KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ELASTİK ZEMİN ÜZERİNDEKİ AÇIK KESİTLİ VE İNCE DUVARLI KİRİŞLERİN BURULMA TİTREŞİMLERİ VE STABİLİTE ANALİZLERİ İÇİN BAZI ANALİTİK TAHMİN YÖNTEMLERİ

MURAT GÖÇER

KOCAELİ 2018

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ELASTİK ZEMİN ÜZERİNDEKİ AÇIK KESİTLİ VE İNCE DUVARLI KİRİŞLERİN BURULMA TİTREŞİMLERİ VE STABİLİTE ANALİZLERİ İÇİN BAZI ANALİTİK TAHMİN YÖNTEMLERİ

MURAT GÖÇER

Prof. Dr. Safa Bozkurt COŞKUN
Danışman, Kocaeli Üniversitesi .....

Doç. Dr. Utkan MUTMAN
Jüri Üyesi, Kocaeli Üniversitesi .....

Doç. Dr. Baki ÖZTÜRK
Jüri Üyesi, Hacettepe Üniversitesi .....

Tezin Savunulduğu Tarih: 08.01.2018

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında bana rehber olan, hiçbir konuda desteğini esirgemeyen, bilgi ve birikimlerini bana sabırla aktaran, çok kıymetli tez danışmanım Sayın Prof.Dr. Safa Bozkurt COŞKUN'a teşekkür ederim.

Ocak – 2018 Murat GÖÇER

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR i
İÇİNDEKİLER ii
ŞEKİLLER DİZİNİ iii
TABLOLAR DİZİNİ iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ v
ÖZET vi
ABSTRACT vii
GİRİŞ 1
1. ELASTİK ZEMİN ÜZERİNDE BURULMA TİTREŞİMİNE MARUZ KİRİŞLERİN STABİLİTESİ 4
2. HOMOTOPİ PERTÜRBASYON METODU (HPM) 6
2.1. Uygulama: Doğrusal Olmayan Bir Denklemin Çözümü 7
3. ADOMİAN AYRIŞTIRMA METODU (AAM) 11
3.1. Uygulama: Doğrusal Olmayan Bir Denklemin Çözümü 12
4. VARYASYONEL İTERASYON METODU (VIM) 14
4.1. Uygulama: Doğrusal Homojen Olmayan Denklemin Çözümü 15
5. ANALİTİK TAHMİN YÖNTEMLERİNİN PROBLEME UYGULANMASI 18
5.1. Sayısal Sonuçlar 19
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 33
KAYNAKLAR 34
KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER 37
ÖZGEÇMİŞ 38

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. Simetrik ince cidarlı I kiriş 4

TABLOLAR DİZİNİ

Tablo 5.1. MM Kiriş için AAM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve γ = 4) 20
Tablo 5.2. MM Kiriş için AAM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve γ = 8) 20
Tablo 5.3. MM Kiriş için AAM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve γ = 12) 20
Tablo 5.4. MM Kiriş için VIM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve γ = 4) 21
Tablo 5.5. MM Kiriş için VIM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve γ = 8) 21
Tablo 5.6. MM Kiriş için VIM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve γ = 12) 21
Tablo 5.7. MM Kiriş için HMP ile λ^2 değerleri (K = 1 ve γ = 4) 22
Tablo 5.8. MM Kiriş için HMP ile λ^2 değerleri (K = 1 ve γ = 8) 22
Tablo 5.9. MM Kiriş için HMP ile λ^2 değerleri (K = 1 ve γ = 12) 22
Tablo 5.10. AA Kiriş için AAM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve γ = 4) 23
Tablo 5.11. AA Kiriş için AAM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve γ = 8) 23
Tablo 5.12. AA Kiriş için AAM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve γ = 12) 23
Tablo 5.13. AA Kiriş için VIM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve γ = 4) 24
Tablo 5.14. AA Kiriş için VIM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve γ = 8) 24
Tablo 5.15. AA Kiriş için VIM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve γ = 12) 24
Tablo 5.16. AA Kiriş için HMP ile λ^2 değerleri (K = 1 ve γ = 4) 25
Tablo 5.17. AA Kiriş için HMP ile λ^2 değerleri (K = 1 ve γ = 8) 25
Tablo 5.18. AA Kiriş için HMP ile λ^2 değerleri (K = 1 ve γ = 12) 25
Tablo 5.19. AM Kiriş için AAM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve γ = 4) 26
Tablo 5.20. AM Kiriş için AAM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve γ = 8) 26
Tablo 5.21. AM Kiriş için AAM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve γ = 12) 26
Tablo 5.22. AM Kiriş için VIM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve γ = 4) 27
Tablo 5.23. AM Kiriş için VIM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve γ = 8) 27
Tablo 5.24. AM Kiriş için VIM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve γ = 12) 27
Tablo 5.25. AM Kiriş için HMP ile λ^2 değerleri (K = 1 ve γ = 4) 28
Tablo 5.26. AM Kiriş için HMP ile λ^2 değerleri (K = 1 ve γ = 8) 28
Tablo 5.27. AM Kiriş için HMP ile λ^2 değerleri (K = 1 ve γ = 12) 28
Tablo 5.28. MM Kiriş için λ^2 değerlerinin karşılaştırılması (K = 1 ve γ = 4) 29
Tablo 5.29. MM Kiriş için λ^2 değerlerinin karşılaştırılması (K = 1 ve γ = 8) 29
Tablo 5.30. MM Kiriş için λ^2 değerlerinin karşılaştırılması (K = 1 ve γ = 12) 29
Tablo 5.31. AA Kiriş için λ^2 değerlerinin karşılaştırılması (K = 1 ve γ = 4) 30
Tablo 5.32. AA Kiriş için λ^2 değerlerinin karşılaştırılması (K = 1 ve γ = 8) 30
Tablo 5.33. AA Kiriş için λ^2 değerlerinin karşılaştırılması (K = 1 ve γ = 12) 30
Tablo 5.34. AM Kiriş için λ^2 değerlerinin karşılaştırılması (K = 1 ve γ = 4) 31
Tablo 5.35. AM Kiriş için λ^2 değerlerinin karşılaştırılması (K = 1 ve γ = 8) 31
Tablo 5.36. AM Kiriş için λ^2 değerlerinin karşılaştırılması (K = 1 ve γ = 12) 31

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

w	: Yerdeğiştirme, (m)
k	: Zemin yatak katsayısı, (N/m^2)
p	: HPM parametresi
EI	: Eğilme rijitliği, ($N.m^2$)
u	: HPM çözümü yapılan fonksiyon
ρ	: Birim hacim yoğunluk, ($kg/m^{3)}$
T	: Zamana bağlı fonksiyon
E	: Elastisite modülü, (N/m^2)
G	: Kayma modülü , (N/m^2)
P	: Eksenel basınç kuvveti, (N)
ϕ	: Burulma açısı, (radyan)
C_w	: Eğilme katsayısı
C_s	: Burulma katsayısı
K_s	: Burulma sertliği
I_p	: Polar atalet momenti, (m^4)
A	: Kesit alanı, (m^2)
z	: Kiriş açıklığı, (m)

