

$$S(\lambda) = \frac{e(-\lambda)}{e(\lambda)} = \frac{re^{-i\nu(\lambda)}}{re^{i\nu(\lambda)}} = e^{-2i\nu(\lambda)}$$

yazılabilir. Buradan logaritma fonksiyonun özelliğinden

$$2\nu(\lambda) = -\frac{\ln S(\lambda)}{i}$$

olup

$$\frac{2\left[\nu(\infty)-\nu(0)\right]}{2\pi} = n+\frac{\ln S(0)-\ln S(0)}{2\pi i}$$

şeklinde tanımlanan Levinson formülü elde edilir. ■

4. SINIR KOŞULU KUADRATİK SPEKTRAL PARAMETRELİ STURM-LİOUVİLLE DENKLEMİ İÇEREN SINIR DEĞER PROBLEMİNİN SAÇILIM VERİLERİ VE LEVINSON FORMÜLÜ

Bu bölümde Sturm-Liouville denklemi yardımıyla tanımlanan sınır koşulunda kuadratik parametre bulunduran sınır değer problemi ele alınacak, bu sınır değer probleminin Jost çözümü, Jost fonksiyonu ve saçılım fonksiyonu belirlenip saçılım fonksiyonunun özellikleri incelenecektir. Ayrıca saçılım fonksiyonunun özellikleri kullanılarak, incelenen sınır değer problemi için Levinson formülü verilecektir. Burada

$$y'(0,\lambda) + (\alpha_0 + i\alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)y(0,\lambda) = 0 \tag{4.1}$$

şeklinde sınır koşulunda kuadratik parametre bulunan

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y \tag{4.2}$$

denklemi,

$$\int_0^\infty (1+x)\,|q(x)|\,dx < \infty \tag{4.3}$$

koşulunu sağlayan reel değerli $q(x)$ potansiyel fonksiyonu ve $\alpha_i \geq 0$ $(i = 1, 2)$, $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$ için α_i $(i = 0, 1, 2)$ reel sayıları ile birlikte ele alınacaktır.

Lemma 4.0.1 Yukarıda verilen (4.3) koşulu ile birlikte (4.1)-(4.2) sınır değer problemi,

$$K(x,x) = \frac{1}{2}\int_x^\infty q(t)dt < \infty$$

olmak üzere, $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$ için

$$e(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K(x,t)e^{i\lambda t}dt \tag{4.4}$$

şeklinde bir tek çözüme sahiptir.

İspat. Bu lemmanın ispatı Teorem 3.1.2 ile aynı olup, (3.14) eşitliğinde $t = x$ alınırsa

$$K(x,x) = \frac{1}{2}\int_x^\infty q(\xi)d\xi$$

eşitliği kolayca elde edilir. ■

Tanım 4.0.1 Jost çözümü tanımı ve (4.1) sınır koşulu yardımıyla tanımlanan

$$E(\lambda) = e'(0,\lambda) + (\alpha_0 + i\alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)e(0,\lambda) \tag{4.5}$$

fonksiyona (4.1)-(4.2) sınır değer probleminin Jost fonksiyonu denir.

Teorem 4.0.2 Potansiyel fonksiyonun sağladığı (4.3) koşulu altında, Jost fonksiyonu üst yarı düzlemde, $i = 1, 2$ için $\alpha_i \geq 0$ ve $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$ olmak üzere

$$E(\lambda) \approx \begin{cases} \alpha_2\lambda^2 + O(\lambda), & \alpha_2 \neq 0, \quad |\lambda| \to \infty \\ i\lambda(\alpha_1 + 1) + O(1), & \alpha_1 \neq 0, \quad |\lambda| \to \infty \end{cases}$$

şeklinde asimptotik eşitliğe sahiptir.

İspat. $e(0,\lambda)$ ve $e^{'}(0,\lambda)$ değerleri hesaplanıp (4.5) ifadesinde yerlerine yazılırlarsa

$$\begin{aligned} E(\lambda) &= i\lambda - K(0,0) + \int_0^\infty K_x(x,t)e^{i\lambda t}dt + (\alpha_0 + i\alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)\left[1 + \int_0^\infty K(0,t)e^{i\lambda t}dt\right] \\ &= \left[\alpha_0 - K(0,0) + \alpha_0\int_0^\infty K(0,t)e^{i\lambda t}dt + \int_0^\infty K_x(x,t)e^{i\lambda t}dt\right] \\ &\quad + i\lambda\left[1 + \alpha_1 + \alpha_1\int_0^\infty K(0,t)e^{i\lambda t}dt\right] + \lambda^2\alpha_2\left[1 + \int_0^\infty K(0,t)e^{i\lambda t}dt\right] \\ &= [\alpha_0 - K(0,0) + o(1)] + i\lambda\,[\alpha_1 + 1 + o(1)] + \lambda^2\alpha_2\,[1 + o(1)] \\ &= [\alpha_0 - K(0,0)] + i\lambda\,[\alpha_1 + 1] + \lambda^2\alpha_2 + o(\lambda^2) \\ &= \left[\alpha_0 - \frac{1}{2}\int_0^\infty q(t)dt\right] + i\lambda\,[\alpha_1 + 1] + \lambda^2\alpha_2 + o(\lambda^2) \end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan $\alpha_i \geq 0$ $(i = 1, 2)$, $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$ olmak üzere $E(\lambda)$ fonksiyonunun asimptotik eşitlikleri incelenirse

(i) $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_0 = \frac{1}{2}\int_0^\infty q(t)dt$ ve $\alpha_2 = 0$ için

$$E(\lambda) \approx i\lambda(\alpha_1 + 1) + O(1), \ \ |\lambda| \to \infty$$

(ii) $\alpha_2 \neq 0$ için

$$E(\lambda) \approx \alpha_2\lambda^2 + O(\lambda), \ \ |\lambda| \to \infty$$

olmalıdır. ■

Tanım 4.0.2 Jost fonksiyonu kullanılarak

$$\begin{aligned} S(\lambda) &= \frac{\overline{e'(0,\lambda)} + \overline{(\alpha_0 - i\alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)e(0,\lambda)}}{e'(0,\lambda) + (\alpha_0 + i\alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)e(0,\lambda)} \\ &= \frac{E_1(\lambda)}{E(\lambda)} \end{aligned} \tag{4.6}$$

şeklinde tanımlanan S fonksiyonuna (4.1)-(4.2) probleminin saçılım fonksiyonu denir.

Teorem 4.0.3 Potansiyel fonksiyonun sağladığı (4.3) koşulu altında saçılım fonksiyonu

$$S(\lambda) = 1 + O(\tfrac{1}{\lambda}), \qquad |\lambda| \to \infty$$

asimptotik eşitliğini gerçekler.

İspat. Jost fonksiyonunun tanımı kullanılarak $E_1(\lambda)$ ve $E(\lambda)$ değerleri hesaplanıp (4.6) ifadesinde yerlerine yazılırlarsa

$$\begin{aligned} S(\lambda) &= \frac{-i\lambda - K(0,0) + \int_0^\infty K_x(0,t)e^{-i\lambda t}dt + (\alpha_0 + i\alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)\left(1 + \int_0^\infty K(0,t)e^{-i\lambda t}dt\right)}{i\lambda - K(0,0) + \int_0^\infty K_x(0,t)e^{i\lambda t}dt + (\alpha_0 + i\alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)\left(1 + \int_0^\infty K(0,t)e^{i\lambda t}dt\right)} \\ &= \frac{[\alpha_0 - K(0,0) + o(1)] + i\lambda[\alpha_1 - 1 + o(1)] + \lambda^2\alpha_2[1 + o(1)]}{[\alpha_0 - K(0,0) + o(1)] + i\lambda[\alpha_1 + 1 + o(1)] + \lambda^2\alpha_2[1 + o(1)]} \end{aligned}$$

elde edilir. O halde, buradan saçılım fonksiyonu

$$S(\lambda) = 1 + O(\tfrac{1}{\lambda}) \quad , \quad |\lambda| \to \infty$$

şeklinde bir asimptotik eşitliğe sahip olur. ■

Lemma 4.0.2 Başlangıçta verilen (4.3) koşulu altında $E(0,\lambda) \neq 0$ olmalıdır.

