ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DÖRT BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA BERTRAND EĞRİLERİ VE GEOMETRİK UYGULAMALARI

Yasemin IRMAK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2018

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Yasemin IRMAK tarafından hazırlanan " Dört Boyutlu Öklid Uzayında Bertrand Eğrileri ve Geometrik Uygulamaları " adlı tez çalışması **01/06/2018** tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. İsmail GÖK

Jüri Üyeleri:

Başkan: Prof. Dr. Yusuf YAYLI
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Üye: Doç. Dr. Ferdağ KAHRAMAN AKSOYAK
Ahi Evran Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı

Üye: Doç. Dr. İsmail GÖK
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Atila YETİŞEMİYEN
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davranıldığı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

01.06.2018



Yasemin IRMAK

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davranıldığı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

01.06.2018

Yasemin IRMAK

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DÖRT BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA BERTRAND EĞRİLERİ VE GEOMETRİK UYGULAMALARI

Yasemin IRMAK

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. İsmail GÖK

Bu tez 6 bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, tezde kullanılan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, ilk olarak $n \geq 4$ boyutlu Öklid uzaylarında klasik anlamda Bertrand eğrisi olmadığı ifade edilmiştir. Daha sonra, (1,3)-Bertrand Eğrileri olarak adlandırılan eğriler karakterizasyonları ile birlikte verilmiştir.

Dördündü bölümde, 4-boyutlu Öklid uzayında kuaterniyonik Bertrand eğrileri tanımlanmış ve uzaysal kuaterniyonik Bertrand eğrileri ile ilişkileri incelenmiştir. Daha sonra, bitorsiyonu sıfırdan farklı kuaterniyonik $(N - B_2)$ Bertrand eğrileri tanımlanmış ve karakterizasyonları verilmiştir.

Beşinci bölümde, 3-boyutlu küre üzerindeki Bertrand eğrilerinin karakterizasyonları verilmiş ve örnekler sunulmuştur. Ayrıca bu eğriler ile (1,3)-Bertrand eğriler arasındaki ilişkiler verilmiştir.

Son bölüm tartışma ve sonuç kısmına ayrılmıştır.

Haziran 2018, 72 sayfa
Anahtar Kelimeler: Bertrand eğrileri, (1,3)-Bertrand eğrileri, Öklid uzayı.

ABSTRACT

Master Thesis

BERTRAND CURVES AND GEOMETRIC APPLICATIONS IN FOUR DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE
Yasemin IRMAK

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. İsmail GÖK

This thesis consists of six chapter.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, some main definitions and theorems which are used in the thesis are given.

In the third chapter, firstly we express that there is no Bertrand curve in a classical manner in Euclidean n space for $n \geq 4$. Then, curves called (1,3)-Bertrand curves are given together with their characterizations.

In the forth chapter, quaternionic Bertrand curve in 4-dimensional Euclidean space are introduced and some relationships with spatial quaternionic Bertrand curves are examined. Then, quaternionic $(N - B_2)$ Bertrand curves with nonzero bitorsion are defined and some characterizations are given.

In the fifth chapter, characterizations of Bertrand curves on 3-dimensional sphere are given and some examples are presented. Furthermore, relationships between these curves and (1,3)-Bertrand curves are given.

The last chapter is devoted to the discussion and conclusion.

June 2018, 72 pages
Keywords: Bertrand curves, (1,3)-Bertrand curves, Euclidean space

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren ve çalışmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını benden esirgemeyen danışman hocam Sayın Doç. Dr. İsmail GÖK (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'e, yakın ilgileriyle çalışmalarımı destekleyen ve fikirleriyle beni yönlendiren saygıdeğer hocalarım Sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'ya, Sayın Prof. Dr. F. Nejat EKMEKCİ (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'ye ve tezin kuaterniyonik eğrilerle ilgili bölümüne ve örneklerine katkılarından dolayı Sayın Doç. Dr. Ferdağ KAHRAMAN AKSOYAK (Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı)'a en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu günlere gelmemde büyük pay sahibi olan aileme; başta bu süreçte çok ani kaybettiğimiz babama, anneme, teyzeme, eşime, çocuklarım Emir ve Elif'e en içten şükranlarımı sunuyorum.

Yasemin IRMAK

Ankara, Haziran 2018

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK ..... **i**

ÖZET ..... **ii**

ABSTRACT ..... **iii**

TEŞEKKÜR ..... **iv**

ŞEKİLLER DİZİNİ ..... **vi**

1. GİRİŞ **1**

2. TEMEL KAVRAMLAR **3**

2.1 Temel Tanım ve Teoremler **3**

2.2 Öklid Uzayında Eğriler Teorisi **8**

2.3 Reel Değerli Kuaterniyonlar ve Serret-Frenet Formülleri **13**

3. YÜKSEK BOYUTLU ÖKLİD UZAYLARINDA NON-DEJENERE BERTRAND EĞRİLERİ **16**

3.1 4-boyutlu Öklid Uzayında Bertrand Eğrileri **16**

3.2 n-boyutlu Öklid Uzayında Genelleştirilmiş Non-dejenere Bertrand Eğrileri **28**

4. 4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA KUATERNİYONİK BERTRAND EĞRİLERİ **30**

4.1 4-boyutlu Öklid Uzayında Bitorsiyonu Sıfır Olan Kuaterniyonik Bertrand Eğrileri **31**

4.2 4-boyutlu Öklid Uzayından Bitorsiyonu Sıfırdan Farklı Olan Kuaterniyonik Bertrand Eğrileri **41**

5. 3-BOYUTLU KÜRE ÜZERİNDE BERTRAND EĞRİLERİ **49**

5.1 S^3 **Üzerindeki Bertrand Eğrilerinin Özellikleri** **54**

5.2 Örnekler **59**

5.3 S^3 **Üzerinde Yatan Bertrand Eğrileri ile** E^4 **Öklid Uzayındaki (1,3)-Bertrand Eğrileri Arasındaki İlişki** **63**

6. TARTIŞMA VE SONUÇ **68**

KAYNAKÇA **70**

ÖZGEÇMİŞ **72**

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 Eksen Dönmesi 7
Şekil 2.2 3-boyutlu Öklid uzayında bir Bertrand eğri çiftinin geometrisi 12
Şekil 3.1 Bir (1,3)-Bertrand çiftinin geometrisi 18
Şekil 5.1 Euler Spirali 60
Şekil 5.2 2-Euler Spirali 61
Şekil 5.3 Standart Konikal Helis 62
Şekil 5.4 Genelleştirilmiş Konikal Helis 62

1. GİRİŞ

Fransız matematikçi Saint-Venant 1845 yılında 3 boyutlu Öklid uzayında bir α eğrisinin asli normalleri tarafından üretilen regle yüzey üzerinde, α eğrisinin asli normal vektörlerinin ikinci bir eğrinin asli normal vektörleriyle aynı olup olamayacağı sorusunu ortaya atmıştır. Bu soru 1850 yılında Bertrand tarafından yayımlanan bir makale ile cevaplanmıştır. Bu sebeple bu özellikteki eğriler o çalışmadan sonra Bertrand eğrileri olarak anılmaya başlanmıştır. Bertrand, bu özelliğe sahip ikinci bir eğrinin olması için gerek ve yeter koşulu, orijinal eğrinin eğrilik ve burulması arasında lineer(doğrusal) bir ilişki olması şeklinde elde etmiştir. Başka bir deyişle, yazar çalışmasında "3-boyutlu Öklid uzayında eğrilikleri κ ve τ olan bir α eğrisinin Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter şartın $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için $\lambda\kappa+\mu\tau = 1$ olmasıdır." biçiminde bir karakterizasyon vermiştir.

1888 yılında C. Bioche, 3-boyutlu Öklid uzayında Bertrand eğrilerini elde etmek için yeni bir teorem vermiştir. Daha sonra 1960 yılında J.F. Burke, Bertrand eğrileri için Bioche teoremi ile ilgili bir karakterizasyon vermiştir.

1935 yılında Pears, 3-boyutlu Öklid uzayındaki Bertrand eğrilerini n-boyutlu Riemann uzaylarına genellemiş ve dahası $n > 3$ için Öklid uzaylarında tanımlı Bertrand eğrilerinin dejenere eğriler olması gerektiğini ispatlamıştır. Bu çalışmaların devamında farklı uzaylarda Bertrand eğrileri ile ilgili bir çok çalışma yapılmıştır (Lai 1967, Görgülü 1986, Ekmekci 2001, Tarhan 2007).

2003 yılında Matsuda ve Yorozu, 4-boyutlu Öklid uzayında dejenere Bertrand eğrileri olmadığından haraketle bu uzayda yeni bir eğriyi şu şekilde tanımlamıştır. $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında α ve β, sırasıyla, Frenet vektörleri $\{T, N_1, N_2, N_3\}$ ve $\{\bar{T}, \bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3\}$ olan iki eğri olmak üzere bu eğrilerin $(1, 3)$ normal düzlemleri çakışık yani, $\text{Span}\{N_1, N_3\} = \text{Span}\{\bar{N}_1, \bar{N}_3\}$ ise bu eğriler $(1, 3)$-Bertrand eğri çiftidir. Bu tip eğrilerin karakterizasyonu bu tez çalışmasında ispatı ile birlikte üçüncü bölümde yer almaktadır. Bu

çalışmadan sonra, bu fikirden yola çıkarak Cheng ve Lin 2009 yılında yayınladıkları bir çalışma ile n-boyutlu Öklid uzayında daha genel bir Bertrand eğri tanımı vermişler ve bu tip eğrileri karakterize etmişlerdir.

1987 yılında Bharathi ve Nagaraj, 3 ve 4 boyutlu Öklid uzaylarında kuaterniyonik eğriler için Serret-Frenet formüllerini tanımlamışlardır. Bu çalışmadan sonra kuaterniyonik özel eğrilerle ilgili birçok çalışmalar yapılmıştır (Çöken ve Tuna 2004, Gök vd. 2011, Kahraman vd. 2012).

2012 yılında Lucas ve Ortega-Yagües, 4-boyutlu Öklid uzayında $\mathbb{S}^3$ birim küresi üzerinde Bertrand eğri çiftlerini tanımlamış ve bu tip eğrilerle ilgili karakterizasyonlar vermişlerdir. Dahası çalışmalarında bu tip eğriler ile $(1,3)$-Bertrand eğrileri arasında ilişkiler elde etmişlerdir.

2013 yılında Keçilioğlu ve İlarslan, 4-boyutlu Öklid uzayında bitorsiyonu sıfırdan farklı olan kuaterniyonik eğriler için Bertrand eğri olma koşullarını elde etmiştir.

Bu tez çalışmasında bu alanda yapılan çalışmaların içinde yer alan karakterizasyonlar genel olarak incelenmiştir. Dahası Keçilioğlu ve İlarslan tarafından tanımlanan kuaterniyonik Bertrand eğrileri hem bitorsiyonu sıfır olanlar hem de bitorsiyonu sıfırdan farklı olanlar olarak sınıflandırılmıştır. 4-boyutlu uzayda kuaterniyonik Bertrand eğrisi ile bununla ilişkili 3-boyutlu uzaydaki eğri arasında ilişki verilmiştir. Eğri çiftlerinin eğrilikleri arasında bir ilişki de elde edilmiştir. Son olarak yukarıda tanımlanan kuaterniyonik Bertrand eğri sınıflandırmaları ile ilgili örnekler verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezin devamında kullanılacak bazı tanım ve teoremler verilecektir. Bir bütünlük oluşturması amacıyla yer verilecek bu temel giriş bilgileri kaynakları ile ifade edilecektir. Dolayısıyla bu kısımda yer alan bazı temel teoremler ispatsız olarak yer alacaktır.

2.1 Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1. A boştan farklı bir cümle ve V, K cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir

$$f : A \times A \to V$$

fonksiyonu varsa A cümlesine V ile birleştirilmiş **afin uzay** denir (Hacısalihoğlu 2000).

(i) $\forall P, Q, R \in A$ için $f(P,Q) + f(Q,R) = f(P,R)$.

(ii) $\forall P \in A$ ve $\forall u \in V$ için $f(P,Q) = u$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

Tanım 2.1.2. V ve W aynı K cismi üzerinde iki vektör uzayı ve $A : V \to W$ bir dönüşüm olsun. Eğer A dönüşümü için

(i) $\forall u, v \in V$ için $A(u+v) = A(u) + A(v)$

(ii) $\forall c \in K$ ve $\forall u \in V$ için $A(cu) = cA(u)$

koşulları ya da her ikisini de kapsayan

(iii) $\forall c_1, c_2 \in K$ ve $\forall u, v \in V$ için $A(c_1u + c_2v) = c_1A(u) + c_2A(v)$

koşulu sağlayanıyorsa A dönüşümüne **lineer dönüşüm** adı verilir (Sabuncuoğlu 2012).

Tanım 2.1.3. V bir reel vektör uzayı olmak üzere $f : V \times V \to K$ fonksiyonu aşağıda verilen koşulları sağlıyorsa f fonksiyonuna V vektör uzayı üzerinde bir **iç çarpım** denir. Üstüne bir iç çarpım tanımlanabilen vektör uzayına da **iç çarpım uzayı** denir (Sabuncuoğlu 2012).

(i) Simetri özeliği: $\forall u, v \in V$ için $f(u, v) = f(v, u)$.

(ii) Bi-lineerlik özeliği: $\forall u, v, w \in V$ ve $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ için

$$f(c_1u + c_2v, w) = c_1f(u, w) + c_2f(v, w)$$

$$f(u, c_1v + c_2w) = c_1f(u, v) + c_2f(u, w)$$

(iii) Pozitif tanımlılık özeliği: $\forall u \in V$ için $f(u, u) \geq 0$. Yani $0 \neq u \in V$ için $f(u, u) > 0$ ve $u = 0 \Leftrightarrow f(u, u) = 0$.

Tanım 2.1.4. Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen n-boyutlu bir vektör uzayı V olsun. V de bir iç çarpım işlemi $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ve $y = (y_1, \ldots, y_n)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle\, , \rangle : \quad & V \times V \to \mathbb{R} \\ & (x, y) \to \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanırsa A afin uzayında uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir. Böylece V vektör uzayına $\mathbb{E}^n$ **Öklid uzayı** ve $\langle , \rangle$ dönüşümüne de **standart Öklid iç çarpımı** denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.5. $P_0, P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{E}^n$ için $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ sistemi $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayının bir ortonormal bazı ise $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ sistemine $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında bir **Öklid çatısı** denir (Yüce 2017).

Tanım 2.1.6. V bir reel iç çarpım uzayı olsun.

$$n : V \to \mathbb{R}, \qquad n(u) = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

dönüşümü V üstüne bir **norm** belirtir. Özel olarak $V = \mathbb{E}^n$ biçiminde alınırsa $u = (u_1, u_2, \dots u_n) \in \mathbb{E}^n$ için standart Öklid iç çarpımı kullanılarak

$$n(u) = \|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

eşitliği verilebilir. $\|u\|$ sayısına u vektörünün **normu** veya **uzunluğu** adı verilir (Sabuncuoğlu 2012).

Tanım 2.1.7. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{E}^n$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{E}^n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d : \ & \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{R} \\ & (x, y) \to d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2} \end{aligned}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında **uzaklık fonksiyonu** ve $d(x, y)$ reel sayısına da $x, y \in \mathbb{E}^n$ noktaları arasındaki **uzaklık** denir (Hacısalihoğlu 2000).

Teorem 2.1.1. $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu bir metriktir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.8.

$$\begin{aligned} d : \ & \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{R} \\ & (x, y) \to d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\| \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan d fonksiyonuna $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında **Öklid metriği** denir (Hacısalihoğlu 2000).

Teorem 2.1.2. $0 \leq \theta \leq \pi$ olmak üzere $\langle , \rangle : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall u, v \in \mathbb{R}$ için $\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\| \cos\theta$ biçiminde tanımlanan bir iç çarpımdır. Dolayısıyla u ve v gibi iki vektör arasındaki açı θ olmak üzere

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}$$

biçiminde ifade edilebilir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.9. V bir reel iç çarpım uzayı ve $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, V uzayında bir vektör cümlesi olsun.
Her $1 \leq i, j \leq n$ için $i \neq j$ olmak üzere $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 0$ ise S cümlesine **ortogonal vektör cümlesi** denir. Eğer

$$\delta_{ij} = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases}$$

sağlanıyorsa S cümlesine bir **ortonormal vektör cümlesi** denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.10. V bir reel vektör uzayı ve $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, V vektör uzayında bir vektör cümlesi olsun. $c_1, c_2, \ldots, c_n$ reel sayıları için

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i = 0$$

iken her $1 \leq i \leq n$ için $c_i = 0$ oluyorsa S vektör cümlesine **lineer bağımsız** vektör cümlesi, $1 \leq i \leq n$ için $\exists 0 \neq c_i \in \mathbb{R}$ oluyorsa S vektör cümlesine **lineer bağımlı** vektör cümlesi adı verilir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.11. V bir vektör uzayı ve $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, V vektör uzayında bir vektör cümlesi olsun. $\forall \alpha \in V$ için

$$\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_n\alpha_n$$

olacak biçimde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ reel sayıları varsa S cümlesi V vektör uzayını **geriyor** denir ve $V = \text{Span}\{S\}$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.12. V bir vektör uzayı ve $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, V vektör uzayında bir vektör cümlesi olsun.

(i) S cümlesi lineer bağımsız,

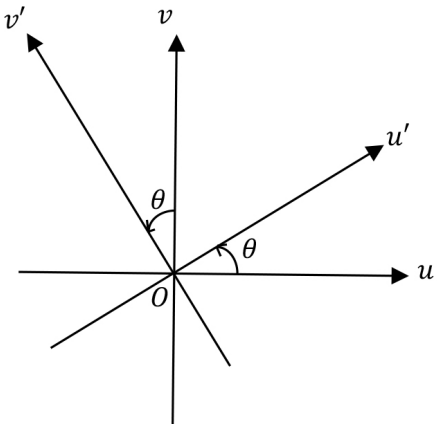
(ii) S cümlesi V vektör uzayını geriyor,

ise S vektör cümlesine V vektör uzayı için bir **baz (taban)** adı verilir. Bazdaki vektör sayısına ise o vektör uzayının **boyutu** denir (Hacısalihoğlu 2000).

Örnek 2.1.1. $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayı için, $e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$,..., $e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$ olmak üzere

$$S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$$

vektör cümlesi bir tabandır. Dolayısıyla, $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayının boyutu n'dir.



Şekil 2.1 Eksen dönmesi

Lemma 2.1.1. $\mathbb{E}^2$ reel vektör uzayında u ve v iki dik doğrultu olsun. Bu iki doğrultunun kesim noktası O olmak üzere O merkezli pozitif yönlü θ radyanlık dönme altında $\{u, v\}$ ortogonal sistemi $\{u', v'\}$ ortogonal sistemine şekil 2.1'deki gibi dönüştürülmüş olsun. Bu durumda

$$u' = u\cos\theta + v\sin\theta$$

$$v' = -u\sin\theta + v\cos\theta$$

veya

$$u = u'\cos\theta - v'\sin\theta$$

$$v = u'\sin\theta + v'\cos\theta$$

eşitlikleri gerçeklenir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.13. $\mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında

$$\begin{aligned} \wedge : \ & \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3 \\ & (x, y) \to x \wedge y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan $x \wedge y$ vektörüne x ile y vektörlerinin **vektörel çarpımı (dış çarpımı)** adı verilir (Hacısalihoğlu 2000).

2.2 Öklid Uzayında Eğriler Teorisi

Tanım 2.2.1. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^n$, $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_n(t))$ diferensiyellenebilir fonksiyon olsun. Bu durumda $\alpha(I) \subset \mathbb{E}^n$ alt cümlesine $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında bir **diferensiyellenebilir eğri** denir. Burada I aralığına α eğrisinin **parametre aralığı**, $t \in I$ değişkenine de α eğrisinin **parametresi** ve (I, α) ikilisine de **koordinat komşuluğu** denir. Eğer α dönüşümünün k-ıncı mertebeden kısmi türevleri mevcut ve sürekli ise α eğrisine C^k**-sınıfından bir eğri** adı verilir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.2.2. $\mathbb{E}^n$'de bir α eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha : I \to \mathbb{E}^n$ dönüşümünün koordinat fonksiyonları $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ olmak üzere

$$\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt} = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt}, \ldots, \frac{d\alpha_n}{dt} \right)$$

vektörüne α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki **hız vektörü** denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.2.3. $\alpha : I \to \mathbb{E}^n$ eğrisi verilsin. Her $t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise α eğrisine **regüler (düzenli) eğri** denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.2.4. $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında bir α eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\begin{aligned} \|\alpha'\| : \ & I \to \mathbb{R} \\ & t \to \|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\| \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı dönüşüme, α eğrisinin **skalar hız fonksiyonu** ve $\|\alpha'(t)\|$ reel sayısına da α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki **skalar hızı** adı verilir. Eğer özel olarak $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise eğriye **birim hızlı eğri**, $s \in I$ parametresine de eğrinin **yay parametresi** denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.2.5. $\alpha : (a,b) \to \mathbb{E}^n$ ve $\beta : (c,d) \to \mathbb{E}^n$ diferensiyellenebilir eğrileri verilsin. $\beta = \alpha \circ h$ ve $\forall c < u < d$ için $h'(u) > 0$ olacak şekilde $h : (c,d) \to (a,b)$ diferensiyellenebilir fonksiyonu varsa β eğrisine α eğrisinin **yön koruyan bir yeniden parametrizasyonu** denir. Benzer şekilde, $\beta = \alpha \circ h$ ve $\forall c < u < d$ için $h'(u) < 0$ olacak şekilde $h : (c,d) \to (a,b)$ diferensiyellenebilir fonksiyonu varsa β eğrisine α'nın **yönünü değiştiren bir yeniden parametrizasyonu** denir. Bu durumda h fonksiyonuna da sırasıyla, **pozitif ya da negatif parametre değişimi (parametre değişim fonksiyonu)** adı verilir (Yüce 2017).

