**T.C.**
**HARRAN ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

# BÜTÜN REEL EKSENDE BERNSTEİN-CHLODOWSKY DURRMEYER OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

**Nadire Fulda ODABAŞI**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**ŞANLIURFA**
**2018**

Doç. Dr. Aydın İZGİ danışmanlığında, Nadire Fulda ODABAŞI'nın hazırladığı "**Bütün reel eksende Bernstein-Chlodowsky-Durrmeyer operatörlerinin yaklaşım özellikleri**" konulu bu çalışma 25/06/2018 tarihinde oy birliği ile Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

İmza

Danışman : Doç. Dr. Aydın İZGİ …….....

Üye : Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN …….....…

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Mahmut MODANLI …….....….....

**Bu Tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım.**

**Prof. Dr. Halil Murat ALĞIN**
**Enstitü Müdürü**

**Not:** Bu tezde kullanıla özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Kanunundaki hükümlere tabidir.

# İÇİNDEKİLER

**Sayfa No**

ÖZET……i
ABSTRACT……ii
TEŞEKKÜR……iii
ŞEKİLLER DİZİNİ……iv
ÇİZELGELER DİZİNİ……v
SİMGELER DİZİNİ……vi
1. GİRİŞ……...1
1.1. Temel Kavramlar……..3
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR……7
3. MATERYAL ve YÖNTEM……9
3.1. Materyal……...9
3.2. Yöntem……9
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA……..10
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER……28
5.1. Sonuçlar……..28
5.2. Öneriler……...28
KAYNAKLAR……...29
ÖZGEÇMİŞ……...31

# ÖZET

**Yüksek Lisans Tezi**

**BÜTÜN REEL EKSENDE BERNSTEIN-CHLODOWSKY-DURRMEYER OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ**

**Nadire Fulda ODABAŞI**

**Harran Üniversitesi**
**Fen Bilimleri Enstitüsü**
**Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman: Doç. Dr. Aydın İZGİ**
**Yıl: 2018, Sayfa:31**

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde yaklaşım teorileri ile ilgili önceki çalışmalardan bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde bu tezde kullanılan materyal ve yöntemden kısaca bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde ise $D_n(f;x)$ operatörünün lineer pozitifliği gösterilmiştir. $D_n(f;x)$ operatörünün merkezi momentleri hesaplanmış, düzgün yakınsaklığı gösterilmiştir. Sonrasında süreklilik modülüyle yaklaşım hızı hesaplanmış olup, Lipschitz koşulunu sağladığı gösterilmiştir. $D_n(f;x)$ operatörünün farklı iki fonksiyona yaklaşımı grafikte gösterilmiştir. Seçilen bir fonksiyon için $D_n(f;x)$ operatörünün nümerik değerler tablosu hazırlanmıştır. Beşinci bölümde ise dördüncü bölümde yapılan çalışmalarla ilgili sonuç ve öneriler verilmiştir.



**ANAHTAR KELİMELER:** Bernstein, chlodowsky, durrmeyer operatörleri, Korovkin tip teorem, lineer pozitif operatörler, süreklilik modülü.

## ABSRACT

**MSc Thesis**

**APPROXIMATION PROPERTIES OF THE BERNSTEIN-CHLODOWSKY-DURRMEYER OPERATORS ON THE WHOLE REEL AXIS**

**Nadire Fulda ODABAŞI**

**Harran University**
**Graduate School of Natural and Applied Sciences**
**Department of Mathematic**

**Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Aydın İZGİ**
**Year: 2018, Page:31**

The thesis consist of five sections. The first section has been devoted to the introduction. In the second section, previous studies about approximation theories are mentioned. In the third section, the materials and methods used in this thesis are briefly mentioned. In the fourth section, the linearity and positivity of $D_n(f;x)$operator are given. Centripetal moments of $D_n(f;x)$ operator are discussed, uniform continuity of the operator is shown. After that, the rates of approximation of the operator are obtained by means of modulus of continuity and Lipschitz condition for the operator is given. Approximation of the operator to function is demonstrated in a graphical. For the chosen function, a chart of numeric values about $D_n(f;x)$ is given. In the last section, the results and suggestions about the fourth section is given.



**KEY WORDS**: Bernstein, chlodowsky, durrmeyer operators, Korovkin-type theorem, linear positive operators, modulus of continuity.

# TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca bana her koşulda yardımcı olan, bilgi ve birikimlerinden yararlanma imkanı sağlayan sayın danışmanım, Doç. Dr. Aydın İZGİ'ye, yüksek lisansa başlama sürecinde ve devamında desteğini ve iyi dileklerini esirgemeyen, beni yönlendiren sayın hocam Doç. Dr. Sevilay KIRCI SERENBAY'a ve yine yüksek lisansa başlama sürecinde desteğini ve iyi dileklerini esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Haydar EŞ'e, yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen sayın hocalarım Dr. Öğr. Üyesi Mahmut MODANLI'ya, Doç. Dr. Haydar ALICI'ya ve Dr. Öğr. Üyesi N.Feyza YALÇIN'a, bölümdeki araştırma görevlisi hocalarım Döne KARAHAN'a, Harun ÇİÇEK'e ve Ecem ACAR'a, değerli arkadaşım Gül Sinem KELEŞ'e teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca bu süreçte beni asla yalnız bırakmayan, sonsuz destek ve güvenini esirgemeyen değerli aile üyelerimden, teyzem Seval VURAL'a, annem Sevgi VURAL'a ve kardeşim Seda ODABAŞI'ya çok teşekkür ederim.

# ŞEKİLLER DİZİNİ

**Sayfa No**

Şekil 4.1. $D_n(f;x)$'in $f$ fonksiyonuna yaklaşımının n=5, n=10 ve n=15 için yaklaşımının karşılaştırılması.....25
Şekil 4.2. $D_n(f;x)$'in $f$ fonksiyonuna yaklaşımının n=20, n=25 ve n=30 için yaklaşımının karşılaştırılması.....26

# ÇİZELGELER DİZİNİ

**Sayfa No**

Çizelge 4.1. $D_n(f;x)$'in $f$ fonksiyonuna yaklaşımının n=5, n=10, n=15 ve n=20 için karşılaştırılması.....27

# SİMGELER DİZİNİ

| | |
|---|---|
| $D_{\boldsymbol{n}}(f;x)$ | $D_{\boldsymbol{n}}$ operatörünün $f$ fonksiyonuna uygulanması |
| $\mathbb{N}$ | Doğal sayılar kümesi |
| $\mathbb{R}$ | Reel sayılar kümesi |
| $C[a,b]$ | $[a,b]$ deki sürekli fonksiyonlar uzayı |
| $\omega(f;\delta)$ | $f$ fonksiyonunun süreklilik modülü |
| $\|.\|_{C[a,b]}$ | $C[a,b]$ uzayında $\|f\|_{C[a,b]} = \max_{a\le x\le b}\|f(x)\|$ ile tanımlı norm |
| $\aleph_{n,m}(x)$ | m-inci merkezi moment |
| $\sum_{k=o}^{n} a_k$ | $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ |
| $f_n \rightrightarrows f$ | $\{f_n\}$ fonksiyon dizisinin $f$ fonksiyonuna düzgün yakınsaması |
| $B_{\boldsymbol{n}}(f;x)$ | Bernstein polinom dizisi |
| $S_{\boldsymbol{n}}(f;x)$ | Szasz polinom dizisi |

# 1.GİRİŞ

Bazı fonksiyonlarla türev ve integral gibi pek çok işlem yapamayız. Bu sebeple bu fonksiyonlarla çalışabilmek için bu fonksiyonları polinom fonksiyonlarına dönüştüren dönüşümlerden yararlanmamız gerekir. Yaklaşım teorisi ise tam bu noktada devreye girer ve hakkında yeterince bilgi sahibi olmadığımız fonksiyonlara, basit ve kullanımı kolay fonksiyonlarla yaklaşabilmeyi amaçlar. Bu sebeple 1885 yılında Weierstrass $[a,b]$ aralığında sürekli her $f$ fonksiyonuna bir polinomla yaklaşılabileceğini ifade etmiştir ve aşağıdaki operatörü tanımlamıştır.

$f \in C[a,b]$ için,

$$W_n(f;x) = \frac{1}{I_n}\int_{a_1}^{b_1} e^{-n(t-x)^2} f(t)dt$$

Burada Weierstrass operatörü pozitif ve lineer fonksiyon olup $n \longrightarrow \infty$ iken,

$$W_n(f) \rightrightarrows f \quad , f \in [a,b]$$

$$a_1 = a - \delta, \qquad b_1 = b + \delta; \qquad I_n = \int_{-c}^{c} e^{-nt^2} dt \qquad c = b_1 - a_1$$

1912 yılında Bernstein, Weierstrass'ın ifade ettiği bu polinomları toplam biçiminde lineer operatörler dizisi şeklinde göstermiş ve aşağıdaki gibi tanımlamıştır;

$f \in C[0,1]$ ve n$\in \mathbb{N}$ için,

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

biçimindedir.

1930'da Kantorovich operatörü tanımlanmıştır ve 1937 yılında ise Chlodowsky, Bernstein'ın çalışmasını $[0,\infty)$ aralığına genişleterek tanımlamıştır;

$f \in C[0,b_n]$ , $b_n$ pozitif artan bir dizi, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ ve $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$ olmak üzere;

$$C_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n} b_n) \binom{n}{k} (\frac{x}{b_n})^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}, \qquad 0 \le x \le b_n$$

biçimindedir.

1942 yılında Szasz-Mirakyan, 1957 yılında Baskakov ve 1960 yılında Meyer-König-Zeller operatörleri tanımlanmıştır. 1967 yılında Durrmeyer operatörü aşağıdaki gibi tanımlanmıştır;

$f \in L_1[0,1]$ olmak üzere;

$$D_n(f;x) = (n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\int_0^1\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}f(t)dt.$$

Biraz geriye gidecek olursak, 1951 yılında Bohman lineer pozitif operatörlerin [0,1] aralığında sürekli bir fonksiyona düzgün yakınsaması için yalnızca aşağıdaki üç koşulu gerçeklemesi gerektiğini ifade ve ispat etmiştir.

Her $x \in$ [0,1] ve $n \in \mathbb{N}$ için;

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(\xi_{n,k})p_{n,k}(x), \qquad \xi_{n,k} \in [0,1], \quad p_{n,k} \geq 0$$

lineer operatör dizisinin $n \to \infty$ için [0,1] aralığında $f$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olabilmesi için gerek ve yeter koşul üç tanedir;

$$L_n(1;x) \rightrightarrows 1$$
$$L_n(t;x) \rightrightarrows x$$
$$L_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2$$

Sonrasında 1953 yılında Korovkin, [0,1] aralığını $[a,b]$ aralığına genellemiştir.