İspat. Kabul edelim ki $E(0,\lambda) = 0$ olsun, o halde Jost fonksiyonu tanımından

$$e'(0,\lambda_0) = -(\alpha_0 + i\alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)e(0,\lambda_0) \tag{4.7}$$

olmalıdır. Ayrıca Lemma 3.1.1 gereğince $\lambda = \lambda_0$ için

$$e'(0,\lambda_0)\overline{e(0,\lambda_0)} - e(0,\lambda_0)\overline{e'(0,\lambda_0)} = 2i\lambda_0 \tag{4.8}$$

olup, $e(0,\lambda_0)$ reel değerli olduğundan (4.7) eşitliği (4.8) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$-(\alpha_0 + i\alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)e(0,\lambda_0)\overline{e(0,\lambda_0)} + (\alpha_0 - i\alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)e(0,\lambda_0)\overline{e(0,\lambda_0)} = 2i\lambda_0$$

$$-2i\alpha_1\lambda_0 e(0,\lambda_0)\overline{e(0,\lambda_0)} = 2i\lambda_0$$

$$\alpha_1 \left|e(0,\lambda_0)\right|^2 = -1$$

olup α_i $(i = 1, 2)$ reel sayıları pozitif olduğundan çelişki elde edilir. O halde $E(0,\lambda) \neq 0$ olmalıdır. ■

Lemma 4.0.3 Saçılım fonksiyonu için,

$$w(0,\lambda) = 1,\ w'(0,\lambda) = -(\alpha_0 + i\alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)$$

sınır koşulları altında

$$S(\lambda) = \overline{S(-\lambda)}$$

olmak üzere

$$\frac{2i\lambda w(x,\lambda)}{e'(0,\lambda) + (\alpha_0 + i\alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)e(0,\lambda)} = \overline{e(x,\lambda)} - S(\lambda)e(\lambda,x)$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat. Potansiyel fonksiyonun sağladığı (4.3) koşulu altında (4.1)-(4.2) sınır değer probleminin $\lambda \neq 0$ için $e(x,-\lambda) = \overline{e(x,\lambda)}$ olduğundan ve $e(x,\lambda)$ ile $e(x,-\lambda)$ denklemin temel çözümleri olduğundan, $w(x,\lambda)$

$$w(x,\lambda) = c_1(\lambda)e(x,\lambda) + c_2(\lambda)\overline{e(x,\lambda)} \tag{4.9}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan sınır koşulları uygulanırsa

$$\begin{aligned} w(0,\lambda) &= c_1(\lambda)e(0,\lambda) + c_2(\lambda)\overline{e(0,\lambda)} \\ -(\alpha_0 + i\alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2) &= c_1(\lambda)e'(0,\lambda) + c_2(\lambda)\overline{e'(0,\lambda)} \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu son eşitliklerden $c_1(\lambda)$ ve $c_2(\lambda)$ fonksiyonları bulunarak (4.9) eşitliğinde yerlerine yazılırlarsa $w(x,\lambda)$,

$$\begin{aligned} w(x,\lambda) &= \frac{\overline{e'(0,\lambda)} + (\alpha_0 + i\alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)\overline{e(0,\lambda)}}{-2i\lambda} e(x,\lambda) \\ &\quad + \frac{e'(0,\lambda) + (\alpha_0 + i\alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)e(x,\lambda)}{2i\lambda} \overline{e(x,\lambda)} \end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Elde edilen son eşitlik düzenlenir ve saçılım fonksiyonu tanımı kullanılırsa

$$\frac{2i\lambda w(x,\lambda)}{e'(0,\lambda) + (\alpha_0 + i\alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)e(0,\lambda)} = \overline{e(x,\lambda)} - S(\lambda)e(x,\lambda)$$

olmalıdır. Ayrıca, saçılım fonksiyonu tanımına göre

$$\begin{aligned} \overline{S(-\lambda)} &= \overline{\left[\frac{e'(0,\lambda) + (\alpha_0 - i\alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)e(0,\lambda)}{e'(0,-\lambda) + (\alpha_0 - i\alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)e(0,-\lambda)}\right]} \\ &= \frac{e'(0,-\lambda) + (\alpha_0 + i\alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)e(0,-\lambda)}{e'(0,\lambda) + (\alpha_0 + i\alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)e(0,\lambda)} \\ &= S(\lambda) \end{aligned}$$

olup

$$\overline{S(-\lambda)} = S(\lambda)$$

eşitliğinin sağlandığı kolayca elde edilir. ■

Lemma 4.0.4 Üst yarı düzlemdeki Jost fonksiyonunun sıfırları basittir.

İspat. Jost fonksiyonunun sıfırlarının basit olduğunu göstermeden önce, bu sıfırlarının imajiner eksen üzerinde olduğunu gösterelim. Kabul edelimki λ_1 ve λ_2, $E(\lambda)$ fonksiyonunun iki sıfırı olsun. Ayrıca $e(x,\lambda_1)$ ve $e(x,\lambda_2)$ çözümleri (4.1)-(4.2) Sturm-Liouville probleminin bir çözümü olduğundan bu çözümler sırasıyla

$$\begin{aligned} -e''(x,\lambda_1) + q(x)e(x,\lambda_1) &= \lambda_1^2 e(x,\lambda_1) \\ \overline{-e''(x,\lambda_2)} + q(x)\overline{e(x,\lambda_2)} &= \overline{\lambda_2^2 e(x,\lambda_2)} \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitliklerde Wronskiyen tanımı kullanılarak gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$(\lambda_1^2 - \overline{\lambda_2^2}) \int_0^\infty e(x,\lambda_1)\overline{e(x,\lambda_2)}dx + e(0,\lambda_1)\overline{e'(0,\lambda_2)} - e'(0,\lambda_1)\overline{e(0,\lambda_2)} = 0 \qquad (4.10)$$

bulunur. λ_1 ve λ_2, $E(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları olduğundan

$$e'(0,\lambda_1) = (-\alpha_0 - i\alpha_1\lambda_1 - \alpha_2\lambda_1^2)e(0,\lambda_1)$$

ve

$$e'(0,\lambda_2) = (-\alpha_0 - i\alpha_1\overline{\lambda_2} - \alpha_2\overline{\lambda_2^2})e(0,\lambda_2)$$

yazılır. Bu türevler (4.10) eşitliğinde kullanılırlarsa

$$(\lambda_1^2 - \overline{\lambda_2^2}) \int_0^\infty e(x,\lambda_1)\overline{e(x,\lambda_2)}dx + e(0,\lambda_1)\overline{e(0,\lambda_2)} \left\{ i\alpha_1(\lambda_1 + \overline{\lambda_2}) + \alpha_2(\lambda_1^2 - \overline{\lambda_2^2}) \right\} = 0$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikte

$$\lambda_1 = \lambda_2$$

alınırsa

$$(\lambda_1^2 - \overline{\lambda_1^2}) \int_0^\infty |e(x,\lambda_1)|^2 dx + |e(0,\lambda_1)|^2 \left\{ 2i\alpha_1 \operatorname{Re}(\lambda_1) + \alpha_2(\lambda_1^2 - \overline{\lambda_1^2}) \right\} = 0 \qquad (4.11)$$

yazılır. $\int_0^\infty |e(x,\lambda_1)|^2 dx \neq 0$ olduğu açıktır. Ayrıca,

$$e'(0,\lambda_1) + (\alpha_0 + i\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_1^2)e(0,\lambda_1) = 0$$

sınır koşulunda $e(0,\lambda_1) = 0$ olursa, $e'(0,\lambda_1) = 0$ olup aşikar çözüm elde edileceğinden $e(0,\lambda_1) \neq 0$ olmalıdır. Dolayısıyla (4.11) eşitliğinden $\lambda_1 = \overline{\lambda_1}$ ve $\operatorname{Re}(\lambda_1) = 0$ bulnur. Buradan da kolayca görülür ki, $E(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları imajiner eksen üzerindedir.

