KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

BAZI ÖZEL SAYI DİZİLERİNİ VE BİNOMİAL KATSAYILARI İÇEREN DENKLİKLER

SİBEL KOPARAL

KOCAELİ 2018

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

BAZI ÖZEL SAYI DİZİLERİNİ VE BİNOMİAL KATSAYILARI İÇEREN DENKLİKLER

SİBEL KOPARAL

Doç.Dr. Neşe ÖMÜR		
Danışman,	**Kocaeli Üniv.**	.....
Doç.Dr. Yücel TÜRKER ULUTAŞ		
Jüri Üyesi,	**Kocaeli Üniv.**	.....
Dr. Öğr. Üyesi Ayşe Arzu ARI		
Jüri Üyesi,	**Kocaeli Üniv.**	.....
Prof.Dr. Emrah KILIÇ		
Jüri Üyesi,	**TOBB Üniv.**	.....
Doç.Dr. İlker AKKUŞ		
Jüri Üyesi,	**Kırıkkale Üniv.**	.....

Tezin Savunulduğu Tarih: 06.04.2018

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Sayılar teorisi sayılar arasındaki ilişki, bu ilişkiler arasındaki estetik ile ilgi çekmiş matematiğin en eski alanlarından biridir ve bu alandaki çalışmalara farklı bir derinlik kazandırmıştır. Harmonik sayılar, Catalan sayıları, Fibonacci sayıları, Lucas sayıları, Pell sayıları ve Pell-Lucas sayıları, **s**ayılar teorisinin en ilgi çekici sayılarından bazılarıdır. Bu sayılar kombinatorik, analiz ve sayılar teorisi uygulamalarında oldukça önemlidir. Bu çalışmada binom katsayıları ile bu özel sayıları içeren toplamların denklikleri bulunmuştur. Elde edilen bu sonuçlar yeni incelemelere öncülük edecektir.

Çalışmalarım boyunca beni yönlendiren ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Doç. Dr. Neşe ÖMÜR' e sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca hayatım boyunca beni yalnız bırakmayan, bana maddi ve manevi olarak destek olan sevgili aileme sevgi ve minnetlerimi sunarım.

Doktora öğrenim süreci içinde TÜBİTAK Yurtiçi doktora burs programının bir bursiyeri olarak TÜBİTAK'a da vermiş olduğu destekten ötürü teşekkürlerimi sunarım.

Nisan-2018 Sibel KOPARAL

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR i
İÇİNDEKİLER ii
ŞEKİLLER DİZİNİ iii
TABLOLAR DİZİNİ iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ v
ÖZET vi
ABSTRACT vii
GİRİŞ 1
1. GENEL BİLGİLER 2
2. HARMONİK SAYILAR İLE GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARINI İÇEREN DENKLİKLER 24
3. BİNOM KATSAYILARI, HARMONİK SAYILAR VE FİBONACCİ SAYILARINI İÇEREN DENKLİKLER 37
4. Bn,k GENELLEŞTİRİLMİŞ CATALAN SAYILARINI İÇEREN DENKLİKLER 79
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 90
KAYNAKLAR 91
KİŞİSEL YAYINLAR VE ESERLER 94
ÖZGEÇMİŞ 97

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. 436 sayısının 3-sel gösterimi 5

TABLOLAR DİZİNİ

Tablo 1.1. $B_{n,k}$ sayıları 17

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

I	: İndis kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	: Pozitif tamsayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}_p$	: p - sel tamsayılar kümesi
$\mathbb{Z}_p[x]$	: Katsayıları $\mathbb{Z}_p$ de olan polinom halkası
$\{U_n(A,B)\}$	: Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi
$\{V_n(A,B)\}$	: Genelleştirilmiş Lucas dizisi
$\{F_n\}$	: Fibonacci dizisi
$\{L_n\}$	: Lucas dizisi
$\{P_n\}$	: Pell dizisi
$\{Q_n\}$	: Pell-Lucas dizisi
H_n	: Harmonik sayı
$H_{n,m}$	: m. mertebeli harmonik sayı
C_n	: Catalan sayı
$C_n^{(m)}$	: m. mertebeli Catalan sayısı
$B_{n,k}$	: Genelleştirilmiş Catalan sayısı
$\equiv$	: Denk
$\not\equiv$	: Denk değil
$a \mid b$	: a böler b
$a \nmid b$	: a bölmez b
$\left(\frac{a}{p}\right)$	: Legendre sembolü
$q_p(a)$	: Fermat oranı
$n!$	: n faktöriyel
$\binom{n}{k}$	: Binom katsayısı
$n^{\underline{m}}$	: Azalan faktöriyel
$\lfloor \ \rfloor$	: Alttan sınır

BAZI ÖZEL SAYI DİZİLERİNİ VE BİNOMİAL KATSAYILARI İÇEREN DENKLİKLER

ÖZET

Bu tezde, binom katsayıları ve bazı özel sayılarla ifade edilen toplamların denklikleri incelenmiştir. İlk olarak literatürde var olan bu özel sayıların tanımları ve bu sayıları içeren denklikler verilmiştir. Daha sonra bazı kombinatoral özdeşlikler kullanılarak genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları ile harmonik sayıları içeren toplamlar için bazı ilginç denklikler ele alınmıştır. Ayrıca p tek asal sayı ve x bir p - sel tamsayı olmak üzere binom katsayısı ile harmonik sayıları içeren ve harmonik ile Catalan sayılarını içeren toplamlar için de p moduna göre denklikler hesaplanmıştır. p asal sayı olmak üzere genelleştirilmiş Catalan sayılarını içeren alterne ve azalan faktöriyelli toplamların p^2 modunda denklikleri verilmiştir. Son olarak, sonuç ve öneriler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Binom Katsayıları, Denklik, Fibonacci Sayıları, Harmonik Sayılar, p - sel Tamsayılar.

ON CONGRUENCES INVOLVING SOME SPECIAL NUMBER SEQUENCES AND BINOMIAL COEFFICIENTS

ABSTRACT

In this thesis, congruences given by the sums including binomial coefficients and some special numbers are examined. Firstly, the definitions of these special numbers and the congruences containing these numbers are given which was in literature. Using combinatorial identities, some interesting congruences are investigated for the sums which include harmonic numbers and generalized Fibonacci and Lucas numbers. Further, for an odd prime p and p - adic integer x, the congruences including harmonic and Catalan numbers and the congruences including binomial coefficients and harmonic numbers are calculated. The congruences of the alternating sums and the sums with decreasing factorials including the generalization Catalan numbers are researched in modulo p^2. Finally, some conclusions and recommendations are given.

Keywords: Binomial Coefficients, Congruence, Fibonacci Numbers, Harmonic Numbers, p - adic Integers.

GİRİŞ

Bu tezde bazı özel sayıların toplamlarının p veya p^2 moduna göre denklikleri elde edilerek bu denklikler ile ilgili farklı sonuçlar verildi.

Bu tez genel bilgiler, harmonik sayılar ile genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarını içeren denklikler, binom katsayıları, harmonik sayılar ve Fibonacci sayılarını içeren denklikler, $B_{p,k}$ genelleştirilmiş Catalan sayılarını içeren denklikler ile sonuçlar ve öneriler olmak üzere beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm, diğer bölümlere kaynak teşkil edecek bazı temel bilgileri içermektedir. Bu bölümde genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri ve bazı özel diziler tanıtıldı. Harmonik sayılar, Catalan sayıları gibi bazı özel sayılar ve bu özel sayılarla ilgili literatür araştırması yapılarak konu ile ilgili çalışmaların özetleri verildi.

İkinci bölümde, genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları ile harmonik sayıları içeren toplamların p moduna göre denklikleri verildi. Ayrıca Sun Z.W. tarafından verilen $p>5$ olacak şekilde asal sayı ve $\omega=\left(1-\left(\frac{5}{p}\right)\right)/2$ olmak üzere $\sum_{k=0}^{p-1}\frac{U_{k+\omega}(1,4)}{2^k}H_k \equiv 0 \pmod p$ denkliği genelleştirilmiştir.

Üçüncü bölümde, harmonik ve Catalan sayılarının toplamlarının p veya p^2 moduna göre denklikleri verildi. Ayrıca bu denkliklerin sonucu olarak Fibonacci, Lucas, Pell ve Pell-Lucas sayılarını içeren denklikler elde edildi.

Dördüncü bölümde, p asal sayı olmak üzere $B_{p,k}$ genelleştirilmiş Catalan sayılarını içeren alterne ve azalan faktöriyelli toplamların yeni denklikler elde edildi.

Beşinci bölümde ise elde edilen sonuçlar ve daha sonraki çalışmalar için öneriler verildi.

1. GENEL BİLGİLER

Leonardo of Pisa (Fibonacci)' nin 1202 yılında Liber Abaci ismiyle basılan kitabında basit bir tavşan problemi olarak ele alınan Fibonacci sayı dizisinin bugüne kadar birçok ilginç özellikleri ortaya çıkarılmış ve her geçen gün yeni özellikleri ve diğer birçok matematiksel yapılarla olan ilgisi de çıkarılmaya devam edilmektedir. Ayrıca Horadam tarafından bu dizinin genelleştirilmesi aşağıdaki şekilde verilmiştir [1].

Tanım 1.1: $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $A, B \in \mathbb{Z}$ için $\{U_n(A,B)\}$ genelleştirilmiş Fibonacci dizisi ve $\{V_n(A,B)\}$ genelleştirilmiş Lucas dizisi, başlangıç koşulları $U_0(A,B)=0$, $U_1(A,B)=1$ ve $V_0(A,B)=2$, $V_1(A,B)=A$ olmak üzere, sırasıyla

$$U_{n+1}(A,B)=AU_n(A,B)-BU_{n-1}(A,B)$$

ve

$$V_{n+1}(A,B)=AV_n(A,B)-BV_{n-1}(A,B)$$

tekrarlama bağıntılarıyla tanımlanır.

Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizilerinin karakteristik denklemi $x^2-Ax+B=0$ şeklinde olup $\Delta=A^2-4B$ olmak üzere bu denklemin kökleri

$$a(A,B)=\frac{A+\sqrt{\Delta}}{2} \text{ ve } b(A,B)=\frac{A-\sqrt{\Delta}}{2}$$

dir. $\{U_n(A,B)\}$ ve $\{V_n(A,B)\}$ dizilerinin Binet formülleri bu kökler yardımıyla, sırasıyla

$$U_n(A,B)=\frac{(a(A,B))^n-(b(A,B))^n}{a(A,B)-b(A,B)}$$

ve

$V_n(A,B)=(a(A,B))^n+(b(A,B))^n$

şeklinde verilir.

$\{U_n(A,B)\}$ ve $\{V_n(A,B)\}$ dizilerinin tekrarlama bağıntısında $A=1$, $B=-1$ alınırsa, sırasıyla $\{F_n\}$ Fibonacci dizisi ve $\{L_n\}$ Lucas dizisi elde edilir. Hatta Fibonacci ve Lucas dizilerinin karakteristik denkleminin kökleri

$$\alpha=a(1,-1)=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ve } \beta=b(1,-1)=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

şeklinde olup bu dizilerin Binet formülleri sırasıyla

$$F_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} \text{ ve } L_n=\alpha^n+\beta^n$$

olarak elde edilir [2].

$\{U_n(A,B)\}$ ve $\{V_n(A,B)\}$ dizilerinin tekrarlama bağıntısında $A=2$, $B=-1$ alınırsa, sırasıyla $\{P_n\}$ Pell dizisi ve $\{Q_n\}$ Pell-Lucas dizisi elde edilir. Ayrıca Pell ve Pell-Lucas dizilerinin karakteristik denkleminin kökleri

$$\delta=a(2,-1)=1+\sqrt{2} \text{ ve } \gamma=b(2,-1)=1-\sqrt{2}$$

olup Binet formülleri sırasıyla

$$P_n=\frac{\delta^n-\gamma^n}{\delta-\gamma} \text{ ve } Q_n=\delta^n+\gamma^n$$

olarak elde edilir [3].

Tanım 1.2: $a,b\in\mathbb{Z}$ ve $a\neq 0$ olmak üzere $b=k.a$ olacak şekilde bir $k\in\mathbb{Z}$ tamsayısı varsa "a böler b dir" denir ve $a|b$ şeklinde gösterilir. Eğer bu eşitliği sağlayacak bir $k\in\mathbb{Z}$ yoksa "a bölmez b dir" denir ve $a\nmid b$ şeklinde gösterilir [4].

Tanım 1.3: $n\in\mathbb{Z}^+\setminus\{1\}$ ve $a,b\in\mathbb{Z}$ olmak üzere, eğer $n|(a-b)$ ise a ile b mod n ye göre denktir denir ve bu

$a \equiv b \pmod{n}$

şeklinde gösterilir. Aksi halde, $n \nmid (a-b)$ ise a ile b mod n ye göre denk değildir denir ve

$a \not\equiv b \pmod{n}$

şeklinde gösterilir [4].

Tanım 1.4: $a \in \mathbb{Z}$ ve p , $p \nmid a$ olacak şekilde tek bir asal sayı olsun. O zaman

$x^2 \equiv a \pmod{p}$

denkliğinin bir çözümü varsa a 'ya p denkliğine göre ikinci dereceden kalan denir. Eğer bu denkliğin hiçbir çözümü yoksa bu durumda a ya p denkliğine göre ikinci dereceden kalan değil denir. Bu tanım Legendre sembolü ile

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0 & a \equiv 0 \pmod{p}, \\ 1 & a, p \text{ denkliğine göre ikinci dereceden kalan ise,} \\ -1 & a, p \text{ denkliğine göre ikinci dereceden kalan değil ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanır [4].

Tanım 1.5: p bir asal sayı olsun. n herhangi bir tamsayısı, $0 \le i \le k$ için $a_i \in \{0,1,..., p-1\}$ olmak üzere

$n = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + ... + a_k p^k$

şeklinde p tabanında yazılır [5].

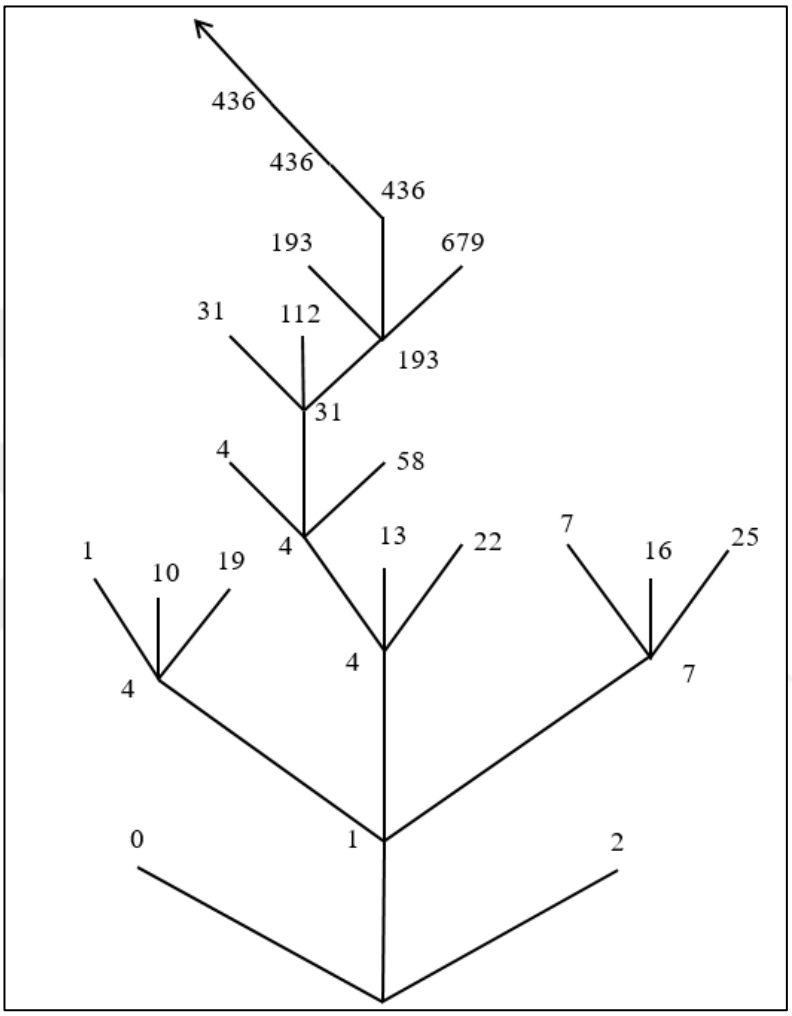
Örnek: 453 sayısı 7 tabanında

$453 = 5 + 1.7 + 2.7^2 + 1.7^3$

olarak yazılır.

p -sel sayılar ilk olarak Hensel K. tarafından 19. yüzyıl sonlarında bulunmuştur. Üzerinden yüzyıl geçmesine rağmen, bu sayılar hala gizemini korumaktadır. p -sel sayılar, sayılar teorisi, cebirsel geometri, cebirsel topoloji, analiz gibi alanların

yanında fizik ve diğer bilim dallarında da kullanılmaktadır. Son yıllarda p-sel sayılar, birçok bilim adamının ilgisini çekmiştir ve bu sayılar üzerine yazılmış birçok kitap ve makale bulunmaktadır [6,7]. Şimdi, p-sel tamsayılar hakkında biraz bilgi verelim.



Şekil 1.1. 436 sayısının 3-sel gösterimi

436 sayısı 3 tabanında

$$436 = 1.3^0 + 1.3^1 + 0.3^2 + 1.3^3 + 2.3^4 + 1.3^5$$

olarak yazılır.

$$436 \equiv 1.3^0 = 1 \mod 3$$

$$436 \equiv 1.3^0 + 1.3^1 = 4 \mod 3^2$$

$$436 \equiv 1.3^0 + 1.3^1 + 0.3^2 = 4 \mod 3^3$$

$$436 \equiv 1.3^0 + 1.3^1 + 0.3^2 + 1.3^3 = 31 \mod 3^4$$

$$436 \equiv 1.3^0 + 1.3^1 + 0.3^2 + 1.3^3 + 2.3^4 = 193 \mod 3^5$$

$$436 \equiv 436 \mod 3^6$$

$$436 \equiv 436 \mod 3^7$$

…

şeklinde duraklardan oluşmaktadır.

$i \in I$ için $0 \le a_i \le p\text{-}1$ olmak üzere sonsuz sayı dizisi,

$a_0 \bmod p$,

$a_0 + a_1 p \bmod p^2$,

...

$a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + ... + a_{k-1} p^{k-1} \bmod p^k$,

...

duraklarından oluşur. Atılan her $a^k p^k$ adımı bizi bir önceki duraktan bir sonraki durağa götürür ve bu böyle devam eder. Buradaki a_k katsayısı k-inci adımda önümüze çıkan p tane yoldan hangisinin seçileceğini söyler. Bu sonsuz yol,

$$\left(a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + ... + a_{k-1} p^{k-1} \bmod p^k\right)_k$$

dizisi olarak gösterileceği gibi, sadece simgesel bir anlamı olan

$$a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + ... + a_k p^k + ...$$

şeklinde seri olarak da gösterilebilinir. O zaman, bu serinin kısmi toplamları

$$a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + ... + a_{k-1} p^{k-1} \bmod p^k$$

sonsuz yolun durakları olur.

Eğer x_k doğal sayısını

$$x_k = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + ... + a_k p^k$$

olarak tanımlanırsa, o zaman her k için,

$$x_k \equiv x_{k+1} \left(\mathrm{mod}\ p^{k+1} \right)$$

denklikleri geçerli olur ve bu sonsuz yol kısaca

$$\left(x_k \right)_k$$

dizisi olarak da gösterilir.

Tanım 1.6: p bir asal sayı olmak üzere, bir p- sel tamsayı,

$$x_k \equiv x_{k+1} \left(\mathrm{mod}\ p^{k+1} \right) \tag{1.1}$$

denkliklerinin geçerli olduğu

$$\left(x_k \ \mathrm{mod}\ p^{k+1} \right)_k$$

dizisidir.

Denklik (1.1)'den dolayı, her k için,

$$x_{k+1} = x_k + a_{k+1} p^{k+1}$$

eşitliğini sağlayan bir a_{k+1} vardır. Burada $x_k = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + ... + a_k p^k$ olduğundan $0 \le x_k < p^{k+1}$ dir ve böylece $0 \le a_{k+1} < p$ olarak alınabilir. O halde x_0' a a_0 denilirse, $0 \le a_i < p$ eşitsizliklerini sağlayan a_i tamsayıları için

$$x_0 = a_0 ,$$

$$x_1 = x_0 + a_1 p = a_0 + a_1 p ,$$

$$x_2 = x_1 + a_2 p^2 = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 ,$$

$$x_3 = x_2 + a_3 p^3 = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 ,$$

...

$$x_k = x_{k-1} + a_k p^k = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + ... + a_k p^k ,$$

...

dır. Dolayısıyla, p-sel tamsayı $0 \le a_i < p$ olmak üzere

$$a = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + ... + a_k p^k + \dots$$

gibi sonsuz bir toplam olarak da tanımlanır. Bu sonsuz toplam,

$$\left(a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + ... + a_k p^k \bmod p^{k+1}\right)_k$$

p-sel tamsayısı anlamına gelir. p-sel tamsayılarının oluşturduğu küme $\mathbb{Z}_p$ ile gösterilir.

$\mathbb{Z}_p$ de alınan keyfi $a=\left(a_k \bmod p^{k+1}\right)_k$ ve $b=\left(b_k \bmod p^{k+1}\right)_k$ elemanları için

$$\oplus : \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p \quad \text{ve} \quad \odot : \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$$

$$a \oplus b = \left(a_k + b_k \bmod p^{k+1}\right)_k \text{ ve } a \odot b = \left(a_k b_k \bmod p^{k+1}\right)_k$$

işlemleri ile $\left\langle \mathbb{Z}_p, \oplus, \odot \right\rangle$ değişmeli ve birimli bir halkadır [8].

Tanım 1.7: Her $i \in I$ için H_i değişmeli ve birim elemanlı bir halka olsun. Her $i,i' \in I$ öyle ki $i \le i'$ için

$$f_i^{i'} : H_{i'} \to H_i$$

halka homomorfizmaları aşağıdaki koşulları sağlıyorsa $\left(H_i ; f_i^{i'} : H_{i'} \to H_i\right)_{i,i' \in I}$ sistemine izdüşümsel sistem denir.

- $f_i^i = id_{H_i} : H_i \to H_i$ birim dönüşüm,
- $\forall i,i',i'' \in I : i \le i' \le i''$ için

$$f_i^{i''} : H_{i''} \xrightarrow{f_{i'}^{i''}} H_{i'} \xrightarrow{f_i^{i'}} H_i$$

dır [9].

Örnek 1.1:

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z} \leftarrow \dots \leftarrow \mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$
$$a_0 \leftarrow a_0 + a_1 p \leftarrow a_0 + a_1 p + a_2 p^2 \leftarrow \dots \leftarrow a_0 + a_1 p + \dots + a_{n-1} p^{n-1} \leftarrow a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n$$

dır [9].

Tanım 1.8:

$$\left\{ (x_i)_i \in \prod_i \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z} \,\middle|\, \pi_{ij}(x_j) = x_0 + x_1 p + \ldots + x_{i-1}p^{i-1},\ i \le j \right\} \tag{1.2}$$

kümesine izdüşümsel limit denir ve $\varprojlim \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ ile gösterilir [5].

$\mathbb{Z}_p$ ile $\varprojlim \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ arasında birebir ve örten dönüşüm olduğundan

$$\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$$

dir [5].

Şimdi, p - sel tamsayılarla ilgili birkaç örnek verelim.

Uyarı:

- $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_p$,
- $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}_p = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z}, p \not| b \right\}$

dir [5,10].

Örnek 1.2: -1 bir p - sel tamsayıdır. Gerçekten,

$$-1 = (p-1) + (p-1)p + (p-1)p^2 + (p-1)p^3 + \ldots$$

dir.

Örnek 1.3: $-\frac{3}{2} \in \mathbb{Z}_3$ dir. Gerçekten $\mathbb{Z}_3$ de

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$$

toplamından

$$-\frac{3}{2} = 3\frac{1}{1-3} = 3\left(1 + 3 + 3^2 + \ldots\right) \in \mathbb{Z}_3$$

dır [5].

Ayrıca bazı irrasyonel sayılar da aynı zamanda bir p - sel tamsayıdır.

Uyarı: $a \in \mathbb{Z}$ için

$\left(\frac{a}{p}\right)=1$ ise $\sqrt{a} \in \mathbb{Z}_p$

ve

$\left(\frac{a}{p}\right)=-1$ ise $\sqrt{a} \notin \mathbb{Z}_p$

dır [11].

Örnek 1.4: $\sqrt{5} \in \mathbb{Z}_{11}$ dir. Gerçekten $\left(\frac{5}{11}\right)=1$ olduğundan $k=1,2,3,\ldots$ için

$x^2 \equiv 5\left(\mathrm{mod}\ 11^k\right)$,

denkliklerini düşünebiliriz. $k=1$ için

$x^2 \equiv 5(\mathrm{mod}\ 11)$

denkliğinin çözümünün $x = x_1 \equiv \mp 4(\mathrm{mod}\ 11)$ olduğu açıktır. Mod 11^2 denkliği için herhangi bir x_2 çözümü, mod 11 denkliğinde de bir çözüm olmak zorundadır. O zaman

$x_2 = x_1 + 11y = \mp 4 + 11y$

şeklinde yazabiliriz. Burada $x_1 = 4$ alınırsa

$x_2 = 4 + 11y$

elde edilir. Böylece

$0 \equiv x_2^2 - 5 \equiv (4+11y)^2 - 5 \equiv 11(1+8y)\left(\mathrm{mod}\ 11^2\right)$

denkliği bulunur. Buradan

$1+8y \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 11)$

denkliği elde edilerek

$y \equiv 4\ (\mathrm{mod} 11)$

olup,

$x_2 = 4+4.11$

bulunur. Benzer şekilde Mod 11^3 denkliği için herhangi bir x_3 çözümü, mod 11^2 denkliğinde de bir çözümüdür. O zaman

$x_3 = x_2 + 11^2 z = 4 + 4.11 + 11^2 z$

için

$0 \equiv x_3^2 - 5 \equiv \left(48+11^2 z\right)^2 - 5 \equiv 11^2 \left(19+96z\right) \left(\mathrm{mod}\, 11^3\right)$

denkliği elde edilir. Buradan

$19+96z \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\, 11\right)$

denkliğinin çözümü

$z \equiv 10 \left(\mathrm{mod} 11\right)$

olup,

$x_3 = 4+4.11+10.11^2$

bulunur. Bu şekilde devam edilirse $\mathbb{Z}_{11}$ halkasında $x^2 = 5$ denkleminin çözümü

$4 + 4.11 + 10.11^2 + \ldots$

dır. Ayrıca bu sonsuz toplam $4 + 4.11 + 10.11^2 \,\mathrm{mod}\, p^3$ 3. durağı ile de ifade edilir [12].

Örnek 1.5: $\sqrt{7} \notin \mathbb{Z}_5$ dir. Gerçekten $\left(\frac{7}{5}\right) = -1$ olup

$x^2 \equiv 7 \left(\mathrm{mod}\, 5\right)$

olacak şekilde bir x tamsayısı bulunamaz [12].

Şimdi, aşağıdaki gibi p - sel ve p - sel olmayan tamsayılara örnekler verelim [12]:

$40 = 1+3+9+27+0 \in \mathbb{Z}_3$,

$-\frac{7}{8} = 1+2.3+3^2+2.3^3+3^4+\ldots \in \mathbb{Z}_3$,

$\frac{1}{3} = 2 + 3.5 + 5^2 + 3.5^3 + 5^4 + \ldots \in \mathbb{Z}_5,$

$\frac{1}{7} \notin \mathbb{Z}_7$

$\sqrt{2} = 3 + 1.7 + 2.7^2 + 6.7^3 + 7^4 + \ldots \in \mathbb{Z}_7,$

$\sqrt{-2} = 1 + 3 + 2.3^2 + 2.3^5 + 3^7 + \ldots \in \mathbb{Z}_3$

ve

$\sqrt{-3} \notin \mathbb{Z}_5.$

Tanım 1.9: $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$\prod_{i=1}^{n} i = 1.2.3 \ldots n$$

çarpımına n faktöriyel denir ve $n!$ ile gösterilir. Ayrıca $0! = 1$ olarak alınır [13].

Tanım 1.10: Her $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $k \in \mathbb{N}$ için $0 \le k \le n$ olmak üzere n elemanlı bir kümenin, k elemanlı altkümelerinin sayısını veren ifadeye binom katsayısı denir ve

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ile gösterilir. Eğer $n < k$ ise $\binom{n}{k} = 0$ olarak tanımlanır [4].

Binom katsayıları ile ilgili bilinen birkaç önemli özelliği hatırlatalım [4]:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, \tag{1.3}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}, \tag{1.4}$$

$$\binom{n}{k+1}=\frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k},$$

$$\binom{n}{k}=\frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k}.$$

Ayrıca p tek asal sayı, k ve m birer doğal sayı olmak üzere binom katsayılarını içeren bazı denklikler aşağıdaki gibidir [14,15,16,17,18]:

$$\binom{p+k}{m}\equiv\binom{k}{m}\pmod p,\ 1\le k,\ m\le p-1, \tag{1.5}$$

$$\binom{2k}{k}=\binom{-1/2}{k}(-4)^k\equiv\binom{(p-1)/2}{k}(-4)^k\pmod p,\ 0\le k\le(p-1)/2, \tag{1.6}$$

$$\binom{(p-1)/2+k}{2k}(-16)^k\equiv\binom{2k}{k}\pmod{p^2},\ 0\le k\le(p-1)/2. \tag{1.7}$$

Teorem 1.1: (Binom Teoremi) $n\in\mathbb{Z}^+$ ve $a, b\in\mathbb{R}$ olsun. Bu takdirde,

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

dır [4].

Tanım 1.11: $0<m\le n$ olacak şekildeki $n,m\in\mathbb{Z}^+$ için $\prod_{k=0}^{m-1}(n-k)$ çarpımına azalan faktöriyel denir ve $n^{\underline{m}}$ ile gösterilir. Burada $n^{\underline{m}}=m!\binom{n}{m}$ olduğu açıktır.

Gould H.W. tarafından, $0\le a\le n$ olacak şekilde $a,n\in\mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=a}^{n}k^{\underline{m}}=\frac{n+1}{m+1}n^{\underline{m}}-\frac{a}{m+1}(a-1)^{\underline{m}} \tag{1.8}$$

eşitliği verilmiştir [19].

Tanım 1.12: p bir asal sayı ve $p\nmid a$ olacak şekilde $a\in\mathbb{Z}$ olsun. $q_p(a)=\frac{a^{p-1}-1}{p}$ oranına Fermat oranı denir [20].

