OHÜ Müh. Bilim. Derg. / OHU J. Eng. Sci.

ISSN: 2147-012X

Ömer Halisdemir Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi, Cilt 6, Sayı 1, (2017), 76-82
Omer Halisdemir University Journal of Engineering Sciences, Volume 6, Number 1, (2017), 76-82

Araştırma / Research

DEĞİŞKEN KESİTLİ TIMOSHENKO KİRİŞİNİN SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ

Faruk Fırat ÇALIM*

İnşaat Mühendisliği Bölümü, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Adana Bilim ve Teknoloji Üniversitesi, Adana, Türkiye

Geliş / Received: *12.04.2016*
Düzeltmelerin gelişi / Received in revised form: *20.07.2016*
Kabul / Accepted: *22.07.2016*

ÖZ

Bu çalışmada, değişken kesitli kirişlerin serbest titreşimleri incelenmiştir. Değişken kesitli çubukları idare eden denklemler Timoshenko çubuk teorisi kullanarak elde edilmiştir. Formülasyonda, eksenel ve kayma deformasyonu, dönme ataleti ve kesit değişkenliği etkileri göz önüne alınmıştır. Laplace uzayında elde edilen skaler formdaki adi diferansiyel denklemler, tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi yardımıyla sayısal olarak çözülmektedir. Değişken kesitli çubukların serbest titreşim analizi yapılmıştır. Kesit değişim parametresi, sınır şartlarının serbest titreşime etkisi araştırılmıştır. Bu çalışmada elde edilen sonuçların ANSYS sonuçları ile uyum içinde olduğu görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Serbest titreşim, değişken kesitli kirişler, tamamlayıcı fonksiyonlar metodu

FREE VIBRATION ANALYSIS OF TIMOSHENKO BEAM WITH VARIABLE CROSS-SECTION

ABSTRACT

The free vibration of beams with variable cross-section was investigated. The governing equations for beams with variable cross-section were obtained using Timoshenko beam theory. The effect of axial and shear deformations, rotary inertia and non-uniformity cross-section were considered in the formulations. Ordinary differential equations in scalar form obtained in the Laplace domain were solved numerically using the complementary functions method. The free vibration of beams with variable cross-section was analysed. The effects of non-uniformity parameter, boundary conditions on free vibration were investigated. The results obtained in this study were found to be in good agreement with those obtained from ANSYS.

Keywords: Free vibration, non-uniform beams, complementary function method

1. GİRİŞ

Değişken kesitli kirişlerin dinamik davranışı önemli bir mühendislik problem olarak güncelliğini korumaktadır. Değişken kesitli kirişler yapı sistemlerinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Cranch ve Adler [1] değişken kesitli kirişlerin doğal frekansları için kapalı bir çözüm sunmuşlardır. Chen ve Xie [2] değişken kesitli çubukların doğal frekanslarını hesaplayabilmek için yeni bir sayısal yöntem önermişlerdir. Eisenberger ve Reich [3] değişken kesitli kiriş problemlerinin analizi için sonlu elemanlar yöntemini kullanmışlardır. Uniform kesitli kirişlerin deplasman fonksiyonunu kullanarak rijitlik ve tutarlı kütle matrislerini elde etmişlerdir. Jategaonkar ve Chehil [4] kirişlerin doğal frekanslarını incelemişlerdir. Eisenberger [5] değişken kesitli kirişlerin çözümü için yeni bir formülasyon sunmuşlardır. Nakahira ve ark. [6] değişken kesite sahip kirişlerin titreşimini Stodola-

*Corresponding author / Sorumlu yazar. Tel.: +90 322 455 0000; e-mail/e-posta: f_calim@yahoo.com

Newmark yöntemini kullanarak incelemişlerdir. Leung ve Zhou [7] farklı sınır şartlarına sahip değişken kesitli Timoshenko kirişini analiz etmek için dinamik rijitlik matrisi yöntemini kullanmışlardır. Tong ve ark. [8] keyfi değişken kesitli Timoshenko kirişinin serbest ve zorlanmış titreşimlerini araştırmışlardır. Abrate [9] değişken kesitli kirişler için kesin çözüm sunmuştur. Ayrıca, değişken kesite sahip kirişlerin titreşimini analiz etmek için genel bir prosedür geliştirmiştir. Ece ve ark. [10] değişken kesite sahip izotropik kirişlerin titreşimini araştırmışlardır. Calim [11] değişken kesite sahip kompozit kirişlerin serbest ve zorlanmış titreşim analizini incelemiştir.

