İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PİYASA RİSKİ İÇİN MATEMATİKSEL MODELLEME

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Furkan GÖKTAŞ

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

OCAK 2014

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PİYASA RİSKİ İÇİN MATEMATİKSEL MODELLEME

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Furkan GÖKTAŞ
(509121052)

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ahmet DURAN

OCAK 2014

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 509121052 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Furkan GÖKTAŞ**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı **"PİYASA RİSKİ İÇİN MATEMATİKSEL MODELLEME"** başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı :	**Doç. Dr. Ahmet DURAN** İstanbul Teknik Üniversitesi	.....
Jüri Üyeleri :	**Yrd. Doç. Dr. Bahri GÜLDOĞAN** İstanbul Teknik Üniversitesi	.....
	Yrd. Doç. Dr. Cenk C. KARAHAN Boğaziçi Üniversitesi	.....

Teslim Tarihi : **10 Aralık 2013**
Savunma Tarihi : **22 Ocak 2014**

Anneme ve babama,

ÖNSÖZ

Lisansüstü eğitim alan binlerce öğrenciye maddi destekte bulunan TÜBİTAK–BİDEB ailesine ve koşulsuz sevgi ve destekleriyle bu noktaya gelmemdeki en büyük pay sahibi olan canım aileme teşekkürü borç bilirim. Ayrıca yüksek lisans eğitimim boyunca bana her zaman için destek olan ve tavsiyeleri ile bu çalışmaya yön veren Sayın Doç. Dr. Ahmet Duran'a, en içten saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ocak 2014

Furkan Göktaş
Matematik Mühendisi

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ ..... **vii**
İÇİNDEKİLER ..... **ix**
TÜRKÇE KISALTMALAR ..... **xi**
İNGİLİZCE KISALTMALAR ..... **xiii**
ŞEKİL LİSTESİ ..... **xvii**
ÖZET ..... **xix**
SUMMARY ..... **xxi**
1. GİRİŞ **1**
2. PİYASA RİSKİ MODELLERİNE GİRİŞ **3**
2.1 Temel Bilgiler 3
2.2 Düzgün Minimizasyon 8
2.3 Rastgele Vektörler (Değişkenler) 9
2.4 Finansal Zaman Serileri 10
2.5 Ortak Oynaklık Matrisi 13
2.6 Kayıp Fonksiyonu ve Kaybın Rastgele Değişkeni 14
2.7 Eliptik Dağılımlar 15
2.8 İstatiksel Uzaklık Ölçüleri 18
3. PİYASA RİSKİ ÖLÇÜLERİ **21**
3.1 Piyasa Riski Ölçülerinde Aranan Özellikler 21
3.2 Piyasa Riskinin Standart Ölçüleri 23
3.3 Eşik Aşım Metodu 25
3.4 Çarpıklık Risk Ölçüleri 29
3.5 Geriye Dönük Testler 31
4. STRES TESTLERİ **33**
4.1 Stres Testlerine Giriş 33
4.2 Maksimum Kayıp 35
4.2.1 Maksimum kaybın sorunları 39
4.3 Maksimum Beklenen Kayıp 40
5. RİSK YÖNETİMİ **45**
5.1 Risk Dikkate Alınmış Performans Ölçüleri 45
5.2 Sermayenin Alt Portföylere Dağıtımı 47
5.3 Portföye Özgü Risklerin Belirlenmesi 49
5.4 Piyasa Riski Sermaye Gereksiniminin Belirlenmesi 50
6. UYGULAMA **53**
6.1 Veri Analizi 53
6.2 Lineer Portföylerin Piyasa Riski 55
6.3 Entegre Risk Analizi Tasarısı 59
7. SONUÇ ve DEĞERLENDİRME **67**
KAYNAKLAR **69**
EKLER **73**
ÖZGEÇMİŞ **81**

TÜRKÇE KISALTMALAR

AP : Alternatif Performans
BIST : Borsa İstanbul
BDDK : Bankacılık Düzenleme ve Denetleme Kurumu
BP : Beklenen Performans
eksp : Eksponansiyel fonksiyon
GP : Gerçekleşmiş Performans
GPD : Genelleştirilmiş Pareto Dağılımı
inf : İnfimum (en büyük alt sınır) fonksiyonu
KKT : Karush–Kuhn–Tucker
kov : Katkı oranı vektörü
log : Doğal logaritma fonksiyonu
mak : Maksimum fonksiyonu
min : Minimum fonksiyonu
sup : Supremum (en küçük üst sınır) fonksiyonu
TL : Türk Lirası ve referans para birimi
t(∞) : Standart normal dağılım
T(∞) : Normal dağılım
t(v) : v serbestlik dereceli standart t dağılımı
T(v) : v serbestlik dereceli t dağılımı
XELKT : BIST elektrik sektörü endeksi
XGIDA : BIST gıda sektörü endeksi
XTCRT : BIST ticaret sektörü endeksi
XTEK : BIST teknoloji sektörü endeksi

İNGİLİZCE KISALTMALAR

AR : Autoregressive model
CVaR : Conditional Value at Risk (Koşullu Riske Maruz Değer)
EVIM : Extreme Value Analysis in MATLAB
GARCH : Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity
MEL : Maximum Expected Loss (Maksimum Beklenen Kayıp)
ML : Maximum Loss (Maksimum Kayıp)
MLE : Maximum Likelihood Estimation (Maksimum Olabilirlik Tahmini)
TEL : Tail Expected Loss (Kuyruk Beklenen Kaybı)

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 2.1 : Semboller ve eşitlikler.....7
Çizelge 3.1 : Geriye dönük test parametreleri, Jorion (2001)'den alınmıştır. 31
Çizelge 5.1 : Çarpım faktörünün tespiti, Bolgün ve Akçay (2003)'ten alınmıştır. ..52
Çizelge 6.1 : AR(1)+GARCH(1,1) modeli.....54
Çizelge 6.2 : Ortalama ve standart sapma analizi 55
Çizelge 6.3 : Lineer korelasyon matrisi (A).....55
Çizelge 6.4 : ML I 59
Çizelge 6.5 : ML II.....60
Çizelge 6.6 : ML III.....60
Çizelge 6.7 : Eşik aşım metodu I.....61
Çizelge 6.8 : Risklilik analizi I.....61
Çizelge 6.9 : Geriye dönük testler I.....62
Çizelge 6.10 : Geriye dönük testler II. 62
Çizelge 6.11 : Risk dikkate alınmış performans analizi. 63
Çizelge 6.12 : ML IV.....64
Çizelge 6.13 : Risklilik analizi II. 65
Çizelge A.1 : ARCH–LM testi.....75
Çizelge A.2 : Eşik aşım metodu II. 76

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil A.1 : Otokorelasyon: (a)$\{L_i\}$. (b)$\{|L_i|\}$. (c)$\{Lu_i\}$. (d)$\{|Lu_i|\}$..... 74
Şekil A.2 : Kantil–kantil grafiği..... 75
Şekil A.3 : P3 için GPD'nin ampirik veriyle uyumu..... 76
Şekil A.4 : P3+ için GPD'nin ampirik veriyle uyumu..... 76
Şekil A.5 : P3'e ait $e(U)$ grafiği..... 77
Şekil A.6 : P3+'ya ait $e(U)$ grafiği..... 77
Şekil A.7 : P3'e ait k değerleri..... 78
Şekil A.8 : P3'e ait biçim parametreleri..... 78
Şekil A.9 : P3+'ya ait k değerleri..... 79
Şekil A.10 : P3+'ya ait biçim parametreleri..... 79

PİYASA RİSKİ İÇİN MATEMATİKSEL MODELLEME

ÖZET

Genellikle finansal işlemlerin sonucu olan finansal riskler; piyasa riski, kredi riski ve operasyonel risk olarak gruplandırılabilir. Bu çalışma piyasa riski analizi üzerinedir.

Risk yönetiminin farklı konularında farklı piyasa riski modellerinin güvenilirlik ve uygulanabilirlik gibi kriterlere göre öncelikli olarak kullanılmasının, risk yönetiminde etkinliği artıracağı varsayılabilir. Bu yaklaşımda bu modellerin sonuçları arasındaki uyumsuzluklar risk yöneticisinin bilgi ve tecrübesiyle azaltılır. Bu çalışmada piyasa riski modelleri ve risk yönetimi ile ilgili temel bilgiler verildikten sonra, bu yaklaşım temelinde hazırlanan entegre risk analizi tasarısı anlatılmıştır.

VaR, kaybın rastgele değişkeninin belirli bir güven düzeyinde üst sınırı olarak tanımlanır ve kullanım kolaylığı, Basel Komitesi tarafından önerilmesi gibi nedenlerden ötürü piyasa riskinin modellenmesinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Buna karşın VaR alt toplamsal risk ölçüsü olmadığından, finans teorisinin temellerinden biri olan çeşitlendirme ilkesi ile bazı durumlarda çelişir. Ayrıca Basel Komitesi'ne göre VaR modellerinin sonuçları uç piyasa koşullarında güvenilir değildir. Öte yandan kaybın VaR'ı geçmesi durumunda kaybın sürekli rastgele değişkeninin koşullu beklenen değeri olarak tanımlanan TEL, sermayenin korunmasında VaR'a göre daha etkindir ve finans teorisiyle uyumludur.

VaR ve TEL'in hesaplanmasında farklı yaklaşımlar kullanılır. Temel yaklaşımda kaybın rastgele değişkeninin tüm dağılımı dikkate alınır. Alternatif yaklaşımda uç kayıplar uç değer teorisinin sonuçlarına dayanan metotlarla modellenir. Alternatif yaklaşım uç piyasa hareketlerine karşı daha hassastır. Buna karşın uç değerlerin çok boyutta modellenmesi oldukça zordur. Bu nedenlerden ötürü bu çalışmada alternatif yaklaşım piyasa riskinin ve risk dikkate alınmış performansın belirlenmesinde, temel yaklaşım ise portföy oluşturma sürecinin ilk aşamasında kullanılmıştır.

Akla yatkın saf senaryolar kümesi üzerinde kayıp fonksiyonunun en küçük üst sınırı olarak tanımlanan ML, TEL gibi finans teorisiyle uyumludur. Buna karşın ML'nin piyasa riski ölçüsü olarak birçok sorunu vardır. Bunlardan en önemlisi, VaR ve TEL'den farklı olarak ML'nin iyi tanımlanmış risk ölçüsü olmamasıdır. Yani iki farklı portföyün kaybın rastgele değişkenlerinin dağılımının aynı olması, bu portföylerin ML'sinin aynı olmasını gerektirmez.

Stres testleri, uç ama olası kayıplara neden olabilecek durumları tanımlama ve yönetme sürecinde kullanılan teknikler bütünüdür ve genellikle VaR modellerinin tamamlayıcısı olarak risk yönetiminde kullanılmaktadır. Basel Komitesi'ne göre stres senaryoları akla yatkın olmalı, uç kayıpları ortaya çıkarmalı ve piyasa riskinin azaltılmasına yardımcı olmalıdır. ML'nin stres senaryosu bu özellikleri taşır. Bu nedenle ML bu çalışmada stres testi olarak portföye özgü risklerin belirlenmesinde ve azaltılmasında kullanılmıştır.

MATHEMATICAL MODELING FOR MARKET RISK

SUMMARY

Financial risks, which are mainly the results of the financial transactions, can be grouped into market risk, credit risk and operational risk. I focus on market risk in this study.

I believe that it increases the efficiency in risk management to use primarily the different market risk models in the different issues of risk management based on their properties such as reliability and practicality. In this approach, risk manager reduces the inconsistencies in the results of these models with his knowledge and experience. In this study, after the fundamentals of the market risk models and risk management are given, I present an integrated risk analysis scheme, which is prepared based on the given approach.

VaR is defined as the supreme of the loss random variable at the some degree of the confidence. It is commonly used in modeling market risk due to the ease of usage and the recommendation of the Basel Committee. However, it is not a subadditive risk measure. Thus, in some cases, VaR contradicts with the principle of diversification, which is one of the bases of finance theory. Furthermore, according to the Basel Committee, its results are not reliable in the extreme market conditions. On the other hand, TEL, which is defined as the conditional expectation of the loss continuous random variable when loss exceeds VaR, is more efficient in preserving capital than VaR and consistent with finance theory.

The different approaches are used in calculating VaR and TEL. In the fundamental approach, the whole distribution of the loss random variable is used. In the alternative approach, the extreme losses are modeled with the methods, which are based on the results of extreme value theory. The alternative approach is more sensitive to the extreme market movements. However, it is hard to model the extreme values in multiple dimensions. Thus, the alternative approach is not efficient in capital allocation. In this study, I use the alternative approach in determining market risk and risk–adjusted performance whereas I use the fundamental approach in the first step of capital allocation process.

ML, which is defined as the supreme of the loss function on the set of the plausible pure scenarios, is a coherent risk measure like TEL. However, it has several shortcomings as a market risk measure. The most import of them is that ML is not a well–defined risk measure unlike TEL and VaR i.e. when the distributions of two different portfolios' loss random variable are the same, their ML can be different. Note that this property is generally called as law invariance in the literature.

Stress tests are the set of techniques that are used in the process of defining and managing the situations that may lead to the extreme but plausible losses. They are generally used in risk management by being complementary of the VaR models. According to the Basel Committee, a stress scenario should be plausible, severe and

suggestive to risk reduction action. The stress scenario of ML meets all of these properties. Thus, I use ML as a stress test in determining and reducing the specific risks of the portfolios in this study.

Let electricity, food, trade and technology sector indices listed on BIST be shown with XELKT, XGIDA, XTCRT and XTEK respectively. I calculate the returns of them for 3008 session between 04.01.2007 and 31.12.2012 by using closing prices.

In this study, I give the results of data analysis where data set belongs to training period (T1) consisting of the first 1504 session. I also backtest the given market risk models in the testing period (T2) consisting of the last 1504 session. Furthermore, I apply the integrated risk analysis scheme on the real data set of these four sector indices in T3 consisting of the first 20 session of T2. The outline of the integrated risk analysis scheme, of which main aim is to increase the durability of the institute towards the extreme market movements whereas its profitability is not ignored, is given below.

I prefer TEL in determination of market risk and risk–adjusted performance since TEL is consistent with finance theory and quite successful in catching the extreme market movements. Since VaR is the standard measure of market risk, I do not neglect the results of VaR in these issues. Furthermore, I use the alternative performance in the risk adjusted performance analyses in addition to the expected performance to increase the reliability of these analyses.

I assume on the some market risk models that the distribution of the risk factor returns (r) is T(4) with four variables based on the results of AR(1)+GARCH(1,1) model. In the first step of capital allocation process, I calculate the linear portfolio (P1) that maximizes expected performance in T3 under this assumption. Note that P1+ is the linear portfolio, which is formed by multiplying the sensitivity vector of P1 by –1.

I use ML calculated under the same assumption in determination of the specific risks of P1. I find that P1 is extremely sensitive to the extreme movements of the XGIDA. In the second step of this process, to solve this problem, I close the weights of the indices to 0.25 with the condition that they are in the same order by using contribution ratio vectors belonging to P1 and P1+. I call this linear portfolio as P2. I am indifferent between P1 and P2 when I use ML as a market risk measure. However, when I compare the related contribution ratio vectors, I see that market risk is distributed more smoothly in P2 than in P1 similar to the relationship between P2+ and P1+. Thus, I prefer P2 to P1.

Even if the expected performance of P2 in T3 is quite high, its alternative performance in this period is negative. This is because I use different market risk models in the different issues of risk management. In the third step of this process, to solve this problem, I form another linear portfolio (P3) that includes the XTEK short position instead of the XTEK long position, of which alternative performance in T3 is negative, where the weights of the other indices are in the same order. I see that even if P3, which is well–diversified like P2, is not the optimal portfolio, it meets the expectations about market risk and risk adjusted performance. Thus, the process of capital allocation is terminated. It can be also approved with benchmarking that the given process can be repeated once in 10 working days, which is the length of the period for the market risk analysis according to the Basel Committee.

If the portfolio formed in the first step has a nonlinear loss function, it can be done some modifications in the given process to decline the processing load. For example, market risk–expected profit optimization can be preferred in this step where market risk is defined with a convex risk measure such as CVaR, which is the generalization of TEL to the discontinuous loss random variables. Note that even if ML is a convex risk measure, it is hard to use it in this optimization problem since ML is defined by an optimization problem.

1. GİRİŞ

Portföyün piyasa riski, belirli bir periyotta portföy değerinin piyasa etkileriyle olumsuz yönde değişme ihtimalinden kaynaklanır. Buna karşın farklı piyasa riski tanımlarıyla birçok piyasa riski ölçüsü oluşturulmuştur. Bununla birlikte bir piyasa riski ölçüsü için farklı hesaplama yöntemlerine dayanan birden çok piyasa riski modeli olabilir. Risk yönetiminin farklı konularında farklı piyasa riski modellerinin belirli kriterlere göre öncelikli olarak kullanılmasının risk yönetiminde etkinliği artıracağı inancı temelinde oluşturulan entegre risk analizi tasarısı bu çalışmanın temel motivasyon kaynağıdır.

Gerçek anlamıyla piyasa riski, piyasadaki tüm varlıkların değerindeki genel düşüş riskinden kaynaklanır ve portföy çeşitlendirilse bile ortadan kaldırılamaz. Getirileri arasında yüksek ilişki bulunmayan birçok finansal varlıktan oluşan (çeşitlendirilmiş) bir portföyün piyasa riski ise gerçek anlamıyla piyasa riskine oldukça yakındır. Bu çalışmada piyasa riski ifadesi ilgili portföyün piyasa riskini ifade etmek için kullanılmıştır.

Tahviller, hisse senetleri, yabancı para birimleri ile birlikte altın, gümüş, bakır gibi değerli mallar ve vadeli kontrat, opsiyon gibi türev ürünler finansal varlıklara örnek olarak gösterilebilir. Buna göre risk faktörleri, hisse senetlerinin ve değerli malların fiyatları ile kur ve faiz oranlarıdır. Bunların getirileri portföy değerindeki değişimi belirler (Brigham ve Houston, 2009).

Kısa pozisyon, farklı portföy yönetim stratejilerinde farklı amaçlarla kullanılan bir finansal araçtır. Bununla birlikte yatırımcının bir finansal varlıkta uzun pozisyon yerine kısa pozisyon almasının temel nedeni, ilgili finansal varlığın değerinin belirli bir periyotta düşeceğini öngörmesidir. Kısa pozisyon alma ile ilgili farklı ülkelerde farklı düzenlemeler mevcuttur (Altaş, 2011). Buna karşın bu çalışmada kısa pozisyon alma ile ilgili herhangi bir sınırlama getirilmemiştir ve bunun getirdiği ek maliyetler ihmal edilmiştir.

Risk nötr dünyanın aksine gerçek dünyada yatırımcı genellikle riskten kaçınır ve finansal riski yüksek olan finansal varlıkların daha fazla getiri getirmesini bekler. Bu nedenle piyasa riski modellerinde risk nötr getiri yerine gerçekleşmiş getirilerin zaman serileri kullanılır (Wilmott, 2007). Bu çalışmada bu zaman serilerinin tam olarak ulaşılabilir olduğu varsayılmıştır. Aksi durumlarda Ekşi (2005)'te de verildiği üzere koşullu risk ölçüleri tanımlanabilir.

Bu çalışmanın ilgi alanında olan (tek periyotlu) piyasa riski ölçüleri, ilgili periyotta portföy yapısının korunduğu varsayımına dayanır. Uluslararası Ödemeler Bankası nezdinde faaliyet gösteren ve önerileri yerel denetim kurumu (BDDK) için rehber niteliğinde olan Basel Komitesi, bu periyotun uzunluğunun 10 işlem günü olarak belirlenmesini ve VaR modellerinin 0.99 güven düzeyinde kurulmasını önermektedir (Bolgün ve Akçay, 2003). Bu çalışmada Basel Komitesi'nin bu önerileri diğer piyasa riski ölçüleri için de dikkate alınmıştır.

Bu çalışmanın ana hatları şu şekildedir. Bölüm 2'de temel matematiksel ve istatiksel bilgiler verilmiştir. Bölüm 3'te piyasa riski ölçülerinde aranan özelliklerle birlikte riske maruz değer (VaR), kuyruk beklenen kaybı (TEL) ve koşullu riske maruz değer (CVaR), Bölüm 4'te uç ama olası kayıpların araştırılmasında kullanılan stres testleri anlatılmıştır. Bölüm 5'te bunların risk yönetimindeki temel kullanım alanları verilmiştir. Bölüm 6'da Borsa İstanbul'un (BIST) dört sektör endeksinin gerçek verilerine dayanan bir uygulama üzerinden entegre risk analizi tasarısı anlatılmıştır. Bölüm 7'de ise bu çalışmanın teorik ve uygulama kısımları ile ilgili bazı değerlendirmeler yapılmıştır.

2. PİYASA RİSKİ MODELLERİNE GİRİŞ

Piyasa riski modellerinin ve stres testlerinin oluşturulması ve bunların risk yönetimi faaliyetlerinde kullanılabilmesi için gerekli olan matematiksel ve istatiksel altyapının kurulması amacı doğrultusunda oluşturulan bu bölümde, oldukça geniş bir yelpazede bilgiler verilmiştir.

2.1 Temel Bilgiler

Lerner (2008) ve Tokaslan (2009) temel alınarak hazırlanan bu alt bölümde, genel olarak matrisler ve konveks fonksiyonlar tanıtılmıştır.

Tanım 2.1: *m* satır, *n* sütundan oluşan reel sayı matrisi $B_{m\times n}=\left[b_{i,j}\right]$ ile gösterilsin. *n* boyutlu reel sayılar uzayı $\Omega=\mathbb{R}^n$ olsun.

i. $B_{n\times n}$ kare matris, $B_{1\times n}=\left[b_k\right]$ satır vektörü ve $B_{m\times 1}=\left[b_k\right]$ sütun vektörü olarak adlandırılır.

ii. $B_{m\times n}$'nin lineer bağımsız satır (sütun) sayısı $B_{m\times n}$'nin rankıdır. Tam rank matrislerin rankı $\min\left(m,n\right)$'ye eşittir.

iii. $B_{n\times n}$'nin tersi varsa, $B_{n\times n}$ tekil olmayan matristir. $B_{n\times n}$'nin tersi B^{-1} ile gösterilir.

iv. $B_{m\times n}$'nin transpozu B^T ile gösterilsin. $C^T=C^{-1}$ ise $C_{n\times n}$ ortogonal matristir. $C^T=C$ ise $C_{n\times n}$ simetrik matristir.

v. $C_{n\times n}$'nin özdeğerlerinin çarpımı, $C_{n\times n}$'nin determinantıdır. Bu determinant $\det C$ ile gösterilir.

vi. $C_{n\times n}$'nin köşegeni altındaki (üstündeki) elemanları 0 ise $C_{n\times n}$ üst (alt) üçgen matristir. Hem alt üçgen hem de üst üçgen olan matrise, köşegen matris denir.

vii. $C_{n\times n}$ simetrik matris olsun. **(2.1)**'de verilen eşitsizlik sağlanıyorsa, $C_{n\times n}$ pozitif tanımlıdır. **(2.2)**'de verilen eşitsizlik sağlanıyorsa, $C_{n\times n}$ pozitif yarı tanımlıdır.

$$x^T Cx > 0, \forall\, x_{n\times 1} \in \Omega \tag{2.1}$$

$$x^T Cx \geq 0, \forall\, x_{n\times 1} \in \Omega \tag{2.2}$$

Önerme 2.2: i. Simetrik matrislerin özdeğerleri reel sayıdır ve farklı özdeğerlere karşı gelen özvektörleri ortogonaldir. Ayrıca simetrik matrislerin özvektörleri kullanılarak Ω için ortogonal baz matrisi elde edilebilir. Bu matrisin satır (sütun) vektörleri Ω için ortonormal baz oluşturur.

ii. Bir kare matris tekil değildir ancak ve ancak bu matris tam rank matristir veya bu matrisin determinantı 0'dan farklıdır. Tekil olmayan matrislerin özdeğerleri, ters matrislerinin özdeğerlerinin çarpmaya göre tersidir.

iii. Pozitif tanımlı matrislerin özdeğerleri pozitiftir. Pozitif yarı tanımlı matrislerin özdeğerleri negatif değildir. Pozitif tanımlı matrisler tekil değildir. Ayrıca bu matrislerin ters matrisleri de pozitif tanımlıdır.