Kısaltmalar

AAM	: Adomian Ayrıştırma Metodu
HPM	: Homotopi Pertürbasyon Metodu
VIM	: Varyasyonel İterasyon Metodu

ELASTİK ZEMİN ÜZERİNDEKİ AÇIK KESİTLİ VE İNCE DUVARLI KİRİŞLERİN BURULMA TİTREŞİMLERİ VE STABİLİTE ANALİZLERİ İÇİN BAZI ANALİTİK TAHMİN YÖNTEMLERİ

ÖZET

Bu çalışmada, eksenel basınç yüküne tabi tutulan elastik zemin üzerindeki çift simetri eksenli ince duvarlı açık kesitli kirişlerin serbest burulma titreşimleri ve stabilitesi bazı analitik tahmin yöntemleri kullanılarak araştırılmıştır. Analitik tahmin yöntemleri son dönemde adi/kısmi doğrusal/doğrusal olmayan deterministik/stokastik diferansiyel denklemlerin çözümünde başarıyla kullanılmıştır. Titreşim ve stabilite problemleri karakteristik değer problemleridir ve problemi tanımlayan denklem doğrusal bir denklem dahi olsa çözümden karakteristik değerler türetmek kolay değildir. Analitik tahmin yöntemleri problemin sınır koşullarına uygun bir başlangıç tahmin fonksiyonuyla başlayarak problemin tanım aralığında analitik ve sürekli bir fonksiyonu çözüm olarak elde etmemizi sağlar. Bu çalışmada analitik tahminler Homotopi Pertürbasyon Metodu (HPM), Adomian Ayrıştırma Metodu (AAM) ve Varyasyonel İterasyon Metodu (VIM) ile elde edilmiştir. Yöntemlerle elde edilen sonuçların literatürden kıyaslama için seçilmiş problemlerle uyum içerisinde olduğu görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Adomian Ayrıştırma Metodu, Burulma Titreşimi, Elastik Zemin, Homotopi Pertürbasyon Metodu, Varyasyonel İterasyon Metodu.

SOME ANALYTICAL APPROXIMATE METHODS FOR TORSIONAL VIBRATIONS AND STABILITY OF OPEN SECTION THIN-WALLED BEAMS ON ELASTIC FOUNDATIONS

ABSTRACT

In this study, free torsional vibration and stability of doubly symmetric thin-walled beams of open sections resting on elastic foundations subjected to axial compressive load are investigated using some analytical approximate methods. Analytical approximate methods have recently been used successfully for solving ordinary/partial linear/nonlinear deterministic/stochastic differential equations. Vibration and stability problems are eigenvalue problems and it is not easy to extract eigenvalues even from the analytical solution of a linear differential equation. Analytical approximate methods start with an initial approximation function suitable for boundary conditions and provide a continuous and analytical expression within the problem domain as the solution of the problem. Analytical approximations in this study are obtained by using Homotopy Perturbation Method (HPM), Adomian Decomposition Method (ADM) and Variational Iteration Method (VIM). A good agreement is observed between the results obtained from proposed methods and the results from problems available in the literature.

Keywords: Adomian Decomposition Method, Torsional Vibration, Elastic Foundation, Homotopy Perturbation Method, Variational Iteration Method.

GİRİŞ

Elastik zemin üzerindeki kirişlerin statik ve dinamik analizi yapısal analiz alanında belirgin bir yere sahiptir. Çeşitli form ve şekillerdeki kiriş, plak ve kabukların lineer ve lineer olmayan çözümlemeleri son elli yıl boyunca araştırmacıların ilgi alanında yer almaktadır. Özellikle 1960'lı yıllardan sonra elastik zeminlerdeki sürekli sonlu ve sonsuz kirişlerin titreşim ve burulmaları; otoyol kaldırımlarının ve uçak pistlerinin tasarımında, demiryolu rayları için kullanılan metal rayların üretiminde uygulama alanı bulmuştur. Elastik zemine oturan plak ve kabuklar pek çok sektörde özellikle; füze ve roket rampaları olarak askeri alanlarda ve uçak-uzay sanayisinde, teknoloji de çeşitli uygulamalarda, inşaat ve makine mühendisliği alanında, endüstride çeşitli fabrika kren ve makinaların zemine sabitlenmesinde, diş hekimliği ve biyomekanikte, kıyı-liman yapılarında, sıvı ve gazların iletim hatlarında, temel ve zemin mühendisliğinde, nükleer enerji santrallerinde, uçak hangarlarında, özel amaçlı (özellikle ağır kargo uçakları ve süpersonik uçakların inebileceği) hava alanı inşasında ve demiryolu uygulamalarında karşımıza çıkmaktadır (Civalek, 2004).

Kerr çeşitli zemin modellerini dikkate alan çalışmalar yapılmıştır. (1964) Çift simetri eksenli ince duvarlı serbest açıklıklı kirişlerin serbest burulma titreşimleri ve stabilitesi Gere (1954), Aggarwal ve Cranch (1967), Krishna Murty ve Joga Rao (1968), Kameswara Rao, Apparao ve Sarma, ve Timoshenko ve Gere (1961) tarafından araştırılmıştır. Son dönemde ankastre ince duvarlı kirişlerin serbest burulma titreşimleri Christiano ve Salmela (1971) tarafından incelenmiştir. Krishna Murthy, Joga Rao, Christiano ve Salmela (1971), Kameswara Rao ve diğerleri (1974) elastik zemince desteklenen uzun, ince duvarlı serbest açıklıklı kirişlerin burulma titreşimi problemlerinde sonlu elemanlar yöntemini kullanmışlardır.

Kameswara Rao ve Appala Satyam (1975) Winkler elastik zemini üzerinde bulunan ve zamanla değişmeyen sabit bir eksenel basınç altındaki ince duvarlı kirişlerin burulma frekansları ve burkulma yükleri için yaklaşık ifadeler geliştirmişlerdir. Uniform elemanların doğrusal olmayan stabilitesi Young (1956) tarafından ilk önce dairesel kesitler üzerinde araştırılmıştır. Üniform eksenel yük altında dar dikdörtgen

kesitlerin burulma dayanımı Buckley (1914) tarafından incelenmiştir. Cullimore (1949) ince duvarlı I ve Z profillerinin davranışlarını irdelemiştir. İnce duvarlı kirişlerin doğrusal olmayan düzensiz burulmaları için daha doğru bir teori Ghobarah ve Tso (1971) tarafından, minimum yük enerjisi prensibi kullanılarak ve genel yükleme ve sınır koşulları altında büyük burulma deformasyonlarını dikkate alarak sunulmuştur. Bazant and El Nimeiri (1973), Epstein ve Murray (1976), Szymzak (1980), Roberts ve Azizian (1983) ve Wekezer (1985) ince duvarlı kirişlerin doğrusal olmayan burulma davranışını ele almışlardır.