Tanım 2.2.6. α eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda, $\psi = \{\alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{(r)}\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}$, $k > r$ için, $\alpha^{(k)} \in \text{Span}\{\psi\}$ olmak üzere, ψ sisteminden elde edilen $\{V_1, V_2, \ldots, V_r\}$ ortonormal sistemine, α eğrisinin **Serret-Frenet r-ayaklı alanı** ve $m \in \alpha$ için $\{V_1(m), V_2(m), \ldots, V_r(m)\}$'ye m noktasındaki **Serret-Frenet r-ayaklısı** denir. Herbir V_i, $1 \leq i \leq r$ vektörüne ise **Serret-Frenet** vektörü adı verilir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.2.7. $\alpha \subset \mathbb{E}^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ parametresine karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \ldots, V_r(s)\}$ olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned} k_i : \quad & I \to \mathbb{R}, \quad 1 \leq i < r, \\ & s \to k_i(s) = \langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \rangle \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı k_i fonksiyonuna α eğrisinin **i-yinci eğrilik fonksiyonu** ve $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasında α eğrisinin **i-yinci eğriliği** adı verilir (Hacısalihoğlu 2000).

Teorem 2.2.1. $\alpha : I \to \mathbb{E}^n$, $s \mapsto \alpha(s)$ birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin $s \in I$ noktasında Frenet vektörleri $\{V_1(s), V_2(s), \ldots, V_n(s)\}$ biçiminde verilsin. Eğer α eğrisinin eğrilikleri $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ ise

(i) $V_1'(s) = k_1(s)V_2(s)$

(ii) $V_i'(s) = -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s)$, $1 \leq i < n$

(iii) $V_n'(s) = -k_{n-1}(s)V_{n-1}(s)$

eşitlikleri gerçeklenir. Bu formüllere **Serret-Frenet formülleri** adı verilir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.2.8. $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$, $s \mapsto \alpha(s)$ birim hızlı bir eğri olsun.

$$T = \alpha'(s)$$

vektör alanına α eğrisi boyunca **teğet vektör alanı**,

$$N = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

vektör alanına α eğrisi boyunca **asli normal vektör alanı** ve

$$B = T \wedge N$$

vektör alanına α eğrisi boyunca **binormal vektör alanı** adı verilir.

$\forall s \in I$ için $\kappa(s) = \|T'(s)\|$ şeklinde tanımlı fonksiyona α eğrisinin **eğrilik fonksiyonu** ve $\kappa(s) \in \mathbb{R}$ sayısına da α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **eğriliği** denir.

$\forall s \in I$ için $\tau(s) = \|B'(s)\|$ şeklinde tanımlı fonksiyona α eğrisinin **burulma fonksiyonu** ve $\tau(s) \in \mathbb{R}$ sayısına da α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **burulması** denir.

Bu durumda $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı için aşağıdaki Serret-Frenet formülleri gerçeklenir (Hacısalihoğlu 2000).

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

Tanım 2.2.9. $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında bir eğri α ve bu eğrinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun. $s \in I$ için,
Span$\{T(s), N(s)\}$ düzlemine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **oskülatör düzlemi**,
Span$\{T(s), B(s)\}$ düzlemine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **rektifiyan düzlemi**,
Span$\{N(s), B(s)\}$ düzlemine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **normal düzlemi**,
denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.2.10. $\alpha : I \to \mathbb{E}^4$, $s \mapsto \alpha(s)$ birim hızlı bir eğri olsun ve α eğrisinin Frenet vektörleri $\{T, N_1, N_2, N_3\}$ ile verilsin.

$$T = \alpha'(s)$$

vektör alanına α eğrisi boyunca **teğet vektör alanı**,

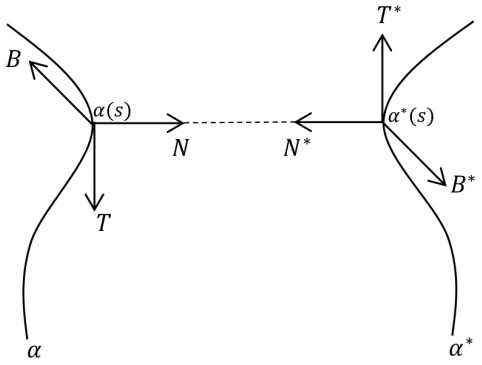
$$N_1 = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

vektör alanına α eğrisi boyunca **asli normal vektör alanı (birinci normal vektör alanı)**, N_2 ve N_3 vektör alanlarına da sırasıyla **birinci binormal** ve **ikinci binormal** vektör alanları denir.
Bu durumda $\{T, N_1, N_2, N_3\}$ Frenet çatısı için aşağıdaki Serret-Frenet formülleri gerçeklenir.

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix}$$

(Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.2.11. $\alpha : I \to \mathbb{E}^n$ ve $\alpha^* : I \to \mathbb{E}^n$ diferensiyellenebilir iki eğri olmak üzere bu eğrilerin Frenet çatıları sırası ile $\{T, N_1, N_2, \ldots, N_{n-1}\}$ ve $\{T^*, N_1^*, N_2^*, \ldots, N_{n-1}^*\}$ olsun. $\forall s \in I$ için α eğrisinin $N_1(s)$ asli normal vektörü ile α^* eğrisinin $N_1^*(s)$ asli normal vektörü lineer bağımlı ise (α, α^*) ikilisine bir **Bertrand eğri çifti**, α eğrisine de bir **Bertrand eğri** adı verilir (Hacısalihoğlu 2000).



Şekil 2.2 3-boyutlu Öklid uzayında bir Bertrand eğri çiftinin geometrisi

Teorem 2.2.2. $\mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında α ve α^* eğrileri (I, α) ve (I, α^*) koordinat komşuluğu ile verilsin. α eğrisinin $\alpha(s)$ noktası ile α^* eğrisinin $\alpha^*(s)$ noktaları arasındaki uzaklık sabittir (Hacısalihoğlu 2000).

Teorem 2.2.3. $\mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında (α, α^*) bir Bertrand eğri çifti olsun. λ sabit bir reel sayı olmak üzere

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + \lambda N(s) \tag{2.1}$$

yazılır (Hacısalihoğlu 2000).

Teorem 2.2.4. $\mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında (α, α^*) Bertrand eğri çiftinin karşılıklı noktalarındaki birim teğet vektörleri arasındaki açı sabittir (Hacısalihoğlu 2000).

Teorem 2.2.5. $\mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında (α, α^*) Bertrand eğri çiftinin birim teğet vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere Frenet vektörleri arasında

$$\begin{bmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

bağıntısı vardır (Hacısalihoğlu 2000).

Teorem 2.2.6. $\mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında (α, α^*) bir Bertrand eğri çifti olsun. α eğrisinin eğrilikleri κ ve τ olmak üzere bunlar arasında

$$\lambda\kappa + \mu\tau = 1, \quad \mu = -\lambda\cot\theta$$

bağıntısı vardır (Hacısalihoğlu 2000).

2.3 Reel Değerli Kuaterniyonlar ve Serret-Frenet Formülleri

Bu bölümde 1833 yılında Hamilton tarafından tanımlanan reel kuaterniyon cebiri hakkında temel bilgiler verilecektir. Ayrıca Bharathi ve Nagaraj tarafından 3 ve 4 boyutlu Öklid uzaylarında kuaterniyonik eğriler için elde edilen Serret-Frenet formülleri ispatsız olarak yer alacaktır. Bu bölümle ilgili aynı zamanda (Karadağ 1992) çalışmasına da bakılabilir.

Tanım 2.3.1. Bir **reel kuaterniyon**, sıralı dört sayının 1 ,$\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ gibi dört birime eşlik etmesiyle tanımlanabilir. Burada, birinci birim 1 bir reel sayıdır, diğer üç birim ise

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1 \tag{2.2}$$

$$e_1 \wedge e_2 = e_3, \quad e_2 \wedge e_3 = e_1, \quad e_3 \wedge e_1 = e_2 \tag{2.3}$$

$$e_2 \wedge e_1 = -e_3, \quad e_3 \wedge e_2 = -e_1, \quad e_1 \wedge e_3 = -e_2 \tag{2.4}$$

özeliklerine sahiptir. Böylece reel kuaterniyonların cümlesi

$$\mathcal{K} = \{q = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \,|\, a_i \in \mathbb{R}\}$$

ile verilir. Bir reel kuaterniyon $q = S_q + V_q$ biçiminde ifade edilebilir, burada $S_q = a_0$ ve $V_q = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ sırasıyla q kuaterniyonunun skalar ve vektörel kısmı olarak adlandırılır (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.3.2. $q = S_q + V_q$ ve $p = S_p + V_p$ iki reel kuaterniyon olsun. q ile p kuaterniyonlarının **çarpımı**

$$q \times p = S_q S_p - \langle V_q, V_p \rangle + S_q V_p + S_p V_q + V_q \wedge V_p$$

biçiminde tanımlanır. Özel olarak q ve p reel kuaterniyonlarının skalar kısımları 0 ise

$$q \times p = -\langle V_q, V_p \rangle + V_q \wedge V_p$$

biçimindedir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.3.3. $q = S_q + V_q$ bir reel kuaterniyon olmak üzere $\bar{q} = Cq = S_q - V_q$ reel kuaterniyonuna q kuaterniyonunun **eşleniği** denir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.3.4.

$$\begin{aligned} h: \ & \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathbb{R} \\ & (p, q) \mapsto h(p, q) = \frac{1}{2}[p \times \bar{q} + q \times \bar{p}] \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı dönüşüm simetrik, reel değerli, non-dejenere ve bilineer formdur. Bu durumda bir q reel kuaterniyonunun **normu**

$$N_q = \|q\|^2 = q \times \bar{q} = \bar{q} \times q$$

biçiminde tanımlanır (Bharati ve Nagaraj 1987, Tuna 2002).

Teorem 2.3.1. 3-boyutlu Öklid uzayı uzaysal kuaterniyonların cümlesi olan $K_0 = \{q \in \mathcal{K} \,|\, q + \bar{q} = 0\}$ ile eşlensin. $I = [0, 1]$, reel eksende birim aralık olsun.

$$\begin{aligned} & \alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{K}, \\ & s \mapsto \alpha(s) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i(s) e_i \end{aligned}$$

sıfırdan farklı $\{k, r\}$ eğriliklerine ve $\{t, n, b\}$ Frenet çatısına sahip birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda α eğrisinin Frenet formülleri

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & r \\ 0 & -r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlanır, burada k eğrinin asli eğriliği, r ise eğrinin burulmasıdır (Bharati ve Nagaraj 1987).

Teorem 2.3.2. 4-boyutlu Öklid uzayı birim kuaterniyonların uzayı ile tanımlanabilir. $I = [0, 1]$ birim aralık olmak üzere

$$\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{K}$$

$$s \mapsto \beta(s) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i(s) e_i, \quad 1 \leq i \leq 4, \quad e_4 = 1$$

eğrisi $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında $\{K, k, r-K\}$ eğriliklerine ve $\{T, N, B_1, B_2\}$ Frenet çatısına sahip düzgün bir eğri olsun. Bu durumda β eğrisinin Frenet formülleri

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & K & 0 & 0 \\ -K & 0 & k & 0 \\ 0 & -k & 0 & (r-K) \\ 0 & 0 & -(r-K) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

biçiminde verilir, burada K eğrinin asli eğriliği, k burulması ve $(r-K)$ ise bitorsiyonudur. Ayrıca k ve r, sırasıyla, β eğrisi ile ilişkili α eğrisinin asli eğriliği ve burulmasıdır (Bharati ve Nagaraj 1987).

3. YÜKSEK BOYUTLU ÖKLİD UZAYLARINDA NON-DEJENERE BERTRAND EĞRİLERİ

Tezin bu bölümünde $n > 3$ boyutlu Öklid uzaylarında non-dejenere eğriler ile ilgili Bertrand eğri tanımlarını ve karakterizasyonlarını vereceğiz. Ancak 3.3 alt bölümü 3.2 alt bölümüne benzer şekilde ifade edilebileceğinden teoremler ispatsız olarak verilecektir.

3.1 4-boyutlu Öklid Uzayında Bertrand Eğrileri

Bu kesimde Matsuda ve Yorozu tarafından yapılan Bertrand eğri tanımını ve bu tanımla ilgili teoremleri ispatları ile birlikte vereceğiz. Öncelikle bu tip bir Bertrand eğri tanımının ortaya çıkarılmasının sebebi olan Teorem 3.1.1 aşağıda ispatı ile birlikte yer alacaktır.

Teorem 3.1.1. n-boyutlu ($n \geq 4$) bir Öklid uzayında non-dejenere bir eğrinin kendisinden başka Bertrand eğri çifti yoktur (Matsuda ve Yorozu 2003).

İspat. $n = 4$ alarak ispatı yapalım. $n > 4$ için ispat benzer şekilde yapılabilir. $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında bir $c = c(s) : I \to \mathbb{E}^4$ birim hızlı eğrisi verilsin. c eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N_1, N_2, N_3\}$ olmak üzere Frenet denklemleri

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

biçimindedir. $\bar{c}$ eğrisinin, c eğrisinin kendisinden farklı bir Bertrand çifti olduğunu varsayalım. $\bar{c}$ eğrisinin Frenet çatısını $\{\bar{T}, \bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3\}$ ile gösterelim. O halde

$$\bar{c}(\bar{s}) = \bar{c}(\varphi(s)) = c(s) + \alpha(s)N_1(s) \tag{3.2}$$

yazılabilir. Buradan s parametresine göre türev alınarak

$$\frac{d\bar{c}(\bar{s})}{ds}\frac{d\bar{s}}{ds} = c'(s) + \alpha'(s)N_1(s) + \alpha N_1'(s)$$

ve (3.1) denklemi yardımıyla

$$\bar{T}(\varphi(s))\varphi'(s) = (1 - k_1(s)\alpha(s))T(s) + \alpha'(s)N_1(s) + \alpha(s)k_2(s)N_2(s) \tag{3.3}$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafı $\bar{N}_1(\varphi(s))$ ile iç çarpım yapılarak ve $N_1(s)$ ile $\bar{N}_1(\varphi(s))$ lineer bağımlı olduğundan $\bar{N}_1(\varphi(s)) = \pm N_1(s)$ alınarak

$$\underbrace{\langle \bar{T}(\varphi(s))\varphi'(s), \bar{N}_1(\varphi(s))\rangle}_{=0} = (1 - k_1(s)\alpha(s))\underbrace{\langle T(s), \bar{N}_1(\varphi(s))\rangle}_{=0} + \alpha'(s)\underbrace{\langle N_1(s), \bar{N}_1(\varphi(s))\rangle}_{=1}$$
$$+\alpha(s)k_2(s)\underbrace{\langle N_2(s), \bar{N}_1(\varphi(s))\rangle}_{=0}$$

elde edilir. O halde $\forall s \in I$ için $\alpha'(s) = 0$ olup $\alpha(s)$ sabit bir fonksiyon olarak elde edilir. (3.3) denklemi $\alpha(s) = sbt.$ alınıp yeniden düzenlenirse

$$\bar{T}(\varphi(s)) = \frac{1 - k_1(s)\alpha(s)}{\varphi'(s)}T(s) + \frac{\alpha(s)k_2(s)}{\varphi'(s)}N_2(s) \tag{3.4}$$

bulunur. $\|\bar{T}(\varphi(s))\| = 1$ olduğundan

$$\frac{1 - k_1(s)\alpha(s)}{\varphi'(s)} = \cos\theta(s), \qquad \frac{\alpha(s)k_2(s)}{\varphi'(s)} = \sin\theta(s) \tag{3.5}$$

eşitlikleri yardımıyla (3.4) denklemi

$$\bar{T}(\varphi(s)) = \cos\theta(s)T(s) + \sin\theta(s)N_2(s) \tag{3.6}$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir. Ayrıca (3.5) denkleminden açıktır ki

$$\varphi'(s) = \sqrt{(1 - k_1(s)\alpha(s))^2 + (\alpha(s)k_2(s))^2} \tag{3.7}$$

olur. (3.6) denkleminin s parametresine göre türev alınıp (3.1) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned}\bar{k}_1(s)\bar{N}_1(\varphi(s))\varphi'(s) = &-\theta'(s)\sin\theta(s)T(s) + (\cos\theta(s)k_1(s) - \sin\theta(s)k_2(s))N_1(s)\\ &+\theta'(s)\cos\theta(s)N_2(s) + \sin\theta(s)k_3(s)N_3(s)\end{aligned} \tag{3.8}$$

eşitliğine ulaşılır. $\bar{N}_1 \parallel N_1$ olduğundan dolayı eşitliğin sağ tarafında T, N_2 ve N_3 vektörleri yer alamaz. Yani, $\sin\theta(s)k_3(s) = 0$, $\theta'(s)\sin\theta(s) = 0$ ve $\theta'(s)\cos\theta(s) = 0$

olmalıdır. Eğri non-dejenere olduğundan dolayı $k_2(s) \neq 0$ ve $k_3(s) \neq 0$'dır. O halde $\sin\theta(s) = 0$ ve dolayısıyla $\alpha(s) = 0$ olur.

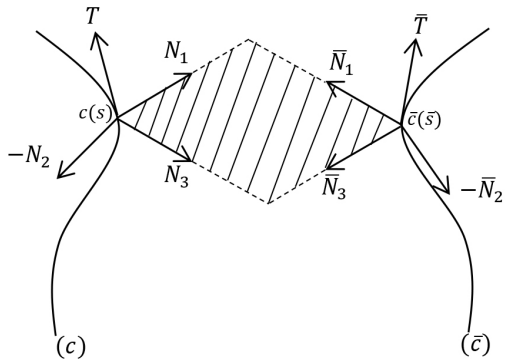
Sonuçta $\bar{c}(\varphi(s)) = c(s)$ olur ki bu bir çelişkidir. Buna göre 4-boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin Bertrand çifti sadece kendisidir. Başka bir deyişle kendisinden farklı Bertrand çifti yoktur. □

Matsuda ve Yorozu 4-boyutlu Öklid uzayında non-dejenere eğriler için yeni bir Bertrand eğri türetme metodu öne sürmüş ve bu eğrileri $(1,3)$-Bertrand eğrileri olarak adlandırmıştır.

Tanım 3.1.1. $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında $c = c(s)$ ve $\bar{c} = \bar{c}(\varphi(s)) = \bar{c}(\bar{s})$ birim hızlı eğrileri ele alalım, burada $\varphi : s \mapsto \varphi(s) = \bar{s}$ biçiminde düzgün bir dönüşümdür. c ve $\bar{c}$ eğrilerinin Frenet elemanları, sırası ile, $\{T, N_1, N_2, N_3, k_1, k_2, k_3\}$ ve $\{\bar{T}, \bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3\}$ ile verilsin. $d\bar{s}/ds \neq 0$ olmak üzere, eğer c eğrisinin N_1 ve N_3 Frenet vektörleri tarafından gerilen düzlem ile $\bar{c}$ eğrisinin $\bar{N}_1$ ve $\bar{N}_3$ Frenet vektörleri tarafından gerilen düzlem karşılıklı noktalarda çakışıyorsa, yani şekil 3.1'de görüldüğü üzere

$$\text{span}\{N_1(s), N_3(s)\} = \text{span}\{\bar{N}_1(\bar{s}), \bar{N}_3(\bar{s})\}$$

oluyorsa c ve $\bar{c}$ eğrileri $(1,3)$-Bertrand eğri çifti olarak adlandırılır (Matsuda ve Yorozu 2003).



Şekil 3.1 Bir $(1,3)$-Bertrand çiftinin geometrisi

Teorem 3.1.2. $c : I \to \mathbb{E}^4$ eğrisi eğrilik fonksiyonları k_1, k_2, k_3 ve Frenet vektörleri T, N_1, N_2, N_3 olan bir Frenet eğrisi olsun. c eğrisinin bir $(1,3)$-Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter şart $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ uygun reel sabitleri için aşağıdaki şartların sağlanmasıdır.

(i) $\alpha k_2(s) - \beta k_3(s) \neq 0$,

(ii) $\alpha k_1(s) + \gamma(\alpha k_2(s) - \beta k_3(s)) = 1$,

(iii) $\gamma k_1(s) - k_2(s) = \delta k_3(s)$,

(iv) $(\gamma^2 - 1)k_1(s)k_2(s) + \gamma({k_1}^2(s) + {k_2}^2(s) + {k_3}^2(s)) \neq 0$,

(Matsuda ve Yorozu 2003).