Zhou ve Cheung [12] değişken kesite sahip kirişlerin titreşim karakteristiklerini çalışmışlardır. Kang ve Leissa [13] dairesel kesite sahip değişken kesitli çubukların serbest titreşim ve mod şekillerini araştırmışlardır. Bulut [14] periyodik olarak değişken hızlarda dönen değişken kesitli kirişlerin düzlemine dik eğilme titreşimlerini incelemiştir. Banerjee ve Jackson [15] dönen değişken kesitli Rayleigh kirişinin serbest titreşim analizi için dinamik rijitlik metodunu geliştirmişlerdir. Baghani ve ark. [16] elastik zemine oturan değişken kesitli kirişlerin serbest titreşim analizini çalışmışlardır. Lee ve Lee [17] taşıma matrisi yöntemi kullanarak değişken kesite sahip Bernoulli-Euler kirişinin serbest titreşimini incelemişlerdir.

Bu çalışmada farklı sınır şartlarına sahip değişken kesitli kirişlerin serbest titreşim analizi için etkin bir sayısal yöntem kullanılmıştır. Formülasyonda, eksenel ve kayma deformasyonu etkileri de göz önüne alınmıştır. Kanonik formda Laplace uzayında elde edilen adi diferansiyel denklemlere tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi uygulanarak problemin dinamik rijitlik matrisi hesaplanmıştır. Bu, genel sınır şartlarına sahip problemlerin çözümünde büyük avantajlar sağlamaktadır. Sonlu elemanlar yönteminde, problemi çok fazla sayıda eleman ile tanımlamak gerekirken, önerilen bu yöntemde sadece birkaç elemanla tanımlayarak istenilen hassasiyette kesin sonuçlar elde edilmektedir. Değişken katsayılı adi diferansiyel denklemler de tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi yardımıyla Laplace uzayında çözülebilmektedir.

2. MATERYAL VE METOT

2.1. Denklemler

Çubuk ekseni üzerinde herhangi bir noktada yer değiştirme $U^o(x, t)$ ve bu noktadaki kesitin dönmesi $\Omega^o(x, t)$ olarak gösterilsin. T ve M ise iç kuvvet ve moment vektörü olarak gösterilsin. Deformasyonların çok küçük olduğu kabul edilen çubuğun malzemesi homojen, lineer elastik ve izotrop olup çubuk geometrisi Şekil 1'de gösterilmektedir. Laplace uzayında kanonik formda değişken kesitli kirişlerin serbest titreşimini idare eden diferansiyel denklemler

$$\frac{d\overline{U}_z}{dx} = -\Omega_y + \frac{k'}{G\,A(x)}\overline{T}_z \tag{1a}$$

$$\frac{d\overline{\Omega}_x}{dx} = \frac{1}{E\,I_x(x)}\overline{M}_x \tag{1b}$$

$$\frac{d\overline{\Omega}_y}{dx} = \frac{1}{E\,I_y(x)}\overline{M}_y \tag{1c}$$

$$\frac{d\overline{T}_z}{dx} = \rho\,A(x)\,s^2\,\overline{U}_z \tag{1d}$$

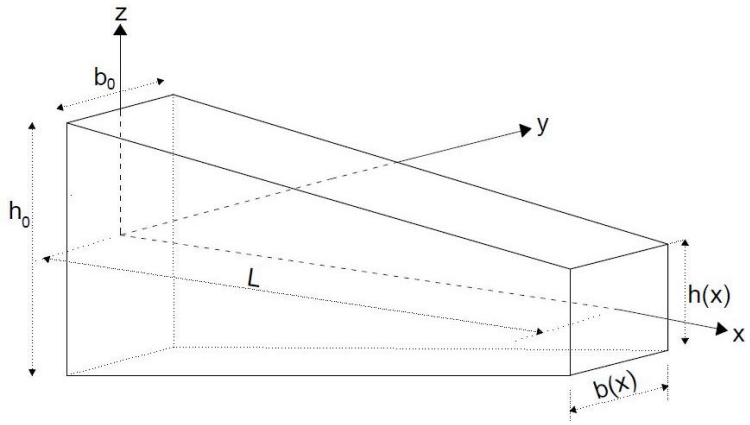
$$\frac{d\overline{M}_x}{dx} = \rho\,I_x(x)\,s^2\,\overline{\Omega}_x \tag{1e}$$