Cheung (1965) elastik zemine oturan dikdörtgen plakların sonlu elemanlar ile analizini yapmıştır. Lineer statik analizin yapıldığı çalışmada eğilme momentleri ve gerilmeler hesaplanmıştır. Bir başka çalışmada Reissner-Mindlin (1945) plak teorisi kullanılarak iki parametreli elastik zemine oturan dikdörtgen plaklar için 9 düğüm noktalı bir katı (solid) sonlu eleman geliştirilmiş ve lineer statik analiz yapılmıştır. Kukreti ve Man-Gi yaptıkları çalışmada üniform yayılı yük etkisindeki dikdörtgen plakların minimum potansiyel enerji prensibine dayalı analitik yaklaşım ile lineer statik hesabı yapmışlardır (Civalek, 2004).

Dairesel ve dikdörtgen plakların doğrusal olmayan titreşim frekanslarının hesaplandığı bir diğer çalışmada Galerkin metodu kullanılmıştır. Qin kare bir plağın çeşitli noktalarındaki deplasmanları ve eğilme momentlerini Winkler ve Pasternak zemin türleri için incelenmiştir. Bu çalışmada hibrid bir sonlu eleman modeli önerilmiştir (Civalek, 2004).

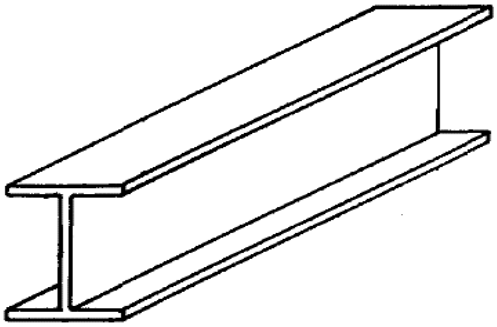
İki parametreli zemin modelinin dikkate alındığı çalışmada Yang (1972) ince dikdörtgen plakların lineer statik hesabını yapmış ve çeşitli noktalardaki düşey deplasmanlar ile dönme açılarını elde etmiştir. Dillard (1989) tarafından yapılan çalışmada Winkler elastik zemine oturan dikdörtgen ve kare plakların eğilme hesabı analitik olarak gerçekleştirilmiştir. Sistem yönetici denklemi 6. mertebeden bir diferansiyel denklem olup çözüme seriler yardımıyla ulaşılmıştır. Çalışmada tekil yük ve tekil moment etkileri dikkate alınmıştır.

Datta (1976) tarafından yapılan çalışmada elastik zemine oturan daire ve dikdörtgen şeklinde geometrilere sahip plakların lineer olmayan titreşimi analitik olarak incelenmiştir. Çözümler basit ve ankastre mesnet koşulları için yapılmıştır. İki parametreli elastik zemine oturan ince plakların analizi sınır elamanlar metodu ile yapılmıştır (Sladek, 2002).

Bu çalışmada elastik zemin üzerine oturan burulma titreşimine maruz çift simetri eksenli ince duvarlı açık kesitli kirişlerin homotopi pertürbasyon yöntemi (HPM), Adomian ayrıştırma yöntemi (AAY) ve varyasyonel iterasyon yöntemi (VIM) ile stabilite analizleri yapılmıştır. Birinci bölümde, elastik zemine oturan kirişin teorisine ve analitik çözümüne yer verilmiştir. İkinci bölümde ise Homotopi Pertürbasyon Metodu'ndan bahsedilmiş ve bir adet uygulama örneği çözülmüştür. Üçüncü bölümde ise Adomian Ayrıştırma Metodu'ndan bahsedilip doğrusal olmayan bir denklemin çözümüne değinilmiştir. Dördüncü bölümde Varyasyonel İterasyon Metodu'nun genel izahı verilip örnek bir uygulama ile yöntemim daha anlaşılır olması sağlanmıştır. Beşinci bölümde çözüm için önerilen analitik tahmin yöntemlerinin çalışmada ele alınan probleme uygulaması gerçekleştirilmiştir. Elde edilen değerler tablolar halinde verilmiş ve literatürden kıyaslama amacıyla seçilmiş olan problemlerin mevcut sonuçlarıyla karşılaştırmalar yapılmıştır. Son bölümde ise kullanılması önerilen yöntemlerin, bu çalışmada elde edilen sonuçların ışığında değerlendirmesi yapılmış ve ileride yapılabilecek çalışmalar için bazı önerilerde bulunulmuştur.

1. ELASTİK ZEMİN ÜZERİNDE BURULMA TİTREŞİMİNE MARUZ KİRİŞLERİN STABİLİTESİ

Bu bölümde elastik zemine oturan serbest burulma titreşimine ve eksenel basınç yüküne maruz kirişin denklemi verilecek ve analitik çözümün nasıl elde edileceği açıklanacaktır. Şekil 1.1'de çift simetri eksenli açık kesitli ince duvarlı bir I-kiriş görülmektedir.



Şekil 1.1. Simetrik ince duvarlı I kiriş

Şekilde görülmekte olan kiriş için hareket denklemi aşağıdaki gibi verilmektedir. (Kameswara, 1975):

$$EC_w \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^4} - \left(GC_s - P\frac{I_p}{A}\right)\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + K_s \phi + \rho I_p \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \qquad (1.1)$$

burada E elastisite modülü, C_w çarpılma katsayısı, G kayma modülü, C_x burulma sabiti, P eksenel basınç yükü, I_p kutupsal atalet momenti, A enkesit alanı, K_s zeminin burulma rijitliği, ρ, kirişin kütle yoğunluğu, ϕ, burulma açısı, z, kiriş uzunluğu boyunca uzaklık, t, zamandır.