## 1.1.Temel Kavramlar

### Tanım 1.1.1.

$X$ ve $Y$ normlu iki fonksiyon uzayı olsun. Eğer $X$ den alınmış herhangi bir $f$ fonksiyonuna $Y$ de bir $g$ fonksiyonu karşılık getiren bir $L$ kuralı varsa bu $L$ kuralına $X$ den $Y$ ye bir operatör denir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).
$f \in X, g \in Y$ ve $x, g$ nin tanım kümesine ait olmak üzere;
$L(f;x) = g(x)$ şeklinde gösterilir.

### Tanım 1.1.2.

$L: X \to Y$ bir operatör olsun. Eğer $L$ operatörü her $f_1,\ f_2 \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için;

$$L(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha L(f_1;x) + \beta L(f_2;x)$$

koşulunu sağlıyor ise, $L$ operatörüne lineer operatör denir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

### Tanım 1.1.3.

$L: X \to Y$ bir operatör $f \in X$ olsun. Eğer $f \geq 0$ iken $L(f) \geq 0$ gerçekleniyorsa $L$ operatörüne pozitif operatör denir. Lineerlik ve pozitiflik koşullarını sağlayan $L$ operatörüne, lineer pozitif operatör denir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

### Lemma 1.1.4.

$L: X \to Y$ bir lineer pozitif operatör olsun. $f, g \in X$ olmak üzere;
$f \leq g$ ise $L(f;x) \leq L(g;x)$ dir. Buna $L$ lineer operatörünün monotonluk özelliği denir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

### Lemma 1.1.5.

$L: X \to Y$ bir lineer pozitif operatör olsun. Bu durumda;

$|L(f;x)| \leq L(|f|;x)$ dir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

**Tanım 1.1.4.**

$[a,b]$ kapalı ve sonlu aralığında tanımlı, sürekli fonksiyonlar uzayı $C[a,b]$ ile gösterilir. $C[a,b]$,

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{a\leq x\leq b}|f(x)|$$

normu ile bir lineer normlu uzaydır (Musayev, Alp, 2000).

**Tanım 1.1.5.**

$X$ ve $Y$ iki fonksiyon uzayı olmak üzere, $L: X \to Y$ ile tanımlanmış $L$ operatörünü göz önüne alalım. Eğer her $f \in X$ için;

$$\|Lf\| \leq M\|f\|_x$$

eşitsizliğini sağlayan $M > 0$ sabitleri varsa $L$ operatörüne sınırlı operatör denir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

**Tanım 1.1.6.**

$\{f_n\}$ fonksiyonlar dizisi normlu $X$ uzayında bir $f$ fonksiyonuna yakınsasın.
Yani $(n \to \infty)$ için $\|f_n - f\|_x \to 0$ ya da $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\| = 0$ olsun.
Bu şartı sağlayan tüm $f_n$ fonksiyonları $(n \to \infty)$ için;

$$\|Lf_n - Lf\|_y \to 0$$

oluyorsa $L$ operatörüne sürekli operatör denir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

**Tanım 1.1.7.**

$f_n: [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonların dizisi olsun. Her bir $x \in [a,b]$ ve her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $n_0$ vardır ki her $n > n_0$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0$ varsa $(f_n)$ dizisi $f$ fonksiyonuna noktasal yakınsaktır denir (Shevchuk, 1992).

**Tanım 1.1.8.**

Her $x \in [a,b]$ ve her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $n_0$ vardır ki her $n > n_0$ olduğunda; $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0$ varsa $(f_n)$ dizisi $f$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir ve $f_n \rightrightarrows f$ ile gösterilir (Shevchuk, 1992).

**Tanım 1.1.9.**

$[a,b]$ aralığında tanımlı $f$ fonksiyonu verilsin. $[0, b-a]$ aralığında tanımlı $\omega(\delta) \coloneqq \omega(\delta) = sup\{|f(x_2) - f(x_1)| : |x_2 - x_1| \leq \delta, x_1, x_2 \epsilon [a,b]\}$ fonksiyonuna $f$ in süreklilik modülü denir (Shevchuk, 1992).

**Teorem 1.1.1.**

$f$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli olsun. Bu durumda $f$ fonksiyonunun süreklilik modülü aşağıdaki özelliklere sahiptir (Altomare ve Campiti, 1994).

i. $\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$

ii. $0 < \delta_1 < \delta_2$ ise $\omega(\delta_1) < \omega(\delta_2)$

iii. $\omega(\delta_1 + \delta_2) < \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2)$

iv. $\omega(n\delta) \leq n\omega(\delta), n \in \mathbb{Z}^+$

v. $|f(t) - f(x)| \leq \omega(f; |t-x|)$

vi. $\omega(f; |t-x|) \leq \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta}\right) \omega(f; \delta)$

**Teorem 1.1.2.(Korovkin Teoremi)**

$f \in C[a,b]$ ve tüm reel eksende

$$|f(x)| \leq M_f$$

şartını sağlayan bir fonksiyon olsun. Eğer $L_n$ lineer pozitif operatör dizisi $[a,b]$ üzerinde;

$L_n(1;x) \rightrightarrows 1$ $\quad n \to \infty$

$L_n(t;x) \rightrightarrows x$ $\quad n \to \infty$

$L_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2$ $\quad n \to \infty$

özelliklerini sağlıyorsa bu durumda $L_n$ operatör dizisi $[a,b]$ üzerinde $L_n(f;x) \rightrightarrows f(x)$.

Başka bir biçimde ifade edecek olursak;

$\| L_n(f) - f \|_{C[a,b]} \to 0 \quad n \to \infty$

ya da buna eşdeğer olan $\lim_{n\to\infty} \max_{a\le x\le b} |L_n(f;x) - f(x)| = 0$ dır (Korovkin, 1953).

**Tanım 1.1.10**

$\aleph_{n.m}(x) = L_n((t-x)^m; x), m = 0,1,\ldots$ ile tanımlanan ifadelere $L_n$ operatör dizisinin m-inci merkezi momentleri denir.

# 2.ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bernstein ilk defa 1912 yılında [0,1] aralığı üzerinde sürekli olan bir fonksiyona Bersntein polinomları ile yaklaşılabileceğini göstermiştir. Bu alanda birçok bilimadamı çalışmalar yapmıştır. Kısaca bahsedecek olursak 1930 yılında Kantorovich, 1937 yılında Chlodowsky, 1941 yılında Szasz, 1957 yılında Baskakov, 1960 yılında Meyer-König-Zeller, 1967 yılında Durrmeyer, 1969 yılında Stancu, 1980 yılında Bleimann-Butcer-Hahn gibi bir çok operatör tanımlanmıştır.

1935 yılında $f$ fonksiyonunun süreklilik modülü bağıntısı Popovichu tarafından verilmiştir;

$$|f(x) - B_n(f;x)| \leq c\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

1938 yılında Kac, Bernstein polinomlarıyla Lipschitz koşulu sağlayan fonksiyonlara yaklaşılabileceğini göstermiştir;
$f \in Lip\alpha$, her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in [0,1]$ için;

$$|f(x) - B_n(f;x)| \leq L\left(\frac{x(1-x)}{n}\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

1987 yılında Lupas, Bernstein polinomlarının q-analogunu geliştirmiştir. 1967 yılında Durrmeyer operatörü aşağıdaki gibi tanımlanmıştır;
$f \in L_1[0,1]$ olmak üzere;

$$D_n(f;x) = (n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\int_0^1\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}f(t)dt$$

2008 yılında Gupta, Durrmeyer operatörünün q analogunu geliştirmiştir;
$f \in L_1[0,1]$ ,
$P_{n,k}(q;x) = q^{\frac{k(k-1)}{2}}x^k\prod_{j=0}^{n-k-1}(1-q^jx)$ olmak üzere;
$D_{n,q}(f;x) = [n+1]_q\sum_{k=0}^{n}q^{-k}P_{n,k}(q;x)\int_0^1 f(t)P_{n,k}(q;qt)d_qt$

2015 yılında Magdalena Lampa-Baczynska Bernstein-Durrmeyer operatörü için Voronovskaja tip teoremi göstermiştir. 2012 yılında Aydın İZGİ Szasz-Mirakyan ve Durrmeyer-Chlodowsky operatörlerinin yaklaşım özelliklerini incelemiştir.

$f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ , $f\in C[0,\infty)$ olmak üzere;

$p_{n,k}(x)=e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}$, $\varphi_{n,k}(t)=\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}$ ve

$\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$ , $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=0$;

$F_n(f;x)=\frac{n+1}{b_n}\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}\left(\frac{x}{b_n}\right)\int_0^{b_n}\varphi_{n,k}\left(\frac{t}{b_n}\right)f(t)dt,\quad 0\le x\le b_n.$

2016 yılında Asha Ram Gairola, Deepmala ve Lakshmi Narayan Mishra q-Durrmeyer operatörünün sonlu yinelemelerinin yaklaşım özelliklerini incelemiştir. Aral ve Gupta Lupaş-Durrmeyer operatörü için doğrudan tahminler vermiştir.

2017 yılında Trapti Neer ve P.N. Agrawal polya temel fonksiyonlarına dayalı Bernstein-Durrmeyer tip operatörlerle çalışmıştır.

$f\in L_B(0,1),\rho>0$ olmak üzere;

$U_n^{\rho}(f;x)=\sum_{k=0}^{n}F_{n,k}^{\rho}p_{n,k}^{\left(\frac{1}{n}\right)}(x)$ , $\mu_{n,k}^{\rho}=\frac{t^{k\rho-1}(1-t)^{(n-k)\rho-1}}{B(k\rho,(n-k)\rho)}$;

$$F_{n,k}^{\rho}=\begin{cases}\int_0^1 f(t)\mu_{n,k}^{\rho}dt, & 1\le k\le n-1\\ f(0), & k=0\\ f(1), & k=n.\end{cases}$$

Yine 2017 yılında Neha Malik, Serkan Aracı ve Man Singh Beniwal kesin parametrelere bağlı Durrmeyer tip operatörlerin yaklaşımını incelemiştir. 2018 yılında Tarul Garg, P.N Agrawal, Arun Kajla ters polya-eggenberger dağılımını içeren içeren Jain-Durrmeyer operatörleriyle çalışmıştır. Purshottarn N. Agrawal, Serkan Aracı, Martin Bohner ve Kuman Lipi Durrmeyer-Bezier tip operatörlerin yaklaşım derecelerini incelemiştir. Son olarak 2018 yılında Pooja Gupta ve Purshottam Narain Agrawal, Appell polinomlarını içeren Durrmeyer'in Jakimovski-Leviatan tip operatörleri üzerine çalışmıştır.

# 3.MATERYAL ve YÖNTEM

## 3.1.Materyal

Bu çalışma yapılırken, konuyla ilgili kitap, dergi ve makalelere, internet ortamından ve kütüphanelerden ulaşılmıştır. Benzer konular üzerinde çalışılmış yüksek lisans ve doktora tezleri ile yayınlar internet ortamından indirilmiştir.