$$\frac{d\overline{M}_y}{dx} = \rho\,I_y(x)\,s^2\,\overline{\Omega}_y + \overline{T}_z \tag{1f}$$

olup burada, ρ kütlesel yoğunluk, A kesit alanı, E ve G elastik sabitler, k' kayma düzeltme faktörü, I_x burulma, I_y ise eğilme atalet momentleridir.

$\mathbf{Y}(x, t)$ kolon matrisi,

$$\mathbf{Y}(x,t) = \{U_z,\ \Omega_x,\ \Omega_y,\ T_z,\ M_x,\ M_y\}^T \tag{2}$$



Şekil 1. Değişken kesitli doğru eksenli çubuk

olarak tanımlanmaktadır. (2) ifadesinin zamana göre Laplace dönüşümü, t>0 için $L[\mathbf{Y}(x,t)] = \overline{\mathbf{Y}}(x,s)$ ise

$$\overline{\mathbf{Y}}(x,s) = \int_0^{\infty} \mathbf{Y}(x,\mathrm{t})\, e^{-s\,t}\, \mathrm{dt} \tag{3}$$

olup burada, Laplace dönüşüm parametresi olan s kompleks bir sayıdır. Harmonik titreşim kabulü ile $\mathbf{U}^o$, $\mathbf{\Omega}^o$, $\mathbf{T}^o$ ve $\mathbf{M}^o$ vektörleri denklem (4)'de verilmektedir.

$$\mathbf{U}^o(x,\mathrm{t}) = \mathbf{U}^*(x)\, e^{i\omega t},\ \mathbf{\Omega}^o(x,\mathrm{t}) = \mathbf{\Omega}^*(x)\, e^{i\omega t},\ \mathbf{T}^o(x,\mathrm{t}) = \mathbf{T}^*(x)\, e^{i\omega t},\ \mathbf{M}^o(x,\mathrm{t}) = \mathbf{M}^*(x)\, e^{i\omega t} \tag{4}$$

Eğer, deplasmanlar ve bunlara karşılık gelen kuvvetler, $\mathbf{Y}^*(x)$ kolon matrisinin bileşenleri olarak düşünülürse, bu 6 adet denklem matris formunda aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\frac{d\mathbf{Y}^*(x)}{dx} = \mathbf{F}(x,\omega)\,\mathbf{Y}^*(x) \tag{5}$$

Sistem dinamik rijitlik matrisinin determinantını sıfır yapan ω değerleri problemin doğal frekanslarını temsil etmektedir.

2.2. Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi ile Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

Sabit katsayılı 6 adet diferansiyel denklem 1a-f eşitliklerinde verilmiştir. Bu denklemlerin her biri yere göre birinci mertebe türevleri içermektedir. 1a-f denklemleri matris formunda aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\frac{\mathrm{d}\,\overline{\mathbf{Y}}(x,\mathrm{s})}{\mathrm{d}x} = \overline{\mathbf{F}}(x,\mathrm{s})\,\overline{\mathbf{Y}}(x,\mathrm{s}) + \overline{\mathbf{B}}(x,\mathrm{s}) \tag{6}$$

Uzaysal çubuklar için, durum vektörünün elemanları 7 ifadesinde tanımlanmaktadır.

$$\overline{\mathbf{Y}}(x,s) = \left\{\overline{\mathbf{U}}(x,s),\ \overline{\mathbf{\Omega}}(x,s),\ \overline{\mathbf{T}}(x,s),\ \overline{\mathbf{M}}(x,s)\right\}^T \tag{7}$$

Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi, başlangıç şartları yardımı ile 6 numaralı denklemin çözümüne dayanmaktadır. Bu yöntem yardımı ile sınır değer problemi başlangıç değer problemine indirgenmektedir. 6 numaralı denklemin genel çözümü

$$\overline{\mathbf{Y}}(\mathrm{x},\mathrm{s}) = \sum_{\mathrm{m}=1}^{6} \mathrm{C}_{\mathrm{m}}\,(\overline{\mathbf{U}}^{(\mathrm{m})}(\mathrm{x},\mathrm{s})) + \overline{\mathbf{V}}(\mathrm{x},\mathrm{s}) \tag{8}$$

şeklindedir. Burada, $\overline{\mathbf{U}}^{(m)}(x,s)$ ifadesinin *m*'inci bileşenine 1, diğerlerine sıfır değeri verilerek elde edilen homojen çözümü göstermektedir. $\overline{\mathbf{V}}(x,s)$ ise başlangıç şartları sıfır alınarak elde edilen özel çözümdür. C_m integrasyon sabitleri ise sınır şartlarından elde edilmektedir.

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

3.1. Sayısal Uygulama

Bu çalışmada, değişken kesitli kirişlerin serbest titreşimini analiz etmek için genel amaçlı Fortran dilinde bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Özel olarak, problemin serbest titreşim frekansları, Laplace parametresi "s" yerine "$i\omega$" parametresi konularak hesaplanmaktadır. Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemine dayalı başlangıç değer probleminin çözümü için Butcher'ın beşinci mertebe Runge-Kutta algoritması kullanılmıştır. Elde edilen serbest titreşim frekansları aşağıdaki ifade yardımı ile boyutsuz hale getirilmektedir.

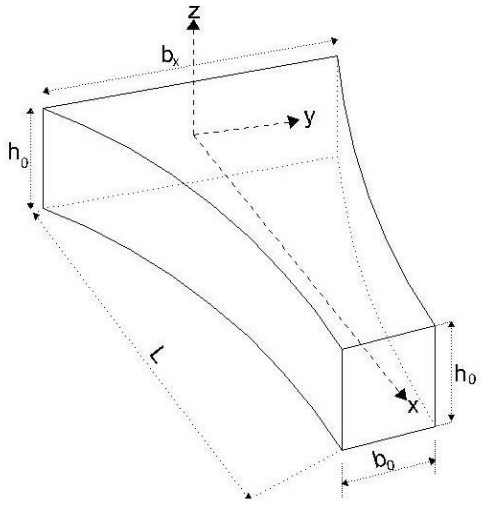
$$\overline{\omega}_i = \omega_i \sqrt{\rho A_o L^4 / E I_o} \tag{9}$$

Sonlu elemanlar yöntemine dayalı ANSYS programı ile çözüm yaparken 2 düğümlü 6 serbestliğe sahip 3 boyutlu çubuk eleman modeli (BEAM 188) kullanılmıştır. Bu çalışmada önerilen yöntemle problem iki veya üç eleman ile modellenmesine karşın, sonlu elemanlar yöntemine dayalı ANSYS programı ile çok fazla sayıda doğru eksenli çubuk elemanına ihtiyaç duyulmaktadır.

3.1.1. Örnek 1

Farklı sınır şartlarına sahip geometrisi exponansiyel olarak değişen bir kiriş problemi incelenmiştir (Şekil 2). Ankastre-ankastre (AA), sabit-sabit mesnet (SS) ve ankastre-boş (AB) sınır koşulları dikkate alınmıştır. Kirişe ait geometri ve malzeme özellikleri: L= 0,381 m ve L / b_o= 28,87, h= h_o= sabit ve b(x)= b_o e $^{\beta (1-x/L)}$, elastisite modülü E= 210 GPa, kayma modülü G= 80 GPa, Reissner's düzeltme faktörü $k' = 1{,}2$ olarak alınmıştır.

Exponansiyel daralan kirişe (β=1) ait düzlemine dik boyutsuz serbest titreşim frekansları hesaplanmış olup Tablo 1'de verilmiştir. Boyutsuz olarak ilk beş serbest titreşim frekansı Timoshenko ve Bernoulli-Euler kiriş teorileri kullanılarak elde edilmiş ve literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Tablo 1 incelendiğinde, önerilen model yardımıyla elde edilen sonuçlar ile literatür ve ANSYS sonuçları ile uyumlu oldukları görülmektedir.