Tanım 2.3: (2.3)'te verilen şart sağlanıyorsa, A konveks kümedir.

$$\lambda x + (1-\lambda) y \in A, \forall\, \lambda \in (0,1)\ ve\ \forall\, (x,y) \in A \times A \tag{2.3}$$

Tanım 2.4: $A \subset \Omega$ konveks küme olsun ve $g : A \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu tanımlansın. Sınır noktalarında tek yönlü olmak üzere *k.* dereceden kısmi türevleri A üzerinde sürekli olan fonksiyonlar uzayı $C^k(A)$ ile gösterilsin.

i. $x_{m\times 1} = g\left(y_{n\times 1}\right) \in C^1(A)$ iken jakobiyen matris **(2.4)**'teki gibi tanımlanır.

$$J_{m\times n}(y) = \left[J_{i,j}(y)\right] = \left[\frac{\partial g_i(y)}{\partial y_j}\right] \tag{2.4}$$

ii. $x_{1\times 1} = g\left(y_{n\times 1}\right) \in C^1(A)$ iken gradyan (satır) vektörü **(2.5)**'teki gibi tanımlanır.

$$\nabla g(y) = J_{1\times n}(y) \tag{2.5}$$

iii. $x_{1\times 1} = g\left(y_{n\times 1}\right) \in C^2(A)$ iken hessian (simetrik) matrisi **(2.6)**'daki gibi tanımlanır.

$$H_{n\times n}(y) = \left[\frac{\partial^2 g(y)}{\partial y_i \partial y_j}\right] \tag{2.6}$$

Tanım 2.5: $x, y \in \Omega$ olsun.

i. Ω üzerinde Öklid iç çarpımı **(2.7)**'deki gibi tanımlanır.

$$\langle x, y\rangle = x^T y \tag{2.7}$$

ii. Ω üzerinde Öklid metriği **(2.8)**'deki gibi tanımlanır.

$$\|x - y\| = \langle x - y, x - y\rangle^{0.5} \tag{2.8}$$

Önerme 2.6: $x, y \in \Omega$ olsun. Öklid iç çarpım uzayında **(2.9)**'da verilen Cauchy–Schwartz eşitsizliği geçerlidir.

$$|\langle x, y\rangle| \le \|x\|\|y\| \tag{2.9}$$

Tanım 2.7: $A \subset \Omega$ konveks küme olsun ve $g : A \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu tanımlansın.

i. $m = 1$ olsun. **(2.10)**'da verilen eşitsizlik (kesin olarak) sağlanıyorsa, $g(x)$ (kesin) konvekstir ya da eş değer olarak $-g(x)$ (kesin) konkavdır.

$$\begin{aligned} &g\left(\lambda x + (1-\lambda) y\right) \le \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y), \\ &\forall\, \lambda \in (0,1)\ ve\ \forall\, (x,y) \in A \times A - \{(x,x)\} \end{aligned} \tag{2.10}$$

ii. $m = n$ olsun. **(2.11)**'de verilen eşitsizlik (kesin olarak) sağlanıyorsa, $g(x)$ (kesin) monotondur. $n = 1$ iken (kesin) monoton fonksiyon, (kesin) artan fonksiyondur.

$$\langle g(x)-g(y),\ x-y\rangle \geq 0,\ \forall (x,y)\in A\times A-\{(x,x)\} \qquad \textbf{(2.11)}$$

iii. $\forall \lambda \in (0,1)$ için **(2.12)**'de verilen eşitlik sağlanıyorsa, $g(x)$ afin fonksiyon olarak adlandırılır. $m=1$ iken bunlar hem konveks hem de konkav fonksiyondur.

$$g(\lambda x+(1-\lambda)y)=\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y) \qquad \textbf{(2.12)}$$

Tanım 2.8: i. $x_{n\times 1}=g(y_{n\times 1})\in C^1(\Omega)$ tersi olan fonksiyon olsun. **(2.13)**'te verilen şartı sağlıyorsa, bu dönüşüm düzgün koordinat dönüşümü olarak adlandırılır.

$$\det J(y)\neq 0,\forall\ y\in\Omega \qquad \textbf{(2.13)}$$

ii. *B* tekil olmayan sabit matris ve *b* sabit vektör olsun. **(2.14)**'te verilen afin fonksiyonla tanımlanan dönüşüm, afin koordinat dönüşümü olarak adlandırılır.

$$x_{n\times 1}=b_{n\times 1}+B_{n\times n}y_{n\times 1} \qquad \textbf{(2.14)}$$

Hatırlatma: Afin koordinat dönüşümleri bu çalışmada birçok yerde kullanılmıştır. Bunlar tanımları gereği düzgün koordinat dönüşümleridir.

Önerme 2.9: $A\subset\Omega$ konveks küme olsun ve $g:A\to\mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlansın.

i. Bu fonksiyon konveks ise süreklidir ve hemen hemen her yerde (*A*'nın Lebesque ölçüsü 0 olan bir alt kümesi dışında) türevlidir.

ii. $g(y)\in C^1(A)$ olsun. $g(y)$ (kesin) konvekstir ancak ve ancak $(\nabla g(y))^T$ (kesin) monotondur.

iii. $g(y)\in C^2(A)$ olsun. $g(y)$ konvekstir ancak ve ancak $H(y),\forall y\in A$ için pozitif yarı tanımlıdır.

iv. $g(y)\in C^2(A)$ olsun. $g(y)$ kesin konvekstir ancak ve ancak $H(y),\forall y\in A$ için pozitif tanımlıdır.

Bölüm 2.1'de verilmeyen bazı sembollerin ve eşitliklerin ilk olarak kullanıldıkları alt bölüm Çizelge 2.1'de verilmiştir.

Çizelge 2.1 : Semboller ve eşitlikler.

Semboller ve Eşitlikler	Açıklama	Bölüm
(Ω, F_n, P)	Genel olasılık uzayı	2.3
$X \sim^a P$, $X =^d Y$	Rastgele vektörlerin dağılımları	2.3
$\{r_{i,j}\}$	Getirilerin zaman serisi	2.4
z_p	t(∞)'un tablo değeri	2.4
$\to d^-$	d'ye soldan yaklaşma	2.5
A	Lineer korelasyon (simetrik) matrisi	2.5
$S = köşegen(\sigma)$	Standart sapma (köşegen) matrisi	2.5
$\sum = SAS = V^T V$	Pozitif tanımlı ortak oynaklık matrisinin Cholesky ayrışımı	2.5
$L(r) = V_0 - V(r)$	Kayıp fonksiyonu	2.6
$\mu = E(r)$	Ortalama vektörü	2.6
$a^T = \nabla V(\mu)$	Hassaslık (satır) vektörü	2.6
$G = H(\mu)$, $K = V(\mu) - V_0$	Hessian matrisi ve öteleme sabiti	2.6
L	Kaybın rastgele değişkeni	2.6
$F(y)$	L'nin dağılımının birikimli olasılık yoğunluk fonksiyonu	2.6
$E_n(\mu, s^2\Sigma, g_n)$	Eliptik dağılım	2.7
μ_p , $\sigma_p{}^2$	$-L$'nin koşullu ortalaması ve varyansı	2.7
Lu	Standartlaştırılmış kaybın rastgele d.	2.7
$A_h = \{r \in \Omega : Maha^2(r) \le h\}$	Akla yatkın saf senaryolar kümesi	2.8
$\chi^2_{n,c}$	Ki–kare dağılımının tablo değeri	2.8
$\frac{dQ}{dv}$, $D(Q\|\|v)$	Q dağılımının v dağılımına göre olasılık yoğunluğu ve göreceli entropisi	2.8
$X, Y \in T$	Portföyler	3.1
$\{L_i\}$, $\{Lu_i\}$	Kayıpların ve standartlaştırılmış kayıpların zaman serileri	3.3
$r = r^*$	ML'nin stres senaryosu	4.2
R_p , r_p	Piyasa riski ve gerçekleşmiş kar	5.1
$\overline{1}$	1'lerden oluşan sütun vektörü	5.2

2.2 Düzgün Minimizasyon

Boyd ve Vandenberghe (2009) temel alınarak hazırlanan bu alt bölümde, düzgün (konveks) minimizasyon problemlerinin çözümü ile ilgili bilgiler verilmiştir.

Tanım 2.10: $j=1,2,....,m$ ve $i=1,2,....,n$ iken $g_i(x)\in C^1(A)$ konveks fonksiyon, A üzerinde tanımlı olan $h_j(x)$ afin fonksiyon ve $p(x)\in C^1(A)$ olsun.

i. (2.15)'te verilen düzgün minimizasyon problemi primal problem, x primal vektör, konveks ve kapalı olan E uygun çözüm kümesi, $p(x)$ ise amaç fonksiyonu olarak adlandırılır.

$$\inf\{p(x): x\in E\subset A\}=\inf\{p(x): g_i(x)\le 0,\ h_j(x)=0\} \qquad \textbf{(2.15)}$$

ii. λ,ξ dual vektörler olsun. Lagrange fonksiyonu **(2.16)**'daki gibi tanımlanır. **(2.17)**'de verilen maksimizasyon problemi ise dual problemdir.

$$Lg(x,\lambda,\xi)=p(x)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i(x)+\sum_{j=1}^{m}\xi_j h_j(x) \qquad \textbf{(2.16)}$$

$$\sup\{\inf\{Lg(x,\lambda,\xi): x\in A\}: \lambda_i\ge 0\} \qquad \textbf{(2.17)}$$

iii. (2.18)'de verilen zayıf dualite, tüm minimizasyon problemlerinde geçerlidir. Burada x^*,λ^*,ξ^* ilgili problem için optimal vektörlerdir. Ayrıca eşitlik kesin olarak sağlanıyorsa, düzgün minimizasyon probleminde güçlü dualite vardır.

$$\inf\{Lg(x,\lambda^*,\xi^*): x\in A\}\le p(x^*) \qquad \textbf{(2.18)}$$

Teorem 2.11: (2.15)'te verilen düzgün minimizasyon probleminde güçlü dualite varsa, primal ve dual problemlerin kısıtlarının sağlanmasına ek olarak **(2.19)**'daki eşitlikler de sağlanır. Bu dört koşula Karush–Kuhn–Tucker (KKT) koşulları denir.

$$\begin{aligned}&\lambda_i g_i(x^*)=0,\ \forall i\\ &\nabla Lg(x,\lambda^*,\xi^*)\big|_{x=x^*}=0\end{aligned} \qquad \textbf{(2.19)}$$

Teorem 2.12: $p(x)$ konveks fonksiyon ve $\exists\, x^+ \in C$ öyle ki $g_i\left(x^+\right) < 0, \forall\, i$ olsun.

i. (2.15)'te verilen düzgün konveks minimizasyon probleminde güçlü dualite vardır. Ayrıca ilgili vektörlerin optimal vektör olmaları için gerek ve yeter şart KKT koşullarını birlikte sağlamalarıdır.

ii. Primal optimal vektör hem yerel minimum noktası hem de global minimum noktasıdır. Ayrıca amaç fonksiyonu kesin konveks ise primal optimal vektör tektir.

Hatırlatmalar: i. Konveks olmayan düzgün minimizasyon problemlerinde güçlü dualite varsa, KKT koşulları ile hareketsiz noktalar belirlenir ve bu noktaların yerel minimum noktası olup olmadıkları tanımlanan ek şartlar ile araştırılır. Ayrıca bu tür problemlerde bir yerel minimum noktası, global minimum noktası olmayabilir.

ii. (2.20)'de verilen eşitlik geçerli olduğundan, düzgün konkav maksimizasyon problemleri ile düzgün konveks minimizasyon problemleri eşdeğer görülebilir.

$$\sup p(x) = -\inf - p(x) \qquad \textbf{(2.20)}$$

2.3 Rastgele Vektörler (Değişkenler)

Zitkovic (2010) ve Liu (2011) temel alınarak hazırlanan bu alt bölümde, rastgele vektörler (değişkenler) tanıtılmıştır.

Tanım 2.13: $\Omega = \mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı açık ve kapalı kümeleri içeren en küçük sigma cebir olan Borel kümeler ailesi F_n ile gösterilsin.

i. (2.21)'de verilen şartları sağlıyorsa, $P : F_n \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu olasılık ölçüsü (dağılımı) olarak adlandırılır. Buna göre genel olasılık uzayı $\left(\Omega, F_n, P\right)$ ile gösterilir.

$$P(\Omega) = 1 \; ve \; P(\varnothing) = 0$$

$$A_i \cap A_j = 0, \forall\, i \neq j \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right) \qquad \textbf{(2.21)}$$

ii. $X : \Omega \to \mathbb{R}^m$ ölçülebilir fonksiyonu **(2.22)**'de verilen şartı sağlar ve $m > 1$ iken rastgele vektör, $m = 1$ iken rastgele değişken olarak adlandırılır. Bunun asimptotik

dağılımının P olduğu $X \sim^{a} P$ ile X ve Y rastgele vektörlerinin (değişkenlerinin) dağılımlarının aynı olduğu $X =^{d} Y$ ile gösterilir.

$$X^{-1}(B) \in F_n, \forall\, B \in F_m \tag{2.22}$$

iii. $X_{n\times 1} \sim P$ olsun. P dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu ve birikimli olasılık yoğunluk fonksiyonu sırasıyla **(2.23)**'teki gibidir.

$$\begin{aligned} f(x) &= P(X_1 = x_1,\, X_2 = x_2, \ldots\ldots, X_n = x_n) \geq 0 \\ F(x) &= P(X_1 \leq x_1,\, X_2 \leq x_2, \ldots\ldots, X_n \leq x_n) \geq 0 \end{aligned} \tag{2.23}$$

İlgili rastgele değişkenlerin bağlılık yapısını belirleyen kopula fonksiyonu **(2.24)**'teki gibidir.

$$F(x) = Cf\left(P(X_1 \leq x_1), P(X_2 \leq x_2), \ldots\ldots, P(X_n \leq x_n)\right) \tag{2.24}$$

Önerme 2.14: i. P dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu **(2.23)**'teki gibi olsun. **(2.13)**'te verilen koordinat dönüşümü altında, bu fonksiyon **(2.25)**'teki gibidir.

$$h(y) = (f \circ g)(y)\left|\det J(y)\right| \tag{2.25}$$

ii. İlgili rastgele değişkenlerin marjinal dağılımları sürekli ise kopula fonksiyonu tek olarak belirlenir. Ayrıca bu rastgele değişkenlerin bağımsız olması için gerek ve yeter şart **(2.26)**'da verilen eşitliğin geçerli olmasıdır.

$$F(x) = P(X_1 \leq x_1)P(X_2 \leq x_2)\ldots\ldots P(X_n \leq x_n) \tag{2.26}$$

2.4 Finansal Zaman Serileri

Breuer (2007), Minkah (2007), Alexander ve Leigh (1997) ve Karlsson (t.y.) temel alınarak hazırlanan bu alt bölümde, finansal zaman serilerinin modellenmesi ile ilgili bilgiler verilmiştir.

Tanım 2.15: $j = 1, 2, \ldots\ldots, n$ risk faktörü indeksi ve $i = 0, 1, 2, \ldots\ldots, m$ seans indeksi olsun.

i. İlgili risk faktörünün değerlerinin zaman serisi $\{P_{i,j}\}$ ile gösterilsin. Bu risk faktörünün getirilerinin zaman serisi **(2.27)**'deki gibi tanımlanır.

$$\{r_{i,j}\} = \left\{-1 + \frac{P_{i,j}}{P_{i-1,j}}\right\} \tag{2.27}$$

ii. Getirilerin (koşulsuz) ortalaması ve varyansı sırasıyla **(2.28)** ve **(2.29)**'daki gibi tanımlanır.

$$Ort_j = m^{-1}\sum_{i=1}^{m} r_{i,j} \tag{2.28}$$

$$Var_j = m^{-1}\sum_{i=1}^{m}\left(r_{i,j} - Ort_j\right)^2 \tag{2.29}$$

Gecikme mesafesi $k < m$ olsun. Ortak varyans ve otokorelasyon katsayısı sırasıyla **(2.30)** ve **(2.31)**'deki gibi tanımlanır.

$$Var_{j,k} = \left(m-k\right)^{-1}\sum_{i=1}^{m-k}\left(r_{i,j} - Ort_j\right)\left(r_{i+k,j} - Ort_j\right) \tag{2.30}$$

$$p_{j,k} = \frac{Var_{j,k}}{Var_j} \in [-1,1] \tag{2.31}$$

iii. Varyans sonlu iken ortalama ve ortak varyans zaman serisi indeksinden bağımsızsa, getirilerin zaman serisi durağandır. *h*, *k* pozitif tam sayılarından bağımsız olarak **(2.32)**'de verilen şart sağlanıyorsa, bu zaman serisi kesin durağandır.

$$\left(r_{i_1,j},\ r_{i_2,j},\ldots\ldots,r_{i_h,j}\right) =^{d} \left(r_{i_1+k,j},\ r_{i_2+k,j},\ldots\ldots,r_{i_h+k,j}\right) \tag{2.32}$$

iv. Koşullu ortalamanın bulunmasında kullanılan AR(1) **(2.33)**'te, koşullu varyansın bulunmasında kullanılan GARCH(1,1) **(2.34)**'te verilmiştir.

$$\mu_{i,j} = a + \theta r_{i-1,j} \tag{2.33}$$

$$\sigma_{i,j}^2 = \Psi + \alpha\sigma_{i-1,j}^2 u_{i-1,j}^2 + \beta\sigma_{i-1,j}^2 \tag{2.34}$$

AR(1)+GARCH(1,1) modelinde, **(2.35)**'teki gibi tanımlanan standartlaştırılmış getirilerin zaman serisinin aynı dağılmış rastgele değişkenlerden oluştuğu varsayılır. Ayrıca bunların (koşullu) ortalaması 0, (koşullu) varyansı ise 1 olarak kabul edilir. Buna göre bu zaman serisi beyaz gürültüdür.

$$\left\{u_{i,j}\right\} = \left\{\frac{r_{i,j} - \mu_{i,j}}{\sigma_{i,j}}\right\} \qquad \textbf{(2.35)}$$

Hatırlatma: i. GARCH(1,1) simetrik model olduğundan, ampirik verilerde görülen getiri ile oynaklık arasında negatif korelasyon olması durumunu (kaldıraç etkisini) ihmal eder.

ii. Yalnızca ilgili periyotun ilk seansı için **(2.33)** ve **(2.34)**'teki ifadeler doğrudan kullanılabilir. Diğer seanslar için yapılan hesaplamalarda ise standartlaştırılmış getirilerin karesi ve getirilerin yerine genellikle bunların koşullu beklenen değeri kullanılır. Bu periyot için koşullu ortalama ve varyans tahmini ise bulunan seanslık değerlerin toplamıdır.

Önerme 2.16: i. AR(1)+GARCH(1,1) modeli parametreleri için bulunan tahminciler **(2.36)**'da verilen eşitsizlikleri sağlıyorsa, getirilerin zaman serisi kesin durağandır.

$$|\theta| < 1, \Psi > 0,\ \alpha, \beta \geq 0, (\alpha + \beta) < 1 \qquad \textbf{(2.36)}$$

ii. t(∞)'un p'ye karşı gelen tablo değeri z_p olsun. **(2.37)**'de verilen şart sağlanıyorsa, getirilerin zaman serisinin durağan olduğu hipotezi p güven düzeyinde reddedilemez.

$$p_{j,k} \in \left[-m^{-0.5} z_{0.5+0.5p},\ m^{-0.5} z_{0.5+0.5p}\right], \forall\ k < m \qquad \textbf{(2.37)}$$

Finansal zaman serileriyle ilgili bazı ampirik gerçekleri verelim. Getirilerin zaman serileri kesin durağan olduğundan, bunlarla oluşturulan piyasa riski modellerinde sahte regresyon sorunu yoktur. Yani risk faktörlerinin getirileri arasındaki ilişki bu modellerde büyük oranda doğru yansıtılır. Buna karşın bu zaman serilerinde geçmiş veriye bağlılık bulunduğundan, bu modellerde farklı model riskleri ortaya çıkar. Örneğin, bu zaman serilerinde düşük seviyede olsa da otokorelasyon vardır. Bu nedenle getirilerin koşulsuz ortalaması, bunların koşullu ortalamasından farklıdır.

Ayrıca mutlak getirilerin zaman serilerinde yüksek otokorelasyon olduğundan, uç piyasa hareketleri ve yüksek (düşük) oynaklıklar toplanma eğilimindedir.

2.5 Ortak Oynaklık Matrisi

Alexander ve Leigh (1997), Longerstaey **(**1996), Liu (2011) ve Mina ve Xiao (2001) temel alınarak hazırlanan bu alt bölümde, ortak oynaklık matrisinin oluşturulmasında kullanılan yöntemler verilmiştir.

Basel Komitesi tarafından en az 1 yıllık tarihsel veri kullanılarak belirlenmesi önerilen *h* seanslık ortak oynaklık simetrik matrisi $\sum$ ile gösterilsin. Bu matrisin her bir elemanı, karşı gelen risk faktörlerinin *h* seanslık ortak oynaklığıdır.

(2.38)'de verilen eşit ağırlıklı hareketli ortalamalar yönteminde, Y tam rank matris ise $\sum$ pozitif tanımlıdır. Aksi takdirde $\sum$ pozitif yarı tanımlıdır.

$$Y_{m\times n} = \left[y_{i,j} \right] = \left[r_{i,j} - Ort_j \right]$$

$$\sum = h\frac{Y^T Y}{m} \qquad \textbf{(2.38)}$$

Önceki seans için bulunan *h* seanslık ortak oynaklık matrisi $\bar{\sum}$ olsun. Eksponansiyel hareketli ortalamalar yönteminde, **(2.39)**'da verilen yinelemeli yapıyla $\sum$ bulunur. Bu yöntemde günümüz koşullarına daha yakın verilerin (en azından pozitif yarı tanımlı olan) $\sum$'ya etkisi daha çoktur. Burada $\lambda \to 1^-$ olarak belirlenir. Yani λ, 1'den küçük olmakla beraber 1'e oldukça yakındır.

$$\Sigma_{k,j} = h(1-\lambda)\left(y_{m,k} y_{m,j} \right) + \lambda \bar{\Sigma}_{k,j} \qquad \textbf{(2.39)}$$

Verilen hareketli ortalamalar yöntemlerinde, oynaklığın sabit olduğu varsayılmıştır. Bu varsayım ampirik gerçeklerle çeliştiğinden, bu çalışmada AR(1)+GARCH(1,1) modelinin sonuçlarına dayanan aşağıdaki yöntem kullanılmıştır.

Standartlaştırılmış getirilerin lineer korelasyon matrisi A ve elemanları koşullu değerler olan ilgili periyot için standart sapma vektörü σ olsun. Bu periyot için $\sum$ **(2.40)**'ta verilen formülle belirlenebilir. Burada S tam rank, köşegen matristir.

$$\sum = SAS = köşegen(\sigma)\, A\, köşegen(\sigma) \tag{2.40}$$

A pozitif tanımlı olsun. Buna göre $\sum$ da pozitif tanımlıdır. Ayrıca V tam rank, üst üçgen matris olmak üzere bu matrisin **(2.41)**'de verilen Cholesky ayrışımı yapılabilir.

$$\sum = V^T V \tag{2.41}$$

A, ikinci dereceden momenti sonlu olan rastgele değişkenler arasındaki lineer ilişkiyi gösterir. Bu matris genel olarak rastgele değişkenlerdeki bağlılığı göstermez. Buna karşın dağılımı çok değişkenli eliptik olan rastgele vektörün elamanları arasındaki bağlılığı A tamamen belirler. Bu matris afin koordinat dönüşümlerinde korunsa da bazı düzgün koordinat dönüşümlerinde korunmaz.

2.6 Kayıp Fonksiyonu ve Kaybın Rastgele Değişkeni

Studer (1997) ve Wilmott (2007) temel alınarak hazırlanan bu alt bölümde, kayıp fonksiyonu ve kaybın rastgele değişkeni tanıtılmıştır.

Tanım 2.17: Portföyün ilk durumdaki değeri V_0 olsun ve ilgili periyotta getirilerin rastgele vektörü r ile portföyün Türk Lirası (TL) cinsinden değerini gösteren ve $V(0) \approx V_0$ şartını sağlayan ölçülebilir fonksiyon $V(r)$ ile gösterilsin.

$$L(r) = V_0 - V(r) \tag{2.42}$$

Buna göre kayıp fonksiyonu **(2.42)**'deki gibi tanımlanır. Burada L bu periyotta kaybın rastgele değişkenidir. Bunun dağılımının birikimli olasılık yoğunluk fonksiyonu ve (yalnızca L sürekli rastgele değişken iken var olan) ters birikimli olasılık yoğunluk fonksiyonu ise sırasıyla $F(y)$ ve $F^{-1}(p)$ ile gösterilir.

Hatırlatma: Kayıp fonksiyonu portföydeki finansal varlıkların özelliklerine göre bazen doğrudan bazen de bazı yöntemlerinin yardımıyla belirlenir. Örneğin, türev ürünlerin değeri Black–Scholes gibi yöntemlerle belirlenir.