Teorem 1.2: (Küçük Fermat Teoremi) p bir asal sayı ve $\text{ebob}(a, p) = 1$ olmak üzere

$$a^{p-1} \equiv 1 (\text{mod } p)$$

dir [4].

Teorem 1.3: (Euler Kriteri) p tek asal sayı olsun. $(a, p) = 1$ olacak şeklde her $a \in \mathbb{Z}$ için

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{(p-1)/2} (\text{mod } p)$$

dir [4].

İlk kez 1737 yılında Euler tarafından düşünülen harmonik sayılar; kombinatorik, analiz ve sayılar teorisi uygulamalarında oldukça önemlidir.

Tanım 1.13: $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere harmonik sayılar

$$H_0 = 0, \; H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

şeklinde tanımlanır. Harmonik sayıların ilk birkaç tanesi

$$1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{25}{12}, \frac{137}{60}, \ldots$$

şeklindedir.

Harmonik sayılar

$$H_n = H_{n-1} + \frac{1}{n}$$

tekrarlama bağıntısını sağlar. Ayrıca n. harmonik sayısının integral gösterimi,

$$H_n = \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x} dx$$

şeklindedir.

Tanım 1.14: $m \in \mathbb{Z}^+$ için $H_{n,0} = n$ ve $H_{n,1} = H_n$ olmak üzere

$$H_{n,m}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^m},\ m\geq 2$$

rasyonel sayısına m. mertebeden harmonik sayı denir [21].

Harmonik sayıları içeren bazı toplamlar aşağıdaki gibidir [21,22,23,24,25]:

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k H_k=\frac{(-1)^n-1}{2}H_n+\frac{1}{2}H_{\lfloor n/2\rfloor}, \tag{1.9}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k kH_k=(-1)^n\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{4}\right)H_n-\frac{1}{4}\left(H_{\lfloor n/2\rfloor}-H_n\right)+\frac{(-1)^n-1}{4} \tag{1.10}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k}{k}=\frac{1}{2}\left(H_n^2+H_{n,2}\right). \tag{1.11}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}k^{\underline{m}}\frac{H_k}{n-k}=n^{\underline{m}}\left(H_n\left(H_n-H_m\right)-H_{n,2}+H_{m,2}\right), \tag{1.12}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}k^{\underline{m}}H_{n-k}=n^{\underline{m}}\frac{n+1}{m+1}\left(H_{n+1}-H_{m+1}\right), \tag{1.13}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^{\underline{m}}H_k=n^{\underline{m}}\frac{n+1}{m+1}\left(H_{n+1}-\frac{1}{m+1}\right), \tag{1.14}$$

$$\sum_{k=j}^{n-1}\frac{2}{n-k}k^{\underline{j}}H_{n-k-1}=n^{\underline{j}}\left(\left(H_n-H_j\right)^2-H_{n,2}+H_{j,2}\right), \tag{1.15}$$

$$\sum_{k=j}^{n-1}\frac{H_{k-1}}{n-k}(k-1)^{\underline{j-1}}=(n-1)^{\underline{j-1}}\left(H_{n-1}\left(H_{n-1}-H_{j-1}\right)-H_{n-1,2}+H_{j-1,2}\right). \tag{1.16}$$

Adını Belçikalı matematikçi Catalan E.C.' den alan Catalan sayıları, matematikte bazı problemin çözümünde karşımıza çıkan özel sayılardan biridir. Şimdi, Catalan sayılarının tanımını verelim.

Tanım 1.15: $n\geq 0$ için

$$C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$$

sayılarına Catalan sayıları denir. Bu sayılar $n\geq 0$ için

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$

şeklinde de gösterilir.

Ayrıca Catalan sayıları, $C_0 = 1$ olmak üzere

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$$

lineer olmayan tekrarlama bağıntısı ile de ifade edilir [26].

Tanım 1.16: $m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$C_n^{(m)} = \frac{1}{mn+1}\binom{mn+n}{n} = \binom{mn+n}{n} - m\binom{mn+n}{n-1}$$

sayılarına m mertebeli n. Catalan sayıları denir. Burada $C_n^{(1)} = C_n$, Catalan sayıları ve $C_n^{(2)} = \frac{1}{2n+1}\binom{3n}{n}$, 2. mertebeden Catalan sayılarıdır [27].

Tanım 1.17: $k \le n$ olacak şekildeki $k, n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$B_{n,k} = \frac{k}{n}\binom{2n}{n-k}, \quad 0 \le k \le n$$

sayılarına genelleştirilmiş Catalan sayıları denir. Bu sayılar Catalan üçgeninin elemanlarıdır [26].

$B_{n,k}$ sayıları $m \ge 1$ iken $B_{n,0} = 0 = B_{n,n+m}$ başlangıç koşulları ile

$$B_{n,k} = B_{n-1,k-1} + 2B_{n-1,k} + B_{n-1,k+1}, \qquad k \ge 2$$

tekrarlama bağıntısını sağlamaktadır [26].

$B_{n,k}$ sayıları Tablo 1.1. deki gibi verilebilir:

Tablo 1.1. $B_{n,k}$ sayıları

n/k	1	2	3	4	5	…
1	1	0	0	0	0	…
2	2	1	0	0	0	…
3	5	4	1	0	0	…
4	14	14	6	1	0	…
5	42	48	27	8	1	…
⋮	⋮	⋮		⋮		⋱

Harmonik sayılar, denkliklere ilk olarak 1862 yılında Wolstenholme tarafından uygulanmıştır [28]. Sonraki yıllarda Lehmer de harmonik sayılar üzerinde farklı denklikler elde etmiştir [29]. Daha sonraki yıllarda Sun Z.W. ve birçok yazar bu denklikleri kullanarak farklı denklikler üzerine çalışmıştır. Şimdi literatürde yapılan çalışmaların bazılarından kısaca bahsedelim.

Teorem 1.4**:** $p > 3$ asal sayısı için

$$H_{p-1} \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\ p^2\right) \tag{1.17}$$

dir [28].

Teorem 1.5: $p > 3$ için

$$H_{(p-1)/2} = \sum_{k=1}^{(p-1)/2} \frac{1}{k} \equiv -2\left(q_p(2) - \frac{p}{2} q_p^2(2) \right) \left(\mathrm{mod}\ p^2\right) \tag{1.18}$$

dir [29].

Şimdi, p tek asal sayı olmak üzere harmonik sayıları içeren bazı denklikler aşağıdaki gibidir [29]:

$$H_{p-k} \equiv H_{k-1} \left(\mathrm{mod}\ p\right), 1 \le k \le p-1, \tag{1.19}$$

$$H_{p+k} \equiv H_k + \frac{1}{p} \left(\mathrm{mod}\ p\right),\ 1 \le k \le p-1, \tag{1.20}$$

$$H_{p+k,2} \equiv H_{k,2} + \frac{1}{p^2} \pmod{p},\ 1 \le k \le p-1, \tag{1.21}$$

$$(-1)^k \binom{p-1}{k} = \prod_{0<j\le k} \left(1 - \frac{p}{j}\right) \equiv 1 - pH_k \pmod{p^2},\ 0 \le k \le p-1. \tag{1.22}$$

Şimdi $p > 3$ bir asal sayı ve x bir değişken olmak üzere

$$q(x) = \frac{x^p - (x-1)^p - 1}{p} \text{ ve } G_n(x) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{x^k}{k^n}$$

olsun.

Teorem 1.6: $p > 3$ için

$$G_2(1) \equiv 0 \pmod{p}, G_1(1) \equiv 0 \pmod{p^2},$$

$$G_2(-1) \equiv 0 \pmod{p}, \tag{1.23}$$

$$q(x) \equiv -G_1(x) \pmod{p}, \tag{1.24}$$

$$G_2(x) \equiv G_2(1-x) + x^p G_2\left(1 - \frac{1}{x}\right) \pmod{p}$$

ve

$$(q(x))^2 \equiv -2x^p G_2(x) - 2(1-x^p) G_2(1-x) \pmod{p} \tag{1.25}$$

dir [30].

Teorem 1.7: $n > 1$ için

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} \frac{(-x)^k}{k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(1-x)^k - 1}{k} + \frac{(1-x)^n - (-x)^n - 1}{n^2} \tag{1.26}$$

dir [30].

Lemma 1.1: $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $G_n(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ ve p tek asal sayısı için

$$G_2(x) \equiv \frac{1}{p}\left(\frac{1 + (x-1)^p - x^p}{p} - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(1-x)^k - 1}{k}\right) + p \sum_{k=2}^{p-1} \frac{x^k}{k^2} \sum_{s=1}^{k-1} \frac{1}{s} \pmod{p^2}$$

ve $p > 3$ için

$$npG_{n+1}(x) \equiv (-1)^n x^p G_n(1/x) - G_n(x) \pmod{p^2}$$

dir [31].

Sun Z.W., binom katsayıları ve Fibonacci sayılarını içeren bazı denklikler vermiştir. Sun ve Tauraso tarafından p asal sayı, $a \in \mathbb{Z}^+$, $p \nmid m$ olacak şekilde $m \in \mathbb{Z}$ ve $d=0,...,p^a$ için $\sum_{k=0}^{p^a-1} \binom{2k}{k+d} \Big/ m^k$ ve $\sum_{k=0}^{p^a-1} \binom{2k}{k+d} \Big/ km^{k-1}$ toplamlarının p moduna göre denklikleri verildi [32]. Ayrıca Sun ve Tauraso tarafından p asal sayı ve $a \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $d=0,...,p^a$ için $\sum_{k=0}^{p^a-1} \binom{2k}{k+d}$ toplamının p^2 moduna göre ve $\theta=0,1$ için $\sum_{k=0}^{p^a-1} \binom{2k}{k+\theta}$ toplamının p^3 moduna göre denklikleri elde edildi [33]. Böylece Sun ve Tauraso, p moduna göre yapmış oldukları denklikleri, p^2 moduna ve p^3 moduna göre denkliklere taşımışlardır.

Teorem 1.8: p tek asal sayısı için

$$\sum_{k=0}^{(p-3)/2} \frac{1}{(2k+1)4^k} \binom{2k}{k} \equiv (-1)^{(p+1)/2} q_p(2) \pmod{p^2}$$

ve $p > 3$ asal sayısı için

$$\sum_{k=0}^{(p-3)/2} \frac{1}{(2k+1)16^k} \binom{2k}{k} \equiv 0 \pmod{p^2}$$

dir [34].

Sun, genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları ile harmonik sayıları içeren bazı denklikleri, aşağıdaki gibi vermiştir:

Teorem 1.9: $p > 3$ asal sayı ve $p \nmid A$ olacak şekilde $A,B \in \mathbb{Z}$ için

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{V_k(A,B)}{kA^k} H_k \equiv 0 \pmod{p} \text{ ve } \sum_{k=1}^{p-1} \frac{U_k(A,B)}{kA^k} H_k \equiv \frac{2}{p} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{U_k(A,B)}{kA^k} \pmod{p}$$

dir [35].

Teorem 1.10: p, $p>5$ olacak şekilde bir asal sayı olsun. $p \equiv 1, 2, 4, 8 \pmod{15}$ için

$$\sum_{k=0}^{p-1} \frac{U_k(1,4)}{2^k} H_k \equiv 0 \pmod{p} \tag{1.27}$$

ve $p \equiv 7, 11, 13, 14 \pmod{15}$ için

$$\sum_{k=0}^{p-1} \frac{U_{k+1}(1,4)}{2^k} H_k \equiv 0 \pmod{p} \tag{1.28}$$

dır [35].

Teorem 1.11: $p > 3$ asal sayısı için

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{H_k L_k}{k} \equiv 0 \pmod{p} \text{ ve } \sum_{k=1}^{p-1} \frac{H_k F_k}{k} \equiv \frac{2}{p} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{F_k}{k} \pmod{p} \tag{1.29}$$

dir [35].

Teorem 1.12: $p > 5$ asal sayısı için

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{L_k}{k^2} \equiv 0 \pmod{p} \tag{1.30}$$

dir [36].

Teorem 1.13: $p \neq 2,5$ asal sayısı için

$$\sum_{k=0}^{(p-3)/2} \binom{2k}{k} \frac{F_{2k+1}}{(2k+1)16^k} \equiv (-1)^{(p+1)/2} \frac{F_p - \left(\frac{p}{5}\right)}{p} \pmod{p^2},$$

ve

$$\sum_{k=0}^{(p-3)/2} \binom{2k}{k} \frac{L_{2k+1}}{(2k+1)16^k} \equiv (-1)^{(p+1)/2} \frac{L_p - 1}{p} \pmod{p^2}$$

dır [37].

Son yıllarda, Catalan sayı dizisinin terimlerinin de çeşitli toplamları ve denklikleri ele alınmıştır.

Teorem 1.14: p asal sayı ve $a > 0$ olacak şekilde $a, n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{C_n}\sum_{k=0}^{p^a-1} C_{p^a n+k} \equiv 1-3(n+1)\left(\frac{p^a-1}{3}\right)\left(\mathrm{mod}\ p^2\right)$$

dir [33].

Teorem 1.15: p tek asal sayı ve $p \nmid m$ olacak şekilde $m \in \mathbb{Z}$ için

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2} \frac{1}{m^k} C_k \equiv \frac{m}{2} - \frac{m-4}{2}\left(\frac{m(m-4)}{p}\right)\left(\mathrm{mod}\ p\right) \tag{1.31}$$

dir [38].

Mattarei ve Tauraso, binom katsayılarını ve harmonik sayıları içeren bazı denklikler elde etmişlerdir [39,40]. $x \in \mathbb{Z}_p$ için $\lambda=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-4x}\right)$ ve $\mu=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-4x}\right)$ olmak üzere aşağıdaki teoremlerde bu denkliklerin bazıları verilmiştir:

Teorem 1.16: $p > 3$ asal sayısı için

$$\sum_{k=1}^{p-1}\binom{2k}{k}\frac{x^k}{k^2} \equiv 2\left(G_2(\lambda)+G_2(\mu)\right)\left(\mathrm{mod}\ p\right) \tag{1.32}$$

dir [39].

Teorem 1.17: $p > 3$ asal sayısı için

$$\sum_{k=1}^{p-1}\binom{2k}{k}\frac{x^k}{k} H_k \equiv 2(\lambda-\mu)^p\left(G_2\left(\lambda/(\lambda-\mu)\right)-G_2\left(\mu/(\mu-\lambda)\right)\right)\left(\mathrm{mod}\ p\right) \tag{1.33}$$

dir [40].

Gutiérrez, Hernández, Guo, Zeng, Miano ve Romero $\sum_{k=1}^{n} k^m \binom{2n}{n-k}^2$ binomial toplamlar üzerine çalışmalar yapmıştır [41-43]. Ayrıca Catalan üçgeninin terimleri olan $B_{n,k}$ sayıları üzerinde bazı toplamlar elde etmişler ve $\sum_{k=1}^{n} k^m \binom{2n}{n-k}^2$ ile gösterilen binomial toplamları üzerinde çalışmışlardır [41-43]. Guo ve Zeng, Newton interpolasyon yöntemini kullanarak Miana ve Romero tarafından elde edilen Catalan üçgenleri üzerine son tanımlamaları genelleştirmişlerdir. Gutiérrez v.d., Catalan ve $B_{n,k}$ genelleştirilmiş Catalan sayılarını içeren aşağıdaki eşitlikleri vermişlerdir:

Teorem 1.18: $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\sum_{k=1}^{m}(n+2k-m)B_{n,k}B_{n,n+k-m}=(n+1)C_n\binom{2(n-1)}{m-1},\ m \le n$$

ve

$$\sum_{k=1}^{n}k\left(B_{n,k}\right)^2=\binom{n+1}{2}C_nC_{n-1}$$

dır [42].

Teorem 1.19: $1 \le m \le n$ için

$$\sum_{k=1}^{m}B_{n,k}B_{n,n+k-m}\left(n+2k-m\right)^3=\binom{2n}{n}\binom{2(n-1)}{m-1}\left(n^2+4n-2nm+m^2\right)$$

dir [43].

Ömür ve Koparal, p asal sayı olmak üzere $B_{p,k}$ genelleştirilmiş Catalan sayılarını ve harmonik sayıları içeren denklikleri ilk kez vermişlerdir. Aşağıdaki teorem ve lemmalarda bu denkliklerin bazılarına değinilmiştir.

Lemma 1.2: p bir asal sayı olsun. $0<n-d<p$ için

$$B_{p,n-d} \equiv 2(-1)^{n-d-1}\left(1-p\left(H_{n-d}+H_{n-d-1}\right)\right)\left(\mathrm{mod}\ p^2\right) \tag{1.34}$$

dır [44].

Lemma 1.3: p bir asal sayı olsun. $1<d\le p$ olmak üzere

$$\frac{d-1}{p^2}\binom{2p}{p-d+1}\binom{2p}{p-1} \equiv 4(-1)^d\left(1+\frac{p}{d-1}+\frac{2p}{d}-p-2pH_d\right)\left(\mathrm{mod}\ p^2\right) \tag{1.35}$$

dır [44].

Teorem 1.20: p bir asal sayı olsun. $1\le d\le p-1$ için

$$\sum_{k=1}^{p-1}B_{p,k}B_{p,k-d} \equiv 4(-1)^d\left(-2d+p\left(8d\left(H_d-1\right)+\frac{2}{d}-3\right)\right)\left(\mathrm{mod}\ p^2\right)$$

ve $1\le d\le p$ için

$$\sum_{k=1}^{p-1} kB_{p,k}B_{p,k-d} \equiv 2(-1)^{d}\left(-2d^{2}+p\left(1+8d^{2}\left(H_{d}-1\right)-4d\right)\right)\left(\mathrm{mod}\ p^{2}\right) \tag{1.36}$$

dir [44].

2. HARMONİK SAYILAR İLE GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARINI İÇEREN DENKLİKLER

Bu bölümde binom katsayıları, harmonik sayılar ile genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarıyla ilgili denkliklerden bahsedilecektir.

Teorem 2.1: $A, B \in \mathbb{Z}$ ve p, $p \nmid A$ olacak şekilde bir asal sayı olsun. O zaman

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{U_{k-1}(A,B)}{A^k} H_k \equiv 0 \pmod{p} \tag{2.1}$$

ve

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{V_{k-1}(A,B)}{A^k} H_k \equiv \frac{2}{p} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{V_{k-1}(A,B)}{A^k} \pmod{p} \tag{2.2}$$

dır.

İspat: İlk olarak Denklik (2.1) in ispatını verelim. Eşitlik (1.8) ve Denklik (1.22) den faydalanılarak

$$\left(a(A,B)-b(A,B)\right)\sum_{j=1}^{p-1} \frac{U_{j-1}(A,B)}{A^j}\left(1- pH_j\right)$$

$$\equiv \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\left(a(A,B)-b(A,B)\right)U_{j-1}(A,B)}{A^j}(-1)^j \binom{p-1}{j}$$

$$= \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\left(a(A,B)-b(A,B)\right)U_{j-1}(A,B)}{A^j}(-1)^j \sum_{k=j}^{p-1} \binom{k-1}{j-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{p-1}\sum_{j=1}^{k} \binom{k-1}{j-1} \frac{(-1)^j\left(a(A,B)-b(A,B)\right)U_{j-1}(A,B)}{A^j}$$

$$= \sum_{k=1}^{p-1}\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \frac{(-1)^{j+1}\left(a(A,B)-b(A,B)\right)U_{j}(A,B)}{A^{j+1}} \pmod{p^2}$$

elde edilir. $\{U_n(A,B)\}$ dizisinin Binet formülü ve Binom teoremi kullanılarak

$$\left(a(A,B)-b(A,B)\right)\sum_{j=1}^{p-1}\frac{U_{j-1}(A,B)}{A^j}\left(1-pH_j\right)$$

$$\equiv -\frac{1}{A}\sum_{k=1}^{p-1}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}\left(\left(-\frac{a(A,B)}{A}\right)^j-\left(-\frac{b(A,B)}{A}\right)^j\right)$$

$$=-\frac{1}{A}\sum_{k=1}^{p-1}\left(\left(1-\frac{a(A,B)}{A}\right)^{k-1}-\left(1-\frac{b(A,B)}{A}\right)^{k-1}\right)$$

$$=-\frac{1}{A}\sum_{k=1}^{p-1}\left(\left(\frac{b(A,B)}{A}\right)^{k-1}-\left(\frac{a(A,B)}{A}\right)^{k-1}\right)$$

$$=\frac{1}{A}\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{A^{k-1}}\left(\left(a(A,B)\right)^{k-1}-\left(b(A,B)\right)^{k-1}\right)$$

$$=\left(a(A,B)-b(A,B)\right)\sum_{k=1}^{p-1}\frac{U_{k-1}(A,B)}{A^k}\pmod{p^2}$$

bulunur. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa ispat tamamlanır.

Şimdi de Denklem (2.2) nin ispatını verelim. Eşitlik (1.8) ve Denklik (1.22) den faydalanılarak

$$\sum_{j=1}^{p-1}\frac{V_{j-1}(A,B)}{A^j}\left(1-pH_j\right)\equiv\sum_{j=1}^{p-1}\frac{V_{j-1}(A,B)}{A^j}(-1)^j\binom{p-1}{j}$$

$$=\sum_{j=1}^{p-1}\frac{V_{j-1}(A,B)}{A^j}(-1)^j\sum_{k=j}^{p-1}\binom{k-1}{j-1}=\sum_{k=1}^{p-1}\sum_{j=1}^{k}\binom{k-1}{j-1}\frac{(-1)^j V_{j-1}(A,B)}{A^j}$$

$$=\sum_{k=1}^{p-1}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}\frac{(-1)^{j+1}V_j(A,B)}{A^{j+1}}\pmod{p^2}$$

elde edilir. $\{V_n(A,B)\}$ dizisinin Binet formülü ve Binom teoremi kullanılarak

$$\sum_{j=1}^{p-1}\frac{V_{j-1}(A,B)}{A^j}\left(1-pH_j\right)\equiv-\frac{1}{A}\sum_{k=1}^{p-1}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}\left(\left(-\frac{a(A,B)}{A}\right)^j+\left(-\frac{b(A,B)}{A}\right)^j\right)$$

$$=-\frac{1}{A}\sum_{k=1}^{p-1}\left(\left(1-\frac{a(A,B)}{A}\right)^{k-1}-\left(1-\frac{b(A,B)}{A}\right)^{k-1}\right)=-\frac{1}{A}\sum_{k=1}^{p-1}\left(\left(\frac{b(A,B)}{A}\right)^{k-1}+\left(\frac{a(A,B)}{A}\right)^{k-1}\right)$$

$$=-\frac{1}{A}\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{A^{k-1}}\left(\left(a(A,B)\right)^{k-1}+\left(b(A,B)\right)^{k-1}\right)=-\sum_{k=1}^{p-1}\frac{V_{k-1}(A,B)}{A^k}\ \left(\mathrm{mod}\ p^2\right),$$

denkliğinden, istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 2.1: p bir tek asal sayı olsun. O zaman

$$\sum_{k=1}^{p-1}\frac{P_{k-1}H_k}{2^k}\equiv 0\left(\mathrm{mod}\ p\right),\ \sum_{k=1}^{p-1}\frac{Q_{k-1}H_k}{2^k}\equiv\frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p-1}\frac{Q_{k-1}}{2^k}\left(\mathrm{mod}\ p\right)$$

ve $p\neq 3$ tek asal sayısı için

$$\sum_{k=1}^{p-1}\frac{P_{k-1}Q_{k-1}H_k}{6^k}\equiv 0\left(\mathrm{mod}\ p\right),\ \sum_{k=1}^{p-1}\frac{Q_{2k-2}H_k}{6^k}\equiv\frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p-1}\frac{Q_{2k-2}}{6^k}\left(\mathrm{mod}\ p\right)$$

dır. Burada P_n ve Q_n, sırasıyla n. Pell ve n. Pell-Lucas sayılarıdır.

İspat: Denklik (2.1) ve Denklik (2.2) de sırasıyla $A=2$ ve $B=-1$ alınırsa

$$\sum_{k=1}^{p-1}\frac{U_{k-1}(2,-1)}{2^k}H_k\equiv 0\left(\mathrm{mod}\ p\right)$$

ve

$$\sum_{k=1}^{p-1}\frac{V_{k-1}(2,-1)}{2^k}H_k\equiv\frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p-1}\frac{V_{k-1}(2,-1)}{2^k}\left(\mathrm{mod}\ p\right)$$

olduğu görülür. Burada $U_{k-1}(2,-1)=P_{k-1}$ ve $V_{k-1}(2,-1)=Q_{k-1}$ olduğundan

$$\sum_{k=1}^{p-1}\frac{P_{k-1}H_k}{2^k}\equiv 0\left(\mathrm{mod}\ p\right)\ \text{ve}\ \sum_{k=1}^{p-1}\frac{Q_{k-1}H_k}{2^k}\equiv\frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p-1}\frac{Q_{k-1}}{2^k}\left(\mathrm{mod}\ p\right)$$

denklikleri elde edilir.

Ayrıca Denklik (2.1) ve Denklik (2.2) de sırasıyla $A=-6$ ve $B=1$ alınırsa

$$\sum_{k=1}^{p-1}\frac{U_{k-1}(-6,1)}{(-6)^k}H_k \equiv 0 \pmod p$$

ve

$$\sum_{k=1}^{p-1}\frac{V_{k-1}(-6,1)}{(-6)^k}H_k \equiv \frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p-1}\frac{V_{k-1}(-6,1)}{(-6)^k} \pmod p$$

elde edilir. Burada $U_{k-1}(-6,1)=\frac{(-1)^k}{2}P_{k-1}Q_{k-1}$ ve $V_{k-1}(-6,1)=(-1)^{k-1}Q_{2(k-1)}$ olduğundan

$$\sum_{k=1}^{p-1}\frac{P_{k-1}Q_{k-1}H_k}{6^k} \equiv 0 \pmod p \text{ ve } \sum_{k=1}^{p-1}\frac{Q_{2k-2}H_k}{6^k} \equiv \frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p-1}\frac{Q_{2k-2}}{6^k} \pmod p$$

denklikleri bulunur ve böylece ispat tamamlanır.

Lemma 2.1: $A, B \in \mathbb{Z}$ ve p, $\left(\frac{B}{p}\right)=1$ olacak şekilde bir tek asal sayı olsun. $b \in \mathbb{Z}$ için $b^2 \equiv B \pmod p$ olmak üzere

$$U_{(p-1)/2}(A,B) \equiv \begin{cases} 0, & \left(\frac{\Delta}{p}\right)=1 \text{ ise} \\ \frac{1}{b}\left(\frac{A-2b}{p}\right), & \left(\frac{\Delta}{p}\right)=-1 \text{ ise} \end{cases} \pmod p$$

ve

$$U_{(p+1)/2}(A,B) \equiv \begin{cases} \left(\frac{A-2b}{p}\right), & \left(\frac{\Delta}{p}\right)=1 \text{ ise} \\ 0, & \left(\frac{\Delta}{p}\right)=-1 \text{ ise} \end{cases} \pmod p$$

dır [45].

Lemma 2.2: $b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $D=1-4b^2$ olsun.

i.) p, $p \nmid D$ olacak şekilde bir tek asal sayı olsun. O zaman

$$U_p(1,b^2) \equiv \left(\frac{D}{p}\right) \pmod p \tag{2.3}$$

ve

ii.) p asal sayısı için,

$$V_p\left(1,b^2\right)\equiv 1\left(\text{mod } p\right) \tag{2.4}$$

dir.

İspat: İlk olarak Denklik (2.3) ün ispatını verelim. $x^2 - x + b^2 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri $D = 1 - 4b^2$ olmak üzere

$$\tau = a\left(1,b^2\right) = \frac{1+\sqrt{D}}{2} \text{ ve } \sigma = b\left(1,b^2\right) = \frac{1-\sqrt{D}}{2}$$

dir. $\left\{U_n\left(1,b^2\right)\right\}$ dizisinin Binet formülü ve $\left(\tau^p - \sigma^p\right)\equiv\left(\tau - \sigma\right)^p\left(\text{mod } p\right)$ denkliği yardımıyla

$$DU_p\left(1,b^2\right) = \left(\tau - \sigma\right)^2 U_p\left(1,b^2\right) = \left(\tau - \sigma\right)\left(\tau^p - \sigma^p\right)\equiv\left(\tau - \sigma\right)^{p+1} = D^{(p+1)/2}\left(\text{mod } p\right)$$

olduğundan $p \nmid D$ olmak üzere p tek asal sayısı için

$$U_p\left(1,b^2\right)\equiv D^{(p-1)/2}\equiv\left(\frac{D}{p}\right)\left(\text{mod } p\right)$$

denkliği bulunur. Böylece istenilen sonuç elde edilir.

Şimdi de Denklik (2.4) ün ispatını verelim. $\left\{V_n\left(1,b^2\right)\right\}$ dizisinin Binet formülünün

$$V_p\left(1,b^2\right) = \tau^p + \sigma^p$$

olduğunu biliyoruz. Binom teoreminden

$$V_p\left(1,b^2\right) = \tau^p + \sigma^p \equiv \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\tau^k\sigma^{p-k} = \left(\tau + \sigma\right)^p = 1\left(\text{mod } p\right)$$

olur ve istenilen denklik elde edilmiş olur.

Lemma 2.3: $n \in \mathbb{N}$ ve $b \in \mathbb{Z}$ için

$$U_n\left(1,b^2\right) + V_n\left(1,b^2\right) = 2U_{n+1}\left(1,b^2\right) \tag{2.5}$$

dir.

İspat: $\left\{U_n\left(1,b^2\right)\right\}$ ve $\left\{V_n\left(1,b^2\right)\right\}$ dizilerinin Binet formülleri yardımıyla ispat kolayca elde edilir.

Lemma 2.4: $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ olmak üzere $D = 1 - 4b^2$ ve p, $p \nmid bD$ olacak şekilde bir tek asal sayı olsun. O zaman

$$U_{p-\left(\frac{D}{p}\right)}\left(1,b^2\right) \equiv 0 \pmod{p} \tag{2.6}$$

dır.

İspat: Denklik (2.6) nın sağlandığını gösterebilmek için $\left(\frac{D}{p}\right)=1$ iken

$$U_{p-1}\left(1,b^2\right) \equiv 0 \pmod{p} \tag{2.7}$$

ve $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$ iken

$$U_{p+1}\left(1,b^2\right) \equiv 0 \pmod{p} \tag{2.8}$$

olduğunu göstermeliyiz.