İspat. ($\Rightarrow$:) c eğrisi s yay parametreli bir $(1,3)$-Bertrand eğrisi olmak üzere bu eğrinin $(1,3)$-Bertrand çifti

$$\bar{c}(\bar{s}) = \bar{c}(\varphi(s)) = c(s) + \alpha(s)N_1(s) + \beta(s)N_3(s) \tag{3.9}$$

biçiminde yazılır. Bu denklemin s parametresine göre türevi alınarak

$$\frac{d\bar{c}(\bar{s})}{d\bar{s}}\frac{d\bar{s}}{ds} = c'(s) + \alpha'(s)N_1(s) + \alpha(s)N_1'(s) + \beta'(s)N_3(s) + \beta(s)N_3'(s)$$

bulunur. Buradan (3.1) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned}\bar{T}(\bar{s})\varphi'(s) = \; & T(s) + \alpha'(s)N_1(s) + \alpha(s)\{-k_1(s)T(s) + k_2(s)N_2(s)\} \\ & +\beta'(s)N_3(s) - \beta(s)k_3(s)N_2(s)\end{aligned} \tag{3.10}$$

eşitliği elde edilir. Diğer yandan $\text{span}\{N_1(s), N_3(s)\} = \text{span}\{\bar{N}_1(\bar{s}), \bar{N}_3(\bar{s})\}$ olduğundan dolayı N_1 ile $\bar{N}_1$ arasındaki açı θ olmak üzere

$$\bar{N}_1(\varphi(s)) = \cos\theta(s)N_1(s) + \sin\theta(s)N_3(s) \tag{3.11}$$

$$\bar{N}_3(\varphi(s)) = -\sin\theta(s)N_1(s) + \cos\theta(s)N_3(s) \tag{3.12}$$

yazılabilir. O halde (3.10) denkleminin her iki tarafı $\bar{N}_1(\varphi(s))$ ve $\bar{N}_3(\varphi(s))$ ile iç çarpılırsa, son iki eşitlik kullanılarak

$$\langle \varphi'(s)\bar{T}(\varphi(s)), \bar{N}_1(\varphi(s))\rangle = \alpha'(s)\cos\theta(s) + \beta'(s)\sin\theta(s) = 0$$

$$\langle \varphi'(s)\bar{T}(\varphi(s)), \bar{N}_3(\varphi(s))\rangle = -\alpha'(s)\sin\theta(s) + \beta'(s)\cos\theta(s) = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler ortak çözülerek $\alpha'(s) = 0$ ve $\beta'(s) = 0$ bulunur. O halde $\alpha(s) = \alpha = (sbt.)$ ve $\beta(s) = \beta = (sbt.)$ yazılabilir. Buradan (3.9) denklemi

$$\bar{c}(\bar{s}) = c(s) + \alpha N_1(s) + \beta N_3(s)$$

biçiminde (3.10) denklemi de

$$\varphi'(s)\bar{T}(\varphi(s)) = (1 - \alpha k_1(s))T(s) + (\alpha k_2(s) - \beta k_3(s))N_2(s) \tag{3.13}$$

biçiminde yeniden düzenlenebilir, burada

$$(\varphi'(s))^2 = (1 - \alpha k_1(s))^2 + (\alpha k_2(s) - \beta k_3(s))^2 \neq 0 \tag{3.14}$$

sağlanır ve

$$\bar{T}(\varphi(s)) = \frac{1 - \alpha k_1(s)}{\varphi'(s)}T(s) + \frac{\alpha k_2(s) - \beta k_3(s)}{\varphi'(s)}N_2(s)$$

elde edilir. Bu denklem, $\dfrac{1 - \alpha k_1(s)}{\varphi'(s)} = \cos\zeta(s)$ ve $\dfrac{\alpha k_2(s) - \beta k_3(s)}{\varphi'(s)} = \sin\zeta(s)$ alınarak

$$\bar{T}(\varphi(s)) = \cos\zeta(s)T(s) + \sin\zeta(s)N_2(s) \tag{3.15}$$

biçiminde yeniden yazılabilir. Buradan da s parametresine göre türev alınıp Frenet denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned}\bar{k}_1(\varphi(s))\bar{N}_1(\varphi(s))\varphi'(s) = \; & \frac{d\cos(\zeta(s))}{ds}T(s) + \{k_1(s)\cos(\zeta(s)) - k_2(s)\sin(\zeta(s))\}N_1(s) \\ & + \frac{d\sin(\zeta(s))}{ds}N_2(s) + k_3(s)\sin(\zeta(s))N_3(s)\end{aligned} \tag{3.16}$$

elde edilir. Buna göre, $\bar{N}_1(\varphi(s))$ vektörü $N_1(s)$ ile $N_3(s)$ vektörlerinin lineer kombinasyonu şeklinde yazıldığından

$$\frac{d\cos(\zeta(s))}{ds} \equiv 0, \quad \frac{d\sin(\zeta(s))}{ds} \equiv 0$$

olur ki buradan $\zeta'(s) = 0$ elde edilir. O halde $\zeta(s)$ sabit bir fonksiyon olup $\zeta(s) = \zeta_0$ yazılabilir. Bu durumda (3.15) denklemi

$$\bar{T}(\varphi(s)) = \cos\zeta_0 T(s) + \sin\zeta_0 N_2(s) \tag{3.17}$$

biçiminde yeniden düzenlenebilir. Dolayısıyla

$$\frac{1-\alpha k_1(s)}{\varphi'(s)} = \cos\zeta_0, \quad \frac{\alpha k_2(s) - \beta k_3(s)}{\varphi'(s)} = \sin\zeta_0$$

yazılır. Buradan,

$$\varphi'(s)\cos\zeta_0 = 1 - \alpha k_1(s) \tag{3.18}$$

ve

$$\varphi'(s)\sin\zeta_0 = \alpha k_2(s) - \beta k_3(s) \tag{3.19}$$

olup

$$(1-\alpha k_1(s))\sin\zeta_0 = (\alpha k_2(s) - \beta k_3(s))\cos\zeta_0 \tag{3.20}$$

bulunur. Eğer $\sin\zeta_0 = 0$ ise $\cos\zeta_0 = \pm 1$ olur. Buradan (3.17) denklemi

$$\bar{T}(\varphi(s)) = \pm T(s)$$

biçiminde ifade edilebilir. O halde s parametresine göre türev alınarak kolayca görülebilir ki $\bar{N}_1(\varphi(s)) = \pm N_1(s)$ sağlanır. Bu ise Teorem 3.1.1 ile çelişir. Bundan dolayı $\sin\zeta_0 \neq 0$ olmalıdır. Buna göre (3.19) denkleminden $\alpha k_2(s) - \beta k_3(s) \neq 0$ olmalıdır ki bu da **(i) koşulunu doğrular**.

$\sin\zeta_0 \neq 0$ olduğundan (3.20) denklemi kullanılarak

$$\alpha k_1(s) + \{\frac{\cos\zeta_0}{\sin\zeta_0}\}(\alpha k_2(s) - \beta k_3(s)) = 1$$

bulunur. $\gamma = \dfrac{\cos\zeta_0}{\sin\zeta_0} \in \mathbb{R}$ alınırsa yukarıdaki eşitlik

$$\alpha k_1(s) + \gamma(\alpha k_2(s) - \beta k_3(s)) = 1$$

olarak ifade edilebilir ki bu da **(ii) koşulunu gerçekler**.

(3.17) denkleminden s parametresine göre türev alınıp (3.1) denklemi kullanılarak

$$\bar{k}_1(\varphi(s))\bar{N}_1(\varphi(s))\varphi'(s) = (k_1(s)\cos\zeta_0 - k_2(s)\sin\zeta_0)N_1(s) + k_3(s)\sin\zeta_0 N_3(s)$$

eşitliğine ve buradan da

$$(\varphi'(s)\bar{k}_1(\varphi(s)))^2 = (k_1(s)\cos\zeta_0 - k_2(s)\sin\zeta_0)^2 + (k_3(s)\sin\zeta_0)^2$$

eşitliğine ulaşılır. (3.18) ve (3.19) denklemlerinden $\cos\zeta_0$ ve $\sin\zeta_0$ eşitlikleri yukarıdaki denklemde yerine yazılıp (ii) koşuluna göre ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned}(\varphi'(s)\bar{k}_1(\varphi(s)))^2 &= (\alpha k_2(s) - \beta k_3(s))^2\{(\frac{1-\alpha k_1(s)}{\alpha k_2(s) - \beta k_3(s)}k_1(s) - k_2(s))^2 + (k_3(s))^2\} \\ &= (\alpha k_2(s) - \beta k_3(s))^2\{(\gamma k_1(s) - k_2(s))^2 + (k_3(s))^2\} \qquad (3.21)\end{aligned}$$

elde edilir. (3.14) denklemi ve (ii) koşulu birlikte kullanılarak

$$(\varphi'(s))^2 = (\gamma^2+1)(\alpha k_2(s) - \beta k_3(s))^2$$

ve bu eşitliğin (3.21) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$(\varphi'(s)\bar{k}_1(\varphi(s)))^2 = \frac{1}{\gamma^2+1}\{(\gamma k_1(s) - k_2(s))^2 + (k_3(s))^2\} \qquad (3.22)$$

denklemine ulaşılır. (3.18) ve (3.19) denklemleri ile (ii) koşulu birlikte göz önüne alınırsa

$$\bar{N}_1(\varphi(s)) = \cos\eta(s)N_1(s) + \sin\eta(s)N_3(s) \qquad (3.23)$$

yazılabilir, burada

$$\cos\eta(s) = \frac{(\alpha k_2(s) - \beta k_3(s))(\gamma k_1(s) - k_2(s))}{\bar{k}_1(\varphi(s))(\varphi'(s))^2} \qquad (3.24)$$

ve

$$\sin\eta(s) = \frac{(\alpha k_2(s) - \beta k_3(s))k_3(s)}{\bar{k}_1(\varphi(s))(\varphi'(s))^2} \qquad (3.25)$$

biçimindedir.

(3.23) denkleminin s parametresine göre türevi alınıp (3.1) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}\varphi'(s)(-\bar{k}_1(\bar{s})\bar{T}(\bar{s}) + \bar{k}_2(\bar{s})\bar{N}_2(\bar{s})) = \quad & \frac{d\cos\eta(s)}{ds}N_1(s) + \frac{d\sin\eta(s)}{ds}N_3(s) \\ & -k_1(s)\cos\eta(s)T(s) \\ & +(k_2(s)\cos\eta(s) - k_3(s)\sin\eta(s))N_2(s)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte sol taraf $T(s)$ ve $N_2(s)$'nin lineer kombinasyonu biçiminde yazılabileceği için

$$\frac{d\cos\eta(s)}{ds}=0, \quad \frac{d\sin\eta(s)}{ds}=0$$

bulunur. Bu durumda $\eta(s)=\eta_0$ sabit bir fonksiyondur. O halde $\delta=\dfrac{\cos\eta_0}{\sin\eta_0}$ sabittir. (3.24) ve (3.25) denklemlerinden

$$\delta=\frac{\cos\eta_0}{\sin\eta_0}=\frac{\gamma k_1(s)-k_2(s)}{k_3(s)}$$

dir, yani $\gamma k_1(s)-k_2(s)=\delta k_3(s)$ olup **(iii) koşulu gerçeklenir**.

Dahası $\eta(s)$ sabit fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned}\varphi'(s)(-\bar{k}_1(\bar{s})\bar{T}(\bar{s})+\bar{k}_2(\bar{s})\bar{N}_2(\bar{s}))= \; & -k_1(s)\cos\eta_0 T(s)\\ & +(k_2(s)\cos\eta_0-k_3(s)\sin\eta_0)N_2(s)\end{aligned}$$

olur. Bu denklem ve (3.13) denklemi birlikte kullanılarak

$$\begin{aligned}\varphi'(s)\bar{k}_2(\bar{s})\bar{N}_2(\bar{s}) &= \varphi'(s)\bar{k}_1(\bar{s})\bar{T}(\bar{s})-k_1(s)\cos\eta_0 T(s)\\ &\quad +(k_2(s)\cos\eta_0-k_3(s)\sin\eta_0)N_2(s)\\ &= (\varphi'(s))^{-1}\big(\bar{k}_1(\varphi(s))\big)^{-1}\{A(s)T(s)+B(s)N_2(s),\}\end{aligned}$$

olup, burada

$$A(s)=\{\varphi'(s)\bar{k}_1(\varphi(s))\}^2(1-\alpha k_1(s))-k_1(s)(\alpha k_2(s)-\beta k_3(s))(\gamma k_1(s)-k_2(s))$$

ve

$$\begin{aligned}B(s)= \; & \{\varphi'(s)\bar{k}_1(\varphi(s))\}^2(\alpha k_2(s)-\beta k_3(s))+(\alpha k_2(s)-\beta k_3(s))(\gamma k_1(s)-k_2(s))k_2(s)\\ & -(\alpha k_2(s)-\beta k_3(s))(k_3(s))^2\end{aligned}$$

biçimindedir. (3.22) denklemi ve (ii) koşulu ile birlikte göz önüne alınarak $A(s)$ ve $B(s)$ ifadeleri

$$\begin{aligned}A(s)= \; & -(\gamma^2+1)^{-1}(\alpha k_2(s)-\beta k_3(s))\\ & \times\big[(\gamma^2-1)k_1(s)k_2(s)+\gamma\{(k_1(s))^2-(k_2(s))^2-(k_3(s))^2\}\big]\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}B(s)= \; & \gamma(\gamma^2+1)^{-1}(\alpha k_2(s)-\beta k_3(s))\\ & \times\big[(\gamma^2-1)k_1(s)k_2(s)+\gamma\{(k_1(s))^2-(k_2(s))^2-(k_3(s))^2\}\big]\end{aligned}$$

biçiminde yeniden düzenlenebilir. Buradan $\forall s \in I$ için $\varphi'(s)\bar{k}_2(\varphi(s))\bar{N}_2(\varphi(s)) \neq 0$ olduğundan

$$(\gamma^2 - 1)k_1(s)k_2(s) + \gamma\{(k_1(s))^2 - (k_2(s))^2 - (k_3(s))^2\} \neq 0$$

sağlanır ki bu da **(iv) koşulunu kanıtlar**.

($\Leftarrow$:) Varsayalım ki $c : I \to \mathbb{E}^4$ eğrisi eğrilikleri k_1, k_2, k_3 olan bir C^∞ Frenet eğrisi olsun. Ayrıca c eğrisi α, β, γ ve δ sabitleri için (i), (ii), (iii) ve (iv) şartlarını sağlasın. Bir düzgün $\bar{c}$ eğrisi

$$\bar{c}(s) = c(s) + \alpha N_1(s) + \beta N_3(s) \tag{3.26}$$

biçiminde tanımlansın. Burada s, c eğrisinin yay parametresidir. (3.26) eşitliğinden s parametresine göre türevi alınıp (3.1) denklemi kullanılırsa

$$\frac{d\bar{c}(s)}{ds} = (1 - \alpha k_1(s))T(s) + (\alpha k_2(s) - \beta k_3(s))N_2(s)$$

elde edilir. Buradan da (ii) koşulu kullanılırsa

$$\frac{d\bar{c}(s)}{ds} = (\alpha k_2(s) - \beta k_3(s))(\gamma T(s) + N_2(s)) \tag{3.27}$$

bulunur. (i) koşulu sağlandığından $\bar{c}$ eğrisi regüler bir eğridir. Bu durumda

$$\bar{s} = \varphi(s) = \int_0^s \left\| \frac{d\bar{c}(t)}{dt} \right\| dt \quad (\forall s \in I)$$

biçiminde tanımlı regüler bir $\varphi : I \to \bar{I}$ dönüşümü mevcuttur. Burada $\bar{s}$, $\bar{c}$ eğrisinin yay parametresidir. Bu durumda

$$\varphi'(s) = \varepsilon\sqrt{\gamma^2 + 1}(\alpha k_2(s) - \beta k_3(s)) > 0 \tag{3.28}$$

elde edilir. Burada $\alpha k_2(s) - \beta k_3(s) > 0$ ise $\varepsilon = 1$ ve $\alpha k_2(s) - \beta k_3(s) < 0$ ise $\varepsilon = -1$'dir. Dolayısıyla $\bar{c}$ eğrisi

$$\bar{c}(\bar{s}) = \bar{c}(\varphi(s)) = c(s) + \alpha N_1(s) + \beta N_3(s)$$

biçiminde yeniden yazılabilir. Bu ifadenin s parametresine göre türevi alınarak

$$\varphi'(s)\frac{d\bar{c}(\bar{s})}{d\bar{s}}\bigg|_{\bar{s}=\varphi(s)} = (\alpha k_2(s) - \beta k_3(s))(\gamma T(s) + N_2(s)) \tag{3.29}$$

bulunur. Bu durumda $\forall \bar{s} \in \bar{I}$ için $\bar{c}$ boyunca $\bar{T}(\bar{s}) = d\bar{c}(\bar{s})/d\bar{s}$ biçiminde bir birim $\bar{T}$ vektör alanı tanımlanabilir. (3.28) ve (3.29) denklemlerinden

$$\bar{T}(\varphi(s)) = \varepsilon(\gamma^2+1)^{-1/2}\{\gamma T(s) + N_2(s)\} \tag{3.30}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu denklemin s parametresine göre türevi alınıp (3.1) denklemi kullanılırsa

$$\varphi'(s)\frac{d\bar{T}(\bar{s})}{d\bar{s}}\bigg|_{\bar{s}=\varphi(s)} = \varepsilon(\gamma^2+1)^{-1/2}\{(\gamma k_1(s) - k_2(s))N_1(s) + k_3(s)N_3(s)\}$$

ve buradan da

$$\left\|\frac{d\bar{T}(\bar{s})}{\bar{s}}\bigg|_{\bar{s}=\varphi(s)}\right\| = \frac{\sqrt{(\gamma k_1(s) - k_2(s))^2 + (k_3(s))^2}}{\varphi'(s)\sqrt{\gamma^2+1}}$$

elde edilir. Her $s \in I$ için $k_3(s) > 0$ olduğundan dolayı

$$\bar{k}_1(\varphi(s)) = \left\|\frac{d\bar{T}(\bar{s})}{d\bar{s}}\bigg|_{\bar{s}=\varphi(s)}\right\| > 0 \tag{3.31}$$

bulunur. Bu durumda her $s \in I$ için $\bar{c}$ eğrisi boyunca

$$\begin{aligned}
\bar{N}_1(\bar{s}) &= \bar{N}_1(\varphi(s)) \\
&= \frac{1}{\bar{k}_1(\varphi(s))}\frac{d\bar{T}(\bar{s})}{d\bar{s}}\bigg|_{\bar{s}=\varphi(s)} \\
&= \frac{1}{\varepsilon\sqrt{(\gamma k_1(s) - k_2(s))^2 + (k_3(s))^2}}\{(\gamma k_1(s) - k_2(s))N_1(s) + k_3(s)N_3(s)\}
\end{aligned}$$

biçiminde bir $\bar{N}_1$ vektör alanı tanımlanabilir. Dolayısıyla

$$\bar{N}_1(\varphi(s)) = \cos\xi(s)N_1(s) + \sin\xi(s)N_3(s) \tag{3.32}$$

yazılabilir, burada

$$\cos\xi(s) = \frac{\gamma k_1(s) - k_2(s)}{\varepsilon\sqrt{(\gamma k_1(s) - k_2(s))^2 + (k_3(s))^2}} \tag{3.33}$$

ve

$$\sin\xi(s) = \frac{k_3(s)}{\varepsilon\sqrt{(\gamma k_1(s) - k_2(s))^2 + (k_3(s))^2}} > 0 \tag{3.34}$$

biçimindedir ve ξ fonksiyonu I üzerinde bir C^∞-fonksiyondur. (3.32) denkleminin s parametresine göre türevi alınıp Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\varphi'(s)\frac{d\bar{N}_1(\bar{s})}{d\bar{s}}\bigg|_{\bar{s}=\varphi(s)} &= -k_1(s)\cos\xi(s)\,T(s) + \frac{d\cos\xi(s)}{ds}\,N_1(s)\\ &\quad +\{k_2(s)\cos\xi(s) - k_3(s)\sin\xi(s)\}\,N_2(s)\\ &\quad +\frac{d\sin\xi(s)}{ds}\,N_3(s)\end{aligned}$$

bulunur. (iii) koşulundaki eşitliğin s parametresine göre türevi alınırsa

$$(\gamma k_1'(s) - k_2'(s))k_3(s) - (\gamma k_1(s) - k_2(s))k_3'(s) \equiv 0 \tag{3.35}$$

elde edilir. (3.33) ve (3.34) denklemlerinin s parametresine göre türevleri alınıp (3.35) denkleminde kullanılırsa

$$\frac{d\cos\xi(s)}{ds} \equiv 0, \qquad \frac{d\sin\xi(s)}{ds} \equiv 0$$

olduğu açıktır. Bu durumda ξ sabit bir fonksiyon olup $\xi = \xi_0$ alınabilir. O halde

$$\frac{\gamma k_1(s) - k_2(s)}{\varepsilon\sqrt{(\gamma k_1(s) - k_2(s))^2 + (k_3(s))^2}} = \cos\xi_0 \tag{3.36}$$

ve

$$\frac{k_3(s)}{\varepsilon\sqrt{(\gamma k_1(s) - k_2(s))^2 + (k_3(s))^2}} = \sin\xi_0 > 0 \tag{3.37}$$

yazılır. (3.32) denkleminden

$$\bar{N}_1(\varphi(s)) = \cos\xi_0\,N_1(s) + \sin\xi_0\,N_3(s) \tag{3.38}$$

sağlanır. Dolayısıyla, (3.30) ve (3.31) denklemlerinden

$$\bar{k}_1(\varphi(s))\,\bar{T}(\varphi(s)) = \frac{(\gamma k_1(s) - k_2(s))^2 + (k_3(s))^2}{\varepsilon\varphi'(s)(\gamma^2+1)\sqrt{(\gamma k_1(s) - k_2(s))^2 + (k_3(s))^2}}(\gamma T(s) + N_2(s))$$

elde edilir. Ayrıca (3.36)-(3.38) denklemlerinden her $s \in I$ için

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{N}_1(\bar{s})}{d\bar{s}}\bigg|_{\bar{s}=\varphi(s)} &= \frac{-k_1(s)(\gamma k_1(s) - k_2(s))}{\varepsilon\varphi'(s)\sqrt{(\gamma k_1(s) - k_2(s))^2 + (k_3(s))^2}}T(s)\\ &\quad +\frac{k_2(s)(\gamma k_1(s) - k_2(s)) - (k_3(s))^2}{\varepsilon\varphi'(s)\sqrt{(\gamma k_1(s) - k_2(s))^2 + (k_3(s))^2}}N_2(s)\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikler kullanılarak

$$\frac{d\bar{N}_1(\bar{s})}{d\bar{s}}\bigg|_{\bar{s}=\varphi(s)} + \bar{k}_1(\varphi(s))\,\bar{T}(\varphi(s)) = \frac{P(s)}{R(s)}T(s) + \frac{Q(s)}{R(s)}N_2(s)$$

bulunur. Burada

$$P(s) = -\big[\gamma\{(k_1(s))^2 - (k_2(s))^2 - (k_3(s))^2\} + (\gamma^2-1)k_1(s)k_2(s)\big]$$

$$Q(s) = \gamma\big[\gamma\{(k_1(s))^2 - (k_2(s))^2 - (k_3(s))^2\} + (\gamma^2-1)k_1(s)k_2(s)\big]$$

$$R(s) = \varepsilon(\gamma^2+1)\varphi'(s)\sqrt{(\gamma k_1(s) - k_2(s))^2 + (k_3(s))^2} \neq 0$$

biçimindedir. (iii) koşulundan her $s \in I$ için $P(s) \neq 0$ olduğu görülür. O halde