Şekil 2. Exponansiyel azalan doğru eksenli kiriş

Tablo 1. Konsol kirişe ait düzlemine dik boyutsuz serbest titreşim frekansları (β= 1)

Mod	Cranch ve Adler [1]	Tong ve Tabarrok [8]		Ece ve ark. [10]	ANSYS		Bu çalışma	
	Kesin çözüm	Bernoulli - Euler	Timoshenko	Bernoulli - Euler	Bernoulli - Euler	Timoshenko	Bernoulli - Euler	Timoshenko
1	4,7350	4,7347	4,7291	4,7230	4,7340	4,7292	4,7335	4,7292
2	24,203	24,201	24,041	24,202	24,165	24,040	24,162	24,040
3	63,850	63,861	62,868	63,865	63,624	62,863	63,617	62,870
4	-	123,091	119,638	123,098	122,238	119,620	122,224	119,643
5	-	-	-	202,069	199,820	193,229	199,796	193,281

Ayrıca farklı sınır şartlarına sahip geometrisi exponansiyel olarak azalan kirişe ait boyutsuz serbest titreşim frekansları Tablo 2'de verilmektedir. Tablo 2 incelendiğinde, elde edilen sonuçların birbirleri ile uyumlu oldukları görülmektedir.

Tablo 2. Farklı sınır şartlarına ait düzlemine dik boyutsuz serbest titreşim frekansları

β	Mod	Ankastre-Boş (AB)			Ankastre-Ankastre (AA)			Sabit-Sabit (SS)		
		Ece ve ark. [10]	ANSYS	Bu çalışma	Ece ve ark. [10]	ANSYS	Bu çalışma	Ece ve ark. [10]	ANSYS	Bu çalışma
0	1	3,516	3,515	3,515	22,37	22,36	22,36	9,870	9,865	9,865
	2	22,04	22,00	22,00	61,67	61,53	61,53	39,48	39,40	39,40
	3	61,70	61,46	61,46	120,9	120,3	120,3	88,83	88,43	88,43
	4	120,9	120,1	120,1	199,9	198,2	198,2	157,9	156,7	156,7
	5	199,9	197,6	197,6	298,6	294,7	294,7	246,7	243,8	243,8
1	1	4,723	4,734	4,733	22,51	22,50	22,50	9,773	9,768	9,768
	2	24,20	24,17	24,16	61,86	61,72	61,72	39,57	39,49	39,49
	3	63,87	63,62	63,62	121,1	120,5	120,5	88,97	88,58	88,58
	4	123,1	122,2	122,2	200,0	198,4	198,4	158,1	156,9	156,9
	5	202,1	199,8	199,8	298,8	294,9	294,9	246,9	243,9	243,9
2	1	6,259	6,262	6,260	22,94	22,92	22,92	9,487	9,483	9,482
	2	26,58	26,55	26,54	62,42	62,28	62,28	39,85	39,78	39,77
	3	66,38	66,13	66,12	121,7	121,1	121,1	89,41	89,01	89,01
	4	125,7	124,8	124,8	200,7	199,0	199,0	158,6	157,4	157,4
	5	204,7	202,4	202,4	299,4	295,6	295,5	247,5	244,5	244,5

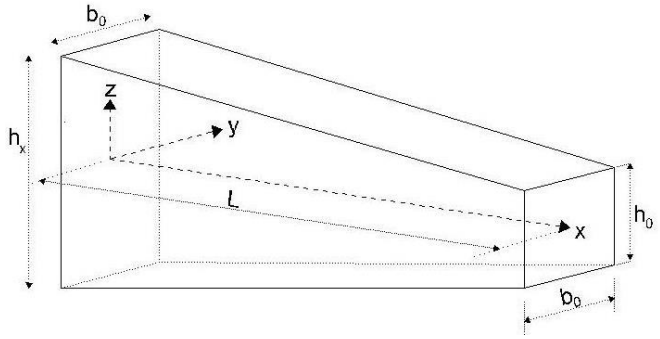
Ayrıca ankastre-ankastre (AA) ve sabit-sabit (SS) sınır koşullarında kesit değişim parametresi (β) değeri serbest titreşim frekanslarını çok az etkilemektedir. Ancak ankastre-boş (AB) sınır koşulunda ise kesit değişim parametre değerinin artması serbest titreşim değerlerini arttırmaktadır. Bu davranış mesnetlerin rijitliği ile ilişkilidir.