## 3.2.Yöntem

Yerli ve yabancı kaynaklar detaylı olarak incelenmiş, işlem basamakları ve her bir teorem farklı makalelerde incelenmiş, buradan yola çıkarak bu tezde tanımlanan operatörle ile ilgili çalışmalar sürdürülmüştür. Çalışmaların sonucu Mapple yazılım programı aracılığı ile grafiklerle desteklenmiş ve nümerik değerler tablosu hazırlanmıştır.

# 4.ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu çalışmada, ilk defa simetrik bir aralık olan $(-\infty,+\infty)$ un kapalı ve sınırlı alt aralığı $[-b_n,b_n]$ üzerinde tanımlanmış Bernstein-Chlodowsky-Durrmeyer tipi operatör ele alınıp, operatörün lineer pozitif olduğu, düzgün yakınsadığı gösterilecektir. Merkezi momentleri hesaplanıp süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızı hesaplanacaktır ve Lipschitz şartını sağladığı gösterilecektir. Yapılan çalışmalar Mapple bilgisayar yazılım programı desteğiyle nümerik değerler ve grafiklerle desteklenecektir.

$\theta_{n,k}(t)=\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{t}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{t}{b_n}\right)^{n-k}$ olmak üzere;

$$D_n(f;x)=\frac{(n+1)}{2^{n+1}.b_n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\int_{-b_n}^{b_n}\theta_{n,k}(t)f(t)dt \tag{4.1}$$

$(b_n)$, $\lim_{n\to\infty}\frac{{b_n}^2}{n}=0$ şartlarını sağlayan bir reel sayı dizisi, $x\in[-b_n,b_n]$ dır. (4.2)

Öncelikle $D_n(f;x)$ operatörünün lineer ve pozitif bir operatör olduğunu gösterelim.

Her $f,g\in C[-b_n,b_n]$ ve her $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned}D_n\big((\alpha f+\beta g);x\big)&=\frac{(n+1)}{2^{n+1}.b_n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\int_{-b_n}^{b_n}\theta_{n,k}(t)(\alpha f+\beta g)(t)dt\\&=\frac{(n+1)}{2^{n+1}.b_n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\int_{-b_n}^{b_n}\theta_{n,k}(t)\alpha f(t)dt\\&\quad+\frac{(n+1)}{2^{n+1}.b_n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\int_{-b_n}^{b_n}\theta_{n,k}(t)\beta g(t)dt\\&=\alpha\frac{(n+1)}{2^{n+1}.b_n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\int_{-b_n}^{b_n}\theta_{n,k}(t)f(t)dt\\&\quad+\beta\frac{(n+1)}{2^{n+1}.b_n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\int_{-b_n}^{b_n}\theta_{n,k}(t)\,f(t)dtg(t)dt\\&=\alpha D_n(f;x)+\beta D_n(g;x)\end{aligned}$$

olduğundan $D_n(f;x)$ lineer bir operatördür.

Her $x\in[-b_n,b_n]$ için. Eğer,

$$f\geq 0\Longrightarrow\frac{(n+1)}{2^{n+1}.b_n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\int_{-b_n}^{b_n}\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{t}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{t}{b_n}\right)^{n-k}f(t)dt\geq 0$$

olduğundan $D_n(f;x) \geq 0$ dır ve $D_n(f;x)$ pozitif bir operatördür.

**Lemma 4.1.1**

**i)** $D_n(1;x) = 1$ (4.3)

**ii)** $D_n(t;x) = x + \frac{-2x}{n+2}$ (4.4)

**iii)** $D_n(t^2;x) = x^2 + \frac{-6nx^2-6x^2+2{b_n}^2+2{b_n}^2 n}{n^2+5n+6}$ (4.5)

**iv)** $D_n(t^3;x) = x^3 + \frac{-12n^2x^3-24nx^3-24x^3+6{b_n}^2n^2x+6{b_n}^2nx}{n^3+9n^2+26n+24}$ (4.6)

**v)** $D_n(t^4;x) = x^4 + \frac{-20n^3x^4-60n^2x^4-160nx^4-120x^4+12n^2{b_n}^4+36n{b_n}^4+12n^3{b_n}^2x^2-12n{b_n}^2x^2+24{b_n}^4}{n^4+14n^3+71n^2+154n+120}$ (4.7)

## İspat

**i)**

$$D_n(1;x) = \frac{(n+1)}{2^{n+1}.b_n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\int_{-b_n}^{b_n}\theta_{n,k}(t)\,dt$$

$$= \frac{(n+1)}{2^{n+1}.b_n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}2b_n\binom{n}{k}\beta(k+1,n-k+1)$$

$$= \frac{(n+1)}{2^{n+1}.b_n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}2b_n\frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{k!(n-k)!}{(n+1)n!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}2b_n\frac{(n+1)}{2^n.2.b_n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{k!(n-k)!}{(n+1)n!}$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{2^n}2^n$$

$$= 1.$$

**ii)**

$$D_n(t;x) = \frac{(n+1)}{2^{n+1}.b_n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\int_{-b_n}^{b_n}\theta_{n,k}(t)\,tdt$$

$$= \frac{(n+1)}{2^n.b_n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\left(2\beta(k+2,n-k+1)\right)$$

$$+\frac{(n+1)}{2^n.b_n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\left(-\beta(k+1,n-k+1)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{(n+1)}{2^n.b_n}\frac{n!}{(n-k)!k!}2\frac{(k+1)k!(n-k)!}{(n+2)(n+1)n!}-\frac{(n+1)}{2^n.b_n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{k!(n-k)!}{(n+1)n!}\right)$$

$$= \frac{b_n}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{2(k+1)}{n+2}-1\right)$$

$$= \frac{b_n}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{2k-n}{n+2}\right)$$

$$= \frac{2b_n}{2^n(n+2)} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k \left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} - \frac{nb_n}{2^n(n+2)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{2b_n n}{2^n(n+2)} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} - \frac{nb_n}{(n+2)}$$

$$= \frac{2b_n n}{2^n(n+2)} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(1+\frac{x}{b_n}\right)^{k+1} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-1-k} - \frac{nb_n}{(n+2)}$$

$$= \frac{2b_n n}{2^n(n+2)} \left(1+\frac{x}{b_n}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-1-k} - \frac{nb_n}{(n+2)}$$

$$= \frac{2b_n n}{2^n(n+2)} \left(1+\frac{x}{b_n}\right) 2^{n-1} - \frac{nb_n}{(n+2)}$$

$$= \frac{2b_n n}{2^n(n+2)} \left(\frac{x+b_n}{b_n}\right) \frac{2^n}{2} - \frac{nb_n}{(n+2)}$$

$$= \frac{nx+b_n-n.b_n}{n+2}$$

$$= \frac{nx}{n+2}$$

$$= x + \frac{-2x}{n+2}.$$

**iii)**

$$D_n(t^2;x) = \frac{(n+1)}{2^{n+1}.b_n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \int_{-b_n}^{b_n} \theta_{n,k}(t)\, t^2 dt$$

$$= \frac{{b_n}^2(n+1)}{2^n} \frac{n!}{(n-k)!k!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$\times [4\beta(k+3, n-k+1) - 4\beta(k+2, n-k+1) + \beta(k+1, n-k+1)]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$\times \left[\frac{4{b_n}^2(n+1)n!}{2^n(n-k)!k!} \frac{(k+2)(k+1)k!(n-k)!}{(n+3)(n+2)(n+1)n!} - \frac{4{b_n}^2(n+1)n!}{2^n(n-k)!k!} \frac{(k+1)k!(n-k)!}{(n+2)(n+1)n!} + \frac{{b_n}^2(n+1)n!}{2^n(n-k)!k!} \frac{k!(n-k)!}{(n+1)n!}\right]$$

$$= \frac{4{b_n}^2}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \frac{k^2+3k+2}{(n+3)(n+2)}$$

$$- \frac{4{b_n}^2}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \frac{k+1}{(n+2)}$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \frac{{b_n}^2}{2^n}$$

$$= \frac{4{b_n}^2}{2^n(n+3)(n+2)} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^2 \left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$+ \frac{4{b_n}^2}{2^n(n+3)(n+2)} 3 \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k \left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$+ \frac{4{b_n}^2}{2^n(n+3)(n+2)} 2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$- \frac{4{b_n}^2}{2^n(n+2)} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k \left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$- \frac{4{b_n}^2}{2^n(n+2)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} + {b_n}^2$$

$$= \frac{4{b_n}^2}{2^n(n+3)(n+2)} n^2 \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2} \left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$+ \frac{4{b_n}^2}{2^n(n+3)(n+2)} \left(3n \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} \left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} + 2(2^n)\right)$$

$$-\frac{4{b_n}^2}{2^n(n+2)}n\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{k}{n}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}-\frac{4{b_n}^2}{2^n(n+2)}2^n+{b_n}^2$$

$$=\frac{4{b_n}^2}{2^n(n+3)(n+2)}n^2\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\frac{k}{n}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$+\frac{4{b_n}^2}{2^n(n+3)(n+2)}\left(3n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}+2(2^n)\right)$$

$$-\frac{4{b_n}^2}{2^n(n+2)}n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}-\frac{4{b_n}^2}{(n+2)}+{b_n}^2$$

$$=\frac{4{b_n}^2}{2^n(n+3)(n+2)}n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(k+1)\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^{k+1}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-1-k}$$

$$+\frac{4{b_n}^2}{2^n(n+3)(n+2)}\left(3n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^{k+1}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-1-k}+2(2^n)\right)$$

$$-\frac{4{b_n}^2}{2^n(n+2)}n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^{k+1}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-1-k}-\frac{4{b_n}^2}{(n+2)}+{b_n}^2$$

$$=\frac{4{b_n}^2}{2^n(n+3)(n+2)}n\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k}k\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^{k+1}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-1-k}$$

$$+\frac{4{b_n}^2}{2^n(n+3)(n+2)}n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^{k+1}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-1-k}$$

$$+\frac{4{b_n}^2}{2^n(n+3)(n+2)}\left(3n\left(1+\frac{x}{b_n}\right)2^{n-1}+2(2^n)\right)$$

$$-\frac{4{b_n}^2}{2^n(n+2)}n\left(1+\frac{x}{b_n}\right)2^{n-1}-\frac{4{b_n}^2}{(n+2)}+{b_n}^2$$

$$=\frac{4{b_n}^2}{2^n(n+3)(n+2)}n(n-1)\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{k}{n-1}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^{k+1}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-1-k}$$

$$+\frac{4{b_n}^2}{2^n(n+3)(n+2)}n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^{k+1}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-1-k}$$

$$+\frac{4{b_n}^2}{2^n(n+3)(n+2)}\left(3n\left(1+\frac{x}{b_n}\right)2^{n-1}+2(2^n)\right)$$