Önerme 2.18: Elemanları koşullu değerler olan $\mu = E(r)$ ortalama vektörü olarak adlandırılsın ve $\Sigma = V^T V$ olsun.

i. $V(r) \in C^1(\Omega)$ iken **(2.43)**'te verilen lineer ifade Taylor teoreminden elde edilir. Burada hata polinomu en fazla 2. mertebedendir.

$$\begin{aligned} L(r) &\approx \nabla V(\mu)(\mu - r) - V(\mu) + V_0 \\ &\approx a^T(\mu - r) - K \end{aligned} \tag{2.43}$$

ii. $V(r) \in C^2(\Omega)$ iken **(2.44)**'te verilen kuadratik ifade Taylor teoreminden elde edilir. Burada hata polinomu en fazla 3. mertebedendir.

$$\begin{aligned} L(r) &\approx \nabla V(\mu)(\mu - r) - 0.5(\mu - r)^T H(\mu)(\mu - r) - V(\mu) + V_0 \\ &\approx a^T(\mu - r) - 0.5(\mu - r)^T G(\mu - r) - K \end{aligned} \tag{2.44}$$

iii. L düzgün koordinat dönüşümlerinden bağımsızdır. Ayrıca $y = V^{-T}(r - \mu)$ afin koordinat dönüşümü yapıldığında, kuadratik kayıp fonksiyonu **(2.45)**'teki gibidir.

$$\begin{aligned} \tilde{L}(y) &\approx -(Va)^T y - 0.5 y^T V G V^T y - K \\ &\approx -\tilde{a}^T y - 0.5 y^T \tilde{G} y - K \end{aligned} \tag{2.45}$$

2.7 Eliptik Dağılımlar

Landsman ve Valdez (2003), Valdez ve Dhaene (2005), Frahm (2004) ve Engels (2004) temel alınarak hazırlanan bu alt bölümde, (dar tanımıyla) eliptik dağılımların genel özellikleri verilmiştir. Bunların daha genel tanımı için Frahm (2004)'e bakın.

Tanım 2.19: Eliptik dağılımlar, olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilen yapıda olan dağılımlardır.

$$\begin{aligned} f(r) &= c_n (\det \phi)^{-0.5} g_n\left((r - \mu)^T \phi^{-1} (r - \mu)\right) \\ r &\sim E_n(\mu, \phi, g_n) \end{aligned} \tag{2.46}$$

Burada n boyut sayısı olmak üzere negatif değer almayan ve sürekli olan $g_n(u)$ yoğunluk üreten fonksiyon, $c_n > 0$ standartlaştırma sabiti, sonlu olan μ ortalama vektörü, pozitif tanımlı ve sonlu olan ϕ ise dağınıklık matrisi olarak adlandırılır.

Önerme 2.20: i. Eliptik dağılımlar ortalamasına göre simetrik, sürekli dağılımlardır. Ayrıca T(v) ile gösterilen *v* serbestlik dereceli t dağılımı ve T(∞) ile gösterilen normal dağılım eliptik dağılımdır.

ii. *v* pozitif tamsayı olsun. **(2.47)**'de sırasıyla verilen T(v) ve T(∞)'un yoğunluk üreten fonksiyonları hem kesin azalandır hem de kesin pozitiftir. (*v* pozitif reel sayı iken de yoğunluk üreten fonksiyon verilen özellikleri taşır.)

$$g_n(u) = \left(1 + \frac{u}{v}\right)^{-(n+v)/2}$$

$$g_n(u) = \text{ekps}(-u/2) = \lim_{v\to\infty}\left(1 + \frac{u}{v}\right)^{-(n+v)/2} \qquad \textbf{(2.47)}$$

iii. Pozitif tanımlı ve sonlu olan $\sum$ için **(2.48)**'de verilen bilgi geçerlidir. Burada *s* dağınıklık katsayısı olarak adlandırılır.

$$r \sim E_n(\mu, \phi, g_n) \Rightarrow \phi = s^2 \sum = s^2 V^T V \qquad \textbf{(2.48)}$$

T(v) için $v \in (0,2]$ iken $\sum$ sonlu olarak bulunamasa da $v > 2$ iken $s = \left((v-2)/v\right)^{0.5}$ olarak bulunur. Buna göre T(∞) için $s = 1$ olarak bulunur.

Önerme 2.21: Eliptik dağılımlar, afin dönüşümlerde **(2.49)**'da verilen yapıyı korur. Burada *b* ve *B* sabit matrislerdir. Diğer çok değişkenli dağılımlarda da ortalama vektörü ve ortak oynaklık matrisi için burada verilen bilgiler geçerlidir.

$$r \sim E_n(\mu, s^2\Sigma, g_n) \Leftrightarrow b_{m\times 1} + B_{m\times n} r \sim E_m(b + B\mu, s^2 B \sum B^T, g_m) \qquad \textbf{(2.49)}$$

Sonuç 2.22: i. (2.50)'de görüldüğü üzere standart eliptik dağılımlar ortogonal koordinat dönüşümlerinden bağımsızdır. Burada *I* birim matristir.

$$x \sim E_n(0, I, g_n) \; ve \; Q^{-1} = Q^T \Rightarrow Qx =^d x \qquad \textbf{(2.50)}$$

ii. (2.51)'de verilen varsayımlar altında, **(2.52)**'de verilen bilgi geçerlidir. Bu tür portföylere lineer portföy denir.

$$L(r) = a^T(\mu - r) - K \text{ ve } r \sim E_n(\mu, s^2 V^T V, g_n) \tag{2.51}$$

$$L \sim E_1\left(-K, \|sVa\|^2, g_1\right) = E_1\left(-\mu_p, s^2\sigma_p^2, g_1\right) \tag{2.52}$$

(2.52)'de verilen bilgi geçerli iken **(2.53)**'teki afin dönüşüm uygulamada sıklıkla kullanılır. Ayrıca standartlaştırılmış kaybın 0 ortalamalı, 1 varyanslı rastgele değişkeni $Lu = sY$ olarak tanımlanır.

$$\frac{L + \mu_p}{s\sigma_p} = Y \sim E_n(0, 1, g_n) \tag{2.53}$$

iii. (2.54)'te verilen afin dönüşümler (izdüşümler), *r*'nin eliptik dağılımının iki ayrık parçaya ayrılabileceğini göstermektedir. Buna göre *r*'yi oluşturan rastgele değişkenlerin marjinal dağılımları da aynı tür eliptik dağılımdır.

$$\begin{aligned} r_1 &= C_{k\times n} r \sim E_k\left(\mu_1, s^2 \Sigma_1, g_k\right) \\ r_2 &= D_{(n-k)\times n} r \sim E_{n-k}\left(\mu_2, s^2 \Sigma_2, g_{n-k}\right) \end{aligned} \tag{2.54}$$

iv. (2.55)'te verilen afin koordinat dönüşümü, Monte Carlo benzetimiyle dağılımı standart eliptik olan *z* rastgele vektörü için temsili bir vektör oluşturulduktan sonra kayıp için parasal bir değerin bulunmasında kullanılır.

$$\mu + sV^T z = r \sim E_n(\mu, s^2 V^T V, g_n) \Leftrightarrow z \sim E_n(0, I, g_n) \tag{2.55}$$

Önerme 2.23: r_1 ve r_2 arasındaki ortak oynaklık yapısını gösteren matris $\tilde{\Sigma}_{k\times n-k}$ olsun. Buna göre $r_2 = r_2^+$ iken r_1'in koşullu dağılımı **(2.56)**'daki gibidir.

$$r_1 \sim E_k\left(\begin{array}{l} \mu_1 + \tilde{\Sigma}_{k\times n-k}\,\Sigma_2^{-1}\left(r_2^+ - \mu_2\right), \\ s^2\left[\Sigma_1 - \tilde{\Sigma}_{k\times n-k}\,\Sigma_2^{-1}\left(\tilde{\Sigma}_{k\times n-k}\right)^T\right], g_k \end{array}\right) \tag{2.56}$$

2.8 İstatiksel Uzaklık Ölçüleri

Bu alt bölümde Mahalanobis uzaklığı ve göreceli entropi ile ilgili bilgiler verilmiştir. Mahalanobis uzaklığı ile ilgili bilgiler Studer (1997) ve Breuer (2008) temel alınarak, göreceli entropi ile ilgili bilgiler ise Cover ve Thomas (1991) ve Rigau ve diğ. (2003) temel alınarak hazırlanmıştır.

Tanım 2.24: $d:(W\times W)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x,y,z\in W$ için **(2.57)**'de verilen şartları sağlıyorsa, W kümesi üzerinde metriktir.

$$\begin{aligned} &pozitiflik:\ d(x,x)=0\ ve\ x\neq y\Leftrightarrow d(x,y)>0\\ &simetri:\ d(x,y)=d(y,x)\\ &üçgen\ eşitsizliği:\ d(x,y)+d(y,z)\geq d(x,z)\end{aligned} \tag{2.57}$$

Tanım 2.25: i. $r_1,r_2\in\Omega$ ve $\sum=V^TV$ olsun. Mahalanobis uzaklığı **(2.58)**'deki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} &Maha(r_1,r_2)=\left\|V^{-T}(r_1-r_2)\right\|\\ &Maha(r_1)=Maha(r_1,E(r_1))\end{aligned} \tag{2.58}$$

ii. $r\sim E_n(\mu,s^2V^TV,g_n)$ olsun. **(2.59)**'da tanımlanan A_h kompakt (kapalı ve sınırlı) elipsoittir. Burada $r=r^+$ olması saf senaryosunun akla yatkınlığı, c arttıkça azalır.

$$\begin{aligned} &A_h=\left\{r\in\Omega:Maha^2(r)\leq Maha^2(r^+)=h\right\}\\ &c=P(A_h)\in[0,1]\end{aligned} \tag{2.59}$$

Önerme 2.21'den bilindiği üzere Mahalanobis uzaklık afin koordinat dönüşümlerinde korunur. Buna göre Monte Carlo benzetimiyle dağılımı standart eliptik olan z rastgele vektörü için kesikli dağılım oluşturulduktan sonra, **(2.60)**'ta verilen yaklaşımla c belirlenebilir. Ayrıca eliptik dağılım T(∞) ise n serbestlik dereceli ki–kare dağılımının c'ye karşı gelen tablo değeri $\chi^2_{n,c}$ iken $h=\chi^2_{n,c}$ olarak bulunur.

$$s^{-1}V^{-T}\left(r-\mu\right)=z\sim E_n\left(0,I,g_n\right)$$

$$Maha^2\left(r\right)=Maha^2\left(z\right)=\left\|sz\right\|^2 \qquad \textbf{(2.60)}$$

$$c\approx P\left(\left\|sz\right\|^2\le h\right)$$

Önerme 2.26: i. Mahalanobis uzaklığı Ω üzerinde metriktir.

ii. A_h konveks kümedir.

İspat: i. $r_1,r_2,r_3\in\Omega$ olsun. **(2.61)**'de verildiği üzere üçgen eşitsizliği şartı sağlanır. Buradaki eşitsizlik **(2.9)**'da verilen Cauchy–Schwartz eşitsizliğinden gelmektedir.

$$\begin{aligned} Maha\left(r_3,r_1\right)&=\left\|V^{-T}\left(r_3-r_1\right)\right\|=\left\|V^{-T}\left(r_3-r_2\right)+V^{-T}\left(r_2-r_1\right)\right\| \\ &=\left\|a_1+a_2\right\|=\left(\left\|a_1\right\|^2+\left\|a_2\right\|^2+2\left\langle a_1,a_2\right\rangle\right)^{0.5} \\ &\le\left\|a_1\right\|+\left\|a_2\right\|=Maha\left(r_3,r_2\right)+Maha\left(r_2,r_1\right) \end{aligned} \qquad \textbf{(2.61)}$$

Simetri şartının sağlandığı açıktır. V tam rank matris olduğundan, pozitiflik şartı da sağlanır. Buna göre Mahalanobis uzaklığı Ω üzerinde metriktir.

ii. $\lambda\in\left(0,1\right)$ olsun. **(2.62)**'de verilen eşitsizlik, üçgen eşitsizliğinden gelmektedir. Buna göre $Maha\left(r\right)$ konveks fonksiyondur ve tanımı gereği A_h konveks kümedir.

$$\begin{aligned} Maha\left(\lambda r_1+\left(1-\lambda\right)r_2\right)&\le Maha\left(\lambda r_1,\lambda\mu\right)+Maha\left(\left(1-\lambda\right)r_2,\left(1-\lambda\right)\mu\right) \\ &=\lambda Maha\left(r_1\right)+\left(1-\lambda\right)Maha\left(r_2\right) \end{aligned} \qquad \textbf{(2.62)}$$

Tanım 2.27: $r\in\left(\Omega,F_n,P\right)$ ve $r\sim v$ olsun.

i. (2.63)'te verilen şart $\forall\, A\in F_n$ için sağlanıyorsa, Q dağılımı v dağılımına göre mutlak süreklidir. Bu durum $Q\ll v$ ile gösterilir.

$$v(A)=0\Rightarrow Q(A)=0 \qquad \textbf{(2.63)}$$

ii. $Q \ll v$ olsun. dQ/dv ile gösterilen Q dağılımının v dağılımına göre olasılık yoğunluğu **(2.64)**'teki gibi tanımlanır.

$$Q(A) = \int_A \left(\frac{dQ}{dv} \right) dv, \forall\ A \in F_n \tag{2.64}$$

iii. $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyonu **(2.65)**'te verilen şartları sağlasın.

$$f(1) = 0\ ve\ f(0) = \lim_{u \to 0} f(u) \tag{2.65}$$

Buna göre Q dağılımının v dağılımına göre f–diverjansı **(2.66)**'daki gibi tanımlanır.

$$I_f(Q \| v) = \begin{cases} \int_\Omega f\left(\frac{dQ}{dv} \right) dv,\ Q \ll v \\ \infty,\ değilse \end{cases} \tag{2.66}$$

iv. (2.67)'de verilen kesin konveks fonksiyon ile tanımlanan f–diverjans, göreceli entropi olarak adlandırılır ve $D(Q \| v)$ ile gösterilir.

$$f(u) = \begin{cases} u \log u, u > 0 \\ \lim_{u \to 0} f(u) = 0, u = 0 \end{cases} \tag{2.67}$$

Burada $r \sim Q$ olması karışık senaryosunun akla yatkınlığı, $D(Q \| v)$ azaldıkça artar.

Önerme 2.28: i. dQ/dv hemen hemen her yerde tek olarak belirlenir, negatif değer almaz ve düzgün koordinat dönüşümlerinde korunur.

ii. f–diverjanslar düzgün koordinat dönüşümlerinde korunur ve Q dağılımın konveks fonksiyonudur.

iii. Kesin konveks fonksiyon ile tanımlanan f–diverjanslar, P üzerinde metrik olmanın pozitiflik şartını sağlar.

iv. Göreceli entropi P üzerinde metrik olmanın yalnızca pozitiflik şartını sağlar.

3. PİYASA RİSKİ ÖLÇÜLERİ

Uygulamada sıklıkla kullanılan ve entegre risk analizi tasarısının da temelini oluşturan VaR, TEL ve CVaR ile ilgili bilgiler bu bölümde verilmiştir. Bu kapsamda bunlara ait piyasa riski modelleri tanıtılmış ve bu modellerin (bu tasarıdaki yerlerini de belirleyen) olumlu ve olumsuz yanları özetlenmiştir.

3.1 Piyasa Riski Ölçülerinde Aranan Özellikler

Pflug (2000) ve Ekşi (2005) temel alınarak hazırlanan bu alt bölümde, piyasa riski ölçülerinden beklenen özellikler verilmiştir.

Tanım 3.1: T oluşturulabilecek tüm portföylerin kümesi iken $X,Y\in T$'ye karşı gelen kayıp fonksiyonları sırasıyla $L_X(r)$ ve $L_Y(r)$ olsun.

i. İlgili periyotta piyasa riskinin bir ölçüsü $R:T\to\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ fonksiyonu ile tanımlanır ve piyasa riski bu fonksiyonun değeri arttıkça artar.

ii. (3.1)'de verilen şartları $\forall\, X,Y\in T$ için sağlayan piyasa riski ölçüsüne, parasal risk ölçüsü denir. Parasal risk ölçülerinde piyasa riski TL cinsinden bulunur.

$$\begin{aligned} &monotonluk: L_X(r)\le L_Y(r)\ ,\ \forall\, r\in\Omega \Rightarrow R(X)\le R(Y)\\ &öteleme\ değişmezliği: R(X+d)=R(X)-d,\ \forall\, d\in\mathbb{R}\end{aligned} \qquad \textbf{(3.1)}$$

iii. (3.2)'de verilen şartları $\forall\, X,Y\in T$ için sağlayan parasal risk ölçüsüne, tutarlı risk ölçüsü denir.

$$\begin{aligned} &alt\ toplamsallık: R(X+Y)\le R(X)+R(Y)\\ &pozitif\ homojenlik: R(bX)=bR(X),\ \forall\, b>0\end{aligned} \qquad \textbf{(3.2)}$$

iv. Risk fonksiyonu konveks olan parasal risk ölçüsüne, konveks risk ölçüsü denir.

v. (3.3)'te verilen şartı $\forall X,Y\in T$ için sağlayan piyasa riski ölçüsüne, iyi tanımlanmış risk ölçüsü denir.

$$L_X =^d L_Y \Rightarrow R(X)=R(Y) \tag{3.3}$$

Önerme 3.2: i. *R* tutarlı risk ölçüsü ise aynı zamanda konveks risk ölçüsüdür.

ii. *R* pozitif homojen, konveks risk ölçüsü ise aynı zamanda tutarlı risk ölçüsüdür.

İspat: i. *R* tutarlı risk ölçüsü olsun. $\forall X,Y\in T$ ve $\forall \lambda\in(0,1)$ için **(3.4)**'te verilen bilgiler geçerlidir. Yani $R(X)$ konveks fonksiyondur ve *R* konveks risk ölçüsüdür.

$$\begin{aligned} R(\lambda X+(1-\lambda)Y) &\le R(\lambda X)+R((1-\lambda)Y) \\ &= \lambda R(X)+(1-\lambda)R(Y) \end{aligned} \tag{3.4}$$

ii. *R* pozitif homojen, konveks risk ölçüsü olsun. $b=2$ ve $\lambda=0.5$ iken $\forall X,Y\in T$ için **(3.5)**'te verilen bilgiler geçerlidir. Yani *R* alt toplamsal ve tutarlı risk ölçüsüdür.

$$\begin{aligned} R(X+Y) &= R(b\lambda X+b(1-\lambda)Y) = bR(\lambda X+(1-\lambda)Y) \\ &\le b\lambda R(X)+b(1-\lambda)R(Y) = R(X)+R(Y) \end{aligned} \tag{3.5}$$

TL cinsinden nakit para getirisizdir ve muhtemel kayıpları nötrlemede kullanılabilir. Buna göre öteleme değişmezliği şartının temeli olan **(3.6)**'da verilen bilgi geçerlidir. Ayrıca piyasa riski kadar TL cinsinden nakit para bir portföye eklenirse, yeni portföy kabul edilebilir olur. Yani yeni portföyün piyasa riski pozitif değildir.

$$L_{X+d} =^d -d+L_X \tag{3.6}$$

Tutarlı risk ölçüleri finans teorisiyle uyumludur ve düzenleyici kurumların bakış açısını yansıtır. Parasal risk ölçülerinde aranan ilk şart alt toplamsallık şartıdır. Bu şart piyasa riski ölçüsünün, çeşitlendirme ilkesi ile her durumda uyumlu olması gerektiği düşüncesine dayanır. Pozitif homojenlik şartı ise likit bir piyasada portföyün pozitif yönde lineer olarak değiştirilmesi durumunda, portföyün piyasa riskinin de lineer olarak değişeceği gerçeğine dayanır. Likit olmayan piyasada ise

piyasa riskindeki bu değişimin mutlak değeri, lineer değişimin mutlak değerinden büyüktür. Pozitif homojen olmayan konveks risk ölçüleri bu durumu dikkate alır.

3.2 Piyasa Riskinin Standart Ölçüleri

Rockafellar ve Ursayev (2002), Landsman ve Valdez (2003), Wilmott (2007) ve Pflug (2000) temel alınarak hazırlanan bu alt bölümde, VaR, TEL ve CVaR'a ait piyasa riski modelleri ile ilgili bilgiler verilmiştir.

Tanım 3.3: Güven düzeyi c ile gösterilsin ve $c \to 1^{-}$ olsun.

i. Buna göre VaR_c ve $CVaR_c$ sırasıyla **(3.7)** ve **(3.8)**'deki gibi tanımlanır.

$$VaR_c = \inf\left\{y : F(y) \geq c\right\} \tag{3.7}$$

$$CVaR_c = \left(\frac{F(VaR_c) - c}{1-c}\right) VaR_c + \left(\frac{1 - F(VaR_c)}{1-c}\right) E\left(L \mid L > VaR_c\right) \tag{3.8}$$

ii. L sürekli rastgele değişken olsun. Buna göre VaR_c **(3.9)**'daki gibidir. TEL_c ise **(3.10)**'daki gibi tanımlanır ve $CVaR_c$ ile özdeştir.

$$VaR_c = F^{-1}(c) \tag{3.9}$$

$$TEL_c = E\left(L \mid L > VaR_c\right) \tag{3.10}$$

Önerme 3.4: i. VaR_c iyi tanımlanmış, pozitif homojen ve parasal risk ölçüsüdür. Buna karşın VaR_c tutarlı risk ölçüsü değildir.

ii. $CVaR_c$ iyi tanımlanmış ve tutarlı risk ölçüsüdür. Bu nedenle VaR_c'nin aksine risk minimizasyonunda kullanılmaya elverişlidir.

Önerme 3.5: (3.11)'de verilen hipotezler sağlansın. Yani portföy lineer olsun. İlgili standart eliptik dağılımın ters birikimli olasılık yoğunluk fonksiyonu $S^{-1}(p)$ ile gösterilsin.

$$L(r) = a^T(\mu - r) - K \text{ ve } r \sim E_n(\mu, s^2\Sigma, g_n)$$
$$L(r) = L_{X_1}(r) + L_{X_2}(r) \text{ ve } L_{X_i} \sim E_1(-\mu_i, s^2\sigma_i^2, g_1), i = 1,2 \quad \textbf{(3.11)}$$

i. Buna göre VaR_c ve TEL_c **(3.12)**'deki gibi bulunur.

$$VaR_c = -\mu_p + S^{-1}(c)s\sigma_p$$
$$TEL_c = -\mu_p + s\sigma_p \frac{1}{1-c}\int_c^1 S^{-1}(p)\,dp \quad \textbf{(3.12)}$$

ii. VaR_c çeşitlendirme ilkesi ile uyumludur.

İspat: i. (2.52)'de verilen bilgi geçerli olduğundan, **(2.53)**'te verilen afin dönüşüm yapılsın. Verilen piyasa riski ölçüleri, pozitif homojen ve parasal risk ölçüsüdür. Bu bilgi doğrultusunda **(3.12)**'de verilen eşitlikler VaR_c veya TEL_c' nin tanımından elde edilir.

ii. (3.13)'te verilen bilgi Önerme 2.21'den elde edilir. Burada $p \in [-1,1]$ ilgili rastgele değişkenler arasındaki lineer korelasyon katsayısıdır.

$$L \sim E_1(-\mu_1 - \mu_2, s^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2p\sigma_1\sigma_2), g_1) \quad \textbf{(3.13)}$$

Buna göre **(3.14)**'te verilen bilgiler geçerlidir. Yani VaR_c çeşitlendirme ilkesi ile uyumludur.

$$VaR_c = -\mu_1 - \mu_2 + S^{-1}(c)s(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2p\sigma_1\sigma_2)^{0.5}$$
$$\leq -\mu_1 - \mu_2 + S^{-1}(c)s(\sigma_1 + \sigma_2) = VaR_c(X_1) + VaR_c(X_2) \quad \textbf{(3.14)}$$

$t = 1, 2, \ldots\ldots, h$ ilgili periyot için seans (adım) indeksi olsun. $i = 1, 2, \ldots\ldots, m$ seans indeksi ve $j = 1, 2, \ldots\ldots, n$ risk faktörü indeksi iken $\{r_{i,j}\}$ bilinsin. İlgili adımda 1 ile m arasında düzgün kesikli dağılımda üretilen rastgele sayı s_t ile gösterilsin ve $r_{m+1,j} = r_{s_1,j}$ olarak belirlensin. Burada s_t tüm risk faktörleri için ortaktır.

$$r_{m+t,j} = -1 + \left(1 + r_{s_t,j}\right)\left(1 + r_{m+t-1,j}\right),\ t > 1 \tag{3.15}$$

Tarihsel benzetim yönteminde risk faktörlerinin getirileri ve kaybın parasal değeri için tahmini bir yol, **(3.15)**'te verilen yinelemeli yapı kullanılarak bulunur. Ayrıca **(2.55)**'te verilen afin koordinat dönüşümü, Monte Carlo benzetimiyle kayıp için parasal bir değerin bulunmasında kullanılabilir. Her iki benzetim yönteminde de verilen süreçler binlerce kez tekrarlanırsa, L için oluşturulan kesikli dağılım kullanılarak VaR ve CVaR bulunabilir. Bu benzetim yöntemleri, analitik sonucun elde edilmesinin kolay olmadığı durumlarda sıklıkla kullanılır.

3.3 Eşik Aşım Metodu

Rocco (2011), Breuer (2007), Jorion (2001) ve Liu (2011) temel alınarak hazırlanan bu alt bölümde, uç değer teorisinin sonuçlarına dayanan diğer metotlara göre eldeki verinin daha verimli kullanılmasını sağlayan ve uç piyasa hareketlerini büyük oranda açıklayan eşik aşım metodu ile ilgili bilgiler verilmiştir.