$\left(\frac{D}{p}\right)=1$ için $\left\{U_n\left(1,b^2\right)\right\}$ dizisinin tekrarlama bağıntısı ve Eşitlik (2.5) kullanılarak

$$b^2 U_{p-1}\left(1,b^2\right) = U_p\left(1,b^2\right) - U_{p+1}\left(1,b^2\right)$$

$$= U_p\left(1,b^2\right) - \frac{1}{2}\left(U_p\left(1,b^2\right) + V_p\left(1,b^2\right)\right) = \frac{U_p\left(1,b^2\right) - V_p\left(1,b^2\right)}{2} \tag{2.9}$$

eşitliği elde edilir. Denklik (2.3) ve Denklik (2.4), Eşitlik (2.9) da yerine yazılırsa

$$b^2 U_{p-1}\left(1,b^2\right) = \frac{U_p\left(1,b^2\right) - V_p\left(1,b^2\right)}{2} \equiv \frac{1}{2}\left(\left(\frac{D}{p}\right) - 1\right) = 0 \pmod{p}$$

denkliği elde edilir. Böylece $p \nmid b$ için Denklik (2.7) nin sağlandığı görülür.

$\left(\frac{D}{p}\right) = -1$ için, Denklik (2.3), Denklik (2.4) ve Eşitlik (2.5) den

$$2U_{p+1}\left(1,b^2\right) = U_p\left(1,b^2\right) + V_p\left(1,b^2\right) \equiv -1+1 = 0 \pmod{p}$$

olur. Böylece Denklik (2.8) elde edilir. Denklik (2.7) ve Denklik (2.8) birleştirilerek ispat tamamlanır.

Lemma 2.5: $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ olmak üzere $D = 1 - 4b^2$ ve p, $p \nmid bD$ olacak şekilde tek asal sayı olsun. O zaman

$$V_{p-\left(\frac{D}{p}\right)}\left(1,b^2\right) \equiv 2b^{p-\left(\frac{D}{p}\right)} \left(\mathrm{mod}\ p^2\right) \tag{2.10}$$

dir.

İspat: Denklik (2.10) un sağlandığını gösterebilmek için $\left(\frac{D}{p}\right)=1$ iken

$$V_{p-1}\left(1,b^2\right) \equiv 2b^{p-1} \left(\mathrm{mod}\ p^2\right)$$

ve $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$ iken

$$V_{p+1}\left(1,b^2\right) \equiv 2b^{p+1} \left(\mathrm{mod}\ p^2\right)$$

olduğunu göstermeliyiz.

$\left(\frac{D}{p}\right) = 1$ için, Eşitlik (2.5) den

$$V_{p-1}\left(1,b^2\right) = 2U_p\left(1,b^2\right) - U_{p-1}\left(1,b^2\right)$$

elde edilir. Denklik (2.3) ve Denklik (2.6) yardımıyla ve Küçük Fermat teoreminden

$$V_{p-1}\left(1,b^2\right) \equiv 2 \equiv 2b^{p-1} \left(\mathrm{mod}\ p\right)$$

elde edilir. Buradan

$$\left(V_{p-1}\left(1,b^2\right) - 2b^{p-1}\right)\left(V_{p-1}\left(1,b^2\right) + 2b^{p-1}\right)$$

$$= \left(\tau^{p-1} + \sigma^{p-1}\right)^2 - 4\left(\tau\sigma\right)^{p-1} = \left(\tau^{p-1} - \sigma^{p-1}\right)^2 = DU_{p-1}{}^2\left(1,b^2\right) \equiv 0 \ \left(\mathrm{mod}\ p^2\right)$$

denkliğinden

$$V_{p-1}\left(1,b^2\right) \equiv 2b^{p-1} \left(\mathrm{mod}\ p^2\right)$$

denkliği bulunur.

$\left(\frac{D}{p}\right)=-1$ için, Eşitlik (2.5) ve $\left\{U_n\left(1,b^2\right)\right\}$ dizisinin tekrarlama bağıntısı kullanılırsa

$$V_{p+1}\left(1,b^2\right)=2U_{p+2}\left(1,b^2\right)-U_{p+1}\left(1,b^2\right)=-2b^2U_p\left(1,b^2\right)+U_{p+1}\left(1,b^2\right)$$

dir. Denklik (2.3), Denklik (2.6) ve küçük Fermat teoreminden

$$V_{p+1}\left(1,b^2\right)=-2b^2U_p\left(1,b^2\right)+U_{p+1}\left(1,b^2\right)\equiv 2b^2\equiv 2b^{p+1}\left(\mathrm{mod}\ p\right)$$

denkliği bulunur. Buradan

$$\left(V_{p+1}\left(1,b^2\right)-2b^{p+1}\right)\left(V_{p+1}\left(1,b^2\right)+2b^{p+1}\right)$$

$$=\left(\tau^{p+1}+\sigma^{p+1}\right)^2-4\left(\tau\sigma\right)^{p+1}=\left(\tau^{p+1}-\sigma^{p+1}\right)^2=DU_{p+1}{}^2\left(1,b^2\right)\equiv 0\left(\mathrm{mod}\ p^2\right)$$

denkliği düşünülerek

$$V_{p+1}\left(1,b^2\right)\equiv 2b^{p+1}\left(\mathrm{mod}\ p^2\right)$$

denkliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.2: $b\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ olmak üzere $D=1-4b^2$ ve p, $p\nmid bD$ olacak şekilde tek asal sayı olsun. O zaman

$$U_p\left(1,b^2\right)-b^{p-1}\left(\frac{D}{p}\right)\equiv\frac{1}{2}b^{\left(\frac{D}{p}\right)-1}U_{p-\left(\frac{D}{p}\right)}\left(1,b^2\right)\left(\mathrm{mod}\ p^2\right) \tag{2.11}$$

dir.

İspat: Denklik (2.11) in sağlandığını gösterebilmek için $\left(\frac{D}{p}\right)=1$ iken

$$U_{p-1}\left(1,b^2\right)+2b^{p-1}\equiv 2U_p\left(1,b^2\right)\left(\mathrm{mod}\ p\right) \tag{2.12}$$

ve $\left(\frac{D}{p}\right)=-1$ iken

$$U_p\left(1,b^2\right)+b^{p-1}\equiv\frac{1}{2b^2}U_{p+1}\left(1,b^2\right)\left(\mathrm{mod}\ p^2\right) \tag{2.13}$$

olduğunu göstermeliyiz.

$\left(\frac{D}{p}\right)=1$ ve $p \nmid b$ için Eşitlik (2.5), Denklik (2.7) ve Denklik (2.10) dan

$$2U_p\left(1,b^2\right)=U_{p-1}\left(1,b^2\right)+V_{p-1}\left(1,b^2\right)\equiv U_{p-1}\left(1,b^2\right)+2b^{p-1}\left(\mathrm{mod}\ p^2\right)$$

olur. Böylece Denklik (2.12) elde edilir.

$\left(\frac{D}{p}\right)=-1$ için, $\left\{U_n\left(1,b^2\right)\right\}$ dizisinin tekrarlama bağıntısı ve Eşitlik (2.5) kullanılarak

$$2b^2U_p\left(1,b^2\right)=2\left(U_{p+1}\left(1,b^2\right)-U_{p+2}\left(1,b^2\right)\right)$$

$$=2U_{p+1}\left(1,b^2\right)-\left(U_{p+1}\left(1,b^2\right)+V_{p+1}\left(1,b^2\right)\right)=U_{p+1}\left(1,b^2\right)-V_{p+1}\left(1,b^2\right)$$

olur. Burada Denklik (2.8) ve Denklik (2.10) kullanılarak

$$2b^2U_p\left(1,b^2\right)=U_{p+1}\left(1,b^2\right)-V_{p+1}\left(1,b^2\right)\equiv U_{p+1}\left(1,b^2\right)-2b^{p+1}\left(\mathrm{mod}\ p^2\right)$$

elde edilir ki Denklik (2.13) dir. Bu iki denklik birleştirilerek ispat tamamlanır.

Lemma 2.6: $b\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ olmak üzere $D=1-4b^2$ ve p, $p \nmid bD$ olacak şekilde tek asal sayı olsun. $\varepsilon=\left(1-\left(\frac{D}{p}\right)\right)/2$ olmak üzere

$$(1-2b)^{p-1}U_{\left(p-\left(\frac{D}{p}\right)\right)/2}\equiv\frac{U_{p-\left(\frac{D}{p}\right)}}{2(-b)^{\varepsilon}}\left(\mathrm{mod}\ p^2\right)$$

dir.

İspat: Lemma 2.1'de $A=1$ ve $B=b^2$ yazılırsa

$$U_{\left(p-\left(\frac{D}{p}\right)\right)/2}\left(1,b^2\right)\equiv 0\left(\mathrm{mod}\ p\right)\ \text{ve}\ U_{\left(p+\left(\frac{D}{p}\right)\right)/2}\left(1,b^2\right)\equiv\left(\frac{1-2b}{p}\right)b^{\left(\left(\frac{D}{p}\right)-1\right)/2}\left(\mathrm{mod}\ p\right)\qquad(2.14)$$

denklikleri elde edilir.

$\left(\frac{D}{p}\right)=1$ için Denklik (2.14) den sırasıyla

$$U_{(p-1)/2}\left(1,b^2\right)\equiv 0\left(\mathrm{mod}\ p\right)\qquad(2.15)$$

ve

$$U_{(p+1)/2}\left(1,b^2\right)\equiv\left(\frac{1-2b}{p}\right)\left(\text{mod } p\right) \tag{2.16}$$

denklikleri bulunur. Eşitlik (2.5), Denklik (2.15) ve Denklik (2.16) dan

$$V_{(p-1)/2}\left(1,b^2\right)=2U_{(p+1)/2}\left(1,b^2\right)-U_{(p-1)/2}\left(1,b^2\right)\equiv 2\left(\frac{1-2b}{p}\right)\left(\text{mod } p\right) \tag{2.17}$$

elde edilir. Böylece Denklik (2.15) ve Denklik (2.17) yardımıyla

$$U_{p-1}\left(1,b^2\right)=U_{(p-1)/2}\left(1,b^2\right)V_{(p-1)/2}\left(1,b^2\right)$$

$$\equiv 2\left(\frac{1-2b}{p}\right)U_{(p-1)/2}\left(1,b^2\right)\equiv 2\left(1-2b\right)^{(p-1)/2}U_{(p-1)/2}\left(1,b^2\right)\left(\text{mod } p^2\right) \tag{2.18}$$

denkliği elde edilir.

$\left(\frac{D}{p}\right)=-1$ için Denklik (2.14) den sırasıyla

$$U_{(p+1)/2}\left(1,b^2\right)\equiv 0\left(\text{mod } p\right) \tag{2.19}$$

ve

$$U_{(p-1)/2}\left(1,b^2\right)\equiv\frac{1}{b}\left(\frac{1-2b}{p}\right)\left(\text{mod } p\right) \tag{2.20}$$

denklikleri bulunur. $\left\{U_n\left(1,b^2\right)\right\}$ dizisinin tekrarlama bağıntısı, Denklik (2.19) ve Deklik (2.20) kullanılırsa

$$V_{(p+1)/2}\left(1,b^2\right)=2U_{(p+3)/2}\left(1,b^2\right)-U_{(p+1)/2}\left(1,b^2\right)$$

$$=U_{(p+1)/2}\left(1,b^2\right)-2b^2U_{(p-1)/2}\left(1,b^2\right)\equiv -2b^2\frac{1}{b}\left(\frac{1-2b}{p}\right)=-2b\left(\frac{1-2b}{p}\right)\left(\text{mod } p\right) \tag{2.21}$$

dir. Böylece Denklik (2.19) ve Denklik (2.21) yardımıyla

$$U_{p+1}\left(1,b^2\right)=U_{(p+1)/2}\left(1,b^2\right)V_{(p+1)/2}\left(1,b^2\right)$$

$$\equiv -2b\left(\frac{1-2b}{p}\right)U_{(p+1)/2}\left(1,b^2\right)\equiv -2b\left(1-2b\right)^{(p-1)/2}U_{(p+1)/2}\left(1,b^2\right)\left(\text{mod } p^2\right) \tag{2.22}$$

bulunur. Böylece Denklik (2.18) ve Denklik (2.22) den ispat tamamlanır.

Teorem 2.3: $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ olmak üzere p, $p \nmid bD$ olacak şekilde bir tek asal sayı olsun.

$\varepsilon=\left(1-\left(\frac{D}{p}\right)\right)/2$ için

$$\sum_{k=0}^{p-1} \frac{U_{k+\varepsilon}\left(1,b^2\right)}{b^k} H_k \equiv 0 \pmod{p} \tag{2.23}$$

dır.

İspat: Denklik (2.23) ün ispatı için ilk olarak

$$\sum_{k=0}^{p-1} b^{p-1-k} U_{k+\varepsilon}\left(1,b^2\right) \equiv \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} (-b)^{p-1-k} U_{k+\varepsilon}\left(1,b^2\right) \pmod{p^2} \tag{2.24}$$

denkliğini ispatlayalım.

İlk olarak Denklik (2.24) ün sol tarafını inceleyelim. Denklik (2.24) ün sol tarafına $\left\{U_{k+\varepsilon}\left(1,b^2\right)\right\}$ dizisinin Binet formülü yazılırsa

$$\sum_{k=0}^{p-1} b^{p-1-k} U_{k+\varepsilon}\left(1,b^2\right) = \sum_{k=0}^{p-1} b^{p-1-k} \frac{\tau^{k+\varepsilon}-\sigma^{k+\varepsilon}}{\tau-\sigma}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\sum_{k=0}^{p-1} x^k y^{p-1-k} = \frac{x^p-y^p}{x-y}$$

toplamı kullanılarak

$$\sum_{k=0}^{p-1} b^{p-1-k} U_{k+\varepsilon}\left(1,b^2\right) = \frac{1}{\tau-\sigma}\left(\tau^{\varepsilon} \frac{\tau^p-b^p}{\tau-b} - \sigma^{\varepsilon} \frac{\sigma^p-b^p}{\sigma-b}\right)$$

$$= \frac{1}{\tau-\sigma}\left\{\frac{1}{(\tau-b)(\sigma-b)}\left(\tau^{\varepsilon}(\sigma-b)\left(\tau^p-b^p\right)-\sigma^{\varepsilon}(\tau-b)\left(\sigma^p-b^p\right)\right)\right\} \tag{2.25}$$

dır. Hatta

$$(\tau-b)(\sigma-b)=\tau\sigma-b(\tau+\sigma)+b^2=b(2b-1)$$

ve

$$\tau^{\varepsilon}(\sigma-b)(\tau^{p}-b^{p})-\sigma^{\varepsilon}(\tau-b)(\sigma^{p}-b^{p})=(\tau-\sigma)(b^{p+\varepsilon}-bU_{p+\varepsilon}(1,b^{2})+b^{2}U_{p+\varepsilon-1}(1,b^{2}))$$

olduğundan

$$\sum_{k=0}^{p-1} b^{p-1-k}U_{k+\varepsilon}(1,b^{2})=\frac{b^{p+\varepsilon-1}-U_{p+\varepsilon}(1,b^{2})+bU_{p+\varepsilon-1}(1,b^{2})}{2b-1}$$

elde edilir.

Şimdi de Denklik (2.24) ün sağ tarafını inceleyelim. Denklik (2.24) ün sağ tarafına $\{U_{k+\varepsilon}(1,b^{2})\}$ dizisinin Binet formülü yazılırsa

$$\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p-1}{k}(-b)^{p-1-k}U_{k+\varepsilon}(1,b^{2})=\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p-1}{k}(-b)^{p-1-k}\frac{\tau^{k+\varepsilon}-\sigma^{k+\varepsilon}}{\tau-\sigma}$$

elde edilir. Binom teoremi yardımıyla

$$\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p-1}{k}(-b)^{p-1-k}U_{k+\varepsilon}(1,b^{2})=\frac{\tau^{\varepsilon}(\tau-b)^{p-1}-\sigma^{\varepsilon}(\sigma-b)^{p-1}}{\tau-\sigma}$$

olarak yazılabilir. Burada

$$(\tau-b)^{2}=(1-2b)\tau$$

ve

$$(\sigma-b)^{2}=(1-2b)\sigma$$

eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p-1}{k}(-b)^{p-1-k}U_{k+\varepsilon}(1,b^{2})=\frac{\tau^{\varepsilon}((1-2b)\tau)^{(p-1)/2}-\sigma^{\varepsilon}((1-2b)\sigma)^{(p-1)/2}}{\tau-\sigma}$$

$$=(1-2b)^{(p-1)/2}\frac{\tau^{(p-1)/2+\varepsilon}-\sigma^{(p-1)/2+\varepsilon}}{\tau-\sigma}=(1-2b)^{(p-1)/2}U_{\left(p-\left(\frac{D}{p}\right)\right)/2}(1,b^{2})$$

eşitliği elde edilir. Lemma 2.6'dan

$$\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p-1}{k}(-b)^{p-1-k}U_{k+\varepsilon}(1,b^{2})=(1-2b)^{(p-1)/2}U_{\left(p-\left(\frac{D}{p}\right)\right)/2}(1,b^{2})\equiv\frac{U_{p-\left(\frac{D}{p}\right)}(1,b^{2})}{2(-b)^{\varepsilon}}\pmod{p^{2}}$$

elde edilir. Böylece Denklik (2.24) ün sağlandığını göstermek için

$$\frac{b^{p+\varepsilon-1}-U_{p+\varepsilon}\left(1,b^2\right)+bU_{p+\varepsilon-1}\left(1,b^2\right)}{2b-1}\equiv\frac{U_{p-\left(\frac{D}{p}\right)}\left(1,b^2\right)}{2(-b)^{\varepsilon}}\left(\mathrm{mod}\ p^2\right) \tag{2.26}$$

olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır.

$\left(\frac{D}{p}\right)=1$ için $\varepsilon=0$ olur ve buradan Denklik (2.11) den,

$$\frac{b^{p-1}-U_p\left(1,b^2\right)+bU_{p-1}\left(1,b^2\right)}{2b-1}$$

$$\equiv\frac{1}{2b-1}\left(bU_{p-1}\left(1,b^2\right)-\frac{1}{2}U_{p-1}\left(1,b^2\right)\right)=\frac{(2b-1)U_{p-1}\left(1,b^2\right)}{2(2b-1)}=\frac{U_{p-1}\left(1,b^2\right)}{2}\left(\mathrm{mod}\ p^2\right)$$

olup Denklik (2.26) nın sağlandığı görülür.

$\left(\frac{D}{p}\right)=-1$ için $\varepsilon=1$ olur ve buradan Denklik (2.11) den,

$$\frac{b^{p}-U_{p+1}\left(1,b^2\right)+bU_{p}\left(1,b^2\right)}{2b-1}$$

$$\equiv\frac{1}{2b-1}\left(\frac{1}{2b}U_{p+1}\left(1,b^2\right)-U_{p+1}\left(1,b^2\right)\right)=-\frac{(2b-1)U_{p+1}\left(1,b^2\right)}{2b(2b-1)}=\frac{U_{p+1}\left(1,b^2\right)}{2(-b)}\left(\mathrm{mod}\ p^2\right)$$

olup Denklik (2.26) nın sağlandığı görülür.

O halde p tek asal sayısı için Denklik (2.24) yardımıyla $p\nmid bD$ olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{p-1}b^{p-1-k}\frac{1}{p}\left(1-\binom{p-1}{k}(-1)^k\right)U_{k+\varepsilon}\left(1,b^2\right)\equiv 0\left(\mathrm{mod}\ p\right) \tag{2.27}$$

yazabiliriz. Küçük Fermat teoreminden

$$\sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{p}\left(1-\binom{p-1}{k}(-1)^k\right)\frac{U_{k+\varepsilon}\left(1,b^2\right)}{b^k}\equiv 0\left(\mathrm{mod}\ p\right)$$

dir. Ayrıca Denklik (1.22) den

$$\frac{1}{p}\left(1-\binom{p-1}{k}(-1)^k\right)\equiv H_k\left(\mathrm{mod}\ p\right)$$

olup Denklik (2.27) de yerine yazılırsa $\varepsilon=0,\ 1$ değerleri için ispat tamamlanır.

3. BİNOM KATSAYILARI, HARMONİK SAYILAR VE FİBONACCİ SAYILARINI İÇEREN DENKLİKLER

Bu kısımda, binom katsayıları, harmonik ve Fibonacci sayıları ile ilgili yapılan bazı denklikler verildi.

İlk olarak teoremlerin ispatlarında kullanılacak bazı eşitlikleri ve denklikleri verelim.

Lemma 3.1: $n > 1$ ve $x \in IR$ olsun. O zaman

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}\frac{(-x)^k}{k}H_{k-1}=\frac{(1-x)^n-(-1)^n x^n-1}{n}H_{n-1}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^k-1}{k(n-k)}$$

dır.

İspat: Binom teoreminden ve Eşitlik (1.4) den

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^k-1}{k(n-k)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(n-k)}\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}(-x)^j=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n-k}\sum_{j=1}^{k}\binom{k-1}{j-1}\frac{(-x)^j}{j}=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(-x)^j}{j}\sum_{k=j}^{n-1}\binom{k-1}{j-1}\frac{1}{n-k} \qquad (3.1)$$

elde edilir. [25] de verilen

$$\sum_{k=j}^{n-1}\binom{k-1}{j-1}\frac{1}{n-k}=\binom{n-1}{j-1}\left(H_{n-1}-H_{j-1}\right)$$

eşitliği, Eşitlik (3.1) de yerine yazılırsa

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^k-1}{k(n-k)}=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(-x)^j}{j}\binom{n-1}{j-1}\left(H_{n-1}-H_{j-1}\right)=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(-x)^j}{n}\binom{n}{j}\left(H_{n-1}-H_{j-1}\right)$$

$$=\frac{H_{n-1}}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n}{j}(-x)^j-\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n}{j}\frac{(-x)^j}{n}H_{j-1}=\frac{(1-x)^n-(-x)^n-1}{n}H_{n-1}-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n}{j}(-x)^j H_{j-1}$$

olup istenilen sonuç elde edilir.

Lemma 3.2: $n > 1$ ve $x \in \mathbb{R}$ olsun. O zaman

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{(-x)^{k+1}}{k+1}H_k = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{x^{k+1}}{(k+1)^2}\left((-1)^k-(1-x)^{n-k-1}\right)$$

dır.

İspat: Lemma 3.1 yardımıyla

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}\frac{(-x)^k}{k}H_{k-1}=\frac{(1-x)^n-(-x)^n-1}{n}H_{n-1}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^k-1}{k}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^k-1}{n-k}$$

$$=\frac{(1-x)^n-(-x)^n-1}{n}H_{n-1}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^k-1}{k}-\frac{(1-x)^n}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^{-k}-1}{k}+\frac{1-(1-x)^n}{n}H_{n-1}$$

$$=-\frac{(-x)^n}{n}H_{n-1}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^k-1}{k}-\frac{(1-x)^n}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^{-k}-1}{k} \qquad (3.2)$$

eşitliği elde edilir. [36] de verilen

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x^k-1}{k}=n\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}\frac{(x-1)^k}{k^2}-\frac{x^n-(x-1)^n-1}{n}$$

eşitliği, Eşitlik (3.2) de yerine yazılırsa

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}\frac{(-x)^k}{k}H_{k-1}=-\frac{(-x)^n}{n}H_{n-1}-\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}\frac{(-x)^k}{k^2}+\frac{(1-x)^n-(-x)^n-1}{n^2}$$

$$-(1-x)^n\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}\frac{x^k}{(1-x)^k k^2}+\frac{(1-x)^n}{n^2}\left((1-x)^{-n}-x^n(1-x)^{-n}-1\right)$$

$$=-\frac{(-x)^n}{n}H_{n-1}-\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}\frac{(-x)^k}{k^2}-\frac{(-x)^n}{n^2}-(1-x)^n\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}\frac{x^k}{(1-x)^k k^2}-\frac{x^n}{n^2}$$

$$=-\frac{(-x)^n}{n}H_{n-1}-\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\frac{(-x)^k}{k^2}-(1-x)^n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\frac{x^k}{(1-x)^k k^2}$$

$$=-\frac{(-x)^n}{n}H_{n-1}-\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{(-x)^{k+1}}{(k+1)^2}-(1-x)^n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{x^{k+1}}{(1-x)^{k+1}(k+1)^2}$$

olup istenilen sonuç elde edilir.

Lemma 3.3: p tek asal sayı olsun. Herhangi bir $x \in \mathbb{Z}_p$ için

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2} \frac{x^k}{k} \equiv \frac{2}{p} - \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^p - \left(\sqrt{x}-1\right)^p}{p} \pmod p$$

dır [46].

Lemma 3.4: p tek asal sayı olsun. Herhangi bir $x \in \mathbb{Z}_p$ için

$$\sum_{k=1}^{(p-3)/2} \frac{x^k}{2k+1} \equiv \frac{1}{2p\sqrt{x}}\left(\left(\sqrt{x}+1\right)^p + \left(\sqrt{x}-1\right)^p - 2\left(\sqrt{x}\right)^p\right) - 1 \pmod p$$

dır.

İspat: Toplam özelliklerinden

$$\sum_{k=1}^{(p-3)/2} \frac{x^k}{2k+1} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\sum_{k=1}^{p-1} \frac{\left(\sqrt{x}\right)^k}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{(p-1)/2} \frac{x^k}{k}\right) - 1$$

eşitliğini düşünelim. Lemma 3.3 ve Denklik (1.24) yardımıyla

$$\sum_{k=1}^{(p-3)/2} \frac{x^k}{2k+1} \equiv \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1 - \left(\sqrt{x}\right)^p + \left(\sqrt{x}-1\right)^p}{p} - \frac{1}{p} + \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^p - \left(\sqrt{x}-1\right)^p}{2p}\right) - 1$$

$$= \frac{1}{2p\sqrt{x}}\left(\left(\sqrt{x}+1\right)^p + \left(\sqrt{x}-1\right)^p - 2\left(\sqrt{x}\right)^p\right) - 1 \pmod p$$

elde edilir. Böylece Lemma 3.4'ün ispatı tamamlanır.

Lemma 3.5: $n > 1$ ve $x \in \mathbb{R}$ olsun. O zaman

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(1-x)^k - 1}{k} H_{k-1} = H_n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(1-x)^k - 1}{k} + \frac{(1-x)^n - (-x)^n - 1}{n^2} - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{(-x)^k}{k^2}$$

dır.

İspat: Binom teoreminden ve Eşitlik (1.4) den

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(1-x)^k - 1}{k} H_{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{H_{k-1}}{k} \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} (-x)^j = \sum_{k=1}^{n-1} H_{k-1} \sum_{j=1}^{k} \binom{k-1}{j-1} \frac{(-x)^j}{j} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-x)^j}{j} \sum_{k=j}^{n-1} \binom{k-1}{j-1} H_{k-1}$$

elde edilir. Eşitlik (1.14) de n ve m yerine sırasıyla $n-2$ ve $j-1$ alınır ve yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^k-1}{k}H_{k-1}=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(-x)^j}{j}\binom{n-1}{j}\left(H_{n-1}-\frac{1}{j}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(-x)^j}{j}\left(\binom{n}{j}-\binom{n-1}{j-1}\right)\left(H_{n-1}-\frac{1}{j}\right)=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(-x)^j}{j}\left(\frac{n}{j}\binom{n-1}{j-1}-\frac{j}{n}\binom{n}{j}\right)\left(H_{n-1}-\frac{1}{j}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{n(-x)^j}{j^2}\binom{n-1}{j-1}\left(H_{n-1}-\frac{1}{j}\right)-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(-x)^j}{n}\binom{n}{j}\left(H_{n-1}-\frac{1}{j}\right)$$

$$=nH_{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(-x)^j}{j^2}\binom{n-1}{j-1}-n\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(-x)^j}{j^3}\binom{n-1}{j-1}-\frac{H_{n-1}}{n}\sum_{j=1}^{n-1}(-x)^j\binom{n}{j}+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(-x)^j}{j}\binom{n}{j}$$

eşitliği elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^k-1}{k}H_{k-1}=\left(nH_{n-1}+1\right)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-x)^k}{k^2}\binom{n-1}{k-1}-n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-x)^k}{k^3}\binom{n-1}{k-1}-H_{n-1}\frac{(1-x)^n-(-x)^n-1}{n}$$

bulunur. Ayrıca Eşitlik (1.26) yardımıyla

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^k-1}{k}H_{k-1}$$

$$=\frac{nH_{n-1}+1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^k-1}{k}-n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-x)^k}{k^3}\binom{n-1}{k-1}+\left(\frac{nH_{n-1}+1}{n}-H_{n-1}\right)\frac{(1-x)^n-(-x)^n-1}{n}$$

$$=H_n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^k-1}{k}+\frac{(1-x)^n-(-x)^n-1}{n^2}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-x)^k}{k^2}\binom{n}{k}$$

eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 3.6: $n>1$ ve $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ olsun. O zaman

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^k-1}{n-k}H_{k-1}$$

$$=H_{n,2}\left(1-(1-x)^n\right)+H_{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^{n-k}-1}{k}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^k-1}{k}-(1-x)^n\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{H_k}{k}\left(\frac{x}{1-x}\right)^k$$

dır.

İspat: Toplam özelliklerinden

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^{k}-1}{n-k}H_{k-1}$$
$$=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^{n-k}-1}{k}H_{n-k-1}=(1-x)^{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^{-k}-1}{k}H_{n-k-1}+\left((1-x)^{n}-1\right)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{H_{n-k-1}}{k} \quad (3.3)$$

olarak yazılabilir. Eşitlik (1.16) dan

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{H_{n-k-1}}{k}=H_{n-1}^{2}-H_{n-1,2}$$

olduğu bilindiğine göre geriye

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^{-k}-1}{k}H_{n-k-1} \quad (3.4)$$

toplamının hesaplanması kalmaktadır.