İkinci adımda Jost fonksiyonunun sıfırlarının basit olduğunu yani $E(\lambda)$ fonksiyonunun λ değişkenine göre kısmi türevinin sıfırdan farklı olduğunu gösterelim. Burada,

$$\frac{\partial e(x,\lambda)}{\partial \lambda} := \dot{e}(0,\lambda)$$

olmak üzere (4.2) denkleminden

$$\begin{aligned} -e''(x,\lambda)+q(x)e(x,\lambda) &= \lambda^2 e(x,\lambda) \\ -\dot{e}''(x,\lambda)+q(x)\dot{e}(x,\lambda) &= 2\lambda e(x,\lambda)+\lambda^2\dot{e}(x,\lambda) \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitliklere Wronskiyen tanımı kullanılarak gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$2\lambda\int_0^\infty e(x,\lambda)e(x,\lambda)dx = e(0,\lambda)\dot{e}'(0,\lambda)-\dot{e}(0,\lambda)e'(0,\lambda) \tag{4.12}$$

eşitliği elde edilir. O halde $E(\lambda)$ fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned} e'(0,\lambda) &= -(\alpha_0+i\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2)e(0,\lambda) \\ \dot{e}'(0,\lambda) &= \dot{E}(\lambda)-(i\alpha_1+2\alpha_2\lambda)e(0,\lambda)-(\alpha_0+i\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2)\dot{e}(0,\lambda)=0 \end{aligned}$$

olup bu türevler (4.12) eşitliğinde dikkate alınırsa

$$2\lambda\int_0^\infty e(x,\lambda)e(x,\lambda)dx = e(0,\lambda)\dot{E}(\lambda)-(i\alpha_1+2\alpha_2\lambda)e^2(0,\lambda) \tag{4.13}$$

yazılıp $\lambda = i\mu_k$ için

$$2i\mu_k\int_0^\infty |e(x,i\mu_k)|^2\,dx = e(0,i\mu_k)\dot{E}(i\mu_k)-(i\alpha_1+2\alpha_2 i\mu_k)e^2(0,i\mu_k)$$

bulunur. Buradan,

$$i\left[2\mu_k\int_0^\infty |e(x,i\mu_k)|^2\,dx+(\alpha_1+2\alpha_2\mu_k)e^2(0,i\mu_k)\right] = e(0,i\mu_k)\dot{E}(i\mu_k)$$

olup $\int_0^\infty |e(x,i\mu_k)|^2\,dx \neq 0$ olduğu açıktır. Ayrıca,

$$e'(0,i\mu_k)+(\alpha_0-\alpha_1\mu_k-\alpha_2\mu_k^2)e(0,i\mu_k)=0$$

şeklinde tanımlı sınır koşulunda $e(0,i\mu_k)=0$ olursa, $e'(0,i\mu_k)=0$ olup aşikar çözüm elde edilir. Bu nedenle $e(0,i\mu_k)\neq 0$ olup $\dot{E}(i\mu_k)\neq 0$ olmalıdır. Yani, $\lambda = i\mu_k$ için $\dot{E}(\lambda)\neq 0$ olduğundan $E(\lambda)$ Jost fonksiyonunun tüm sıfırları basittir. ■

Lemma 4.0.5 Üst imajiner eksen üzerinde Jost fonksiyonu sonlu sayıda sıfırlara sahiptir.

İspat. Bu teoremin ispatı için $E(\lambda)$ fonksiyonunun ardışık sıfırları arasındaki mesafenin sıfırdan farklı olduğunu göstermek yeterlidir. Çünkü $E(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları arasındaki mesafe sıfır olursa sıfırları çakışık olur. Bu ise $E(\lambda)$ fonksiyonunun sonsuz çoklukta sıfırlara sahip olması anlamına gelir. $i\widetilde{\lambda}_k$ ve $i\lambda_k$, $E(\lambda)$ fonksiyonunun herhangi ardışık iki sıfırı olsun ve $\delta = \inf(i\widetilde{\lambda}_k - i\lambda_k)$ şeklinde tanımlansın. Kabul edelim ki $\delta = 0$ olsun. Buradan $E(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları, $0 \leq \lambda_k \leq \widetilde{\lambda}_k$ ve $\max_k \widetilde{\lambda}_k < M$ için $\lim_{k\to\infty} i\left\{\widetilde{\lambda}_k - \lambda_k\right\} = 0$ olmalıdır. Yeterince büyük A reel sayısı için $x \in [A, \infty)$ ve $\lambda \in [0, \infty)$ olmak üzere $e(x, i\lambda_k)$ çözümünün asimptotik eşitliğinden $e(x, i\lambda) > \frac{1}{2}e^{-\lambda x}$ eşitsizliğinin sağlandığı kolayca bulunur. Yani,

$$\int_A^\infty e(x, i\widetilde{\lambda}_k)\overline{e(x, i\lambda_k)}dx \geq \int_A^\infty \frac{1}{2}e^{-\widetilde{\lambda}_k x}\frac{1}{2}e^{-\lambda_k x}dx$$

olup $0 \leq \lambda_k \leq \widetilde{\lambda}_k$ için

$$\int_A^\infty \frac{1}{2}e^{-\widetilde{\lambda}_k x}\frac{1}{2}e^{-\lambda_k x}dx \geq \frac{1}{4}\int_A^\infty e^{-2\widetilde{\lambda}_k x}dx$$

$\max_k \widetilde{\lambda}_k < M$ olduğundan

$$\frac{1}{4}\int_A^\infty e^{-2\widetilde{\lambda}_k x}dx \geq \frac{1}{8M}e^{-2AM}$$

elde edilir. Bu ise, $\int_A^\infty e(i\widetilde{\lambda}_k, x)\overline{e(i\lambda_k, x)}dx$ integralinin pozitif olduğunu söyler. Diğer yandan $e(x, \lambda_1)$ ve $\overline{e(x, \lambda_2)}$ çözümleri (4.1)-(4.2) sınır değer probleminin birer çözümleri olduğundan

$$\begin{aligned} -e''(x, \lambda_1) + q(x)e(x, \lambda_1) &= \lambda_1^2 e(x, \lambda_1) \\ \overline{-e''(x, \lambda_2)} + q(x)\overline{e(x, \lambda_2)} &= \overline{\lambda_2^2 e(x, \lambda_2)} \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitliklerde gerekli düzenlemeler yapılıp Wronskiyen tanımı kullanılırsa

$$(\lambda_1^2 - \overline{\lambda_2^2})\int_0^\infty e(x, \lambda_1)\overline{e(x, \lambda_2)}dx + e'(0, \lambda_1)\overline{e(0, \lambda_2)} - e(0, \lambda_1)\overline{e'(0, \lambda_2)} = 0$$

yazılır.

$$e'(0,\lambda_1) = (-\alpha_0 - i\alpha_1\lambda_1 - \alpha_2\lambda_1^2)e(0,\lambda_1)$$

ve

$$e'(0,\lambda_2) = (-\alpha_0 - i\alpha_1\lambda_2 - \alpha_2\lambda_2^2)e(0,\lambda_2)$$

türevleri son eşitlikte kullanılırsa

$$(\lambda_1^2 - \overline{\lambda_2^2})\int_0^\infty e(x,\lambda_1)\overline{e(x,\lambda_2)}dx + e(0,\lambda_1)\overline{e(0,\lambda_2)}(-\alpha_0 - i\alpha_1\lambda_1 - \alpha_2\lambda_1^2)$$

$$-e(0,\lambda_1)\overline{e(0,\lambda_2)}(-\alpha_0 + i\alpha_1\overline{\lambda_2} - \alpha_2\overline{\lambda_2^2}) = 0$$

bulnur. $\lambda_1 = \lambda_2$ için

$$(\lambda_1^2 - \overline{\lambda_1^2})\int_0^\infty |e(x,\lambda_1)|^2\,dx - |e(x,\lambda_1)|^2\left\{-(\overline{\lambda_1} + \lambda_1)i\alpha_1 + (\overline{\lambda_1^2} - \lambda_1^2)\alpha_2\right\} = 0$$