Serbest burulma titreşimi için burulma açısı ϕ, aşağıdaki biçimde ifade edilebilir:

$$\phi(z,t) = X(z)e^{i\omega t} \qquad (1.2)$$

Denklem (1.2)'de X(z) her doğal burulma frekansına karşılık gelen mod şekil fonksiyonudur. Denklem (1.2) 'yi Denklem (1.1)'in içine yerleştirip ve daha sonra elde edilen denklemi normalize edince Denklem (1.3)'de görülen diferansiyel denklem elde edilir;

$$\frac{d^4X}{dZ^4}-\left(K^2-\Delta^2\right)\frac{d^2X}{dZ^2}-\left(\lambda^2-4\gamma^2\right)X=0 \tag{1.3}$$

burada;

$$Z=\frac{z}{L},K^2=\frac{L^2GC_s}{EC_w},\Delta^2=\frac{PI_pL^2}{AEC_w} \tag{1.4}$$

$$\gamma^2=\frac{K_sL^4}{4EC_w},\lambda^2=\frac{\rho I_pL^4\omega_n^2}{EC_w} \tag{1.5}$$

Denklem (1.3)'ün analitik çözümü denklem aşağıdaki gibidir;

$$X(Z)=A\cos\alpha Z + B\sin\alpha Z + C\cosh\beta Z + D\sinh\beta Z \tag{1.6}$$

$$\alpha,\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\pm\left(K^2-\Delta^2\right)+\sqrt{\left(K^2-\Delta^2\right)^2+4\left(\lambda^2-4\gamma^2\right)}} \tag{1.7}$$

Her ne kadar Denklem (1.3) doğrusal bir denklem olsa da, kirişin sınır koşulları dikkate alınarak Denklem (1.6)'dan karakteristik değerler elde etmek kolay değildir. Denklem (1.6) bu çalışmada, kullanılması önerilen bazı analitik tahmin yöntemleri ile çözülecek ve elde edilen sonuçlar literatürde yer alan ve karşılaştırma amaçlı seçilmiş problemlerin sonuçlarıyla karşılaştırılacaktır. Devam eden bölümlerde önce kullanılması önerilen analitik tahmin yöntemleri sırasıyla tanıtılacaktır.

2. HOMOTOPİ PERTÜRBASYON METODU (HPM)

Homotopi Pertürbasyon Metodu (HPM), Ji Huan He (2003) tarafından 1998 yılında geliştirilmiş bir yöntemdir. Bu yöntemde topolojide homotopi kavramı ile pertürbasyon kavramı birleştirilmiş ve doğrusal/doğrusal olmayan problemler basite indirgenerek çözümü kolay problemlere dönüştürülmüştür. Yöntem bu kolay problemlerin çözümlerini seri toplamı olarak birleştirerek bir analitik ifade elde edilmesini sağlamaktadır.

HPM genel olarak aşağıda verildiği şekliyle açıklanmaktadır (He, 2003).

Doğrusal olmayan bir diferansiyel denklem;

$$A(u)-f(r)=0, r\in\Omega \tag{2.1}$$

sınır koşulları;

$$B\left(u,\frac{\partial u}{\partial n}\right)=0,\ r\in\Gamma \tag{2.2}$$

olacak şekilde ifade edilebilir. Burada A genel diferansiyel operatör, B sınır operatörü, f(r) bilinen bir analitik fonksiyon ve Γ ise Ω ya bağlı sınır bölgesidir.

A operatörü genellikle doğrusal (L) ve doğrusal olmayan (N) olmak üzere iki kısma ayrılarak yazılır;

$$L(u)+N(u)-f(r)=0 \tag{2.3}$$

Denklem (2.3) ifadesi aşağıdaki şekilde düzenlenebilir;

$\nu(r,p):\Omega\times[0,1]\to R$ olmak üzere;

$$H(\nu,p)=(1-p)\left[L(\nu)-L(u_0)\right]+p\left[A(\nu)-f(r)\right]=0,\ p\in[0,1]\ r\in\Omega \tag{2.4}$$

$A(u)=L(u)+N(u)$ denklemi, Denklem (2.4)'ün içine yazılırsa;

$$H(\nu,p)=L(\nu)-L(u_0)+pL(u_0)+p\left[N(\nu)-f(r)\right]=0,\ p\in[0,1], r\in\Omega \tag{2.5}$$

Burada $p \in [0,1]$ ifadesinde p 'ye gömülü parametre denir. Denklem (2.4) de p'nin yerine sırasıyla 0 ve 1 konursa;

$$H(v, 0) = L(v) - L(u_0) = 0 \tag{2.6}$$

$$H(v, 1) = A(v) - f(r) = 0 \tag{2.7}$$

elde edilmiş olur. p'nin 0'dan başlayarak 1'e doğru olan değişim süreci $v(r,p)$'nin $u_0(r)$ den $u(r)$'ye olan değişim sürecini ifade etmektedir. Bu olaya topolojide deformasyon denmektedir. $L(v)-L(u_0)$, $A(v)-f(r)$ çiftine ise homotopik denmektedir.

Çözüm p cinsinden kuvvet serisi olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + ... \tag{2.8}$$

$p=1$'e doğru yaklaşırken Denklem (2.8) aşağıdaki şekilde çözümü elde etmemizi sağlar.

$$v = \lim_{p\to 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots \tag{2.9}$$

2.1. Uygulama: Doğrusal Olmayan Bir Denklemin Çözümü

$$u_t - 3(u^2) + u_{xxx} = 0 \tag{2.10}$$

$$u(x, 0) = 6x \tag{2.11}$$

başlangıç koşulu ile verilmiş olan doğrusal olmayan KdV denklemi göz önüne alınarak aşağıdaki homotopi kurulabilir.

$$(1-p)[Y-u_0]+p[Y-3(Y^2)_x+Y'''] = 0 \tag{2.12}$$

Burada $Y'' = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, $Y = \frac{\partial Y}{\partial t}$ ve $p \in [0,1]$ dir. (2.12) denkleminin genel açılımını yaparsak;

$$Y - u_0 + pu_0 - 3p(Y^2)_x + pY''' = 0 \tag{2.13}$$

Çözüm, Denklem (2.8)'e uygun olarak yerine yazılacak olursa;

$$Y = Y_0 + pY_1 + p^2Y_2 + p^3Y_3 + p^4Y_4 + \ldots . \tag{2.14}$$

$$Y''' = Y'''_0 + pY'''_1 + p^2Y'''_2 + p^3Y'''_3 + p^4Y'''_4 + \ldots \tag{2.15}$$

şeklinde oluşturulan ifadeler Denklem (2.13) denkleminde yerine yazılarak;

$$Y - u_0 + pu_0 - 3p\left(Y^2\right)_x + pY''' = 0, \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}&\left(Y_0 + pY_1 + p^2Y_2 + p^3Y_3 + p^4Y_4\right) - u_0 + pu_0 - 3p\left[\left(Y_0 + pY_1 + p^2Y_2 + p^3Y_3 + p^4Y_4\right)^2\right]_x \\ &+ p\left(Y'''_0 + pY'''_1 + p^2Y'''_2 + p^3Y'''_3 + p^4Y'''_4\right) = 0,\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}&\left(Y_0 + pY_1 + p^2Y_2 + p^3Y_3 + p^4Y_4\right) - u_0 + pu_0 + \left[-3pY_0^2 - 6p^2Y_0Y_1 - 3p^3Y_1^2 - 6p^3Y_0Y_2\right]_x \\ &+ \left[-6p^4Y_1Y_2 - 6p^4Y_0Y_3\right]_x + p\left(Y'''_0 + pY'''_1 + p^2Y'''_2 + p^3Y'''_3 + p^4Y'''_4\right) = 0,\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}&Y_0 + pY_1 + p^2Y_2 + p^3Y_3 + p^4Y_4 - u_0 + pu_0 + \begin{bmatrix} -\left(3pY_0^2\right)_x - \left(6p^2Y_0Y_1\right)_x - \left(3p^3Y_1^2\right)_x \\ -\left(6p^3Y_0Y_2\right)_x \end{bmatrix} \\ &-\left(6p^4Y_1Y_2\right)_x - \left(6p^4Y_0Y_3\right)_x + pY'''_0 + p^2Y'''_1 + p^3Y'''_2 + p^4Y'''_3 = 0,\end{aligned} \tag{2.19}$$