Tanım 3.6: i. $\beta > 0$ ve $z = \left(y - \mu\right)/\beta$ olsun. Genelleştirilmiş Uç Değer Dağılımının birikimli olasılık yoğunluk fonksiyonu **(3.16)**'daki gibidir.

$$H_\xi\left(z\right) = \begin{cases} \text{ekps}\left(-\left(1 + z\xi\right)^{-1/\xi}\right), \xi \neq 0\ ve\ 1 + z\xi > 0 \\ \text{ekps}\left(-\text{ekps}\left(-z\right)\right), \xi = 0 \end{cases} \tag{3.16}$$

Bu dağılımın M_ξ ile gösterilen etki alanının maksimum bölgesi, dağılımların T(v) ve T(∞)'u içeren geniş bir sınıfıdır.

ii. $U > 0$ eşik değer olmak üzere $x \in \left(0, y_F - U\right)$ olsun. **(3.17)**'de verilen koşullu birikimli olasılık yoğunluk fonksiyonu, uç kayıpların açıklanmasında kullanılır.

$$y_F = \sup\left\{y \in \mathbb{R}: F\left(y\right) < 1\right\}$$

$$F_U\left(x\right) = P\left(L \leq U + x \mid L > U\right) = \frac{F\left(U + x\right) - F\left(U\right)}{1 - F\left(U\right)} \tag{3.17}$$

iii. Genelleştirilmiş Pareto Dağılımının (GPD) birikimli olasılık yoğunluk fonksiyonu **(3.18)**'deki gibidir. Burada ξ biçim parametresidir ve $\beta > 0$ ölçek parametresidir.

$$G_{\xi,\beta}(x) = \begin{cases} 1-\left(1+\dfrac{\xi x}{\beta}\right)^{-1/\xi}, \xi \neq 0 \\ 1-\text{ekps}\left(-\dfrac{x}{\beta}\right), \xi = 0 \end{cases} \quad \text{öyle ki} \begin{cases} \xi \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \\ \xi < 0 \Rightarrow x \in [0, -\beta/\xi] \end{cases} \tag{3.18}$$

ξ pozitif (negatif) ise kuyruk T(∞)'a göre daha yavaş (hızlı) sönümlenir ve kalın (ince) kuyruk olarak adlandırılır. $\xi = 0$ ise kuyruk T(∞) gibi eksponansiyel hızda sönümlenir. Burada $\beta = \beta_0$ olarak alınmıştır.

Hatırlatma: Ampirik verilerden bilindiği üzere kayıpların dağılımı genellikle kalın kuyrukludur. Bu dağılımlara örnek olarak T(v) verilebilir.

Teorem 3.7: $P \in M_\xi$ olarak bulunur ancak ve ancak $\forall \xi \in \mathbb{R}, \exists \beta(U)$ pozitif ölçülebilir fonksiyonu öyle ki **(3.19)**'da verilen bilgi geçerlidir.

$$\lim_{U \to y_F^-} \sup\left\{\left|F_U(x) - G_{\xi,\beta(U)}(x)\right| : x \in (0, y_F - U)\right\} = 0 \tag{3.19}$$

Sonuç 3.8: Kayıpların zaman serisi aynı dağılmış bağımsız rastgele değişkenlerden oluşsun ve *m* adet gözlemde *U*'yu kesin olarak aşan kayıpların sayısı *t* olsun. Buna göre **(3.20)**'de verilen bilgiler, Teorem 3.7'den elde edilir.

$$P \in M_\xi \; ve \; U \to y_F^- \Rightarrow F_U(x) \approx G_{\xi,\beta}(x) \; ve \; F(U) \approx 1-(t/m) \tag{3.20}$$

Bunların *U*'ya olan uzaklıklarının zaman serisi GPD ile modellensin. **(3.20)**'de verilen bilgiler dikkate alındığında, $y > U$ için **(3.21)**'de verilen bilginin geçerli olduğu görülür.

$$F(y) \approx \begin{cases} 1-(t/m)\left[1+\dfrac{\xi(y-U)}{\beta}\right]^{-1/\xi}, \xi \neq 0 \\ 1-(t/m)\,\text{ekps}\left(-\dfrac{y-U}{\beta}\right), \xi = 0 \end{cases} \tag{3.21}$$

Buradan $VaR_c = F^{-1}(c)$ **(3.22)**'deki gibi bulunur.

$$VaR_c = \begin{cases} U + \dfrac{\beta}{\xi}\left[\left(\dfrac{1-c}{t/m}\right)^{-\xi} - 1\right], \xi \neq 0 \\ U - \beta \log\left(\dfrac{1-c}{t/m}\right), \xi = 0 \end{cases} \quad \textbf{(3.22)}$$

Ayrıca GPD'nin özelliklerinden TEL_c **(3.23)**'teki gibi bulunur. Burada $k \geq 1/\xi > 0$ iken $E(x^k) = \infty$ olarak bulunur bilgisi, $k = 1$ için dikkate alınmıştır.

$$TEL_c = \begin{cases} \dfrac{VaR_c + \beta - \xi U}{1-\xi}, \xi < 1 \\ \infty, değilse \end{cases} \quad \textbf{(3.23)}$$

Hatırlatma: **(3.24)**'te tanımı verilen $e(U)$ ince (kalın) kuyruklu dağılımlarda azalış (artış) eğiliminde iken T(∞)'da sabittir. $U \geq U^*$ için $e(U)$ yaklaşık olarak lineer iken $t/m \in [0.05, 0.1]$ olsun. Parametre tahmininde standart hatanın artmasını engellemek için $U = \inf U^*$ olarak belirlenebilir. Bu yaklaşım bu çalışmada dikkate alınmıştır.

$$e(U) = \frac{\sum_{i=1}^{m} \text{mak}(L_i - U, 0)}{t} \quad \textbf{(3.24)}$$

Kayıpların zaman serisinin aynı dağılmış bağımsız rastgele değişkenlerden oluşmadığı ampirik verilerden bilinmektedir. Bu nedenle eşik aşım metodunun kesin durağan zaman serilerine genelleştirilmesi ile ilgili teorik çalışmalar yapılmaktadır. Öte yandan AR(1)+GARCH(1,1) modeli gibi zaman serisi modelleri ile uç piyasa hareketlerindeki toplanmaların dağıtılması gibi yaklaşımlar, uygulamada daha çok tercih edilmektedir. AR(1)+GARCH(1,1) modelinde **(3.25)**'teki gibi tanımlanan standartlaştırılmış kayıpların zaman serisinin beyaz gürültü olduğu varsayılır.

$$\{Lu_i\} = \left\{\frac{L_i + \mu^i}{\sigma^i}\right\} \quad \textbf{(3.25)}$$

Burada koşullu ortalama ve standart sapma sırasıyla μ^i ve σ^i ile kayıpların zaman serisi ise $\{L_i\}$ ile gösterilmiştir. Eşik aşım metodu $\{L_i\}$ yerine $\{Lu_i\}$'ye uygulansın ve ilgili modellerde Lu için sınır değer olan k_{VaR} ve k_{TEL} bulunsun. Buna göre pozitif homojen, parasal risk ölçüsü olan VaR_c ve TEL_c **(3.26)**'daki gibi belirlenir.

$$VaR_c = -\mu_p + k_{VaR}\sigma_p$$
$$TEL_c = -\mu_p + k_{TEL}\sigma_p \qquad \textbf{(3.26)}$$

(3.27)'de verilen varsayım altında, **(3.28)**'de verilen bilgiler geçerlidir.

$$L(r) = -a^T r,\ L_i = -a^T r_i \qquad \textbf{(3.27)}$$

Burada μ_i ve S_i seanslık olarak değişmektedir. A'nın ise sabit olduğu varsayılmıştır.

$$\mu^i = a^T \mu_i,\ \sigma^i = \left(a^T S_i A S_i a\right)^{0.5}$$
$$\mu_p = a^T \mu,\ \sigma_p = \left(a^T SASa\right)^{0.5} \qquad \textbf{(3.28)}$$

Buna göre beyaz gürültü olduğu varsayılan $\{Lu_i\}$ **(3.29)**'daki gibi oluşturulabilir. Daha sonra **(3.26)**'da verilen yaklaşımla VaR_c ve TEL_c bulunabilir.

$$\{Lu_i\} = \left\{\frac{a^T(\mu_i - r_i)}{\left(a^T S_i A S_i a\right)^{0.5}}\right\} \qquad \textbf{(3.29)}$$

Hatırlatmalar: i. Eşik aşım metodu lineer portföyler için genellikle sonuç verir. Diğer durumlarda bu metot sonuçsuz kalabilir.

ii. Piyasa riskinin olduğundan az gösterilmemesi için bu metodun seanslık veya günlük veri setine uygulanması önerilir.

iii. Bu alt bölümde uç değerlerin tek boyutta modellenmesi verilmiştir. Ayrıca kopula fonksiyonu kullanılarak uç değerlerin *n* boyutta modellenmesi yapılabilir. Buna karşın uygulamadaki zorluklar nedeniyle *n* genellikle 2 veya 3 olarak belirlenir.

3.4 Çarpıklık Risk Ölçüleri

Hürlimann (2004), Sereda ve diğ. (2010) ve Balbas ve diğ. (2009) temel alınarak hazırlanan bu alt bölümde, VaR ve CVaR'ın da içinde olduğu çarpıklık risk ölçüleri ailesi ile ilgili bilgiler verilmiştir.

Tanım 3.9: i. $g:[0,1]\to[0,1]$ artan fonksiyonu $g(0)=0$ ve $g(1)=1$ sınır şartlarını sağlasın. Bu fonksiyon çarpıklık fonksiyonu olarak adlandırılır.

ii. R_g ile gösterilen çarpıklık risk ölçüsü **(3.30)**'daki gibi tanımlanır. Ayrıca L'nin tüm karakteristiğini yansıtıyorsa, R_g tam risk ölçüsü olarak adlandırılır.

$$R_g=\int_0^{\infty} g\left(1-F(y)\right)dy-\int_{-\infty}^{0}1-g\left(1-F(y)\right)dy \qquad \textbf{(3.30)}$$

iii. Çarpıklık fonksiyonu konkav olsun. **(3.31)**'de verilen eşitliği sağlayan ağırlık fonksiyonu, negatif değer almaz ve artan fonksiyondur.

$$g(1-p)=1-\int_0^{p}\phi(s)\,ds \qquad \textbf{(3.31)}$$

Ayrıca $p=1$ olarak alınırsa, **(3.32)**'de verilen eşitliğin geçerli olduğu görülür.

$$\int_0^{1}\phi(s)\,ds=g(1)-g(0)=1 \qquad \textbf{(3.32)}$$

Önerme 3.10: i. R_g iyi tanımlanmış, pozitif homojen ve parasal risk ölçüsüdür. R_g tutarlı (tam) risk ölçüsüdür ancak ve ancak $g(x)$ konkav (kesin artan) fonksiyondur.

ii. (3.33)'te verilen eşitlik geçerlidir. Buna göre çarpıklık fonksiyonu konkav ise çarpıklık risk ölçüleri, spektral risk ölçüleri ile özdeştir.

$$R_g=\int_0^{1}\phi(p)\,VaR_p\,dp \qquad \textbf{(3.33)}$$

iii. L_X, L_Y sırasıyla $X,Y\in T$'ye ait olan kaybın ortak monoton rastgele değişkenleri olsun. Buna göre **(3.34)**'te verilen eşitlik geçerlidir.

$$R_g(X)+R_g(Y)=R_g(X+Y) \tag{3.34}$$

Hatırlatmalar: i. Kompakt bir aralıkta tanımlanan artan fonksiyonların Riehmann integrali ve hemen hemen her yerde türevi vardır.

ii. Ortak (karşı) monoton rastgele değişkenler, ters (aynı) yönlü hareket etmez.

Örnek 3.11: i. $g(x)=x$ olarak belirlenirse, $R_g=E(L)$ olarak bulunur.

ii. (3.35)'te verilen çarpıklık fonksiyonu konkav olmadığından, $R_g=VaR_c$ tutarlı risk ölçüsü değildir.

$$g(x)=\begin{cases}0, x\in[0,1-c)\\ 1, x\in[1-c,1]\end{cases} \tag{3.35}$$

iii. (3.36)'da verilen çarpıklık fonksiyonu konkav olmasına rağmen kesin artan olmadığından, $R_g=CVaR_c$ tutarlı risk ölçüsü olsa da tam risk ölçüsü değildir.

$$g(x)=\min\left(\frac{x}{1-c},1\right) \tag{3.36}$$

Ayrıca **(3.33)**'te verilen bilgiden, **(3.37)**'de verilen eşitliğin geçerli olduğu görülür.

$$CVaR_c=\frac{1}{1-c}\int_c^1 VaR_p\,dp \tag{3.37}$$

iv. (3.38)'de verilen çarpıklık fonksiyonları ile tanımlanan çarpıklık risk ölçüleri tam ve tutarlı risk ölçüsüdür.

$$\begin{gathered}g(x)=1-(1-x)^v,\ v>1\\ g(x)=x^q,\ q\in(0,1)\end{gathered} \tag{3.38}$$

Hatırlatma: Uygulamadaki zorluklar, model riskleri ve uç piyasa hareketlerinin gözden kaçma ihtimali gibi nedenlerden ötürü bu çalışmanın uygulama kısmında VaR ve CVaR'ın dışındaki çarpıklık risk ölçüleri kullanılmamıştır.

3.5 Geriye Dönük Testler

Jorion (2001) temel alınarak hazırlanan bu alt bölümde, VaR modellerinin istatiksel başarısının araştırıldığı ve bu modellerin geliştirilmesi için veri sağlayan geriye dönük test yöntemlerinden bazıları verilmiştir.

T adet gözlemde seanslık VaR_c modelinin başarısız olduğu seans sayısı istatistiği M olsun. Merkezi limit teoremine göre **(3.39)**'da verilen bilgi geçerlidir.

$$M \sim^{a} N\left((1-c)T, c(1-c)T\right) = N\left(\mu_M, \sigma_M^2\right) \tag{3.39}$$

Yani M'nin asimptotik dağılımı T(∞)'dur. Buna göre **(3.40)**'ta verilen şart sağlanıyorsa, bu modelin geçerli olduğu önsavı p güven düzeyinde ret edilir.

$$M \notin \left[\mu_M - z_{0.5+0.5p}\sigma_M, \mu_M + z_{0.5+0.5p}\sigma_M\right] \tag{3.40}$$

Çizelge 3.1'de farklı bir geriye dönük test yöntemi ile ilgili parametreler verilmiştir.

Çizelge 3.1 : Geriye dönük test parametreleri, Jorion (2001)'den alınmıştır.

Sonuç	Önceki Seans		Koşulsuz
	Başarısız	Başarılı	
Başarısız	$T_{00}=T_0(1-\pi_0)$	$T_{10}=T_1(1-\pi_1)$	M
Başarılı	$T_{01}=T_0\pi_0$	$T_{11}=T_1\pi_1$	T–M
Toplam	T_0	T_1	$T=T_0+T_1$

Koşulsuz kapsama istatistiği **(3.41)**'deki gibi tanımlanır. $Z_1 > \chi^2_{1,p}$ ise seanslık VaR_c modelinin geçerli olduğu önsavı p güven düzeyinde ret edilir.

$$\begin{aligned} Z_1 = &-2T_0\log(1-c) - 2T_1\log(c) \\ &+ 2T_0\log(M/T) + 2T_1\log\left(1-(M/T)\right) \end{aligned} \tag{3.41}$$

Bağımsızlık istatistiği **(3.42)**'deki gibi tanımlanır. $Z_2 > \chi^2_{1,p}$ ise başarısızlığın önceki seanstaki sonuçtan bağımsız olduğu önsavı p güven düzeyinde ret edilir.

$$Z_2 = -2T_0 \log(1-c) - 2T_1 \log(c) + 2T_{00} \log(1-\pi_0) + 2T_{01} \log(\pi_0) + 2T_{10} \log(1-\pi_1) + 2T_{11} \log(\pi_1) \quad \textbf{(3.42)}$$

Koşullu kapsama istatistiği **(3.43)**'teki gibi tanımlanır. $Z_3 > \chi^2_{2,p}$ ise bu modelin geçerli olduğu önsavı p güven düzeyinde ret edilir.

$$Z_3 = Z_1 + Z_2 \quad \textbf{(3.43)}$$

Modelin başarısız olduğu gözlemlerde toplanmanın olup olmadığını belirlemede bağımsızlık istatistiği kullanılır. Modelin istatiksel başarısının tespitinde ise koşulsuz veya koşullu kapsama istatistiklerinden biri kullanılabilir.

Hatırlatma: i. Bu çalışmada olduğu gibi diğer piyasa riski modellerinin ampirik başarısının araştırıldığı geriye dönük testler yapılabilir.

ii. Basel Komitesi'ne göre tüm işlem günlerinde, 10 işlem gününden oluşan periyot için piyasa riski hesaplanmalıdır. Buna karşın bu durum iç içe geçen periyotların oluşmasına neden olur. Geriye dönük testlerin bu tür periyotlar için yapılması, başarı durumları arasında yüksek bağlılık bulunduğundan uygun değildir.

4. STRES TESTLERİ

Entegre risk analizi tasarısında oldukça önemli bir yere sahip olan stres testi kavramı ve stres testlerinin farklı türleri bu bölümde tanıtılmıştır. Bu kapsamda piyasa riski modellerine benzer olarak bunların (bu tasarıdaki yerlerini de belirleyen) olumlu ve olumsuz yanları özetlenmiştir.

4.1 Stres Testlerine Giriş

Jorion (2001), Mina ve Xiao (2001), Beşe (2007), Breuer ve diğ. (2009) ve Gauthier ve diğ. (2010) temel alınarak hazırlanan bu alt bölümde, stres testleri ile ilgili genel bilgiler verilmiştir.

Uç ama olası kayıplara neden olabilecek durumları tanımlama ve yönetme sürecinde kullanılan teknikler bütünü olan Stres testleri, VaR modellerinden farklı olarak birden fazla finansal risk türünün aynı anda ya da ayrı ayrı ele alınmasına olanak tanır. Basel Komitesi'ne göre VaR modellerinin sonuçları uç piyasa koşullarında güvenilir değildir ve piyasa riski sermaye gereksinimi piyasa şoklarını karşılayacak şekilde belirlenmelidir. Bu nedenlerden ötürü piyasa riski için yapılan stres testleri genellikle VaR modellerinin tamamlayıcısı olarak risk yönetiminde kullanılmaktadır.

Stres senaryolarında aranan ilk şart, stres senaryosunun akla yatkın olmasıdır. Aksi takdirde sağlıklı bir risk yönetimi anlayışı geliştirilemez. Bununla birlikte akla yatkın olan ama uç kayıpları ortaya çıkarmayan stres senaryoları, sahte bir güven hissi oluşturabilir. Bu nedenlerden ötürü Basel Komitesi'ne göre stres senaryoları akla yatkın olmalı, uç kayıpları ortaya çıkarmalı ve piyasa riskinin azaltılmasına yardımcı olmalıdır.

Piyasa riski için yapılan stres testleri; spesifik senaryoların L'nin kendisi (dağılımı) üzerindeki etkilerinin araştırıldığı saf (karışık) senaryo analizleri, spesifik piyasa şoklarının r'nin eliptik dağılımı üzerindeki etkilerinin modellendiği stres modelleri ve mekanik yaklaşımlar olarak gruplandırılabilir.

Saf senaryo analizleri VaR modellerine göre daha basit ve kavramsaldır. Saf senaryolar uç kayıpları ortaya çıkarma amacıyla portföyün yapısına göre oluşturulur. Bunlar varsayımsal olarak oluşturulabileceği gibi tarihsel veriler temel alınarak da oluşturulabilir. Bunların akla yatkınlığı ise (2.59)'da tanımlanan c ile belirlenebilir.

Saf senaryolar (daha kullanışlı olması nedeniyle) genellikle belirli risk faktörlerinin getirilerinde (r_2) büyük değişimleri içerir. Diğer risk faktörlerinin getirileri (r_1) ise temelde iki farklı yaklaşımla belirlenir. Birinci yaklaşımda, r_1'in koşullu beklenen değeri ile saf senaryo oluşturulur. İkinci yaklaşımda, r_1'in koşullu dağılımı kullanılarak Monte Carlo benzetimiyle r_1 belirlenir. Bunların uygulanmasında Önerme 2.23 kullanılır.

İkinci yaklaşımla oluşturulan saf senaryoların akla yatkınlığı en yüksektir. r'nin eliptik dağılımının yoğunluk üreten fonksiyonu T(v) ve T(∞)'da olduğu gibi kesin azalan olsun. Buna göre ilk yaklaşımla oluşturulan saf senaryoların akla yatkınlığı, ikinci yaklaşımla oluşturulanlarınkine denktir. Bu nedenle işlem yükü daha az olduğundan, ilk yaklaşım bu tür eliptik dağılımlar için daha çok tercih edilir.

Piyasa şokları nedeniyle r'nin eliptik dağılımının değiştiği ampirik verilerden bilinmektedir. Stres modellerinde spesifik piyasa şoku altında bu değişim modellendikten sonra, VaR ve CVaR gibi piyasa risk ölçüleri ile piyasa riski hesaplanır. Piyasa şokunun sübjektif olarak belirlenmesi ve model riskleri stres modellerinin temel sorunlarıdır.

Karışık senaryo analizlerinde varsayımsal olarak veya tarihsel veriler temel alınarak karışık senaryolar oluşturulduktan sonra, VaR ve CVaR gibi piyasa riski ölçüleri ile piyasa riski hesaplanır. Bunların akla yatkınlığı ise göreceli entropi ile belirlenebilir.

Mekanik yaklaşımlar; etken itme analizi, en kötü durum senaryosu, maksimum kayıp (ML) ve maksimum beklenen kayıp (MEL) olarak gruplandırılabilir. Etken itme analizi A'yı ihmal ettiğinden güvenilir bir yaklaşım değildir. Monte Carlo benzetimiyle veya tarihsel benzetimle L için oluşturulan kesikli dağılım içinde kaybı maksimum yapan saf senaryo, en kötü durum senaryosu olarak adlandırılır. Optimizasyon problemleri ile tanımlanan ML ve MEL ise hem stres testi hem de piyasa riski ölçüsü olarak kullanılabilir.

4.2 Maksimum Kayıp

Studer (1997) temel alınarak hazırlanan bu alt bölümde, en güvenilir stres testi olarak görülen ML ile ilgili bilgiler verilmiştir.

Tanım 4.1: $r \sim E_n\left(\mu, s^2 V^T V, g_n\right)$ olsun. ML_h **(4.1)**'deki gibi tanımlanır. Burada A_h ile gösterilen akla yatkın saf senaryolar kümesi kompakt elipsoittir ve konvekstir.

$$\begin{aligned} ML_h &= \sup\left\{L(r) : r \in A_h, P(A_h) = c\right\} \\ &= \sup\left\{L(r) : Maha^2(r) \le h\right\} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Hatırlatmalar: i. $c \to 1^-$ olarak belirlensin. Eliptik dağılım T(∞) ise $h = \chi^2_{n,c}$ olarak bulunur. Diğer eliptik dağılımlar için **(2.60)**'ta verilen yaklaşımla *h* belirlenebilir.

ii. Kayıp fonksiyonu konkav olsun. Buna göre **(4.1)**'de verilen problem, güçlü dualite bulunan düzgün konkav maksimizasyon problemidir. Yani KKT koşulları bu problemin çözümünde kullanılabilir.

Önerme 4.2: ML_h tutarlı risk ölçüsüdür.