$$\begin{aligned}
\bar{k}_2(\varphi(s)) &= \left\| \left.\frac{d\bar{N}_1(\bar{s})}{d\bar{s}}\right|_{\bar{s}=\varphi(s)} + \bar{k}_1(\varphi(s))\,\bar{T}(\varphi(s)) \right\| \\
&= \frac{|\gamma\{(k_1(s))^2 - (k_2(s))^2 - (k_3(s))^2\} + (\gamma^2-1)k_1(s)k_2(s)|}{\varphi'(s)\sqrt{\gamma^2+1}\sqrt{(\gamma k_1(s) - k_2(s))^2 + (k_3(s))^2}} \\
&> 0
\end{aligned}$$

olup her $s \in I$ için $\bar{c}$ eğrisi boyunca

$$\begin{aligned}
\bar{N}_2(\bar{s}) &= \bar{N}_2(\varphi(s)) \\
&= \frac{1}{\bar{k}_2(\varphi(s))}\left(\left.\frac{d\bar{N}_1(\bar{s})}{d\bar{s}}\right|_{\bar{s}=\varphi(s)} + \bar{k}_1(\varphi(s))\,\bar{T}(\varphi(s)) \right),
\end{aligned}$$

yani,

$$\bar{N}_2(\varphi(s)) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\gamma^2+1}}(-T(s) + \gamma N_2(s)) \tag{3.39}$$

biçiminde bir $\bar{N}_2$ birim vektör alanı tanımlanabilir. Dolayısıyla her $s \in I$ için $\bar{c}$ eğrisi boyunca

$$\begin{aligned}
\bar{N}_3(\bar{s}) &= \bar{N}_3(\varphi(s)) \\
&= \frac{1}{\varepsilon\sqrt{(\gamma k_1(s) - k_2(s))^2 + (k_3(s))^2}}\{-k_3(s)N_1(s) + (\gamma k_1(s) - k_2(s))N_3(s)\},
\end{aligned}$$

yani,

$$\bar{N}_3(\varphi(s)) = -\sin\xi_0 N_1(s) + \cos\xi_0 N_3(s) \tag{3.40}$$

biçiminde bir $\bar{N}_3$ birim vektör alanı tanımlanabilir. (3.30), (3.38)-(3.40) denklemlerinden

$$\det\big[\bar{T}(\varphi(s)), \bar{N}_1(\varphi(s)), \bar{N}_2(\varphi(s)), \bar{N}_3(\varphi(s))\big] = \det\big[T(s), N_1(s), N_2(s), N_3(s)\big] = 1$$

bulunur. Ayrıca her $s \in I$ ve $i, j = 1, 2, 3$ için

$$\langle \bar{T}(\varphi(s)), \bar{n}_i(\varphi(s))\rangle = 0, \qquad \langle \bar{n}_i(\varphi(s)), \bar{n}_j(\varphi(s))\rangle = \delta_{ij}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\{\bar{T}, \bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3\}$ çatısı $\bar{c}$ eğrisi boyunca ortonormaldir ve pozitiftir. Öte yandan her $s \in I$ için

$$\begin{aligned}\bar{k}_3(\varphi(s)) &= \left\langle \frac{d\bar{N}_2(\bar{s})}{d\bar{s}}, \bar{N}_3(\varphi(s)) \right\rangle \\ &= \frac{\sqrt{\gamma^2+1}k_1(s)k_3(s)}{\varphi'(s)\sqrt{(\gamma k_1(s) - k_2(s))^2 + (k_3(s))^2}} \\ &> 0\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $\bar{c}$ eğrisi $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında bir C^∞ Frenet eğrisidir. Ayrıca açıkça bellidir ki c eğrisinin her bir $c(s)$ noktasındaki $(1,3)$-normal düzlemi ile $\bar{c}$ eğrisinin karşılık gelen $\bar{c}(\bar{s}) = \bar{c}(\varphi(s))$ noktasındaki $(1,3)$-normal düzlemi çakışır. Bu durumda c eğrisi $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında bir $(1,3)$-Bertrand eğrisidir. O halde ispat tamamlanır. □

3.2 n-boyutlu Öklid Uzayında Genelleştirilmiş Non-dejenere Bertrand Eğrileri

Bu bölümde Cheng ve Lin tarafından yapılan ve Matsuda ile Yorozu'nun çalışmasının bir genellemesi olan çalışma ele alınarak ancak karakterizasyonları ispatsız olarak verilecektir. Çünkü tezin ilerleyen bölümleri daha çok 3.1 alt bölümü ile ilgilidir. Sadece bu çalışmadan hareketle ileride yapılabilecek çalışmalar için kaynak olması düşüncesiyle bu bölüme yer verilmiştir.

Tanım 3.2.1. $c : I \to \mathbb{E}^n$ bir C^∞-özel Frenet eğrisi olsun. $p \in \{1, 2, \ldots, m\}$ ve $m \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ olmak üzere $i_p \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ indis cümlesini $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n-1$ olacak biçimde alalım. N_{i_p} ile c eğrisinin i_p-inci birim normal vektör alanı gösterilsin. Ayrıca k_i, c eğrisinin yüksek mertebeden eğrilikleri ve δ_{ij} Kronecker deltası olmak üzere

$$K_{j,i}(s) = -k_i(s)\delta_{(i-1)j} + k_{i+1}(s)\delta_{(i+1)j}$$

verilsin. Eğer her $s \in I$ için $c(s)$ ve $\bar{c}(s)$ noktalarındaki $(i_1, \ldots, i_m)$-normal düzlemleri

çakışacak şekilde farklı bir

$$\bar{c}(s) = c(s) + \sum_{p=1}^{m} \alpha_{i_p} \cdot N_{i_p}(s) \tag{3.41}$$

varsa, c eğrisine bir $(i_1, \ldots, i_m)$-Bertrand eğrisi (ya da genelleştirilmiş Bertrand eğrisi) adı verilir (Cheng ve Lin 2009).

Teorem 3.2.1. Eğer $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında bir C^∞-özel Frenet eğrisi genelleştirilmiş Bertrand eğrisi ise, bu eğri $(1, i_2, \ldots, i_m)$-Bertrand eğri tipinde olmalıdır (Cheng ve Lin 2009).

Uyarı. Genelleştirilmiş Bertrand eğrileri bilinen bazı özellikleri sağlamaktadır. Örneğin, kolayca doğrulanabilir ki bir eğri ile genelleştirilmiş Bertrand çifti arasındaki mesafe sabittir.

Lemma 3.2.1. $A = (\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_m})$, $B = (B_{l_p}) = (K_{i_l,i_p})$ ve $R = (R_{l_p}) = K_{-1+i_l,i_p} k_{i_l} - K_{1+i_l,i_p} k_{1+i_l}$ olmak üzere $m \times m$ tipindeki $R - B^2$ matrisi simetriktir ve $D_q = K^2_{i_{q-1},i_q} - k^2_{i_q}$, $F_q = K^2_{i_q,i_{q+1}} - k^2_{1+i_q}$ ve $N_q = K_{-1+i_{q+1},i_q} k_{i_{q+1}}$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} D_1 + F_1 & N_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ N_1 & D_2 + F_2 & N_2 & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & N_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & N_{m-2} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & N_{m-2} & D_{m-1} + F_{m-1} & N_{m-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & N_{m-1} & D_m + F_m \end{pmatrix}$$

biçiminde yazılabilir, burada i_p ya da i_q tanımlı değilse $K_{i_p,i_q} = 0$ alınmıştır.

4. 4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA KUATERNİYONİK BERTRAND EĞRİLERİ

Tanım 4.1. $\alpha(s)$ ve $\beta(s^*)$ 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı iki uzaysal kuaterniyonik eğri olsun. Bu eğrilerin Frenet vektörleri sırası ile $\{t, n, b\}$ ve $\{t^*, n^*, b^*\}$ olmak üzere n ve n^* uzaysal kuaterniyonları lineer bağımlı ise (α, β) ikilisine **uzaysal kuaterniyonik Bertrand eğri çifti** adı verilir.

Tanım 4.2. $\alpha^{(4)}(s)$ ve $\beta^{(4)}(s^*)$ 4-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı iki kuaterniyonik eğri olsun. Bu eğrilerin Frenet vektörleri sırası ile $\{T, N, B_1, B_2\}$ ve $\{T^*, N^*, B_1^*, B_2^*\}$ olmak üzere N ve N^* uzaysal kuaterniyonları lineer bağımlı ise $(\alpha^{(4)}, \beta^{(4)})$ ikilisine **kuaterniyonik Bertrand eğri çifti** adı verilir.

Teorem 4.1. $\alpha^{(4)}$, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında kuaterniyonik bir eğri olsun. Eğer $\alpha^{(4)}$ eğrisinin bitorsiyonu sıfırdan farklı yani $r - K \neq 0$ ise $\alpha^{(4)}$ eğrisinin $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında kuaterniyonik Bertrand çifti yoktur (Keçilioğlu ve İlarslan 2013).

İspat. $\alpha^{(4)}$, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında bir kuaterniyonik Bertrand eğrisi olsun. $\beta^{(4)}$ ise $\alpha^{(4)}$ eğrisinin kuaterniyonik Bertrand çifti olsun. $\beta^{(4)}$, $\alpha^{(4)}$ kuaterniyonik eğrisinden farklı olsun. Bu durumda

$$\beta^{(4)}(\varphi(s)) = \beta^{(4)}(\bar{s}) = \alpha^{(4)}(s) + \lambda N(s) \tag{4.1}$$

yazılabilir. Buradan

$$\bar{T}(\bar{s}) = \frac{1}{\varphi'(s)}\big[(1 - \lambda K(s))T(s) + \lambda k(s)B_1(s)\big]$$

elde edilir. Bu durumda

$$\bar{T}(\varphi(s)) = \cos\theta(s)T(s) + \sin\theta(s)B_1(s) \tag{4.2}$$

yazılabilir, burada

$$\cos\theta(s) = \frac{1-\lambda K(s)}{\varphi'(s)} \tag{4.3}$$

ve

$$\sin\theta(s) = \frac{\lambda k(s)}{\varphi'(s)} \tag{4.4}$$

biçimindedir. (4.2) denkleminin s parametresine göre türevi alınıp Frenet eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\bar{K}(\varphi(s))\varphi'(s)\bar{N}(\varphi(s)) =& \frac{d\cos\theta(s)}{ds}T(s) + (K(s)\cos\theta(s) - k(s)\sin\theta(s))N(s) \\ &+ \frac{d\sin\theta(s)}{ds}B_1(s) + (r-K)(s)\sin\theta(s)B_2(s)\end{aligned}$$

elde edilir. $\forall s \in I$ için $\bar{N}(\varphi(s)) = \pm N(s)$ olduğundan $\theta(s) = \theta$ sabit bir fonksiyon ve

$$(r-K)(s)\sin\theta(s) = 0$$

olmalıdır. Kabul gereği $r - K \neq 0$ olduğundan $\sin\theta = 0$ elde edilir. Bu durumda (4.3) ve (4.4) denklemlerinden $\lambda = 0$ ve $\varphi(s) = s + c$ $(c \in \mathbb{R})$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. O halde ispat tamamlanır. □

4.1 4-boyutlu Öklid Uzayında Bitorsiyonu Sıfır Olan Kuaterniyonik Bertrand Eğrileri

Teorem 4.1'den açıkça görüldüğü üzere $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayındaki bilinen anlamda kuaterniyonik Bertrand eğrisinin tanımlanabilmesi için $r - K = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla bu bölümde $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayındaki uzaysal kuaterniyonik Bertrand eğrisi ile $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında bitorsiyonu sıfır olan kuaterniyonik Bertrand eğrisinin bazı özelliklerini vereceğiz.

Teorem 4.1.1. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ ve $\beta : I^* \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ yay parametreleri sırasıyla s ve s^* olan iki uzaysal kuaterniyonik eğri olsun. Bu iki eğrinin Frenet elemanları sırası ile $\{t, n, b, k, r\}$ ve $\{t^*, n^*, b^*, k^*, r^*\}$ olmak üzere eğer (α, β) uzaysal kuaterniyonik Bertrand eğri çifti ise $\forall s \in I$ için karşılık gelen noktalarındaki uzaklıklar sabittir.

İspat. Tanım 4.1'den

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + \lambda(s)n(s) \tag{4.5}$$

yazılabilir. Bu denklemden s parametresine göre türev alınıp Frenet eşitlikleri yazıldığında

$$\begin{aligned}
\frac{d\beta(s^*)}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} &= t(s) + \lambda'(s)n(s) + \lambda(s)n'(s) \\
t^*(s^*)\frac{ds^*}{ds} &= t(s) + \lambda'(s)n(s) + \lambda(s)[-k(s)t(s) + r(s)b(s)] \\
&= (1 - \lambda(s)k(s))t(s) + \lambda'(s)n(s) + \lambda(s)r(s)b(s)
\end{aligned}$$

bulunur ve buradan da

$$\begin{aligned}
h(t^*(s^*), n^*(s^*)) =& \frac{ds}{ds^*}\big[(1 - \lambda(s)k(s))h(t(s), n^*(s^*)) \\
&+ \lambda'(s)h(n(s), n^*(s^*)) + \lambda(s)r(s)h(b(s), n^*(s^*))\big]
\end{aligned}$$

elde edilir. α ve β Bertrand çifti olduğundan $\{n^*(s^*), n(s)\}$ lineer bağımlıdır. O halde $\lambda'(s) = 0$ elde edilir. Yani $d(\alpha(s), \beta(s)) = \lambda(s)$ I üzerinde sabit bir fonksiyondur. Bu da ispatı tamamlar.

□

Teorem 4.1.2. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ uzaysal bir kuaterniyonik eğri ve $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ ise α eğrisinin kuaterniyonik Bertrand çifti olsun. α ve β uzaysal kuaterniyonik eğrilerinin tanjant vektörleri arasındaki açı sabittir.

İspat. Kabul edelim ki

$$h(t(s), t^*(s^*)) = \cos\theta(s) \tag{4.6}$$

olsun. Bu denklemin s parametresine göre türevi alınarak

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}h(t(s), t^*(s^*)) &= h\left(\frac{dt(s)}{ds}, t^*(s^*)\right) + h\left(t(s), \frac{dt(s^*)}{ds^*}\frac{ds^*}{ds}\right) \\
-\sin\theta(s)\,\theta'(s) &= h(k(s)n(s), t^*(s^*)) + h(t(s), k^*(s^*)n^*(s^*)\frac{ds^*}{ds}) \\
-\sin\theta(s)\,\theta'(s) &= 0
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da $\theta'(s) = 0$ demektir. O halde θ açısı sabittir. □

Teorem 4.1.3. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ uzaysal kuaterniyonik eğri s yay parametresi ile verilsin. α uzaysal bir kuaterniyonik Bertrand eğrisi ise

$$\lambda_1 k(s) + \lambda_2 r(s) = 1$$

olacak şekilde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sabitleri vardır. Burada k ile α eğrisinin temel eğriliği, r ile de α eğrisinin burulması gösterilmiştir.

İspat. α uzaysal bir kuaterniyonik Bertrand eğrisi ve β, α eğrisinin kuaterniyonik Bertrand çifti olsun. Bu durumda

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda n(s)$$

yazılır. Bu eşitliğin s parametresine göre türevi alınıp Frenet denklemleri kullanılırsa

$$t^*(s^*) = \frac{ds}{ds^*}\left[(1 - \lambda k(s))t(s) + \lambda r(s)b(s)\right]$$

elde edilir. $\{n^*(s^*), n(s)\}$ lineer bağımlı olduğundan

$$t^*(s^*) = \cos\theta t(s) + \sin\theta b(s)$$

yazılabilir, burada

$$\cos\theta = (1 - \lambda k(s))\frac{ds}{ds^*} \quad \text{ve} \quad \sin\theta = \lambda r(s)\frac{ds}{ds^*} \tag{4.7}$$

biçimindedir. O halde

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1 - \lambda k(s)}{\lambda r(s)}$$

elde edilir. $c = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ alınırsa

$$\lambda k(s) + c\lambda r(s) = 1$$

bulunur. $\lambda = \lambda_1$ ve $c\lambda = \lambda_2$ alınarak ispat tamamlanır.

□

Teorem 4.1.4. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ ve $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$, sırasıyla, s ile s^* yay parametrelerine sahip uzaysal kuaterniyonik eğriler olsunlar. Eğer (α, β), $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında uzaysal kuaterniyonik Bertrand eğri çifti ise, α ve β eğrilerinin karşılık gelen noktalarındaki burulmaları çarpımı sabittir.

İspat. β, α eğrisinin uzaysal kuaterniyonik Bertrand çifti olsun. Buna göre

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda n(s)$$

yazılır. (4.7) denkleminden $\sin\theta = \lambda r(s)\dfrac{ds}{ds^*}$ biliyoruz. Diğer yandan eğer α ve β eğrilerinin pozisyonu değiştirilirse

$$\alpha(s) = \beta(s) - \lambda n^*(s^*) \tag{4.8}$$

elde edilir. Bu denklemin s parametresine göre türevi alınarak

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha(s)}{ds} &= \frac{d\beta(s^*)}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} - \lambda\frac{dn^*(s^*)}{ds^*}\frac{ds^*}{ds}\\ t(s) &= t^*(s^*)\frac{ds^*}{ds} - \lambda\frac{ds^*}{ds}\Big(- k^*(s^*)t^*(s^*) + r^*(s^*)b^*(s^*)\Big)\end{aligned}$$

bulunur. Buradan da

$$t(s) = (1 + \lambda k^*(s^*))\frac{ds^*}{ds}t^*(s^*) - \lambda r^*(s^*)\frac{ds^*}{ds}b^*(s^*) \tag{4.9}$$

elde edilir. $h(t(s), t^*(s)) = \cos\theta$ olduğundan

$$t(s) = \cos\theta t^*(s^*) + \sin\theta b^*(s^*) \tag{4.10}$$

yazılabilir, burada

$$\cos\theta = (1 + \lambda k^*(s^*))\frac{ds^*}{ds} \quad \text{ve} \quad \sin\theta = -\lambda r^*(s^*)\frac{ds^*}{ds} \tag{4.11}$$

biçimindedir. (4.7) ve (4.11) denklemlerinden

$$r(s)r^*(s^*) = -\frac{\sin^2\theta}{\lambda^2} = \text{sabit}$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

□

Teorem 4.1.5. $\alpha^{(4)} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$ ve $\beta^{(4)} : \bar{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$, sırasıyla, s ve $\bar{s}$ yay parametreli iki kuaterniyonik eğri olsun. s ve $\bar{s}$ de sırasıyla α ile β'nın yay paramatreleri olsun. Eğer $(\alpha^{(4)}, \beta^{(4)})$ Bertrand eğri çifti ise $\forall s \in I$ için karşılık gelen noktalardaki uzaklıklar sabittir.

İspat. $\beta^{(4)}$, $\alpha^{(4)}$ eğrisinin kuaterniyonik Bertrand eğri çifti olsun. Bu durumda

$$\beta^{(4)}(\bar{s}) = \alpha^{(4)}(s) + \lambda(s)N(s)$$

yazılabilir. Bu denklemin s parametresine göre türevi alınıp Frenet denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\frac{d\beta^{(4)}(\bar{s})}{d\bar{s}}\frac{d\bar{s}}{ds} &= T(s) + \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) \\
\bar{T}(\bar{s})\frac{d\bar{s}}{ds} &= T(s) + \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)[-K(s)T(s) + k(s)B_1(s)] \\
&= (1 - \lambda(s)K(s))T(s) + \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)k(s)B_1(s)
\end{aligned}$$

bulunur ve buradan da

$$\begin{aligned}
h(\bar{T}(\bar{s}), \bar{N}(\bar{s})) =& \frac{ds}{d\bar{s}}\big[(1 - \lambda(s)K(s))h(T(s), \bar{N}(\bar{s})) \\
&+ \lambda'(s)h(N(s), \bar{N}(\bar{s})) + \lambda(s)k(s)h(B_1(s), \bar{N}(\bar{s}))\big]
\end{aligned}$$

elde edilir. $\{N(s), \bar{N}(\bar{s})\}$ lineer bağımlı olduğundan $\lambda'(s) = 0$ bulunur. Buradan $d(\alpha^{(4)}(s), \beta^{(4)}(s)) = \lambda(s)$, I üzerinde sabit bir fonksiyondur ki bu da ispatı tamamlar. □

Teorem 4.1.6. $\alpha^{(4)} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$ bir kuaterniyonik Bertrand eğrisi ve $\beta^{(4)} : \bar{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$ eğrisi de $\alpha^{(4)}$ eğrisinin kuaterniyonik Bertrand eğri çifti olsun. $\alpha^{(4)}$ ve $\beta^{(4)}$ kuaterniyonik eğrilerinin tanjant vektörleri arasındaki açı sabittir.

İspat. $h(T(s), \bar{T}(\bar{s})) = \cos\phi(s)$ olsun. Bu ifadenin s parametresine göre türevi alınıp Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}h(T(s), \bar{T}(\bar{s})) &= h\left(\frac{dT(s)}{ds}, \bar{T}(\bar{s})\right) + h\left(T(s), \frac{d\bar{T}(\bar{s})}{d\bar{s}}\frac{d\bar{s}}{ds}\right) \\
-\sin\phi(s)\,\phi'(s) &= h(K(s)N(s), \bar{T}(\bar{s})) + h(T(s), \bar{K}(\bar{s})\bar{N}(\bar{s})\frac{d\bar{s}}{ds}) \\
-\sin\phi(s)\,\phi'(s) &= 0
\end{aligned}$$

bulunur buradan da $\phi(s) =$ sabit elde edilir. □

Teorem 4.1.7. Bir $\alpha^{(4)} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$ kuaterniyonik Bertrand eğrisinin yay parametresi s, burulması $k \neq 0$ ve bitorsiyonu $r - K = 0$ olsun. Bu durumda $\alpha^{(4)}$ eğrisinin bir kuaterniyonik Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter şart

$$\lambda K(s) + \mu k(s) = 1$$

olacak şekilde λ ve μ reel sabitlerinin olmasıdır.