elde edilir. Bu denklem p'nin kuvvetlerine göre ortak parantezlere alarak yeniden düzenlenirse;

$$p^0 : Y_0 - u_0 = 0, \tag{2.20}$$

$$p^1 : Y_1 + u_0 - \left(3Y_0^2\right)_X + Y'''_0 = 0, \tag{2.21}$$

$$p^2 : Y_2 - (6Y_0Y_1)_X + Y'''_1 = 0, \tag{2.22}$$

$$p^3 : Y_3 - \left(3Y_1^2\right)_X - \left(6Y_0Y_2\right)_X + Y'''_2 = 0, \tag{2.23}$$

$$p^4 : Y_4 - \left(6Y_1Y_2\right)_X - \left(6Y_0Y_3\right)_X + Y'''_3 = 0, \tag{2.24}$$

Denklemlerin sırayla çözülmesiyle;

$$p^0 : Y_0 - u_0 \Rightarrow u_0 \Rightarrow Y_0 = 6x, \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned} &p^1 : Y_1 + u_0 - \left(3Y_0^2\right)_x + Y_0''' = 0 \\ &\Rightarrow Y_1 = -u_0 + \left(3Y_0^2\right)_x - Y_0''' \\ &\Rightarrow Y_1 = \int_0^t \left[-u_0 + \left(3Y_0^2\right)_x - Y_0'''\right] dt \\ &\Rightarrow Y_1 = \int_0^t \left[\left(3Y_0^2\right)_x - Y_0'''\right] dt \\ &\Rightarrow Y_1 = 216tx, \end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned} &p^2 : Y_2 - \left(6Y_0Y_1\right)_x + Y_1''' = 0 \\ &\Rightarrow Y_2 = \left(6Y_0Y_1\right)_x - Y_1''' \\ &\Rightarrow Y_2 = \int_0^t \left[\left(6Y_0Y_1\right)_x - Y_1'''\right] dt \\ &\Rightarrow Y_2 = 7776t^2x \end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned} &p^3 : Y_3 - \left(3Y_1^2\right)_x - \left(6Y_0Y_2\right)_x + Y_2''' = 0 \\ &\Rightarrow Y_3 = \left(3Y_1^2\right)_x + \left(6Y_0Y_2\right)_x - Y_2''' \\ &\Rightarrow Y_3 = \int_0^t \left[\left(3Y_1^2\right)_x + \left(6Y_0Y_2\right)_x - Y_2'''\right] dt \\ &\Rightarrow Y_3 = 279936t^3x, \end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned} &p^4 : Y_4 - \left(6Y_1Y_2\right)_x - \left(6Y_0Y_3\right)_x + Y_3''' = 0 \\ &\Rightarrow Y_4 = \left(6Y_1Y_2\right)_x + \left(6Y_0Y_3\right)_x - Y_3''' \\ &\Rightarrow Y_4 = \int_0^t \left[\left(6Y_1Y_2\right)_x + \left(6Y_0Y_3\right)_x - Y_3'''\right] dt \\ &\Rightarrow Y_4 = 10077696t^4x \end{aligned} \tag{2.29}$$

şeklinde serinin ilk dört fonksiyonu elde edilmiş olur. Bu durumda KdV denkleminin yaklaşık çözümü;

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \lim_{p\to 1} Y = Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + \ldots \\
&= 6x + 216xt + 7776t^2x + 279936t^3x + 10077696t^4x + \ldots \\
&= 6x\left(1 + 36t + 1296t^2 + 4665t^3 + 1679616t^4 + \ldots\right)
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

şeklinde elde edilmiş olunur.

3. ADOMİAN AYRIŞTIRMA METODU (AAM)

Ayrıştırma yöntemi George Adomian (1994) tarafından geliştirilmiştir. Bu yöntem çözümü analitik çözüme hızlı yakınsayan bir seri toplamı olarak verir. ADM, doğrusal olmayan denklemlerin çözümünde uygulanması kolay ve etkin yöntemlerden birisidir. Herhangi bir diferansiyel denklemi;

$$Lu + Ru + Nu = g(x) \tag{3.1}$$

şeklinde gösterelim. Burada u bilinmeyen, L en yüksek mertebeden doğrusal türev operatörü, N doğrusal olmayan operatör, R ise kalan terimlere ait operatör olup, mertebesi L'nin mertebesinden küçüktür. g kaynak fonksiyondur. L'nin ters operatörü L^{-1} mevcut olduğunu varsayımı ile Denklem (3.1)'in çözümü aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$u = f(x) - L^{-1}(Ru) - L^{-1}(Nu) \tag{3.2}$$

Burada f fonksiyonu g'nin integrali ile bir fonksiyonun toplamına eşittir. ADM'de çözüm seri toplamı şeklinde elde edilmektedir. Buna göre çözüm;

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(u_n)\,(x) \tag{3.3}$$

olur. Nu olarak ifade edilen doğrusal olmayan kısmın çözümü içinse;

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty}(A_n)(u_{0,}u_{1,\ldots\ldots\ldots}u_{n,}) \tag{3.4}$$

dönüşümünden yararlanılır. Adomian polinomları kısaca;

$$A_n=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\,N\sum_{n=0}^{\infty}\left(\lambda^k u_k\right), n > 0 \tag{3.5}$$

eşitliğiyle hesaplanabilir. λ_n terimleri doğrusal olmayan kısmın çözümü için kullanılan Adomian polinomlarıdır. λ_n u_0'dan u_n'e kadar olan tüm çözümlerin toplamı

şeklindedir. Nu = F(u) varsayımıyla Adomian polinomlarının ilk beş terimi aşağıdaki gibi elde edilebilir;

$$A_0 = F(u_0) \tag{3.6a}$$

$$A_1 = u_1 F'(u_0) \tag{3.6b}$$

$$A_2 = u_2 F'(u_0) + \frac{1}{2!}u_1^2 F''(u_0) \tag{3.6c}$$

$$A_3 = u_3 F'(u_0) + u_1 u_2 F''(u_0) + \frac{1}{3!}u_1^3 F'''(u_0) \tag{3.6d}$$

$$A_4 = u_4 F'(u_0) + (\frac{1}{2!}u_2^2 + u_1 u_3)F''(u_0) + \frac{1}{2!}u_1^2 u_2 F'''(u_0) + \frac{1}{4!}u_1^4 F^{IV}(u_0) \tag{3.6e}$$

Denklem (3.3)'ü Denklem (3.1)'de yerine koyarak aşağıdaki bağıntıları elde edebiliriz;

$$u_0(x) = F(x) \tag{3.7a}$$

$$u_{n+1}(x) = -L^{-1}[Ru_n - A_n],\ n \geq 0 \tag{3.7b}$$

Denklem (3.7a) ve Denklem (3.7b) elde edildikten sonra Denklem (3.3)'deki genel Adomian ayrıştırma çözümüne ulaşılabilir (Demirci, 2010).