İspat: $X, Y \in T$ olsun. $L_X(r) \le L_Y(r)$, $\forall r \in \Omega$ iken **(4.2)**'de verilen eşitsizlik geçerlidir. Yani ML_h monotonluk şartını sağlar.

$$\begin{aligned} ML_h(X) &= \sup\left\{L_X(r) : r \in A_h\right\} \\ &\le \sup\left\{L_Y(r) : r \in A_h\right\} = ML_h(Y) \end{aligned} \tag{4.2}$$

$\forall b > 0, d \in \mathbb{R}$ için **(4.3)**'te verilen eşitlikler geçerlidir. Yani ML_h öteleme değişmezliği ve pozitif homojenlik şartlarını sağlar.

$$\begin{aligned} ML_h(d + bX) &= \sup\left\{L_{d+bX}(r) : r \in A_h\right\} = \sup\left\{-d + bL_X(r) : r \in A_h\right\} \\ &= -d + b\sup\left\{L_X(r) : r \in A_h\right\} = -d + bML_h(X) \end{aligned} \tag{4.3}$$

(4.4)'te verilen bilgiler geçerlidir. Yani ML_h alt toplamsallık şartını da sağlar. Buna göre ML_h tutarlı risk ölçüsüdür.

$$\begin{aligned} ML_h(X+Y) &= \sup\{L_{X+Y}(r) : r \in A_h\} = \sup\{L_X(r) + L_Y(r) : r \in A_h\} \\ &\leq \sup\{L_X(r) : r \in A_h\} + \sup\{L_Y(r) : r \in A_h\} \\ &= ML_h(X) + ML_h(Y) \end{aligned} \quad \textbf{(4.4)}$$

Önerme 4.3: **(4.5)**'te verilen önerme geçerlidir. Burada $r^* \in A_h$ olarak bulunur. Ayrıca $r = r^*$ olması saf senaryosu, ML'nin stres senaryosu olarak adlandırılır.

$$L(r) \in C^0(\Omega) \; ve \; f(r) > 0, \forall r \in \Omega \Rightarrow VaR_c \leq ML_h = L(r^*) \quad \textbf{(4.5)}$$

İspat: A_h kompakt olduğundan, **(4.5)**'te verilen önermenin ilk hipotezi altında **(4.6)**'da verilen eşitlik geçerlidir.

$$\sup\{L(r) : r \in A_h\} = \text{mak}\{L(r) : r \in A_h\} \quad \textbf{(4.6)}$$

Buna göre $ML_h = L(r^*)$ olacak şekilde $r^* \in A_h$ bulunabilir. Ayrıca bu hipotez sağlanırsa, **(4.7)**'de tanımlanan B kümesi kapalıdır.

$$B = \{r \in \Omega : L(r) \geq VaR_c\} \quad \textbf{(4.7)}$$

B ve A_h arasındaki ilişkiye bağlı olarak aşağıdaki durumlardan birisi geçerlidir.

(a) $B \cap A_h \neq \varnothing$ olsun. B'nin tanımı gereği $VaR_c \leq ML_h$ olarak bulunur.

(b) $B \cap A_h = \varnothing$ olsun. P ve B'nin tanımları gereği **(4.8)**'de verilen eşitlik geçerlidir.

$$P(W) = P(\Omega - (A_h \cup B)) = 1 - (c + (1-c)) = 0 \quad \textbf{(4.8)}$$

W açık küme olduğundan, **(4.5)**'te verilen önermenin ikinci hipotezi altında W boş küme olarak bulunur. Buna karşın Ω bağlantılı uzay olduğundan, iki ayrık kapalı kümenin birleşimi olarak yazılamaz. Bu çelişkiden (a)'da verilen varsayımın geçerli olduğu görülür. Yani istenen sonuç elde edilir.

Hatırlatma: T(v) ve T(∞) **(4.5)**'te verilen önermenin ikinci hipotezini sağlar. Aslında bunun sadece ilk hipotezi bile istenen sonucun elde edilmesi için yeterlidir.

Önerme 4.4: (4.9)'da verilen hipotezler sağlansın. Yani portföy lineer olsun.

$$L(r) = a^T(\mu - r) - K \text{ ve } r \sim E_n(\mu, s^2 V^T V, g_n) \tag{4.9}$$

Buna göre **(4.1)**'de verilen düzgün konkav maksimizasyon probleminin primal optimal vektörü olan $r^* \in A_h$ ile birlikte $ML_h = L(r^*)$ **(4.10)**'daki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} r^* &= \mu - \frac{h^{0.5} V^T V a}{\|Va\|} \\ ML_h &= h^{0.5} \|Va\| - K \end{aligned} \tag{4.10}$$

Hatırlatmalar: i. $y = V^{-T}(r - \mu)$ afin koordinat dönüşümü yapılsın. Buna göre kuadratik kayıp fonksiyonları için **(4.11)**'de verilen bilgi geçerlidir.

$$\begin{aligned} \tilde{L}(y) &= -\tilde{a}^T y - 0.5 y^T \tilde{G} y - K = -(Va)^T y - 0.5 y^T V G V^T y - K \\ &= a^T(\mu - r) - 0.5(\mu - r)^T G(\mu - r) - K = L(r) \end{aligned} \tag{4.11}$$

Simetrik olan $\tilde{G}$ matrisinin özdeğerleri $k_j \in \mathbb{R}$ olsun. Bu matrisin sıralı özvektörleri kullanılarak Ω için ortogonal baz matrisi (B) oluşturulabilir.

ii. I birim matris olmak üzere **(4.12)**'de verilen bilgi geçerlidir. Buradaki eşitsizlik kesin olarak sağlanıyorsa bu matris pozitif tanımlıdır ve tekil değildir.

$$\theta \geq \text{mak}\left(0, -\min\left(k_j\right)\right) \Rightarrow \tilde{G} + \theta I \text{ pozitif yarı tanımlıdır.} \tag{4.12}$$

iii. ML_h **(4.13)**'teki gibi de tanımlanabilir. Burada kısıt fonksiyonu, orijin merkezli ve $h^{0.5}$ yarıçaplı küresel bölgeyi temsil eder.

$$-ML_h = \inf\left\{-\tilde{L}(y) : \|y\| \leq h^{0.5}\right\} \tag{4.13}$$

Teorem 4.5: (4.13)'te verilen düzgün minimizasyon probleminde y^* primal optimal vektördür ancak ve ancak $\exists \theta \geq \text{mak}\left(0, -\min\left(k_j\right)\right)$ öyle ki **(4.14)**'te verilen eşitlikler geçerlidir. Ayrıca bu şartları sağlayan θ varsa tektir.

$$\left(\tilde{G}+\theta I\right)y^{*}=-\tilde{a}$$
$$\theta\left(\left\|y^{*}\right\|-h^{0.5}\right)=0 \qquad \textbf{(4.14)}$$

Sonuç 4.6: i. $\theta=0$ iken $\tilde{G}$ pozitif tanımlı ise $r^{*}\in A_h$ **(4.15)**'teki gibi bulunur.

$$r^{*}=\mu+V^{T}y^{*}=\mu-V^{T}\left(\tilde{G}^{-1}\tilde{a}\right) \qquad \textbf{(4.15)}$$

ii. $\theta>0$ olsun. $\tilde{a}$ vektörünün B ile temsil edilen koordinat sistemindeki konum vektörü ve $\tilde{G}+\theta I$ matrisinin özdeğer ayrışımı **(4.16)**'daki gibidir.

$$kv=\left(kv_j\right)=B^{T}\tilde{a}$$
$$\tilde{G}+\theta I=B\ k\ddot{o}\text{şegen}\left(k_j+\theta\right)B^{T} \qquad \textbf{(4.16)}$$

Buna göre **(4.14)**'te verilen bilgilerden, **(4.17)**'de verilen eşitliğin geçerli olduğu görülür. Buradan $\theta>0$ tek olarak bulunur.

$$\left\|y^{*}(\theta)\right\|=\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{kv_j}{k_j+\theta}\right)^{2}\right)^{0.5}=h^{0.5} \qquad \textbf{(4.17)}$$

Ayrıca $\tilde{G}+\theta I$ pozitif tanımlı ise $r^{*}\in A_h$ **(4.18)**'deki eşitlikten tek olarak bulunur.

$$r^{*}=\mu+V^{T}y^{*}=\mu-V^{T}\left(\left(\tilde{G}+\theta I\right)^{-1}\tilde{a}\right) \qquad \textbf{(4.18)}$$

Sonuç 4.7: (4.13)'te verilen düzgün minimizasyon probleminde güçlü dualite vardır. Bu nedenle ilgili vektörlerin KKT koşullarını birlikte sağlamaları, optimal vektör olmaları için gerek şarttır. Buna göre dual optimal **(4.19)**'daki gibi bulunur.

$$\lambda^{*}=\begin{cases}\dfrac{\left\|G\left(r^{*}-\mu\right)+a\right\|}{2\left\|V^{-1}V^{-T}\left(r^{*}-\mu\right)\right\|}, \left\|y^{*}\right\|=h^{0.5}\\ 0, \left\|y^{*}\right\|=h^{0.5}\end{cases} \qquad \textbf{(4.19)}$$

Buna göre b, 0'ın küçük bir komşuluğunda iken **(4.20)**'de verilen bilgi, hassaslık analizlerinde kullanılabilir.

$$ML_{h+b} \approx ML_h + b\lambda^* \tag{4.20}$$

Kayıp fonksiyonu lineer veya kuadratik değilse, Breuer ve Pistovcak (2004)'te verilen Algoritma 4.8 ML_h'nin bulunmasında kullanılabilir. Bu algoritmada n arttıkça gerçek çözüme yaklaşılan adım sayısı da büyük oranda artar.

Algoritma 4.8: $\lambda \to 1^-$ olarak belirlensin. $i = 0,\ 1,\ 2,\ldots...,t-1$ adım indeksi ve $j = 1,\ 2,\ldots...,s$ rastgele vektör indeksi olsun. Ayrıca $r_0^* = \mu$ ve $h_0 = h$ olarak atansın.

$$H_i : (-1,1)^n \to A_i = \left\{ r \in \Omega : Maha^2\left(r, r_i^*\right) \le h_i = \lambda^i h_0 \right\}$$

$$x \quad \to \begin{cases} r_i^*, \|x\| = 0 \\ r_i^* + \dfrac{h_i V^T x}{\|x\|}, \|x\| \ge 1 \\ r_i^* + \left(\|x\|^2 - 3\|x\| + 3\right) h_i V^T x, \|x\| \in (0,1) \end{cases} \tag{4.21}$$

İlgili adımda $(-1,1)^n$ küpünde düzgün dağılımda olan rastgele vektör olan $x_{i,j}$ üretilir ve $H_i\left(x_{i,j}\right) \in A_i$ bulunur. $H_i\left(x_{i,j}\right) \notin A_0$ ise $x_{i,j}$ tekrardan üretilir. Daha sonra **(4.22)**'de verildiği üzere en yüksek kayba neden olan getiri vektörü r_{i+1}^* olarak atanır. Algoritmanın sonunda ise $r^* = r_t^*$ ve $ML_h = L\left(r^*\right)$ atamaları yapılır.

$$L\left(r_{i+1}^*\right) = \text{mak}\left\{ L\left(H_i\left(x_{i,j}\right)\right),\ L\left(r_i^*\right) \right\} \tag{4.22}$$

4.2.1 Maksimum kaybın sorunları

Breuer (2008) ve Breuer ve Csiszar (2010a) temel alınarak hazırlanan bu alt bölümde, ML'nin piyasa riski ölçüsü olarak sorunları verilmiştir.

ML, r'nin dağılımı eliptik değilken kullanışsızdır ve iyi tanımlanmış risk ölçüsü değildir. Bu sorunlar doğrudan Mahalanobis uzaklığından kaynaklanır. L düzgün

koordinat dönüşümlerinden, Mahalanobis uzaklığı afin koordinat dönüşümlerinden bağımsızdır. Bu nedenle ML de afin koordinat dönüşümlerinden bağımsızdır. Buna karşın ML, Mahalanobis uzaklığın korunmadığı bazı düzgün koordinat dönüşümlerinde korunmaz. Bu durum, ML'nin iyi tanımlanmış risk ölçüsü olmadığını göstermek için bir ters örneğin oluşturulmasında kullanılabilir.

Sabit bir *c*'ye göre *h*'nin belirlenmesi durumunda, *n* arttıkça *h* de artmaktadır. Eğer risk faktörlerinden bazılarının ML'ye katkı oranı oldukça az veya bazı risk faktörleri diğer risk faktörleri tarafından yüksek oranda açıklanıyorsa, *h* gereğinden yüksek olarak belirlenir. Buna boyuta bağlılık problemi denir. Geçmişte yaşanan piyasa şokları temel alınarak *h* sabit olarak alınırsa, bu problem ortadan kaldırılabilir.

Alternatif bir yöntem, standartlaştırılmış getiriler için temel bileşen analizinin yapılmasıdır. Buna göre *h*'nin belirlenme sürecinde *n* yerine belirlenen temel bileşen sayısı kullanılırsa, bu problem kısmen ortadan kaldırılabilir. Çünkü bu yöntemde ilgili veri setindeki bilgi büyük oranda korunurken, boyut sayısı da önemli oranda azaltılır. Ayrıca bu yöntemde *c* ile *h* arasındaki ilişki de korunur.

Piyasa şokları nedeniyle *r*'nin eliptik dağılımının değişmesi, ML'nin önemli sorunlarından biridir. Bu tür model riskleri geriye dönük testlerle kontrol altında tutulmalı ve modelin muhtemel başarısızlığının *r*'nin eliptik dağılımının değişmesi veya *h*'nin düşük belirlenmesi gibi nedenleri araştırılmalıdır.

Verilen nedenlerden ötürü ML'nin, piyasa riski ölçüsü olarak kullanılmasında sakıncalar vardır. Buna karşın Bölüm 5.3'te de verildiği üzere ML'nin, stres testi olarak risk yönetiminde önemli bir yeri vardır. Çünkü ML, diğer stres testlerinden farklı olarak stres testlerinden beklenen özellikleri taşır.

4.3 Maksimum Beklenen Kayıp

Breuer ve Csiszar (2010a) ve Breuer ve Csiszar (2010b) temel alınarak hazırlanan bu alt bölümde, MEL ile ilgili bilgiler verilmiştir.

Tanım 4.8: $r \sim Q$ olması karışık senaryosunda L'nin beklenen değeri $E_Q(L)$ ile gösterilsin.

i. MEL_k **(4.23)**'te verilen konkav maksimizasyon problemiyle tanımlanır. Burada akla yatkın karışık senaryolar kümesi (C) konveks ve kapalıdır.

$$\begin{aligned} MEL_k &= \sup\left\{E_Q(L) : Q \in C\right\} \\ &= \sup\left\{E_Q(L) : D(Q \| v) \le k\right\} \end{aligned} \tag{4.23}$$

ii. (4.24)'te verilen $A(\theta, L)$ dağılımların eksponansiyel ailesi ile ilişkilidir. Bunun θ 'ya göre kısmi türevi $A_\theta(\theta, L)$ ile gösterilsin.

$$A(\theta, L) = \log \int_{\Omega} \text{ekps}\left(\theta L(r)\right) dv(r) \tag{4.24}$$

Lebesque ölçüsü 0 olan uç kayıplar dikkate alınmadığında, L'nin en küçük üst sınırı $\text{ess}\sup L$ ile gösterilsin ve **(4.25)**'te verilen atamalar yapılsın.

$$\begin{aligned} k_m &= -\log\left(v\left(\left\{r \in \Omega : L(r) = \text{ess}\sup L\right\}\right)\right) \\ \theta_m &= \sup\left\{\theta \in \mathbb{R} : A(\theta, L) < \infty\right\} \end{aligned} \tag{4.25}$$

Teorem 4.10: $\theta_m > 0$ olmak üzere **(4.26)**'da verilen hipotezler sağlansın.

$$\begin{aligned} &\text{ess}\sup L < \infty \Rightarrow k < k_m \\ &\theta_m,\ A(\theta_m, L),\ A_\theta(\theta_m, L) < \infty \Rightarrow k \le \theta_m A_\theta(\theta_m, L) - A(\theta_m, L) \end{aligned} \tag{4.26}$$

Buna göre **(4.27)**'de verilen eşitlikten θ^* tek olarak bulunur.

$$k = \theta^* A_\theta(\theta^*, L) - A(\theta^*, L) \tag{4.27}$$

Buradan $\frac{dQ^*}{dv}(r)$ **(4.28)**'deki gibi tek olarak bulunur.

$$\frac{dQ^*}{dv}(r) = \text{ekps}\left(-A(\theta^*, L) + \theta^* L(r)\right) \tag{4.28}$$

Buna göre MEL_k **(4.29)**'daki gibidir.

$$MEL_k = A_\theta(\theta^*, L) \tag{4.29}$$

Sonuç 4.10: (4.30)'da verilen hipotezler sağlansın. Yani portföy lineer ve *r*'nin eliptik dağılımı T(∞) olsun.

$$L(r) = a^T(\mu - r) - K \; ve \; r \sim N(\mu, \Sigma) \tag{4.30}$$

Buna göre **(4.31)** ve **(4.32)**'de verilen eşitlikler geçerlidir. Yani Q^* ve MEL_k tek olarak bulunur.

$$Q^* = N\left(\mu - \left(\frac{2k}{a^T \Sigma a}\right)^{0.5} \Sigma a, \Sigma\right) \tag{4.31}$$

$$MEL_k = (2k)^{0.5}\left(a^T \Sigma a\right)^{0.5} - K = ML_{2k} \tag{4.32}$$

Teorem 4.12: i. (4.33) ve **(4.34)**'te verilen önermeler geçerlidir.

$$\operatorname{ess\,sup} L < \infty \; ve \; k \geq k_m \Rightarrow MEL_k = \operatorname{ess\,sup} L \tag{4.33}$$

$$\theta_m = 0 \; ve \; k > 0 \Rightarrow MEL_k = \infty \tag{4.34}$$

ii. (4.35)'te verilen hipotezler sağlansın.

$$\begin{gathered} \theta_m, A(\theta_m, L), A_\theta(\theta_m, L) < \infty, \; \theta_m > 0 \\ ve \; k > \theta_m A_\theta(\theta_m, L) - A(\theta_m, L) \end{gathered} \tag{4.35}$$

Buna göre MEL_k **(4.36)**'daki gibi bulunur. Buna karşın **(4.37)**'de verilen bilgi geçerli olduğundan, $Q^* \in C$ dağılımı bulunamaz.

$$MEL_k = \frac{k + A(\theta_m, L)}{\theta_m} \tag{4.36}$$

$$\sup\{E_Q(L) : Q \in C\} \neq \text{mak}\{E_Q(L) : Q \in C\} \tag{4.37}$$

Sonuç 4.13: (4.38)'de verilen önerme geçerlidir. Buna göre MEL_k iyi tanımlanmış risk ölçüsüdür. Bu nedenle MEL_k düzgün koordinat dönüşümlerinden bağımsızdır.

$$L_X =^d L_Y \Rightarrow A(\theta, L_X) = A(\theta, L_Y) \tag{4.38}$$

Önerme 4.14: MEL_k tutarlı risk ölçüsüdür.

İspat: $X, Y \in T$ olsun. **(4.39)**'da verilen önerme geçerlidir.

$$L_X(r) \leq L_Y(r)\ , \forall\, r \in \Omega \Rightarrow E_Q(L_X) \leq E_Q(L_Y), \forall\, Q \in C \tag{4.39}$$

Buna göre **(4.40)**'ta verilen eşitsizlik geçerlidir ve MEL_k monotonluk şartını sağlar.

$$\begin{aligned} MEL_k(X) &= \sup\left\{E_Q(L_X) : Q \in C\right\} \\ &\leq \sup\left\{E_Q(L_Y) : Q \in C\right\} = MEL_k(Y) \end{aligned} \tag{4.40}$$

$\forall\, d > 0, b \in \mathbb{R}$ için **(4.41)**'de verilen eşitlikler geçerlidir. Yani MEL_k öteleme değişmezliği ve pozitif homojenlik şartlarını sağlar.

$$\begin{aligned} MEL_k(d + bX) &= \sup\left\{E_Q(L_{d+bX}) : Q \in C\right\} \\ &= \sup\left\{-d + bE_Q(L_X) : Q \in C\right\} \\ &= -d + b\sup\left\{E_Q(L_X) : Q \in C\right\} \\ &= -d + bMEL_k(X) \end{aligned} \tag{4.41}$$

(4.42)'de verilen bilgiler geçerlidir. Yani MEL_k alt toplamsallık şartını da sağlar. Buna göre MEL_k tutarlı risk ölçüsüdür.

$$\begin{aligned} MEL_k(X + Y) &= \sup\left\{E_Q(L_{X+Y}) : Q \in C\right\} \\ &= \sup\left\{E_Q(L_X) + E_Q(L_Y) : Q \in C\right\} \\ &\leq \sup\left\{E_Q(L_X) : Q \in C\right\} + \sup\left\{E_Q(L_Y) : Q \in C\right\} \\ &= MEL_k(X) + MEL_k(Y) \end{aligned} \tag{4.42}$$

Hatırlatmalar: i. Tarihsel verilerle birlikte **(4.43)**'te verilen bilgi, akla yatkınlık sınırının belirlenmesinde kullanılabilir.

$$k \geq -\log(1-c) \Rightarrow TEL_c \leq MEL_k \tag{4.43}$$

ii. İlgili karışık senaryoda uç kayıpların ihmal edilmesi, uygulamadaki zorluklar ve portföye özgü risklerin belirlenmesinde ve azaltılmasında kullanışlı olmaması gibi nedenlerden ötürü bu çalışmanın uygulama kısmında MEL kullanılmamıştır.

5. RİSK YÖNETİMİ

Kar odaklı yönetimin getirdiği ve kimi zaman telafisi olmayan risklerden kurtulma amacı doğrultusunda oluşturulan modern finansal yönetimin ilkeleri, risklilik ile karlılığın dengelenmesi anlayışına dayanır. Bu nedenle modern finansal yönetimin merkezinde risk yönetimi vardır. Risk yönetimi ters finansal sonuçları olabilecek olayların tanımlanması, muhtemel zararın ölçülmesi ve bu zararı minimize etmek için gerekli önlemlerin alınması süreci olarak tanımlanabilir (Jorion, 2001).

Geçmişte piyasa riski modelleri üst yönetime, paydaşlara, düzenleyici kurumlara kurum portföyünün piyasa riski hakkında bilgi, rapor vermede ve piyasa riski limitleri ile piyasa riskinin kontrol edilmesinde kullanılmıştır. Günümüzde ise piyasa riski modelleri ve stres testleri risk yönetiminde aktif olarak kullanılmaktadır (Jorion, 2001). Bu bölümde bunların risk yönetimindeki temel kullanım alanları verilmiştir.

5.1 Risk Dikkate Alınmış Performans Ölçüleri

Risk dikkate alınmış performans ölçüleri risklilik ile karlılığın dengelenmesi anlayışının kurum içinde yerleşmesine yardımcı olması açısından risk yönetiminin temel unsurudur. Jorion (2001) temel alınarak hazırlanan bu alt bölümde, özellikleri **(5.1)**'de verilen lineer portföylerin risk dikkate alınmış performansının hesaplanması ile ilgili bilgiler verilmiştir.

Hatırlatma: $c \to 1^-$ iken **(5.1)**'de verilen varsayımlar altında R_p ile gösterilen piyasa riski ML_h, VaR_c veya TEL_c olarak tanımlansın. Buna göre Lu için sınır değer $k > 0$ iken $R_p(a)$ ile gösterilen konveks risk fonksiyonu **(5.2)**'deki gibidir.

$$L(r) = -a^T r \; ve \; r \sim E_n\left(\mu, s^2 V^T V, g_n\right) \qquad \textbf{(5.1)}$$

$$R_p(a) = -a^T \mu + k\left\|Va\right\| = -\mu_p + k\sigma_p \qquad \textbf{(5.2)}$$

Tanım 5.1: i. Marjinal piyasa riski vektörü **(5.3)**'teki gibi tanımlanır.

$$\Delta = \left[\Delta_j \right] = \nabla R_p \left(a \right) \tag{5.3}$$

ii. İlgili alt portföyün piyasa riski **(5.4)**'teki gibi tanımlanır. Bu değer negatif (pozitif) ise bu alt portföyün R_p 'yi azaltıcı (artırıcı) etkisi vardır.

$$R_j = \Delta_j a_j \tag{5.4}$$

Önerme 5.2: (5.1)'de verilen hipotezler sağlansın.

i. Δ **(5.5)**'teki gibi bulunur. Buna göre **(5.6)**'da verilen bilgi geçerlidir. Yani piyasa riski, alt portföylerin piyasa riskleri tarafından tam olarak açıklanır.

$$\Delta = -\mu^T + \frac{k}{\left\| Va \right\|} a^T V^T V \tag{5.5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} R_j / R_p = 1 \tag{5.6}$$

ii. **(5.7)**'de verilen bilgi geçerlidir. Yani $r^* = -\Delta^T$ olarak bulunur.

$$ML_{k^2} = L\left(-\Delta^T \right) \tag{5.7}$$

Hatırlatma: (3.26)'da verilen yaklaşımla bulunan VaR_c ve TEL_c için Önerme 5.2 geçerli değildir. Çünkü burada $k = k\left(a \right)$ olarak bulunduğundan, *k* sabit değildir.

Tanım 5.3: i. $\mu_p, R_p > 0$ olsun. **(5.8)**'de tanımlanan beklenen performans, P0'ın birim piyasa riskine karşı gelen beklenen karıdır.

$$BP = \mu_p / R_p \tag{5.8}$$

ii. $r_p, R_p > 0$ olsun. **(5.9)**'da tanımlanan gerçekleşmiş performans, P0'ın birim piyasa riskine karşı gelen gerçekleşmiş karıdır.

$$GP = r_p / R_p \tag{5.9}$$

iii. $a_j\mu_j, R_j > 0$ olsun. **(5.10)**'da tanımlanan beklenen performans, ilgili alt portföyün birim piyasa riskine karşı gelen beklenen karıdır.

$$BP_j = a_j\mu_j / R_j \tag{5.10}$$

iv. $a_j r_j, R_j > 0$ olsun. **(5.11)**'de tanımlanan gerçekleşmiş performans, ilgili alt portföyün birim piyasa riskine karşı gelen gerçekleşmiş karıdır.

$$GP_j = a_j r_j / R_j \tag{5.11}$$

Hatırlatma: Verilen durumların dışında ise beklenen (gerçekleşmiş) kar ve piyasa riski ayrı ayrı değerlendirilerek risk dikkate alınmış performans belirlenebilir.