İspat. $\beta^{(4)}$, $\alpha^{(4)}$ eğrisinin bir kuaterniyonik Bertrand çifti olsun. O halde

$$\beta^{(4)}(\bar{s}) = \alpha^{(4)}(s) + \lambda N(s)$$

yazılır. s parametresine göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d\beta^{(4)}(\bar{s})}{d\bar{s}}\frac{d\bar{s}}{ds} &= \frac{d\alpha^{(4)}(s)}{ds} + \lambda N'(s) \\ &= \bar{T}(\bar{s}) = \frac{ds}{d\bar{s}}\big[(1 - \lambda K(s))T(s) + \lambda k(s)B_1(s)\big] \end{aligned}$$

elde edilir. $h(T(s), \bar{T}(\bar{s})) = \cos\phi$ alınırsa

$$\bar{T}(\bar{s}) = \cos\phi T(s) + \sin\phi B_1(s)$$

bulunur, burada

$$\cos\phi = (1 - \lambda K(s))\frac{ds}{d\bar{s}} \tag{4.12}$$

ve

$$\sin\phi = \lambda k(s)\frac{ds}{d\bar{s}} \tag{4.13}$$

biçimindedir. Dolayısıyla $\lambda\cot\phi = \mu$ alınarak

$$\lambda K(s) + \mu k(s) = 1$$

elde edilir.

Tersine, $\alpha^{(4)} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$ bir kuaterniyonik eğri olsun ve $\lambda K(s) + \mu k(s) = 1$ olacak şekilde λ ve μ reel sayıları mevcut olsun.

$$\beta^{(4)}(\bar{s}) = \alpha^{(4)}(s) + \lambda N(s) \tag{4.14}$$

eğrisini alalım. s parametresine göre türev alınırsa

$$\frac{d\beta^{(4)}(\bar{s})}{d\bar{s}}\frac{d\bar{s}}{ds} = (1-\lambda K(s))T(s) + \lambda k(s)B_1(s)$$

elde edilir. Hipotezden $1-\lambda K(s) = \mu k(s)$ denirse

$$\bar{T}(\bar{s})\frac{d\bar{s}}{ds} = k(s)\big(\mu T(s) + \lambda B_1(s)\big)$$

bulunur. Her iki tarafın normu alınarak $\frac{d\bar{s}}{ds} = |k(s)|\sqrt{\lambda^2+\mu^2}$ elde edilir. O halde

$$\bar{T}(\bar{s}) = \frac{k(s)}{|k(s)|\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}(\mu T(s) + \lambda B_1(s))$$

yazılır. $A = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}$ alınarak

$$\bar{T}(\bar{s}) = \pm A(\mu T(s) + \lambda B_1(s)) \tag{4.15}$$

bulunur. Son denklemin s parametresine göre türevi alınıp Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\bar{K}(\bar{s})\bar{N}(\bar{s}) &= \pm A\frac{ds}{d\bar{s}}[\mu K(s) - \lambda k(s)]N(s) \\ &= \pm\frac{1}{|k(s)|}A^2[\mu K(s) - \lambda k(s)]N(s) \qquad (\frac{ds}{d\bar{s}} = \frac{1}{|k(s)|}A \text{ olduğundan})\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da $N(s)$ ile $\bar{N}(\bar{s})$ vektörlerinin lineer bağımlı olduğunu söyler. O halde $\beta^{(4)}$ kuaterniyonik eğrisi $\alpha^{(4)}$ eğrisinin kuaterniyonik Bertrand çifti olur ki bu da ispatı tamamlar.

□

Teorem 4.1.8. $\alpha^{(4)} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$ ve $\beta^{(4)} : \bar{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$ kuaterniyonik eğrileri sırasıyla s ve $\bar{s}$ yay parametrelerine sahip olsun. Eğer $\{\alpha^{(4)}, \beta^{(4)}\}$ bir kuaterniyonik Bertrand çifti ise, α ve β eğrilerinin karşılık gelen noktalarındaki burulmaları çarpımı sabittir.

İspat. $\beta^{(4)}$, $\alpha^{(4)}$ eğrisinin kuaterniyonik Bertrand çifti olsun. Bu durumda

$$\beta^{(4)}(\bar{s}) = \alpha^{(4)}(s) + \lambda N(s)$$

yazılabilir. Eğer $\alpha^{(4)}$ ve $\beta^{(4)}$ eğrilerinin pozisyonları değiştirilirse

$$\alpha^{(4)}(s) = \beta^{(4)}(\bar{s}) - \lambda\bar{N}(\bar{s}) \tag{4.16}$$

yazılabilir. Bu denklemin s parametresine göre türevi alınır ve Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\frac{d\alpha^{(4)}(s)}{ds} = \frac{d\beta^{(4)}(\bar{s})}{d\bar{s}}\frac{d\bar{s}}{ds} - \lambda\frac{d\bar{N}(\bar{s})}{d\bar{s}}\frac{d\bar{s}}{ds}$$
$$T(s) = (1+\lambda\bar{K}(\bar{s}))\bar{T}(\bar{s})\frac{d\bar{s}}{ds} - \lambda\bar{k}(\bar{s})\bar{B}_1(\bar{s})\frac{d\bar{s}}{ds}$$

elde edilir. $h(T(s), \bar{T}(\bar{s})) = \cos\phi$ alınırsa

$$T(s) = \cos\phi\bar{T}(\bar{s}) + \sin\phi\bar{B}_1(\bar{s})$$

bulunur, burada

$$\cos\phi = (1+\lambda\bar{K}(\bar{s}))\frac{d\bar{s}}{ds} \tag{4.17}$$

ve

$$\sin\phi = -\lambda\bar{k}(\bar{s})\frac{d\bar{s}}{ds} \tag{4.18}$$

biçimindedir. (4.13) ve (4.18) denklemleri taraf tarafa çarpılırsa

$$k(s)\bar{k}(\bar{s}) = -\frac{\sin^2\phi}{\lambda^2} = \text{sabit}$$

elde edilir □

.

Teorem 4.1.9. $\alpha^{(4)} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$ ve $\beta^{(4)} : \bar{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$ kuaterniyonik eğrilerinin yay parametreleri sırasıyla s ve $\bar{s}$ olsun. $\alpha^{(4)}$'ün eğrilikleri $K(s), k(s)$ ve $\beta^{(4)}$ eğrisinin eğrilikleri $\bar{K}(\bar{s}), \bar{k}(\bar{s})$ olmak üzere eğer $(\alpha^{(4)}, \beta^{(4)})$ kuaterniyonik Bertrand çifti ise,

$$\mu(k(s) + \bar{k}(\bar{s})) + \lambda(K(s) + \bar{K}(\bar{s})) = 0$$

eşitliği sağlanır, burada λ, μ reel sabitlerdir.

İspat. $(\alpha^{(4)}, \beta^{(4)})$ $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında bir kuaterniyonik Bertrand eğri çifti olsun. (4.12) ve (4.13) eşitlikleri taraf tarafa bölünerek

$$\frac{\cos\phi}{\sin\phi} = \frac{(1-\lambda K(s))\dfrac{ds}{d\bar{s}}}{\lambda k(s)\dfrac{ds}{d\bar{s}}},$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.17) ve (4.18) denklemleri taraf tarafa bölünerek

$$\frac{\cos\phi}{\sin\phi} = -\frac{(1+\lambda \bar{K}(\bar{s}))\dfrac{d\bar{s}}{ds}}{\lambda \bar{k}(\bar{s})\dfrac{d\bar{s}}{ds}},$$

bulunur. $\lambda\dfrac{\cos\phi}{\sin\phi} = \mu$ alınırsa

$$\mu k(s) + \lambda K(s) = 1 \tag{4.19}$$

ve

$$\mu \bar{k}(\bar{s}) + \lambda \bar{K}(\bar{s}) = -1 \tag{4.20}$$

elde edilir. (4.19) ve (4.20) denklemlerinden

$$\mu(k(s) + \bar{k}(\bar{s})) + \lambda(K(s) + \bar{K}(\bar{s})) = 0$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

□

Teorem 4.1.10. $\alpha^{(4)} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$ bitorsiyonu $(r - K)(s) = 0$ olan kuaterniyonik bir eğri olsun. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ eğrisi de $\alpha^{(4)}$ kuaterniyonik eğrisi ile ilişkili uzaysal kuaterniyonik bir eğri olsun. Buna göre α eğrisinin bir uzaysal kuaterniyonik Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter şart $\alpha^{(4)}$ eğrisinin bir kuaterniyonik Bertrand eğrisi olmasıdır.

İspat. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ bir uzaysal kuaterniyonik Bertrand eğrisi olsun. β ise α eğrisinin uzaysal kuaterniyonik Bertrand eğrisi olsun. Bu durumda

$$\lambda k(s) + \mu r(s) = 1$$

olacak şekilde λ ve μ reel sabitleri vardır, burada $k(s)$ ve $r(s)$, α eğrisinin eğrilikleridir. Ayrıca λ ise α ve β kuaterniyonik Bertrand eğrilerinin karşılık gelen noktaları arasındaki uzaklıktır.

$\alpha^{(4)}(s)$ kuaterniyonik eğrisinin bitorsiyonu sıfır olduğundan dolayı $r = K$ olup

$$\mu K(s) + \lambda k(s) = 1$$

elde edilir. O halde $\alpha^{(4)}$ bir kuaterniyonik Bertrand eğrisidir.

Tersine, $r - K = 0$ yani $K = r$ olduğundan açıkça görülür ki eğer $\alpha^{(4)}$ kuaterniyonik bir Bertrand eğrisi ise, α uzaysal kuaterniyonik Bertrand eğrisidir. □

Şimdi bu teoremi doğrulamak için $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayındaki $\alpha^{(4)}$ ve $\beta^{(4)}$ kuaterniyonik Bertrand eğrileri ve onlarla ilişkili $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayındaki α ve β uzaysal kuaterniyonik Bertrand eğrileri ile ilgili bir örnek verelim.

Örnek 4.1.1. $\alpha^{(4)} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$ olmak üzere

$$\alpha^{(4)}(s) = \left(\cos \frac{s}{\sqrt{3}}, \sin \frac{s}{\sqrt{3}}, \frac{s}{\sqrt{3}}, \frac{s}{\sqrt{3}} \right)$$

olarak tanımlanmış bir kuaterniyonik eğri verilsin. Bu eğri regüler ve yay parametresi s'dir. $\alpha^{(4)}$ kuaterniyonik eğrisinin eğrilikleri $K(s) = \dfrac{1}{3}$, $k(s) = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ ve $(r - K)(s) = 0$ şeklindedir. $\{T, N, B_1, B_2\}$ $\alpha^{(4)}$ kuaterniyonik eğrisinin Frenet vektörleri olmak üzere $N(s) \times_C T(s) = t(s)$ olacak şekilde $\alpha(s)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisi

$$\alpha(s) = \left(-(\cos \frac{s}{\sqrt{3}} + \sin \frac{s}{\sqrt{3}}), \cos \frac{s}{\sqrt{3}} - \sin \frac{s}{\sqrt{3}}, \frac{s}{\sqrt{3}} \right)$$

olarak verilir. Bu durumda α eğrisinin birinci ve ikinci eğriliği sırasıyla $k(s) = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ ve $r(s) = \dfrac{1}{3}$ biçimindedir. α eğrisi bir uzaysal kuaterniyonik Bertrand eğrisidir. Çünkü $\lambda = 2\sqrt{2}$ ve $\mu = -1$ için $\lambda k(s) + \mu r(s) = 1$ şartını sağlar. α eğrisinin Bertrand çifti

$$\begin{aligned} \beta(s) &= \alpha(s) + \lambda n(s) \\ &= \left(-(\cos \frac{s}{\sqrt{3}} + \sin \frac{s}{\sqrt{3}}), \cos \frac{s}{\sqrt{3}} - \sin \frac{s}{\sqrt{3}}, \frac{s}{\sqrt{3}} \right) \\ &\quad + 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{s}{\sqrt{3}} + \sin \frac{s}{\sqrt{3}}, -\cos \frac{s}{\sqrt{3}} + \sin \frac{s}{\sqrt{3}}, \frac{s}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

biçimindedir. Diğer yandan $\lambda = 2\sqrt{2}$ ve $\mu = -1$ için $\mu K(s) + \lambda k(s) = 1$ olduğundan dolayı $\alpha^{(4)}$ bir kuaterniyonik Bertrand eğrisidir. Bu eğrinin kuaterniyonik Bertrand çifti

$$\begin{aligned}\beta^{(4)}(s) &= \alpha^{(4)}(s) + \mu N(s) \\ &= \left(\cos\frac{s}{\sqrt{3}}, \sin\frac{s}{\sqrt{3}}, \frac{s}{\sqrt{3}}, \frac{s}{\sqrt{3}}\right) \\ &\quad - \left(-\cos\frac{s}{\sqrt{3}}, -\sin\frac{s}{\sqrt{3}}, 0, 0\right) \\ &= \left(2\cos\frac{s}{\sqrt{3}}, 2\sin\frac{s}{\sqrt{3}}, \frac{s}{\sqrt{3}}, \frac{s}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$

biçimindedir.

4.2 4-boyutlu Öklid Uzayında Bitorsiyonu Sıfırdan Farklı Olan Kuaterniyonik Bertrand Eğrileri

Bu bölümde Keçilioğlu ve İlarslan (2013)'ın yayımladıkları çalışmalarında yer alan $(N - B_2)$ kuaterniyonik Bertrand eğrisi tanımını ve karakterizasyonlarını vereceğiz. Bu bölümü 4.1 bölümünden ayıran en önemli özelik ele alınan kuaterniyonik eğrilerin bitorsiyonun sıfırdan farklı olmasıdır.

Tanım 4.2.1. $\alpha^{(4)}(s) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$ ve $\beta^{(4)}(\bar{s}) : \bar{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$ kuaterniyonik eğriler ve $\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$ ile $\{\bar{T}(\bar{s}), \bar{N}(\bar{s}), \bar{B}_1(\bar{s}), \bar{B}_2(\bar{s})\}$ de sırasıyla bu eğrilerin Frenet çatıları olsun. $\varphi : I \to \bar{I}$, $s \mapsto \varphi(s) = \bar{s}$ $(\frac{d\bar{s}}{ds} \neq 0)$ birebir örten dönüşümü α eğrisinin noktalarını β eğrisinin noktalarına eşleyen bir dönüşüm olsun. Her $s \in I$ için $\alpha(s)$ noktasında $(N - B_2)$ normal düzlemi ile $\beta(\varphi(s)) = \beta(\bar{s})$ noktasındaki $(\bar{N} - \bar{B}_2)$ normal düzlemi çakışıyorsa $\alpha^{(4)}$ eğrisine kuaterniyonik $(N - B_2)$ Bertrand eğrisi, $\beta^{(4)}$ eğrisine de $\alpha^{(4)}$ eğrisinin kuaterniyonik $(N - B_2)$ Bertrand çifti denir (Keçilioğlu ve İlarslan 2013).

Teorem 4.2.1. $\alpha^{(4)} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$ bir kuaterniyonik eğri olmak üzere K, k ve $r - K \neq 0$ bu eğrinin eğrilik fonksiyonlarını göstersin. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$, $\alpha^{(4)}$ ile

ilişkili uzaysal bir kuaterniyonik eğri ve r ile k bu eğrinin eğrilikleri olsun. Buna göre $\alpha^{(4)}$'ün bir kuaterniyonik $(N - B_2)$ Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter şart her $s \in I$ için

(i) $\lambda k(s) - \mu(r - K)(s) \neq 0$,

(ii) $\gamma[\lambda k(s) - \mu(r - K)(s)] + \lambda K(s) = 1$,

(iii) $\gamma K(s) - k(s) = \delta(r - K)(s)$,

(iv) $(\gamma^2 - 1)K(s)k(s) + \gamma\{2r(s)K(s) - k^2(s) - r^2(s)\} = 0$

şartlarının sağlanmasıdır. Burada $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, γ ve δ reel sabitlerdir (Keçilioğlu ve İlarslan 2013).

İspat. Teorem 3.1.2'nin ispatına benzer şekilde yapılabilir.

□

Sonuç 4.2.1. $\alpha^{(4)} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$ bir kuaterniyonik $(N - B_2)$ Bertrand eğri ve $\beta^{(4)}$ ise bu eğrinin kuaterniyonik $(N - B_2)$ Bertrand çifti olsun. $\alpha^{(4)}$ eğrisinin eğrilikleri $K(s)$, $k(s)$, $(r - K)(s)$ ve $\beta^{(4)}$ eğrisinin eğrilikleri $\bar{K}(\varphi(s))$, $\bar{k}(\varphi(s))$, $(\bar{r} - \bar{K})(\varphi(s))$ olmak üzere bu eğrilikler arasında aşağıdaki ilişkiler vardır:

$$\bar{K}(\varphi(s)) = \frac{\sqrt{(\gamma K(s) - k(s))^2 + (r - K)^2(s)}}{\varphi'(s)\sqrt{\gamma^2 + 1}}$$

$$\bar{k}(\varphi(s)) = \frac{|\gamma(K^2(s) - k^2(s) - (r - K)^2(s)) + (\gamma^2 - 1)K(s)k(s)|}{\varphi'(s)\sqrt{\gamma^2 + 1}\sqrt{(\gamma K(s) - k(s))^2 + (r - K)^2(s)}}$$

$$(\bar{r} - \bar{K})(\varphi(s)) = \frac{\sqrt{\gamma^2 + 1}(r - K)(s)K(s)}{\varphi'(s)\sqrt{(\gamma K(s) - k(s))^2 + (r - K)^2(s)}}$$

Şimdi bazı yeni özelikler elde edeceğiz. Ayrıca $\alpha^{(4)}$ ve $\beta^{(4)}$ kuaterniyonik $(N - B_2)$ Bertrand çifti ve onların ilişkili olduğu α ve β uzaysal kuaterniyonik Bertrand eğrileri ile ilgili karakterizasyonlar ve bir örnek vereceğiz.

Teorem 4.2.2. $\alpha^{(4)} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$ bir kuaterniyonik $(N - B_2)$ Bertrand eğrisi ve $\beta^{(4)}$ eğrisi de bu eğrinin kuaterniyonik $(N - B_2)$ Bertrand çifti olsun. Bu durumda karşılık gelen $\alpha^{(4)}(s)$ ve $\beta^{(4)}(\varphi(s))$ noktaları arasındaki uzaklık sabittir.

İspat. $\alpha^{(4)} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$ bir kuaterniyonik $(N - B_2)$ Bertrand eğrisi ve $\beta^{(4)}$ eğrisi de bu eğrinin bir kuaterniyonik $(N - B_2)$ Bertrand çifti olsun. $\beta^{(4)}$ eğrisinin $\alpha^{(4)}$ eğrisinden farklı olduğunu kabul ediyoruz. Bu durumda

$$\beta^{(4)}(\bar{s}) = \beta^{(4)}(\varphi(s)) = \alpha^{(4)}(s) + \lambda N(s) + \mu B_2(s)$$

yazılabilir. Burada λ ve μ sıfırdan farklı sabitlerdir. Böylece

$$\beta^{(4)}(\bar{s}) - \alpha^{(4)}(s) = \lambda N(s) + \mu B_2(s)$$

yazılabilir. Her iki taraftan norm alınarak

$$\|\beta^{(4)}(\bar{s}) - \alpha^{(4)}(s)\| = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} = sbt,$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

□

Örnek 4.2.1. $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında bir $\alpha^{(4)} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$ kuaterniyonik eğrisi

$$\alpha^{(4)}(s) = \Big(\cos(\frac{2s}{\sqrt{5}}), \sin(\frac{2s}{\sqrt{5}}), \cos(\frac{s}{\sqrt{5}}), \sin(\frac{s}{\sqrt{5}})\Big)$$

biçiminde tanımlansın. $\alpha^{(4)}$ eğrisi düzgün bir eğridir. Kısalık için $s/\sqrt{5} = \theta$ alınarak Frenet vektörleri

$$\begin{aligned}
T(s) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(-2\sin 2\theta, 2\cos 2\theta, -\sin\theta, \cos\theta\Big),\\
N(s) &= \frac{1}{\sqrt{17}}\Big(-4\cos 2\theta, -4\sin 2\theta, -\cos\theta, -\sin\theta\Big),\\
B_1(s) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\sin 2\theta, -\cos 2\theta, -2\sin\theta, 2\cos\theta\Big),\\
B_2(s) &= \frac{1}{\sqrt{17}}\Big(\cos 2\theta, \sin 2\theta, -4\cos\theta, -\sin\theta\Big),
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan eğrilikleri

$$K = \frac{17}{5\sqrt{17}}, \quad k = \frac{6}{5\sqrt{17}}, \quad r - K = \frac{10}{5\sqrt{17}}$$

biçiminde elde edilir. $\alpha^{(4)}$ eğrisi ile ilişkili uzaysal kuaterniyonik eğri

$$\alpha(s) = \frac{1}{3\sqrt{17}}(9\theta, 2\cos 3\theta, 2\sin 3\theta)$$

olup eğrilikleri $k = \frac{6}{5\sqrt{17}}$ ve $r = \frac{27}{5\sqrt{17}}$ biçimindedir. $\alpha^{(4)}$ eğrisi $\lambda = 5\sqrt{17}$, $\mu = -5\sqrt{17}$, $\gamma = -1$ ve $\delta = -\frac{23}{10}$ için bir $(N - B_2)$ Bertrand eğrisidir. Gerçekten

$$\lambda k - \mu(r - K) = 5\sqrt{17}\frac{6}{5\sqrt{17}} + 5\sqrt{17}\frac{10}{5\sqrt{17}} = 16 \neq 0,$$

$$\gamma[\lambda k - \mu(r - K)] + \lambda K = (-1)16 + 5\sqrt{17}\frac{17}{5\sqrt{17}} = 1,$$

$$\gamma K - k = -\frac{17}{5\sqrt{17}} - \frac{6}{5\sqrt{17}} = \frac{-23}{5\sqrt{17}} = (-\frac{23}{10})\frac{10}{5\sqrt{17}} = \delta(r - K),$$

ve

$$(\gamma^2 - 1)Kk + \gamma\{2rK - k^2 - r^2\} = (-1)\frac{2 \cdot 18 \cdot 17 - 36 - 18 \cdot 18}{25 \cdot 17} = -\frac{18 \cdot 14}{25 \cdot 17} \neq 0$$

olduğundan dolayı Teorem 4.2.1'in şartları sağlanır. O halde $\alpha^{(4)}$ eğrisi $\lambda = 5\sqrt{17}$, $\mu = -5\sqrt{17}$, $\gamma = -1$ ve $\delta = -\frac{23}{10}$ için bir kuaterniyonik $(N - B_2)$ Bertrand eğrisidir. $\alpha^{(4)}$ eğrisinin kuaterniyonik $(N - B_2)$-Bertrand eğri çifti $\beta^{(4)}$ eğrisi