3.1. Uygulama: Doğrusal Olmayan Bir Denklemin Çözümü

Doğrusal olmayan bir adi diferansiyel denklem eşitlik Denklem (3.8)'de verildiği gibi olsun;

$$y' = \frac{y^2}{1-xy},\ y(0) = 1 \tag{3.8}$$

Denklem (3.8) L_x operatörü ile yeniden düzenlenirse;

$$L_x y = xyy' + y^2,\ y(0) = 1 \tag{3.9}$$

L_x doğrusal adi diferansiyel operatör $\frac{d}{dx}$ ve L_x^{-1} integral operatör ise;

$$L_x^{-1}(.) = \int_0^x (.)dx \tag{3.10}$$

L_x^{-1} integral operatörünü ve başlangıç koşulunu Denklem (3.10)'da her iki tarafa da uygularsak;

$$y(x) = 1 + L_x^{-1}(xyy') + L_x^{-1}(y^2) \tag{3.11}$$

ile doğrusal olmayan terimler ve seri toplamı şeklinde ayrı ayrı açılır;

$$yy' = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{3.12}$$

$$y^2 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \tag{3.13}$$

Burada A_n ve B_n, adomian polinomları olarak bilinmektedir ve aşağıda ilk üç terimi gösterilmiştir;

$$A_0 = y_0 y_0', A_1 = y_0' y_1 + y_1' y_0, A_2 = y_0' y_2 + y_1' y_1 + y_2' y_0, \ldots \tag{3.14}$$

$$B_0 = y_0^2, B_1 = 2y_0 y_1, B_2 = 2y_0 y_2 + y_1^2, \ldots \tag{3.15}$$

Denklem (3.14) ve Denklem (3.15) denklemleri, Denklem (3.3) esas alınarak Denklem (3.11)'de yerine koyulursa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = 1 + L_x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} xA_n + L_x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \tag{3.16}$$

n=0,1,2,…,∞ olmak üzere Denklem (3.16) yardımıyla $y_n(x)$ fonksiyonu;

$$y_0 = 1, y_{k+1} = L_x^{-1}(xA_k) + L_x^{-1}(B_k), k \geq 0 \tag{3.17}$$

şeklinde elde edilir. Çözüm dördüncü mertebeye kadar sürdürüldüğünde,

$$y_0 = 1, y_1 = L_x^{-1}(xA_0) + L_x^{-1}(B_0) = x, y_2 = L_x^{-1}(xA_1) + L_x^{-1}(B_1) = \frac{3}{2}x^2,$$

$$y_3 = L_x^{-1}(xA_2) + L_x^{-1}(B_2) = = \frac{8}{3}x^3, y_4 = L_x^{-1}(xA_3) + L_x^{-1}(B_3) = \frac{125}{24}x^4 \tag{3.18}$$

Denklem (3.8)'in analitik tahmini çözümü seri formunda aşağıda verildiği gibi elde edilir;

$$y(x) = 1 + x + = \frac{3}{2}x^2 + = \frac{8}{3}x^3 + = \frac{125}{24}x^4 + \ldots \tag{3.19}$$

4. VARYASYONEL İTERASYON METODU (VIM)

Varyasyonel iterasyon yöntemi (VIM), HPM gibi Ji Huan He (1998,1999) tarafından geliştirilmiştir. Yöntem doğrusal veya doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerinde etkin olarak kullanılabilmektedir. ve arkadaşları, doğrusal olmayan denklemlerin çözümü için genel bir Lagrange çarpanı metodu önermişlerdir (1978). Bu metot, L doğrusal, N doğrusal olmayan operatör olmak üzere;

$$Lu + Nu = f(x) \tag{4.1}$$

genel doğrusal olmayan denkleminin x_0 noktasındaki değerini düzeltmek için u_0, $Lu = 0$ denkleminin çözümü olmak üzere,

$$u_c(x_0) = u_0(x_0) + \int_a^b \lambda\,(Lu_0(x) + Nu_0(x) - f)\,dx \tag{4.2}$$

düzeltme formülünü yazabileceğimizi söyler. Burada λ genel Lagrange çarpanıdır ve varyasyonel analiz yöntemleri kullanılarak hesaplanabilir. Varyasyonel iterasyon metodu, bu metodun He tarafından daha da geliştirilmesiyle elde edilmiştir. He, Denklem (4.2)'deki u_0 fonksiyonunu ilk yaklaşım olarak alarak;

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda\,(Lu_n(s) + N\tilde{u}_n(s) - f(s))\,ds \tag{4.3}$$

biçiminde bir iterasyon metoduna dönüştürmüştür. Burada u_n, n. yaklaşık çözüm, $\tilde{u}_n$ ise kısıtlanmış varyasyondur. Yani $\delta\tilde{u}_n = 0$ olacaktır. (4.3) denklemine düzeltme fonksiyoneli adı da verilir. Bu fonksiyonele varyasyon uygularsak $\delta u_n(0) = 0$ olmak üzere $\delta u_{n+1}(x) = \delta u_n(x) + \delta \int_0^x \lambda\,(x, s)\,(Lu_n(s) + N\tilde{u}_n(s) - f(s))\,ds = \delta u_n(x) + \int_0^x \lambda\,\delta(x, s)\,(Lu_n(s) - f(s))\,ds = 0$ elde ederiz. Buradan, oluşan Euler-Lagrange problemi çözülerek Lagrange çarpanı $\lambda(x, s)$ belirlenir. Ardından, başlangıç koşullarını sağlayacak şekilde bir u_0 ilk yaklaşım fonksiyonu seçilir ve bu değerler Denklem (4.3) iterasyon formülünde yerlerine yazılarak u_n, n = 1, 2, . . . mertebesinde çözümler bulunur. Sonuç olarak çözüm $u=\lim_{n\to\infty} u_n$ ile verilir.