O halde şimdi Toplam (3.4) ü bulalım. Binom teoreminden

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^{-k}-1}{k}H_{n-k-1}=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\left(1-\frac{x}{x-1}\right)^{k}-1\right)\frac{H_{n-k-1}}{k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{H_{n-k-1}}{k}\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{j}=\sum_{k=1}^{n-1}H_{n-k-1}\sum_{j=1}^{k}\binom{k-1}{j-1}\frac{1}{j}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{j}=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{j}\sum_{k=j}^{n-1}\binom{k-1}{j-1}H_{n-k-1}$$

elde edilir. Eşitlik (1.13) de n ve m yerine sırasıyla n-2 ve j-1 alınır ve yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^{-k}-1}{k}H_{n-k-1}=\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n-1}{j}\frac{1}{j}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{j}\left(H_{n-1}-H_{j}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{j}\left(\binom{n}{j}-\binom{n-1}{j-1}\right)\left(H_{n-1}-H_{j}\right)=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{j}\left(\frac{n}{j}\binom{n-1}{j-1}-\frac{j}{n}\binom{n}{j}\right)\left(H_{n-1}-H_{j}\right)$$

$$=n\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j^{2}}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{j}\binom{n-1}{j-1}\left(H_{n-1}-H_{j}\right)-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{j}\binom{n}{j}\left(H_{n-1}-H_{j}\right)$$

$$=nH_{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j^{2}}\binom{n-1}{j-1}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{j}-\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n}{j}\frac{H_{j}}{j}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{j}-\frac{H_{n-1}}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n}{j}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{j}+\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n}{j}\frac{H_{j}}{n}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{j}$$

eşitliği elde edilir. Burada Eşitlik (1.26) ve Lemma 3.1'den faydalanılarak

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^{-k}-1}{k}H_{n-k-1}=nH_{n-1}\left\{\frac{(1-x)^{-n}-x^{n}(1-x)^{-n}-1}{n^{2}}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^{-k}-1}{k}\right\}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^{-k}-1}{n-k}$$

$$-\frac{H_{n-1}}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{k}-n\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}\frac{H_{k}}{k^{2}}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{k}+\frac{(1-x)^{-n}-x^{n}(1-x)^{-n}-1}{n}H_{n}$$

bulunur. Buradan Binom teoremi yardımıyla

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^{-k}-1}{k}H_{n-k-1}=\frac{(1-x)^{-n}-x^{n}(1-x)^{-n}-1}{n}H_{n-1}-\frac{(1-x)^{-n}-x^{n}(1-x)^{-n}-1}{n}H_{n-1}$$

$$+H_{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^{-k}-1}{k}-\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\frac{H_{k}}{k}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{k}+\frac{(1-x)^{-n}-x^{n}(1-x)^{-n}-1}{n}H_{n}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^{-k}-1}{n-k}$$

$$=\frac{H_{n}}{n}\left((1-x)^{-n}-1\right)+H_{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^{-k}-1}{k}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^{-k}-1}{n-k}-\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{H_{k}}{k}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{k}$$

elde edilir. Böylece bu Eşitlik (3.3) de yerine yazıldığında ispat tamamlanır.

Lemma 3.7: $n>1$ ve $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ olsun. O zaman

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(-x)^{k}H_{k-1,2}$$

$$=-H_{n-1,2}(-x)^{n}-\frac{(1-x)^{n}-1}{n^{2}}-(1-x)^{n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{H_{k}}{k}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{k}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^{k}-1}{k}H_{k-1}-H_{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^{k}-1}{k}$$

dır.

İspat: Binom teoreminden

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^{k}-1}{k(n-k)}H_{k-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{H_{k-1}}{k(n-k)}\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}(-x)^{j}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{H_{k-1}}{n-k}\sum_{j=1}^{k}\binom{k-1}{j-1}\frac{(-x)^{j}}{j}=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(-x)^{j}}{j}\sum_{k=j}^{n-1}\binom{k-1}{j-1}\frac{H_{k-1}}{n-k}$$

elde edilir. Eşitlik (1.14) den

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^k-1}{k(n-k)}H_{k-1}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-x)^k}{k}\binom{n-1}{k-1}\left(H_{n-1}\left(H_{n-1}-H_{k-1}\right)-H_{n-1,2}+H_{k-1,2}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-x)^k}{n}\binom{n}{k}\left(H_{n-1}\left(H_{n-1}-H_{k-1}\right)-H_{n-1,2}+H_{k-1,2}\right)$$

$$=\frac{H_{n-1}^2-H_{n-1,2}}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(-x)^k-\frac{H_{n-1}}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(-x)^k H_{k-1}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(-x)^k H_{k-1,2}$$

elde edilir. Binom teoremi ve Lemma 3.1'den

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^k-1}{k(n-k)}H_{k-1}$$

$$=\left(H_{n-1}^2-H_{n-1,2}\right)\frac{(1-x)^n-(-x)^n-1}{n}-H_{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}\frac{(-x)^k}{k}H_{k-1}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(-x)^k H_{k-1,2}$$

$$=\left(H_{n-1}^2-H_{n-1,2}-H_{n-1}^2\right)\frac{(1-x)^n-(-x)^n-1}{n}+H_{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^k-1}{k(n-k)}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(-x)^k H_{k-1,2}$$

$$=-H_{n-1,2}\frac{(1-x)^n-(-x)^n-1}{n}+H_{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^k-1}{k(n-k)}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(-x)^k H_{k-1,2}$$

bulunur. Bu son eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(-x)^k H_{k-1,2}=H_{n-1,2}\left((1-x)^n-(-x)^n-1\right)-nH_{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^k-1}{k(n-k)}+n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^k-1}{k(n-k)}H_{k-1}$$

$$=H_{n-1,2}\left((1-x)^n-(-x)^n-1\right)$$
$$-H_{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^k-1}{k}-H_{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^k-1}{n-k}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^k-1}{k}H_{k-1}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^k-1}{n-k}H_{k-1}$$

elde edilir. Böylece Lemma 3.6' daki eşitlikten faydalanılarak istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 3.1: p tek asal sayı olsun. Herhangi bir $x\in\mathbb{Z}_p\setminus\left\{\frac{1}{4}\right\}$ için

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}H_{k-1}x^k\equiv\frac{2^p}{p}\left(2\frac{\lambda^{p+1}-\mu^{p+1}}{\lambda-\mu}-1-(\lambda-\mu)^{p-1}\right)(\mathrm{mod}\,p)\qquad(3.5)$$

dır. Burada $\lambda=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-4x}\right)$ ve $\mu=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-4x}\right)$ şeklindedir.

İspat: Lemma 3.1' de n yerine $\frac{p-1}{2}$, x yerine 4x yazılırsa

$$\frac{2}{p-1}\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\binom{(p-1)/2}{k}(-4x)^k H_{k-1}=2\frac{(1-4x)^{(p-1)/2}-1}{p-1}H_{(p-3)/2}-2\sum_{k=1}^{(p-3)/2}\frac{(1-4x)^k-1}{k(p-2k-1)}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $\frac{1}{p-1}\equiv -1(\mathrm{mod}\, p)$ ve $k = 1, 2, ..., (p-3)/2$ için

$\frac{1}{k(p-1-2k)}\equiv -\frac{1}{k(2k+1)}(\mathrm{mod}\, p)$ denklikleri kullanılırsa

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\binom{(p-1)/2}{k}(-4x)^k H_{k-1}\equiv\left(-1+(1-4x)^{(p-1)/2}\right)H_{(p-3)/2}-\sum_{k=1}^{(p-3)/2}\frac{(1-4x)^k-1}{k(2k+1)}(\mathrm{mod}\, p)$$

denkliği elde edilir. Ayrıca Denklik (1.6) ve Denklik (1.18) kullanılarak

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}x^k H_{k-1}\equiv 2\left(-1+(1-4x)^{(p-1)/2}\right)\left(1-q_p(2)\right)-\sum_{k=1}^{(p-3)/2}\frac{(1-4x)^k-1}{k(2k+1)}$$

$$=2\left(\left(\sqrt{1-4x}\right)^{p-1}-1\right)\left(1-q_p(2)\right)-\sum_{k=1}^{(p-3)/2}\frac{(1-4x)^k-1}{k}+2\sum_{k=1}^{(p-3)/2}\frac{(1-4x)^k-1}{2k+1}(\mathrm{mod}\, p) \qquad (3.6)$$

denkliği bulunur. Lemma 3.4' den

$$\sum_{k=1}^{(p-3)/2}\frac{(1-4x)^k-1}{2k+1}$$
$$\equiv\frac{1}{2p\sqrt{1-4x}}\left(\left(1+\sqrt{1-4x}\right)^p+\left(-1+\sqrt{1-4x}\right)^p-2\left(\sqrt{1-4x}\right)^p\right)-q_p(2)(\mathrm{mod}\, p) \qquad (3.7)$$

olup Denklik (3.7), Denklik (3.6) da yerine yazılırsa

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}x^k H_{k-1}\equiv 2\left(-1+(1-4x)^{(p-1)/2}\right)\left(1-q_p(2)\right)-\sum_{k=1}^{(p-3)/2}\frac{(1-4x)^k-1}{k}$$

$$+\frac{1}{p\sqrt{1-4x}}\left(\left(1+\sqrt{1-4x}\right)^p+\left(-1+\sqrt{1-4x}\right)^p-2\left(\sqrt{1-4x}\right)^p\right)-2q_p(2)(\mathrm{mod}\, p)$$

elde edilir. p tek asal sayısı için, Lemma 3.3 ve Denklik (1.18) yardımıyla

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}x^k H_{k-1}$$

$$\equiv \frac{1}{p\sqrt{1-4x}}\left(\left(1+\sqrt{1-4x}\right)^p+\left(-1+\sqrt{1-4x}\right)^p-2\left(\sqrt{1-4x}\right)^p\right)-2\left((1-4x)^{(p-1)/2}-1\right)$$

$$+2\left(1-q_p(2)\right)\left((1-4x)^{(p-1)/2}-1\right)-\frac{1}{p}\left(\left(-1+\sqrt{1-4x}\right)^p-\left(1+\sqrt{1-4x}\right)^p+2^p\right)-2q_p(2)$$

$$=\frac{1}{p\sqrt{1-4x}}\left(\left(1+\sqrt{1-4x}\right)^{p+1}-\left(-1+\sqrt{1-4x}\right)^{p+1}\right)-2q_p(2)\left(\sqrt{1-4x}\right)^{p-1}-\frac{1}{p}\left(2\left(\sqrt{1-4x}\right)^{p-1}+2^p\right)$$

$$=\frac{1}{p\sqrt{1-4x}}\left(\left(1+\sqrt{1-4x}\right)^{p+1}-\left(1-\sqrt{1-4x}\right)^{p+1}\right)-\frac{2^p}{p}\left(\left(\sqrt{1-4x}\right)^{p-1}+1\right)(\mathrm{mod}\ p)$$

elde edilir ki istenilen iddianın ispatı tamamlanmış olur.

Sonuç 3.1: p tek asal sayı olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2}(-1)^k\binom{2k}{k}H_{k-1}\equiv\frac{2^p}{p}\left(2F_{p+1}-5^{(p-1)/2}-1\right)(\mathrm{mod}\ p), \tag{3.8}$$

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}\frac{H_{k-1}}{(-4)^k}\equiv 2\frac{P_{p+1}}{p}-\frac{2^p}{p}\left(1+2^{(p-1)/2}\right)(\mathrm{mod}\ p)\quad, \tag{3.9}$$

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}\frac{H_{k-1}}{8^k}\equiv\frac{1}{p}\left(\frac{P_{p+1}}{2^{(p-3)/2}}-2^p-2^{(p+1)/2}\right)(\mathrm{mod}\ p), \tag{3.10}$$

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}\frac{H_{k-1}}{9^k}\equiv\frac{2}{p}\left(\frac{2}{3}\right)^{p-1}\left(\frac{2}{3}F_{2p+2}-3^{p-1}-5^{(p-1)/2}\right)(\mathrm{mod}\ p) \tag{3.11}$$

ve

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}\frac{H_{k-1}}{(-16)^k}\equiv\frac{2}{p}\left(\frac{F_{3p+3}}{2^{p+1}}-2^{p-1}-5^{(p-1)/2}\right)(\mathrm{mod}\ p) \tag{3.12}$$

dır.

İspat: İlk olarak, Denklik (3.8) in ispatını verelim. Denklik (3.5) de $x=-1$ yazılırsa

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2}(-1)^k\binom{2k}{k}H_{k-1}\equiv\frac{2^p}{p}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{p+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{p+1}\right)-1-5^{(p-1)/2}\right)$$

$$= \frac{2^{p+1}}{p}\left(\frac{\alpha^{p+1}-\beta^{p+1}}{\alpha-\beta}\right)-\frac{2^p}{p}\left(1+5^{(p-1)/2}\right)(\mathrm{mod}\ p)$$

denkliği elde edilir. $\{F_n\}$ Fibonacci dizisinin Binet formülü yardımıyla, istenilen sonuç elde edilir.

Denklik (3.9) un ispatı için, Denklik (3.5) de $x = -\frac{1}{4}$ yazılırsa

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}\frac{H_{k-1}}{(-4)^k} \equiv \frac{2^p}{p}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^{p+1}-\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)^{p+1}\right)-1-\left(\sqrt{2}\right)^{p-1}\right)$$

$$= \frac{1}{p\sqrt{2}}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^{p+1}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{p+1}\right)-\frac{2^p}{p}\left(2^{(p-1)/2}+1\right) = \frac{2}{p}\left(\frac{\delta^{p+1}-\gamma^{p+1}}{\delta-\gamma}\right)-\frac{2^p}{p}\left(2^{(p-1)/2}+1\right)(\mathrm{mod}\ p)$$

elde edilir. Buradan, $\{P_n\}$ Pell dizisinin Binet formülü yardımıyla, istenilen sonuç elde edilir.

p tek asal sayısı için, Denklik (3.5) de $x = \frac{1}{8}$ yazılırsa

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}\frac{H_{k-1}}{8^k} \equiv \frac{2^p}{p}\left(2\sqrt{2}\left(\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\right)^{p+1}-\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\right)^{p+1}\right)-1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{p-1}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{p}\left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{p+1}-\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{p+1}\right)-\frac{2^p}{p}\left(\frac{1}{2^{(p-1)/2}}+1\right) = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{p+1}-\left(-1+\sqrt{2}\right)^{p+1}}{p\left(\sqrt{2}\right)^p}-\frac{2^{(p+1)/2}+2^p}{p}$$

$$= \frac{1}{p}\left(\frac{1}{2^{(p-3)/2}}\left(\frac{\delta^{p+1}-\gamma^{p+1}}{\delta-\gamma}\right)-2^{(p+1)/2}-2^p\right)(\mathrm{mod}\ p)$$

elde edilir. Buradan $\{P_n\}$ Pell dizisinin Binet formülü yardımıyla, istenilen sonuç elde edilir.

Ayrıca, Denklik (3.5) de $x = \frac{1}{9}$ yazılır ve $\sqrt{5}=2\alpha-1=1-2\beta$ eşitlikleri kullanılırsa

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}\frac{H_{k-1}}{9^k} \equiv \frac{2^p}{p}\left(\frac{6}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{6}\right)^{p+1}-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{6}\right)^{p+1}\right)-1-\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{p-1}\right)$$

$$= \frac{1}{3^p\sqrt{5}p}\left(\left(3+\sqrt{5}\right)^{p+1} - \left(3-\sqrt{5}\right)^{p+1}\right) - \frac{2^p}{p}\left(\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{p-1} + 1\right)$$

$$= \frac{1}{3^p\sqrt{5}p}\left(\left(2\alpha+2\right)^{p+1} - \left(2\beta+2\right)^{p+1}\right) - \frac{2^p}{p}\left(\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{p-1} + 1\right) \left(\mathrm{mod}\ p\right)$$

denkliği bulunur. $\alpha+1=\alpha^2$ ve $\beta+1=\beta^2$ eşitliklerinden

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2} \binom{2k}{k} \frac{H_{k-1}}{9^k} \equiv \frac{2^{p+1}}{3^p\sqrt{5}p}\left(\left(\alpha+1\right)^{p+1} - \left(\beta+1\right)^{p+1}\right) - \frac{2^p}{p}\left(\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{p-1} + 1\right)$$

$$= \frac{2^{p+1}}{3^p p}\left(\frac{\alpha^{2p+2} - \beta^{2p+2}}{\alpha-\beta}\right) - \frac{2^p}{p}\left(\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{p-1} + 1\right) \left(\mathrm{mod}\ p\right)$$

elde edilir. Buradan $\{F_n\}$ Fibonacci dizisinin Binet formülü yardımıyla, Denklik (3.11) in ispatı tamamlanır.

Son olarak Denklik (3.12) nin ispatı için, Denklik (3.5) de $x = -\frac{1}{16}$ yazılırsa

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2} \binom{2k}{k} \frac{H_{k-1}}{(-16)^k} \equiv \frac{2^p}{p}\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{2+\sqrt{5}}{4}\right)^{p+1} - \left(\frac{2-\sqrt{5}}{4}\right)^{p+1}\right) - 1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{p-1}\right)$$

$$= \frac{1}{p2^p\sqrt{5}}\left(\left(2+\sqrt{5}\right)^{p+1} - \left(2-\sqrt{5}\right)^{p+1}\right) - \frac{2}{p}\left(\left(\sqrt{5}\right)^{p-1} + 2^{p-1}\right) \left(\mathrm{mod}\ p\right)$$

elde edilir. p tek asal sayısı için, $2+\sqrt{5}=\alpha^3$ ve $-2+\sqrt{5}=\beta^3$ eşitliklerinden

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2} \binom{2k}{k} \frac{H_{k-1}}{(-16)^k} \equiv \frac{1}{p2^p}\left(\frac{\alpha^{3p+3} - \beta^{3p+3}}{\alpha-\beta}\right) - \frac{2}{p}\left(\left(\sqrt{5}\right)^{p-1} + 2^{p-1}\right) \left(\mathrm{mod}\ p\right)$$

bulunur. Buradan $\{F_n\}$ Fibonacci dizisinin Binet formülü yardımıyla istenilen denklik bulunur.

Sonuç 3.2: p tek asal sayı olsun. $p \equiv \mp 1 \left(\mathrm{mod}\ 5\right)$ için

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2} \binom{2k}{k} \frac{H_{k-1}F_k}{(-4)^k} \equiv \frac{1}{p}\left(F_{2p+1} - F_{p+2}\right) - \frac{2^p}{p}F_{p-1} \left(\mathrm{mod}\ p\right), \qquad (3.13)$$

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}\frac{H_{k-1}L_k}{(-4)^k}\equiv\frac{1}{p}\left(L_{2p+1}+L_{p+2}\right)-\frac{2^p}{p}\left(L_{p-1}+2\right)\pmod p \tag{3.14}$$

ve $p\equiv\mp1\pmod 8$ için

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}\frac{H_{k-1}P_k}{(-2)^k}\equiv\frac{2^{(p+1)/2}}{p}\left(P_p-1\right)-\frac{2^p}{p}P_{p-1}\pmod p, \tag{3.15}$$

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}\frac{H_{k-1}Q_k}{(-2)^k}\equiv\frac{2^{(p+1)/2}}{p}\left(Q_p+2\right)-\frac{2^p}{p}\left(Q_{p-1}+2\right)\pmod p \tag{3.16}$$

dır.

İspat: İlk önce Denklik (3.13) ve Denklik (3.14) ün ispatını verelim. Denklik (3.5) de sırasıyla $x=-\frac{\alpha}{4}\in\mathbb{Z}_p$ ve $x=-\frac{\beta}{4}\in\mathbb{Z}_p$ yazılırsa ve $\{F_n\}$ dizisinin Binet formülünden faydalanılırsa

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}\frac{H_{k-1}F_k}{(-4)^k}=\frac{1}{\alpha-\beta}\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}\left(-\frac{\alpha}{4}\right)^k H_{k-1}-\frac{1}{\alpha-\beta}\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}\left(-\frac{\beta}{4}\right)^k H_{k-1}$$

$$\equiv\frac{2^p}{p(\alpha-\beta)}\left(\frac{2}{\sqrt{1+\alpha}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{1+\alpha}}{2}\right)^{p+1}-\left(\frac{1-\sqrt{1+\alpha}}{2}\right)^{p+1}\right)-1-\left(\sqrt{1+\alpha}\right)^{p-1}\right)$$

$$-\frac{2^p}{p(\alpha-\beta)}\left(\frac{2}{\sqrt{1+\beta}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{1+\beta}}{2}\right)^{p+1}-\left(\frac{1-\sqrt{1+\beta}}{2}\right)^{p+1}\right)-1-\left(\sqrt{1+\beta}\right)^{p-1}\right)$$

$$=\frac{1}{p(\alpha-\beta)\sqrt{1+\alpha}}\left(\left(1+\sqrt{1+\alpha}\right)^{p+1}-\left(1-\sqrt{1+\alpha}\right)^{p+1}\right)-\frac{2^p}{p}\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\left(\sqrt{1+\alpha}\right)^{p-1}+1\right)$$

$$-\frac{1}{p(\alpha-\beta)\sqrt{1+\beta}}\left(\left(1+\sqrt{1+\beta}\right)^{p+1}-\left(1-\sqrt{1+\beta}\right)^{p+1}\right)+\frac{2^p}{p}\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\left(\sqrt{1+\beta}\right)^{p-1}+1\right)\pmod p \tag{3.17}$$

denkliği elde edilir. Denklik (3.17) de $\alpha+\beta=1$, $\alpha+1=\alpha^2$ ve $1+\beta=\beta^2$ eşitlikleri kullanılırsa

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}\frac{H_{k-1}F_k}{(-4)^k}\equiv\frac{1}{p(\alpha-\beta)}\left(\frac{\alpha^{2p+2}-\beta^{p+1}}{\alpha}-\frac{\beta^{2p+2}-\alpha^{p+1}}{\beta}\right)-\frac{2^p\left(\alpha^{p-1}-\beta^{p-1}\right)}{p(\alpha-\beta)}\pmod p$$

denkliği bulunur. Buradan $\alpha\beta=-1$ eşitliğinden ve $\{F_n\}$ dizisinin Binet formülünden faydalanılırsa

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}\frac{H_{k-1}F_k}{(-4)^k}$$

$$\equiv\frac{1}{p(\alpha-\beta)}\left(\alpha^{2p+1}+\beta^{p+2}-\beta^{2p+1}-\alpha^{p+2}\right)-\frac{2^p}{p}\frac{\alpha^{p-1}-\beta^{p-1}}{\alpha-\beta}=\frac{1}{p}\left(F_{2p+1}-F_{p+2}\right)-\frac{2^p}{p}F_{p-1}\ (\mathrm{mod}\ p)$$

denkliği elde edilir. Aynı şekilde

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}\frac{H_{k-1}L_k}{(-4)^k}=\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}\left(-\frac{\alpha}{4}\right)^k H_{k-1}+\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}\left(-\frac{\beta}{4}\right)^k H_{k-1}$$

$$\equiv\frac{2^p}{p}\left(\frac{2}{\sqrt{1+\alpha}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{1+\alpha}}{2}\right)^{p+1}-\left(\frac{1-\sqrt{1+\alpha}}{2}\right)^{p+1}\right)-1-\left(\sqrt{1+\alpha}\right)^{p-1}\right)$$

$$+\frac{2^p}{p}\left(\frac{2}{\sqrt{1+\beta}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{1+\beta}}{2}\right)^{p+1}-\left(\frac{1-\sqrt{1+\beta}}{2}\right)^{p+1}\right)-1-\left(\sqrt{1+\beta}\right)^{p-1}\right)$$

$$=\frac{1}{p\sqrt{1+\alpha}}\left(\left(1+\sqrt{1+\alpha}\right)^{p+1}-\left(1-\sqrt{1+\alpha}\right)^{p+1}\right)-\frac{2^p}{p}\left(\left(\sqrt{1+\alpha}\right)^{p-1}+1\right)$$

$$+\frac{1}{p\sqrt{1+\beta}}\left(\left(1+\sqrt{1+\beta}\right)^{p+1}-\left(1-\sqrt{1+\beta}\right)^{p+1}\right)-\frac{2^p}{p}\left(\left(\sqrt{1+\beta}\right)^{p-1}+1\right)(\mathrm{mod}\ p)\qquad(3.18)$$

denkliği elde edilir. Denklik (3.18) de $\alpha+\beta=1$, $1+\alpha=\alpha^2$, $1+\beta=\beta^2$, $\alpha\beta=-1$ eşitlikleri kullanılır ve $\{L_n\}$ dizisinin Binet formülünden faydalanılırsa

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}\frac{H_{k-1}L_k}{(-4)^k}\equiv\frac{1}{p}\left(\frac{\alpha^{2p+2}-\beta^{p+1}}{\alpha}+\frac{\beta^{2p+2}-\alpha^{p+1}}{\beta}\right)-\frac{2^p}{p}\left(\alpha^{p-1}+\beta^{p-1}+2\right)$$

$$=\frac{1}{p}\left(\alpha^{2p+1}+\beta^{2p+1}+\alpha^{p+2}+\beta^{p+2}\right)-\frac{2^p}{p}\left(\alpha^{p-1}+\beta^{p-1}+2\right)=\frac{1}{p}\left(L_{2p+1}+L_{p+2}\right)-\frac{2^p}{p}\left(L_{p-1}+2\right)(\mathrm{mod}\ p)$$

denkliği elde edilir. Şimdi de Denklik (3.15) ve Denklik (3.16) nın ispatını verelim. Denklik (3.5) de sırasıyla $x=-\frac{\delta}{2}\in\mathbb{Z}_p$ ve $x=-\frac{\gamma}{2}\in\mathbb{Z}_p$ alınırsa ve $\{P_n\}$ Pell dizisinin Binet formülü yardımıyla

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}\frac{H_{k-1}P_k}{(-2)^k}=\frac{1}{\delta-\gamma}\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}\left(-\frac{\delta}{2}\right)^k H_{k-1}-\frac{1}{\delta-\gamma}\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}\left(-\frac{\gamma}{2}\right)^k H_{k-1}$$

$$\equiv\frac{2^p}{p(\delta-\gamma)}\left(\frac{2}{\sqrt{1+2\delta}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{1+2\delta}}{2}\right)^{p+1}-\left(\frac{1-\sqrt{1+2\delta}}{2}\right)^{p+1}\right)-1-\left(\sqrt{1+2\delta}\right)^{p-1}\right)$$

$$-\frac{2^p}{p(\delta-\gamma)}\left(\frac{2}{\sqrt{1+2\gamma}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{1+2\gamma}}{2}\right)^{p+1}-\left(\frac{1-\sqrt{1+2\gamma}}{2}\right)^{p+1}\right)-1-\left(\sqrt{1+2\gamma}\right)^{p-1}\right)$$

$$=\frac{1}{p(\delta-\gamma)\sqrt{1+2\delta}}\left(\left(1+\sqrt{1+2\delta}\right)^{p+1}-\left(1-\sqrt{1+2\delta}\right)^{p+1}\right)-\frac{2^p}{p(\delta-\gamma)}\left(\left(\sqrt{1+2\delta}\right)^{p-1}+1\right)$$

$$-\frac{1}{p(\delta-\gamma)\sqrt{1+2\gamma}}\left(\left(1+\sqrt{1+2\gamma}\right)^{p+1}-\left(1-\sqrt{1+2\gamma}\right)^{p+1}\right)+\frac{2^p}{p(\delta-\gamma)}\left(\left(\sqrt{1+2\gamma}\right)^{p-1}+1\right)\pmod p$$

denkliği bulunur. $x^2-2x-1=0$ karakteristik denkleminin γ ve δ kökleri ile verilen

$$1+2\gamma=\gamma^2,\ 1+2\delta=\delta^2,\ 1-\delta=-\sqrt{2},\ 1-\gamma=\sqrt{2},\ \delta\sqrt{2}=\delta+1 \text{ ve } -\gamma\sqrt{2}=\gamma+1 \qquad (3.19)$$

eşitliklerinin yardımıyla

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}\frac{H_{k-1}P_k}{(-2)^k}\equiv\frac{1}{p(\delta-\gamma)}\left(\frac{(1+\delta)^{p+1}-(1-\delta)^{p+1}}{\delta}-\frac{(1+\gamma)^{p+1}-(1-\gamma)^{p+1}}{\gamma}\right)-2^p\frac{\delta^{p-1}+1-\gamma^{p-1}-1}{p(\delta-\gamma)}$$

$$=\frac{1}{p(\delta-\gamma)}\left(\frac{\left(\delta\sqrt{2}\right)^{p+1}-\left(-\sqrt{2}\right)^{p+1}}{\delta}-\frac{\left(-\gamma\sqrt{2}\right)^{p+1}-\left(\sqrt{2}\right)^{p+1}}{\gamma}-2^p\left(\delta^{p-1}-\gamma^{p-1}\right)\right)\pmod p \qquad (3.20)$$

denkliği bulunur. Denklik (3.20) de p tek asal sayısı için $\delta\gamma=-1$ eşitliği ve $\{P_n\}$ dizisinin Binet formülünden faydalanılırsa

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}\frac{H_{k-1}P_k}{(-2)^k}\equiv\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{p+1}}{p(\delta-\gamma)}\left(\frac{\delta^{p+1}-1}{\delta}-\frac{\gamma^{p+1}-1}{\gamma}\right)-2^p\frac{\delta^{p-1}-\gamma^{p-1}}{p(\delta-\gamma)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{p+1}}{p}\left(\frac{\delta^p+\gamma-\gamma^p-\delta}{\delta-\gamma}\right)-\frac{2^p}{p}\left(\frac{\delta^{p-1}-\gamma^{p-1}}{\delta-\gamma}\right)=\frac{2^{(p+1)/2}}{p}\left(P_p-1\right)-\frac{2^p}{p}P_{p-1}\pmod p$$

denkliği elde edilir. Aynı şekilde

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}\frac{H_{k-1}Q_k}{(-2)^k}=\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}\left(-\frac{\delta}{2}\right)^k H_{k-1}+\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}\left(-\frac{\gamma}{2}\right)^k H_{k-1}$$

$$\equiv\frac{2^p}{p}\left(\frac{2}{\sqrt{1+2\delta}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{1+2\delta}}{2}\right)^{p+1}-\left(\frac{1-\sqrt{1+2\delta}}{2}\right)^{p+1}\right)-1-\left(\sqrt{1+2\delta}\right)^{p-1}\right)$$

$$+\frac{2^p}{p}\left(\frac{2}{\sqrt{1+2\gamma}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{1+2\gamma}}{2}\right)^{p+1}-\left(\frac{1-\sqrt{1+2\gamma}}{2}\right)^{p+1}\right)-1-\left(\sqrt{1+2\gamma}\right)^{p-1}\right)$$

$$=\frac{1}{p\sqrt{1+2\delta}}\left(\left(1+\sqrt{1+2\delta}\right)^{p+1}-\left(1-\sqrt{1+2\delta}\right)^{p+1}\right)-\frac{2^p}{p}\left(\left(\sqrt{1+2\delta}\right)^{p-1}+1\right)$$

$$+\frac{1}{p\sqrt{1+2\gamma}}\left(\left(1+\sqrt{1+2\gamma}\right)^{p+1}-\left(1-\sqrt{1+2\gamma}\right)^{p+1}\right)-\frac{2^p}{p}\left(\left(\sqrt{1+2\gamma}\right)^{p-1}+1\right)\ (\mathrm{mod}\ p)$$

bulunur. Eşitlik (3.19) dan

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}\frac{H_{k-1}Q_k}{(-2)^k}\equiv\frac{(1+\delta)^{p+1}-(1-\delta)^{p+1}}{p\delta}-\frac{2^p}{p}\left(\delta^{p-1}+1\right)+\frac{(1+\gamma)^{p+1}-(1-\gamma)^{p+1}}{p\gamma}-\frac{2^p}{p}\left(\gamma^{p-1}+1\right)$$

$$=\frac{1}{p}\left(\frac{\left(\delta\sqrt{2}\right)^{p+1}-\left(-\sqrt{2}\right)^{p+1}}{\delta}+\frac{\left(-\gamma\sqrt{2}\right)^{p+1}-\left(\sqrt{2}\right)^{p+1}}{\gamma}-2^p\left(\delta^{p-1}+\gamma^{p-1}+2\right)\right)(\mathrm{mod}\ p)\qquad(3.21)$$

denkliği elde edilir. Denklik (3.21) de p tek asal sayısı için $\delta\gamma=-1$ eşitliği ve $\{Q_n\}$ dizisinin Binet formülünden faydalanılırsa

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}\frac{H_{k-1}Q_k}{(-2)^k}\equiv\frac{2^{(p+1)/2}}{p}\left(Q_p+2\right)-\frac{2^p}{p}\left(Q_{p-1}+2\right)(\mathrm{mod}\ p)$$

denkliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.2: p tek asal sayı olsun. Herhangi bir $x\in\mathbb{Z}_p$ için

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}C_k\frac{x^{k+1}}{k+1}\equiv 1-(\lambda-\mu)^{p+1}+\frac{2^{p-1}}{p}\left(\lambda^p+\mu^p-1\right)(\mathrm{mod}\ p)\qquad(3.24)$$

dır. Burada $\lambda=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-4x}\right)$ ve $\mu=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-4x}\right)$ dir.