$$\begin{aligned}\beta^{(4)}(\bar{s}) &= \alpha^{(4)}(s) + \lambda N(s) + \mu B_2(s) \\ &= (\cos 2\theta, \sin 2\theta, \cos\theta, \sin\theta) + 5\sqrt{17}\frac{1}{\sqrt{17}}(-4\cos 2\theta, -4\sin 2\theta, -\cos\theta, -\sin\theta) \\ &\quad -5\sqrt{17}\frac{1}{\sqrt{17}}(\cos 2\theta, \sin 2\theta, -4\cos\theta, -4\sin\theta).\end{aligned}$$

olup

$$\beta^{(4)}(\bar{s}) = 8(-3\cos 2\theta, -3\sin 2\theta, 2\cos\theta, 2\sin\theta)$$

biçiminde elde edilir, burada $\bar{s} = \varphi(s) = 16\sqrt{2}s$ olup $\frac{d\bar{s}}{ds} = \varphi'(s) = 16\sqrt{2}$ ve $\theta = \frac{s}{\sqrt{5}} = \frac{\bar{s}}{16\sqrt{10}}$'dir. Buradan

$$\beta^{(4)}(\bar{s}) = 8(-3\cos\frac{\bar{s}}{8\sqrt{10}}, -3\sin\frac{\bar{s}}{8\sqrt{10}}, 2\cos\frac{\bar{s}}{16\sqrt{10}}, 2\sin\frac{\bar{s}}{16\sqrt{10}})$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$\frac{d\beta^{(4)}(\bar{s})}{d\bar{s}} = \frac{8}{16\sqrt{10}}(6\sin 2\theta, -6\cos 2\theta, -2\sin\theta, 2\cos\theta)$$

olup

$$\begin{aligned}\bar{T}(\bar{s}) &= \frac{1}{\sqrt{10}}(3\sin 2\theta, -3\cos 2\theta, -\sin\theta, \cos\theta) \\ &= \underbrace{\frac{3}{\sqrt{10}}\sin 2\theta}_{S_{\bar{T}}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{10}}(-3\cos 2\theta, -\sin\theta, \cos\theta)}_{V_{\bar{T}}}\end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$\frac{d\bar{T}(\bar{s})}{d\bar{s}} = \frac{1}{160}(6\cos 2\theta, 6\sin 2\theta, -\cos\theta, -\sin\theta)$$

olup $\|\frac{d\bar{T}(\bar{s})}{d\bar{s}}\| = \frac{\sqrt{37}}{160}$ elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}\bar{N}(\bar{s}) &= \frac{1}{\sqrt{37}}(6\cos 2\theta, 6\sin 2\theta, -\cos\theta, -\sin\theta) \\ &= \underbrace{\frac{6}{\sqrt{37}}\cos 2\theta}_{S_{\bar{N}}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{37}}(6\sin 2\theta, -\cos\theta, -\sin\theta)}_{V_{\bar{N}}}\end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned}\bar{N} \times C\bar{T} &= (S_{\bar{N}} + V_{\bar{N}}) \times (S_{\bar{T}} - V_{\bar{T}}) \\ &= -S_{\bar{N}}V_{\bar{T}} + S_{\bar{T}}V_{\bar{N}} + V_{\bar{T}} \wedge V_{\bar{N}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{370}}(19, 3\sin 3\theta, -3\cos 3\theta)\end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\bar{t}(\bar{s}) = \frac{1}{\sqrt{370}}(19, 3\sin 3\theta, -3\cos 3\theta)$$

yazılabilir. $\bar{N} \times C\bar{T} = \bar{t}$ olacak şekilde $\beta(\bar{s})$ uzaysal kuaterniyonik eğriyi bulalım. Son denklemden $\bar{s}$'ye göre integral alınarak

$$\beta(\bar{s}) = \frac{16}{\sqrt{37}}(19\theta, -\cos 3\theta, \sin 3\theta)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\frac{d\bar{t}(\bar{s})}{d\bar{s}} = \frac{1}{160\sqrt{37}}(0, 9\cos 3\theta, 9\sin 3\theta)$$

olup

$$\left\| \frac{d\bar{t}(\bar{s})}{d\bar{s}} \right\| = \frac{9}{160\sqrt{37}}$$

elde edilir. Buradan da

$$\bar{n}(\bar{s}) = (0, \cos 3\theta, \sin 3\theta)$$

bulunur. O halde

$$\bar{b}(\bar{s}) = \bar{t}(\bar{s}) \wedge \bar{n}(\bar{(s)}) = \frac{1}{\sqrt{370}}(3, -19\sin 3\theta, 19\cos 3\theta)$$

biçimindedir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \bar{B}_1 = \bar{n} \times \bar{T} &= -\langle \bar{n}, V_{\bar{T}} \rangle + S_{\bar{T}}\bar{n} + \bar{n} \wedge V_{\bar{T}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{10}}(-\sin 2\theta, \cos 2\theta, -3\sin\theta, 3\cos\theta) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \bar{B}_2 = \bar{b} \times \bar{T} &= -\langle \bar{b}, V_{\bar{T}} \rangle + S_{\bar{T}}\bar{b} + \bar{b} \wedge V_{\bar{T}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{37}}(-\cos 2\theta, -\sin 2\theta, -6\cos\theta, -6\sin\theta) \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. Şimdi $\beta^{(4)}(\bar{s})$ eğrisinin eğriliklerini hesaplayalım. Kolayca gösterilebilir ki

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{T}(\bar{s})}{d\bar{s}} &= \frac{1}{160}(6\cos 2\theta, 6\sin 2\theta, -\cos\theta, -\sin\theta) \\ \frac{d\bar{N}(\bar{s})}{d\bar{s}} &= \frac{1}{16\sqrt{370}}(-12\sin 2\theta, 12\cos 2\theta, \sin\theta, -\cos\theta) \\ \frac{d\bar{B}_1(\bar{s})}{d\bar{s}} &= \frac{1}{160}(-2\cos 2\theta, -2\sin 2\theta, -3\cos\theta, -3\sin\theta) \end{aligned}$$

biçimindedir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \bar{K} &= h(\frac{d\bar{T}}{d\bar{s}}, \bar{N}) = \frac{\sqrt{37}}{160} \\ \bar{k} &= h(\frac{d\bar{N}}{d\bar{s}}, \bar{B}_1) = \frac{9}{160\sqrt{37}} \\ \bar{r} - \bar{K} &= h(\frac{d\bar{B}_1}{d\bar{s}}, \bar{B}_2) = \frac{20}{160\sqrt{37}} \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan $\beta(\bar{s})$ eğrisinin eğrilikleri

$$\begin{aligned} \bar{k} &= h(\frac{d\bar{t}}{d\bar{s}}, \bar{n}) = \frac{9}{160\sqrt{37}} \\ \bar{r} &= h(\frac{d\bar{n}}{d\bar{s}}, \bar{b}) = \frac{57}{160\sqrt{37}} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Tanım 4.2.2. $\alpha^{(4)}$ ve $\beta^{(4)}$ kuaterniyonik eğriler olmak üzere, $\{T, N, B_1, B_2\}$ ile $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}_1, \bar{B}_2\}$, sırasıyla, bu eğrilerin Frenet çatılarını göstersin. Eğer $\alpha^{(4)}$ ve $\beta^{(4)}$ eğrilerinin tanjant vektörleri arasındaki açı sabit ise, $(\alpha^{(4)}, \beta^{(4)})$ çiftine kuaterniyonik eğimli eğri çifti adı verilir.

Teorem 4.2.3. $\alpha^{(4)} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$ bir kuaterniyonik $(N - B_2)$ Bertrand eğrisi olsun ve $\beta^{(4)}$'de $\alpha^{(4)}$'ün kuaterniyonik $(N - B_2)$ Bertrand eğri çifti olsun. Eğer $(\alpha^{(4)}, \beta^{(4)})$ bir kuaterniyonik $(N-B_2)$ Bertrand eğri çifti ise, $(\alpha^{(4)}, \beta^{(4)})$ bir kuaterniyonik eğimli eğri çiftidir.

İspat. $\alpha^{(4)}$ bir kuaterniyonik $(N-B_2)$ Bertrand eğrisi ve $\beta^{(4)}$ eğrisi de $\alpha^{(4)}$ eğrisinin $(N-B_2)$ Bertrand eğri çifti olsun. s ve $\bar{s}$ de sırasıyla bu eğrilerin yay parametrelerini göstersin. Buna göre

$$\beta^{(4)}(\bar{s}) = \beta^{(4)}(\varphi(s)) = \alpha^{(4)}(s) + \lambda(s)N(s) + \mu(s)B_2(s) \tag{4.21}$$

yazılır. s parametresine göre türev alınıp Frenet denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} T(\varphi(s))\varphi'(s) = \; & [1 - \lambda(s)K(s)]T(s) + \lambda'(s)N(s) \\ & +[\lambda(s)k(s) - \mu(s)(r - K)(s)]B_1(s) + \mu'(s)B_2(s) \end{aligned} \tag{4.22}$$

elde edilir. $\text{span}\{\bar{N}(\varphi(s)), \bar{B}_2(\varphi(s))\} = \text{span}\{N(s), B_2(s)\}$ olduğundan

$$\bar{N}(\varphi(s)) = m(s)N(s) + n(s)B_2(s) \tag{4.23}$$

$$\bar{B}_2(\varphi(s)) = p(s)N(s) + q(s)B_2(s) \tag{4.24}$$

yazılabilir. Son iki denklemden

$$g(\bar{N}(\varphi(s)), \bar{T}(\varphi(s))\varphi'(s)) = \lambda'(s)m(s) + \mu'(s)n(s) = 0,$$

$$g(\bar{B}_2(\varphi(s)), \bar{T}(\varphi(s))\varphi'(s)) = \lambda'(s)p(s) + \mu'(s)q(s) = 0$$

elde edilir. Burada $\begin{vmatrix} m(s) & n(s) \\ p(s) & q(s) \end{vmatrix}$ sıfırdan farklıdır. Çünkü $\{\bar{N}(\varphi(s)), \bar{B}_2(\varphi(s))\}$ vektör uzayı lineer bağımsız olmak zorundadır. Bu yüzden, $\lambda'(s) = 0$ ve $\mu'(s) = 0$ olup λ ve μ sabit olarak bulunur. Buna göre (4.21) ve (4.22) denklemlerini yeniden yazarsak,

$$\beta^{(4)}(\bar{s}) = \beta^{(4)}(\varphi(s)) = \alpha^{(4)}(s) + \lambda N(s) + \mu B_2(s)$$

ve

$$\bar{T}(\varphi(s))\varphi'(s) = [1 - \lambda K(s)]T(s) + [\lambda k(s) - \mu(r - K)(s)]B_1(s),$$

elde edilir, burada $(\varphi'(s))^2 = [1 - \lambda K(s)]^2 + [\lambda k(s) - \mu(r - K)(s)]^2 \neq 0$'dır. Eğer

$$a(s) = \frac{1 - \lambda K(s)}{\varphi'(s)}, \quad b(s) = \frac{\lambda k(s) - \mu(r - K)(s)}{\varphi'(s)}$$

yazılırsa

$$\bar{T}(\varphi(s)) = a(s)T(s) + b(s)B_1(s) \tag{4.25}$$

bulunur. s parametresine göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} \bar{K}(\varphi(s))\bar{N}(\varphi(s))\varphi'(s) = \; & a'(s)T(s) + [a(s)K(s) - b(s)k(s)]N(s) + b'(s)B_1(s) \\ & + b(s)(r - K)(s)B_2(s) \end{aligned}$$

elde edilir. $\bar{N}(\varphi(s))$, $N(s)$ ve $B_2(s)$'nin lineer kombinasyonu biçiminde ifade edildiğinden $a'(s) = 0$ ve $b'(s) = 0$ olup a ve b sabit olarak bulunur. O halde $(\alpha^{(4)}, \beta^{(4)})$ bir kuaterniyonik eğimli eğri çiftidir. □

5. 3-BOYUTLU KÜRE ÜZERİNDE BERTRAND EĞRİLERİ

Tezin bu bölümünde üç boyutlu küre üzerinde Bertrand eğrilerini tanımlayacağız. Ayrıca bu eğrilerin ilginç özellikleri elde edecek ve örnekler vereceğiz. İlk önce 3-boyutlu küreyi tanımlayıp, küre üzerinde yatan eğriler ile ilgili bazı temel tanım ve önermeler verelim.

$\mathbb{S}^3(r)$, $\mathbb{R}^4$ uzayında r yarıçaplı 3 boyutlu küreyi göstermek üzere

$$\mathbb{S}^3(r) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = r^2\}, \quad r > 0$$

şeklinde tanımlanır. $\mathbb{S}^3$ küresinde bir $\alpha = \alpha(t) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{S}^3$ eğrisi alalım ve genelliği bozmaksızın bu α eğrisi yay parametresi ile parametrelendirilmiş olsun. Eğer $\{T, N, B\}$, α boyunca Frenet çatısı ve $\bar{\nabla}$ da $\mathbb{S}^3(r)$ nin Levi-Civita konneksiyonu ise, α eğrisinin Frenet denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_T T &= \kappa N, \\ \bar{\nabla}_T N &= -\kappa T + \tau B, \\ \bar{\nabla}_T B &= -\tau N, \end{aligned}$$

burada κ ve τ, sırasıyla, α eğrisinin eğriliğini ve burulmasını göstermektedir. ∇^0, $\mathbb{R}^4$ uzayının Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere herhangi bir $X \in \chi(\alpha)$ teğet vektör alanı için Gauss formülünden,

$$\nabla_T^0 X = \bar{\nabla}_T X - \frac{1}{r^2}\langle X, T\rangle \alpha$$

elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned} \nabla_T^0 T &= \kappa N - \frac{1}{r^2}\alpha, \\ \nabla_T^0 N &= -\kappa T + \tau B, \\ \nabla_T^0 B &= -\tau N, \end{aligned}$$

bulunur.

Tanım 5.1. α eğrisi üzerinde $\alpha(t)$ noktasındaki **asli normal geodezik eğri**

$$\gamma_t^{\alpha}(u) = \exp_{\alpha}(t)(uN(t)) = \cos(\frac{u}{r})\alpha(t) + r\sin(\frac{u}{r})N(t), \qquad u \in \mathbb{R} \tag{5.1}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 5.2. $\mathbb{S}^3(r)$ küresinde eğriliği sıfırdan farklı bir α eğrisinin Bertrand eğrisi olması için karşılıklı noktalarında asli normal geodezikleri çakışan ve $\mathbb{S}^3(r)$ üzerinde yatan bir β eğrisinin bulunması gerekir. Bu durumda α ve β eğrileri $\mathbb{S}^3$ üzerinde bir Bertrand çifti olarak adlandırılır.

Genelliğin bozmaksızın üç boyutlu kürenin yarıçapını 1 ve eğrileri de yay uzunluğu parametresi ile parametrelendirilmiş eğriler olarak alalım. $\alpha(s)$ ve $\beta(\sigma)$ bir Bertrand eğri çifti olsun, bu durumda bir $a(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonu vardır öyle ki

$$\beta(\sigma(s)) = \cos(a(s))\alpha(s) + \sin(a(s))N_{\alpha}(s) \tag{5.2}$$

yazılır, burada $\{T_{\alpha}, N_{\alpha}, B_{\alpha}\}$ α eğrisi boyunca Frenet çatısıdır ve $\beta(\sigma(s))$ de β eğrisinin $\alpha(s)$ noktasına karşılık gelen noktasını ifade eder. $\alpha(s)$ ile karşılık gelen $\beta(\sigma(s))$ noktası arasındaki uzaklığı $d(s)$ uzaklık fonksiyonu olarak ele alalım.

Ayrıca, verilen $X, Y, Z \in \mathbb{R}^4$ vektörleri için $X \wedge Y \wedge Z$ vektörel çarpımı $\mathbb{R}^4$ de

$$\langle X \wedge Y \wedge Z, W\rangle = \det(X, Y, Z, W), \quad \forall W \in \mathbb{R}^4 \tag{5.3}$$

şartını sağlayan biricik vektördür (Massey 1983).

Önerme 5.1. α ile β eğrisi $\mathbb{S}^3$ küresinde bir Bertrand eğri çifti olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler gerçeklenir:

(a) $a(s)$ fonksiyonu sabittir.

(b) $d(s)$ uzaklık fonksiyonu sabittir.

(c) Karşılıklı noktalardaki teğet vektörleri arasındaki açı sabittir.

(d) Karşılıklı noktalardaki binormal vektörleri arasındaki açı sabittir.

(Lucas ve Ortega-Yagües 2012).

İspat. (a) α ile β karşılık gelen noktalarda aynı asli normal geodeziğe sahip olduğundan

$$\frac{d}{du}\Big|_{u=0} \gamma_s^{\alpha}(u) = N_{\alpha}(s) \quad \text{ve} \quad \frac{d}{du}\Big|_{u=a(s)} \gamma_s^{\alpha}(u) = N_{\beta}(\sigma(s))$$

olup, buradan

$$N_{\beta}(\sigma(s)) = -\sin(a(s))\alpha(s) + \cos(a(s))N_{\alpha}(s), \tag{5.4}$$

elde edilir, burada $\{T_{\beta}, N_{\beta}, B_{\beta}\}$, β eğrisi boyunca Frenet çatısını göstermektedir. Diğer yandan, (5.2) den türev alınarak

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\beta(\sigma) = &- a'(s)\sin(a(s))\alpha(s) + (\cos(a(s)) - \kappa_{\alpha}(s)\sin(a(s)))T_{\alpha}(s) \\ &+ a'(s)\cos(a(s))N_{\alpha}(s) + \tau_{\alpha}(s)\sin(a(s))B_{\alpha}(s)\end{aligned}$$

elde edilir. Fakat, $\frac{d}{ds}\beta(\sigma) = \sigma'(s)T_{\beta}(\sigma(s))$ olup

$$0 = \langle \frac{d}{ds}\beta(\sigma), N_{\beta}(\sigma)\rangle = a'(s)$$

bulunur. O halde $a(s) = a$ sabittir.

(b) Genelliği bozmaksızın $0 \leq a \leq 2\pi$ alalım. Dolayısıyla, $\alpha(s)$ ile $\beta(\sigma(s))$ noktaları arasındaki $d(s)$ uzaklık fonksiyonu

$$d(s) = \min\{a, 2\pi - a\}$$

olup a sabit olduğundan $d(s) = d$ de bir sabittir.

(c) Doğrudan bir hesaplamayla

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\langle T_{\alpha}(s), T_{\beta}(\sigma(s))\rangle = &\ \langle \kappa_{\alpha}(s)N_{\alpha}(s) - \alpha(s), T_{\beta}(\sigma(s))\rangle \\ &+\sigma'(s)\langle T_{\alpha}(s), \kappa_{\beta}(\sigma(s))N_{\beta}(\sigma(s)) - \beta(\sigma(s))\rangle\end{aligned} \tag{5.5}$$

elde edilir. Diğer yandan

$$T_\beta(\sigma(s)) = \frac{1}{\sigma'(s)}((\cos a - \kappa_\alpha \sin a)T_\alpha(s) + \tau_\alpha(s)\sin a B_\alpha(s))$$

dir. Son denklem (5.2), (5.4) ve (5.5) denklemleriyle birlikte düşünülerek

$$\frac{d}{ds}\langle T_\alpha(s), T_\beta(\sigma(s))\rangle = 0$$

elde edilir ki bu da iddiayı kanıtlar.

(d) $T_\alpha(s)$ ile $T_\beta(\sigma(s))$ arasındaki sabit açıya θ diyelim. Dolayısıyla

$$T_\beta(\sigma(s)) = \cos\theta T_\alpha(s) + \sin\theta B_\alpha(s) \tag{5.6}$$

yazılabilir. $\mathbb{R}^4$ reel vektör uzayındaki vektörel çarpım kullanılarak, α eğrisinin binormal vektörü

$$B_\alpha(s) = \alpha(s) \times T_\alpha(s) \times N_\alpha(s)$$

ile hesaplanabilir. Buradan da

$$B_\beta(\sigma(s)) = -\sin\theta T_\alpha(s) + \cos\theta B_\alpha(s) \tag{5.7}$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\langle B_\alpha(s), B_\beta(\sigma(s))\rangle = \; & -\tau_\alpha(s)\langle N_\alpha(s), B_\beta(\sigma(s))\rangle \\ & -\sigma'(s)\tau_\beta(\sigma(s))\langle B_\alpha(s), N_\beta(\sigma(s))\rangle = 0\end{aligned}$$

olup, ispat tamamlanır.

□

Önerme 5.1 deki (c) ve (d) şıkları alternatif bir durum vermektedir. Bunu yapmak için, $P_a^0(\gamma_s^\alpha)$, $\gamma_s^\alpha(u)$ geodeziği boyunca $\gamma_s^\alpha(a) = \beta(\sigma(s))$ ve $\gamma_s^\alpha(0) = \alpha(s)$ noktaları arasında paralel taşınımı göstersin. Bu durumda β boyunca her $Y \in \chi(\beta)$ türevlenebilir vektör alanı için, aşağıdaki denklem yardımıyla yine türevlenebilir bir $X \in \chi(\beta)$ vektör alanı tanımlayabiliriz:

$$X(s) = P_a^0(\gamma_s^\alpha)(Y(\sigma(s)))$$

Kısaca, $X = PY$ yazacağız.

Paralel taşınımın ilginç bir özelliğini şu şekilde verebiliriz: Eğer $S_1 \subset \mathbb{R}^n$ ve $S_2 \subset \mathbb{R}^n$ hiperyüzeyleri parametrelendirilmiş bir α eğrisi boyunca teğet ve v_0 da $T_{\alpha(s_0)}S_1 = T_{\alpha(s_0)}S^2$ nin bir vektörü ise, bu durumda $V(s)$ nin α boyunca v_0 ın S_1 e göre paralel taşınımı olması için gerek ve yeter şart $V(s)$ nin α boyunca v_0 ın S_2 ye göre paralel taşınımı olmasıdır. Gerçekten, V nin DV/ds kovaryant türevi her iki hiperyüzey için aynıdır.