Metodun işleyişini anlayabilmek için aşağıdaki doğrusal homojen olmayan çözümünü, varyasyonel iterasyon metodunu kullanarak bulalım:

4.1. Uygulama: Doğrusal Homojen Olmayan Denklemin Çözümü

$u''+ u = \cos t$ ve $u(0) = 1,\ u'(0) = 0$

sabit katsayılı doğrusal homojen olmayan başlangıç değer problemini ele alalım. Bu denkleme karşılık gelen düzeltme fonksiyoneli;

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^x \lambda(t, s)\{u_n''(s) + \tilde{u}_n(s) - \cos s\}\, ds \tag{4.4}$$

biçiminde yazılabilir. Bu fonksiyoneli kararlı yapmak için varyasyon uygulanırsa;

$$\delta u_{n+1}(t) = \delta u_n(t) + \delta\int_0^x \lambda(t, s)\{u''_n(s) - \cos s\}\, ds$$

$$= \delta u_n(t) + \int_0^x ((\partial^2 / \partial s^2\, \lambda(t, s))\, \delta u_n(s))\, ds$$

$$- \partial / \partial s\lambda(t, s)\delta u_n(s)|_{s=t} + \lambda(t, s)\delta u'_n(s)|_{s=t}$$

$$= (1 - \partial / \partial s\lambda(t, s)\,|_{s=t})\, \delta u_n(t) + \lambda(t, s)|_{s=t}\, \delta u'_n(t)$$

$$+ \int_0^x ((\partial^2 / \partial s^2\, \lambda(t, s))\, \delta u_n(s))\, ds = 0$$

elde edilir. Buradan Euler-Lagrange denklemi;

$$\partial^2 / \partial s^2\, \lambda(t, s) = 0 \tag{4.5}$$

ve başlangıç koşulları $\lambda(t, s)|_{s=t} = 0$, $1 - \partial / \partial s\lambda(t, s)\,|_{s=t} = 0$ biçiminde bulunur. Bu problem çözülerek $\lambda(t, s) = s - t$ sonucuna ulaşılır. Lagrange çarpanı Denklem (4.4)'de yerine yazılarak iterasyon formülü;

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t (s - t)\{u''_n(s) + u_n(s) - \cos s\}\, ds \tag{4.6}$$

olarak belirlenir. İlk yaklaşım fonksiyonu a, b sabitler olmak üzere $u_0(t) = at + b$ şeklinde alınabilir. İlk yaklaşım fonksiyonunun problemin başlangıç koşullarını sağlaması gerektiğinden, $a = 0$, $b = 1$ bulunur.

O halde $u_0(t) = 1$ olmalıdır. Böylece Denklem (4.5)'deki iterasyon formülünden ikinci yaklaşım,

$$u_1(t) = u_0(t) + \int_0^t (s-t) \{u''_0(s) + u_0(s) - \cos s\} ds$$

$$= 1 + \int_0^t (s-t)\{1 - \cos s\} ds$$

$$= 2 - t^2 / 2 - \cos t$$

olarak elde edilir.

Üçüncü yaklaşım fonksiyonu u_2, Denklem (4.5) iterasyon formülünde u_1 fonksiyonunun yerine yazılmasıyla elde edilir. Ancak burada u_1 fonksiyonundaki cost ifadesi yerine $x = 0$ noktası civarındaki seri açılımının ilk birkaç terimini almak, sonraki hesaplamaları kolaylaylaştıracaktır. O halde,

$u_1(t) = 2 - \frac{1}{2} t^2 - (1 - \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{24} t^4 - \frac{1}{720} t^6) = 1 - \frac{1}{24} t^4 + \frac{1}{720} t^6$ alalım. Buradan hesaplamalara devam edilerek $u_2(t) = 1 - \frac{1}{24} t^4 + \frac{1}{720} t^6 - \frac{1}{20160} t^8$ ve $u_3(t) = 1 - \frac{1}{24} t^4 + \frac{1}{720} t^6 - \frac{1}{13440} t^8$ sonucu elde edilir. Bu sonuç problemin analitik çözümü olan $u(t) = \cos t + \frac{t}{2} \sin t$ fonksiyonunun seri açılımının ilk dört terimiyle aynıdır. Metot, kullanıcısını ilk yaklaşım fonksiyonunu seçmekte özgür bırakır. Örneğin bu problemde ilk yaklaşım olarak istersek problemin homojen kısmının çözümü olan $u_0(t) = \cos t$ fonksiyonunu da alabiliriz.

Bu durumda $u_1(t) = u_0(t) + \int_0^t (s-t)\{u_0''(s) + u_0(s) - \cos s\} ds = \cos t - \int_0^t (s-t)\{\cos s\} ds = \cos t - \cos t + 1 = 1$ olarak bulunur. Dikkat edilirse $u_1(t) = u_0(t)$ olarak bulundu. Yani, ilk yaklaşım fonksiyonunun bu seçimi, sonuca yaklaşımı bir adım geciktirmiş oldu. Ancak bu her problemde böyle olacağı anlamına gelmemelidir. İlk yaklaşım fonksiyonunun seçimi, yaklaşımı olumlu olarak da etkileyebilir.

Ayrıca varyasyonel iterasyon metodunun başarısı, u_0 ilk yaklaşım fonksiyonunun seçimi kadar Lagrange çarpanının belirlenmesine de bağlıdır. Aslında, Lagrange çarpanı, denklemde yer alan en yüksek mertebeli türev hariç, diğer tüm terimlere kısıtlı varyasyon uygulanarak genellenebilir. Bunun için $d^m u / dx^m + Lu + Nu = f(x)$

diferensiyel denklemini ve $y^{(k)}(x0) = yk$, $k = 0, 1, 2, \ldots, m$ genel başlangıç koşullarını ele alalım.

Buradan düzeltme fonksiyonelini $u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda \, (d^m u / dx^m + L\tilde{u}_n(s) + N\tilde{u}_n(s) - f(s))\, ds$ biçiminde alırsak, varyasyon uygulandığında $\delta u_{n+1}(x) = \delta u_n(x) + \delta \int_0^x \lambda \, (x, s) \, (d^m u / dx^m)\, ds$ olup; buradan Lagrange çarpanı;

$$(-1)^m / (m-1)!(s-x)^{m-1}, \; m \geq 1 \qquad (4.7)$$

olarak bulunabilir. Dikkat edilirse yukarıdaki örnekte $m = 2$ olduğundan Lagrange çarpanı $\lambda = s - x$ bulunmuştur.

5. ANALİTİK TAHMİN YÖNTEMLERİNİN PROBLEME UYGULANMASI

Çalışmada ele alınan probleme ait kirişin mesnetlerinin sınır koşulları dikkate alınarak aşağıdaki kısaltmalar kullanılacaktır.

MM → Bir ucu sabit mafsallı diğer ucu serbest mafsallı

AM → Bir ucu ankastre diğer ucu serbest mafsallı

AA → Her iki ucu ankastre

Bir önceki bölümde özetlenen tüm yöntemlerle, n. mertebeden çözüm olarak bir polinom elde edilecektir. Çözümü polinom olarak elde edebilmek için başlangıç tahmini de yine sınır koşullarına uygun bir polinom olacaktır. Her iki mesnette ikişer tane olmak üzere toplam dört sınır koşulu ile verilen problem için katsayıları bilinmeyen sabitler olmak üzere üçüncü mertebeden bir polinom başlangıç fonksiyonu olarak alınabilir. ADM'de bu polinom problemin formülasyon sürecinde otomatik olarak elde dilecektir. Sunulan problemin kirişlere göre sınır koşulları aşağıdaki gibidir.