$$-\frac{2{b_n}^2n}{(n+2)}\frac{(b_n+x)}{b_n}-\frac{4{b_n}^2}{(n+2)}+{b_n}^2$$

$$=\frac{4{b_n}^2}{2^n(n+3)(n+2)}n(n-1)\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-2}{k-1}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^{k+1}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-1-k}$$

$$+\frac{4{b_n}^2}{2^n(n+3)(n+2)}\left(n\left(1+\frac{x}{b_n}\right)2^{n-1}+3n\left(1+\frac{x}{b_n}\right)2^{n-1}+2(2^n)\right)$$

$$-\frac{2{b_n}^2n}{(n+2)}\frac{(b_n+x)}{b_n}-\frac{4{b_n}^2}{(n+2)}+{b_n}^2$$

$$=\frac{4{b_n}^2}{2^n(n+3)(n+2)}n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^{k+2}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-2-k}$$

$$+\frac{4{b_n}^2}{2^n(n+3)(n+2)}\left(n\left(1+\frac{x}{b_n}\right)2^{n-1}+3n\left(1+\frac{x}{b_n}\right)2^{n-1}+2(2^n)\right)$$

$$-\frac{2{b_n}^2n}{(n+2)}\frac{(b_n+x)}{b_n}-\frac{4{b_n}^2}{(n+2)}+{b_n}^2$$

$$=\frac{4{b_n}^2}{2^n(n+3)(n+2)}\left(n(n-1)\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^2 2^{n-2}\right)$$

$$+\frac{4{b_n}^2}{2^n(n+3)(n+2)}\left(n\left(1+\frac{x}{b_n}\right)2^{n-1}\right)$$

$$+\frac{4{b_n}^2}{2^n(n+3)(n+2)}\left(3n\left(1+\frac{x}{b_n}\right)2^{n-1}+2(2^n)\right)$$
$$-\frac{2{b_n}^2 n}{(n+2)}\frac{(b_n+x)}{b_n}-\frac{4{b_n}^2}{(n+2)}+{b_n}^2$$
$$=\frac{4{b_n}^2}{2^n(n+3)(n+2)}n(n-1)\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^2 2^{n-2}$$
$$+\frac{4{b_n}^2}{2^n(n+3)(n+2)}4n\left(1+\frac{x}{b_n}\right)2^{n-1}$$
$$+\frac{4{b_n}^2}{2^n(n+3)(n+2)}2(2^n)$$
$$-\frac{2{b_n}^2 n}{(n+2)}\frac{(b_n+x)}{b_n}-\frac{4{b_n}^2}{(n+2)}+{b_n}^2$$
$$=\frac{{b_n}^2 n(n-1)}{(n+3)(n+2)}\frac{({b_n}^2+2b_n x+x^2)}{{b_n}^2}+\frac{8{b_n}^2 n}{(n+3)(n+2)}\frac{(b_n+x)}{b_n}+\frac{8{b_n}^2}{(n+3)(n+2)}-\frac{2{b_n}^2 n}{(n+2)}\frac{(b_n+x)}{b_n}-\frac{4{b_n}^2}{(n+2)}+{b_n}^2$$
$$=\frac{(n^2-n)({b_n}^2+2b_n x+x^2)}{(n+3)(n+2)}+\frac{8b_n n(b_n+x)}{(n+3)(n+2)}+\frac{8{b_n}^2}{(n+3)(n+2)}-\frac{2b_n n(b_n+x)}{(n+2)}-\frac{4{b_n}^2}{(n+2)}+{b_n}^2$$
$$=\frac{n^2{b_n}^2+2n^2 b_n x+n^2x^2-n{b_n}^2-2nb_n x-nx^2}{(n+3)(n+2)}+\frac{8{b_n}^2 n+8nb_n x+8{b_n}^2}{(n+3)(n+2)}$$
$$-\frac{(n+3)(2{b_n}^2 n+2b_n nx+4{b_n}^2}{(n+3)(n+2)}+\frac{(n^2+5n+6){b_n}^2}{(n+3)(n+2)}$$
$$=\frac{n^2x^2-nx^2+2{b_n}^2+2{b_n}^2 n}{n^2+5n+6}$$
$$=x^2+\frac{-6nx^2-6x^2+2{b_n}^2+2{b_n}^2 n}{n^2+5n+6}$$

**iv)**

$$D_n(t^3;x)=\frac{(n+1)}{2^{n+1}.b_n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\int_{-b_n}^{b_n}\theta_{n,k}(t)t^3dt$$
$$=\frac{(n+1){b_n}^3}{2^n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$
$$+\frac{(n+1){b_n}^3}{2^n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\left(8\beta(k+4,n-k+1)\right)$$
$$-\frac{(n+1){b_n}^3}{2^n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\left(12\beta(k+3,n-k+1)\right)$$
$$+\frac{(n+1){b_n}^3}{2^n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\left(6\beta(k+2,n-k+1)\right)$$
$$-\frac{(n+1){b_n}^3}{2^n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\left(\beta(k+1,n-k+1)\right)$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\frac{(n+1){b_n}^3}{2^n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{8(k+3)(k+2)(k+1)k!(n-k)!}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n!}$$
$$-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\frac{(n+1){b_n}^3}{2^n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{12(k+2)(k+1)k!(n-k)!}{(n+3)(n+2)(n+1)n!}$$
$$+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\frac{(n+1){b_n}^3}{2^n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{6(k+1)k!(n-k)!}{(n+2)(n+1)n!}$$
$$-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\frac{(n+1){b_n}^3}{2^n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{k!(n-k)!}{(n+1)n!}$$
$$=\frac{8{b_n}^3}{2^n(n+4)(n+3)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k+3)(k+2)(k+1)\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{12{b_n}^3}{2^n(n+3)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k+2)(k+1)\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\\
&+\frac{6{b_n}^3}{2^n(n+2)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k+1)\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\\
&-\frac{{b_n}^3}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\\
=&\frac{8{b_n}^3}{2^n(n+4)(n+3)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k^3+6k^2+11k+6)\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\\
&-\frac{12{b_n}^3}{2^n(n+3)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k^2+3k+2)\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\\
&+\frac{6{b_n}^3}{2^n(n+2)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k+1)\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\\
&-\frac{{b_n}^3}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\\
=&\frac{8{b_n}^3}{2^n(n+4)(n+3)(n+2)}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^3\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\\
&+\frac{8{b_n}^3}{2^n(n+4)(n+3)(n+2)}6\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^2\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\\
&+\frac{8{b_n}^3}{2^n(n+4)(n+3)(n+2)}11\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\\
&+\frac{8{b_n}^3}{2^n(n+4)(n+3)(n+2)}6\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\\
&-\frac{12{b_n}^3}{2^n(n+3)(n+2)}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^2\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\\
&-\frac{12{b_n}^3}{2^n(n+3)(n+2)}3\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\\
&-\frac{12{b_n}^3}{2^n(n+3)(n+2)}2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\\
&+\frac{6{b_n}^3}{2^n(n+2)}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\\
&+\frac{6{b_n}^3}{2^n(n+2)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}-\frac{{b_n}^3}{2^n}2^n\\
=&\frac{8{b_n}^3}{2^n(n+4)(n+3)(n+2)}n(n-1)(n-2)\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^3 2^{n-3}\\
&+\frac{8{b_n}^3}{2^n(n+4)(n+3)(n+2)}n(n-1)\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^2 2^{n-2}\\
&+\frac{8{b_n}^3}{2^n(n+4)(n+3)(n+2)}2n(n-1)\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^2 2^{n-2}\\
&+\frac{8{b_n}^3}{2^n(n+4)(n+3)(n+2)}n\left(1+\frac{x}{b_n}\right)2^{n-1}\\
&+\frac{8{b_n}^3}{2^n(n+4)(n+3)(n+2)}6n(n-1)\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^2 2^{n-2}\\
&+\frac{8{b_n}^3}{2^n(n+4)(n+3)(n+2)}6n\left(1+\frac{x}{b_n}\right)2^{n-1}\\
&+\frac{8{b_n}^3}{2^n(n+4)(n+3)(n+2)}\left(11n\left(1+\frac{x}{b_n}\right)2^{n-1}+6(2^n)\right)\\
&-\frac{12{b_n}^3}{2^n(n+3)(n+2)}n(n-1)\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^2 2^{n-2}
\end{aligned}
$$

$$-\frac{12{b_n}^3}{2^n(n+3)(n+2)}n\left(1+\frac{x}{b_n}\right)2^{n-1}$$
$$-\frac{12{b_n}^3}{2^n(n+3)(n+2)}\left(3n\left(1+\frac{x}{b_n}\right)2^{n-1}+2(2^n)\right)$$
$$+\frac{6{b_n}^3}{2^n(n+2)}\left(n\left(1+\frac{x}{b_n}\right)2^{n-1}+2^n\right)-{b_n}^3$$
$$=\frac{8{b_n}^3}{2^n(n+4)(n+3)(n+2)}\frac{n(n-1)(n-2)(b_n+x)^3}{{b_n}^3}\frac{2^n}{8}+\frac{8{b_n}^3}{2^n(n+4)(n+3)(n+2)}\frac{n(n-1)(b_n+x)^2}{{b_n}^2}\frac{2^n}{4}$$
$$+\frac{8{b_n}^3}{2^n(n+4)(n+3)(n+2)}\frac{2n(n-1)(b_n+x)^2}{{b_n}^2}\frac{2^n}{4}+\frac{8{b_n}^3}{2^n(n+4)(n+3)(n+2)}\frac{n(b_n+x)}{b_n}\frac{2^n}{2}$$
$$+\frac{8.6.{b_n}^3}{2^n(n+4)(n+3)(n+2)}\frac{n(n-1)(b_n+x)^2}{{b_n}^2}\frac{2^n}{4}+\frac{8.6.{b_n}^3}{2^n(n+4)(n+3)(n+2)}\frac{n(b_n+x)}{b_n}\frac{2^n}{2}$$
$$+\frac{11.8.{b_n}^3}{2^n(n+4)(n+3)(n+2)}\frac{n(b_n+x)}{b_n}\frac{2^n}{2}+\frac{6.8.{b_n}^3 2^n}{2^n(n+4)(n+3)(n+2)}$$
$$-\frac{12{b_n}^3}{2^n(n+3)(n+2)}\frac{n(n-1)(b_n+x)^2}{{b_n}^2}\frac{2^n}{4}-\frac{12{b_n}^3}{2^n(n+3)(n+2)}\frac{n(b_n+x)}{b_n}\frac{2^n}{2}$$
$$-\frac{3.12.{b_n}^3}{2^n(n+3)(n+2)}\frac{n(b_n+x)}{b_n}\frac{2^n}{2}-\frac{2.12{b_n}^3 2^n}{2^n(n+3)(n+2)}$$
$$+\frac{6{b_n}^3}{2^n(n+2)}\frac{n(b_n+x)}{b_n}\frac{2^n}{2}+\frac{6{b_n}^3 2^n}{2^n(n+2)}-{b_n}^3$$
$$=\frac{n(n-1)(n-2)(b_n+x)^3}{(n+4)(n+3)(n+2)}+\frac{18b_n n(n-1)(b_n+x)^2}{(n+4)(n+3)(n+2)}$$
$$+\frac{72{b_n}^2 n(b_n+x)}{(n+4)(n+3)(n+2)}+\frac{48{b_n}^3}{(n+4)(n+3)(n+2)}$$
$$-\frac{3b_n n(n-1)(b_n+x)^2(n+4)}{(n+4)(n+3)(n+2)}-\frac{24{b_n}^2 n(b_n+x)(n+4)}{(n+4)(n+3)(n+2)}$$
$$-\frac{24{b_n}^3(n+4)}{(n+3)(n+2)(n+4)}+\frac{3{b_n}^2 n(b_n+x)(n+4)(n+3)}{(n+4)(n+3)(n+2)}$$
$$+\frac{6{b_n}^3(n+3)(n+4)}{(n+3)(n+4)(n+2)}-\frac{{b_n}^3(\mathrm{n}+4)(\mathrm{n}+3)(\mathrm{n}+2)}{(n+4)(n+3)(n+2)}$$
$$=\frac{n(n-1)(n-2)(b_n+x)^3}{(n+4)(n+3)(n+2)}+\frac{3b_n n(n-1)(b_n+x)^2}{(n+4)(n+3)(n+2)}[6-(n-4)]$$
$$+\frac{3{b_n}^2 n(b_n+x)}{(n+4)(n+3)(n+2)}[24-8(n+4)+(n+3)(n+4)]$$
$$+\frac{{b_n}^3}{(n+4)(n+3)(n+2)}[48-24(n+4)+6(n+3)(n+4)-(n+4)(n+3)(n+2)]$$
$$=\frac{1}{(n+4)(n+3)(n+2)}[n(n-1)(n-2)(b_n+x)^3]$$
$$+\frac{1}{(n+4)(n+3)(n+2)}[3b_n n(n-1)(b_n+x)^2(2-n)]$$
$$+\frac{1}{(n+4)(n+3)(n+2)}\left[3{b_n}^2 n(b_n+x)(n^2-n+4)\right]$$
$$+\frac{1}{(n+4)(n+3)(n+2)}\left[{b_n}^3(-n^3-n^2-8n)\right]$$
$$=\frac{6{b_n}^2 n^2 x+6{b_n}^2 nx+n^3x^3-3n^2x^3+2nx^3}{n^3+9n^2+26n+24}$$
$$=x^3+\frac{-12n^2x^3-24nx^3-24x^3+6{b_n}^2 n^2 x+6{b_n}^2 nx}{n^3+9n^2+26n+24}.$$