5.2 Sermayenin Alt Portföylere Dağıtımı

Engels (2004) temel alınarak hazırlanan bu alt bölümde, özellikleri **(5.1)**'de verilen lineer portföylerin oluşturulması ile ilgili bilgiler verilmiştir. Burada kısa pozisyon almanın getirdiği ek maliyetler ihmal edilmiştir.

Tanım 5.4: 1'lerden oluşan *n* elemanlı sütun vektörü $\bar{1}$ olsun. **(5.12)**'de verilen düzgün konkav maksimizasyon probleminin primal optimal vektörü var olsun. Bu vektör, etkin portföyün hassaslık vektörüdür.

$$\sup\left\{\mu_p : V_0 = a^T\bar{1},\ R_p = K_1\right\} \tag{5.12}$$

(5.13)'te verilen düzgün konveks minimizasyon probleminin primal optimal vektörü var olsun. Bu vektör belirli K_2 değerleri için etkin portföyün hassaslık vektörüdür.

$$\inf\left\{\sigma_p : V_0 = a^T\bar{1},\ \mu_p = K_2\right\} \tag{5.13}$$

Önerme 5.5: $\sum = V^T V$ iken **(5.14)**'te verilen atamalar yapılsın.

$$\begin{gathered} e = \mu^T \sum^{-1} \mu > 0,\ c = \bar{1}^T \sum^{-1} \bar{1} > 0 \\ b = \mu^T \sum^{-1} \bar{1},\ d = ec - b^2 > 0 \end{gathered} \tag{5.14}$$

i. (5.13)'te verilen problemin primal optimal vektörü varsa, **(5.15)**'teki gibidir.

$$a^* = \frac{\Sigma^{-1}\left[\left(e\bar{1} - b\mu\right)V_0 + \left(c\mu - b\bar{1}\right)\mu_p\right]}{d} \qquad \textbf{(5.15)}$$

Buna göre **(5.16)**'da verilen bilgi geçerlidir. $R_p\mu_p$ düzleminde etkin portföylerle oluşturulan eğrinin (etkin sınırın) üzerinde ise pozitifli eşitlik geçerlidir.

$$\mu_p = \frac{b}{c}V_0 \mp \sigma_p\left(\frac{d}{c}\right)^{0.5} \qquad \textbf{(5.16)}$$

ii. *BP*'si maksimum olan lineer portföyün ağırlık vektörü $\forall R_p(a) > 0$ için **(5.17)**'deki gibidir. Burada V_0'ın işareti $\mu_p > 0$ olacak şekilde belirlenir.

$$a^*/V_0 = \frac{\Sigma^{-1}\mu}{b} \qquad \textbf{(5.17)}$$

iii. R_p'si minimum olan lineer portföy için **(5.18)**'te verilen bilgi geçerlidir. Buna göre **(5.15)**'te verilen formülle bu portföyün hassaslık vektörü bulunabilir.

$$\mu_p = \left(\frac{b + d\left(ck^2 - d\right)^{-0.5}}{c}\right)V_0 \qquad \textbf{(5.18)}$$

iv. σ_p'si minimum olan lineer portföyün hassaslık vektörü **(5.19)**'daki gibidir.

$$a^* = \frac{V_0\left(\Sigma^{-1}\bar{1}\right)}{c} \qquad \textbf{(5.19)}$$

İspat için yol gösterme: Verilen portföylerin etkin sınırın üzerinde olduğu açıktır. Etkin sınırın üzerinde ise $R_p = R_p\left(\mu_p\right)$ ve $\sigma_p = \sigma_p\left(\mu_p\right)$ olarak bulunur.

i. Düzgün konveks minimizasyon probleminde güçlü dualite vardır. Bu nedenle ilgili vektörlerin optimal vektör olmaları için gerek ve yeter şart KKT koşullarını birlikte sağlamalarıdır. Buradan primal optimal vektör bulunabilir. Ayrıca **(5.16)**'da verilen

eşitliklerden birinin geçerli olduğu görülür. Etkin portföyün tanımı gereği negatifli eşitlik etkin olmayan sınıra karşı gelirken pozitifli eşitlik etkin sınıra karşı gelir.

ii. **(5.20)**'de verilen grafik sonuç kullanılırsa istenen sonuç elde edilir.

$$\frac{dR_p\left(\mu_p\right)}{d\mu_p} = \frac{R_p}{\mu_p} \Leftrightarrow BP = \frac{\mu_p}{R_p} \; maksimumdur. \tag{5.20}$$

iii. (5.21)'de verilen grafik sonuç kullanılırsa istenen sonuç elde edilir.

$$\frac{dR_p\left(\mu_p\right)}{d\mu_p} = 0 \Leftrightarrow R_p \; minimumdur. \tag{5.21}$$

iv. (5.22)'de verilen grafik sonuç kullanılırsa istenen sonuç elde edilir.

$$\frac{d\sigma_p\left(\mu_p\right)}{d\mu_p} = 0 \Leftrightarrow \sigma_p \; minimumdur. \tag{5.22}$$

5.3 Portföye Özgü Risklerin Belirlenmesi

Breuer ve diğ. (2009) ve Breuer (2006) temel alınarak hazırlanan bu alt bölümde, stres testlerinin portföye özgü risklerin belirlenmesinde kullanılması ile ilgili bilgiler verilmiştir.

Tanım 5.6: $r = r^+$ stres senaryosunun işaret ettiği kayba ilgili risk faktörünün katkı oranı **(5.23)**'teki gibi tanımlanır. Bu değer negatif (pozitif) ise bu risk faktörünün bu kaybı azaltıcı (artırıcı) etkisi vardır.

$$kov_j = \frac{L\left(0,\ldots\ldots,0,\, r_j^+, 0\ldots\ldots,0\right)}{L\left(r^+\right)} \tag{5.23}$$

Bulunan katkı oranlarının toplamı 1'e eşitse, risk faktörleri arasında etkileşim yoktur. Bu değer 1'den büyükse (küçükse), risk faktörleri arasında pozitif (negatif) etkileşim vardır.

Önerme 5.7: Risk faktörleri arasında etkileşim olmaması için gerek ve yeter şart **(5.24)**'te verilen eşitliğin geçerli olmasıdır. Buna göre kayıp fonksiyonu lineer ise risk faktörleri arasında etkileşim yoktur.

$$L(r) = \sum_{j=1}^{n} L_j(r_j) \tag{5.24}$$

Hatırlatma: Önerme 5.2'nin doğal bir sonucu olarak özellikleri **(5.1)**'de verilen lineer portföyler için **(5.25)**'te verilen bilgi geçerlidir.

$$R_p = ML_h \Rightarrow kov_j = R_j / R_p \tag{5.25}$$

Risk faktörleri arasında negatif etkileşim varsa, bunların getirilerinin hareketleri ayrık gruplar halinde irdelenebilir ve her bir grup için **(5.23)**'tekine benzer katkı oranları tanımlanabilir. Buradaki amaç bunların toplamını en azından 1'e eşit yapmaktır. Bu yaklaşım portföye özgü risklerin azaltılmasında önem taşır.

Oluşturulan saf senaryolar sübjektiftir ve stres senaryolarında aranan akla yatkın olma ile uç kayıpları ortaya çıkarma özelliklerini genellikle birlikte barındırmaz. Bu nedenle saf senaryo analizlerinin risk yönetim faaliyetlerine etkisi sınırlıdır. Bu sorunu çözmek için önerilen bir yaklaşım, saf senaryo analizlerinin piyasa riski modellerine entegre edilmesidir. Bu konu hakkında detaylı bilgi için Aragones ve diğ. (2001)'e bakınız.

ML'nin stres senaryosu, stres senaryolarında aranan özellikleri taşır. Bu nedenle ML stres testi olarak portföye özgü risklerin belirlenmesinde ve azaltılmasında alternatiflerine tercih edilebilir. Buna göre risk faktörlerinin veya risk faktör gruplarının ML'ye katkı oranları bu konularda kullanılabilir.

Portföye özgü risklerin azaltılmasında ise portföy yapısının değiştirilmesi ya da portföyün ana yapısının korunarak türev ürünlerle portföyün zenginleştirilmesi gibi yöntemler izlenebilir. Bu konu hakkında detaylı bilgi için Bölüm 6.2'ye bakınız.

5.4 Piyasa Riski Sermaye Gereksiniminin Belirlenmesi

Bolgün ve Akçay (2003), Cangürel ve diğ. (2012), Breuer ve diğ. (2010) ve Piyasa Riski Ölçümleme Yöntemlerine İlişkin Analiz (2010) temel alınarak bu alt bölüm hazırlanmıştır.

Kredi riski sermaye gereksinimi (KS), kurumun kredi riskine karşı elde tutması gereken sermayedir. Kredi riski, bir yıl gibi daha uzun bir süre içerisinde portföydeki

finansal varlıkların karşılıksız kalması veya verilen kredilerin geri dönmemesi riski olarak tanımlanır.

Piyasa riski sermaye gereksinimi (PS), kurumun piyasa riskine karşı elde tutması gereken sermayedir. Piyasa riski, 10 işlem gününden oluşan periyotta portföy değerinin olumsuz yönde değişme ihtimalinden kaynaklanır.

Operasyonel risk sermaye gereksinimi (OS), kurumun operasyonel faaliyetlerden kaynaklanan risklere karşı elde tutması gereken sermayedir. Operasyonel riskler ile kredi riski veya piyasa riski arasında etkileşim yoktur.

Basel Komitesi'nin önerisi uyarınca risk sermaye gereksinimi (RS), **(5.26)**'da verilen formülle belirlenmektedir.

$$RS = PS + KS + OS \tag{5.26}$$

Kredi riskinin bankacılık faaliyetleri ile piyasa riskinin ise alım–satım faaliyetleri ile ilgili olduğu varsayımı altında, alt toplamsal olan tek bir parasal risk ölçüsüyle ayrı ayrı bulunan PS ve KS için **(5.27)**'de verilen eşitsizlik geçerlidir.

$$RS \leq PS + KS + OS \tag{5.27}$$

Kredi riski modellerinde r doğrudan yer almaz. Buna karşın bu vektör, kredi riski model parametrelerini etkileyebilir. Dolayısıyla kredi riski ile piyasa riski arasında negatif etkileşim oluşabilir. Bu durumda **(5.27)**'de verilen eşitsizliğin geçerli olması için gereken varsayım sağlanmaz. Buna göre toplam finansal risk, bu üç finansal riskin toplamı şeklinde tam olarak açıklanamayabilir ve RS olduğundan az gösterilebilir. Bu durum kurum açısından birçok soruna neden olabilir. Bu konu hakkında detaylı bilgi için Breuer ve diğ. (2010)'a bakınız.

Son finansal krizle birlikte finansal kurumların finansal yapısının güçlendirilmesi ve yeni bir küresel krizin önlenmesi amacıyla, Basel Komitesi Basel II'de bazı değişiklikler yaparak Basel III olarak adlandırılan sermaye uzlaşısını oluşturmuştur. Basel III'e göre PS, portföye özgü riskleri tam olarak yansıtmadığı bilinen standart metotla veya **(5.28)**'de verilen formülle belirlenmelidir.

$$PS = \text{mak}\left(VaR_{0.99}, k_1 VaR_{ort}\right) + \text{mak}\left(VaR^*_{0.99}, k_2 VaR^*_{ort}\right) \tag{5.28}$$

Burada k_1 ve k_2 en az 3 olmak üzere yerel denetim kurumu (BDDK) tarafından belirlenecek katsayılardır. 10 günlük $VaR_{0.99}$ değerlerinin önceki 60 işlem günü için ortalaması VaR_{ort} ile kayıpların çok yaşandığı bir yılda en az 5 günlük $VaR^*_{0.99}$ değerlerinin önceki 60 işlem günü için ortalaması VaR^*_{ort} ile gösterilmiştir.

Son 250 iş günü boyunca yapılan ve sınır değer olarak yalnızca 1 günlük $VaR_{0.99}$ değerlerinin alındığı geriye dönük testlerde $VaR_{0.99}$ modelinin başarısız olduğu gün sayısı istatistiği M olsun. Basel Komitesi M'ye bağlı olarak k_1'in artırılmasını önermektedir. Ayrıca $M \geq 10$ ise bu modelin geçerli olmadığını belirtmektedir.

Çizelge 5.1 : Çarpım faktörünün tespiti, Bolgün ve Akçay (2003)'ten alınmıştır.

M	≤4	5	6	7	8	9	≥10
k_1	3	3.4	3.5	3.65	3.75	3.85	4

Eşik aşım metodu ile kurulan VaR modellerinin geçerlilik oranları, dağılımı kalın kuyruklu olarak belirlense bile L'nin tüm dağılımını dikkate alan VaR modellerinin geçerlilik oranlarından daha yüksek olmaktadır. Ayrıca modelin kurulduğu güven düzeyi arttıkça bu fark daha da belirginleşmektedir (Liu, 2011). Bununla birlikte TEL finans teorisiyle uyumludur ve sermayenin korunmasında VaR'a göre daha etkindir. Bu nedenle eşik aşım metoduyla bulunan TEL'in piyasa riski sermaye gereksinimin belirlenmesinde kullanılması, mevcut yaklaşıma göre daha uygun olabilir.

6. UYGULAMA

BIST elektrik sektörü endeksi XELKT ile gıda sektörü endeksi XGIDA ile ticaret sektörü endeksi XTCRT ile teknoloji sektörü endeksi XTEK ile gösterilsin. 04.01.2007–31.12.2012 tarihleri arasındaki 3008 seans için endeks getirileri kapanış fiyatları üzerinden hesaplanmıştır. İlk 1504 seanstan oluşan periyota (T1'e) ait veriler kullanılarak piyasa riski modelleri oluşturulmuştur. Ayrıca son 1504 seanstan oluşan periyota (T2'ye) ait veriler kullanılarak bu modeller için geriye dönük testler yapılmıştır. Yapılan uygulamanın odak noktası olan entegre risk analizi tasarısı ise T2'nin ilk 20 seansından oluşan periyotta (T3'te) uygulanmıştır.

6.1 Veri Analizi

Bu alt bölümde Bölüm 2'de verilen bazı bilgiler özetlendikten sonra, getirilerin zaman serilerinden elde edilen sonuçlar verilmiştir.

Koşullu ortalamanın bulunmasında kullanılan AR(1) **(6.1)**'de, koşullu varyansın bulunmasında kullanılan GARCH(1,1) **(6.2)**'de verilmiştir.

$$\mu_{i,j} = a + \theta r_{i-1,j} \tag{6.2}$$

$$\sigma_{i,j}^2 = \Psi + \alpha\sigma_{i-1,j}^2 u_{i-1,j}^2 + \beta\sigma_{i-1,j}^2 \tag{6.3}$$

Finansal zaman serileriyle ilgili ampirik gerçeklerle genel olarak uyumlu olan AR(1)+GARCH(1,1) modelinde, **(6.3)**'te tanımlanan standartlaştırılmış getirilerin zaman serisinin aynı dağılmış bağımsız rastgele değişkenlerden oluştuğu varsayılır. Bunların (koşullu) ortalaması 0, (koşullu) varyansı ise 1 olarak kabul edilir.

$$\left\{u_{i,j}\right\} = \left\{\frac{r_{i,j} - \mu_{i,j}}{\sigma_{i,j}}\right\} \tag{6.3}$$

Yalnızca T3'ün ilk seansı için **(6.1)** ve **(6.2)**'deki ifadeler doğrudan kullanılabilir. Diğer seanslar için yapılan hesaplamalarda ise standartlaştırılmış getirilerin karesi ve

getirilerin yerine genellikle bunların koşullu beklenen değeri kullanılır. T3 için koşullu ortalama ve varyans tahmini ise bulunan seanslık değerlerin toplamıdır.

AR(1)+GARCH(1,1) modeli parametrelerinin Maksimum Olabilirlik Tahmini (MLE) ile bulunan tahmincileri ve parantez içinde olmak üzere ilgili standart hatalar Çizelge 6.1'de verilmiştir. Burada *v*, T(v)'nin serbestlik derecesini göstermektedir.

Çizelge 6.1 : AR(1)+GARCH(1,1) modeli.

Parametre	XELKT	XGIDA	XTCRT	XTEK
a	0.0006 (0.0004)	0.0007 (0.0003)	0.0005 (0.0003)	0.0008 (0.0003)
θ	–0.0288 (0.0267)	0.1164 (0.0257)	0.0658 (0.0268)	–0.0506 (0.0268)
Ψ	0.0000 (0.0000)	0.0000 (0.0000)	0.0000 (0.0000)	0.0000 (0.0000)
β	0.7892 (0.0352)	0.8796 (0.0238)	0.8095 (0.0316)	0.8266 (0.0291)
α	0.1572 (0.0307)	0.0967 (0.0212)	0.1433 (0.0285)	0.1321 (0.0247)
v	4.5390 (0.6020)	4.7416 (0.6713)	4.1933 (0.5500)	5.1756 (0.7625)

Parametreler için bulunan tahminciler **(6.4)**'te verilen eşitsizlikleri sağladığından, getirilerin zaman serileri kesin durağandır. Ayrıca θ, 0'a oldukça yakın olduğundan, bu zaman serilerinde düşük otokorelasyon vardır**.** Bu konu hakkında detaylı bilgi için EK A'ya bakınız.

$$|\theta| < 1, \Psi > 0,\ \alpha, \beta \geq 0, (\alpha + \beta) < 1 \qquad \textbf{(6.4)}$$

T3 için ortalama vektörü (μ), standart sapma vektörü (σ) ve değişkenlik vektörü (σ/μ) Çizelge 6.2'de verilmiştir. Bunların elemanları koşullu değerlerdir. Ayrıca T1'de standartlaştırılmış getirilerin pozitif tanımlı lineer korelasyon matrisi (A) Çizelge 6.3'te verilmiştir. Burada *A*'nın elemanları pozitiftir ve genellikle 1'e yakın değildir.

Hatırlatma: Değişkenlik katsayısı parasal olmayan risk ölçülerine bir örnektir ve riskten kaçan yatırımcılar tarafından düşük olması tercih edilir.

Çizelge 6.2 : Ortalama ve standart sapma analizi.

Endeks	μ	σ	σ/μ
XELKT	0.0110	0.0733	6.6330
XGIDA	0.0134	0.0557	4.1534
XTCRT	0.0091	0.0602	6.5898
XTEK	0.0134	0.0760	5.6878

Çizelge 6.3 : Lineer korelasyon matrisi (A).

Endeks	XELKT	XGIDA	XTCRT	XTEK
XELKT	1.0000	0.3609	0.3330	0.5244
XGIDA	0.3609	1.0000	0.3460	0.4167
XTCRT	0.3330	0.3460	1.0000	0.4507
XTEK	0.5244	0.4167	0.4507	1.0000

S tam rank, köşegen matris olmak üzere T3 için pozitif tanımlı ortak oynaklık matrisi, **(6.5)**'te verilen formülle belirlenmiştir. Buna göre V tam rank, üst üçgen matris olmak üzere bu matrisin Cholesky ayrışımı yapılabilir.

$$\begin{aligned}\Sigma &= SAS = köşegen(\sigma)\, A\, köşegen(\sigma) \\ &= V^T V\end{aligned} \qquad \textbf{(6.5)}$$

6.2 Lineer Portföylerin Piyasa Riski

Özellikleri **(6.6)**'da verilen lineer portföylerin piyasa riskinin ve risk dikkate alınmış performansının modellenmesi ile ilgili bilgiler, bu alt bölümde özetlenmiştir. Burada piyasa riski hesaplama periyotu geriye dönük testler dışında T3'tür.

$$L(r) = -a^T r \text{ ve } r \sim E_4\left(\mu, s^2 V^T V, g_4\right) \qquad \textbf{(6.6)}$$

Çizelge 6.1'de verilen bilgiler temel alınarak r'nin dağılımının dört değişkenli T(4) olduğu varsayılabilir. Ayrıca **(6.6)**'da verilen varsayımlar altında, **(6.7)** ve **(6.8)**'de verilen bilgiler geçerlidir. Buna göre Lu'nun dağılımı da T(4)'tür.

$$L \sim E_1\left(-a^T\mu, \left\|sVa\right\|^2, g_1\right) = E_1\left(-\mu_p, s^2\sigma_p^2, g_1\right) \tag{6.7}$$

$$\frac{L+\mu_p}{\sigma_p} = Lu \sim E_1\left(0, s^2, g_1\right) \tag{6.8}$$

Ayrıca t(4)'ün ters birikimli olasılık yoğunluk fonksiyonu $S^{-1}(p)$ iken VaR_c ve TEL_c sırasıyla **(6.9)** ve **(6.10)**'daki gibi bulunur.

$$VaR_c = -\mu_p + S^{-1}(c)s\sigma_p \tag{6.9}$$

$$TEL_c = -\mu_p + s\sigma_p \frac{1}{1-c}\int_c^1 S^{-1}(p)\,dp \tag{6.10}$$

Aynı varsayımlar altında $r^* \in A_h$ ve $ML_h = L\left(r^*\right)$ ise **(6.11)**'deki gibi bulunur.

$$r^* = \mu - \frac{h^{0.5}V^TVa}{\sigma_p}$$

$$ML_h = -\mu_p + h^{0.5}\sigma_p \tag{6.11}$$

Tüm piyasa riski modelleri için güven düzeyi (c) 0.99 olsun. Buna göre *Lu* için sınır değer $k > 0$ iken $R_p(a)$ ile gösterilen konveks risk fonksiyonu **(6.12)**'deki gibidir.

$$R_p(a) = -a^T\mu + k\left\|Va\right\| = -\mu_p + k\sigma_p \tag{6.12}$$

Ayrıca bu piyasa riski ölçüleri pozitif homojen olduğundan, $|V_0| > 0$ iken **(6.13)**'te verilen bilgi geçerlidir. Burada λ risklilik oranıdır.

$$\lambda = R_p(a/|V_0|) = \frac{R_p(a)}{|V_0|} \tag{6.13}$$

Çizelge 6.3'te verilen *A* temel alındığında, çeşitlendirilmiş lineer portföyler için bulunan ML'de boyuta bağlılık probleminin bulunmadığı varsayılabilir. Buna göre Monte Carlo benzetimiyle dağılımı dört değişkenli t(4) olan *z* rastgele vektörü için kesikli dağılım oluşturulduktan sonra, **(6.14)**'te verilen yaklaşımla *h* belirlenebilir.

$$s^{-1}V^{-T}\left(r-\mu\right)=z\sim E_4\left(0,I,g_4\right)$$
$$c\approx P\left(\left\|sz\right\|^2\le h\right) \tag{6.14}$$

A'nın sabit olduğu varsayılırken μ_i ve $V_i^TV_i=S_iAS_i$ seanslık olarak değişsin. Buna göre beyaz gürültü olduğu varsayılan $\{Lu_i\}$ **(6.15)**'teki gibi oluşturulabilir.

$$\{Lu_i\}=\left\{\frac{a^T\left(\mu_i-r_i\right)}{\left\|V_ia\right\|}\right\} \tag{6.15}$$

T1'deki m adet gözlemde seçilen eşik değeri (U) kesin olarak aşan standartlaştırılmış kayıpların sayısı t olsun. Bunların U'ya olan uzaklıklarının zaman serisi GPD ile modellensin. Buna göre VaR modelinde Lu için sınır değer **(6.16)**'daki gibi bulunur. Burada GPD'nin ölçek parametresi β ile biçim parametresi ξ ile gösterilmiştir.

$$k_{VaR}\left(a\right)=\begin{cases}U+\dfrac{\beta}{\xi}\left[\left(\dfrac{1-c}{t/m}\right)^{-\xi}-1\right],\ \xi\neq 0\\ U-\beta\log\left(\dfrac{1-c}{t/m}\right),\ \xi=0\end{cases} \tag{6.16}$$

TEL modelinde Lu için sınır değer ise **(6.17)**'deki gibi bulunur.

$$k_{TEL}\left(a\right)=\begin{cases}\dfrac{k_{VaR}\left(a\right)+\beta-\xi U}{1-\xi},\ \xi<1\\ \infty,\ \xi\ge 1\end{cases} \tag{6.17}$$

Pozitif homojen, parasal risk ölçüsü olan VaR_c ve TEL_c sırasıyla **(6.18)** ve **(6.19)**'daki gibi belirlenir. Buna göre **(6.12)**'de verilen eşitlik, $k=k\left(a\right)$ olmak üzere eşik aşım metoduyla bulunan VaR_c ve TEL_c için de geçerlidir.

$$VaR_c=-\mu_p+k_{VaR}\sigma_p \tag{6.18}$$

$$TEL_c=-\mu_p+k_{TEL}\sigma_p \tag{6.19}$$

T2'deki 1504 adet gözlemde seanslık piyasa riski modelinin başarısız olduğu seans sayısı istatistiği *M* olsun. Seanslık VaR modeli için **(6.20)**'de verilen bilgi geçerlidir. Yani *M*'nin asimptotik dağılımı T(∞)'dur. Buna göre **(6.21)**'de verilen şart sağlanıyorsa, bu modelin geçerli olduğu önsavı (H_0) 0.95 güven düzeyinde ret edilir.

$$M \sim^{a} N\left((1-c)1504, c(1-c)1504\right) = N\left(\mu_M, \sigma_M^2\right) \tag{6.20}$$

$$M \notin \left[\mu_M - z_{0.975}\sigma_M,\ \mu_M + z_{0.975}\sigma_M\right] \approx [8, 22] \tag{6.21}$$

$\mu_p, R_p > 0$ olsun. **(6.22)**'de verilen beklenen performans, P0'ın birim piyasa riskine karşı gelen beklenen karıdır.

$$BP = \mu_p / R_p \tag{6.22}$$

$r_p, R_p > 0$ olsun. **(6.23)**'te verilen gerçekleşmiş performans, P0'ın birim piyasa riskine karşı gelen gerçekleşmiş karıdır.

$$GP = r_p / R_p \tag{6.23}$$

(6.24)'te verilen alternatif performans, kayıp fonksiyonunun –1 ile çarpılması durumunda (P0, P0+'ya çevrildiğinde) piyasa riskindeki artış oranıdır ve *Lu*'nun dağılımının eliptik kabul edildiği modellerde simetriden dolayı $2BP$'ye eşittir.

$$\begin{aligned} AP &= \frac{R_p^{+} - R_p}{R_p} = \frac{\left(\mu_p + k^{+}\sigma_p\right) - \left(-\mu_p + k\sigma_p\right)}{-\mu_p + k\sigma_p} \\ &= \frac{2\mu_p - \left(k^{+} - k\right)\sigma_p}{-\mu_p + k\sigma_p} \end{aligned} \tag{6.24}$$

Bu çalışmada P0+'nın risklilik analizi, P0'ın alternatif karlılık analizi olarak kullanılmıştır. Bilindiği üzere temel karlılık analizi beklenen kara dayanır.