şeklinde elde edilen integral denkleminde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(\lambda_1 + \overline{\lambda_1})\left\{(\lambda_1 - \overline{\lambda_1})\int_0^\infty |e(x,\lambda_1)|^2\,dx + i\alpha_1\,|e(0,\lambda_1)|^2 + (\lambda_1 - \overline{\lambda_1})\,|e(0,\lambda_1)|^2\,\alpha_2\right\} = 0$$

elde edilir. $\left\{i\widetilde{\lambda_k}\right\}$ ve $\{i\lambda_k\}$, $E(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarının dizileri olduğundan elde edilen son denklemi sağlar. Buradan,

$$(i\lambda_k - i\widetilde{\lambda_k})\int_0^\infty e(x,i\widetilde{\lambda_k})\overline{e(x,i\lambda_k)}dx + \alpha_2(i\lambda_k - i\widetilde{\lambda_k})e(0,i\widetilde{\lambda_k})\overline{e(0,i\lambda_k)}$$

$$+i\alpha_1 e(0,i\widetilde{\lambda_k})\overline{e(0,i\lambda_k)} = 0 \tag{4.14}$$

yazılır. Ayrıca kabülümüzden,

$$\lim_{k\to\infty} i\left\{\widetilde{\lambda_k} - \lambda_k\right\} = 0$$

olduğundan (4.14) denkleminde $k \to \infty$ için limit alınırsa

$$\alpha_1\,|e(0,i\lambda_k)|^2 = 0$$

olur.

$$e'(0,i\lambda_k) + (\alpha_0 - \alpha_1\lambda_k - \alpha_2\lambda_k^2)e(0,i\lambda_k) = 0$$

sınır koşulu için $e(0,i\lambda_k)=0$ olursa, $e'(0,i\lambda_k)=0$ olacağından aşikar çözüm elde edilir. Bu nedenle, $e(0,i\lambda_k)\neq 0$ olup $\alpha_1=0$ olmalıdır. Bu ise, (4.14) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\int_0^{\infty} e(x,i\widetilde{\lambda}_k)\overline{e(x,i\lambda_k)}dx+\alpha_2 e(0,i\widetilde{\lambda}_k)\overline{e(0,i\lambda_k)}=0$$

denklemi bulunur. Bulunan bu son denkleme $\int_0^{A} e(x,i\widetilde{\lambda}_k)\overline{e(x,i\widetilde{\lambda}_k)}dx$ ifadesi eklenip çıkartılırsa

$$\int_0^{A} e(x,i\widetilde{\lambda}_k)\overline{e(x,i\lambda_k)}dx+\int_A^{\infty} e(x,i\widetilde{\lambda}_k)\overline{e(x,i\lambda_k)}dx+\alpha_2 e(0,i\widetilde{\lambda}_k)\overline{e(0,i\lambda_k)}$$

$$-\int_0^{A} e(x,i\widetilde{\lambda}_k)\overline{e(x,i\widetilde{\lambda}_k)}dx+\int_0^{A} e(x,i\widetilde{\lambda}_k)\overline{e(x,i\widetilde{\lambda}_k)}dx=0$$

yazılır. Buradan

$$\int_0^{A} e(x,i\widetilde{\lambda}_k)\left[\overline{e(x,i\lambda_k)-e(x,i\widetilde{\lambda}_k)}\right]dx+\int_0^{A} e(x,i\widetilde{\lambda}_k)\overline{e(x,i\widetilde{\lambda}_k)}dx$$

$$+\int_A^{\infty} e(x,i\widetilde{\lambda}_k)\overline{e(x,i\lambda_k)}dx+\alpha_2 e(0,i\widetilde{\lambda}_k)\overline{e(0,i\lambda_k)}=0$$

bulnur. Bu denklemde $k\to\infty$ için limit alınırsa

$$\underline{\lim}_{k\to\infty}\int_A^{\infty} e(x,i\widetilde{\lambda}_k)\overline{e(x,i\lambda_k)}dx\leq 0$$

olmalıdır. Bu ise $\int_A^{\infty} e(x,i\widetilde{\lambda}_k)\overline{e(x,i\lambda_k)}dx$ integralinin pozitif olmasıyla çelişir. Bu nedenle, kabulümüz yanlış olup $\delta\neq 0$ olmalıdır. Dolayısıyla $E(\lambda)$ fonksiyonu üst imajiner eksen üzerinde sonlu sayıda sıfıra sahiptir. ■

Lemma 4.0.6 Her $x\geq 0$ sayısı için

$$F_S(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[1-S(\lambda)\right]e^{i\lambda x}d\lambda \tag{4.15}$$

şeklinde tanımlı $F_S(x)$ fonksiyonu $L_2(-\infty,\infty)$ uzayına aittir.

İspat. $F_S(x)$ fonksiyonu $1-S(\lambda)$ ifadesinin Fourier dönüşümü olduğundan $F_S(x) \in L_2(-\infty,\infty)$ olduğunu göstermek için $1-S(\lambda) \in L_2(-\infty,\infty)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için Teorem 4.0.3 ifadesinde elde edilen $S(\lambda)$ fonksiyonunun asimptotik eşitliğinden faydalanalım. O halde,

$$1-S(\lambda) \approx O(\frac{1}{\lambda}) \quad , \quad |\lambda| \to \infty$$

yazılabilir. O halde,

$$\int_{-\infty}^{\infty} [1-S(\lambda)]^2 d\lambda$$

integrali yakınsak olup $1-S(\lambda) \in L_2(-\infty,\infty)$ elde edilir. Böylece $1-S(\lambda)$ ifadesinin Fourier dönüşümü olan $F_S(x)$ fonksiyonu da $L_2(-\infty,\infty)$ uzayına ait olmuş olur. ■

Lemma 4.0.7 Jost fonksiyonunun üst imajiner eksen üzerinde sahip olduğu λ_k sıfırları için $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} m_k^2 e^{-\lambda_k x} + F_S(x) \tag{4.16}$$

ve

$$m_k^{-2} = \int_0^{\infty} |e(x,i\lambda_k)|^2 \, dx + \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2\lambda_k}{2\lambda_k} |e(0,i\lambda_k)|^2 \quad , \quad k = 1,...,n \tag{4.17}$$

olmak üzere

$$F(x+y) + K(x,y) + \int_x^{\infty} K(x,t)F(t+y)dt = 0 \quad , \quad x < y < \infty \tag{4.18}$$

temel integral denklemini sağlar.

İspat. Temel denklemin ispatı için Lemma 4.0.5 bağıntısında $\overline{e(x,\lambda)}$ ve $e(x,\lambda)$ çözümleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{2i\lambda w(x,\lambda)}{E(\lambda)} &= e^{-i\lambda x} + \int_x^\infty K(x,t)e^{-i\lambda t}dt - S(\lambda)\left[e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K(x,t)e^{i\lambda t}dt\right] \\
&= 2i(\frac{e^{-i\lambda x} - e^{i\lambda x}}{2i}) + e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K(x,t)e^{-i\lambda t}dt \\
&\quad + \int_x^\infty K(x,t)e^{i\lambda t}dt - \int_x^\infty K(x,t)e^{i\lambda t}dt - S(\lambda)e^{i\lambda x} - S(\lambda)\int_x^\infty K(x,t)e^{i\lambda t}dt \\
&= -2i\sin\lambda x + \int_x^\infty K(x,t)e^{-i\lambda t}dt + (1-S(\lambda))e^{i\lambda x} \\
&\quad + \int_x^\infty K(x,t)(1-S(\lambda))e^{i\lambda t}dt - \int_x^\infty K(x,t)e^{i\lambda t}dt
\end{aligned}$$

bulunur. Yani,

$$\begin{aligned}
\frac{2i\lambda w(x,\lambda)}{E(\lambda)} + 2i\sin\lambda x &= \int_x^\infty K(x,t)e^{-i\lambda t}dt + (1-S(\lambda))e^{i\lambda x} \\
&\quad + \int_x^\infty K(x,t)(1-S(\lambda))e^{i\lambda t}dt - \int_x^\infty K(x,t)e^{i\lambda t}dt \quad (4.19)
\end{aligned}$$

olmalıdır. Gerekli düzenlemeler yapıldığında ve (4.15) eşitliği kullanıldığında son denklem