**v)**

$$D_n(t^4;x)=\frac{(n+1)}{2^{n+1}.b_n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\int_{-b_n}^{b_n}\theta_{n,k}(t)t^4dt$$

$$= \frac{(n+1){b_n}^4}{2^{n+1}.b_n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\left(16\beta(k+5,n-k+1)\right)$$
$$-\frac{(n+1){b_n}^4}{2^{n+1}.b_n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\left(32\beta(k+4,n-k+1)\right)$$
$$+\frac{(n+1){b_n}^4}{2^{n+1}.b_n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\left(24\beta(k+3,n-k+1)\right)$$
$$-\frac{(n+1){b_n}^4}{2^{n+1}.b_n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\left(8\beta(k+2,n-k+1)\right)$$
$$+\frac{(n+1){b_n}^4}{2^{n+1}.b_n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\left(\beta(k+1,n-k+1)\right)$$

$$= \frac{16(n+1){b_n}^4n!}{2^n(n-k)!k!}\frac{(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)k!(n-k)!}{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n!}$$
$$-\frac{32(n+1){b_n}^4n!}{2^n(n-k)!k!}\frac{(k+3)(k+2)(k+1)k!(n-k)!}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n!}$$
$$+\frac{24(n+1){b_n}^4n!}{2^n(n-k)!k!}\frac{(k+2)(k+1)k!(n-k)!}{(n+3)(n+2)(n+1)n!}$$
$$-\frac{8(n+1){b_n}^4n!}{2^n(n-k)!k!}\frac{(k+1)k!(n-k)!}{(n+2)(n+1)n!}$$
$$+\frac{(n+1){b_n}^4n!}{2^n(n-k)!k!}\frac{k!(n-k)!}{(n+1)n!}$$

$$= \frac{16{b_n}^4}{2^n(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}[k^4+10k^3+35k^2+50k+24]$$
$$-\frac{32{b_n}^4}{2^n(n+4)(n+3)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}[k^3+6k^2+11k+6]$$
$$+\frac{24{b_n}^4}{2^n(n+3)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}[k^2+3k+2]$$
$$-\frac{8{b_n}^4}{2^n(n+2)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}(k+1)$$
$$+\frac{{b_n}^4}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{16{b_n}^4}{2^n(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)}\left((n-3)(n-2)(n-1)n(1+\frac{x}{b_n})^4 2^{n-4}\right)$$
$$+\frac{16{b_n}^4}{2^n(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)}\left((n-2)(n-1)n(1+\frac{x}{b_n})^3 2^{n-3}\right)$$
$$+\frac{16{b_n}^4}{2^n(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)}\left(2(n-2)(n-1)n(1+\frac{x}{b_n})^3 2^{n-3}\right)$$
$$+\frac{16{b_n}^4}{2^n(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)}\left((n-1)n(1+\frac{x}{b_n})^2 2^{n-2}\right)$$
$$+\frac{16{b_n}^4}{2^n(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)}\left(3(n-2)(n-1)n(1+\frac{x}{b_n})^3 2^{n-3}\right)$$
$$+\frac{16{b_n}^4}{2^n(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)}\left(3(n-1)n(1+\frac{x}{b_n})^2 2^{n-2}\right)$$
$$+\frac{16{b_n}^4}{2^n(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)}\left(3(n-1)n(1+\frac{x}{b_n})^2 2^{n-2}\right)$$
$$+\frac{16{b_n}^4}{2^n(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)}\left(n\left(1+\frac{x}{b_n}\right)2^{n-1}\right)$$
$$+\frac{16{b_n}^4}{2^n(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)}\left(10(n-2)(n-1)n(1+\frac{x}{b_n})^3 2^{n-3}\right)$$

$$+\frac{16{b_n}^4}{2^n(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)}\left(10(n-1)n(1+\frac{x}{b_n})^2 2^{n-2}\right)$$
$$+\frac{16{b_n}^4}{2^n(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)}\left(20(n-1)n(1+\frac{x}{b_n})^2 2^{n-2}\right)$$
$$+\frac{16{b_n}^4}{2^n(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)}\left(10n\left(1+\frac{x}{b_n}\right)2^{n-1}\right)$$
$$+\frac{16{b_n}^4}{2^n(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)}\left(35(n-1)n(1+\frac{x}{b_n})^2 2^{n-2}\right)$$
$$+\frac{16{b_n}^4}{2^n(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)}\left(35n\left(1+\frac{x}{b_n}\right)2^{n-1}\right)$$
$$+\frac{16{b_n}^4}{2^n(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)}\left(50n\left(1+\frac{x}{b_n}\right)2^{n-1}+24.2^n\right)$$
$$-\frac{32{b_n}^4}{2^n(n+4)(n+3)(n+2)}\left((n-2)(n-1)n(1+\frac{x}{b_n})^3 2^{n-3}\right)$$
$$-\frac{32{b_n}^4}{2^n(n+4)(n+3)(n+2)}\left((n-1)n(1+\frac{x}{b_n})^2 2^{n-2}\right)$$
$$-\frac{32{b_n}^4}{2^n(n+4)(n+3)(n+2)}\left(2(n-1)n(1+\frac{x}{b_n})^2 2^{n-2}\right)$$
$$-\frac{32{b_n}^4}{2^n(n+4)(n+3)(n+2)}\left(n\left(1+\frac{x}{b_n}\right)2^{n-1}\right)$$
$$-\frac{32{b_n}^4}{2^n(n+4)(n+3)(n+2)}\left(6(n-1)n(1+\frac{x}{b_n})^2 2^{n-2}\right)$$
$$-\frac{32{b_n}^4}{2^n(n+4)(n+3)(n+2)}\left(6n\left(1+\frac{x}{b_n}\right)2^{n-1}\right)$$
$$-\frac{32{b_n}^4}{2^n(n+4)(n+3)(n+2)}\left(11n\left(1+\frac{x}{b_n}\right)2^{n-1}+6(2^n)\right)$$
$$+\frac{24{b_n}^4}{2^n(n+3)(n+2)}\left((n-1)n(1+\frac{x}{b_n})^2 2^{n-2}\right)$$
$$+\frac{24{b_n}^4}{2^n(n+3)(n+2)}\left(n\left(1+\frac{x}{b_n}\right)2^{n-1}+3n\left(1+\frac{x}{b_n}\right)2^{n-1}+2(2^n)\right)$$
$$-\frac{8{b_n}^4}{2^n(n+2)}\left(n\left(1+\frac{x}{b_n}\right)2^{n-1}+2^n\right)$$
$$+\frac{{b_n}^4}{2^n}.2^n$$
$$=\frac{16{b_n}^4}{2^n(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)}\left((n-3)(n-2)(n-1)n(1+\frac{x}{b_n})^4 2^{n-4}\right)$$
$$+\frac{16{b_n}^4}{2^n(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)}\left(16(n-2)(n-1)n(1+\frac{x}{b_n})^3 2^{n-3}\right)$$
$$+\frac{16{b_n}^4}{2^n(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)}\left(72(n-1)n(1+\frac{x}{b_n})^2 2^{n-2}\right)$$
$$+\frac{16{b_n}^4}{2^n(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)}\left(96n\left(1+\frac{x}{b_n}\right)2^{n-1}+24(2^n)\right)$$
$$-\frac{32{b_n}^4}{2^n(n+4)(n+3)(n+2)}\left((n-2)(n-1)n(1+\frac{x}{b_n})^3 2^{n-3}\right)$$
$$-\frac{32{b_n}^4}{2^n(n+4)(n+3)(n+2)}\left(9(n-1)n(1+\frac{x}{b_n})^2 2^{n-2}\right)$$

$$-\frac{32{b_n}^4}{2^n(n+4)(n+3)(n+2)}\left(18n\left(1+\frac{x}{b_n}\right)2^{n-1}+6(2^n)\right)$$
$$+\frac{24{b_n}^4}{2^n(n+3)(n+2)}\left((n-1)n(1+\frac{x}{b_n})^2 2^{n-2}\right)$$
$$+\frac{24{b_n}^4}{2^n(n+3)(n+2)}\left(4n\left(1+\frac{x}{b_n}\right)2^{n-1}+2(2^n)\right)$$
$$-\frac{8{b_n}^4}{2^n(n+2)}\left(n\left(1+\frac{x}{b_n}\right)2^{n-1}+2^n\right)$$
$$+{b_n}^4$$
$$=\frac{12n^2{b_n}^4+36n{b_n}^4+n^4x^4+12n^3{b_n}^2x^2-12n{b_n}^2x^2-6n^3x^4+11n^2x^4-6nx^4+24{b_n}^4}{n^4+14n^3+71n^2+154n+120}$$
$$=x^4+\frac{-20n^3x^4-60n^2x^4-160nx^4-120x^4+12n^2{b_n}^4+36n{b_n}^4+12n^3{b_n}^2x^2-12n{b_n}^2x^2+24{b_n}^4}{n^4+14n^3+71n^2+154n+120}$$

**Teorem 4.1.1.**

$D_n(f;x)$ operatörü $[-b_n,b_n]$ aralığında sürekli ve tüm reel eksende sınırlı olan $f$ fonksiyonuna aynı aralıkta düzgün yakınsaktır yani,

$$\lim_{n\to\infty} \| D_n f - f \|_{C[-b_n,b_n]} = 0$$

**İspat**

Teorem 1.1.2. den;

i. $D_n(1;x) \rightrightarrows 1 \qquad n\to\infty$

ii. $D_n(t;x) \rightrightarrows x \qquad n\to\infty$

iii. $D_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2 \qquad n\to\infty$

olduğunu gösterirsek $D_n(f;x)$ operatörünün $f$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğunu göstermiş oluruz.