Kısa pozisyon almanın getirdiği ek maliyetler ihmal edilsin ve *r*'nin dağılımının dört değişkenli T(4) olduğu varsayılsın. Buna göre bu çalışmada olduğu gibi $R_p(a) > 0$ iken T3'te beklenen performansı maksimum yapan lineer portföyün (P1) ağırlık vektörü **(6.25)**'teki gibidir. Burada V_0'ın işareti $\mu_p > 0$ olacak şekilde belirlenir.

$$a^*/V_0 = \frac{V^{-1}V^{-T}\mu}{\mu^T V^{-1}V^{-T}\overline{1}} \qquad \textbf{(6.25)}$$

P1'in ilk durumdaki değeri pozitif olduğundan, bu vektörün pozitif (negatif) elemanları ilgili endekste uzun (kısa) pozisyon alındığını gösterir. P1+ için ise bu durumun tersi geçerlidir. Çünkü P1+ ile P1'in ağırlık vektörleri aynı olsa da P1+'nın ilk durumdaki değeri negatiftir.

6.3 Entegre Risk Analizi Tasarısı

Çizelge 6.4'te görüldüğü üzere P1 tüm endekslerde uzun pozisyon alınarak oluşturulmuştur ve XGIDA uzun pozisyonu P1'de oldukça baskındır. Bu nedenle XGIDA uzun pozisyonunun ML'ye katkı oranı hem P1 hem de P1+ için oldukça yüksektir. Belirli risk faktörlerinin uç hareketlerine aşırı hassas olma olarak adlandırılabilecek bu sorunu çözmek için endeks ağırlıklarının 0.25'e daha yakın olduğu ve bu ağırlıkların sıralamasının korunduğu lineer portföy (P2), P1 ve P1+'ya ait olan r^* ve katkı oranı vektörleri (kov) temel alınarak oluşturulmuştur. P1'in ana yapısının korunarak türev ürünlerle P1'in zenginleştirilmesi, alternatif bir yöntemdir.

Çizelge 6.4 : ML I.

Endeks	a/V_0	P1+		P1	
		r^*	kov	r^*	kov
XELEK	0.0944	0.2256	0.0832	–0.2035	0.0832
XGIDA	0.6186	0.2737	0.6616	–0.2469	0.6616
XTCRT	0.1511	0.1868	0.1102	–0.1685	0.1102
XTEK	0.1359	0.2731	0.1450	–0.2464	0.1450
Toplam	1.0000		1.0000		1.0000

ML açısından P1 ve P2 arasında kayıtsız olduğumuz söylenebilir. Buna karşın Çizelge 4 ve Çizelge 5'te verilen katkı oranı vektörleri karşılaştırıldığında, piyasa riskinin P2'de P1'e göre daha düzgün dağıtıldığı görülür. Benzer durum P2+ ve P1+ arasındaki ilişkide de geçerlidir. Yani P1'in aksine iyi çeşitlendirilmiş olduğundan,

P2, P1'e göre uç piyasa koşullarında daha güvenilirdir. Bu nedenle P2, P1'e tercih edilmiştir.

Çizelge 6.5 : ML II.

Endeks	a/V_0	P2+		P2	
		r^*	kov	r^*	kov
XELEK	0.1700	0.2684	0.1800	–0.2463	0.1825
XGIDA	0.4000	0.2374	0.3746	–0.2106	0.3671
XTCRT	0.2300	0.2175	0.1974	–0.1993	0.1997
XTEK	0.2000	0.3144	0.2480	–0.2877	0.2507
Toplam	1.0000		1.0000		1.0000

Çizelge 6.6 ve Çizelge 6.8'de verilen bilgiler karşılaştırıldığında, ML'nin piyasa riski ölçüsü olarak aşırı derecede koruyucu olduğu görülmüştür. Bu durum ML'nin piyasa riski ölçüsü olarak değil de stres testi olarak kullanılması ile uyumludur. Bu seçim Bölüm 4.2.1 ve Bölüm 5.3'te verilen teorik bilgiler doğrultusunda yapılmıştır.

Çizelge 6.6 : ML III.

	P1+	P1	P2+	P2
$h^{0.5}$	5.0651	5.0651	5.0651	5.0651
λ	0.2560	0.2309	0.2535	0.2295

Gençay, Selçuk ve Ulugülyağcı (2001)'de tanıtılan EVIM ile eşik aşım metodu standartlaştırılmış kayıpların zaman serilerine uygulanmıştır. Buna göre GPD parametrelerinin MLE ile bulunan tahmincileri ve parantez içinde olmak üzere ilgili standart hatalar Çizelge 6.7'de verilmiştir. Burada ilgili endeksin uzun pozisyonu "Endeks–" ile gösterilirken bu endeksin aynı büyüklükte kısa pozisyonu ise "Endeks+" ile gösterilmiştir.

Lu'nun dağılımının sağ ve sol kuyruklarına ait GPD parametrelerinin en azından biri farklı olduğundan, bu dağılımın sağ ve sol kuyrukları farklı yapıdadır. Bu durum bu dağılımın T(4) olduğu varsayımı ile çelişir. Yani bu varsayım uç piyasa hareketlerini açıklamada yetersizdir. Bu konu hakkında detaylı bilgi için Ek A'ya bakınız.

Çizelge 6.7 : Eşik aşım metodu I.

	U	ξ	β	t/m
XELKT–	1.40	0.0527 (0.1117)	0.6584 (0.1028)	0.0559
XELKT+	1.60	0.0278 (0.1364)	0.6468 (0.1138)	0.0539
XGIDA–	1.50	0.1406 (0.1308)	0.5504 (0.0932)	0.0565
XGIDA+	1.50	–0.0451 (0.1044)	0.5631 (0.0824)	0.0632
XTCRT–	1.55	–0.0042 (0.1254)	0.7058 (0.1192)	0.0519
XTCRT+	1.55	0.0132 (0.1093)	0.6433 (0.1023)	0.0499
XTEK–	1.55	–0.0349 (0.1118)	0.7910 (0.1215)	0.0598
XTEK+	1.50	–0.0342 (0.1420)	0.5589 (0.1034)	0.0472
P1	1.60	0.2705 (0.1534)	0.4824 (0.0897)	0.0559
P1+	1.50	–0.0721 (0.1227)	0.5105 (0.0844)	0.0539
P2	1.50	0.0799 (0.1216)	0.7214 (0.1166)	0.0585
P2+	1.45	–0.1472 (0.1063)	0.5564 (0.0865)	0.0505

Lu'nun dağılımının T(4) olduğu varsayımına dayanan VaR modeli, T–VaR ile gösterilsin. Eşik aşım metodu ile kurulan VaR ve TEL modelleri sırasıyla E–VaR ve E–TEL ile gösterilsin. T3'te bu modellerin sonuçları Çizelge 6.8'de verilmiştir.

Çizelge 6.8 : Risklilik analizi I.

		P1+	P1	P2+	P2
k	E–VaR	2.4144	2.6567	2.2519	2.8688
	E–TEL	2.9245	3.7098	2.6340	3.7716
	T–VaR	2.6495	2.6495	2.6495	2.6495
λ	E–VaR	0.1286	0.1152	0.1194	0.1248
	E–TEL	0.1531	0.1658	0.1376	0.1678
	T–VaR	0.1399	0.1148	0.1383	0.1143

Endeks kısa ve uzun pozisyonları için yapılan geriye dönük testlerin sonuçları takip eden çizelgelerde verilmiştir.

Çizelge 6.9 : Geriye dönük testler I.

		XELKT+	XELKT–	XGIDA+	XGIDA–
	k	2.7150	2.5853	2.4958	2.5795
E–VaR	M	6	10	8	15
	H_0	ret	kabul	kabul	kabul
	λ	0.2099	0.1783	0.1523	0.1302
	k	3.4122	3.3462	2.9915	3.3967
E–TEL	M	2	3	2	4
	λ	0.2610	0.2341	0.1799	0.1757
	k	2.6495	2.6495	2.6495	2.6495
T–VaR	M	6	10	8	14
	H_0	ret	kabul	kabul	kabul
	λ	0.2051	0.1830	0.1609	0.1341

Çizelge 6.10 : Geriye dönük testler II.

		XTCRT+	XTCRT–	XTEK+	XTEK–
	k	2.5946	2.7078	2.3447	2.9218
E–VaR	M	13	6	15	10
	H_0	kabul	ret	kabul	kabul
	λ	0.1655	0.1540	0.1917	0.2088
	k	3.2604	3.4059	2.8572	3.6399
E–TEL	M	3	2	8	8
	λ	0.2056	0.1961	0.2358	0.2634
	k	2.6495	2.6495	2.6495	2.6495
T–VaR	M	11	7	9	14
	H_0	kabul	ret	kabul	kabul
	λ	0.1688	0.1505	0.2147	0.1881

Hem E–VaR hem de T–VaR endeks uzun (kısa) pozisyonlarının modellenmesinde ¾ oranında başarılı olmuştur. Öte yandan kuyruk yapılarındaki farklılıklara karşı daha hassas olduğundan, E–VaR'ın, T–VaR'a göre daha güvenilir olduğu söylenebilir. Ayrıca bunların ikisinden farklı olarak E–TEL genellikle uç piyasa hareketlerini yakalamada oldukça başarılıdır. Bununla birlikte TEL'in, VaR'a göre teorik olarak daha üstün bir piyasa riski ölçüsü olduğu da bilinmektedir. Bu nedenlerden ötürü bu çalışmada piyasa riski ve risk dikkate alınmış performans E–TEL kullanılarak belirlenmiştir.

Beklendiği gibi portföyü çeşitlendirme, piyasa riskinin azaltılmasında ve beklenen performansın artırılmasında son derece etkilidir. Bu etkiler ihmal edilsin. Buna göre Çizelge 6.11'de verilen T3'te risk dikkate alınmış performanslarına göre XELKT uzun pozisyonunun oldukça iyi, XGIDA ve XTCRT uzun pozisyonlarının ise tatmin edici finansal pozisyonlar olduğu söylenebilir. XTEK kısa ve uzun pozisyonları ise tek başlarına tatmin edici olmayan finansal pozisyonlardır.

XGIDA uzun pozisyonunun beklenen performansının en yüksek olması, risk dikkate alınmış performansın E–TEL kullanılarak belirlenmesinden kaynaklanmaktadır. Eğer risk dikkate alınmış performans T–VaR veya ML kullanılarak belirlenseydi, oluşturulma şekline bağlı olarak P1 en yüksek beklenen performansa sahip olurdu.

Ayrıca iyi çeşitlendirilmiş portföylerin, uç piyasa koşullarına ek olarak normal piyasa koşulları için de gerekli olduğu sonucuna varılmıştır. Çünkü bu çalışmada olduğu gibi alt portföylerin gerçekleşmiş performansları arasında önemli farklar bulunabilir.

Çizelge 6.11 : Risk dikkate alınmış performans analizi.

	μ_p/V_0	σ_p/V_0	r_p/V_0	BP	AP	GP
XELKT–	0.0110	0.0733	0.1651	0.0472	0.1150	0.7052
XGIDA–	0.0134	0.0557	0.0077	0.0763	0.0243	0.0441
XTCRT–	0.0091	0.0603	0.0222	0.0466	0.0484	0.1131
XTEK–	0.0134	0.0760	0.0627	0.0508	–0.1244	0.2381
P1	0.0125	0.0481	0.0323	0.0756	–0.0765	0.1946
P2	0.0120	0.0477	0.0488	0.0716	–0.1800	0.2908
P3	0.0106	0.0513	0.0579	0.0663	–0.0040	0.3637

Genellikle alternatif ve beklenen performans sonuçlarının aynı anda olumlu olması istenir. Buna karşın P1 ve P2'nin beklenen performansları oldukça yüksek olsa da alternatif performansları negatiftir. Bu durum risk yönetiminin farklı unsurlarında farklı piyasa riski modellerinin kullanılmasının sonucudur. Bu sorunu çözmek için alternatif performansı negatif olan XTEK uzun pozisyonu yerine XTEK kısa pozisyonu içeren yeni bir lineer portföy (P3) oluşturulmuştur. P3'te diğer endekslerin ağırlıklarının sıralaması ise korunmuştur.

Çizelge 6.12'de verilen katkı oranı vektörleri incelensin. Buna göre P3 ve P3+'da XTEK kısa pozisyonunun ML'yi azalttığı, endeks uzun pozisyonlarının ise ML'yi artırdığı görülür. Ayrıca bunların ML'ye katkı oranları birbirlerine oldukça yakındır. Bu nedenle piyasa riskinin P3 ve P3+'da iyi dağıtıldığı ve P2 gibi P3'ün de iyi çeşitlendirilmiş olduğu söylenebilir.

Çizelge 6.12 : ML IV.

Endeks	a/V_0	P3+		P3	
		r^*	kov	r^*	kov
XELEK	0.4000	0.2600	0.3847	–0.2379	0.3818
XGIDA	0.5000	0.2151	0.3978	–0.1883	0.3777
XTCRT	0.4500	0.2144	0.3570	–0.1962	0.3542
XTEK	–0.3500	0.1077	–0.1395	–0.0810	–0.1137
Toplam	1.0000		1.0000		1.0000

Çizelge 6.13'te görüldüğü üzere T–VaR veya ML kullanıldığında, P2 ve P2+'nın piyasa riski sırasıyla P3 ve P3+'nın piyasa riskinden düşüktür. Yani risklilik açısından P2, alternatif karlılık açısından P3 diğerinden üstündür. Bu durumun temel nedenleri T(4)'ün ortalamasına göre simetrik dağılım olması ile birlikte P3'ün oynaklığının daha yüksek olmasıdır.

Buna karşın E–VaR veya E–TEL kullanıldığında, hem risklilik hem de alternatif karlılık açısından P3, P2'den üstündür. Buna bağlı olarak P2'nin alternatif performansından oldukça iyi olan P3'ün alternatif performansı 0'a oldukça yakındır. Bununla birlikte P3'ün beklenen performansı, P2'nin beklenen performansına göre

daha kötü olsa da tatmin edicidir. Bu nedenlerden ötürü P2 gibi iyi çeşitlendirilmiş olan P3, P2'ye tercih edilmiştir.

Çizelge 6.13 : Risklilik analizi II.

		P2+	P2	P3+	P3
k	E–VaR	2.2519	2.8688	2.3635	2.4902
	E–TEL	2.6340	3.7716	2.8875	3.3113
	T–VaR	2.6495	2.6495	2.6495	2.6495
	ML	5.0651	5.0651	5.0651	5.0651
λ	E–VaR	0.1194	0.1248	0.1318	0.1172
	E–TEL	0.1376	0.1678	0.1586	0.1593
	T–VaR	0.1383	0.1143	0.1464	0.1253
	ML	0.2535	0.2295	0.2703	0.2492

Verilen sürecin tekrarlanma periyotunun belirlenmesinde, işlem maliyetlerini dikkate alan kantitatif analizler veya kıyaslama yöntemi gibi kalitatif analizler kullanılabilir. Duran ve Bommorito II (2011)'de işlem maliyetlerine karşı önerilen karlı alım–satım yapma ve risk yönetimi stratejisi iki farklı borsanın gerçek veri setine uygulandığında, uzun pozisyonların ortalama elde tutulma süresi 7.77 ve 9.49 işlem günü olarak bulunmuştur. Buna göre normal piyasa koşullarında, piyasa riski analizinin yapıldığı periyotun uzunluğu olan 10 işlem gününde bir verilen süreç tekrarlanabilir.

7. SONUÇ ve DEĞERLENDİRME

Bu çalışmanın ilk beş bölümünde piyasa riski modelleri ve risk yönetimi ile ilgili temel bilgiler verilmiştir. Bölüm 6'da ise BIST'in dört sektör endeksinin gerçek verilerine dayanan bir uygulama üzerinden ana hatları aşağıda verilen entegre risk analizi tasarısı anlatılmıştır. Bu tasarının ana amacı risk yönetiminde etkinliğin artırılmasıyla birlikte kurumun uç piyasa hareketlerine karşı dayanıklılığının, kurumun karlılığı ihmal edilmeden artırılmasıdır.

Piyasa riskinin ve risk dikkate alınmış performansın belirlenmesinde finans teorisiyle uyumlu ve uç piyasa hareketlerini yakalamada oldukça başarılı olan E–TEL kullanılmıştır. VaR piyasa riskinin standart ölçüsü olduğundan, bu konularda E–VaR'ın sonuçları da göz ardı edilmemiştir. Ayrıca risk dikkate alınmış performans analizlerinin güvenirliliğini artırmak için bu analizlerde beklenen performansa ek olarak alternatif performans da kullanılmıştır.

AR(1)+GARCH(1,1) modelinin sonuçları temel alınarak bazı piyasa riski modellerinde r'nin dağılımının dört değişkenli T(4) olduğu varsayılmıştır. Portföy oluşturma sürecinin ilk adımında, bu varsayım altında T3'te beklenen performansı maksimum yapan lineer portföy (P1) hesaplanmıştır.

Aynı varsayım altında hesaplanan ML ile P1'e özgü riskler belirlenmiştir. Buna göre P1, XGIDA uzun pozisyonunun uç hareketlerine aşırı derecede hassastır. Bu sürecin ikinci adımında, endeks ağırlıkları düzenlenerek P2 oluşturulmuştur. ML açısından P1 ve P2 arasında kayıtsız olsak da piyasa riskinin P2'de, P1'e göre daha düzgün dağıtıldığı görülmüştür. Bu nedenle P2, P1'e tercih edilmiştir. Bu adımda yapılan analizler P1, P1+, P2 ve P2+'ya ait olan r^* ve katkı oranı vektörlerine dayanmaktadır.

P2'nin T3'te beklenen performansı oldukça yüksek olsa da alternatif performansı negatiftir. Bu sürecin üçüncü adımında, T3'te alternatif performansı negatif olan XTEK uzun pozisyonu yerine XTEK kısa pozisyonu içeren P3 oluşturulmuştur. P2 gibi iyi çeşitlendirilmiş olan P3, optimal portföy değildir. Buna karşın bu portföy hem piyasa riski hem de risk dikkate alınmış performans açısından beklentileri

karşılamaktadır. Bu nedenle 10 işlem gününde bir tekrarlanması uygun görülen portföy oluşturma süreci sonlandırılmıştır.

İlk adımda oluşturulan portföyün kayıp fonksiyonu lineer değilse, işlem yükünü azaltmak için verilen süreçte bazı değişikliklere gidilebilir. Örneğin, piyasa riski–beklenen kar optimizasyonu bu adımda kullanılabilir. Burada piyasa riski, CVaR gibi konveks risk ölçülerinden biri ile tanımlanır. Bir başka optimizasyon probleminin sonucu olarak tanımlanan ML'nin ise bu optimizasyon probleminde kullanılması kolay değildir.

Her seans için AR(1)+GARCH(1,1) modeli ile getirilerin zaman serilerindeki son m adet gözlemin modellenmesi ve buna bağlı olarak lineer korelasyon matrisinin (A) her bir seans için ayrı ayrı bulunması ile verilen tasarı dinamik hale getirilir. Böylece bu çalışmada tercih edilen statik yaklaşımdan doğan model riskleri azaltılabilir. Bu nedenle dinamik yaklaşım işlem yükünü oldukça artırsa da kurumsal düzeyde tercih edilmelidir.

KAYNAKLAR

Alexander, C. O. ve Leigh, C. T. (1997). On the Covariance Matrices Used in Value–at–Risk Models. *Journal of Derivatives*, 4(3), 50–62.

Altaş, G. (Ocak 2011). Açığa Satış. *Sermaye Piyasasında Gündem*, 101, 8–22.

Aragones, J. R., Blanco, C., ve Dowd, K. (Spring 2001). Incorporating Stress Tests into Market Risk Modeling. *Derivatives Quarterly*, 44–49.

Balbas, A., Garrido, J. ve Mayoral, S. (September 2009). Properties of Distortion Risk Measures. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 11(3), 385–399.

Beşe, E. (2007). *Finansal Sistem Stres Testi Uygulamaları ve Türkiye Örneği*, (uzmanlık yeterlilik tezi), T.C. Merkez Bankası.

Bolgün, K. E. ve Akçay, M. B. (2003). *Risk Yönetimi 2. baskı*. Scala Yayıncılık ve Tanıtım A.Ş..

Breuer, T. (2006). Providing Against the Worst Risk Capital for Worst Case Scenarios. *Managerial Finance*, 32(9), 716–730.

Breuer, T. (2007). VaR, CVaR and EVT. *Risk Training: A Quantitative Approach to Calculating and Applying VaR*, 4 Eylül Londra, İngiltere.

Breuer, T. (Fall 2008). Overcoming Dimensional Dependence of Worst Case Scenarios and Maximum Loss. *Journal of Risk*, 11(1), 79–92.

Breuer, T., Jandacka, M., Rheinberger, K. ve Summer, M. (September 2009). How to Find Plausible, Severe, and Useful Stress Scenarios. *International Journal of Central Banking*, 5(3), 204–223.

Breuer, T., Jandacka, M., Rheinberger, K. ve Summer, M. **(**2010). Does Adding Up of Economic Capital for Market and Credit Risk Amount to Conservative Risk Assessment. *Journal of Banking & Finance,* 34(4), 703–712.

Breuer, T. ve Pistovcak, F. (2004). Using Quasi–Monte Carlo Scenarios in Risk Management. *Monte Carlo and Quasi–Monte Carlo Methods 2002,* 379–392.

Brigham, E. F. ve Houston, J. F. (2009). *Fundamentals of Financial Management 12th edition*. South–Western.

Boyd, S. **ve Vandenberghe, L.** (2009). *Convex Optimization 7th edition*. Cambridge University Press.

Cover, T. M. ve Thomas, J. A. (1991). *Elements of Information Theory*. Wiley.

Duran, A. ve Bommarito II, M. J. (2011). A Profitable Trading and Risk Management Strategy Despite Transaction Cost. *Quantitative Finance*, 11(6), 829–848.

Ekşi, Z. (2005). *Comparative Study of Risk Measures,* (yüksek lisans tezi), METU.

Engels, M. (2004). *Portfolio Optimization: Beyond Markowitz,* (yüksek lisans tezi), Universiteit Leiden.

Frahm, G. (2004). *Generalized Elliptical Distributions: Theory and Application,* (doktora tezi), Der Universität zu Köln.

Gauthier, G., Goldberg, L., Hayes, M. ve Vannerem, P. (Autumn 2010). *Covariance Matrix Reverse–Engineering for Extreme Scenario Stress Testing,* (araştırma raporu), MFCA.

Gençay, R., Selcuk, F. ve Ulugülyağcı, A. (October 2001). EVIM: A Software Package for Extreme Value Analysis in MATLAB. *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics,* 5(3), 213–239.

Hürlimann, W. (2004). Distortion Risk Measures and Economic Capital. *North American Actuarial Journal*, 8(1), 86–95.

Jorion, P. (2001). *Value at Risk: The Benchmark for Controlling Market Risk 2nd edition*. McGraw–Hill.