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^\infty \frac{2i\lambda w(x,\lambda)e^{i\lambda y}}{E(\lambda)\pi}d\lambda + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty 2i\sin\lambda x e^{i\lambda y}d\lambda \\
&= \frac{1}{\pi}\Bigg[\int_{-\infty}^\infty\int_x^\infty K(x,t)e^{i\lambda(y-t)}dtd\lambda + 2\pi F_S(x+y) \\
&\quad + 2\pi\int_x^\infty K(x,t)F_S(t+y)dt - \int_{-\infty}^\infty\int_x^\infty K(x,t)e^{i\lambda(t+y)}dtd\lambda\Bigg] \\
&= 2F_S(x+y) + 2\int_x^\infty K(x,t)F_S(t+y)dt \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty\int_x^\infty K(x,t)e^{i\lambda(y-t)}dtd\lambda - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty\int_x^\infty K(x,t)e^{i\lambda(t+y)}dtd\lambda
\end{aligned}$$

biçiminde yazılır. Bulunan bu son denkleme Fourier dönüşüm ve ters dönüşüm formüllerinin özellikleri uygulanırsa

$$\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda w(x,\lambda)e^{i\lambda y}}{E(\lambda)}d\lambda = F_S(x+y)+\int_{x}^{\infty}K(x,t)F_S(t+y)dt+K(x,y) \tag{4.20}$$

şeklinde sonuç elde edilir. Ayrıca, (4.20) eşitliği

$$t_1 = \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda w(x,\lambda)e^{i\lambda y}}{E(\lambda)}d\lambda$$

olmak üzere

$$t_1 = F_S(x+y)+K(x,y)+\int_{x}^{\infty}K(x,t)F_S(t+y)dt \tag{4.21}$$

şeklinde ifade edilebilir. Diğer yandan t_1 eşitliği Jordan lemması ve Rezidü teoremi gereğince

$$\begin{aligned}\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda w(x,\lambda)e^{i\lambda y}}{E(\lambda)}d\lambda &= 2\pi i\frac{i}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re}s(f,z_k)\\ &= -2\sum_{k=1}^{n}\frac{i\lambda_k w(x,i\lambda_k)e^{i(i\lambda_k)y}}{\dot{E}(i\lambda_k)}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{2\lambda_k w(x,i\lambda_k)e^{-\lambda_k y}}{i\dot{E}(i\lambda_k)}\end{aligned}$$

şeklinde olup

$$W(x,i\lambda_k)=\frac{e(x,i\lambda_k)}{e(0,i\lambda_k)}$$

olduğundan

$$t_1 = \sum_{k=1}^{n}\frac{2\lambda_k e(x,i\lambda_k)e^{-\lambda_k y}}{i\dot{E}(i\lambda_k)e(0,i\lambda_k)}$$

bulunur. Ayrıca (4.13) eşitliğinden

$$\begin{aligned}t_1 &= -\sum_{k=1}^{n}\frac{2\lambda_k e(x,i\lambda_k)e^{-\lambda_k y}}{2\lambda_k\int_0^{\infty}|e(x,i\lambda_k)|^2dx+(\alpha_1+2\alpha_2\lambda_k)|e(0,i\lambda_k)|^2}\\ &= -\sum_{k=1}^{n}\frac{e(x,i\lambda_k)e^{-\lambda_k y}}{\int_0^{\infty}|e(x,i\lambda_k)|^2dx+\frac{1}{2\lambda_k}(\alpha_1+2\alpha_2\lambda_k)|e(0,i\lambda_k)|^2}\end{aligned}$$

olup, (4.17) eşitliği gereğince

$$t_1 = -\sum_{k=1}^{n} m_k^2 e(x, i\lambda_k) e^{-\lambda_k y}$$

elde edilir. Elde edilen bu ifadede $e(x, i\lambda_k)$ açılımı yerine yazılırsa,

$$t_1 = -\sum_{k=1}^{n} m_k^2 \left\{ e^{-\lambda_k x} + \int_x^{\infty} K(x,t) e^{-\lambda_k t} dt \right\} e^{-\lambda_k y}$$

veya

$$t_1 = -\sum_{k=1}^{n} m_k^2 \left\{ e^{-\lambda_k (x+y)} + \int_x^{\infty} K(x,t) e^{-\lambda_k (t+y)} dt \right\}$$

eşitliğini verir. t_1 eşitliği (4.21) denkleminde yerine yazılırsa

$$-\sum_{k=1}^{n} m_k^2 \left\{ e^{-\lambda_k (x+y)} + \int_x^{\infty} K(x,t) e^{-\lambda_k (t+y)} dt \right\} = F_S(x+y) + K(x,y) + \int_x^{\infty} K(x,t) F_S(t+y) dt$$

olup (4.16) eşitliğinden

$$F(x+y) + K(x,y) + \int_x^{\infty} K(x,t) F(t+y) dt = 0 \quad , \quad x < y < \infty$$

sonucu elde edilir. ■

4.1 Sınır değer probleminin saçılım fonksiyonunun sürekliliği

Lemma 4.1.1 $E(0) = 0$ için $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$-K(0,0) + \int_0^{\infty} K_x(0,t) dt + \alpha_0 + \alpha_0 \int_0^{\infty} K(0,t) dt = 0 \tag{4.22}$$

olmalıdır.

İspat. Jost çözümünün tanımı olan (4.4) integral denkleminin x değişkenine göre olan türevinde ve kendinde, $\lambda = 0$ ve $x = 0$ alındığında

$$\begin{aligned} e(0,0) &= 1 + \int_0^\infty K(0,t)dt \\ e_x(0,0) &= -K(0,0) + \int_0^\infty K_x(0,t)dt \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Bunlar (4.5) sınır koşulunda yazılarak

$$-K(0,0) + \int_0^\infty K_x(0,t)dt + \alpha_0 + \alpha_0 \int_0^\infty K(0,t)dt = 0$$

bulunur. ■

Lemma 4.1.2 q fonksiyonun sağladığı (4.3) koşulu altında (4.1)-(4.2) sınır değer probleminin $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu yardımıyla tanımlanan

$$K_1(z) = \int_z^\infty \left[K_x(0,y) + \alpha_0 K(0,y)\right] dy$$

integral denklemi $L_1(0,\infty)$ uzayına aittir ve bu integral gösterimi (4.1)-(4.2) sınır değer problemi için sınırlı bir çözümdür.

İspat. Sonuç 3.1.1 kullanılarak $K_1(z)$ integral denkleminin $L_1(0,\infty)$ uzayına ait olduğu kolayca görülür.

Bir önceki teoremde elde edilen (4.18) temel denkleminde $x = 0$ alınıp x değişkenine göre kısmi türev alınırsa

$$K_x(0,y) + F'(y) - K(0,0)F(y) + \int_0^\infty K_x(0,t)F(t+y)dt = 0 \qquad (4.23)$$

denklemi elde edilir. (4.18) temel denklemi $x = 0$ için α_0 ile çarpılıp (4.23) ile toplanırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\int_z^\infty \left[K_x(0,y) + \alpha_0 K(0,y)\right] dy + (\alpha_0 - K(0,0)) \int_z^\infty F(y)dy - F(z)$$

$$+\int_0^\infty \left[K_x(0,t)+\alpha_0 K(0,t)\right]dt\int_{z+t}^\infty F(\xi)d\xi=0 \tag{4.24}$$

bulunur.

$$-d\left(\int_t^\infty \left[K_x(0,y)+\alpha_0 K(0,y)\right]dy\right)=\left[K_x(0,t)+\alpha_0 K(0,t)\right]dt \tag{4.25}$$

olmak üzere (4.25), (4.24) integral denkleminde kullanılırsa

$$K_1(z)+\left[\alpha_0-K(0,0)\right]\int_z^\infty F(y)dy-F(z)-\int_0^\infty\left(\int_{z+t}^\infty F(\xi)d\xi\right)dK_1(t)=0$$

olup

$$K_1(z)+\left[\alpha_0-K(0,0)+K_1(0)\right]\int_z^\infty F(y)dy-F(z)-\int_0^\infty K_1(t)F(t+z)dt=0 \tag{4.26}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca (4.22) eşitliğinden

$$\alpha_0-K(0,0)=-\alpha_0\int_0^\infty K(0,t)dt-\int_0^\infty K_x(0,t)dt$$

olup bu eşitliğin her iki tarafına $K_1(0)$ eklenirse

$$\alpha_0-K(0,0)+K_1(0)=0$$

olur. Bu eşitlik (4.26) denkleminde kullanıldığında, (4.26) denkleminin son hali

$$K_1(z)-\int_0^\infty K_1(t)F(t+z)dt-F(z)=0$$

şeklini alır. Buradan

$$K_1(z)-\int_0^\infty K_1(t)F(t+z)dt=F(z)$$

bulunur. Bu ise $K_1(z)$ fonksiyonunun (4.1)-(4.2) sınır değer probleminin sınırlı bir çözümü olduğunu söyler. ■

Teorem 4.1.1 Potansiyel fonksiyonun sağladığı (4.3) koşulu altında, (4.1)-(4.2) sınır değer probleminin saçılım fonksiyonu süreklidir.