Bu özelliği kullanarak, γ' ye dik bir vektörün $\gamma \subset \mathbb{S}^3$ geodeziği boyunca paralel taşınımı sabit bir vektör alanı olduğunu gösterebiliriz. Gerçekten, $\gamma = \gamma(s)$ eğrisi 3-boyutlu kürenin bir geodeziği ve v_0 da bir $p_\gamma(s_0)$ noktasında $\mathbb{S}^3$ e teğet bir vektör olsun. v_0 ın $\gamma'(s_0)$ a dik olduğunu varsayalım. γ boyunca $\mathbb{S}^3$ e teğet $C = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$ hipersilindirini düşünürsek, $V(s) = v_0$ sabit vektör alanı γ boyunca v_0 ın hipersilindire göre paralel taşınımıdır. Fakat, yukarıdaki özellikten $V(s)$ aynı zamanda γ boyunca v_0 ın $\mathbb{S}^3$ küresine göre paralel taşınımıdır.

Dolayısıyla, Önerme 5.1 den aşağıdaki sonuca varırız.

Önerme 5.2. α ile β eğrisi $\mathbb{S}^3$ de bir Bertrand çifti olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:

(a) T_α ile PT_β arasındaki açı sabittir.

(b) B_α ile PB_β arasındaki açı sabittir.

(Lucas ve Ortega-Yagües 2012).

İspat. $(PT_\beta)(s) = P_a^0(\gamma_s^\alpha)(T_\beta(\sigma(s))) = T_\beta(\sigma(s))$ ve $(PB_\beta)(s) = B_\beta(\sigma(s))$ olup, önerme 5.1 (c) ve (d) nin direkt bir sonucudur. □

5.1 $\mathbb{S}^3$ Üzerindeki Bertrand Eğrilerinin Özellikleri

Teorem 5.1.1. α ile β, $\mathbb{S}^3$ küresinde bir Bertrand eğri çifti olsun. Bu durumda, aşağıdaki eşitlikleri sağlayan a ve θ sabitleri mevcuttur:

(a) $(\cos a - \sin a\kappa_\alpha)\sin\theta = \sin a\cos\theta\tau_\alpha$

(b) $(\cos a + \sin a\kappa_\beta)\sin\theta = \sin a\cos\theta\tau_\beta$

(c) $(\cos a - \sin a\kappa_\alpha)(\cos a + \sin a\kappa_\beta) = \cos^2\theta$

(d) $\sin^2 a\tau_\alpha\tau_\beta = \sin^2\theta$,

burada $\kappa_\alpha, \tau_\alpha, \kappa_\beta$ ve τ_β sırasıyla α ve β eğrilerinin eğrilik ve burulmalarıdır, (Lucas ve Ortega-Yagües 2012).

İspat. (a) (5.2) denkleminde kovaryant türev alınarak ve (5.6) denklemini kullanılarak

$$\frac{d}{ds}\beta(\sigma(s)) = \sigma'(s)\cos\theta T_\alpha(s) + \sigma'(s)\sin\theta B_\alpha(s)$$

elde edilir. Diğer yandan Frenet denklemleri kullanılarak, $a(s) = a$ sabit olduğundan

$$\frac{d}{ds}\beta(\sigma(s)) = (\cos a - \sin a\kappa_\alpha(s))T_\alpha(s) + \sin a\tau_\alpha(s)B_\alpha(s),$$

bulunur. Son iki denklemden

$$\sigma'(s)\cos\theta = \cos a - \sin a\kappa_\alpha(s), \tag{5.8}$$

$$\sigma'(s)\sin\theta = \sin a\tau_\alpha(s), \tag{5.9}$$

olup bu iki denklemden (a) elde edilir.

(b) Şimdi ise α eğrisinin Frenet denklemlerini β eğrisinin Frenet denklemleri cinsinden yazalım:

$$\begin{aligned} \alpha(s(\sigma)) &= \cos a\beta(\sigma) - \sin aN_\beta(\sigma), && (5.10)\\ T_\alpha(s(\sigma)) &= \cos\theta T_\beta(\sigma) - \sin\theta B_\beta(\sigma), && (5.11)\\ N_\alpha(s(\sigma)) &= \sin a\beta(\sigma) + \cos aN_\beta(\sigma), && (5.12)\\ B_\alpha(s(\sigma)) &= \sin\theta T_\beta(\sigma) + \cos\theta B_\beta(\sigma). && (5.13) \end{aligned}$$

(a) şıkkındaki yöntem kullanılarak

$$\begin{aligned} s'(\sigma)\cos\theta &= \cos a + \sin a\kappa_\beta(\sigma), && (5.14)\\ s'(\sigma)\sin\theta &= \sin a\tau_\beta(\sigma), && (5.15) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu denklemlerden de (b) bulunur.

(c) (5.8) ve (5.14) denklemlerinin bir sonucudur.

(d) (5.9) ve (5.15) denklemlerinin bir sonucudur.

□

Eğer α ile β, $\mathbb{S}^3$ de Bertrand eğriler ise yukarıdaki teoremin (d) şıkkından, eğrilerin karşılıklı noktalarındaki burulmalarının çarpımı negatif olmayan bir sabittir. Bu ifade genellikle **Schell Teoremi** olarak bilinmektedir.

$\mathbb{S}^3$ küresinde bir α eğrisi verilsin. Eğer α eğrisi tamamen geodezik $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^3$ iki boyutlu küresi üzerinde yatıyorsa α eğrisine bir düzlem eğri denir. Yani, eğrinin burulması tüm noktalarda sıfırdır. α eğrisi $\mathbb{S}^3$ üzerinde yatan burulmalı bir eğri (yani $\tau \neq 0$ olan eğri) olsun. Eğer α eğrisinin eğriliği ve burulması sıfırdan farklı sabitler ise α eğrisine $\mathbb{S}^3$ üzerinde yatan bir **küresel helis** denir. Daha genel olarak, α eğrisi $\mathbb{S}^3$ üzerinde yatan bir eğri olmak üzere eğer α boyunca sabit uzunluklu bir $V(s)$ Killing vektör alanı için α' ile V arasındaki açı α boyunca sıfırdan farklı bir sabit oluyorsa, α eğrisine $\mathbb{S}^3$ üzerinde yatan bir **genel helis** adı verilir. V vektör alanına

α genel helisinin **ekseni** denir. Açıkca görülebilir ki düzlem eğriler ve helisler, genel helisler için birer örnektir:

(1) Eğer α bir düzlem eğri ise, ekseni $V = B$ alabiliriz,

(2) Eğer α bir helis ise, bu durumda $V(s) = \cos\theta T(s) + \sin\theta B(s)$ bir eksendir, burada $\cot\theta = \dfrac{\tau^2 - 1}{\tau\kappa}$ biçimindedir.

Önerme 5.1.1 (Düzlem Bertrand Eğriler). (a) $\mathbb{S}^3$ üzerinde yatan her düzlem eğri bir Bertrand eğridir ve sonsuz çoklukta düzlemsel eşlenik Bertrand eğrisine sahiptir.

(b) Eğer α Bertrand eğrisinin düzlemsel bir β Bertrand eşleniği varsa, α eğrisi de aynı tamamen geodezik iki boyutlu kürede yatan bir düzlem eğridir.

(Lucas ve Ortega-Yagües 2012).

İspat. (a) α eğrisi $\mathbb{S}^3$ de bir düzlem eğri olsun ve $\forall a \in \mathbb{R}$ için $\beta_a \in \mathbb{S}^3$ eğrisi

$$\beta_a(s) = \cos a\, \alpha(s) + \sin a N_\alpha(s) \tag{5.16}$$

şeklinde tanımlansın. Her $a \in \mathbb{R}$ için β_a eğrisinin bir Bertrand eşlenik olduğunu göstereceğiz. (5.16) da kovaryant türev alınarak ve Frenet denklemleri kullanılarak

$$T_{\beta_a}(\sigma(s)) = T_\alpha(s), \tag{5.17}$$

$$\sigma'(s) = \cos a - \sin a\kappa_\alpha(s), \tag{5.18}$$

elde edilir, burada $\sigma = \sigma(s)$, β_a eğrisinin yay uzunluğu parametresidir. (5.17) de kovaryant türev alınarak

$$N_{\beta_a}(\sigma(s)) = -\sin a\, \alpha(s) + \cos a\, N_\alpha(s), \tag{5.19}$$

$$\kappa_{\beta_a}(\sigma(s)) = \frac{\sin a + \cos a\, \kappa_\alpha(s)}{\cos a - \sin a\, \kappa_\alpha(s)}, \tag{5.20}$$

elde edilir ve bu durumda bir $\beta_a(\sigma_0)$, $\sigma_0 = \sigma(s_0)$ noktasında başlayan asli normal geodezik eğri

$$\begin{aligned}\gamma(u) &= \cos u\, \beta_a(\sigma_0) + \sin u\, N_{\beta_a}(\sigma_0) \\ &= \cos(u+a)\alpha(s_0) + \sin(u+a)N_\alpha(s_0)\end{aligned}$$

şeklinde verilir ki bu da $\alpha(s_0)$ noktasında başlayan asli normal geodezik eğrinin bir yeniden parametrizasyonundan başka bir şey değildir.

Son olarak (5.19) denkleminde kovaryant türev alınarak ve Frenet denklemlerinden

$$\sigma'(s)\frac{d}{d\sigma}N_{\beta_a}(\sigma(s)) = -(\sin a + \cos a\kappa_\alpha(s))T_\alpha(s)$$

bulunur. Son denklem (5.17) ve (5.20) denklemleri ile ele alınarak $\tau_{\beta_a} = 0$ elde edilir, yani β_a eğrisi $\mathbb{S}^3$ de bir düzlem eğridir.

(b) $\tau_\beta = 0$ olduğundan, Teorem 5.1.1(d) gereği $\sin\theta = 0$ ve dolayısıyla $\cos\theta = \pm 1$ elde edilir. Teorem 5.1.1(a) kullanılarak $\sin a\,\tau_\alpha = 0$ bulunur. Eğer $\sin a = 0$ ise $\alpha = \pm\beta$ olur ve dolayısıyla α da aynı tamamen geodezik iki boyutlu kürede yatan bir düzlem eğridir, aksi taktirde, $\tau_\alpha = 0$ olur ki bu da aynı sonucu verir. □

Kürede Lancret teoremi (Barros, 1997) tarafından gösterilmiştir. Bu teoreme göre $\mathbb{S}^3$ üzerinde yatan bir α eğrisinin genel helis olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartlardan birinin sağlanmasıdır:

1. $\tau_\alpha \equiv 0$ ve α eğrisi $\mathbb{S}^2(1)$ iki boyutlu birim küresi üzerinde bir eğridir.
2. $\tau_\alpha = b\kappa_\alpha \pm 1$ olacak şekilde bir b sabiti vardır.

Benzer bir sonuç küre üzerindeki Bertrand eğriler için de verilebilir.

Teorem 5.1.2. $\mathbb{S}^3$ üzerinde yatan bir α eğrisinin Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter şart aşağıdakilerden birinin sağlanmasıdır:

1. $\tau_\alpha \equiv 0$ ve α eğrisi $\mathbb{S}^2(1)$ iki boyutlu birim küresi üzerinde bir eğridir.
2. $\lambda\kappa_\alpha + \mu\tau_\alpha = 1$ olacak şekilde $\lambda \neq 0$ ve μ sabitleri vardır.

(Lucas ve Ortega-Yagües 2012).

İspat. α bir Bertrand eğrisi olsun. Eğer α bir düzlem eğri değilse, Teorem 5.1.1(a) dan $\lambda = \tan a$ ve $\mu = \tan a \cot \theta$ sabitleri için $\lambda\kappa_\alpha + \mu\tau_\alpha = 1$ gerçeklenir.
Şimdi $\lambda \neq 0$ ve μ sabitleri için $\lambda\kappa_\alpha + \mu\tau_\alpha = 1$ olduğunu kabul edelim. $\mathbb{S}^3$ üzerinde β eğrisi

$$\beta(s) = \cos a\, \alpha(s) + \sin a\, N_\alpha(s), \tag{5.21}$$

tanımlansın, burada $\lambda = \tan a$ dır. O halde $\beta(\sigma)$ eğrisinin bir Bertrand eşlenik olduğunu göstereceğiz. (5.21) denkleminde kovaryant türev alınarak ve Frenet denklemlerinden

$$N_\beta(\sigma(s)) = -\sin a\, \alpha(s) + \cos a\, N_\alpha(s), \tag{5.22}$$

elde edilir, burada $\sigma = \sigma(s)$, β eğrisinin yay uzunluğu parametresidir. O halde $\beta(\sigma_0)$ noktasında başlayan asli normal geodezik

$$\begin{aligned}\gamma(u) &= \cos u\, \beta(\sigma_0) + \sin u\, N_\beta(\sigma_0) \\ &= \cos(u+a)\alpha(s_0) + \sin(u+a)N_\alpha(s_0)\end{aligned}$$

şeklindedir ve bu da $\alpha(s_0)$ noktasında başlayan asli normal geodezik eğrinin bir yeniden parametrizasyonudur. Bu ise ispatı tamamlar.

□

Önerme 5.1.2. α, $\mathbb{S}^3$ üzerinde yatan burulması sıfırdan farklı bir eğri olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir:

(a) α bir helistir.

(b) α sonsuz çoklukta eşlenik Bertrand eğriye sahiptir.

(c) α iki eşlenik Bertrand eğriye sahiptir.

(Lucas ve Ortega-Yagües 2012).

İspat. (a)⇒(b) κ_α ve τ_α nın sıfırdan farklı sabitler olduğunu kabul edelim. O halde, eğrilikler ve sabit katsayılar arasında sonsuz lineer ilişki elde edebiliriz, fakat her bir

farklı lineer bir ilişki için farklı bir Bertrand eşlenik eğri oluşturabiliriz ki bu eğri aynı zamanda bir helistir.

(b)⇒(c) Aşikardır.

(c)⇒(a) α eğrisi β_1 ve β_2 gibi iki Bertrand eşleniğe sahip ise,

$$\tan a_1\kappa_\alpha(s) + \tan a_1 \cot\theta_1\tau_\alpha(s) = 1,$$
$$\tan a_2\kappa_\alpha(s) + \tan a_2 \cot\theta_2\tau_\alpha(s) = 1,$$

olacak şekilde $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, θ_1 ve θ_2 sabitleri vardır, burada β_1 ve β_2 eğrileri farklı Bertrand eşlenik eğriler olduğundan $a_1 \neq a_2$ dir. Bu denklemlerde kovaryant türev alınarak

$$\kappa'_\alpha(s) + \cot\theta_1\tau'_\alpha(s) = 0,$$
$$\kappa'_\alpha(s) + \cot\theta_2\tau'_\alpha(s) = 0,$$

elde edilir. Dolayısıyla, $\theta_1 \neq \theta_2$ (çünkü $a_1 \neq a_2$) olduğundan $\kappa'_\alpha(s) = \tau'_\alpha(s) = 0$ bulunur, yani α sabit eğriliğe ve sabit burulmaya sahiptir. Bu da ispatı tamamlar. □

5.2 Örnekler

Düzlem eğrilerin ve helislerin birer Bertrand eğrisi olduğunu gördük, gerçekten bu eğrilerin sonsuz Bertrand eşleniğe sahip olan yegane eğriler olduğunu gösterdik. Diğer yandan, Teorem 5.1.2'den sabit eğrilikli bir eğrinin de Bertrand eğrisi olduğu sonucuna varırız. Bu bölümde yer alan örnekler (Lucas ve Ortega-Yagües, 2012) yayınından alınmıştır.

Örnek 5.2.1 (Euler Spiralleri)**.** Şimdi, sabit olmayan eğrilik ve burulmaya sahip Bertrand eğrilerin dört parametreli bir ailesini verelim.

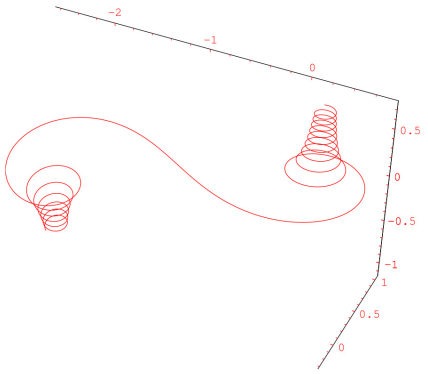
Euler spiralleri (cornu spiralleri olarak da bilinir.) eğriliği eğri boyunca lineer olarak değişen düzlem eğrilerdir. Bernouilli, Euler spiralinin denklemini ilk kez yazmıştır,

fakat doğru şeklini çizememiş ve nümerik olarak hesaplayamamıştır. Euler eğrinin denklemlerini yeniden keşfetmiş, özelliklerini tanımlamış ve eğrinin integrallerine bir seri açılımı elde etmiştir. Bu eğriler Talbot tarafından üçüncü kez yeniden keşfedilmiştir. Talbot bu eğrileri düzgün sürüş deneyimi sağlamak için demir yolları tasarımında kullanmıştır.

Bir Euler spirali üç boyutlu Öklid uzayındaki eğriler için tanımlanmıştır, fakat bu tanım aynı zamanda $\mathbb{S}^3$ küresindeki eğriler için de geçerlidir. $\alpha = \alpha(s)$, $\mathbb{S}^3$ üzerinde yatan bir eğri olsun. α eğrisinin eğriliği ve burulması eğri boyunca lineer olarak değişiyorsa α ya bir Euler spirali adı verilir. Dolayısıyla,

$$\kappa(s) = \kappa_0 + \gamma s, \qquad \tau(s) = \tau_0 + \delta s$$

olacak şekilde $\kappa_0, \tau_0, \gamma, \delta$ sabitleri vardır. Kolayca görülebilir ki eğer $\kappa_0\delta - \tau_0\gamma \neq 0$ sağlanırsa Euler spirali bir Bertrand eğri olacaktır. Üç boyutlu Öklid uzayı için Euler spirali örneği aşağıda verilmiştir.



Şekil 5.1 Euler spirali: $\kappa(s) = s + 1$ ve $\tau(s) = 0.1s$

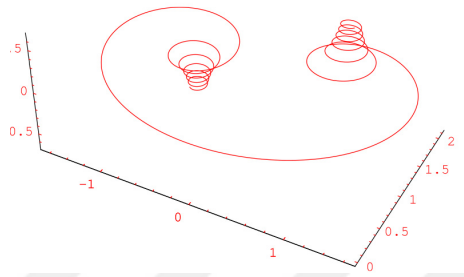
Örnek 5.2.2 ($n-$Euler spiralleri)**.** Klasik Euler spirallerinin bir genelleştirmesi olarak, eğriliği parametrenin n-inci kuvveti olarak değişen $\mathbb{R}^2$ de bir eğriye bir $n-$Euler spirali adı verilir. Genel olarak, bu tür bir eğri şu şekilde parametrelendirilebilir:

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)) = a\left(\int_0^t \sin(\frac{u^{n+1}}{n+1})du, \int_0^t \cos(\frac{u^{n+1}}{n+1})du\right).$$

α nın eğriliği $-t^n/a$ ile verilir. $\mathbb{R}^3$ de ya da $\mathbb{S}^3$ de bir $n-$Euler spirali, eğriliği ve burulması

$$\kappa(s) = \kappa_0 + \gamma s^n, \qquad \tau(s) = \tau_0 + \delta s^n,$$

şeklinde olan eğri olarak tanımlanır, burada κ_0, τ_0, γ ve δ sabitlerdir. Bir önceki gibi, $\kappa_0\delta - \tau_0\gamma \neq 0$ sağlandığında $n-$Euler sprilari eğrileri birer Bertrand eğrisi olur.



Şekil 5.2 2-Euler spirali: $\kappa(s) = 0.5 + 0.1s^2$ ve $\tau(s) = 0.01s^2$

Örnek 5.2.3 (Genelleştirilmiş Konikal Helisler)**.** $\alpha = \alpha(s)$, $\mathbb{S}^3$ üzerinde yatan sabit olmayan eğriliklere sahip burulmalı bir eğri olsun. Eğer eğrilik yarıçapı $1/\kappa$ ve burulma yarıçapı $1/\tau$ eğri boyunca lineer olarak değişiyorsa α eğrisine bir **konikal helis** denir. Dolayısıyla

$$\kappa(s) = \frac{\gamma}{s + r_0}, \qquad \tau(s) = \frac{\delta}{s + r_1}$$

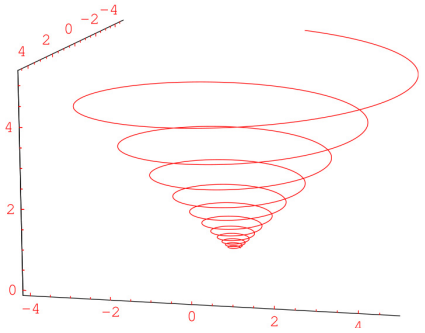
olacak şekilde $r_0, r_1, \gamma \neq 0$ ve $\delta \neq 0$ sabitleri vardır.

Özel olarak r_0 ve r_1 in sıfır ise eğriye standart konikal helis adı verilir. $\mathbb{R}^3$ de, bir eğrinin standart konikal helis olması için bir koni üzerinde yatması ve koninin tüm elemanlarını aynı açıyla kesmesi gerekmektedir. Üç boyutlu Öklid uzayı için bir örnek aşağıda verilmiştir.

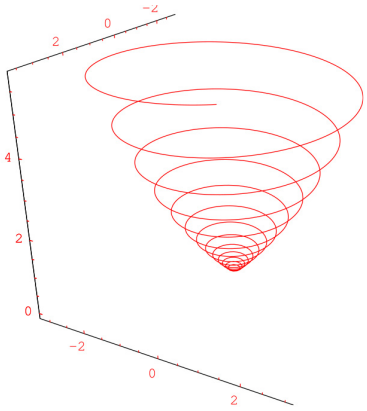
Şimdi bu tanımı genelleştireceğiz. $\mathbb{S}^3$ de bir burulmalı eğrinin genelleştirilmiş konikal helis olması için

$$\kappa(s) = \frac{\gamma}{s + r_0} + \gamma_0, \qquad \tau(s) = \frac{\delta}{s + r_1} + \delta_0$$

olacak şekilde $r_0, r_1, \gamma \neq 0, \gamma_0, \delta \neq 0$ ve δ_0 sabitlerinin var olması gerekmektedir. Bu durumda kolayca gösterilebilir ki $\delta\gamma_0 - \gamma\delta_0 \neq 0$ sağlanmak şartıyla α bir Bertrand eğrisidir.