(4.3) ten $\| D_n\mathbf{1} - 1 \|_{C[-b_n,b_n]} = 0$ olduğu görülür.

O halde $D_n(1;x) \rightrightarrows 1$ gösterilmiş olur.

(4.4) ten;

$$\| D_n\boldsymbol{t} - x \|_{C[-b_n,b_n]} = \max_{-b_n\le x\le b_n}\left|x+\frac{-2x}{n+2}-x\right|$$
$$=\frac{2b_n}{n+2}$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2b_n}{n+2}=0$$

$\lim_{n\to\infty} \| D_n\boldsymbol{t} - x \|_{C[-b_n,b_n]} = 0$ olduğu görülür.

O halde $D_n(t;x) \rightrightarrows x$ gösterilmiş olur.

(4.5) ten;

$\left|\frac{-6(n+1)x^2+2(n+1){b_n}^2}{n^2+5n+6}\right| \leq \left|\frac{-6(n+1)x^2}{n^2+5n+6}\right| + \left|\frac{2(n+1){b_n}^2}{n^2+5n+6}\right|$ olduğundan;

$$\| D_n t^2 - x^2 \|_{C[-b_n,b_n]} = \max_{-b_n \leq x \leq b_n} \left| x^2 + \frac{-6nx^2-6x^2+2{b_n}^2+2{b_n}^2 n}{n^2+5n+6} - x^2 \right|$$

$$\leq \frac{6(n+1){b_n}^2}{n^2+5n+6} + \frac{2(n+1){b_n}^2}{n^2+5n+6}$$

$$= \frac{8(n+1){b_n}^2}{n^2+5n+6}$$

$$= \frac{8{b_n}^2}{(n+5)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8{b_n}^2}{(n+5)} = 0,$$

$\lim_{n\to\infty} \| D_n t^2 - x^2 \|_{C[-b_n,b_n]} = 0$ olduğu görülür.

O halde $D_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2$ gösterilmiş olur.

Korovkin teoreminden dolayı ;

$$\lim_{n\to\infty} \| D_n f - f \|_{C[-b_n,b_n]} = 0$$

gösterilmiş olur.

**Teorem 4.1.2.**

$D_n(f;x)$ operatörü $[-b_n, b_n]$ aralığında sürekli ve tüm reel eksende sınırlı olan $f$ fonksiyonuna aynı aralıkta düzgün yakınsaktır. Yani,

$$\lim_{n\to\infty} \| D_n f - f \|_{C[-b_n,b_n]} = 0$$

**İspat**

Bu teoremde $D_n(f;x)$ operatörünün $f$ fonksiyonuna düzgün yakınsaklığının ispatı için $f$ fonksiyonunun süreklilik ve sınırlılık tanımından ve Korovkin Teoremi 1.1.2 den faydalanacağız.

$f$ sürekli olduğundan her $\varepsilon > 0$, her $x, t \in [-b_n, b_n]$ için $|t-x| < \delta$ iken $|f(t)-f(x)| < \varepsilon$ dır. $f$ sınırlı olduğundan her $x \in \mathbb{R}$ için $|f(x)| \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ vardır.

$|f(t)-f(x)| \leq |f(t)| + |f(x)| \leq 2M$ olduğundan $|f(t)-f(x)| \leq 2M\frac{(t-x)^2}{\delta^2} + \varepsilon$ dir.

$$|D_n(f;x) - f(x)| = |D_n(f(t);x) - f(x)D_n(1;x) + f(x)D_n(1;x) - f(x)|$$

$$= |D_n(f(t);x) - D_n(f(x);x) + f(x)(D_n(1;x)-1)|$$

$$= |D_n(f(t)-f(x));x) + f(x)(D_n(1;x)-1)|$$

$$\leq |D_n(f(t)-f(x));x)| + |f(x)(D_n(1;x)-1)|$$

$$\leq D_n(|f(t)-f(x)|);x) + |f(x)||(D_n(1;x)-1)|$$

$$\leq D_n(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2) + M|(D_n(1;x)-1)|$$
$$= D_n(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t^2-2xt+x^2);x) + M|(D_n(1;x)-1)|$$
$$\leq \varepsilon.D_n(1;x) + \frac{2M}{\delta^2}[D_n(t^2;x) - 2xD_n(t;x) + x^2D_n(1;x)](t^2-2xt+x^2);x$$
$$+M|(D_n(1;x)-1)|$$
$$\leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}0$$

**Lemma 4.1.2.** $\aleph_{n,m}(x) = D_n((t-x)^m;x)$ $m = 0,1,2 \ldots$ olmak üzere;

**i.** $D_n((t-x)^0;x) = 1$

**ii.** $D_n\big((t-x);x\big) = -\frac{2x}{n+2}$

**iii.** $D_n((t-x)^2;x) = \frac{-2nx^2+6x^2+2{b_n}^2+2{b_n}^2n}{n^2+5n+6}$

**iv.** $D_n((t-x)^3;x) = \frac{24nx^3-24x^3-144{b_n}^2x-54{b_n}^2nx}{n^3+9n^2+26n+24}$

**v.** $D_n((t-x)^4;x) = \frac{12n^2x^4-352nx^4+120x^4+24{b_n}^4+240{b_n}^2x^2-24{b_n}^2n^2x^2+216{b_n}^2nx^2+12n^2{b_n}^4+36n{b_n}^4}{n^4+14n^3+71n^2+154n+120}$.

## İspat

**i)**

$$D_n((t-x)^0;x) = D_n(1;x)$$
$$= 1$$
$$= \aleph_{n.0}(x).$$

**ii)**

$$D_n\big((t-x);x\big) = D_n(t;x) + D_n(-x;x)$$
$$= D_n(t;x) - xD_n(1;x)$$
$$= x - \frac{2x}{n+2} - x$$
$$= -\frac{2x}{n+2}$$
$$= \aleph_{n.1}(x).$$

**iii)**

$$D_n((t-x)^2;x) = D_n((t^2-2xt+x^2);x)$$
$$= D_n(t^2;x) - 2xD_n(t;x) + x^2D_n(1;x)$$
$$= x^2 + \frac{-6nx^2-6x^2+2{b_n}^2+2{b_n}^2n}{n^2+5n+6} - 2x\left(x - \frac{2x}{n+2}\right) + x^2$$
$$= \frac{-2nx^2+6x^2+2{b_n}^2+2{b_n}^2n}{n^2+5n+6}$$

$= \aleph_{n.2}(x).$

**iv)**

$$D_n((t-x)^3;x) = D_n((t^3 - 3t^2x + 3tx^2 - x^3);x)$$

$$= D_n(t^3;x) - 3xD_n(t^2;x) + 3x^2D_n(t;x) - x^3D_n(1;x)$$

$$= x^3 + \frac{-12n^2x^3-24nx^3-24x^3+6{b_n}^2n^2x+6{b_n}^2nx}{n^3+9n^2+26n+24} - 3x\left(x^2 + \frac{-6nx^2-6x^2+2{b_n}^2+2{b_n}^2n}{n^2+5n+6}\right)$$
$$+3x^2\left(x - \frac{2x}{n+2}\right) - x^3$$

$$= \frac{-12n^2x^3-24nx^3-24x^3+6{b_n}^2n^2x+6{b_n}^2nx}{n^3+9n^2+26n+24} - 3x\left(\frac{-6nx^2-6x^2+2{b_n}^2+2{b_n}^2n}{n^2+5n+6}\right)$$
$$+3x^2\left(-\frac{2x}{n+2}\right) - x^3$$

$$= \frac{1}{n^3+9n^2+26n+24}\left(12n^2x^3 - 24nx^3 - 24x^3 + 6{b_n}^2n^2x + 6{b_n}^2nx\right)$$
$$+\frac{1}{n^3+9n^2+26n+24}\left(-3x(n+4)\left(-6nx^2 - 6x^2 + 2{b_n}^2 + 2{b_n}^2n\right)+\right)$$
$$+\frac{1}{n^3+9n^2+26n+24}\left(3x^2(n+4)(n+3)(-2x)\right)$$

$$= \frac{24nx^3-24x^3-144{b_n}^2x-54{b_n}^2nx}{n^3+9n^2+26n+24}$$

$$= \aleph_{n.3}(x).$$

**v)**

$$D_n((t-x)^4;x) = D_n((t^4 - 4t^3x + 6t^2x^2 - 4tx^3 + x^4);x)$$

$$= D_n(t^4;x) - 4xD_n(t^3;x) + 6x^2D_n(t^2;x) - 4x^3D_n(t;x) + x^4D_n(1;x)$$

$$= x^4 + \frac{-20n^3x^4-60n^2x^4-160nx^4-120x^4+12n^2{b_n}^4+36n{b_n}^4+12n^3{b_n}^2x^2-12n{b_n}^2x^2+24{b_n}^4}{n^4+14n^3+71n^2+154n+120}$$
$$-4x\left(x^3 + \frac{-12n^2x^3-24nx^3-24x^3+6{b_n}^2n^2x+6{b_n}^2nx}{n^3+9n^2+26n+24}\right)$$
$$+6x^2\left(x^2 + \frac{-6nx^2-6x^2+2{b_n}^2+2{b_n}^2n}{n^2+5n+6}\right)$$
$$-4x^3\left(x - \frac{2x}{n+2}\right) + x^4$$

$$= \frac{1}{n^4+14n^3+71n^2+154n+120}(-20n^3x^4 - 60n^2x^4 - 160nx^4 - 120x^4)$$
$$+\frac{1}{n^4+14n^3+71n^2+154n+120}(12n^2{b_n}^4 + 36n{b_n}^4 + 12n^3{b_n}^2x^2 - 12n{b_n}^2x^2 + 24{b_n}^4)$$
$$-\frac{1}{n^4+14n^3+71n^2+154n+120}(4x\left(-12n^2x^3 - 24nx^3 - 24x^3 + 6{b_n}^2n^2x + 6{b_n}^2nx\right)(n+5))$$
$$+\frac{1}{n^4+14n^3+71n^2+154n+120}(6x^2\left(-6nx^2 - 6x^2 + 2{b_n}^2 + 2{b_n}^2n\right)(n+5)(n+4))$$
$$-\frac{1}{n^4+14n^3+71n^2+154n+120}(4x^3(-2x)(n+5)(n+4)(n+3))$$

$$= \frac{12n^2x^4 - 352nx^4 + 120x^4 + 24{b_n}^4 + 240{b_n}^2x^2 - 24{b_n}^2n^2x^2 + 216{b_n}^2nx^2 + 12n^2{b_n}^4 + 36n{b_n}^4}{n^4 + 14n^3 + 71n^2 + 154n + 120}$$

$$= \aleph_{n.4}(x).$$

**Teorem 4.1.3.**

$f \in Lip_\alpha$ olmak üzere;

$$\| D_n f - f \|_{C[-b_n,b_n]} = M\left(\frac{3{b_n}^2}{n+2}\right)^{\alpha/2}$$