İspat. Saçılım fonksiyonunun sürekliliğini $E(0) \neq 0$ ve $E(0) = 0$ olmak üzere iki farklı durumda inceleyelim

(a) $E(0) \neq 0$ olsun $\lambda = 0$ için

$$S(0) = \frac{e'(0,0) + \alpha_0 e(0,0)}{e'(0,0) + \alpha_0 e(0,0)} = 1$$

olup $S(\lambda)$ Saçılım fonksiyonu süreklidir.

(b) $E(0) = 0$ olsun. Bu durumda (4.5) eşitliğindeki $e'(0,\lambda)$ ve $e(0,\lambda)$ değerleri Jost çözümünün tanımı kullanılarak hesaplanıp (4.5) eşitliğinde yerlerine yazılırlarsa

$$E(\lambda) = i\lambda - K(0,0) + \int_0^\infty K_x(0,t)e^{i\lambda t}dt + \alpha_0 \left(1 + \int_0^\infty K(0,t)e^{i\lambda t}dt\right)$$
$$+ i\alpha_1\lambda \left(1 + \int_0^\infty K(0,t)e^{i\lambda t}dt\right) + \alpha_2\lambda^2 \left(1 + \int_0^\infty K(0,t)e^{i\lambda t}dt\right) \quad (4.27)$$

olup

$$I_1 = -K(0,0) + \int_0^\infty K_x(0,t)e^{i\lambda t}dt + \alpha_0 \left(1 + \int_0^\infty K(0,t)e^{i\lambda t}dt\right) \quad (4.28)$$

için

$$E(\lambda) = I_1 + i\lambda + i\alpha_1\lambda \left(1 + \int_0^\infty K(0,t)e^{i\lambda t}dt\right) + \alpha_2\lambda^2 \left(1 + \int_0^\infty K(0,t)e^{i\lambda t}dt\right) \quad (4.29)$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradan I_1 eşitliğine kısmi integrasyon uygulanırsa

$$I_1 = -K(0,0) + \alpha_0 + \int_0^\infty K_x(0,y)dy + \alpha_0 \int_0^\infty K(0,y)dy$$
$$+ i\lambda \int_0^\infty \int_t^\infty K_x(0,y)e^{i\lambda t}dydt + i\lambda\alpha_0 \int_0^\infty \int_t^\infty K(0,y)e^{i\lambda t}dydt \quad (4.30)$$

bulunur. Diğer yandan (4.30) eşitliğinde Lemma 4.1.1 dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} I_1 &= i\lambda \int_0^\infty \int_t^\infty K_x(0,y)e^{i\lambda t}dydt + i\lambda\alpha_0 \int_0^\infty \int_t^\infty K(0,y)e^{i\lambda t}dydt \\ &= i\lambda \int_0^\infty \int_t^\infty \left[K_x(0,y) + \alpha_0 K(0,y)\right] dye^{i\lambda t}dt \end{aligned}$$

biçiminde olup Lemma 4.1.2 gereğince

$$I_1 = i\lambda \int_0^\infty K_1(t)e^{i\lambda t}dt$$

bulunur. Bulunan bu I_1 eşitliği (4.29) integral denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} E(\lambda) &= i\lambda + i\lambda \int_0^\infty K_1(t)e^{i\lambda t}dt + i\alpha_1\lambda \left(1 + \int_0^\infty K(0,t)e^{i\lambda t}dt\right) \\ &\quad +\alpha_2\lambda^2 \left(1 + \int_0^\infty K(0,t)e^{i\lambda t}dt\right) \\ &= i\lambda\Bigg[1 + \int_0^\infty K_1(t)e^{i\lambda t}dt + \alpha_1 \left(1 + \int_0^\infty K(0,t)e^{i\lambda t}dt\right) \\ &\quad -i\alpha_2\lambda \left(1 + \int_0^\infty K(0,t)e^{i\lambda t}dt\right)\Bigg] \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, $K_1(t) \in L_1(0,\infty)$ ve $K(0,t) \in L_1(0,\infty)$ olduğundan

$$\widetilde{K}(\lambda) = 1 + \alpha_1 - i\alpha_2\lambda + \int_0^\infty K_1(t)e^{i\lambda t}dt + (\alpha_1 - i\alpha_2\lambda)\int_0^\infty K(0,t)e^{i\lambda t}dt \tag{4.31}$$

için

$$E(\lambda) = i\lambda\widetilde{K}(\lambda) \tag{4.32}$$

şeklinde yazılabilir. Benzer işlemler yapılırsa

$$\widetilde{K}_1(\lambda) = 1 - \alpha_1 + i\alpha_2\lambda + \int_0^\infty K_1(t)e^{-i\lambda t}dt - (\alpha_1 - i\alpha_2\lambda)\int_0^\infty K(0,t)e^{-i\lambda t}dt \tag{4.33}$$

$$E_1(\lambda) = -i\lambda\widetilde{K}_1(\lambda) \tag{4.34}$$

olup saçılım fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned} S(\lambda) &= \frac{-i\lambda\widetilde{K}_1(\lambda)}{i\lambda\widetilde{K}(\lambda)} \\ &= -\frac{\widetilde{K}_1(\lambda)}{\widetilde{K}(\lambda)} \end{aligned}$$

bulunur. $\lambda = 0$ için

$$S(0) = -\frac{\widetilde{K}_1(0)}{\widetilde{K}(0)}$$

olduğundan

$$S(0) = \begin{cases} 1, & E(0) \neq 0 \\ -\dfrac{\widetilde{K}_1(0)}{\widetilde{K}(0)}, & E(0) = 0 \end{cases} \tag{4.35}$$

olmalıdır. Bu ise saçılım fonksiyonunun sürekliliğini verir. ■

4.2 Sınır değer probleminin Levinson formülü

Teorem 4.2.1 q fonksiyonu için verilen (4.3) kabulü altında (4.1)-(4.2) sınır değer probleminin $E(\lambda)$ fonksiyonunun üst imajiner eksen üzerinde sıfırlarının sayısı n ve $\eta(\lambda) = \arg E(\lambda)$ olmak üzere

$$T(E) = \begin{cases} 0, \ E(0) \neq 0 \\ -\dfrac{1}{2}, \ E(0) = 0 \end{cases}$$

ve

$$C(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, \ \alpha_1 \neq 0, \ \alpha_2 \neq 0 \\ 1, \ \alpha_2 \neq 0 \end{cases}$$

için

$$\frac{\eta(+\infty) - \eta(+0)}{\pi} + T(E) + C(\alpha_1, \alpha_2) = n \tag{4.36}$$

şeklinde tanımlı Levinson formülü gerçeklenir.

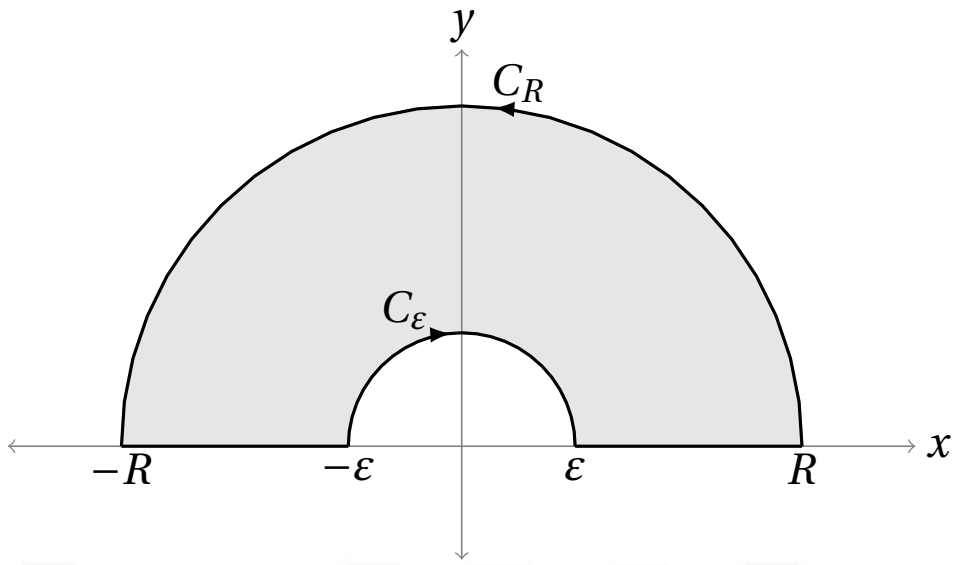
İspat. Yeterince küçük $\varepsilon > 0$ ve yeterince büyük $R > 0$ için ε ve R yarıçaplı, orjin merkezli

$$\begin{aligned} C_R^+ &: \text{saat yönünün tersine} \\ C_\varepsilon^- &: \text{saat yönüne yönlendirilmiş} \end{aligned}$$

çemberleri yardımıyla

$$\Gamma_{R,\varepsilon} = C_R^+ \cup C_\varepsilon^- \cup [-R, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, R]$$

eğrisi tanımlansın.