Şekil 5.3 Standart konikal helis, $\kappa(s) = 20/s$ ve $\tau(s) = 1/s$



Şekil 5.4 Genelleştirilmiş konikal helis, $\kappa(s) = \dfrac{20}{s+1} + 0.1$ ve $\tau(s) = \dfrac{1}{s+1} + 0.01$

Örnek 5.2.4 (Teğetsel Kübik Eğriler)**.** M, $n-$boyutlu $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayının $m < n$ olacak şekilde $m-$boyutlu bir alt manifoldu olsun ve $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to M \subset \mathbb{R}^n$ eğrisini düşünelim. Eğer $\mathrm{tpr}(\alpha^{(4)}) = 0$ ise α eğrisine M de bir teğetsel kübik eğri adı verilir, burada tpr ile keyfi bir $p \in M$ noktası için, $T_p\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n$ den T_pM tanjant uzayı üzerine dik izdüşüm dönüşümü gösterilmektedir. Özel olarak M yi bir boyutlu bir manifold olarak alırsak, teğetsel kübik parametrizasyonu için şart $\langle \alpha^{(4)}, \alpha' \rangle = 0$, şeklinde verilebilir, burada $()'$ ile genel Öklidyen türev kastedilmektedir. $\mathbb{S}^3$ de yay uzunluğu parametresi ile parametrelendirilmiş bir $\alpha = \alpha(s) \subset \mathbb{S}^3$ eğrisi alalım, bu durumda Frenet denklemlerinden aşağıdaki formülleri elde ederiz:

$$\alpha'' = \kappa N - \alpha,$$
$$\alpha''' = -(1+\kappa^2)T + \kappa' N + \kappa\tau B,$$
$$\alpha^{(4)} = (1+\kappa^2)\alpha - 3\kappa\kappa' T + (\kappa'' - \kappa(1+\kappa^2) - \kappa\tau^2)N + (2\kappa'\tau + \kappa\tau')B.$$

Sonuç olarak, α nın bir teğetsel kübik eğri olması için gerek ve yeter şart sabit κ eğriliğine sahip olmasıdır. Dolayısıyla, $\mathbb{S}^3$ de yatan bir teğetsel kübik eğrinin her yay uzunluğu parametrizasyonu bir Bertrand eğridir.

5.3 $\mathbb{S}^3$ Üzerinde Yatan Bertrand Eğrileri ile $\mathbb{E}^4$ Öklid Uzayındaki $(1,3)$-Bertrand Eğrileri Arasındaki İlişki

$\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında $(1,3)$-Bertrand eğrisi kavramı Matsuda ve Yorozu tarafından tanıtılmıştır, (Matsuda ve Yorozu, 2003). Bu tanım 3. bölümde verilmiştir. Bu bölümün amacı $\mathbb{S}^3$ küresi üzerindeki Bertrand eğrileri ile $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayındaki $(1,3)$-Bertrand eğrileri arasındaki ilişkiyi vermektir.

$\alpha = \alpha(t)$, $\mathbb{S}^3$ üzerinde yatan $\{T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha\}$ Frenet çatısına sahip bir eğri olsun ve $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında bir γ eğrisini

$$\gamma(t) = \int_{t_0}^{t} B_\alpha(s(u))du$$

biçiminde tanımlayalım, burada $s = s(t)$, α'nın bir yeniden parametrelendirilmesidir (Genelliği bozmaksızın $s'(t) > 0$ olduğunu varsayalım). γ eğrisinin Frenet çatısını $\{T^\gamma, N_1^\gamma, N_2^\gamma, N_3^\gamma\}$ ile eğriliklerini ise $\{\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3\}$ ile gösterelim. Bu durumda $\gamma'(t) = B_\alpha(s(t))$ elde edilir, dolayısıyla γ eğrisi $\mathbb{R}^4$'de birim hızlı bir eğridir. α ve γ eğrileri için Frenet denklemleri kullanılarak

$$\kappa_1(t)N_1^\gamma(t) = -s'(t)\tau_\alpha(s(t))N_\alpha(s(t))$$

elde edilir. Buradan da

$$\kappa_1(t) = \varepsilon s'(t)\tau_\alpha(s(t)) > 0, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad N_1^\gamma(t) = -\varepsilon N_\alpha(s(t)) \tag{5.23}$$

yazılabilir. Son denklemin türevi alınıp Frenet eşitlikleri kullanılırsa $\kappa_2(t)N_2^\gamma(t) = \varepsilon s'(t)\kappa_\alpha(s(t))T_\alpha(s(t))$ bulunur ki buradan da

$$\kappa_2(t) = s'(t)\kappa_\alpha(s(t)) > 0, \quad N_2^\gamma(t) = \varepsilon T_\alpha(s(t)) \tag{5.24}$$

elde edilir.

$$B_\alpha(s(t)) = \alpha(s(t)) \wedge T_\alpha(s(t)) \wedge N_\alpha(s(t))$$
$$N_3^\gamma(t) = T^\gamma(t) \wedge N_1^\gamma(t) \wedge N_2^\gamma(t)$$

olduğundan yukarıda elde edilen denklemler kullanılarak

$$\kappa_3(t) = -\varepsilon s'(t) \neq 0, \qquad N_3^\gamma(t) = \alpha(s(t)) \tag{5.25}$$

elde edilir (Lucas ve Ortega-Yagües 2012).

Önerme 5.3.1. $\alpha(t)$ eğrisi $\mathbb{S}^3$'de düzlemsel olmayan ve sabit olmayan eğriliğe sahip bir Bertrand eğrisi olsun. Bu durumda regüler bir $s = s(t)$ $(s'(t) > 0)$ türevlenebilir dönüşümü vardır öyle ki $\gamma(t) = \int_{t_0}^{t} B_\alpha(s(u))du$ eğrisi $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında $\kappa_3(t) = -\varepsilon s'(t)$ eğriliğine sahip birim hızlı bir $(1,3)$-Bertrand eğrisidir (Lucas ve Ortega-Yagües 2012).

İspat. Teorem 5.1.2'den $\lambda\kappa_\alpha + \mu\tau_\alpha = 1$ olacak şekilde $\lambda \neq 0$ ve $\mu \neq 0$ sabitleri mevcuttur.

$$\lambda[\varepsilon a(\lambda\tau_\alpha - \mu\kappa_\alpha) - b\mu] > 0$$

olacak şekilde a ve b sabitleri alalım ve

$$s'(t) = \frac{\lambda}{\varepsilon a(\lambda\tau_\alpha - \mu\kappa_\alpha) - b\mu} > 0$$

olacak şekilde $s(t)$ fonksiyonunu düşünelim. Ayrıca

$$c = -\frac{\varepsilon\mu}{\lambda} \quad \text{ve} \quad d = \frac{\varepsilon}{\lambda}$$

sabitlerini alalım. Bu durumda (5.23), (5.24) ve (5.25) denklemlerinden kolayca görülebilir ki

$$a\kappa_2(s) - b\kappa_3(s) \neq 0, \tag{5.26}$$
$$a\kappa_1(s) + c(a\kappa_2(s) - b\kappa_3(s)) = 1, \tag{5.27}$$
$$c\kappa_1(s) - \kappa_2(s) = d\kappa_3(s), \tag{5.28}$$
$$(c^2 - 1)\kappa_1(s)\kappa_2(s) + c(\kappa_1(s)^2 - \kappa_2(s)^2 - \kappa_3(s)^2) \neq 0, \tag{5.29}$$

sağlanır. O halde Teorem 3.1.2'den ispat tamamlanır. □

Uyarı. $s'(t) = 1$ özel durumunu düşünelim. Bu durumda $\gamma(t) = \int_{t_0}^{t} B_\alpha(u)du$ eğrisi $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında $\kappa_3 = \pm 1$ olacak şekilde bir $(1,3)$-Bertrand eğrisidir. Dahası, $\alpha(t)$ eğrisi $\mathbb{S}^3$ üzerinde yatan düzlemsel olmayan bir helis olduğu zaman, γ eğrisi de $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında bir helis olur.

Şimdi $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayındaki herhangi bir $(1,3)$-Bertrand eğrisinden, 3-boyutlu kürede bir Bertrand eğrisi oluşturabileceğimizi göstereceğiz. Bunun için bazı hesaplamalar yapalım.

$\gamma(s)$ eğrisi $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında Frenet çatısı $\{T^\gamma, N_1^\gamma, N_2^\gamma, N_3^\gamma\}$ olan birim hızlı bir eğri olsun ve $\mathbb{S}^3$ üzerinde yatan $\alpha(s) = T^\gamma(s)$ eğrisini tanımlayalım. α'nın yay parametresini σ ile gösterelim. Türev alınıp Frenet denklemleri kullanılarak

$$\sigma'(s)T_\alpha(\sigma(s)) = \kappa_1(s)N_1^\gamma(s),$$

elde edilir ve dolayısıyla

$$\sigma'(s) = \varepsilon_1\kappa_1(s), \quad \varepsilon_1 = \pm 1 \tag{5.30}$$

$$T_\alpha(\sigma(s)) = \varepsilon_1 N_1^\gamma(s) \tag{5.31}$$

bulunur. (5.31) denkleminden türev alınarak

$$\sigma'(s)\kappa_\alpha(\sigma(s))N_\alpha(\sigma(s)) = \varepsilon_1\kappa_2(s)N_2^\gamma(s)$$

ve buradan da

$$\sigma'(s)\kappa_\alpha(\sigma(s)) = \varepsilon_2\kappa_2(s), \quad \varepsilon_2 = \pm 1, \tag{5.32}$$

$$N_\alpha(\sigma(s)) = \varepsilon_1\varepsilon_2 N_2^\gamma(s) \tag{5.33}$$

elde edilir. Son olarak (5.33) denkleminden türev alınarak

$$\sigma'(s)\tau_\alpha(\sigma(s))B_\alpha(\sigma(s)) = \varepsilon_1\varepsilon_2\kappa_3(s)N_3^\gamma(s)$$

ve buradan

$$\sigma'(s)\tau_\alpha(\sigma(s)) = \varepsilon_3\kappa_3(s), \quad \varepsilon_3 = \pm 1, \tag{5.34}$$

$$B_\alpha(\sigma(s)) = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 N_3^\gamma(s) \tag{5.35}$$

bulunur.

Şimdi $\mathbb{S}^3$ üzerinde yatan $\alpha(s) = N_3^\gamma(s)$ biçiminde tanımlanan eğriyi ele alalım. α'nın yay parametresi σ olsun. Türev alınıp Frenet eşitlikleri kullanılarak

$$\sigma'(s)T_\alpha(\sigma(s)) = -\kappa_3(s)N_2^\gamma(s),$$

bulunur ve buradan

$$\sigma'(s) = \varepsilon_3\kappa_3(s), \quad \varepsilon_3 = \pm 1 \tag{5.36}$$

$$T_\alpha(\sigma(s)) = -\varepsilon_3 N_2^\gamma(s) \tag{5.37}$$

elde edilir. (5.37) denkleminden türev alınarak

$$\sigma'(s)\kappa_\alpha(\sigma(s))N_\alpha(\sigma(s)) = \varepsilon_3\kappa_2(s)N_1^\gamma(s)$$

ve buradan da

$$\sigma'(s)\kappa_\alpha(\sigma(s)) = \varepsilon_2\kappa_2(s), \quad \varepsilon_2 = \pm 1, \tag{5.38}$$

$$N_\alpha(\sigma(s)) = \varepsilon_2\varepsilon_3 N_1^\gamma(s) \tag{5.39}$$

elde edilir. Son olarak (5.39) ifadesinden türev alınarak

$$\sigma'(s)\tau_\alpha(\sigma(s))B_\alpha(\sigma(s)) = -\varepsilon_2\varepsilon_3\kappa_1(s)T^\gamma(s)$$

ve buradan

$$\sigma'(s)\tau_\alpha(\sigma(s)) = \varepsilon_1\kappa_1(s), \quad \varepsilon_1 = \pm 1, \tag{5.40}$$

$$B_\alpha(\sigma(s)) = -\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 T^\gamma(s) \tag{5.41}$$

bulunur. Bu hesaplamalar yardımıyla aşağıdaki önerme kolayca kanıtlanabilir (Lucas ve Ortega-Yagües 2012).

Önerme 5.3.2. $\gamma(s)$ eğrisi $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında sabit $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ eğriliklerine sahip birim hızlı bir helis olsun. Bu durumda aşağıdakiler gerçeklenir.

(a) $\alpha(s) = T^\gamma(s)$ eğrisi, eğriliği $\kappa_\alpha = \pm\dfrac{\kappa_2}{\kappa_1} > 0$ ve burulması $\tau_\alpha = \pm\dfrac{\kappa_3}{\kappa_1} \neq 0$ olan bir helistir.

(b) $\alpha(s) = N_3^{\gamma}(s)$ eğrisi, eğriliği $\kappa_\alpha = \pm\dfrac{\kappa_2}{\kappa_3} > 0$ ve burulması $\tau_\alpha = \pm\dfrac{\kappa_1}{\kappa_3} \neq 0$ olan bir helistir.

(Lucas ve Ortega-Yagües 2012).

Önerme 5.3.3. $\gamma(s)$ eğrisi $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında Frenet çatısı $\{T^{\gamma}, N_1^{\gamma}, N_2^{\gamma}, N_3^{\gamma}\}$ olan birim hızlı bir $(1,3)$-Bertrand eğrisi olsun. Bu durumda ya $\alpha(s) = T^{\gamma}(s)$ eğrisi ya da $\alpha(s) = N_3^{\gamma}(s)$ eğrisi $\mathbb{S}^3$'de bir Bertrand eğrisidir (Lucas ve Ortega-Yagües 2012).

İspat. Eğer $\gamma(s)$ eğrisi $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında bir $(1,3)$-Bertrand eğrisi ise $(5.26)-(5.29)$ denklemlerini sağlayan a, b, c, d reel sabitlerinin olduğunu biliyoruz. $\kappa_2(s) > 0$ olduğundan, (5.28) eşitliğinden $c^2+d^2 \neq 0$ sağlanır. O halde iki durum söz konusudur:

- Eğer $c \neq 0$ ise, $\alpha(s) = T(s)$ alalım.
- Eğer $d \neq 0$ ise, $\alpha(s) = N_3^{\gamma}(s)$ alalım.

O halde ilk durumda (5.28), (5.30), (5.32), (5.34) denklemleri (ya da ikinci durumda (5.28), (5.36), (5.38), (5.40) denklemleri) kullanılarak $\lambda\kappa_\alpha + \mu\tau_\alpha = 1$ olacak şekilde λ ve μ reel sabitleri bulunabilir. Bu da ispatı tamamlar. □

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Üç boyutlu Öklid uzayında eğriler üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Özel olarak helisler, slant eğriler, geodezikler, Frenet vektörleri birbirleri ile ilişkili eğriler (İnvolüt evolüt çiftleri, Bertrand eğri çiftleri, Mannheim eğri çiftleri vb.) sadece Geometri alanında çalışan bilim insanlarının değil, sanatçıların, mimarların, fizikçilerin ve son zamanlarda bilgisayar destekli tasarımla uğraşanlarında çok ilgisini çekmiştir. Ayrıca bu tip özel eğrilerin doğada birçok örneğini (Şahin avına yaklaşırken, manyetik alanda yüklü parçacık hareket ederken, DNA sarmal yapısında, enzimlerin mikroskobik görüntüsünde vb.) görmek mümkündür.

Verilen iki eğrinin birinin asli normal vektör alanı diğer eğrinin asli normal vektör alanı oluyorsa bu eğriler birbirinin Bertrand çifti adı verilir. Bu tür eğrilerle ilgili problem ilk kez üç boyutlu Öklid uzayında ortaya atılmıştır. Bu tip eğrilerle ilgili geniş literatür bilgisi giriş bölümünde verilmiştir.

Yüksek boyutlu uzaylarda eğrilikleri sıfırdan farklı olan eğriler için klasik anlamda tanımlanan Bertrand eğrileri yoktur. Bu sebeple bu tip eğrilerin bir anlamda genellemesi olan $(1,3)$-Bertrand eğrileri 4-boyutlu uzayda Matsuda ve Yorozu tarafından ortaya atılmıştır. Devamında Cheng ve Lin 4-boyutlu uzayda verilen bu tip eğrileri daha genel bir yaklaşımla $n \geq 4$ Öklid uzaylarına genellemiştir. Matsuda ve Yorozu'nun çalışmalarının bir geometrik uygulaması olarak Keçilioğlu ve İlarslan bu problemi kuaterniyonik eğriler için ele almış ve karakterize etmişlerdir. Kuaterniyonların mekanik, geometrik ve robotik teknolojide bir çok uygulama sahası olduğundan bu tip eğrilerin bu açılardan da yorumlanması mümkündür.

Lucas ve Ortega-Yagües, dört boyutlu Öklid uzayında üç boyutlu küre üzerinde yatan eğrilerin asli normal geodeziklerinin çakışma koşulunun araştırılması düşüncesinden hareketle küre üzerinde Bertrand eğri çiftleri elde etmişler ve karakterizasyonlar vermişlerdir.

Bu tez çalışmasında Matsuda ve Yorozu'nun, Keçilioğlu ve İlarslan'ın ve Lucas ve Ortega-Yagües'in çalışmalarına geniş şekilde yer verilmiştir. Dahası 4-boyutlu uzayda Bertrand eğrilerin bir geometrik uygulaması olarak uzaysal kuaterniyonik eğriler için ve bitorsiyonu sıfır olan kuaterniyonik eğriler için Bertrand eğrisi olma koşulları verilmiştir. Ayrıca 4-boyutlu uzaydaki bir kuaterniyonik eğrinin Bertrand eğrisi olması durumunda ilişkili olduğu uzaysal kuaterniyonik eğrinin de Bertrand eğrisi olduğu ispatlanmıştır. Bu alanda yapılan çalışmaların geniş bir şekilde bu çalışmada yer alması ve elde edilen yeni bulguların bundan sonraki çalışmalar için faydalı olacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

Barros, M. 1997. General Helices amd a Theorem of Lancret, Proceedings of the AMS, 125, 1503-1509.

Bertrand, J. 1850. Memoire sur la théorie des courbes a double courbure, Journal de Mathematiques Pures er Appliquées, 15, 332-350.

Bharathi, K. and Nagaraj, M. 1987. Quaternion valued function of a real Serret-Frenet Formulae, Indian J. Pure Appl. Math., 18, 507-511.

Bioche, Ch. 1889. Sur les courbes de M. Bertrand, Bull. Soc. Math. France, 17, 109-112.

Burke, J.F. 1960. Bertrand Curves Associated with a Pair of Curves, Mathematics Magazine, 34, 60-62.

Cheng, Y.-M. and Lin, C.-C. 2009. On the Generalized Bertrand Curves in Euclidean N-spaces, Note di Matematica, 29, 33-39.

Ekmekci, F.N. and Ilarslan, K. 2001. On Bertrand Curves and Their Characterization, Diff. Geo. Dyn. Syst., 3, 17-24.

Gök, İ., Okuyucu, O.Z., Kahraman, F. and Hacısalihoğlu, H.H. 2011. On the Quaternionic B_2-slant Helices in the Euclidean Space E^4, Adv. Appl. Clifford Algeb., 21, 707-719.

Hacısalihoğlu, H.H. 1983, Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi, Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları Mat. No. 2.

Hacısalihoğlu, H.H. 2000, Diferensiyel Geometri 1. Cilt, 4. Baskı, 269 Syf.

Kahraman, F., Gök, İ. and Hacısalihoğlu, H.H. 2012. On the Quaternionic B_2-slant Helices in the semi-Euclidean Space E_2^4, Appl. Math. Comput., 218, 6391-6400.

Karadağ, M. 1992. Kuaterniyon Değerli Fonksiyonların Serret-Frenet Vektörleri ve Eğilim Çizgileri, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi.

Keçilioğlu, O. and İlarslan, K. 2013. Quaternionic Bertrand Curves in Euclidean 4-space, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, 5, 27-38.

Lai, H.F. 1967. Weakened Bertrand Curves, The Tohoku Mathematical Journal, 119, 141-155.

Lucas, P. and Ortega-Yagües, J.A. 2012. Bertrand curves in the three-dimensional sphere, Journal of Geometry and Physics, 62, 1903-1914.

Massey, W.S. 1983. Cross Products of Vectors in Higher Dimensional Euclidean Spaces, The American Mathematical Monthly, 90, 697-701.

Matsuda, H. and Yorozu, S. 2003. Notes on Bertrand Curves, Yokohama Math. J., 50, 41-58.

Sabuncuoğlu, A. 2012. Lineer Cebir, Nobel Yayınevi, 1. Baskı, 387 Syf.

Tarhan, M. 2007. 3-boyutlu Öklid Uzayında Bertrand Eğrileri, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi.

Görgülü, A. and Özdamar, E. 1986. A Generalization of the Bertrand Curves as General Inclined Curves in E^n, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A_1, 35, 53-60.

Pears, L.R. 1935. Bertrand Curves in Riemannian Space, J. London. Math. Soc., 10, 180-183.

Saint Venant, B. 1845. Mémoire sur les lignes courbes non planes, Journal de l'Ecole Polytechnique, 18, 1-76.

Tuna, A. 2002. Yarı Öklid Uzaylarda Kuaterniyonik Eğriler için Serret-Frenet Formülleri, Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi.

Talbot, A.N. 1899. The Railway Transition Spiral. Univ. Illinois.

Yüce, S. 2017. Öklid Uzayında Diferansiyel Geometri, Pegem Akademi Yayıncılık, Ankara, 568 Syf.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Yasemin IRMAK
Doğum Yeri : Bitlis - Tatvan
Doğum Tarihi : 02/11/1987
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Tatvan Anadolu Lisesi (2005)
Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2010)
Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü (2011)
Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı
(Eylül 2016 – Haziran 2018)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Karayolları Genel Müdürlüğü 2013 - …