İspat: Eşitlik (1.26) dan $n > 1$ için

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^k-1}{k}=n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{(-x)^{k+1}}{(k+1)^2}-\frac{(1-x)^n-1}{n} \tag{3.25}$$

olduğu bilinir. Eşitlik (3.25) de n ve x yerine sırasıyla $\frac{p+1}{2}$ ve $4x$ yazılırsa

$$\frac{p+1}{2}\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\binom{(p-1)/2}{k}\frac{(-4x)^{k+1}}{(k+1)^2}=\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\frac{(1-4x)^k}{k}+2\frac{(1-4x)^{(p+1)/2}-1}{p+1}-H_{(p-1)/2}$$

eşitliği elde edilir. Burada Denklik (1.6), Denklik (1.18) ve $\frac{1}{p+1}\equiv 1 \pmod p$ denklikleri kullanılırsa

$$-2\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}\frac{x^{k+1}}{(k+1)^2}\equiv\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\frac{(1-4x)^k}{k}+2\left((1-4x)^{(p+1)/2}-1\right)+2q_p(2)\pmod p \tag{3.26}$$

dır. Lemma 3.3' de x yerine $1-4x$ alınırsa

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\frac{(1-4x)^k}{k}\equiv\frac{2}{p}-\frac{\left(1+\sqrt{1-4x}\right)^p-\left(-1+\sqrt{1-4x}\right)^p}{p}\pmod p \tag{3.27}$$

elde edilir. Denklik (3.26), Denklik (3.27) de yerine yazılırsa

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}\frac{x^{k+1}}{(k+1)^2}\equiv 1-(1-4x)^{(p+1)/2}-q_p(2)-\frac{\left(-1+\sqrt{1-4x}\right)^p-\left(1+\sqrt{1-4x}\right)^p+2}{2p}\pmod p$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.3: p tek asal sayı olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{C_k}{4^k(k+1)}\equiv 4\left(1-q_p(2)\right)\pmod p, \tag{3.28}$$

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{(-1)^k C_k}{k+1}\equiv 2^{p-1}\frac{1-L_p}{p}+5\left(\frac{5}{p}\right)-1\pmod p, \tag{3.29}$$

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{C_k}{8^k(k+1)}\equiv 2^{(5-p)/2}\left(2\frac{P_p}{p}-1\right)+8-\frac{2^{p+2}}{p}\pmod p, \tag{3.30}$$

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2} \frac{(-1)^k C_k}{4^k (k+1)} \equiv -2\frac{Q_p}{p} + \frac{2^{p+1}}{p} + 8\left(\frac{2}{p}\right) - 4 \pmod p, \tag{3.31}$$

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2} \frac{(-1)^k C_k}{16^k (k+1)} \equiv -\frac{L_{3p}}{2^{p-3}p} + \frac{2^{p+3}}{p} + 20\left(\frac{5}{p}\right) - 16 \pmod p \tag{3.32}$$

ve $p > 3$ asal sayısı için

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2} \frac{C_k}{9^k (k+1)} \equiv \frac{2^{p-1}}{p}\left(\frac{L_{2p}}{3^{p-2}} - 9\right) - 5\left(\frac{5}{p}\right) + 9 \pmod p, \tag{3.33}$$

dır.

İspat: Denklik (3.28) in ispatını verelim. Denklik (3.24) de $x = \frac{1}{4}$ alınırsa

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2} \frac{C_k}{4^{k+1} (k+1)} \equiv 1 + \frac{2^{p-1}}{p}\left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} - 1\right) = 1 - q_p(2) \pmod p$$

olarak istenilen sonuç elde edilir.

Denklik (3.24) de $x = -1$ alınırsa

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2} C_k \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}$$

$$\equiv 1 - 5^{(p+1)/2} + \frac{2^{p-1}}{p}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^p + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^p - 1\right) \equiv 1 - 5\left(\frac{5}{p}\right) + \frac{2^{p-1}}{p}\left(\alpha^p + \beta^p - 1\right) \pmod p$$

denkliği elde edilir. Burada $\{L_n\}$ Lucas dizisinin Binet formülünden

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2} C_k \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \equiv 1 - 5\left(\frac{5}{p}\right) + 2^{p-1}\frac{L_p - 1}{p} \pmod p$$

olarak istenilen sonuç elde edilir. Böylece Denklik (3.29) elde edilir. Şimdi de Denklik (3.30) un ispatını verelim. Denklik (3.24) de $x = \frac{1}{8}$ yazılırsa p tek asal sayısı için

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2} \frac{C_k}{8^{k+1} (k+1)} \equiv 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{(p+1)/2} + \frac{2^{p-1}}{p}\left(\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)^p + \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\right)^p - 1\right)$$

$$=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{(p+1)/2}+\frac{1}{2^{(p-1)/2}p}\left(\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{p}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{p}}{2\sqrt{2}}\right)-\frac{2^{p-1}}{p}\pmod p$$

denkliği bulunur. $\{P_n\}$ Pell dizisinin Binet formülünden istenilen denklik kolayca görülür.

Denklik (3.31), Denklik (3.24) de $x=-\frac{1}{4}$ alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{C_k}{(-4)^{k+1}(k+1)}\equiv 1-\left(\sqrt{2}\right)^{p+1}+\frac{2^{p-1}}{p}\left(\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^{p}+\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)^{p}-1\right)$$

$$=1-2^{(p+1)/2}+\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{p}+\left(1-\sqrt{2}\right)^{p}-2^{p}}{2p}\pmod p$$

denkliği bulunur. $\{Q_n\}$ Pell-Lucas dizisinin Binet formülünden istenilen denklik bulunur.

Denklik (3.32) ün ispatı için de, Denklik (3.24) de $x=-\frac{1}{16}$ alınırsa

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{C_k}{(-16)^{k+1}(k+1)}\equiv 1-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{p+1}+\frac{2^{p-1}}{p}\left(\left(\frac{2+\sqrt{5}}{4}\right)^{p}+\left(\frac{2-\sqrt{5}}{4}\right)^{p}-1\right)$$

$$=1-\frac{5}{4}\frac{5^{(p-1)/2}}{2^{p-1}}-\frac{2^{p-1}}{p}+\frac{\left(2+\sqrt{5}\right)^{p}+\left(2-\sqrt{5}\right)^{p}}{2^{p+1}\times p}\pmod p$$

olarak bulunur. $\sqrt{5}=2\alpha-1=1-2\beta$, $\alpha^3=2\alpha+1$ ve $\beta^3=2\beta+1$ eşitlikleri kullanılırsa $\{L_n\}$ Lucas dizisinin Binet formülünden istenilen denklik elde edilir.

Son olarak, Denklik (3.33), Denklik (3.24) de $x=\frac{1}{9}$ alınırsa

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{C_k}{9^{k+1}(k+1)}\equiv 1-\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{p+1}+\frac{2^{p-1}}{p}\left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{6}\right)^{p}+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{6}\right)^{p}-1\right)$$

$$=1-\frac{5}{9}\frac{5^{(p-1)/2}}{3^{p-1}}+\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)^{p}+\left(3-\sqrt{5}\right)^{p}}{2\times 3^{p}p}-\frac{2^{p-1}}{p}\pmod p$$

denkliği elde edilir. $\sqrt{5}=2\alpha-1=1-2\beta$, $\alpha^2=\alpha+1$ ve $\beta^2=\beta+1$ eşitlikleri kullanılarak $\{L_n\}$ Lucas dizisinin Binet formülünden

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{C_k}{9^{k+1}(k+1)}\equiv 1-\frac{5}{9}\left(\frac{5}{p}\right)-\frac{2^{p-1}}{p}+2^{p-1}\frac{(\alpha+1)^p+(\beta+1)^p}{3^p p}$$

$$=1-\frac{5}{9}\left(\frac{5}{p}\right)-\frac{2^{p-1}}{p}+\left(\frac{2}{3}\right)^{p-1}\frac{\alpha^{2p}+\beta^{2p}}{3p}=1-\frac{5}{9}\left(\frac{5}{p}\right)-\frac{2^{p-1}}{p}+\left(\frac{2}{3}\right)^{p-1}\frac{L_{2p}}{3p}\pmod p$$

elde edilir.

Sonuç 3.4: p tek asal sayı olsun. $p\equiv\mp 1\pmod 5$ için

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{(-1)^k C_k F_{k+1}}{4^k(k+1)}\equiv 2+2\left(\frac{5}{p}\right)-2\frac{F_{2p}-F_p}{p}\pmod p, \tag{3.34}$$

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{(-1)^k C_k L_{k+1}}{4^k(k+1)}\equiv 10\left(\frac{5}{p}\right)-2\frac{L_{2p}+L_p}{p}+\frac{2^{p+2}}{p}-6\pmod p \tag{3.35}$$

ve $p\equiv\mp 1\pmod 8$ için

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{(-1)^k C_k P_{k+1}}{2^k(k+1)}\equiv 2P_{p+1}-\frac{2^{(p-3)/2}}{p}(Q_p-2)\pmod p, \tag{3.36}$$

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{(-1)^k C_k Q_{k+1}}{2^k(k+1)}\equiv 2Q_{p+1}-\frac{2^{(p+3)/2}}{p}P_p+\frac{2^{p+1}}{p}-4\pmod p \tag{3.37}$$

dir.

İspat: Denklik (3.24) de sırasıyla $x=-\frac{\alpha}{4}\in\mathbb{Z}_p$ ve $x=-\frac{\beta}{4}\in\mathbb{Z}_p$ yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{(-1)^k C_k F_{k+1}}{4^k(k+1)}=-\frac{4}{\alpha-\beta}\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{C_k}{k+1}\left[\left(-\frac{\alpha}{4}\right)^{k+1}-\left(-\frac{\beta}{4}\right)^{k+1}\right]$$

$$\equiv -\frac{4}{\alpha-\beta}\left(1-(1+\alpha)^{(p+1)/2}+\frac{2^{p-1}}{p}\left(\left(\frac{1+\sqrt{1+\alpha}}{2}\right)^p+\left(\frac{1-\sqrt{1+\alpha}}{2}\right)^p-1\right)\right)$$

$$+\frac{4}{\alpha-\beta}\left(1-(1+\beta)^{(p+1)/2}+\frac{2^{p-1}}{p}\left(\left(\frac{1+\sqrt{1+\beta}}{2}\right)^{p}+\left(\frac{1-\sqrt{1+\beta}}{2}\right)^{p}-1\right)\right)(\mathrm{mod}\ p) \tag{3.38}$$

denkliği elde edilir. Denklik (3.38) de $\alpha+\beta=1$, $\alpha+1=\alpha^2$ ve $1+\beta=\beta^2$ eşitlikleri kullanılırsa ve $\{F_n\}$ dizisinin Binet formülünden faydalanılırsa

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{(-1)^k C_k F_{k+1}}{4^k(k+1)}$$

$$\equiv 4\frac{(1+\alpha)^{(p+1)/2}-(1+\beta)^{(p+1)/2}}{\alpha-\beta}-\frac{2}{p(\alpha-\beta)}\left(\left(1+\sqrt{1+\alpha}\right)^{p}+\left(1-\sqrt{1+\alpha}\right)^{p}-\left(1+\sqrt{1+\beta}\right)^{p}-\left(1-\sqrt{1+\beta}\right)^{p}\right)$$

$$=4\frac{\alpha^{p+1}-\beta^{p+1}}{\alpha-\beta}-\frac{2}{p}\frac{(\alpha+1)^{p}+(1-\alpha)^{p}-(\beta+1)^{p}-(1-\beta)^{p}}{\alpha-\beta}=4\frac{\alpha^{p+1}-\beta^{p+1}}{\alpha-\beta}-\frac{2}{p}\frac{\alpha^{2p}+\beta^{p}-\beta^{2p}-\alpha^{p}}{\alpha-\beta}$$

$$=4F_{p+1}-\frac{2}{p}\left(F_{2p}-F_{p}\right)(\mathrm{mod}\ p) \tag{3.39}$$

denkliği elde edilir. Denklik (3.39) da $F_{p+1}\equiv\frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{5}{p}\right)\right)(\mathrm{mod}\ p)$ denkliği yerine yazılırsa Denklik (3.34) elde edilir. Benzer şekilde

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{(-1)^k C_k L_{k+1}}{4^k(k+1)}=-4\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{C_k}{k+1}\left(-\frac{\alpha}{4}\right)^{k+1}-4\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{C_k}{k+1}\left(-\frac{\beta}{4}\right)^{k+1}$$

$$\equiv -4\left(1-(1+\alpha)^{(p+1)/2}+\frac{2^{p-1}}{p}\left(\left(\frac{1+\sqrt{1+\alpha}}{2}\right)^{p}+\left(\frac{1-\sqrt{1+\alpha}}{2}\right)^{p}-1\right)\right)$$

$$-4\left(1-(1+\beta)^{(p+1)/2}+\frac{2^{p-1}}{p}\left(\left(\frac{1+\sqrt{1+\beta}}{2}\right)^{p}+\left(\frac{1-\sqrt{1+\beta}}{2}\right)^{p}-1\right)\right)(\mathrm{mod}\ p) \tag{3.40}$$

denkliği elde edilir. Denklik (3.40) da $\alpha+\beta=1$, $1+\alpha=\alpha^2$ ve $1+\beta=\beta^2$ eşitlikleri kullanılırsa

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{(-1)^k C_k L_{k+1}}{4^k(k+1)}\equiv -8+4\left((1+\alpha)^{(p+1)/2}+(1+\beta)^{(p+1)/2}\right)$$
$$-\frac{2}{p}\left(\left(1+\sqrt{1+\alpha}\right)^{p}+\left(1-\sqrt{1+\alpha}\right)^{p}+\left(1+\sqrt{1+\beta}\right)^{p}+\left(1-\sqrt{1+\beta}\right)^{p}-2^{p+1}\right)$$

$$=-8+4\left(\alpha^{p+1}+\beta^{p+1}\right)-\frac{2}{p}\left(\left(1+\alpha\right)^{p}+\left(1-\alpha\right)^{p}+\left(1+\beta\right)^{p}+\left(1-\beta\right)^{p}-2^{p+1}\right)$$

$$=-8+4\left(\alpha^{p+1}+\beta^{p+1}\right)-\frac{2}{p}\left(\alpha^{2p}+\beta^{p}+\beta^{2p}+\alpha^{p}-2^{p+1}\right)\pmod p$$

elde edilir. $\{L_n\}$ dizisinin Binet formülünden faydalanılırsa

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{\left(-1\right)^{k}C_kL_{k+1}}{4^{k}\left(k+1\right)}\equiv -8+4L_{p+1}-\frac{2}{p}\left(L_{2p}+L_{p}-2^{p+1}\right)\pmod p \tag{3.41}$$

denkliği elde edilir. Denklik (3.41) de $L_{p+1}\equiv\frac{5}{2}\left(\frac{5}{p}\right)+\frac{1}{2}\pmod p$ denkliği yerine yazılırsa Denklik (3.35) elde edilir.

Şimdi Denklik (3.36) ve Denklik (3.37) nin ispatını verelim. Denklik (3.24) de sırasıyla $x=-\frac{\delta}{2}\in\mathbb{Z}_p$ ve $x=-\frac{\gamma}{2}\in\mathbb{Z}_p$ yazılır ve $\{P_n\}$ dizisinin Binet formülünden faydalanılırsa $1-\left(\sqrt{1-4x}\right)^{p+1}+\frac{2^{p-1}}{p}\left(\left(\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2}\right)^{p}+\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}\right)^{p}-1\right)\pmod p$

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{\left(-1\right)^{k}C_kP_{k+1}}{2^{k}\left(k+1\right)}=-\frac{2}{\delta-\gamma}\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{C_k}{k+1}\left(-\frac{\delta}{2}\right)^{k+1}+\frac{2}{\delta-\gamma}\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{C_k}{k+1}\left(-\frac{\gamma}{2}\right)^{k+1}$$

$$\equiv -\frac{2}{\delta-\gamma}\left(1-\left(1+2\delta\right)^{(p+1)/2}+\frac{2^{p-1}}{p}\left(\left(\frac{1+\sqrt{1+2\delta}}{2}\right)^{p}+\left(\frac{1-\sqrt{1+2\delta}}{2}\right)^{p}-1\right)\right)$$

$$+\frac{2}{\delta-\gamma}\left(1-\left(1+2\gamma\right)^{(p+1)/2}+\frac{2^{p-1}}{p}\left(\left(\frac{1+\sqrt{1+2\gamma}}{2}\right)^{p}+\left(\frac{1-\sqrt{1+2\gamma}}{2}\right)^{p}-1\right)\right)\pmod p \tag{3.42}$$

denkliği elde edilir. p tek asal sayısı için Denklik (3.42) de, Eşitlik (3.19) ve ayrıca $\{P_n\}$ ile $\{Q_n\}$ dizilerinin Binet formüllerinden faydalanılırsa

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{\left(-1\right)^{k}C_kP_{k+1}}{2^{k}\left(k+1\right)}\equiv\frac{2}{\delta-\gamma}\left(\delta^{p+1}-\gamma^{p+1}-\frac{1}{2p}\left(\left(1+\delta\right)^{p}+\left(1-\delta\right)^{p}-\left(1+\gamma\right)^{p}-\left(1-\gamma\right)^{p}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{\delta - \gamma}\left(\delta^{p+1} - \gamma^{p+1} - \frac{1}{2p}\left(\left(\delta\sqrt{2}\right)^{p} + \left(-\sqrt{2}\right)^{p} - \left(-\gamma\sqrt{2}\right)^{p} - \left(\sqrt{2}\right)^{p} \right) \right)$$

$$= 2\frac{\delta^{p+1} - \gamma^{p+1}}{\delta - \gamma} - \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{p}}{p\left(\delta - \gamma\right)}\left(\delta^{p} + \gamma^{p} - 2\right) = 2P_{p+1} - \frac{2^{(p-3)/2}}{p}\left(Q_{p} - 2\right) \pmod p$$

denkliği elde edilir. Benzer şekilde

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2} \frac{(-1)^{k} C_{k} Q_{k+1}}{2^{k}(k+1)} = -2\sum_{k=0}^{(p-1)/2} \frac{C_{k}}{k+1}\left(-\frac{\delta}{2}\right)^{k+1} - 2\sum_{k=0}^{(p-1)/2} \frac{C_{k}}{k+1}\left(-\frac{\gamma}{2}\right)^{k+1}$$

$$\equiv -2\left(1 - (1+2\delta)^{(p+1)/2} + \frac{2^{p-1}}{p}\left(\left(\frac{1+\sqrt{1+2\delta}}{2} \right)^{p} + \left(\frac{1-\sqrt{1+2\delta}}{2} \right)^{p} - 1 \right) \right)$$

$$-2\left(1 - (1+2\gamma)^{(p+1)/2} + \frac{2^{p-1}}{p}\left(\left(\frac{1+\sqrt{1+2\gamma}}{2} \right)^{p} + \left(\frac{1-\sqrt{1+2\gamma}}{2} \right)^{p} - 1 \right) \right) \pmod p \qquad (3.43)$$

denkliği elde edilir. Denklik (3.43) de Eşitlik (3.19) ve $\{P_n\}$ ile $\{Q_n\}$ dizilerinin Binet formülünden faydalanılırsa

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2} \frac{(-1)^{k} C_{k} Q_{k+1}}{2^{k}(k+1)} \equiv 2\left(\delta^{p+1} + \gamma^{p+1} - 2 \right) - \frac{(1+\delta)^{p} + (1-\delta)^{p} + (1+\gamma)^{p} + (1-\gamma)^{p} - 2^{p+1}}{p}$$

$$= 2\left(\delta^{p+1} + \gamma^{p+1} - 2\right) - \frac{1}{p}\left(\left(\delta\sqrt{2}\right)^{p} + \left(-\sqrt{2}\right)^{p} + \left(-\gamma\sqrt{2}\right)^{p} + \left(\sqrt{2}\right)^{p} - 2^{p+1} \right)$$

$$= 2\left(\delta^{p+1} + \gamma^{p+1}\right) - \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{p+3}}{p}\frac{\left(\delta^{p} - \gamma^{p}\right)}{\delta - \gamma} + \frac{2^{p+1}}{p} - 4 = 2Q_{p+1} - \frac{2^{(p+3)/2}}{p}P_{p} + \frac{2^{p+1}}{p} - 4 \pmod p$$

bulunur. Böylece istenilen denklikler elde edilir.

Teorem 3.3: p tek asal sayı olsun. Herhangi bir $x \in \mathbb{Z}_p$ için

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2} H_{k} C_{k} x^{k+1} \equiv 2^{p-1} \frac{(\lambda - \mu)^{p+1} - 2\left(\lambda^{p+1} + \mu^{p+1}\right) + 1}{p} \pmod p \qquad (3.44)$$

dır. Burada $\lambda = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1-4x}\right)$ ve $\mu = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-4x}\right)$ dir.

İspat: Lemma 3.2'den,

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\binom{(p-1)/2}{k}\frac{(-4x)^{k+1}}{k+1}H_k$$

$$=-\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\binom{(p-1)/2}{k}\frac{(-4x)^{k+1}}{(k+1)^2}-(1-4x)^{(p+1)/2}\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\binom{(p-1)/2}{k}\frac{(4x)^{k+1}}{(k+1)^2(1-4x)^{k+1}}$$

eşitliği elde edilir. Denklik (1.6) dan

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}\frac{x^{k+1}}{k+1}H_k$$

$$\equiv-\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}\frac{x^{k+1}}{(k+1)^2}-(1-4x)^{(p+1)/2}\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}\frac{(-x)^{k+1}}{(k+1)^2(1-4x)^{k+1}}\pmod p$$

denkliği bulunur. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}C_kH_kx^{k+1}\equiv-\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{C_k}{(k+1)}x^{k+1}-(1-4x)^{(p+1)/2}\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{C_k}{k+1}\left(\frac{x}{4x-1}\right)^{k+1}\pmod p \qquad (3.45)$$

elde edilir. Denklik (3.24) de verilen

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{C_k}{k+1}x^{k+1}\equiv1-(1-4x)^{(p+1)/2}+\frac{2^{p-1}}{p}\left(\left(\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2}\right)^p+\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}\right)^p-1\right)\pmod p$$

denkliğinde x yerine $\frac{x}{4x-1}$ yazılır ve sonra elde edilen denklik, Denklik (3.45) de yerine yazılırsa p tek asal sayısı için

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}H_kC_kx^{k+1}\equiv-1+(1-4x)^{(p+1)/2}-\frac{2^{p-1}}{p}\left(\left(\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2}\right)^p+\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}\right)^p-1\right)$$

$$-(1-4x)^{(p+1)/2}\left(1-\left(1-\frac{4x}{4x-1}\right)^{(p+1)/2}+\frac{1}{2p}\left(\left(1+\sqrt{1-\frac{4x}{4x-1}}\right)^p+\left(1-\sqrt{1-\frac{4x}{4x-1}}\right)^p-2^p\right)\right)$$

$$=-\frac{(1-4x)^{(p+1)/2}}{(1-4x)^{p/2}}\frac{\left(1+\sqrt{1-4x}\right)^p-\left(1-\sqrt{1-4x}\right)^p-2^p\left(\sqrt{1-4x}\right)^p}{2p}+1-(1-4x)^{(p+1)/2}$$

$$-\frac{\left(1-\sqrt{1-4x}\right)^{p}+\left(1+\sqrt{1-4x}\right)^{p}-2^{p}}{2p}+\left(1-4x\right)^{(p+1)/2}-1$$

$$=\frac{2^{p}-\left(1-\sqrt{1-4x}\right)^{p}-\left(1+\sqrt{1-4x}\right)^{p}}{2p}-\sqrt{1-4x}\,\frac{\left(1+\sqrt{1-4x}\right)^{p}-\left(1-\sqrt{1-4x}\right)^{p}}{2p}+\frac{2^{p-1}}{p}\left(1-4x\right)^{(p+1)/2}$$

$$=\frac{2^{p}\left(\left(1-4x\right)^{(p+1)/2}+1\right)-\left(1+\sqrt{1-4x}\right)^{p+1}-\left(1-\sqrt{1-4x}\right)^{p+1}}{2p}\left(\mathrm{mod}\ p\right)$$

denkliği elde edilerek istenilen sonuç bulunur.

Sonuç 3.5: p tek asal sayı olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{H_kC_k}{4^k}\equiv 4q_p\left(2\right)\left(\mathrm{mod}\ p\right), \tag{3.46}$$

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{H_kC_k}{8^k}\equiv\frac{1}{p}\left(2^{p+2}+2^{(p+3)/2}-\frac{Q_{p+1}}{2^{(p-3)/2}}\right)\left(\mathrm{mod}\ p\right), \tag{3.47}$$

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{H_kC_k}{9^k}\equiv\frac{1}{p}\left(\frac{2}{3}\right)^{p-1}\left(3^{p+1}+5^{(p+1)/2}-2L_{2p+2}\right)\left(\mathrm{mod}\ p\right), \tag{3.48}$$

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{H_kC_k}{\left(-4\right)^k}\equiv 2\frac{Q_{p+1}}{p}-\frac{2^{p+1}}{p}\left(1+2^{(p+1)/2}\right)\left(\mathrm{mod}\ p\right), \tag{3.49}$$

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{H_kC_k}{\left(-16\right)^k}\equiv\frac{4}{p}\left(\frac{L_{3p+3}}{2^p}-2^{p+1}-5^{(p+1)/2}\right)\left(\mathrm{mod}\ p\right) \tag{3.50}$$

ve

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\left(-1\right)^k H_kC_k\equiv\frac{2^{p-1}}{p}\left(2L_{p+1}-5^{(p+1)/2}-1\right)\left(\mathrm{mod}\ p\right) \tag{3.51}$$

dır.

İspat: İlk olarak Denklik (3.46) yı ispatlayalım. Denklik (3.44) de $x=\frac{1}{4}$ yazılırsa

$$\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\frac{H_kC_k}{4^k}\equiv\frac{2^{p-1}}{p}\left(\left(1-1\right)^{(p+1)/2}-2\left(\left(\frac{1+\sqrt{1-1}}{2}\right)^{p+1}+\left(\frac{1-\sqrt{1-1}}{2}\right)^{p+1}\right)+1\right)=q_p\left(2\right)\left(\mathrm{mod}\ p\right)$$

denkliği elde edilir. Şimdi, Denklik (3.44) de $x = \frac{1}{8}$ yazılırsa

$$\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{H_k C_k}{8^k} \equiv \frac{2^{p-1}}{p}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{p+1} -2\left(\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\right)^{p+1} +\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\right)^{p+1}\right)+1\right)$$

$$= \frac{2^{(p-1)/2}+2^p}{2p} - \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{p+1} +\left(\sqrt{2}-1\right)^{p+1}}{2^{(p+3)/2}p} \pmod p$$

elde edilir. Buradan p tek asal sayısı için $\{Q_n\}$ Pell-Lucas dizisinin Binet formülü yardımıyla, Denklik (3.47) elde edilir.

Denklik (3.44) de $x = \frac{1}{9}$ yazılırsa

$$\frac{1}{9}\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{H_k C_k}{9^k} \equiv \frac{2^{p-1}}{p}\left(\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{p+1} -2\left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{6}\right)^{p+1} +\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{p+1}\right)+1\right) \pmod p$$

elde edilir. $3+\sqrt{5} = 2\alpha+2$ ve $3-\sqrt{5} = 2\beta+2$ eşitlikleri kullanılırsa

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{H_k C_k}{9^k} \equiv \frac{2^p\left(\left(\sqrt{5}\right)^{p+1}+3^{p+1}\right) - \left(2(\alpha+1)\right)^{p+1} - \left(2(\beta+1)\right)^{p+1}}{2.3^{p-1}p}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{p-1}\frac{1}{p}\left(\left(5^{(p+1)/2}+3^{p+1}\right) - 2\left((\alpha+1)^{p+1}+(\beta+1)^{p+1}\right)\right) \pmod p$$

denkliği bulunur. Buradan $\alpha^2 = \alpha+1$, $\beta^2 = \beta+1$ eşitliklerinden faydalanılarak ve $\{L_n\}$ Lucas dizisinin Binet formülü yardımıyla Denklik (3.48) elde edilir.

Ayrıca, Denklik (3.44) de $x = -\frac{1}{4}$ alınırsa

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{H_k C_k}{(-4)^{k+1}} \equiv \frac{2^{p-1}}{p}\left(\left(\sqrt{2}\right)^{p+1} -2\left(\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^{p+1} +\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)^{p+1}\right)+1\right)$$

$$= \frac{2^p\left(2^{(p+1)/2}+1\right)-\left(1+\sqrt{2}\right)^{p+1}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{p+1}}{2p} = \frac{2^{p-1}}{p}\left(1+2^{(p+1)/2}\right) - \frac{\gamma^{p+1}+\delta^{p+1}}{2p} \pmod p$$

denkliği elde edilir. Buradan $\{Q_n\}$ Pell-Lucas dizisinin Binet formülü yardımıyla, Denklik (3.49) un ispatı tamamlanır.

Denklik (3.44) de $x = -\frac{1}{16}$ yazılırsa

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2} \frac{H_k C_k}{(-16)^{k+1}} \equiv \frac{2^{p-1}}{p}\left(\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{p+1} -2\left(\left(\frac{2+\sqrt{5}}{4}\right)^{p+1} +\left(\frac{2-\sqrt{5}}{2}\right)^{p+1}\right)+1\right)$$

$$= \frac{2^p\left(5^{(p+1)/2}+2^{p+1}\right)-\left(2+\sqrt{5}\right)^{p+1}-\left(2-\sqrt{5}\right)^{p+1}}{2^{p+2}p} \pmod p$$

denkliği bulunur. $2+\sqrt{5}=\alpha^3$ ve $2-\sqrt{5}=\beta^3$ eşitliklerinden

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2} \frac{H_k C_k}{(-16)^{k+1}} \equiv \frac{5^{(p+1)/2}+2^{p+1}}{4p} - \frac{\alpha^{3(p+1)}+\beta^{3(p+1)}}{2^{p+2}p} \pmod p$$

bulunur. Buradan $\{L_n\}$ Lucas dizisinin Binet formülü yardımıyla Denklik (3.50) nin ispatı tamamlanır.