**İspat**

$D_n(1;x) = 1$ olduğundan ve operatörün lineerliğinden;

$$|D_n(f;x) - f(x)| = |D_n(f;x) - f(x)D_n(1;x)|$$
$$= |D_n(f;x) - D_n(f(x);x)|$$
$$\leq (D_n|f(t) - f(x)|;x)$$

$f$ fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağladığından;

$|f(t) - f(x)| \leq M|t-x|^\alpha$ dır.

O halde;

$|D_n(f;x) - f(x)| \leq (D_n(M|t-x|^\alpha);x)$ dır.

Hölder eşitsizliğinden;

$$\leq D_n(|t-x|^2;x)^{\alpha/2}.D_n(1;x)^{\alpha/2}$$
$$= D_n(|t-x|^2;x)^{\alpha/2}$$
$$= M\left(\frac{-2nx^2+6x^2+2{b_n}^2+2{b_n}^2n}{n^2+5n+6}\right)^{\alpha/2}$$
$$\leq M\left(\frac{6x^2+2{b_n}^2+2{b_n}^2n}{n^2+5n+6}\right)^{\alpha/2}$$
$$\leq \max_{-b_n\leq x\leq b_n} M\left(\frac{6x^2+2{b_n}^2+2{b_n}^2n}{n^2+5n+6}\right)^{\alpha/2} = M\left(\frac{8{b_n}^2+2{b_n}^2n}{n^2+5n+6}\right)^{\alpha/2}$$
$$\leq M\left(\frac{2{b_n}^2}{n+2}.\frac{3}{2}\right)^{\alpha/2}$$
$$= M\left(\frac{3{b_n}^2}{n+2}\right)^{\alpha/2}$$

**Teorem 4.1.4.**

$f \in C[-b_n, b_n]$ olsun. Bu takdirde yeterince büyük n'ler için;

$|D_n(f;x) - f(x)| \leq (1+\sqrt{3})W\left(f;\frac{b_n}{\sqrt{n}}\right)$ eşitsizliği sağlanır.

**İspat**

$$|D_n(f;x)-f(x)| \le |D_n(f;x)-f(x)D_n(1;x)|$$
$$= |D_n(f;x)-D_n(f(x);x)|$$
$$\le |D_n((f(t)-f(x));x)|$$
$$\le D_n(|f(t)-f(x)|;x)$$

$|f(t)-f(x)| \le \left(\frac{|t-x|}{\delta}+1\right) W(f;\delta)$ süreklilik modülünün özelliğini kullanırsak;

$$|D_n(f;x)-f(x)| \le D_n\left(\left(\frac{|t-x|}{\delta}+1\right) W(f;\delta);x\right)$$
$$= W(f;\delta)D_n(1;x)+\frac{W(f;\delta)}{\delta}D_n(|t-x|;x)$$
$$= W(f;\delta)(D_n(1;x)+\frac{1}{\delta}D_n(|t-x|;x))$$
$$= W(f;\delta)(1+\frac{1}{\delta}D_n(|t-x|;x))$$

elde edilir.

Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden;

$$D_n(|t-x|;x) \le \sqrt{D_n((t-x)^2;x}$$
$$\le \sqrt{\frac{6x^2}{n^2+5n+6}+\frac{2{b_n}^2(n+1)}{n^2+5n+6}}\ ,\ (n>3)$$
$$\le \sqrt{\frac{x^2+2{b_n}^2}{n+2}}$$

olur.

$\max\limits_{-b_n\le x\le b_n}\left(\frac{x^2+2{b_n}^2}{n+2}\right)=\frac{3{b_n}^2}{n+2}$ olduğundan;

$$\le \sqrt{\frac{3{b_n}^2}{n+2}}$$
$$\le \sqrt{\frac{3{b_n}^2}{n}}$$

O halde;

$$|D_n(f;x)-f(x)| \le W(f;\delta)(1+\frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{3{b_n}^2}{n}})$$
$$= W(f;\delta)(1+\frac{1}{\delta}\frac{\sqrt{3}b_n}{\sqrt{n}})$$

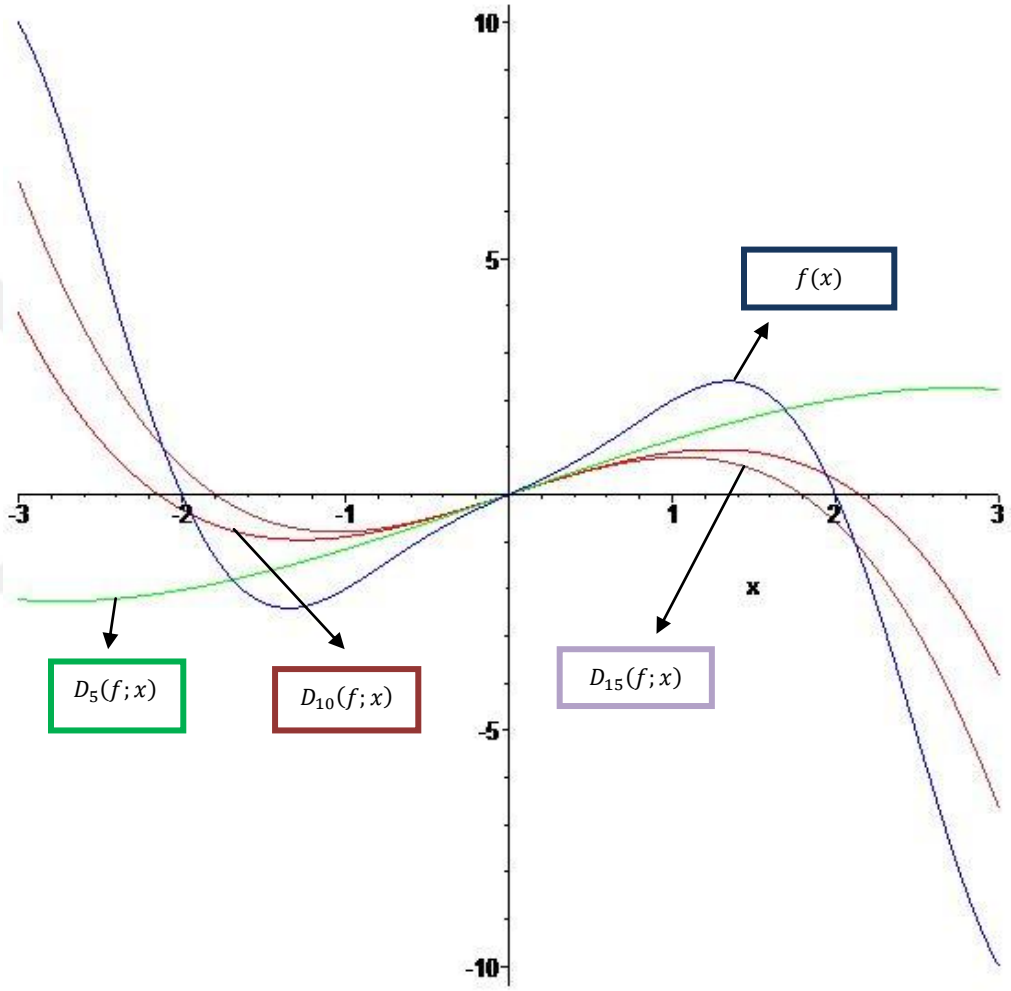
dır.

$\delta=\frac{b_n}{\sqrt{n}}$ seçilirse;

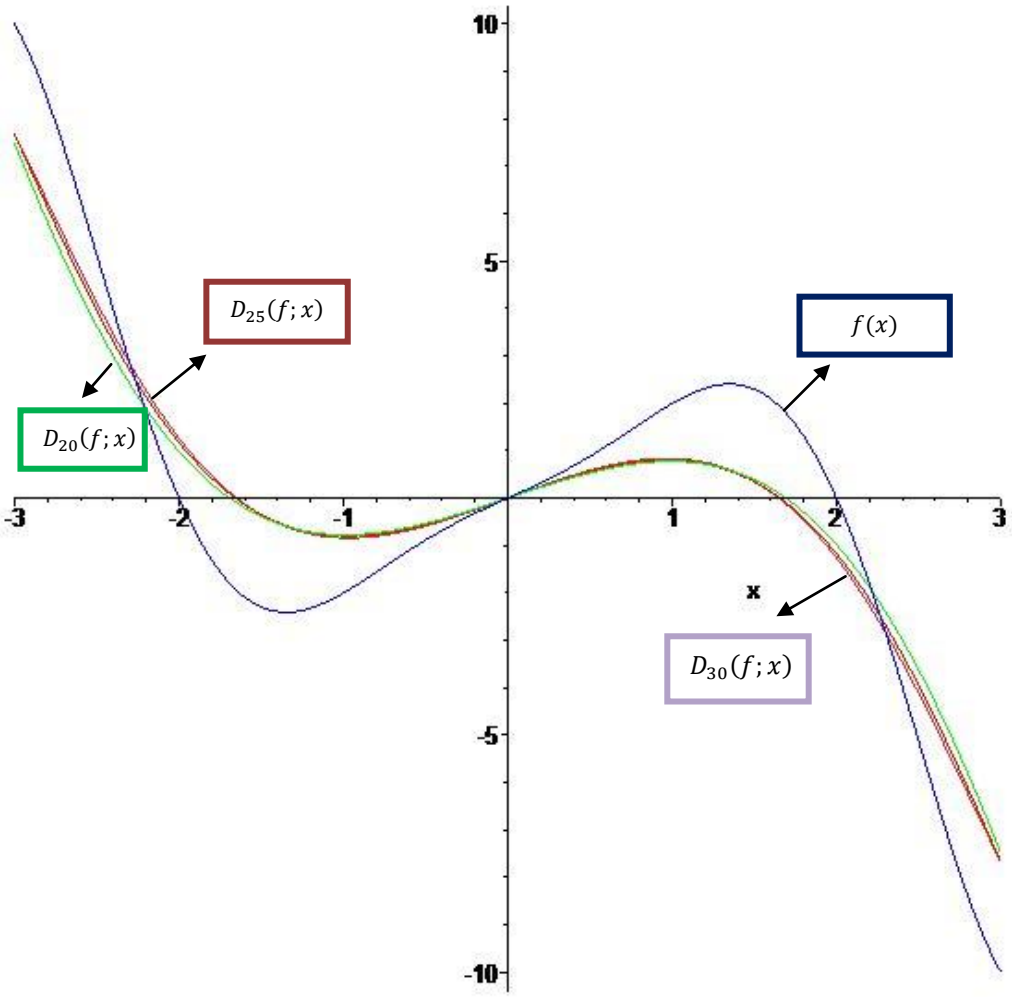
$$= (1+\sqrt{3})\, W\left(f;\frac{b_n}{\sqrt{n}}\right)$$

bulunur.