Burada tanımlanan $\Gamma_{R,\varepsilon}$ eğrisinin içinde ve sınırında $E(\lambda)$ fonksiyonu analitik ve süreklidir. Ayrıca, bu $\Gamma_{R,\varepsilon}$ eğrisi $E(\lambda)$ fonksiyonunun $i\lambda_k$ $(k = 1, 2, 3, ..., n)$ şeklinde tanımlı olan sonlu çokluktaki sıfırlarını içermez. Tüm bunlara ek olarak, Lemma 3.3.1 gereğince

$$E(-\lambda) = re^{i\eta(-\lambda)} \tag{4.37}$$

ve

$$\overline{E(\lambda)} = re^{\overline{i\eta(-\lambda)}} = re^{-i\eta(\lambda)}$$

olarak seçilebileceği gibi Lemma 3.3.2 gereğince η fonksiyonu tek fonksiyon olmalıdır.

$E(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısı n olduğundan ve $E(\lambda)$ fonksiyonu, $\Gamma_{R,\varepsilon}$ eğrisinin içinde ve üzerinde analitik olduğundan $E(\lambda)$ fonksiyonunun kutup noktası yoktur. Bu nedenle Argüment prensibi gereğince

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta\Gamma_{R,\varepsilon} \arg E(\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\Delta\Gamma_{R,\varepsilon}\eta(\lambda) = n \qquad (4.38) \\ &= \frac{1}{2\pi}\Delta C_R^{+}\eta(\lambda) + \frac{1}{2\pi}\Delta C_\varepsilon^{-}\eta(\lambda) + \frac{1}{2\pi}\Delta_{[-R,-\varepsilon]}\eta(\lambda) + \frac{1}{2\pi}\Delta_{[\varepsilon,R]}\eta(\lambda) \end{aligned}$$

olmalıdır. Teorem 4.0.2 gereğince

$$E(\lambda) \approx \begin{cases} \lambda(\alpha_1 + 1), & \alpha_1 \neq 0, \quad |\lambda| \to \infty \\ \alpha_2\lambda^2, & \alpha_2 \neq 0, \quad |\lambda| \to \infty \end{cases}$$

şeklinde olan $E(\lambda)$ fonksiyonunun asimptotik eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\arg E(\lambda) &= \eta(\lambda) = \arg(\alpha_1 + 1) + \arg\lambda = 0 + \pi = \pi \\ \arg E(\lambda) &= \eta(\lambda) = \arg\alpha_2 + \arg(\lambda^2) = 0 + 2\pi = 2\pi\end{aligned}$$

olduğundan

$$\lim_{R\to\infty} \Delta C_{R^+}\eta(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\begin{cases} \pi, \ \alpha_1 \neq 0 \\ 2\pi, \alpha_2 \neq 0 \end{cases}$$

olup

$$C(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, \ \alpha_1 \neq 0 \\ 1, \ \alpha_2 \neq 0 \end{cases} \tag{4.39}$$

bulunur. Teorem 4.1.1 ispatında üst imajiner eksende

$$E(\lambda) \approx \begin{cases} E(0), \ E(0) \neq 0 \\ i\lambda\widetilde{K}(0), \ E(0) = 0 \end{cases}$$

olduğu elde edilmişti. Buradan, $E(0) \neq 0$ için sonuç $E(0)$ olup ve $E(0)$ reel sayı olduğundan argüment değişimi sıfırdır. (4.31) eşitliğinde $\lambda = 0$ alınırsa

$$\widetilde{K}(0) = 1 + \alpha_1 + \int_0^\infty K_1(t)dt + \alpha_1 \int_0^\infty K(0,t)dt$$

olup buradan kolayca görülür ki $\widetilde{K}(0)$ reel sayı olmalıdır. Bu nedenle argüment değişimi sıfırdır. Yani, $E(0) = 0$ durumu için argüment değişimi

$$\frac{1}{2\pi}\Delta C_{\varepsilon^-} \arg E(\lambda) = (\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) + (0 - \pi) + (0 - 0) = -\pi$$

olmalıdır. Bu nedenle,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Delta C_{\varepsilon^-}\eta(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\begin{cases} 0, \ E(0) \neq 0 \\ -\pi, \ E(0) = 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, \ E(0) \neq 0 \\ -\dfrac{1}{2}, \ E(0) = 0 \end{cases}$$

$$T(E) = \begin{cases} 0, \ E(0) \neq 0 \\ -\dfrac{1}{2}, \ E(0) = 0 \end{cases} \tag{4.40}$$

olmalıdır. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0, R\to\infty} \Delta_{[-R,-\varepsilon]\cup[\varepsilon,R]}\eta(\lambda) &= \lim_{\varepsilon\to 0, R\to\infty} \frac{1}{2\pi}\{\eta(-\varepsilon) - \eta(-R) + \eta(R) - \eta(\varepsilon)\} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0, R\to\infty} \frac{1}{2\pi}\{2\eta(R) - 2\eta(\varepsilon)\} \\ &= \frac{1}{\pi}\{\eta(+\infty) - \eta(0)\} \qquad (4.41)\end{aligned}$$

olup (4.39), (4.40) ve (4.41) formülleri (4.38) eşitliğinde dikkate alınırsa, $R \to \infty$ ve $\varepsilon \to 0$ için

$$\frac{\eta(+\infty) - \eta(+0)}{\pi} + T(E) + C(\alpha_1, \alpha_2) = n \tag{4.42}$$

sonucu bulunur. ■

Sonuç 4.2.1 Potansiyel fonksiyonun sağladığı (4.3) koşulu altında (4.1)-(4.2) sınır değer probleminin Levinson formülü

$$\frac{\ln S(+0) - \ln S(+\infty)}{2\pi i} = n - \frac{S(0) + 3}{4}$$

şeklinde de bir gösterime sahiptir.

İspat. Eğer (4.1) sınır koşulunda $\alpha_1 = 0$ alınırsa saçılım fonksiyonu

$$S(\lambda) = \frac{\overline{e'(0,\lambda)} + \overline{(\alpha_0 + \alpha_2\lambda^2)e(0,\lambda)}}{e'(0,\lambda) + (\alpha_0 + \alpha_2\lambda^2)e(0,\lambda)}$$