Son olarak Denklik (3.44) de $x = -1$ yazılırsa

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2} (-1)^{k+1} H_k C_k \equiv \frac{2^{p-1}}{p}\left(\left(\sqrt{5}\right)^{p+1} -2\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{p+1} +\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{p+1}\right)+1\right)$$

$$= \frac{2^{p-1}}{p}\left(5^{(p+1)/2}+1-2\left(\alpha^{p+1}+\beta^{p+1}\right)\right) \pmod p$$

denkliği elde edilir. $\{L_n\}$ Lucas dizisinin Binet formülü yardımıyla istenilen denklik bulunur.

Sonuç 3.6: p tek asal sayı olsun. $p \equiv \mp 1 \pmod 5$ için

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2} \frac{H_k C_k F_{k+1}}{(-4)^k} \equiv \frac{2}{p}\left(F_{2p+2} - \left(1+2^p\right)F_{p+1}\right) \pmod p, \tag{3.52}$$

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2} \frac{H_k C_k L_{k+1}}{(-4)^k} \equiv \frac{2}{p}\left(L_{2p+2} + \left(1-2^p\right)L_{p+1} - 2^{p+1}\right) \pmod p \tag{3.53}$$

ve $p \equiv \mp 1 \pmod 8$ için

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2} \frac{H_k C_k P_{k+1}}{(-2)^k} \equiv \frac{2^{(p+1)/2}-2^p}{p} P_{p+1} \pmod p, \tag{3.54}$$

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2} \frac{H_k C_k Q_{k+1}}{(-2)^k} \equiv \frac{2^{(p+1)/2}-2^p}{p} \left(Q_{p+1}+2\right) \pmod p \tag{3.55}$$

dır.

İspat: $\{F_n\}$ Fibonacci dizisinin Binet formülünden faydalanılırsa

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2} \frac{H_k C_k F_{k+1}}{(-4)^k} = -\frac{4}{\alpha-\beta} \sum_{k=0}^{(p-1)/2} H_k C_k \left(-\frac{\alpha}{4}\right)^{k+1} + \frac{4}{\alpha-\beta} \sum_{k=0}^{(p-1)/2} H_k C_k \left(-\frac{\beta}{4}\right)^{k+1}$$

olarak yazılır. Denklik (3.44) de sırasıyla $x = -\frac{\alpha}{4} \in \mathbb{Z}_p$ ve $x = -\frac{\beta}{4} \in \mathbb{Z}_p$ yazılırsa

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2} \frac{H_k C_k F_{k+1}}{(-4)^k} \equiv -\frac{2^{p+1}}{p(\alpha-\beta)} \left(\left(\sqrt{1+\alpha}\right)^{p+1} - 2\left(\left(\frac{1+\sqrt{1+\alpha}}{2}\right)^{p+1} + \left(\frac{1-\sqrt{1+\alpha}}{2}\right)^{p+1} \right) + 1 \right)$$

$$+ \frac{2^{p+1}}{p(\alpha-\beta)} \left(\left(\sqrt{1+\beta}\right)^{p+1} - 2\left(\left(\frac{1+\sqrt{1+\beta}}{2}\right)^{p+1} + \left(\frac{1-\sqrt{1+\beta}}{2}\right)^{p+1} \right) + 1 \right) \pmod p \tag{3.56}$$

denkliği elde edilir. Denklik (3.56) da $\alpha^2=\alpha+1$, $\beta^2=\beta+1$ ve $\alpha+\beta=1$ eşitliklerinden faydalanılarak

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2} \frac{H_k C_k F_{k+1}}{(-4)^k} \equiv \frac{-2^{p+1}\left(\alpha^{p+1}+1\right)+2\alpha^{2p+2}+2\beta^{p+1}}{p(\alpha-\beta)} + \frac{2^{p+1}\left(\beta^{p+1}+1\right)-2\beta^{2p+2}-2\alpha^{p+1}}{p(\alpha-\beta)} \pmod p$$

bulunur. Burada $\{F_n\}$ dizisinin Binet formülü yardımıyla

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2} \frac{H_k C_k F_{k+1}}{(-4)^k}$$

$$\equiv \frac{1}{p}\left(-2^{p+1} \frac{\alpha^{p+1}-\beta^{p+1}}{\alpha-\beta} + 2\frac{\alpha^{2p+2}-\beta^{2p+2}}{\alpha-\beta} - 2\frac{\alpha^{p+1}-\beta^{p+1}}{\alpha-\beta} \right) = \frac{2}{p} F_{2p+2} - \frac{2}{p}\left(2^p+1\right) F_{p+1} \pmod p$$

istenilen denklik elde edilir.

Ayrıca $\{L_n\}$ dizisinin Binet formülü yardımıyla

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2} \frac{H_k C_k L_{k+1}}{(-4)^k} = -4 \sum_{k=0}^{(p-1)/2} H_k C_k \left(-\frac{\alpha}{4}\right)^{k+1} - 4 \sum_{k=0}^{(p-1)/2} H_k C_k \left(-\frac{\beta}{4}\right)^{k+1}$$

eşitliği bulunur. Denklik (3.44) den

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2} \frac{H_k C_k L_{k+1}}{(-4)^k} \equiv -\frac{2^{p+1}}{p}\left(\left(\sqrt{1+\alpha}\right)^{p+1} - 2\left(\left(\frac{1+\sqrt{1+\alpha}}{2}\right)^{p+1} + \left(\frac{1-\sqrt{1+\alpha}}{2}\right)^{p+1}\right) + 1\right)$$

$$-\frac{2^{p+1}}{p}\left(\left(\sqrt{1+\beta}\right)^{p+1} - 2\left(\left(\frac{1+\sqrt{1+\beta}}{2}\right)^{p+1} + \left(\frac{1-\sqrt{1+\beta}}{2}\right)^{p+1}\right) + 1\right) \pmod p$$

denkliği elde edilir. Buradan $\alpha^2=\alpha+1$, $\beta^2=\beta+1$ ve $\alpha+\beta=1$ eşitliklerinden

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2} \frac{H_k C_k L_{k+1}}{(-4)^k} \equiv \frac{-2^{p+1}\left(\alpha^{p+1}+1\right)+2\alpha^{2p+2}+2\beta^{p+1}}{p} - \frac{2^{p+1}\left(\beta^{p+1}+1\right)-2\beta^{2p+2}-2\alpha^{p+1}}{p} \pmod p$$

bulunur. Burada $\{L_n\}$ dizisinin Binet formülü yardımıyla

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2} \frac{H_k C_k F_{k+1}}{(-4)^k} \equiv \frac{1}{p}\left(-2^{p+1}\left(\alpha^{p+1}+\beta^{p+1}+2\right)+2\left(\alpha^{2p+2}+\beta^{2p+2}\right)+2\left(\alpha^{p+1}+\beta^{p+1}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{p}L_{2p+2} - \frac{2}{p}\left(2^p-1\right)L_{p+1} - \frac{2^{p+2}}{p} \pmod p$$

olup istenilen denklik elde edilir. Böylece Denklik (3.52) ve Denklik (3.53) ispatlanmış olur.

Şimdi de Denklik (3.54) ve Denklik (3.55) in ispatını verelim. Denklik (3.44) de sırasıyla $x = -\frac{\delta}{2} \in \mathbb{Z}_p$ ve $x = -\frac{\gamma}{2} \in \mathbb{Z}_p$ yazılırsa ve $\{P_n\}$ dizisinin Binet formülü yardımıyla

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2} \frac{H_k C_k P_{k+1}}{(-2)^k} = -\frac{2}{\delta-\gamma} \sum_{k=0}^{(p-1)/2} H_k C_k \left(-\frac{\delta}{2}\right)^{k+1} + \frac{2}{\delta-\gamma} \sum_{k=0}^{(p-1)/2} H_k C_k \left(-\frac{\gamma}{2}\right)^{k+1}$$

$$\equiv -\frac{2^p}{p(\delta-\gamma)}\left(\left(\sqrt{1+2\delta}\right)^{p+1} - 2\left(\left(\frac{1+\sqrt{1+2\delta}}{2}\right)^{p+1} + \left(\frac{1-\sqrt{1+2\delta}}{2}\right)^{p+1}\right) + 1\right)$$

$$+\frac{2^p}{p(\delta-\gamma)}\left(\left(\sqrt{1+2\gamma}\right)^{p+1}-2\left(\left(\frac{1+\sqrt{1+2\gamma}}{2}\right)^{p+1}+\left(\frac{1-\sqrt{1+2\gamma}}{2}\right)^{p+1}\right)+1\right)\pmod p$$

denkliği elde edilir. Eşitlik (3.19) dan

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{H_kC_kP_{k+1}}{(-2)^k}\equiv-\frac{2^p\left(\delta^{p+1}+1\right)-(1+\delta)^{p+1}-(1-\delta)^{p+1}}{p(\delta-\gamma)}+\frac{2^p\left(\gamma^{p+1}+1\right)-(1+\gamma)^{p+1}-(1-\gamma)^{p+1}}{p(\delta-\gamma)}$$

$$=-\frac{2^p\left(\delta^{p+1}+1\right)-\left(\delta\sqrt{2}\right)^{p+1}-\left(-\sqrt{2}\right)^{p+1}}{p(\delta-\gamma)}+\frac{2^p\left(\gamma^{p+1}+1\right)-\left(-\gamma\sqrt{2}\right)^{p+1}-\left(\sqrt{2}\right)^{p+1}}{p(\delta-\gamma)}\pmod p$$

bulunur. p tek asal sayı için $\{P_n\}$ dizisinin Binet formülü yardımıyla

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{H_kC_kP_{k+1}}{(-2)^k}\equiv-\frac{2^p\left(\delta^{p+1}+1\right)-\left(\delta\sqrt{2}\right)^{p+1}-\left(\sqrt{2}\right)^{p+1}}{p(\delta-\gamma)}+\frac{2^p\left(\gamma^{p+1}+1\right)-\left(\gamma\sqrt{2}\right)^{p+1}-\left(\sqrt{2}\right)^{p+1}}{p(\delta-\gamma)}$$

$$=-\frac{\left(2^p-2^{(p+1)/2}\right)\left(\delta^{p+1}+1\right)}{p(\delta-\gamma)}+\frac{\left(2^p-2^{(p+1)/2}\right)\left(\gamma^{p+1}+1\right)}{p(\delta-\gamma)}=\frac{2^{(p+1)/2}-2^p}{p}P_{p+1}\pmod p$$

istenilen denklik elde edilir. Aynı şekilde $\{Q_n\}$ dizisinin Binet formülü yardımıyla

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{H_kC_kQ_{k+1}}{(-2)^k}=-2\sum_{k=0}^{(p-1)/2}H_kC_k\left(-\frac{\delta}{2}\right)^{k+1}-2\sum_{k=0}^{(p-1)/2}H_kC_k\left(-\frac{\gamma}{2}\right)^{k+1}$$

olarak yazılır. Buradan

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{H_kC_kQ_{k+1}}{(-2)^k}\equiv-\frac{2^p}{p}\left(\left(\sqrt{1+2\delta}\right)^{p+1}-2\left(\left(\frac{1+\sqrt{1+2\delta}}{2}\right)^{p+1}+\left(\frac{1-\sqrt{1+2\delta}}{2}\right)^{p+1}\right)+1\right)$$

$$-\frac{2^p}{p}\left(\left(\sqrt{1+2\gamma}\right)^{p+1}-2\left(\left(\frac{1+\sqrt{1+2\gamma}}{2}\right)^{p+1}+\left(\frac{1-\sqrt{1+2\gamma}}{2}\right)^{p+1}\right)+1\right)\pmod p$$

denkliği elde edilir. Eşitlik (3.19) dan

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{H_kC_kQ_{k+1}}{(-2)^k}\equiv-\frac{2^p\left(\delta^{p+1}+1\right)-(1+\delta)^{p+1}-(1-\delta)^{p+1}}{p}-\frac{2^p\left(\gamma^{p+1}+1\right)-(1+\gamma)^{p+1}-(1-\gamma)^{p+1}}{p}$$

$$=-\frac{2^p\left(\delta^{p+1}+1\right)-\left(\delta\sqrt{2}\right)^{p+1}-\left(-\sqrt{2}\right)^{p+1}}{p}-\frac{2^p\left(\gamma^{p+1}+1\right)-\left(-\gamma\sqrt{2}\right)^{p+1}-\left(\sqrt{2}\right)^{p+1}}{p}\pmod p$$

bulunur. p tek asal sayısı için $\{Q_n\}$ dizisinin Binet formülü yardımıyla

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{H_kC_kQ_{k+1}}{(-2)^k}\equiv-\frac{2^p\left(\delta^{p+1}+1\right)-\left(\delta\sqrt{2}\right)^{p+1}-\left(\sqrt{2}\right)^{p+1}}{p}-\frac{2^p\left(\gamma^{p+1}+1\right)-\left(\gamma\sqrt{2}\right)^{p+1}-\left(\sqrt{2}\right)^{p+1}}{p}$$

$$=-\frac{\left(2^p-2^{(p+1)/2}\right)\left(\delta^{p+1}+1\right)}{p}-\frac{\left(2^p-2^{(p+1)/2}\right)\left(\gamma^{p+1}+1\right)}{p}=\frac{2^{(p+1)/2}-2^p}{p}\left(Q_{p+1}+2\right)\pmod p$$

istenilen denklik elde edilir.

Teorem 3.4: $n\geq1$ ve $x\in IR\setminus\{1\}$ olsun. O zaman

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-x)^kH_k^2=(1-x)^n\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{H_{k-1}}{k}-\frac{1}{k^2}\right)\left(\frac{x}{1-x}\right)^k$$

dır.

İspat: Binom teoreminden

$$2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^k-1}{n-k}H_{n-k-1}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2H_{n-k-1}}{n-k}\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}(-x)^j=\sum_{j=1}^{n-1}(-x)^j\sum_{k=j}^{n-1}\binom{k}{j}\frac{2H_{n-k-1}}{n-k}$$

eşitliği elde edilir. Eşitlik (1.15) ve Binom teoreminden

$$2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^k-1}{n-k}H_{n-k-1}=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\left(\left(H_n-H_k\right)^2-H_{n,2}+H_{k,2}\right)(-x)^k$$

$$=\left(H_n^2-H_{n,2}\right)\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(-x)^k-2H_n\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}H_k(-x)^k+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}H_k^2(-x)^k+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}H_{k,2}(-x)^k$$

$$=\left(H_n^2-H_{n,2}\right)\left((1-x)^n-(-x)^n-1\right)-2H_n\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}H_k(-x)^k+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}H_k^2(-x)^k+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}H_{k,2}(-x)^k$$

eşitliği elde edilir. Buradan istenilen toplam çekildiğinde

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}H_k^2(-x)^k=2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^{n-k}-1}{k}H_{k-1}$$

$$-\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}H_{k,2}(-x)^k+2H_n\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}H_k(-x)^k-\left(H_n^2-H_{n,2}\right)\left((1-x)^n-(-x)^n-1\right)$$

eşitliği bulunur. Eşitlik (1.26) ve Lemma 3.1' den

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}H_k^2(-x)^k=2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^{n-k}-1}{k}H_{k-1}-\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}H_{k,2}(-x)^k$$

$$-2H_n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^k-1}{n-k}-\left(H_n^2-H_{n,2}\right)\left((1-x)^n-(-x)^n-1\right)+2H_n^2\left((1-x)^n-(-x)^n-1\right) \qquad (3.57)$$

elde edilir. Lemma 3.5 ve Lemma 3.7' den elde edilen

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(-x)^k H_{k,2}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(-x)^k H_{k-1,2}+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\frac{(-x)^k}{k^2}=-H_{n,2}(-x)^n-(1-x)^n\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{H_k}{k}\left(\frac{x}{1-x}\right)^k$$

toplam, Eşitlik (3.57) de yerine yazılırsa

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}H_k^2(-x)^k=2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^{n-k}-1}{k}H_{k-1}+(-x)^n H_{n,2}$$

$$+(1-x)^n\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{H_k}{k}\left(\frac{x}{1-x}\right)^k-2H_n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^k-1}{n-k}+\left(H_n^2+H_{n,2}\right)\left((1-x)^n-(-x)^n-1\right)$$

$$=2(1-x)^n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^{-k}-1}{k}H_{k-1}+2\left((1-x)^n-1\right)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{H_{k-1}}{k}-2H_n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^k-1}{n-k}$$

$$+(-x)^n H_{n,2}+(1-x)^n\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{H_k}{k}\left(\frac{x}{1-x}\right)^k+\left(H_n^2+H_{n,2}\right)\left((1-x)^n-(-x)^n-1\right) \qquad (3.58)$$

bulunur. Lemma 3.5' de x yerine $\frac{x}{x-1}$ yazılırsa

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^{-k}-1}{k}H_{k-1}=H_n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^{-k}-1}{k}+\frac{(1-x)^{-n}-x^n(1-x)^{-n}-1}{n^2}-\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\frac{x^k}{k^2(1-x)^k}$$

elde edilir. Bu eşitlik ve $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{H_{k-1}}{k}=\frac{1}{2}\left(H_{n-1}^2-H_{n-1,2}\right)$ eşitliği, Eşitlik (3.58) de yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}H_k^2(-x)^k$$

$$=2(1-x)^n\left(H_n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^{-k}-1}{k}+\frac{(1-x)^{-n}-x^n(1-x)^{-n}-1}{n^2}-\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\frac{1}{k^2}\left(\frac{x}{1-x}\right)^k\right)$$

$$+(-x)^n H_{n,2}+\left((1-x)^n-1\right)\left(H_{n-1}^2-H_{n-1,2}\right)+(1-x)^n\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{H_k}{k}\left(\frac{x}{1-x}\right)^k$$

$$-2H_n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^{n-k}-1}{k}+\left(H_n^2+H_{n,2}\right)\left((1-x)^n-(-x)^n-1\right)$$

$$=2H_n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^{n-k}-1}{k}-2H_n\left((1-x)^n-1\right)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}-2(1-x)^n\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\frac{1}{k^2}\left(\frac{x}{1-x}\right)^k-2H_n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-x)^{n-k}-1}{k}$$

$$+\left((1-x)^n-1\right)\left(H_{n-1}^2-H_{n-1,2}\right)+(1-x)^n\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{H_k}{k}\left(\frac{x}{1-x}\right)^k+\left(H_n^2+H_{n,2}\right)\left((1-x)^n-(-x)^n-1\right)$$

$$+(-x)^n H_{n,2}+2\frac{1-x^n-(1-x)^n}{n^2}$$

$$=-(-x)^n H_n^2+(1-x)^n\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{H_{k-1}}{k}-\frac{1}{k^2}\right)\left(\frac{x}{1-x}\right)^k$$

dır. Bu istenilen sonuçtur.

Sonuç 3.7: $p>3$ bir asal sayı olsun. $x\in Z_p\setminus\{1\}$ için

$$\sum_{k=1}^{p-1}H_k^2x^k\equiv-(1-x)^{p-1}\left(G_2\left(1/(1-x)\right)+G_2\left(x/(x-1)\right)\right)\pmod p$$

dir.

İspat: Teorem 3.4' de n yerine $p-1$ alınırsa

$$\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p-1}{k}H_k^2(-x)^k=(1-x)^{p-1}\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p-1}{k}\left(\frac{H_{k-1}}{k}-\frac{1}{k^2}\right)\left(\frac{x}{1-x}\right)^k \qquad (3.59)$$

eşitliği elde edilir. $k=0,1,...,p-1$ için $\binom{p-1}{k}\equiv(-1)^k\pmod p$ denkliği, Eşitlik (3.59) da yerine yazılırsa

$$\sum_{k=1}^{p-1} H_k^2 x^k \equiv (1-x)^{p-1} \sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{H_{k-1}}{k} - \frac{1}{k^2} \right) \left(\frac{x}{x-1} \right)^k \pmod{p} \tag{3.60}$$

denkliği elde edilir. Böylece Lemma 3.5' den elde edilen

$$\sum_{k=1}^{p-2} \frac{(1-x)^k}{k} H_{k-1} \equiv (1-x)^{p-1} - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{x^k}{k^2} \pmod{p}$$

denkliği, Denklik (3.60) da yerine yazılırsa

$$\sum_{k=1}^{p-1} H_k^2 x^k \equiv -(1-x)^{p-1} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1+(-x)^k}{k^2 (1-x)^k} = -(1-x)^{p-1} \left(G_2(1/(1-x)) + G_2(x/(x-1)) \right) \pmod{p}$$

olup istenilen sonuç elde edilir.

Örneğin, Sonuç 3.7 de $x = 2$ alınır ve Denklik (1.23) ile Denklik (1.25) den faydalanılırsa

$$\sum_{k=1}^{p-1} 2^k H_k^2 \equiv q_p(2)^2 \pmod{p}, \quad p > 3$$

elde edilir.

Sonuç 3.8: $p > 3$ bir asal sayı olsun. $x \in \mathbb{Z}_p \setminus \left\{ \frac{1}{4} \right\}$ için

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2} \binom{2k}{k} H_k^2 x^k$$
$$\equiv 2(\lambda-\mu)^{-1} \left(G_2(\lambda) - G_2(\mu) \right) - 4(\lambda-\mu)^{p-1} \left(G_2(\lambda/(\lambda-\mu)) + G_2(\mu/(\mu-\lambda)) \right) \pmod{p}$$

dir. Burada $\lambda = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-4x}\right)$ ve $\mu = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-4x}\right)$ dir.

İspat: Teorem 3.4' de x yerine $4x$, n yerine $\frac{p-1}{2}$ alınırsa

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2} \binom{(p-1)/2}{k} H_k^2 (-4x)^k = (1-4x)^{(p-1)/2} \sum_{k=1}^{(p-1)/2} \binom{(p-1)/2}{k} \left(\frac{H_{k-1}}{k} - \frac{1}{k^2} \right) \left(\frac{4x}{1-4x} \right)^k$$

$$= (1-4x)^{(p-1)/2} \sum_{k=1}^{p-1} \binom{(p-1)/2}{k} \left(\frac{H_{k-1}}{k} - \frac{1}{k^2} \right) \left(\frac{4x}{1-4x} \right)^k$$

eşitliği elde edilir. Buradan Denklik (1.6) yardımıyla

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}H_k^2x^k \equiv (1-4x)^{(p-1)/2}\left(\sum_{k=1}^{p-1}\binom{2k}{k}\frac{H_k}{k}\left(\frac{x}{4x-1}\right)^k -2\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k^2}\left(\frac{x}{4x-1}\right)^k\right)(\mathrm{mod}\ p)$$

denkliği elde edilir. Son olarak Denklik (1.32) ve Denklik (1.33) dan faydalanılarak istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 3.9: $p>2$ için,

$$\sum_{k=1}^{p-1}H_k^2F_{2k+1-p} \equiv 0(\mathrm{mod}\ p) \tag{3.61}$$

ve $p > 5$ için,

$$\sum_{k=1}^{p-1}H_k^2L_{2k+1-p} \equiv 0(\mathrm{mod}\ p) \tag{3.62}$$

dir.

İspat: İlk olarak Denklik (3.61) in ispatını verelim. Teorem 3.4 ve $\{F_n\}$ Fibonacci dizisinin Binet formülü yardımıyla

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k+n}H_k^2F_{2k-n} = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k-n}H_k^2\alpha^{2k-n} - \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k-n}H_k^2\beta^{2k-n}\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-\alpha)^k}{k}H_k - 2\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-\alpha)^k}{k^2} - \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-\beta)^k}{k}H_k + 2\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-\beta)^k}{k^2}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^kH_kF_k}{k} - 2\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^kF_k}{k^2} \tag{3.63}$$

eşitliği elde edilir. Eşitlik (3.63) de n yerine $p-1$ alınırsa

$$\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p-1}{k}(-1)^kH_k^2F_{2k+1-p} = \sum_{k=1}^{p-1}\binom{p-1}{k}\frac{(-1)^kH_kF_k}{k} - 2\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p-1}{k}\frac{(-1)^kF_k}{k^2}$$

eşitliği bulunur. $k=0,1,...,p-1$ için $\binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k(\mathrm{mod}\ p)$ denkliği, Denklik (1.26) ve Denklik (1.29) dan faydalanılarak istenilen sonuç elde edilir.

Şimdi, Denklik (3.62) nin ispatını verelim. Teorem 3.4 ve $\{L_n\}$ Lucas dizisinin Binet formülü yardımıyla

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k+n}H_k^2L_{2k-n}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k-n}H_k^2\alpha^{2k-n}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k-n}H_k^2\beta^{2k-n}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-\alpha)^k}{k}H_k-2\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-\alpha)^k}{k^2}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-\beta)^k}{k}H_k-2\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-\beta)^k}{k^2}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^kH_kL_k}{k}-2\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^kL_k}{k^2} \tag{3.64}$$

eşitliği elde edilir. Eşitlik (3.64) de n yerine $p-1$ alınırsa

$$\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p-1}{k}(-1)^kH_k^2L_{2k+1-p}=\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p-1}{k}\frac{(-1)^kH_kL_k}{k}-2\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p-1}{k}\frac{(-1)^kL_k}{k^2}$$

eşitliği bulunur. $k=0,1,...,p-1$ için $\binom{p-1}{k}\equiv(-1)^k\pmod p$ denkliği, Denklik (1.29) ve Denklik (1.30) den faydalanılarak istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 3.5: $n\in\mathbb{N}$ ve $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ olsun. O zaman

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{2k}\frac{(4x)^k}{2k+1}=\frac{1}{2n+1}\frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^{2n+1}-\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)^{2n+1}}{2\sqrt{x}}$$

dır.

İspat: $x=-1$ için, Sun tarafından verilen

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{2k}\frac{(-4)^k}{2k+1}=\frac{(-1)^n}{2n+1} \tag{3.65}$$

eşitliği elde edilir [34]. Şimdi $x\neq -1$ için istenilen eşitliğin sağlandığını gösterelim. [47] den

$$\sum_{j=k}^{n}\binom{n+j}{2j}\binom{j}{k}(-4)^j=(-1)^n4^k\binom{n+k}{2k}\frac{2n+1}{2k+1}$$

olduğu bilinir. Bu eşitlikten faydalanılırsa

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{2k}\frac{(4x)^k}{2k+1}=\frac{(-1)^n}{2n+1}\sum_{k=0}^{n}x^k\sum_{j=k}^{n}\binom{n+j}{2j}\binom{j}{k}(-4)^j$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{n-j}4^j}{2n+1}\binom{n+j}{2j}\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}x^k=\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{n-j}4^j}{2n+1}\binom{n+j}{2j}(1+x)^j=\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{n-j}4^j(1+x)^j}{2n+1}\binom{n+j}{n-j}$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j\left(4(1+x)\right)^{n-j}}{2n+1}\binom{2n-j}{j}=\frac{(1+x)^n}{2n+1}\sum_{j=0}^{n}\left(-\frac{1}{1+x}\right)^j2^{2n-2j}\binom{2n-j}{j} \qquad (3.66)$$

eşitliği elde edilir. Buradan [47] de verilen

$$\sum_{k=j}^{n/2}\binom{n+1}{2k+1}\binom{k}{j}=2^{n-2j}\binom{n-j}{j}$$

eşitliği kullanılarak Eşitlik (3.66) daki toplam

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{2k}\frac{(4x)^k}{2k+1}$$

$$=\frac{(1+x)^n}{2n+1}\sum_{j=0}^{n}\left(-\frac{1}{1+x}\right)^j\sum_{i=j}^{n}\binom{2n+1}{2i+1}\binom{i}{j}=\frac{(1+x)^n}{2n+1}\sum_{i=0}^{n}\binom{2n+1}{2i+1}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\left(-\frac{1}{1+x}\right)^j$$

$$=\frac{(1+x)^n}{2n+1}\sum_{i=0}^{n}\binom{2n+1}{2i+1}\left(1-\frac{1}{1+x}\right)^i=\frac{1}{2n+1}\sum_{i=0}^{n}\binom{2n+1}{2i+1}x^i(1+x)^{n-i}=\sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{2i}\frac{x^i(1+x)^{n-i}}{2i+1} \qquad (3.67)$$

şeklinde yazılır. [47] de $\sum_{k=0}^{(n-1)/2}\binom{n}{2k+1}x^k=\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^n-\left(1-\sqrt{x}\right)^n}{2\sqrt{x}}$ eşitliğinde x ve n yerine sırasıyla, $\frac{x}{1+x}$ ve $2n+1$ alınırsa elde edilen

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{2n+1}{2i+1}\left(\frac{x}{1+x}\right)^i=\frac{\sqrt{1+x}}{2\sqrt{x}}\left(\left(1+\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right)^{2n+1}-\left(1-\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right)^{2n+1}\right)$$

toplam, Eşitlik (3.67) de yerine yazılırsa

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{2k}\frac{(4x)^k}{2k+1}$$

$$=\frac{(1+x)^n}{2n+1}\sum_{i=0}^{n}\binom{2n+1}{2i+1}x^i(1+x)^{-i}=\frac{(1+x)^n}{2n+1}\frac{\left(1+\sqrt{x/(1+x)}\right)^{2n+1}-\left(1-\sqrt{x/(1+x)}\right)^{2n+1}}{2\sqrt{x/(1+x)}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^{2n+1}-\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)^{2n+1}}{2(2n+1)\sqrt{x}}=\frac{1}{4n+2}x^n\left(\left(\sqrt{\frac{x+1}{x}}+1\right)^{2n+1}-\left(\sqrt{\frac{x+1}{x}}-1\right)^{2n+1}\right) \quad (3.68)$$

bulunur. Böylece Eşitlik (3.65) ve Eşitlik (3.68) den, istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 3.10: $p>3$ asal sayısı için

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}\frac{F_k}{4^k(2k+1)}\equiv\frac{1}{2p}\left(F_{(1-3p)/2}-F_{(1+3p)/2}\right)\left(\mathrm{mod}\ p^2\right), \quad (3.69)$$

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}\frac{L_k}{4^k(2k+1)}\equiv\frac{1}{2p}\left(L_{(1+3p)/2}-L_{(1-3p)/2}\right)\left(\mathrm{mod}\ p^2\right), \quad (3.70)$$

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}\frac{P_k}{8^k(2k+1)}\equiv\frac{1}{4p}\left((-1)^{(p-1)/2}Q_{(p-1)/2}-Q_{(p+1)/2}\right)\left(\mathrm{mod}\ p^2\right), \quad (3.71)$$

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}\frac{Q_k}{8^k(2k+1)}\equiv\frac{2}{p}\left((-1)^{(p-1)/2}P_{(p-1)/2}+P_{(p+1)/2}\right)\left(\mathrm{mod}\ p^2\right) \quad (3.72)$$

dır.