Şimdi Mapple programı ile çizdiğimiz $D_n(f;x)$ operatörünün $f(x) = (1+x^2)\sin\left(\frac{1}{2}x\pi\right)$ fonksiyonuna yaklaşımını gösteren, grafiği gösterelim. $D_n(f;x)$ operatörünün $f(x) = (1+x^2)\sin\left(\frac{1}{2}x\pi\right)$ fonksiyonuna yaklaşımı Şekil 4.1 ve Şekil 4.2 ten görüleceği üzere, n değeri arttıkça operatör fonksiyona daha iyi yaklaşacaktır.




Şekil 4.1. $D_n(f;x)$'in n=5, n=10 ve n=15 için $f(x) = (1+x^2)\sin\left(\frac{1}{2}x\pi\right)$ şeklinde verilen sürekli bir $f$ fonksiyonuna yaklaşımının karşılaştırılması




Şekil 4.2. $D_n(f;x)$'in n=20, n=25 ve n=30 için $f(x) = (1+x^2)\sin\left(\frac{1}{2}x\pi\right)$ şeklinde verilen sürekli bir $f$ fonksiyonuna yaklaşımının karşılaştırılması

Son olarak $D_n(f;x)$ operatörünün $f(x) = (1+x^2)\sin\left(\frac{1}{2}x\pi\right)$ fonksiyonuna yaklaşımının nümerik tablosunu gösterelim.

Çizelge 4.1. $D_n(f;x)$'in $f$ fonksiyonuna yaklaşımının n=5, n=10, n=15 ve n=20 için karşılaştırılması

| n / x | n=5 | n=10 | n=15 | n=20 |
|---|---|---|---|---|
| -2.9 | 11.54104814 | 6.105679997 | 3.518073709 | 2.654989579 |
| -2.5 | 7.358935341 | 3.978846905 | 2.229029235 | 1.504098681 |
| -1.9 | 1.236468965 | 0.2243608048 | 0.9983369590 | 1.331887322 |
| -1.5 | 0.650998433 | 1.395423259 | 1.768258152 | 1.903406038 |
| -0.9 | 0.736933641 | 0.9449134328 | 1.022430841 | 1.023919531 |
| -0.5 | 0.2869196200 | 0.3543897948 | 0.3677281352 | 0.3545436829 |
| 0.5 | 0.2869196200 | 0.3543897948 | 0.3677281352 | 0.3545436829 |
| 0.9 | 0.736933641 | 0.9449134328 | 1.022430841 | 1.023919531 |
| 1.5 | 0.650998433 | 1.395423259 | 1.768258152 | 1.903406038 |
| 1.9 | 1.236468965 | 0.2243608048 | 0.9983369590 | 1.331887322 |
| 2.5 | 7.358935341 | 3.978846905 | 2.229029235 | 1.504098681 |
| 2.9 | 11.54104814 | 6.105679997 | 3.518073709 | 2.654989579 |

# 5.SONUÇLAR ve ÖNERİLER

## 5.1. Sonuçlar

Bu çalışmada $D_n(f;x)$ operatörünün lineer pozitifliği, $f$ fonksiyonuna düzgün yakınsadığı gösterilmiş olup merkezi momentleri hesaplanmıştır. Daha sonra süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızı hesaplanmış ve $D_n(f;x)$ operatörünün $f \in Lip_\alpha$ için sağladığı bir eşitlik gösterilmiştir. Son olarak operatörümüzün Mapple yazılım programı ile farklı değerler için herhangi sürekli bir $f$ fonksiyonuna yaklaşımları arasındaki fark grafik üzerinde gösterilmiştir.

## 5.2. Öneriler

Daha önce bu tarz lineer pozitif operatörler $[0,\infty)$ aralığında çalışılmıştır. Biz bu çalışmamızı tüm reel eksende yani $(-\infty,\infty)$ simetrik aralığında inceledik. Bundan sonra simetrik bir aralıkta yapılacak olacak çalışmalarda bu operatörden yararlanılabilir.

**KAYNAKLAR**


ARAL, A. and GUPTAV., 2016. Direct Estimates for Lupaş-Durrmeyer Operators. University of Nis, Serbia, 30:191-199.

AGRAWAL, P. N., ARACI, S., BOHNER, M. and LIPI, K., 2018. Approximation degree of Durrmeyer-Bezier type operators. Journal of Inequalities and Applications, 29p.

ALTOMARE, F. and CAMPITI, M., 1994. Korovkin-type Approximation Theory and its Applications.de Gruyter Series Studies in Mathematics, Vol. 17, Walter de Gruyter, Berlin-New-York.

BACZYNSKA, M. L., 2015. A Voronovskaja Type Theorem for Bernstein-Durrmeyer Type Operators. Science Domain, 10(3):1-6.

BERNSTEIN, S. N., 1912-1913. Demonstration du Theoreme de Weierstrass Fondee Sur le Calcul Des Probabilities. Commun. Soc. Math. Kharkow, 13(2):1-2.

BOHMAN. H., 1952. On Approximation of Continuous and Analytic Functions. Ark. Mat., 2:43-56.

CHLODOWSKY, I., 1937. Sur Le Developpment Des Fonctions Definies Dans Un Interval Infini En Series De Polynomes De M. S. Bernstein. Compositio Math., 4:380-393.

DURRMEYER, J. L., 1967. Une Formule D'inversion De La Transforme De Laplace Aplications A La Theorie Des Moments. These De 3e Cycle. Faculte Des Sciences de I'Universite de Paris, 4:149—150.

GAIROLA, A. R., DEEPMALA and MISHRA, L. N., 2016. Rate of Approximation by Finite Iterates of q-Durrmeyer Operators. Proceedings of the National Academy of Sciences, India Section A, 86(2):229-234.

GUPTA, P. And AGRAWAL, P. N., 2018. Jakimovski-Leviatan Operators of Durrmeyer Type Involving Appell Polynomials. Tübitak, 42:1457-1470.

GARG, T. AGRAWAL, P. N. and KAJLA, A., 2018. Jain-Durrmeyer Operators Involving Inverse Polya-Eggenberger Distrubution. Proceedings of the National Academy of Sciences, India Section A, 1-11.

HACISALİHOĞLU, H., and HACIYEV, A., 1995. Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı, A.Ü.F.F Döner Sermaye İşletme Yayınları, Ankara, 94s.

HOLHOŞ, A., 2010. Contributions to the Approximation of Functions. Babeş-Boylai University, Ph. D. Thesis, 41p.

İZGİ, A., 2012. Approximation by Composition of Szasz-Mirakyan and Durrmeyer-Chlodowsky Operators. Eurasian Math J., 3(1):63-71.

KANTOROVICH L., V., 1930. Sur Certain Developpements Suivant Les Polynomes De La Forme De S. Bernstein. C. R. Acad. URSS, 2(1):563-568, 595-600.

KOROVKIN, P. P., 1953. On Convergence of Linear Positive Operators in the Space of Continuous Functions(Russian). Dokl. Akad. Nauk. SSSR(N. S.) 90:961-964.

KOROVKIN P. P., 1960. Linear Operators and Approximation Theory. Hindustan Publishing Corp., (India), Delhi.

LORENTZ, G. G., 1953. Bernstein Polynomials. University of Toronto Press, Toronto, 8:15-217.

LORENTZ, G. G., 1986. Bernstein Polynomials. Chelsea Publishing Company, Newyork, 134p.

LESNIEWICZ, M. and REMPULSKA, L., 1997. Approximation by some operators of the Szasz-Mirakjan type in exponential weight spaces. Glasnik Math., 35(52):57-69.

LUPAŞ, A., 1987. A q-Analogue of the Bernstein Operator. University of Cluj-Napoca, Seminar on Numerical and Statistical Calculus, 9:85-92.

MALİK, N., ARACI S. and BENİWAL, M. S., 2017. Approximation of Durrmeyer Type Operators Depending On Certain Parameters. Hindawi, 9p.

MUSAYEV, B., Alp, M., 2000. Fonsiyonel Analiz, Balcı Yayınları, Kütahya, 27-83.

NEER, T. and AGRAWAL, P.N., 2017. A Genuine Family of Bernstein-Durrmeyer Type Operators Based on Polya Basis Functions. University of Nis, 31(9):2611-2623.

STANCU, D. D., 1968. Approximation of Function by a New Class of Polynomial Operators. Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 13(8):1173-1194.

SHEVCHUK, I. A., 1992. Approximation by Polynomials and Traces of Functions Continuos on a Segmant. Naukova Dymka, Kiev, 324s.

WEIERSTRASS, K., 1885. Über Die Analytische Darstellbarkeit Sogenannter Willküricher 55 Funktionen Einer Reelen Veranderlichen. Sitzungsberichte Der Akademie zu Berlin, 2(1):633-639, 789-805.

# ÖZGEÇMİŞ

## KİŞİSEL BİLGİLER

**Adı Soyadı** : Nadire Fulda ODABAŞI
**Uyruğu** : T.C.
**Doğum Yeri ve Tarihi :** ŞANLIURFA 1989
**Telefon** : 05532740660
**e-mail** : nadirefuldaodabasi@hotmail.com

## EĞİTİM

| Derece | Adı, İlçe, İl | Bitirme Yılı |
|---|---|---|
| **Lise** | : Mehmet Güneş Anadolu Öğretmen Lisesi, Şanlıurfa | 2007 |
| **Üniversite** | : Başkent Üniversitesi, Ankara | 2014 |
| **Yüksek Lisans :** | Harran Üniversitesi, Şanlıurfa | H.Devam |

## YABANCI DİLLER

İngilizce(İyi Düzey), Almanca(Temel Düzey)