3.1.2. Örnek 2

Farklı sınır şartlarına sahip kesiti lineer azalan kiriş problemi incelenmiştir (Şekil 3). Ankastre-ankastre (AA), sabit-sabit mesnet (SS) ve ankastre-boş (AB) sınır koşulları dikkate alınmıştır. Kirişe ait geometri ve malzeme

özellikleri: L= 0,381 m ve L / h_o= 10, b= b_o= sabit ve $h(x) = h_o[1 - \beta(x / L)]$, elastisite modülü E= 210 GPa, kayma modülü G= 80 GPa, Reissner's düzeltme faktörü $k' = 1{,}5$ olarak alınmıştır.

Farklı sınır şartları ve kesit değişim parametresini içeren kesiti lineer değişen kirişe ait boyutsuz halde düzlemine dik serbest titreşim frekansları Tablo 3'te verilmektedir. Tablo 3 incelendiğinde, önerilen model yardımıyla elde edilen sonuçlar ile literatür ve ANSYS sonuçlarının uyumlu oldukları görülmektedir. Ayrıca, kesit değişim parametresi arttıkça ankastre-ankastre (AA) ve sabit-sabit (SS) sınır şartlarında serbest titreşim frekansları azalırken, ankastre-boş (AB) sınır şartında ise artmaktadır.



Şekil 3. Lineer azalan doğru eksenli kiriş

Tablo 3. Farklı sınır şartlarına ait düzlemine dik boyutsuz serbest titreşim frekansları

β	Mod	Ankastre-Boş (AB)		Ankastre-Ankastre (AA)			Sabit-Sabit (SS)	
		ANSYS	Bu çalışma	Tong ve Tabarrok [8]	ANSYS	Bu çalışma	ANSYS	Bu çalışma
0	1	3,483	3,483	-	20,67	20,67	9,676	9,676
	2	20,70	20,70	-	52,31	52,30	36,68	36,68
	3	53,91	53,91	-	93,49	93,48	76,47	76,46
	4	96,76	96,74	-	108,8	108,8	108,8	108,8
0,25	1	3,605	3,605	-	18,33	18,32	8,448	8,448
	2	19,27	19,27	-	47,15	47,14	32,49	32,49
	3	49,09	49,09	-	85,55	85,54	68,73	68,73
	4	88,57	88,56	-	108,7	108,7	108,7	108,7
0,5	1	3,794	3,794	15,64	15,63	15,63	7,043	7,043
	2	17,63	17,63	40,92	40,87	40,87	27,78	27,78
	3	43,46	43,46	75,54	75,40	75,40	59,54	59,5377
	4	78,54	78,53	116,9	116,7	116,7	99,89	99,87
0,75	1	4,147	4,147	-	12,34	12,34	5,309	5,309
	2	15,75	15,75	-	32,76	32,76	22,17	22,17
	3	36,60	36,60	-	61,52	61,51	47,98	47,98
	4	65,55	65,55	-	96,95	96,95	81,65	81,65

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada, değişken kesitli kirişin serbest titreşim analizi için etkin bir yöntem sunulmuştur. Değişken kesitli kirişleri idare eden denklemler Timoshenko çubuk teorisi kullanılarak elde edilmiştir. Formülasyonda, kesit değişim parametresi, eksenel ve kayma deformasyonu etkileri göz önüne alınmıştır. Skaler formdaki adi diferansiyel denklemler tamamlayıcı fonksiyonlar ve rijitlik matrisi yöntemi yardımıyla sayısal olarak çözülmüştür.