İspat: Teorem 3.5 ve $\{F_n\}$ Fibonacci dizisinin Binet formülünden

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{2k}\frac{(-4)^k}{2k+1}F_k=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{2k}\frac{(-4\alpha)^k}{2k+1}-\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{2k}\frac{(-4\beta)^k}{2k+1}\right)$$

$$=\frac{\left(\sqrt{\beta}+1/\sqrt{\beta}\right)^{2n+1}-\left(\sqrt{\beta}-1/\sqrt{\beta}\right)^{2n+1}}{2(2n+1)(\alpha-\beta)/\sqrt{\beta}}-\frac{\left(\sqrt{\alpha}+1/\sqrt{\alpha}\right)^{2n+1}-\left(\sqrt{\alpha}-1/\sqrt{\alpha}\right)^{2n+1}}{2(2n+1)(\alpha-\beta)/\sqrt{\alpha}}$$

$$=\frac{1}{(4n+2)(\alpha-\beta)}\left(\frac{(\beta+1)^{2n+1}-(\beta-1)^{2n+1}}{\beta^n}-\frac{(\alpha+1)^{2n+1}-(\alpha-1)^{2n+1}}{\alpha^n}\right)$$

$$=\frac{1}{4n+2}\left(\frac{\beta^{3n+2}-(-\alpha)^{3n+1}-\alpha^{3n+2}+(-\beta)^{3n+1}}{\alpha-\beta}\right)=\frac{1}{4n+2}\left((-1)^nF_{3n+1}-F_{3n+2}\right) \quad (3.73)$$

eşitliği bulunur. Eşitlik (3.73) de $n = \frac{p-1}{2}$ alınırsa

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\binom{(p-1)/2+k}{2k}\frac{(-4)^k}{2k+1}F_k=\frac{1}{2p}\left((-1)^{(p-1)/2}F_{3(p-1)/2+1}-F_{3(p-1)/2+2}\right)$$

eşitliği elde edilir. Böylece Denklik (1.7) ve $F_{-n}=(-1)^{n+1}F_n$ eşitliği yardımıyla Denklik (3.69) elde edilir.

Benzer şekilde Teorem 3.5 ve $\{L_n\}$ Lucas dizisinin Binet formülünden

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{2k}\frac{(-4)^k}{2k+1}L_k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{2k}\frac{(-4\alpha)^k}{2k+1}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{2k}\frac{(-4\beta)^k}{2k+1}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{\beta}+1/\sqrt{\beta}\right)^{2n+1}-\left(\sqrt{\beta}-1/\sqrt{\beta}\right)^{2n+1}}{2(2n+1)/\sqrt{\beta}}+\frac{\left(\sqrt{\alpha}+1/\sqrt{\alpha}\right)^{2n+1}-\left(\sqrt{\alpha}-1/\sqrt{\alpha}\right)^{2n+1}}{2(2n+1)/\sqrt{\alpha}}$$

$$=\frac{1}{4n+2}\left(\frac{(\beta+1)^{2n+1}-(\beta-1)^{2n+1}}{\beta^n}+\frac{(\alpha+1)^{2n+1}-(\alpha-1)^{2n+1}}{\alpha^n}\right)$$

$$=\frac{1}{4n+2}\left(\frac{\beta^{3n+2}-(-\alpha)^{3n+1}+\alpha^{3n+2}-(-\beta)^{3n+1}}{\alpha-\beta}\right)=\frac{1}{4n+2}\left((-1)^nL_{3n+1}+L_{3n+2}\right) \qquad (3.74)$$

elde edilir. Eşitlik (3.74) de $n = \frac{p-1}{2}$ alınırsa

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\binom{(p-1)/2+k}{2k}\frac{(-4)^k}{2k+1}L_k=\frac{1}{2p}\left((-1)^{(p-1)/2}L_{3(p-1)/2+1}+L_{3(p-1)/2+2}\right)$$

eşitliği elde edilir. Buradan Denklik (1.7) ve $L_{-n}=(-1)^nL_n$ eşitliği yardımıyla Denklik (3.70) elde edilir.

Denklik (3.71) i ispatlamak için, Teorem 3.5 ve $\{P_n\}$ Pell dizisinin Binet formülünden

$$4(2n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{2k}\frac{(-2)^k}{2k+1}P_k=\frac{2(2n+1)}{\sqrt{2}}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{2k}\frac{(-2\delta)^k}{2k+1}-\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{2k}\frac{(-2\gamma)^k}{2k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(-\frac{\delta}{2}\right)^{n}\left(\left(\sqrt{\frac{\delta-2}{\delta}}+1\right)^{2n+1}-\left(\sqrt{\frac{\delta-2}{\delta}}-1\right)^{2n+1}\right)-\left(-\frac{\gamma}{2}\right)^{n}\left(\left(\sqrt{\frac{\gamma-2}{\gamma}}+1\right)^{2n+1}-\left(\sqrt{\frac{\gamma-2}{\gamma}}-1\right)^{2n+1}\right)\right)$$

eşitliği bulunur. $\delta+\gamma=2$ ve $\delta\gamma=-1$ olduğundan

$$4(2n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{2k}\frac{(-2)^{k}}{2k+1}P_{k}$$

$$=\left(-\frac{\delta}{2}\right)^{n}\frac{\left(|\gamma|+1\right)^{2n+1}-\left(|\gamma|-1\right)^{2n+1}}{\sqrt{2}}-\left(-\frac{\gamma}{2}\right)^{n}\frac{\left(|\delta|+1\right)^{2n+1}-\left(|\delta|-1\right)^{2n+1}}{\sqrt{2}}$$

$$=\left(-\frac{\delta}{2}\right)^{n}\left(\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{2n+1}-\left(\sqrt{2}\gamma\right)^{2n+1}}{\sqrt{2}}\right)-\left(-\frac{\gamma}{2}\right)^{n}\left(\frac{\left(\sqrt{2}\delta\right)^{2n+1}-\left(\sqrt{2}\right)^{2n+1}}{\sqrt{2}}\right)=(-1)^{n}Q_{n}-Q_{n+1}\qquad(3.75)$$

elde edilir. Eşitlik (3.75) de $n=\frac{p-1}{2}$ alınırsa

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\binom{(p-1)/2+k}{2k}\frac{(-2)^{k}}{2k+1}P_{k}=\frac{1}{4p}\left((-1)^{(p-1)/2}Q_{(p-1)/2}-Q_{(p+1)/2}\right)$$

eşitliği elde edilir. Böylece Denklik (1.7) yardımıyla istenilen sonuç elde edilir.

Son olarak ispatı tamamlamak için Denklik (3.72) nin kanıtını verelim. Teorem 3.5 ve $\{Q_n\}$ Pell-Lucas dizisinin Binet formülünden

$$2(2n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{2k}\frac{(-2)^{k}}{2k+1}Q_{k}=2(2n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{2k}\frac{(-2\delta)^{k}}{2k+1}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{2k}\frac{(-2\gamma)^{k}}{2k+1}$$

$$=\left(-\frac{\delta}{2}\right)^{n}\left(\left(\sqrt{\frac{\delta-2}{\delta}}+1\right)^{2n+1}+\left(\sqrt{\frac{\delta-2}{\delta}}-1\right)^{2n+1}\right)-\left(-\frac{\gamma}{2}\right)^{n}\left(\left(\sqrt{\frac{\gamma-2}{\gamma}}+1\right)^{2n+1}+\left(\sqrt{\frac{\gamma-2}{\gamma}}-1\right)^{2n+1}\right)$$

eşitliği elde edilir. $\delta+\gamma=2$ ve $\delta\gamma=-1$ eşitliklerinden

$$\frac{2n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{2k}\frac{(-2)^{k}}{2k+1}Q_{k}$$

$$=\left(-\frac{\delta}{2}\right)^{n}\frac{\left(|\gamma|+1\right)^{2n+1}-\left(|\gamma|-1\right)^{2n+1}}{4}+\left(-\frac{\gamma}{2}\right)^{n}\frac{\left(|\delta|+1\right)^{2n+1}-\left(|\delta|-1\right)^{2n+1}}{4}$$

$$=\left(-\frac{\delta}{2}\right)^{n}\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{2n+1}-\left(\sqrt{2}\gamma\right)^{2n+1}}{4}+\left(-\frac{\gamma}{2}\right)^{n}\frac{\left(\sqrt{2}\delta\right)^{2n+1}-\left(\sqrt{2}\right)^{2n+1}}{4}=(-1)^{n}P_{n}+P_{n+1} \qquad (3.76)$$

bulunur. Eşitlik (3.76) da $n=\frac{p-1}{2}$ alınırsa

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\binom{(p-1)/2+k}{2k}\frac{(-2)^{k}}{2k+1}Q_{k}=\frac{2}{p}\left((-1)^{(p-1)/2}P_{(p-1)/2}+P_{(p+1)/2}\right)$$

eşitliği elde edilir. Buradan Denklik (1.7) yardımıyla istenilen denklik elde edilir.

Sonuç 3.11: $r=1,2$ için $3\mid(p-r)$ olacak şekildeki $p>5$ asal sayıları için

$$\sum_{k=0}^{\lfloor p/3\rfloor}C_{k}^{(2)}F_{k}\left(\frac{4}{27}\right)^{k}\equiv\frac{3}{4(p-r)+6}\left(F_{-p+r-1}-F_{p-r+2}\right)(\mathrm{mod}\,p), \qquad (3.77)$$

$$\sum_{k=0}^{\lfloor p/3\rfloor}C_{k}^{(2)}L_{k}\left(\frac{4}{27}\right)^{k}\equiv\frac{3}{4(p-r)+6}\left(L_{p-r+2}-L_{-p+r-1}\right)(\mathrm{mod}\,p), \qquad (3.78)$$

$$\sum_{k=0}^{\lfloor p/3\rfloor}C_{k}^{(2)}P_{k}\left(\frac{2}{27}\right)^{k}\equiv\frac{3}{4(2p-2r+3)}\left((-1)^{(p-r)/3}Q_{(p-r)/3}-Q_{(p-r)/3+1}\right)(\mathrm{mod}\,p) \qquad (3.79)$$

ve

$$\sum_{k=0}^{\lfloor p/3\rfloor}C_{k}^{(2)}Q_{k}\left(\frac{2}{27}\right)^{k}\equiv\frac{6}{2(p-r)+3}\left((-1)^{(p-r)/3}P_{(p-r)/3}+P_{(p-r)/3+1}\right)(\mathrm{mod}\,p) \qquad (3.80)$$

dır.

İspat: $r=1,2$ için $3\mid(p-r)$ olacak şekildeki $p>5$ asal sayıları için $k=0,1,\ldots,(p-r)/3$ olmak üzere

$$\binom{(p-r)/3+k}{2k}(-27)^{k}\equiv\binom{3k}{k}(\mathrm{mod}\,p)$$

denkliği elde edilir [16]. Bu denklik sırasıyla Eşitlik (3.73)-(3.76) da yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa istenilen denklikler elde edilir.

Sonuç 3.12: $s=1,3$ için $4\mid(p-s)$ olacak şekildeki $p>3$ asal sayıları için

$$\sum_{k=0}^{\lfloor p/4\rfloor}\frac{C_{2k}F_{k}}{16^{k}}\equiv\frac{1}{p-s+2}\left(F_{-3(p-s)/4-1}-F_{3(p-s)/4+2}\right)(\mathrm{mod}\,p), \qquad (3.81)$$

$$\sum_{k=0}^{\lfloor p/4 \rfloor} \frac{C_{2k}L_k}{16^k} \equiv \frac{1}{p-s+2}\left(L_{3(p-s)/4+2}-L_{-3(p-s)/4-1}\right)(\mathrm{mod}\ p), \tag{3.82}$$

$$\sum_{k=0}^{\lfloor p/4 \rfloor} \frac{C_{2k}P_k}{32^k} \equiv \frac{1}{2(p-s+2)}\left((-1)^{(p-s)/4}Q_{(p-s)/4}-Q_{(p-s)/4+1}\right)(\mathrm{mod}\ p) \tag{3.83}$$

ve

$$\sum_{k=0}^{\lfloor p/4 \rfloor} \frac{C_{2k}Q_k}{32^k} \equiv \frac{4}{p-s+2}\left((-1)^{(p-s)/4}P_{(p-s)/4}+P_{(p-s)/4+1}\right)(\mathrm{mod}\ p) \tag{3.84}$$

dır.

İspat: $s=1,3$ için $4\left|(p-s)\right.$ olacak şekildeki $p>3$ asal sayıları için $k=0,1,...,(p-s)/4$ olmak üzere

$$\binom{(p-s)/4+k}{2k}(-64)^k \equiv \binom{4k}{2k}(\mathrm{mod}p)$$

dır [48]. Bu denklik sırasıyla Eşitlik (3.73)-(3.76) da yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa istenilen denklikler elde edilir.

Sonuç 3.13: $t=1,5$ için $6\left|(p-t)\right.$ olacak şekildeki $p>5$ asal sayıları için

$$\sum_{k=0}^{\lfloor p/6 \rfloor} \binom{6k}{3k}\binom{2k}{k}^{-1} \frac{C_k^{(2)}F_k}{108^k} \equiv \frac{3}{2(p-t+3)}\left(F_{-(p-t)/2-1}-F_{(p-t)/2+2}\right)(\mathrm{mod}\ p), \tag{3.85}$$

$$\sum_{k=0}^{\lfloor p/6 \rfloor} \binom{6k}{3k}\binom{2k}{k}^{-1} \frac{C_k^{(2)}L_k}{108^k} \equiv \frac{3}{2(p-t+3)}\left(L_{(p-t)/2+2}-L_{-(p-t)/2-1}\right)(\mathrm{mod}\ p), \tag{3.86}$$

$$\sum_{k=0}^{\lfloor p/6 \rfloor} \binom{6k}{3k}\binom{2k}{k}^{-1} \frac{C_k^{(2)}P_k}{6^{3k}} \equiv \frac{3}{4(p-t+3)}\left((-1)^{(p-t)/6}Q_{(p-t)/6}-Q_{(p-t)/6+1}\right)(\mathrm{mod}\ p) \tag{3.87}$$

ve

$$\sum_{k=0}^{\lfloor p/6 \rfloor} \binom{6k}{3k}\binom{2k}{k}^{-1} \frac{C_k^{(2)}Q_k}{6^{3k}} \equiv \frac{6}{p-t+3}\left((-1)^{(p-t)/6}P_{(p-t)/6}+P_{(p-t)/6+1}\right)(\mathrm{mod}\ p) \tag{3.88}$$

dir.

İspat: $t=1,5$ için $6\left|(p-t)\right.$ olacak şekildeki $p>5$ asal sayıları için $k=0,1,...,(p-t)/6$ olmak üzere

$$\binom{(p-t)/6+k}{2k}(-432)^{k}\equiv\binom{6k}{3k}\binom{3k}{k}\binom{2k}{k}^{-1}\pmod{p}$$

dır. Bu denklik sırasıyla Eşitlik (3.73)-(3.76) da yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa istenilen denklikler elde edilir.

4. $B_{n,k}$ GENELLEŞTİRİLMİŞ CATALAN SAYILARINI İÇEREN DENKLİKLER

Genelleştirilmiş Catalan sayıları olarak bilinen $B_{n,k}$ sayılarını içeren toplamlarla ilgili bazı denklikler elde edilmiştir.

Lemma 4.1: $p>3$ bir asal sayı olsun. $0 \le m < p-1$ ve $1 \le d \le p-1$ olacak şekilde $m,d \in \mathbb{Z}$ için

$$\sum_{k=d}^{p-1} k^{\underline{m}} H_{k-d} \equiv \frac{(p+d)}{p(m+1)} (p+d-1)^{\underline{m}} - \frac{d}{m+1} (d-1)^{\underline{m}} \left(\frac{1}{p} + H_d - H_{m+1} \right) (\mathrm{mod}\ p)$$

dır.

İspat: Toplam özelliklerinden

$$\sum_{k=d}^{p-1} k^{\underline{m}} H_{p+d-1-k} = \sum_{k=1}^{p+d-2} k^{\underline{m}} H_{p+d-1-k} - \sum_{k=p}^{p+d-2} k^{\underline{m}} H_{p+d-1-k} - \sum_{k=1}^{d-1} k^{\underline{m}} H_{p+d-1-k} \qquad (4.1)$$

olarak yazılabilir. Denklik (1.5), Denklik (1.19) ve Denklik (1.20), Eşitlik (4.1) de yerine yazılırsa

$$\sum_{k=d}^{p-1} k^{\underline{m}} H_{k-d} \equiv \sum_{k=1}^{p+d-2} k^{\underline{m}} H_{p+d-1-k} - \sum_{k=0}^{d-2} k^{\underline{m}} H_{d-1-k} - \sum_{k=1}^{d-1} k^{\underline{m}} \left(H_{d-1-k} + \frac{1}{p} \right) (\mathrm{mod}\ p) \qquad (4.2)$$

denkliği elde edilir. Eşitlik (1.13) den

$$\sum_{k=1}^{d-2} k^{\underline{m}} H_{d-1-k} = \frac{d}{m+1} (d-1)^{\underline{m}} \left(H_d - H_{m+1} \right)$$

ve

$$\sum_{k=1}^{p+d-2} k^{\underline{m}} H_{p+d-1-k} = \frac{p+d}{m+1} (p+d-1)^{\underline{m}} \left(H_{p+d+1} - H_{m+1} \right)$$

olduğunu biliyoruz. Bu değerler, Denklik (4.2) de yerine yazılırsa

$$\sum_{k=d}^{p-1} k^{\underline{m}} H_{k-d} \equiv \sum_{k=1}^{p+d-2} k^{\underline{m}} H_{p+d-1-k} - 2\sum_{k=1}^{d-2} k^{\underline{m}} H_{d-1-k} - \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{d-1} k^{\underline{m}}$$

$$\equiv \frac{p+d}{m+1}(p+d-1)^{\underline{m}}\left(H_{p+d+1}-H_{m+1}\right) - 2\frac{d}{m+1}(d-1)^{\underline{m}}\left(H_{d}-H_{m+1}\right) - \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{d-1} k^{\underline{m}} \pmod p \qquad (4.3)$$

elde edilir. Bu son denklikte Denklik (1.5) ve Denklik (1.20), Denklik (4.3) de yerine yazılırsa

$$\sum_{k=d}^{p-1} k^{\underline{m}} H_{k-d} \equiv \sum_{k=1}^{p+d-2} k^{\underline{m}} H_{p+d-1-k} - 2\sum_{k=1}^{d-2} k^{\underline{m}} H_{d-1-k} - \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{d-1} k^{\underline{m}}$$

$$\equiv -\frac{d}{m+1}(d-1)^{\underline{m}}\left(H_{d}-H_{m+1}\right) + \frac{p+d}{p(m+1)}(p+d-1)^{\underline{m}} - \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{d-1} k^{\underline{m}} \pmod p$$

denkliği elde edilir. Buradan Eşitlik (1.8) kullanılırsa

$$\sum_{k=d}^{p-1} k^{\underline{m}} H_{k-d} \equiv \frac{p+d}{p(m+1)}(p+d-1)^{\underline{m}} - \frac{d}{m+1}(d-1)^{\underline{m}}\left(\frac{1}{p}+H_{d}-H_{m+1}\right) \pmod p$$

bulunur. Böylece istenen ispat tamamlanır.

Lemma 4.2: p tek asal sayı ve $1 < d \le p-1$ olmak üzere $d \in \mathbb{Z}$ için

$$\sum_{k=d}^{p-1} \frac{1}{k} H_{k-d} \equiv H_{p+d-1}^2 - H_{p+d-1,2} - 2H_{d-1}^2 + 2H_{d-1,2} - \frac{2}{p} H_{d-1} \pmod p$$

dır.

İspat: Toplam özelliklerinden

$$\sum_{k=1}^{p+d-2} \frac{1}{k} H_{p+d-1-k} = \sum_{k=1}^{d-1} \frac{1}{k} H_{p+d-1-k} + \sum_{k=d}^{p-1} \frac{1}{k} H_{p+d-1-k} + \sum_{k=p}^{p+d-2} \frac{1}{k} H_{p+d-1-k} \qquad (4.4)$$

yazılabilir. Denklik (1.19) ve Denklik (1.20), Eşitlik (4.4) de yerine yazılırsa

$$\sum_{k=1}^{p+d-2} \frac{1}{k} H_{p+d-1-k} \equiv \sum_{k=1}^{d-1} \frac{1}{k}\left(H_{d-1-k}+\frac{1}{p}\right) + \sum_{k=d}^{p-1} \frac{1}{k} H_{k-d} + \frac{H_{d-1}}{p} + \sum_{k=1}^{d-2} \frac{1}{p+k} H_{d-1-k} \pmod p$$

denkliği bulunur. $1 \le k \le d-2$ için $\frac{1}{p+k} \equiv \frac{1}{k} \pmod p$ denkliğinden faydalanılırsa son denklikten

$$\sum_{k=1}^{p+d-2}\frac{1}{k}H_{p+d-k-1}\equiv 2\sum_{k=1}^{d-2}\frac{1}{k}H_{d-k-1}+\sum_{k=d+1}^{p-1}\frac{1}{k}H_{k-d}+2\frac{H_{d-1}}{p}\pmod p \tag{4.5}$$

elde edilir. Eşitlik (1.12) de $m = 0$ alınırsa

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}H_{n-k}=H_n^2-H_{n,2} \tag{4.6}$$

eşitliği bulunur. Bu toplamda sırasıyla $p+d-1$ ve $d-1$ alınırak elde edilen eşitlikler (4.5) de yerine yazılırsa

$$H_{p+d-1}^2-H_{p+d-1,2}\equiv 2\left(H_{d-1}^2-H_{d-1,2}\right)+\sum_{k=d+1}^{p-1}\frac{1}{k}H_{k-d}+2\frac{H_{d-1}}{p}\pmod p$$

bulunur. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa istenilen sonuç elde edilir.

Lemma 4.3: $n\in\mathbb{Z}^+$ için

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2H_k=(-1)^n\binom{n+1}{2}H_n+(-1)^n\frac{n}{4}+\frac{1}{8}\left(1-(-1)^n\right) \tag{4.7}$$

ve

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2H_{n-k}=(-1)^n\binom{n+1}{2}\left(H_{\lfloor n-1/2\rfloor}-H_{n-1}\right)+\frac{3+2n}{8}+(-1)^n\frac{1+4n}{8} \tag{4.8}$$

dir.

İspat: İlk olarak Eşitlik (4.7) nin ispatını verelim. Toplam özelliklerinden ve harmonik sayıların tanımından

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2H_k$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\sum_{k=j}^{n}(-1)^k k^2=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j-1}(-1)^k k^2 \tag{4.9}$$

yazılabilir. Buradan

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2=(-1)^n\binom{n+1}{2} \tag{4.10}$$

eşitlik, Eşitlik (4.9) da yerine yazılırsa

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 H_k=(-1)^n\binom{n+1}{2}H_n+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(-1)^j(j-1) \tag{4.11}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k=\frac{(-1)^n}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4} \tag{4.12}$$

ve

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k=\frac{(-1)^n-1}{2}$$

eşitlikleri gözönüne alınarak Eşitlik (4.11) den Eşitlik (4.6) elde edilir.

Eşitlik (4.8) in ispatı için toplam özelliklerinden yararlanarak

$$\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k k^2 H_{n-k}$$
$$=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-k}(n-k)^2 H_k=(-1)^n\left(\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k k^2 H_k-2n\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k kH_k+n^2\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k H_k\right) \tag{4.13}$$

yazabiliriz. Eşitlik (4.13) de, Eşitlik (1.9), Eşitlik (1.10) ve Eşitlik (4.6), yerlerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Lemma 4.4: p bir tek asal sayı ve $1\le d\le p-1$ olmak üzere $d\in\mathbb{Z}$ için

$$\sum_{k=d}^{p-1}(-1)^{k+d} k^2 H_{k-d}\equiv\binom{p+d}{2}\left(H_{\lfloor p+d-2/2\rfloor}-H_{p+d-2}\right)+(-1)^d\frac{2d+1}{8}+\frac{4d-3}{8}+\frac{1}{p}\binom{d}{2}\pmod p \tag{4.14}$$

dır.

İspat: Toplam özelliklerinden

$$\sum_{k=d}^{p-1}(-1)^k k^2 H_{p+d-1-k}=\sum_{k=1}^{p+d-2}(-1)^k k^2 H_{p+d-1-k}-\sum_{k=p}^{p+d-2}(-1)^k k^2 H_{p+d-1-k}-\sum_{k=1}^{d-1}(-1)^k k^2 H_{p+d-1-k} \tag{4.15}$$

olarak yazılabilir. Eşitlik (4.15) de, Denklik (1.5), Denklik (1.19) ve Denklik (1.20), yerlerine yazılırsa

$$\sum_{k=d}^{p-1}(-1)^k k^2 H_{k-d}$$
$$\equiv\sum_{k=1}^{p+d-2}(-1)^k k^2 H_{p+d-1-k}-\sum_{k=0}^{d-2}(-1)^{p+k}(p+k)^2 H_{d-1-k}-\sum_{k=1}^{d-1}(-1)^k k^2\left(H_{d-1-k}+\frac{1}{p}\right)\pmod p$$

denkliği elde edilir. p tek asal sayısı için Eşitlik (4.8) ve Eşitlik (4.10) yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 4.1: p tek asal sayı olsun. $1<d\le p-1$ olacak şekildeki $d\in\mathbb{Z}$ için

$$\sum_{k=1}^{p-1}\frac{B_{p,k}B_{p,k-d}}{k}$$

$$\equiv 4(-1)^{d}\left\{H_{d}+H_{d-1}+\frac{2}{p}+p\left(4H_{d}^{\,2}+4H_{d-1}^{\,2}-2H_{d,2}-2H_{d-1,2}-H_{p+d}^{2}-H_{p+d-1}^{2}\right)\right\}\left(\mathrm{mod}\ p^{2}\right) \qquad (4.16)$$

ve $p>3$ asal sayı ve $3<d\le p$ olacak şekildeki $d\in\mathbb{Z}$ için

$$\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{k}k^{2}B_{p,k}B_{p,k-d}$$

$$\equiv 4p\left\{1+\frac{(-1)^{d}}{2}+\binom{d+1}{2}\left(H_{\lfloor d-1/2\rfloor}+H_{\lfloor p+d-1/2\rfloor}\right)-\binom{d}{2}\left(H_{\lfloor d-2/2\rfloor}+H_{\lfloor p+d-2/2\rfloor}\right)-\frac{d}{p}\right\}\left(\mathrm{mod}\ p^{2}\right) \quad (4.17)$$

dir.

İspat: İlk olarak Denklik (4.16) ün ispatını verelim. $B_{p,0}=0$ ve $k<d$ için $B_{p,k-d}=-B_{p,d-k}$ olduğundan

$$\sum_{k=1}^{p-1}\frac{B_{p,k}B_{p,k-d}}{k}$$

$$=\sum_{k=1}^{d}\frac{B_{p,k}B_{p,k-d}}{k}+\sum_{k=d+1}^{p-1}\frac{B_{p,k}B_{p,k-d}}{k}=-\sum_{k=1}^{d-2}\frac{B_{p,k}B_{p,d-k}}{k}+\sum_{k=d+1}^{p-1}\frac{B_{p,k}B_{p,k-d}}{k}-\frac{1}{p^{2}}\binom{2p}{p-1}\binom{2p}{p-d+1}$$

elde edilir. Denklik (1.34) kullanılarak son eşitlikten

$$\sum_{k=1}^{p-1}\frac{B_{p,k}B_{p,k-d}}{k}\equiv 4(-1)^{d}\left\{-\sum_{k=1}^{d-2}\frac{1}{k}+p\sum_{k=1}^{d-2}\frac{H_{k}+H_{k-1}}{k}+p\sum_{k=1}^{d-2}\frac{H_{d-k}+H_{d-k-1}}{k}\right.$$

$$\left.-p\sum_{k=d+1}^{p-1}\frac{H_{k}+H_{k-1}}{k}+\sum_{k=d+1}^{p-1}\frac{1}{k}-p\sum_{k=d+1}^{p-1}\frac{H_{k-d}+H_{k-d-1}}{k}\right\}-\frac{1}{p^{2}}\binom{2p}{p-1}\binom{2p}{p-d+1}\left(\mathrm{mod}\ p^{2}\right)$$

denkliği elde edilir. Ayrıca Eşitlik (1.11), Eşitlik (4.6) ve Lemma 4.2'den faydalanılarak

$$\sum_{k=1}^{p-1}\frac{B_{p,k}B_{p,k-d}}{k}$$

$$\equiv 4(-1)^d\left\{pH_{d-2}^2+p\left(H_d^2+H_{d-1}^2-H_{d,2}-H_{d-1,2}-\frac{1}{d-1}\right)+H_{p-1}-H_d-H_{d-2}-p\left(H_{p-1}^2-H_d^2\right)+2\left(H_{d-1}+H_d\right)\right.$$

$$\left.-p\left(H_{p+d-1}^2+H_{p+d}^2-H_{p+d-1,2}-H_{p+d,2}-2\left(H_d^2+H_{d-1}^2-H_{d,2}-H_{d-1,2}\right)\right)\right\}-\frac{1}{p^2}\binom{2p}{p-1}\binom{2p}{p-d+1}\pmod{p^2}$$

elde edilir. Hatta Denklik (1.17) ve Denklik (1.21) den faydalanılarak

$$\sum_{k=1}^{p-1}\frac{B_{p,k}B_{p,k-d}}{k}\equiv 4(-1)^d\left\{\frac{2}{p}-H_{d-2}+2H_{d-1}+H_d+p\left(H_{d-2}^2+4H_d^2-\frac{1}{d-1}\right)\right.$$

$$\left.-p\left(H_{p+d-1}^2+H_{p+d}^2-3H_{d-1}^2+2H_{d-1,2}+2H_{d,2}\right)\right\}-\frac{1}{p^2}\binom{2p}{p-1}\binom{2p}{p-d+1}\pmod{p^2}$$

sağlandığı görülür. Ayrıca Denklik (1.35) yerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir.