şeklinde olacağından, saçılım fonksiyonu tanımından

$$S(\lambda) = \frac{\overline{E(\lambda)}}{E(\lambda)} \tag{4.43}$$

$$= \frac{E(-\lambda)}{E(\lambda)} \tag{4.44}$$

olmalıdır. O halde (4.37) eşitliği (4.44) eşitliğinde dikkate alınırsa

$$S(\lambda) = \frac{re^{-i\eta(\lambda)}}{re^{i\eta(\lambda)}}$$

olup, sonuç 3.3.1 ispatında yer alan işlemlere benzer işlemler yapıldığında

$$\frac{\eta(+\infty) - \eta(+0)}{\pi} = \frac{\ln S(+0) - \ln S(+\infty)}{2\pi i} \tag{4.45}$$

bulunur. Ayrıca $\alpha_1 = 0$ durumu (4.31) ve (4.33) eşitliklerinde dikkate alınırsa,

$$\widetilde{K}_1(\lambda) = \widetilde{K}(-\lambda)$$

olup

$$E(\lambda) = i\lambda\widetilde{K}(\lambda)$$

ve

$$E_1(\lambda) = -i\lambda\widetilde{K}(-\lambda)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan saçılım fonksiyonu tanımı gereğince

$$S(\lambda) = -\frac{\widetilde{K}(-\lambda)}{\widetilde{K}(\lambda)}$$

biçiminde olup (4.35) eşitliğine göre $E(0) = 0$ durumu için saçılım fonksiyonu

$$\begin{aligned} S(0) &= -\frac{\widetilde{K}(0)}{\widetilde{K}(0)} \\ &= -1 \end{aligned}$$

olarak bulunur. O halde, sadece bu durum göz önüne alınarak

$$T(E) + C(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{S(0) + 3}{4} \tag{4.46}$$

eşitliği yazılabilir. Sonuç olarak, (4.45) ve (4.46) eşitlikleri (4.42) eşitliğinde kullanılırsa

$$\frac{\ln S(+0) - \ln S(+\infty)}{2\pi i} = n - \frac{S(0) + 3}{4}$$

formülü elde edilir. Bu formül Levinson formülü olarak adlandırılır. ■

5. SONUÇ

Sturm-Liouville denklemleri için Levinson formülü üzerine yapılan bu tez çalışması hazırlanırken kaynaklar kısmında da verilen bir çok makale kullanılmış olup, üçüncü bölümde Marchenko, tarafından 1986 yılında basılmış kitap ve dördüncü bölümde ise Memadov ve Menken tarafından 2008 yılında basılmış makale esas alınmıştır. Ayrıca, tezin yazımına başlamadan önce kaynakça kısmında belirtilen kaynaklar yardımıyla saçılım teorisi hakkında bilinmesi gereken temel kavramlar incelenmiştir.

Bu tezin üçüncü bölümünde ters problemler için büyük önem arz eden Marchenko'nun ele aldığı Levinson formülü detaylı bir şekilde incelenmiştir. Yani yarım eksen üzerinde ve selfadjoint Sturm-Liouville problemi için Jost çözümü, Jost fonksiyonu, saçılım fonksiyonu, saçılım verileri, saçılım fonksiyonunun sürekliliği incelenip son olarak problemin Levinson formülü elde edilmiştir.

Tezin dördüncü bölümünde ise 2008 yılında yayınlanan Memadov ve Menken tarafından yazılmış "Sınır koşulu kuadratik spektral parametreli Sturm-Liouville denklemi içeren sınır değer probleminin spektral analizi" başlıklı makale incelenmiştir. Bu bölümün, üçüncü bölümden farkı problemin sınır koşulunun spektral parametre içermesidir. Yani, bu bölümde spektral parametre içeren sınır koşuluna sahip Sturm-Liouville denklemi için saçılım fonksiyonunun sürekliliği ve Levinson formülü detaylıca incelenmiştir.

Sonuç olarak her iki bölüm içinde elde edilen Levinson formülleri benzer yöntemler izlenerek elde edilmişlerdir. O halde, bu tez ters problemlerde potansiyel fonksiyonun elde edilişi için büyük önem arz eden Levinson formülünün bulunuşu için ileride önemli bir kaynak olacaktır. Tüm bunlara ek olarak, bu alanda elde edilen bir çok kaynak ve bu tez çalışmasından faydalanılarak, Sturm-Liouville, Schrödinger ve

Dirac denklemleri için sürekli ve diskre durumlarda Levinson formülü elde edilebilir.

KAYNAKLAR

B. M. Levitan and O. Efimov. Inverse Sturm-Liouville Problems. VNU Science Press, Utrecht, 1987.

C. Bennevitz, B. M. Brown and R. Weikard. Inverse spectral and scattering theory for the half-line left-definite Sturm-Liouville problem. Siam J. Math Analysis. 40 (5), (2009), 2105-2131.

E. Kreyszig. Introductory functional analysis with applications. Wiley, New York, 1978.

G. S. Guseinov. Boundary value problems for nonlinear impulsive Hamiltonian systems. J. Comput. Appl. Math. 259(part B) (2014) 780-789.

G. S. Guseinov, Determination of an infinite Jacobi matrix from scattering data. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 227 (1976) 1289- 1292.

G. S. Guseinov, The inverse problem of scattering theory for a second order difference equation, Sov. Math., Dokl., 230 (1976), 1045-1048.

G. S. Guseinov and H. Tuncay. On the inverse scattering problem for a discrete n-dimensional Schrödinger equation. Comm. Fac. Sci. Univ. Ankara Ser. A1 Mawth. Statist, 44 (1995) 95-102.

K. Chadon and P. C. Sabatier, Inverse Problems in Quantum scattering theory, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1997.

K. M. Case, On discrete inverse scattering problems II. J. Mathematical Phys. 14 (1973) 916-920.

K. M. Case and S. C. Chiu. The discrete version of Marchenko equations in the inverse scattering problem. J. Mathematical Phys. 14 (1973) 1643-1647.

Kh. R. Mamedov and H. Menken. The Levinson- type formula for a boundary value problem with a spectral parameter in the boundary condition. The Arabian Journal for Science and Engineering, 34 (1) (2008).

Kh. R. Mamedov and N. P. Kosar. Continuity of the scattering Function and Levinson Type Formula of a Boundary-Value Problem. Int. J. Contemp. Math. Sciences., 5(4) (2010), 159-170.

Kh. R. Mamedov Uniqueness of the solution to the Inverse problem of scattering theory for the Sturm-Liouville operator with a spectral parameter in the Boundary Condition. Mathematical Notes, 74(1) (2003), 136-140.

Kh. R. Mamedov, A. Cöl, On an inverse scattering problem for a class dirac oparator with discontinuos coe cient and nonlinear dependence on the spectral parameter in the boundary condition, Math. Methods Appl. Sci. 35 (2012) 1712-1720.

L. A. Lusternik and V. I. Sobolev. Elements of functional analysis. Hindustan Publishing Corpn., Delphi, 1974.

L. D. Faddeev, Scattering theory for a three-particle system, Soviet Physics. JETP 12 (1960), 1014-1019.

L. D. Faddeev, The construction of the resolvent of the Schrödinger operator for a three-particle system, and the scattering problem, Soviet Physics Dokl. 7 (1963), 600-602.

M. A. Naimark. Linear differential operators, Frederick Ungar Publishing Co, 1968.

M. Bohner and H. Koyunbakan, Inverse problems for Sturm-Liouville difference equations. Filomat, 30 (2016) 1297-1304.

M. G. Gasymov and B. M. Levitan, Determination of the Dirac system from scattering phase, Sov. Math., Dokl., 167 (1966), 1219-1222.

M. İdemen. Kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisi. Literatür Yayıncılık, İstanbul, 1999.

M. Jaulent and C. Jean, The inverse s-wave scattering problem for a class of potentials depending on energy, Comm. Math. Phys. 28 (3) (1972), 177-220.

N. Levinson, The Physical Review, 75 (1949) 1445.

N. Levinson, Kgl. Danske Videnskab Selskab.Math.-Fys. Medd., 25 (9) (1949).

Ö. Mızrak, K. R. Mamedov and A. M. Akhtyamov. Characteristic properties of scattering data of a boundary value problems. Filomat, 31(12) (2017), 3945-3951.

V. A. Marchenko. Sturm-Liouville Operators and Applications. Springer, Basel, 1986.

Yu. I. Lyubarskiui and V.A. Marchenko, Direct and inverse problems of multichannel scatter, functional. Anal. i Prilozhen.ing 41 (2007), 58-77.

Z.S. Agranovich, V. A. Marchenko, The inverse problem of scattering theory, Pratt Institute Brooklyn, New York 1963.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Dilara KARSLIOĞLU

Doğum Yeri : Samsun

Doğum Tarihi : 09/03/1992

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise : Mehmet Çelikel Anadolu Lisesi (2010)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2014)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (2019)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl: Yeditepe Üniversitesi Matematik Bölümü (Eylül 2017-...)

Yayınları: Bairamov E., Aygar Y., Karslıoglu D., Scattering Analysis and Spectrum of Discrete Schrödinger Equations with Transmission Conditions, Filomat, 31:17, 5391-5399, 2017. (SCI-Expanded)