Karlsson, L. (t.y.). *GARCH Modeling: Theoretical Survey, Model Implementation and Robustness Analysis*, (yüksek lisans tezi), Royal Institute of Technology.

Landsman, Z. M. ve Valdez, E. A. (2003). Tail Conditional Expectations for Elliptical Distributions. *North American Actuarial Journal*, 7(4), 55–71.

Liu, J. (2011). *Extreme Value Theory and Copula Theory: A Risk Management Application with Energy Futures,* (doktora tezi), University of Victoria.

Minkah, R. (2007). *Forecasting Volatility*, (proje raporu), Uppsala University.

Rigau, J., Feixas, M. ve Sbert, M. (2003). Refinement Criteria Based on f–Divergences. *Eurographics Symposium on Rendering.*

Rockafellar, R. T. ve Ursayev, S. (2002). Conditional Value at Risk for General Loss Distributions. *Journal of Banking & Finance*, 26, 1443–1471.

Sereda, E. N., Bronshtein, E. M., Rachev, S. T., Fabozzi, F. J., Sun, W. ve Stoyanov, S. (2010). Distortion Risk Measures in Portfolio Optimization. *Handbook of Portfolio Construction*, 649–673.

Pflug, G. (2000). Some Remarks on the Value–at–Risk and the Conditional Value at Risk. *Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Application*, 272–281.

Rocco, M. (2011). Extreme Value Theory for Finance: A survey. *Bank of Italy Occasional Papers,* No 33.

Studer, G. (1997). *Maximum Loss for Measurement of Market Risk*, (doktora tezi), ETH Zurich.

Tokaslan, D. (2009). *Konveks Analizde Eşleniklik*, (yüksek lisans tezi), Anadolu Üniversitesi.

Wilmott, P. (2007). *Introduces Quantitative Finance 2nd edition*. Wiley.

Breuer, T. ve Csiszar, I. (2010a)**.** *Stress Tests: From Art to Science.* Adres: https://homepages.fhv.at/tb/cms/?Working_Papers

Breuer, T. ve Csiszar, I. (2010b). *Risk Measurement Robust under Model Uncertainty.* Adres: https://homepages.fhv.at/tb/cms/?Working_Papers

Cangürel, O., Karakoç, S. D., Mimaroğlu, A. Teker, B. Y. ve Kayci, İ. (2012). *Sorularla Basel 2.5.* Adres: http://www.bddk.org.tr/WebSitesi/turkce/Basel/10800sorularla_basel_ii5.pdf

Lerner, D. (2008). *Lecture notes on linear algebra*. Adres: http://www.math.ku.edu/~lerner/m291F08/index_2.html

Longerstaey, J. (1996). *Riskmetrics Technical Document 4th edition.* Adres: http://gloria–mundi.com/UploadFile/2010–2/rmtd.pdf

Mina, J. ve Xiao, J. Y. (2001). *Return to RiskMetrics: The Evolution of a Standard*. Adres: http://wu.ac.at/executiveeducation/institutes/banking/sbwl/lvs_ws/vk4/rrmfinal.pdf

Piyasa Riski Ölçümleme Yöntemlerine İlişkin Analiz (2010). Adres: http://www.bddk.org.tr/websitesi/turkce/basel/7812proy.pdf.pdf

Valdez, E. A. ve Dhaene, J. (2005). *Convex Order Bounds for Sums of Dependent Log–Elliptical Random Variables*. Adres: http://www.econ.kuleuven.ac.be/public/ndbaa95/research.htm

Zitkovic, G. (2010). *Lecture notes on theory of probability.* Adres: http://www.ma.utexas.edu/users/gordanz/notes/theory_of_probability_I.pdf

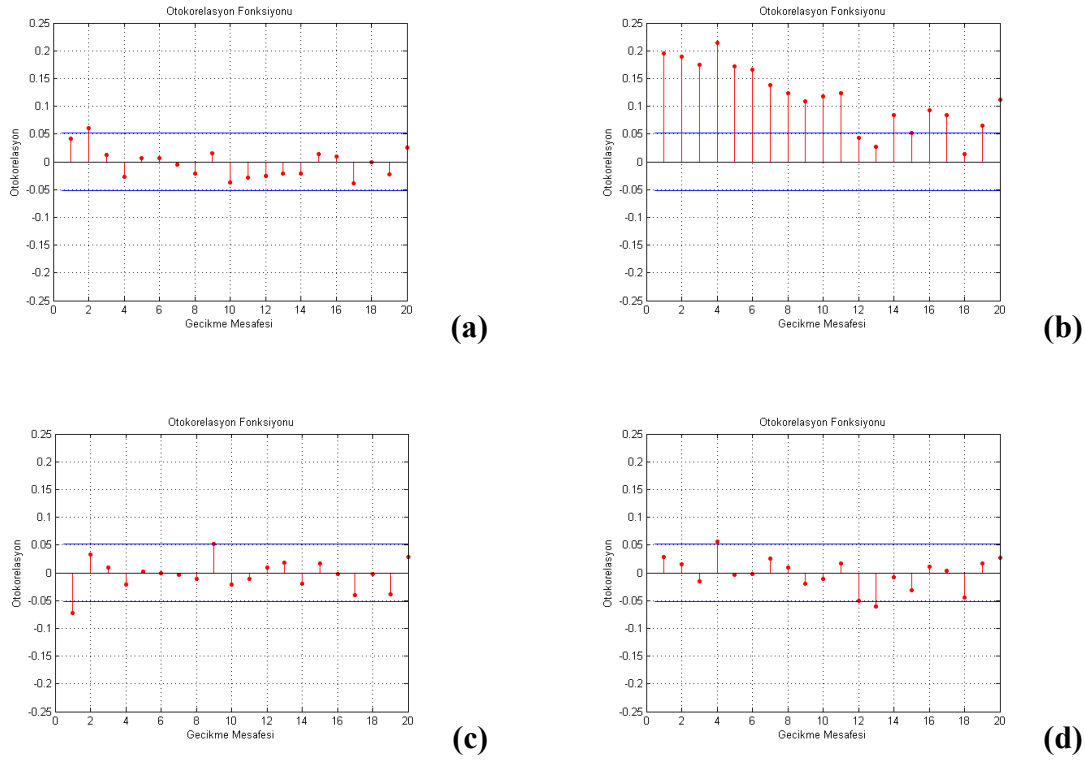
EKLER

EK A: Grafik Temelli Analizler

EK A

Bu bölümde, piyasa riski modelleri oluşturulurken (veri seti T1'e ait olmak üzere) yapılan grafik temelli analizler entegre risk analizi tasarısı kullanılarak oluşturulan P3 üzerinden verilmiştir. Diğer finansal pozisyonlar için de benzer analizlerle benzer sonuçlar elde edildiğinden, burada belirtilen sonuçların bu çalışmanın geneli için geçerli olduğu söylenebilir.

İlgili zaman serileri için ilk 20 gecikme mesafesine karşı gelen otokorelasyon katsayıları ve bunların 0.95 güven aralığı Şekil A.1'de sırasıyla verilmiştir. Görüldüğü üzere diğer zaman serilerinin aksine mutlak getirilerin zaman serisinde yüksek otokorelasyon vardır. Bu nedenle uç piyasa hareketleri ve yüksek (düşük) oynaklıklar toplanma eğilimindedir.



Şekil A.1 : Otokorelasyon: (a)$\{L_i\}$. (b)$\{|L_i|\}$. (c)$\{Lu_i\}$. (d)$\{|Lu_i|\}$.

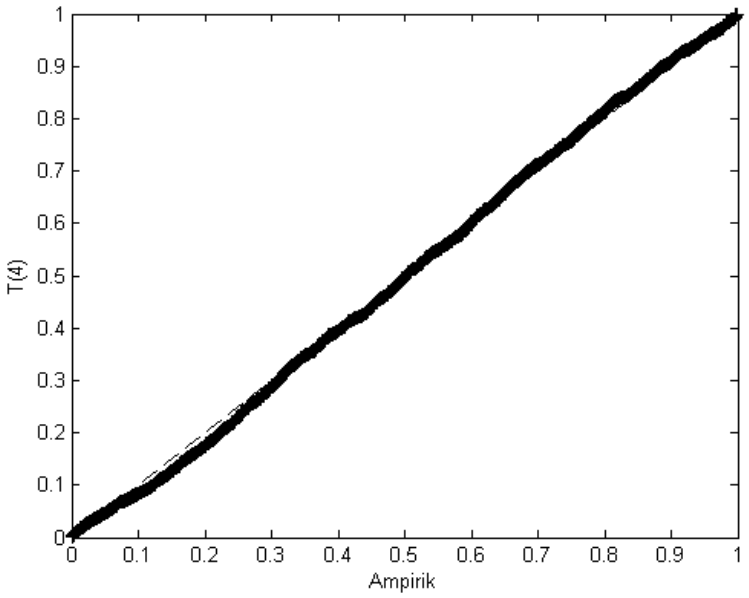
Bu çalışmada model risklerini azaltmak için kayıpların (getirilerin) zaman serileri yerine standartlaştırılmış kayıpların (getirilerin) zaman serileri piyasa riski modellerinde kullanılmıştır. Çizelge A.1'de verilen istatistiğin asimptotik dağılımı oldukça genel koşullarda 1 serbestlik dereceli ki–kare dağılımıdır (Liu, 2011). Tüm durumlarda p–değeri 0.95'ten büyük olmadığından, standartlaştırılmış kayıpların

(getirilerin) zaman serisinde GARCH etkisinin olmadığı önsavı (H_0^*), her bir finansal pozisyon için 0.95 güven düzeyinde kabul edilmiştir. Bu nedenle bu çalışmada tercih edilen yaklaşımın tatmin edici olduğu söylenebilir.

Çizelge A.1 : ARCH–LM testi.

	XELEK	XGIDA	XTCRT	XTEK	P1	P2	P3
p–değeri	0.5505	0.7245	0.0464	0.0065	0.7307	0.5400	0.6213
İstatistik	0.5719	1.1892	0.0033	0.0000	1.2203	0.5459	0.7749
H_0^*	kabul	kabul	kabul	kabul	kabul	kabul	kabul

Bazı piyasa riski modellerinde *Lu*'nun dağılımının 0 ortalamalı, 1 varyanslı T(4) olduğu varsayılmıştır. Kantil–kantil grafiğinde bu dağılımın ampirik kantile karşı gelen kantilini gösteren Şekil A.2'deki siyah çizgiyle $y = x$ doğrusu büyük oranda çakıştığından, bu varsayım genel olarak tatmin edicidir.



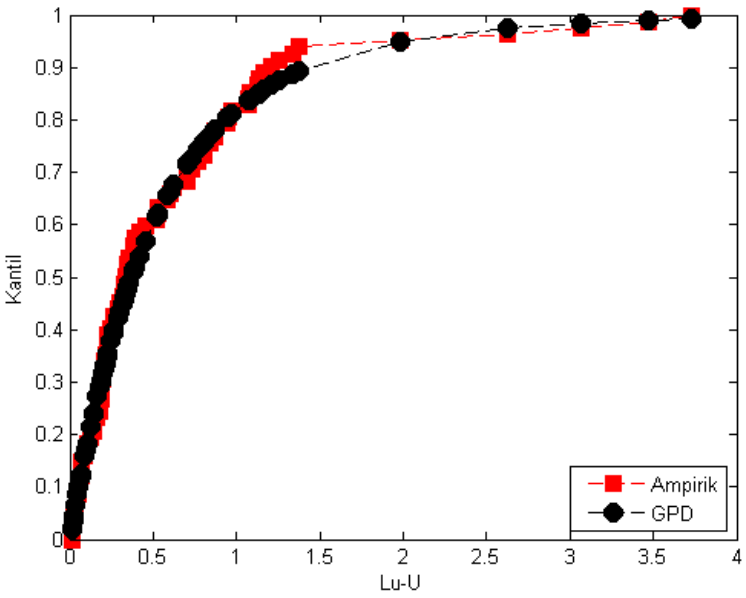
Şekil A.2 : Kantil–kantil grafiği.

Çizelge A.2'de verilen diğer bilgiler benzer olmasına rağmen biçim parametresi daha düşük olduğundan, *Lu*'nun dağılımının sol kuyruğu (standartlaştırılmış karlar), sağ kuyruğuna (standartlaştırılmış kayıplara) göre daha hızlı sönümlenir. Dolayısıyla yukarıda verilen varsayım uç piyasa hareketlerini açıklamada yetersizdir.

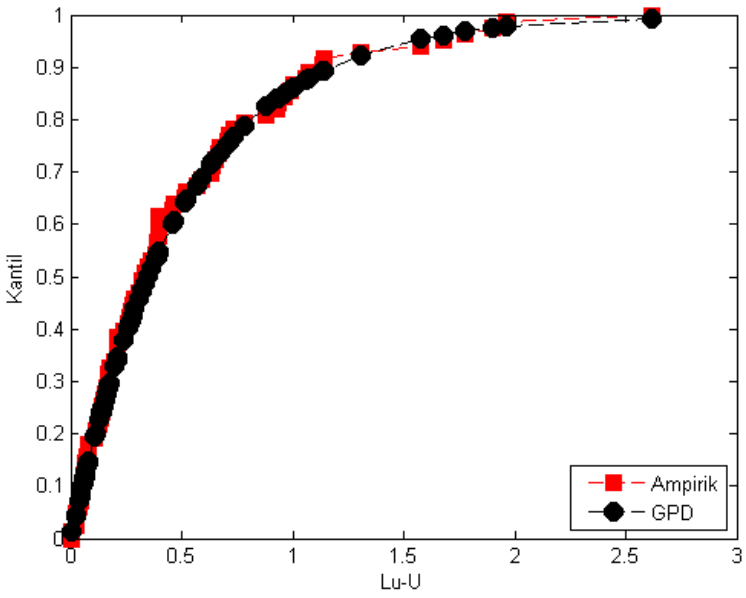
Çizelge A.2 : Eşik aşım metodu II.

	U	ξ	β	t/m
P3	1.50	0.1769 (0.1303)	0.5007 (0.0850)	0.0545
P3+	1.50	0.0193 (0.1252)	0.4972 (0.0828)	0.0552

Takip eden şekillerde görüldüğü üzere eliptik dağılım varsayımından farklı olarak GPD varsayımı uç piyasa hareketlerini yüksek oranda açıklamaktadır.

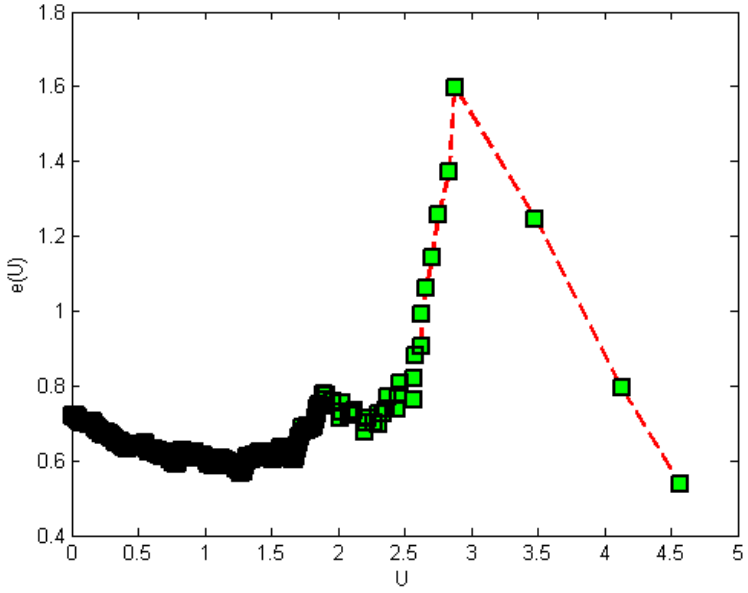


Şekil A.3 : P3 için GPD'nin ampirik veriyle uyumu.

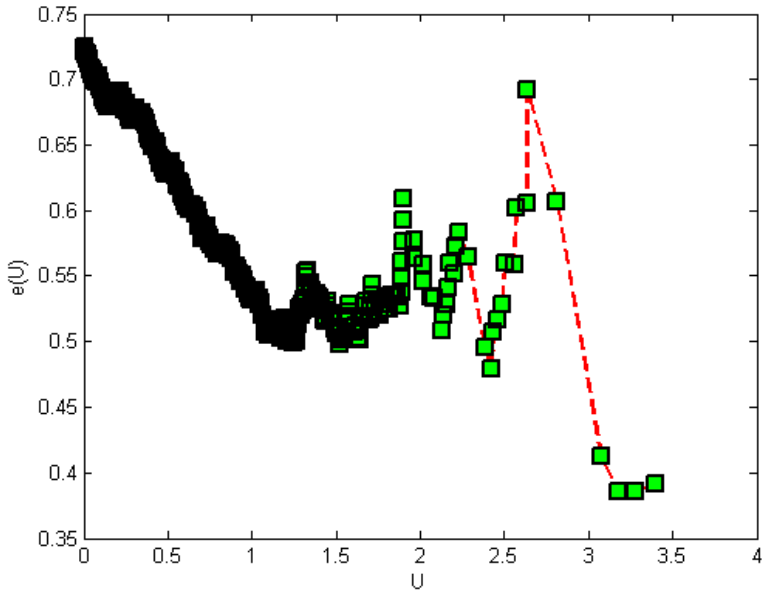


Şekil A.4 : P3+ için GPD'nin ampirik veriyle uyumu.

Sırasıyla Çizelge A.2 ve takip eden şekillerde verilen t/m değerleri ve $e(U)$ grafikleri temel alınarak U ile gösterilen eşik değerler belirlenmiştir.



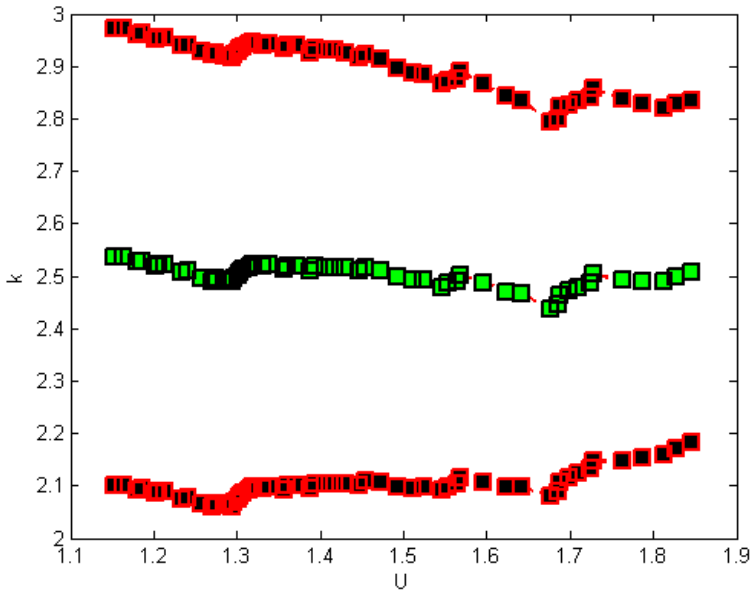
Şekil A.5 : P3'e ait $e(U)$ grafiği.



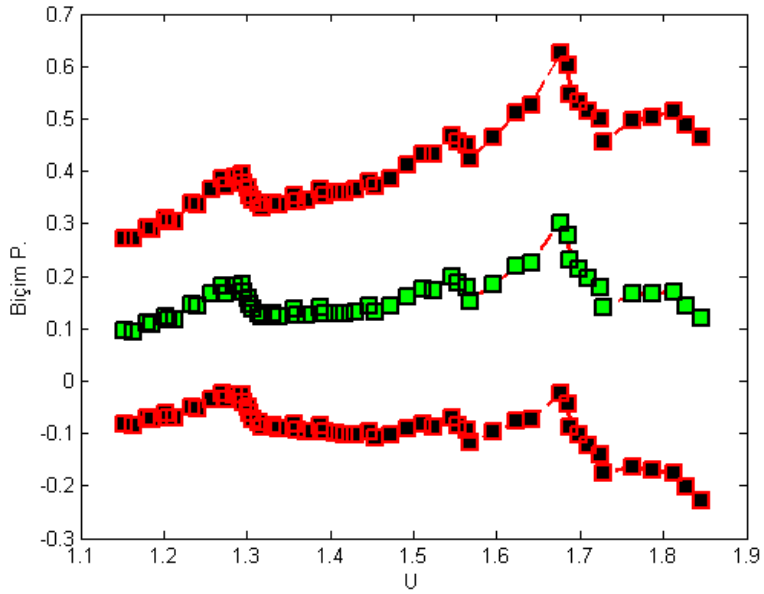
Şekil A.6 : P3+'ya ait $e(U)$ grafiği.

Takip eden şekillerde görüldüğü üzere biçim parametresinden farklı olarak E–VaR ile bulunan k sınır değeri seçilen eşik değerden büyük oranda bağımsızdır. (Tanımı gereği bu bilgi E–TEL ile bulunan k sınır değeri için de geçerlidir.) Bu durumun temel nedeni GPD parametreleri arasında negatif korelasyon olmasıdır. Ayrıca GPD

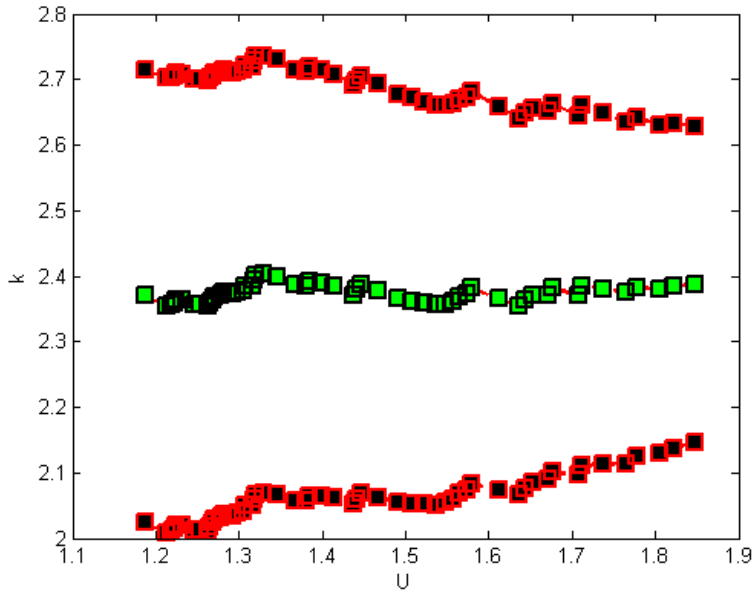
parametrelerinin tahmincileri ve ilgili standart hatalar kullanılarak bunların 0.95 güven aralığı T(∞) varsayımında belirlenmiştir.



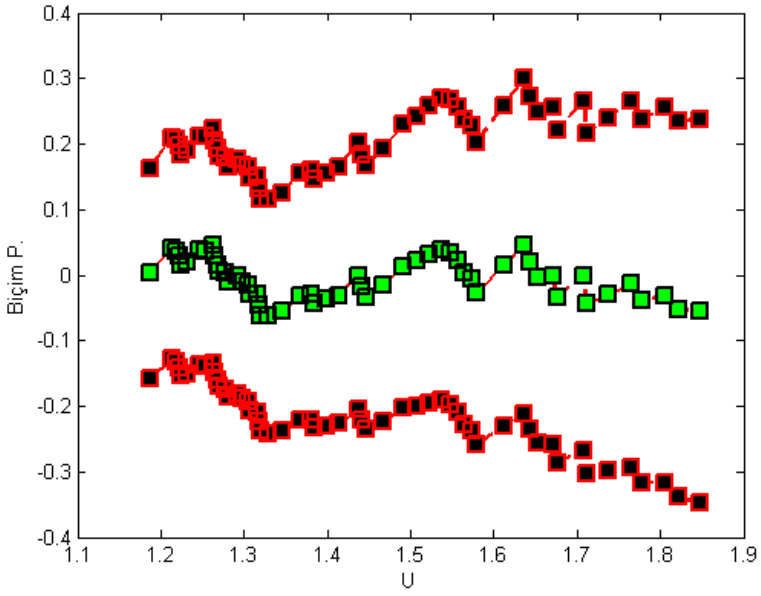
Şekil A.7 : P3'e ait *k* değerleri.



Şekil A.8 : P3'e ait biçim parametreleri.



Şekil A.9 : P3+'ya ait *k* değerleri.



Şekil A.10 : P3+'ya ait biçim parametreleri.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad:	Furkan Göktaş
Doğum Yeri ve Tarihi:	Karabük/10.04.1988
Adres:	Merkez/Karabük
E–Posta:	goktasfurkan78@gmail.com
Lisans:	İTÜ Matematik Bölümü Matematik Mühendisliği Programı/2012 İTÜ İşletme Bölümü İşletme Mühendisliği Programı/2012
Mesleki Deneyim ve Ödüller:	İşletme Mühendisliği Programı Birinciliği

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR/SUNUMLAR

- Duran, A. and **Göktaş, F.** (2013). Mathematical Modeling for Stock Market Risk. *ICAAMM 2013*, June 2–5, 2013 Istanbul, Turkey.