Şimdi de Denklik (4.17) in ispatını verelim. $B_{p,0}=0$ ve $k<d$ için $B_{p,k-d}=-B_{p,d-k}$ olduğundan

$$\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^k k^2B_{p,k}B_{p,k-d}=\sum_{k=1}^{d}(-1)^k k^2B_{p,k}B_{p,k-d}+\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^k k^2B_{p,k}B_{p,k-d}$$

$$=-\sum_{k=1}^{d-2}(-1)^k k^2B_{p,k}B_{p,d-k}+\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^k k^2B_{p,k}B_{p,k-d}-(-1)^{d-1}(d-1)^2\frac{d-1}{p^2}\binom{2p}{p-1}\binom{2p}{p-d+1}$$

elde edilir. Buradan Denklik (1.34) kullanılarak

$$\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^k k^2B_{p,k}B_{p,k-d}\equiv 4(-1)^d\left\{-\sum_{k=1}^{d-2}(-1)^k k^2+p\sum_{k=1}^{d-2}(-1)^k k^2\left(H_k+H_{k-1}\right)+\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^k k^2\right.$$

$$\left.+p\sum_{k=1}^{d-2}(-1)^k k^2\left(H_{d-k}+H_{d-k-1}\right)-p\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^k k^2\left(H_{k-d}+H_{k-d-1}\right)-p\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^k k^2\left(H_k+H_{k-1}\right)\right\}$$

$$+(-1)^d\frac{(d-1)^3}{p^2}\binom{2p}{p-1}\binom{2p}{p-d+1}\pmod{p^2}$$

denkliği elde edilir. Ayrıca Eşitlik (4.6), Eşitlik (4.10) ve Eşitlik (4.12) den faydalanılarak

$$\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^k k^2 B_{p,k}B_{p,k-d}$$

$$\equiv 4(-1)^d\left\{-(-1)^{d-2}\binom{d-1}{2}+p\left(2(-1)^d\binom{d-1}{2}H_{d-2}+\frac{1}{2}\left(1-(-1)^d\right)\right)+(-1)^{p-1}\binom{p}{2}-(-1)^d\binom{d+1}{2}\right.$$

$$+p\sum_{k=1}^{d-2}(-1)^k k^2\left(H_{d-k}+H_{d-k-1}\right)-p\left(2(-1)^{p-1}\binom{p}{2}H_{p-1}-2(-1)^d\binom{d+1}{2}H_d+\frac{1}{2}\left((-1)^d-(-1)^{p-1}\right)\right)$$

$$\left.-p\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^k k^2\left(H_{k-d}+H_{k-d-1}\right)\right\}+(-1)^d\frac{(d-1)^3}{p^2}\binom{2p}{p-1}\binom{2p}{p-d+1}\left(\mathrm{mod}\ p^2\right)$$

elde edilir. Hatta Eşitlik (4.8) ve Denklik (4.14) den faydalanılarak

$$\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^k k^2 B_{p,k}B_{p,k-d}$$

$$\equiv 4(-1)^d\left\{-(-1)^{d-2}\binom{d-1}{2}+p\left(2(-1)^d\binom{d-1}{2}H_{d-2}+\frac{1}{2}\left(1-(-1)^d\right)\right)+(-1)^{p-1}\binom{p}{2}-(-1)^d\binom{d+1}{2}\right.$$

$$+p\left((-1)^d\binom{d+1}{2}\left(H_{\lfloor d-1/2\rfloor}-H_{d-1}\right)-(-1)^d\binom{d}{2}\left(H_{\lfloor d-2/2\rfloor}-H_{d-2}\right)+\frac{d+1+(-1)^d}{2}+(-1)^d(d-1)^2\right)$$

$$-p\left(2(-1)^{p-1}\binom{p}{2}H_{p-1}-2(-1)^d\binom{d+1}{2}H_d+\frac{1}{2}\left((-1)^d-(-1)^{p-1}\right)\right)-(-1)^d\binom{d}{2}+(-1)^d\binom{d+1}{2}$$

$$\left.-p\left((-1)^d\binom{p+d}{2}\left(H_{\lfloor p+d-2/2\rfloor}-H_{p+d-2}\right)-(-1)^d\binom{p+d+1}{2}\left(H_{\lfloor p+d-1/2\rfloor}-H_{p+d-1}\right)+\frac{d+1-(-1)^d}{2}\right)\right\}$$

$$+(-1)^d\frac{(d-1)^3}{p^2}\binom{2p}{p-1}\binom{2p}{p-d+1}\left(\mathrm{mod}\ p^2\right)$$

sağlandığı görülür. p tek asal sayısı için Denklik (1.5), Denklik (1.17) ve Denklik (1.20) yardımıyla

$$\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^k k^2 B_{p,k}B_{p,k-d}$$

$$\equiv 4p(-1)^d\left\{\frac{1}{2}-(-1)^d+(-1)^d(d-1)^2+2(-1)^d H_{d-2}\left(\binom{d}{2}+\binom{d-1}{2}\right)+2\frac{(-1)^d}{d}\binom{d+1}{2}+(-1)^d\right.$$

$$\left.+(-1)^d\binom{d+1}{2}H_{\lfloor d-1/2\rfloor}-(-1)^d\binom{d}{2}H_{\lfloor d-2/2\rfloor}-(-1)^d\binom{d}{2}H_{\lfloor p+d-2/2\rfloor}+(-1)^d\binom{d+1}{2}H_{\lfloor p+d-1/2\rfloor}\right\}$$

$$+(-1)^{d}\frac{(d-1)^{3}}{p^{2}}\binom{2p}{p-1}\binom{2p}{p-d+1}\pmod{p^{2}}$$

denkliği elde edilir. Ayrıca Denklik (1.35) yerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 4.1: Teorem 4.1 de $d=4$ alınırsa $p>3$ için

$$\sum_{k=1}^{p-1}\frac{B_{p,k}B_{p,k-4}}{k}\equiv 4\left(\frac{47}{12}+\frac{2}{p}+p\left(\frac{1817}{72}-H_{p+4}^{2}-H_{p+3}^{2}\right)\right)\pmod{p^{2}}$$

ve

$$\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{k}k^{2}B_{p,k}B_{p,k-4}\equiv -16+4p\left(\frac{11}{2}+10H_{\lfloor p+3/2\rfloor}-6H_{\lfloor p+2/2\rfloor}\right)\pmod{p^{2}}$$

denklikleri elde edilir.

Teorem 4.2: $p>3$ asal sayı olsun. $0<d\le p$ ve $0<m<p-1$ olacak şekilde $m, d\in\mathbb{Z}$ için

$$\sum_{k=1}^{p-1}k^{\underline{m}}B_{p,k}B_{p,k-d}$$

$$\equiv\frac{4(-1)^{d}}{m+1}\Big\{p(-1)^{m}(m-1)!-(p+d)(p+d-1)^{\underline{m}}+2p(2H_{d}-H_{m})\left((d+1)d^{\underline{m}}+d(d-1)^{\underline{m}}\right)$$

$$-(p+d+1)(p+d)^{\underline{m}}-p\left(\frac{8d}{m+1}(d-1)^{\underline{m}}+\frac{m+1}{m}\left(d^{\underline{m}}+(d-1)^{\underline{m}}\right)\right)\Big\}\pmod{p^{2}}$$

dir.

İspat: Toplam özelliklerinden

$$\sum_{k=1}^{p-1}k^{\underline{m}}B_{p,k}B_{p,k-d}=\sum_{k=1}^{d}k^{\underline{m}}B_{p,k}B_{p,k-d}+\sum_{k=d+1}^{p-1}k^{\underline{m}}B_{p,k}B_{p,k-d}$$

elde edilir. Burada $B_{p,0}=0$ ve $k<d$ için $B_{p,k-d}=-B_{p,d-k}$ eşitliği kullanılırsa

$$\sum_{k=1}^{p-1}k^{\underline{m}}B_{p,k}B_{p,k-d}=-\sum_{k=1}^{d-2}k^{\underline{m}}B_{p,k}B_{p,d-k}+\sum_{k=d+1}^{p-1}k^{\underline{m}}B_{p,k}B_{p,k-d}-\frac{d-1}{p^{2}}(d-1)^{\underline{m}}\binom{2p}{p-d+1}\binom{2p}{p-1}$$

eşitliği bulunur. Denklik (1.34) den faydalanılırsa bu son eşitlik

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{\underline{m}} B_{p,k} B_{p,k-d}$$

$$\equiv 4(-1)^{d} \left\{ -\sum_{k=1}^{d-2} k^{\underline{m}} + p\sum_{k=1}^{d-2} k^{\underline{m}} \left(H_{k} + H_{k-1}\right) + p\sum_{k=1}^{d-2} k^{\underline{m}} \left(H_{d-k} + H_{d-k-1}\right) - p \sum_{k=d+1}^{p-1} k^{\underline{m}} \left(H_{k-d} + H_{k-d-1}\right) \right.$$

$$\left. + \sum_{k=d+1}^{p-1} k^{\underline{m}} - p \sum_{k=d+1}^{p-1} k^{\underline{m}} \left(H_{k} + H_{k-1}\right) \right\} - \frac{d-1}{p^{2}} (d-1)^{\underline{m}} \binom{2p}{p-d+1} \binom{2p}{p-1} \left(\mathrm{mod}\ p^{2}\right)$$

olarak yazılır. Ayrıca Eşitlik (1.8), Eşitlik (1.13) ve Lemma 4.1 kullanılarak

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{\underline{m}} B_{p,k} B_{p,k-d}$$

$$\equiv 4(-1)^{d} \left\{ -\frac{(d-1)(d-2)^{\underline{m}}}{m+1} + p\sum_{k=1}^{d-2} k^{\underline{m}} \left(H_{k} + H_{k-1}\right) + \frac{1}{m+1} \left(p(p-1)^{\underline{m}} - (d+1)d^{\underline{m}}\right) \right.$$

$$+ p \left(\frac{2(d+1)d^{\underline{m}}}{m+1} \left(H_{d+1} - H_{m+1}\right) + \frac{2d(d-1)^{\underline{m}}}{m+1} \left(H_{d} - H_{m+1}\right) - (d-1)^{\underline{m}} \right)$$

$$- p \left(\frac{(p+d)(p+d-1)^{\underline{m}}}{p(m+1)} - \frac{d(d-1)^{\underline{m}}}{p(m+1)} + \frac{(p+d+1)(p+d)^{\underline{m}}}{p(m+1)} - \frac{(d+1)d^{\underline{m}}}{p(m+1)} \right)$$

$$\left. - p \sum_{k=d+1}^{p-1} k^{\underline{m}} \left(H_{k} + H_{k-1}\right) \right\} - \frac{d-1}{p^{2}} (d-1)^{\underline{m}} \binom{2p}{p-d+1} \binom{2p}{p-1} \left(\mathrm{mod}\ p^{2}\right)$$

elde edilir. Burada Eşitlik (1.4) ve Eşitlik (1.14) den faydalanılırsa

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{\underline{m}} B_{p,k} B_{p,k-d}$$

$$\equiv 4(-1)^{d} \left\{ -\frac{(d-1)(d-2)^{\underline{m}}}{m+1} + 2p \left(\frac{(d-1)(d-2)^{\underline{m}}}{m+1} \left(H_{d-1} - \frac{1}{m+1} \right) \right) - \frac{p}{m} (d-2)^{\underline{m}} \right.$$

$$+ p \left(\frac{2(d+1)d^{\underline{m}}}{m+1} \left(H_{d+1} - H_{m+1}\right) + \frac{2d(d-1)^{\underline{m}}}{m+1} \left(H_{d} - H_{m+1}\right) - (d-1)^{\underline{m}} \right)$$

$$\left. - p \left(\frac{(p+d)(p+d-1)^{\underline{m}}}{p(m+1)} - \frac{d(d-1)^{\underline{m}}}{p(m+1)} + \frac{(p+d+1)(p+d)^{\underline{m}}}{p(m+1)} - \frac{(d+1)d^{\underline{m}}}{p(m+1)} \right) \right.$$

$$-p\left(\frac{2p(p-1)^{\underline{m}}}{m+1}\left(H_p-\frac{1}{m+1}\right)-2\frac{d+1}{m+1}d^{\underline{m}}\left(H_{d+1}-\frac{1}{m+1}\right)-\frac{(p-1)^{\underline{m}}-d^{\underline{m}}}{m}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{m+1}\left(p(p-1)^{\underline{m}}-(d+1)d^{\underline{m}}\right)\right)\Bigg\}-\frac{d-1}{p^2}(d-1)^{\underline{m}}\binom{2p}{p-d+1}\binom{2p}{p-1}\pmod{p^2}$$

denkliği elde edilir. Hatta Denklik (1.17), Denklik (1.22) ve Denklik (1.35) yukarıda kullanılırsa

$$\sum_{k=1}^{p-1}k^{\underline{m}}B_{p,k}B_{p,k-d}$$

$$\equiv 4(-1)^d\Bigg\{-\frac{(d-1)(d-2)^{\underline{m}}}{m+1}-\frac{p}{m}(d-2)^{\underline{m}}+2p\left(\frac{(d-1)(d-2)^{\underline{m}}}{m+1}\left(H_{d-1}-\frac{1}{m+1}\right)\right)$$

$$+p\left(\frac{2(d+1)d^{\underline{m}}}{m+1}(H_{d+1}-H_{m+1})+\frac{2d(d-1)^{\underline{m}}}{m+1}(H_d-H_{m+1})-(d-1)^{\underline{m}}\right)$$

$$-\frac{(p+d)(p+d-1)^{\underline{m}}}{(m+1)}+\frac{d(d-1)^{\underline{m}}}{(m+1)}-p\left(-2\frac{d+1}{m+1}d^{\underline{m}}\left(H_{d+1}-\frac{1}{m+1}\right)-\frac{(-1)^m m!-d^{\underline{m}}}{m}\right)$$

$$-\frac{(p+d+1)(p+d)^{\underline{m}}}{(m+1)}-\frac{p}{m+1}(-1)^m m!-(d-1)^{\underline{m}}\left(\frac{p}{d-1}+\frac{2p}{d}+1-p-2pH_d\right)\Bigg\}\pmod{p^2}$$

denkliği bulunur. Eşitlik (1.3) ve Eşitlik (1.4) kullanılarak

$$\sum_{k=1}^{p-1}k^{\underline{m}}B_{p,k}B_{p,k-d}$$

$$\equiv\frac{4(-1)^d}{m+1}\Big\{p(-1)^m(m-1)!-(p+d)(p+d-1)^{\underline{m}}+2p(2H_d-H_m)\left((d+1)d^{\underline{m}}+d(d-1)^{\underline{m}}\right)$$

$$-(p+d+1)(p+d)^{\underline{m}}-p\left(\frac{8d}{m+1}(d-1)^{\underline{m}}+\frac{m+1}{m}\left(d^{\underline{m}}+(d-1)^{\underline{m}}\right)\right)\Big\}\pmod{p^2}$$

elde edilir. Böylece istenen ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1: $p>3$ bir asal sayı olsun. $0<d\le p$ olacak şekildeki $d\in\mathbb{Z}$ için

$$\sum_{k=1}^{p-1}k^2B_{p,k}B_{p,k-d}\equiv\frac{4}{3}(-1)^d\left(d(2d^2+1)(4pH_d-1)-p\left(\frac{26}{3}d^3+4d^2+\frac{7}{3}d+\frac{3}{2}\right)\right)\pmod{p^2}$$

dır.

İspat: Teorem 4.2 de $m = 2$ alınırsa

$$\sum_{k=1}^{p-1} k(k-1)B_{p,k}B_{p,k-d}$$

$$\equiv \frac{4(-1)^d}{3}\left\{p-(p+d)(p+d-1)(p+d-2)+2p\left(2H_d-\frac{3}{2}\right)\left((d+1)d(d-1)+d(d-1)(d-2)\right)\right.$$

$$\left.-(p+d+1)(p+d)(p+d-1)-p\left(\frac{8d}{3}(d-1)(d-2)+\frac{3}{2}\left(d(d-1)+(d-1)(d-2)\right)\right)\right\}$$

$$\equiv \frac{4(-1)^d}{3}(d-1)\left\{-d(2d-1)+p\left(4H_d-3\right)d(2d+1)-p\left(\frac{8d}{3}(d-2)+3(d-1)\right)\right\}\left(\mathrm{mod}\ p^2\right) \quad (4.18)$$

denkliği elde edilir. Denklik (1.36) ve Denklik (4.18) dan

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^2B_{p,k}B_{p,k-d} = \sum_{k=1}^{p-1} k(k-1)B_{p,k}B_{p,k-d} + \sum_{k=1}^{p-1} kB_{p,k}B_{p,k-d}$$

$$\equiv \frac{4(-1)^d}{3}(d-1)\left\{-d(2d-1)+p\left(4H_d-3\right)d(2d+1)-p\left(\frac{8d}{3}(d-2)+3(d-1)\right)\right\}$$

$$+2(-1)^d\left(-2d^2+p\left(1+8d^2\left(H_d-1\right)-4d\right)\right)\left(\mathrm{mod}\ p^2\right)$$

bulunur. Böylece gerekli düzenlemeler yapılarak istenilen sonuç elde edilir.

Örnek 4.2: Sonuç 4.1' de $d = 2$ alınırsa $p > 3$ için

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^2B_{p,k}B_{p,k-2} \equiv 2(11p-12)\left(\mathrm{mod}\ p^2\right)$$

elde edilir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Binom katsayıları ve bazı özel sayıları içeren denklikler p veya p^2 moduna göre irdelenmiştir. Aynı zamanda $\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{2k}\frac{(4x)^k}{2k+1}$ gibi bazı yeni toplamlar elde edilmiştir. Bununla birlikte bulunan toplamların sonucu olarak Fibonacci, Lucas ve diğer bazı özel sayıları içeren yeni denklikler verilmiştir. Bunun yanında farklı bakış açısı olarak bu tez boyunca bulunan denklikler p^2 veya p^3 modunda incelenerek yeni denklikler elde edilebilinir. $\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}H_{k-1}x^k$ gibi harmonik sayıları içeren toplamlarda harmonik sayılar yerine 2-mertebeli harmonik sayılar alınarak oluşan yeni toplamın denkliği düşünülebilinir. Ayrıca yeni toplamlar ve denkliklerinden faydalanılarak yeni problemler düşünülür.

KAYNAKLAR

[1] Horadam A. F., Basic properties of a certain generalized sequence of numbers, *The Fibonacci Quarterly*, 1965, **3**,161-176.

[2] Koshy T., *Fibonacci and Lucas numbers with applications*, 1.st ed, A Wiley-Interscience Publication, New York, 2001.

[3] Horadam A. F., Pell identities, *The Fibonacci Quarterly*, 1971, **9**, 245-252.

[4] Burton D. M., *Elementary number theory*, 6th ed., Mc. Graw Hill, New York, 2007.

[5] http://www1.spms.ntu.edu.sg/~frederique/ANT10.pdf (Ziyaret tarihi: 17 Mayıs 2018).

[6] Gouvea F. Q., p -*adic Numbers*, 2nd ed., Springer- Verlag, New York, 1997.

[7] Koblitz, N., *p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions*, 2.nd ed., Springer-Verlag, New York, 1948.

[8] http://www.matematikdunyasi.org/arsiv/PDF/04_3_13_15_MODULERSAYI.pdf (Ziyaret tarihi: 17 Mayıs 2018).

[9] https://www.cakilarasimatematikkoyu.com/uploads/7/2/0/8/72089201/ders_notlari_p-sel_sayilar.pdf (Ziyaret tarihi: 17 Mayıs 2018).

[10] https://www.math.u-bordeaux.fr/~abesheno/bilu.pdf (Ziyaret tarihi: 17 Mayıs 2018).

[11] Young P. T., p-adic congruences for the generalized Fibonacci sequences, *The Fibonacci Quarterly*, 1994, **32**, 2-10.

[12] http://homepages.warwick.ac.uk/staff/J.E.Cremona/courses/MA257/ma257.pdf (Ziyaret tarihi: 17 Mayıs 2018).

[13] Hardy G.H., Wright, E.M., *An introduction to the theory of numbers*, 4.th ed., University Press, Oxford, 1979.

[14] Fine N. J., Binomial coefficients modulo a prime, *Amer. Math. Monthly*, 1947, **54**, 589-592.

[15] Lucas É., Sur les congruences des nombres eulériens et des coefficients differentiels des fonctions trigonométriques, suivant un module premier, *Bull. Soc. Math. France*, 1878, **6**, 49-54.

[16] Sun Z. H., Congruences concerning Legendre polynomials, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2011, **139**, 1915-1929.

[17] Sun Z. W., Binomial coefficients, Catalan numbers and Lucas quotients, *Sci. China Math.*, 2010, **53**(9), 2473–2488.

[18] Sun Z. W., On sums involving products of three binomial coefficients, *Acta Arith.*, 2012, **156**(2), 123–141.

[19] http://homepages.warwick.ac.uk/staff/J.E.Cremona/courses/MA257/ma257.pdf (Ziyaret tarihi: 17 Mayıs 2018).

[20] Ribenboim P., *13 Lectures on Fermat's Last Theorem*, 1.st ed., Springer-Verlag, New York, 1979.

[21] Knuth D. E., *The art of computer programming*, 2.nd ed, Addison-Wesley, Pasadena, California, 1968.

[22] Alzer H., Karayannakis D., Srivastava H. M., Series representations for some mathematical constants, *J. Math. Anal. Appl.*, 2006, **320**, 145-162.

[23] Choi J., Srivastava H. M., Some summation formulas involving harmonic numbers and generalized harmonic numbers, *Mathematical and Computer Modelling*, 2011, **54**, 2220-2234.

[24] Graham R., Knuth D., Patashnik K., *Concrete Mathematics*, 1nd ed. Addison-Wesley, New York, USA, 1989.

[25] Spieb J., Some identities involving harmonic numbers, *Math. Comput.*, 1990, **55**(192), 839-863.

[26] Shapiro L. W., A Catalan triangle, *Discrete Math.*, 1976, **14**, 83-90.

[27] Zhao L. L., Pan H., Sun Z.W., Some congruences for the second-order Catalan numbers, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2010, **138**(1), 37-46.

[28] Wolstenholme J., On certain properties of prime numbers, *Quart. J. Math.*, 1862, **5**, 35-39.

[29] Lehmer E., On congruences involving Bernoulli numbers and the quotients of Fermat and Wilson, *Ann. Of Math.*, 1938, **39**, 350-360.

[30] Granville A., The square of the Fermat quotient, *Integers: Electron. J. Combin. Number Theory*, 2004, **4**, A22.

[31] Sun Z. H., Congruences involving Bernoulli and Euler numbers, *Journal of Number Theory*, 2008, **128**(2), 280-312.

[32] Sun Z. W., Tauraso R., New congruences for central binomial coefficients, *Adv. in Appl. Math.*, 2010, **45**(1), 125-148.

[33] Sun Z. W., Tauraso R., On some new congruences for binomial coefficients, *Int. J. Number Theory*, 2011, **7**(3), 645-662.

[34] Sun Z. W., On congruences related to central binomial coefficients, *J. Number Theory*, 2011, **131**(11), 2219-2238.

[35] Sun Z. W., On harmonic numbers and Lucas sequences, *Pub. Math. Debrecen*, 2012, **80**(1-2), 25-41.

[36] Pan H., Sun Z. W., Proof of three conjectures on congruences, *Sci. China Math.*, 2014, **57** (10), 2091-2102.

[37] Pilehrood K. H., Pilehrood T. H., Tauraso R., Congruences concerning Jacobi polynomials and Apėry-like formulae, *Int. J. of Number Theory*, 2012, **8**, 1789-1811.

[38] Sun Z. W., Congruences involving generalized central trinomial coefficients, *Sci. China Math.*, 2014, **57**(7), 1375-1400.

[39] Mattarei S., Tauraso R., Congruences for central binomial sums and finite polylogarithms, *J. Number Theory*, 2013, **133**, 131-157.

[40] Tauraso R., Some Congruences for central binomial sums involving Fibonacci and Lucas numbers, *Journal of Integer Sequences*, 2016, **19**, 1-10.

[41] Guo V.J.W, Zeng J., Factors of binomial sums from the Catalan triangle, *J. Number Theory*, 2010, **130**, 172-186.

[42] Gutiérrez J. M., Hernández M.A., Miana P.J., Romero N., New identities in the Catalan triangle, *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, **341**(1), 52-61.

[43] Miana P. J., Romero N., Computer proofs of new identities in the Catalan triangle, *Proceedings of the Segundas Jornadas de Teorıa de Números*, Madrid, Spain, 16-19th July 2007.

[44] Ömür N., Koparal S., Some congruences involving numbers $B_{p,k-d}$, *Utilitas Math.*, 2014, **95**, 307-317.

[45] Sun Z. H.,Values of Lucas sequences modulo primes, *Rocky Mountain J. Math.*, 2003, **33**(3), 1123-1145.

[46] Sun Z. W., On Delannoy numbers and Schröder numbers, *J. Number Theory*, 2011, **131**(12), 2387-2397.

[47] http://www.dsi.uni.it/resp/GouldBK.pdf (Ziyaret tarihi: 17 Mayıs 2018).

[48] Sun Z. H., Congruences concerning Legendre polynomials II, *J. Number Theory*, 2013, **133**, 1950-1976.

KİŞİSEL YAYINLAR VE ESERLER

[1] Kılıç E., Ömür N., **Koparal S.**, Formulae for two weighted binomial identities with the falling factorials, *Ars Combinatoria*, 2018, **138**, 223-231.

[2] Kılıç E., Ömür N., **Koparal S.**, On alternating weighted binomial sums with falling factorials, *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, 2017, **9**(1), 58-64.

[3] Kılıç E., Ömür N., **Koparal S.**, Ulutaş Y. T., Two variants of the reciprocal super Catalan matrix, *Kyungpook Mathematical Journal*, 2016, **56**, 409-418.

[4] **Koparal S.**, Ömür N., On Congruences with the terms of the second order sequences $\{U_{kn}\}$ and $\{V_{kn}\}$, *4th International Conference on Pure and Applied Sciences: Renewable Energies*, İstanbul, Turkey, 23-25 November 2017.

[5] **Koparal S.**, Kılıç E., Ömür N., Two asymmetric generalizations of the Filbert matrix, *Caucasian Mathematics Conferences (CMC II)*, Van, Turkey, 22-24 August 2017.

[6] **Koparal S.**, Ömür N., Kılıç E., Formula for two weighted binomial identities with the falling factorials, *6th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA)*, Budapest, Hungary, 15-18 August 2017.

[7] **Koparal S.**, Ömür N., Some permanents of Hessenberg matrices, *4th International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM)*, Kuşadası-Aydın, Turkey, 11-15 May 2017.

[8] **Koparal S.**, Ömür N., On congruences involving special numbers, *International Conference on Mathematics and Engineering (ICOME)*, İstanbul, Turkey, 10-12 May 2017.

[9] **Koparal S.**, Ömür N., On congruences related to central binomial coefficients, harmonic and Lucas numbers, *Turkish Journal of Mathematics*, 2016, **40**, 973-985.

[10] **Koparal S.**, Ömür N., On some congruences, *International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics*, Bodrum-Muğla, Turkey, 19-23 May 2016.

[11] **Koparal S.**, Some congruences with balancing and Lucas balancing numbers, *The 12th International Conference on Approximation Theory and its Applications*, Sibiu, Romania, 26-29 May 2016.

[12] **Koparal S.**, Ömür N., On congruences with the terms of second order sequence and harmonic numbers, *The 4th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA)*, Athens, Greece, 31 August-03 September 2015.

[13] **Koparal S.**, Ömür N., On congruences related to central binomial coefficients, harmonic and Lucas numbers, *Lebanese International Conference on Mathematics and Applications*, Beirut, Lebanon, 26-29 May 2015.

[14] **Koparal S.**, Ömür N., $B_{p,k}^{d}$ sayılarını içeren bazı kongrüanslar, *XXVI. Ulusal Matematik Sempozyumu*, Diyarbakır, Türkiye, 4-7 Eylül 2013.

[15] Ömür N., **Koparal S.**, On the matrices with the generalized hyperharmonic numbers of order r, Asian-European Journal of Mathematics, 2018, **11**(3), DOI: 10.1142/S1793557118500456.

[16] Ömür N., **Koparal S.**, $\left\{a_{k,n}(\tau)\right\}_{\tau}^{\infty}$ genelleştirilmiş Fibonacci otokorelasyon dizilerinin terimlerini içeren bazı bağıntılar, *SAÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 2017, **21**(3), 307-313.

[17] Ömür N., **Koparal S.**, On some congruences with the terms of second order sequence and harmonic numbers, *Karaelmas Fen ve Mühendislik Dergisi*, 2017, **7**(2), 592-595.

[18] Ömür N., **Koparal S.**, Çolak C.D., On identities for sequences of binomial sums with the terms of sequences $\{g_{kn}\}$ and $\{h_{kn}\}$, *4th International Conference on Pure and Applied Sciences: Renewable Energies*, İstanbul, Turkey, 23-25 November 2017.

[19] Ömür N., Kılıç E., **Koparal S.**, New generalizations of the Filbert and Lilbert matrices, *Caucasian Mathematics Conferences (CMC II)*, Van, Turkey, 22-24 August 2017.

[20] Ömür N., **Koparal S.**, Some congruences related to harmonic numbers and the terms of the second order sequences, *Mathematica Moravica*, 2016, **20**, 23-37.

[21] Ömür N., **Koparal S.**, On congruences with the terms of second order sequence $\{Q_n\}$, *Journal of Algebra, Number Theory: Advances and Applications*, 2016, **15**(1), 15-39.

[22] Ömür N., Şener C.D., **Koparal S.**, Families of primitive pythagorean triples involving terms of generalized Fibonacci and Lucas sequences, *Journal of Mathematical Extension*, 2016, **10**(4), 47-61.

[23] Ömür N., **Koparal S.**, On congruences with the terms of the sequences $\{U_{kn}\}$ and $\{V_{kn}\}$, *Lebanese International Conference on Mathematics and Applications*, Beirut, Lebanon, 26-29 May 2015.

[24] Ömür N., **Koparal S.**, Some congruences involving numbers $B_{p,k-d}$, *Utilitas Math.*, 2014, **95**, 307-317.

[25] Ömür N., **Koparal S.**, Şener C. D., A new perspective to the sequences t-order, *International Journal of Computer Applications*, 2014, **86**, 29-33.

[26] Ömür N., **Koparal S.**, Congruences on harmonic numbers and second order sequences, *International Conference on Algebra and Number Theory*, Samsun, Turkey, 05-08 August 2014.

[27] Ömür N., **Koparal S.**, Applications of generalized Fibonacci autocorrelation, *International Congress In Honour of Professor Ravı P. Agarwal*, Bursa, Turkey, 23-26 June 2014.

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Bursa'nın Yıldırım ilçesinde doğdu. İlkokul, ortaokul ve lise öğrenimini Bursa'da tamamladı. 2005 yılında Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümüne girdi. 2009 yılında Matematik bölümünden mezun oldu. 2009-2011 yılları arasında Uludağ Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı. 2011 yılında Kocaeli Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora öğrenimine başladı.

2011 yılı itibariyle Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak görev yapmaktadır.