Değişken kesitli doğru eksenli çubukların serbest titreşim analizi için literatürde farklı yöntemler kullanılarak incelenen örnekler ele alınmıştır. Aynı zamanda sonlu elemanlar yöntemine dayalı ANSYS programı ile de çözümler yapılmıştır. ANSYS programı ile çözüm yapılırken istenilen hassasiyette sonuç alabilmek için problem

çok fazla elemanla modellenmesi gerekebilmektedir. Ele alınan problemler, önerilen yöntem ve ANSYS ile çözülmüş olup diğer yöntemlerle karşılaştırılmış ve sonuçların birbirleri ile uyum içinde oldukları görülmüştür. Bu çalışmada önerilen yöntemle problem birkaç eleman ile modellenirken, ANSYS programı ile çok fazla sayıda doğru eksenli çubuk elemanına ihtiyaç duyulmaktadır. Ayrıca kesit değişim parametresi ve farklı sınır şartlarının değişken kesitli doğru eksenli çubukların serbest titreşim frekanslarına etkisi araştırılmıştır. İncelenen örneklerde, kesit değişim fonksiyonlarının, kesit değişim parametresinin ve sınır koşullarının serbest titreşim frekansları üzerinde etkili oldukları açıkça görülmektedir.

KAYNAKLAR

[1] CRANCH, E.T, ADLER, A.A., "Bending Vibration of Variable Section Beams", Journal of Applied Mechanics, 23(1), 103-108, 1956.
[2] CHEN, Y.Z., XIE, J.R., "Evaluation of Natural Frequencies of Non-Uniform Beams by Numerical Integration", Computers & Structures, 29(4), 693-697, 1988.
[3] EISENBERGER, M., REICH, Y., "Static, Vibration and Stability Analysis of Non-Uniform Beams", Computers & Structures, 31(4), 567-573, 1989.
[4] JATEGAONKAR, R., CHEHIL, D.S., "Natural Frequencies of a Beam with Varying Section Properties", Journal of Sound and Vibration, 133(2), 303-322, 1989.
[5] EISENBERGER, M., "Exact Solution for General Variable Cross-Section Members", Computers & Structures, 41(4), 765-772, 1991.
[6] NAKAHIRA, N., OZAWA, K., MIZUSAWA, T., "Vibration of Beams with Varying Cross-Sections by the Stodola-Newmark Method", Computers & Structures, 43(5), 999-1004, 1992.
[7] LEUNG, A.Y.T., ZHOU, W.E., "Dynamic Stiffness Analysis of Non-Uniform Timoshenko Beams", Journal of Sound and Vibration, 181(3), 447-456, 1995.
[8] TONG, X., TABARROK, B., YEH, K.Y., "Vibration Analysis of Timoshenko Beams with Non-Homogeneity and Varying Cross-Section", Journal of Sound and Vibration, 186(3), 821-835, 1995.
[9] ABRATE, S., "Vibration of Non-Uniform Rods and Beams", Journal of Sound and Vibration, 185(4), 703-716, 1995.
[10] ECE, M.C., AYDOGDU, M., TASKIN, V., "Vibration of a Variable Cross-Section Beam", Mechanics Research Communications, 34, 78-84, 2007.
[11] CALIM, F.F., "Free and Forced Vibrations of Non-Uniform Composite Beams", Composite Structures, 88, 413-423, 2009.
[12] ZHOU, D., CHEUNG, Y.K., "The Free Vibration of a Type of Tapered Beams", Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, 188, 203-216, 2000.
[13] KANG, J.H., LEISSA, A.W., "Three-dimensional Vibrational Analysis of Thick Tapered Rods and Beams with Circular Cross-Section", International Journal of Mechanical Sciences, 46, 929-944, 2004.
[14] BULUT, B., "Effect of Taper Ratio on Parametric Stability of a Rotating Tapered Beam", European Journal of Mechanics A/Solids, 37, 344-350, 2013.
[15] BANERJEE, J.R., JACKSON, D.R, "Free Vibration of a Rotating Tapered Rayleigh Beam: A Dynamic Stiffness Method of Solution", Computers & Structures, 124, 11-20, 2013.
[16] BAGHANI, M., MAZAHERI, H., SALARIEH, H., "Analysis of Large Amplitude Free Vibrations of Clamped Tapered Beams on a Nonlinear Elastic Foundation", Applied Mathematical Modelling, 38, 1176-1186, 2014.
[17] LEE, J.W., LEE, J.Y, "Free Vibration Analysis using Transfer-Matrix Method on a Tapered Beam", Computers & Structures, 164, 75-82, 2016.