MM Kiriş için;

$$Z(0)=0 \quad Z''(0)=0 \tag{5.1}$$

$$Z(0)=0 \quad Z''(0)=0 \tag{5.2}$$

AA Kiriş için;

$$Z(0)=0 \quad Z'(0)=0 \tag{5.3}$$

$$Z(0)=0 \quad Z'(0)=0 \tag{5.4}$$

AM Kiriş için;

$$Z(0)=0 \quad Z'(0)=0 \tag{5.5}$$

$$Z(0)=0 \quad Z''(0)=0 \tag{5.6}$$

Sınır koşullarının çözüm olarak elde edilen analitik tahminlere uygulanması ile başlangıç tahmininde yer alan dört bilinmeyeni içeren dört adet denklem elde edilecektir. Bu denklemleri matris formunda aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$[K]\{\delta\}=\{0\} \tag{5.7}$$

$\{\delta\}$ vektörü başlangıçtaki bilinmeyen katsayıları içerir. Bayağı olmayan çözüm bulunması için matrisin determinantının [K] sıfıra eşit olması gerekir. Determinant, λ^2 doğal frekans parametresine bağlı olan bir polinom denklemidir. λ^2 için determinant ifadesinin sıfırları, serbest burulma doğal frekans parametrelerini verecektir.

5.1. Sayısal Sonuçlar

ADM, VIM ve HPM'nin Denklem (1.3) 'e uygulanması, serbest burulmalı doğal frekans parametreleri için Tablo 5.1 - 5.27 arasında verilen sonuçları üretmektedir. Her bir yöntemde Mathematica yazılımı kullanılarak 1.mertebeden, 3.mertebeden, 5.mertebeden ve 10.mertebeden çözümler hesaplanmıştır. Tablo 5.28 – 5.36'da ise 5.mertebeden ADM, VIM ve HPM çözümleri, (Kameswara ve Satyam, 1975 ve Kameswara ve Mirza, 1989) ile karşılaştırılmıştır. Literatürden alınan bu çözümler yazarlar tarafından (1.3) denklemine Galerkin yöntemi uygulanmasıyla elde edilmiştir. (Kameswara Rao ve Mirza, 1989) sayısal sonuçları bir tablo ile vermesine rağmen, (Kameswara Rao ve Satyam, 1975) sayısal sonuçları grafik olarak vermişlerdir. Bu nedenle bu makaledeki sayısal değerler grafiklerin bir dijitalleştirme yazılımında kullanılması ile elde edilmiştir. Grafiğin fotokopisi üzerinden dijitalleştirme yapıldığından okumalarda da bir miktar hata olabilme ihtimali bulunmaktadır. Bu durum bu bölümde ve sonuçlar kısmında irdelenmiştir.

Tablo 5.1. MM Kiriş için AAM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve $\gamma = 4$)

Δ	1-TERM	3-TERM	5-TERM	10-TERM
0	-	171,308	171,279	171,279
2	118,849	131,745	131,800	131,800
4	470,818	923,413	13,118	13,365

Tablo 5.2. MM Kiriş için AAM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve $\gamma = 8$)

Δ	1-TERM	3-TERM	5-TERM	10-TERM
0	-	363,308	363,279	363,279
2	310,849	323,745	323,700	323,800
4	154,637	191,357	205,118	205,365

Tablo 5.3. MM Kiriş için AAM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve $\gamma = 12$)

Δ	1-TERM	3-TERM	5-TERM	10-TERM
0	-	683,308	683,279	683,279
2	630,849	643,745	643,800	643,800
4	474,637	511,357	525,118	525,365

Tablo 5.4. MM Kiriş için VIM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve $\gamma = 4$)

Δ	1-TERM	3-TERM	5-TERM	10-TERM
0	-	171,308	171,279	171,279
2	118,849	131,745	131,800	131,800
4	470,818	923,413	13,118	13,365

Tablo 5.5. MM Kiriş için VIM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve $\gamma = 8$)

Δ	1-TERM	3-TERM	5-TERM	10-TERM
0	-	363,308	363,279	363,279
2	310,849	323,745	323,700	323,800
4	154,637	191,357	205,118	205,365

Tablo 5.6. MM Kiriş için VIM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve $\gamma = 12$)

Δ	1-TERM	3-TERM	5-TERM	10-TERM
0	-	683,308	683,279	683,279
2	630,849	643,745	643,800	643,800
4	474,637	511,357	525,118	525,365

Tablo 5.7. MM Kiriş için HPM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve $\gamma = 4$)

Δ	1-TERM	3-TERM	5-TERM	10-TERM
0	-	171,308	171,279	171,279
2	118,849	131,745	131,800	131,800
4	470,818	923,413	13,117	13,365

Tablo 5.8. MM Kiriş için HPM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve $\gamma = 8$)

Δ	1-TERM	3-TERM	5-TERM	10-TERM
0	-	363,308	363,279	363,279
2	310,849	323,745	323,700	323,800
4	154,637	191,357	205,118	205,365

Tablo 5.9. MM Kiriş için HPM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve $\gamma = 12$)

Δ	1-TERM	3-TERM	5-TERM	10-TERM
0	-	683,308	683,279	683,279
2	630,849	643,745	643,800	643,800
4	474,637	511,357	525,118	525,365

Tablo 5.10. AA Kiriş için AAM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve $\gamma = 4$)

Δ	1-TERM	3-TERM	5-TERM	10-TERM
0	-	577,758	576,859	576,859
2	-	527,658	527,587	527,587
4	299,335	399,068	378,954	378,184

Tablo 5.11. AA Kiriş için AAM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve $\gamma = 8$)

Δ	1-TERM	3-TERM	5-TERM	10-TERM
0	-	769,758	768,859	768,859
2	-	719,658	719,587	719,587
4	491,335	591,068	570,954	570,184

Tablo 5.12. AA Kiriş için AAM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve $\gamma = 12$)

Δ	1-TERM	3-TERM	5-TERM	10-TERM
0	-	1089,760	1088,860	1088,860
2	-	1039,660	1039,590	1039,590
4	811,335	911,068	890,954	890,184

Tablo 5.13. AA Kiriş için VIM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve $\gamma = 4$)

Δ	1-TERM	3-TERM	5-TERM	10-TERM
0	-	577,758	576,859	576,859
2	-	527,658	527,587	527,587
4	299,335	399,068	378,954	378,184

Tablo 5.14. AA Kiriş için VIM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve $\gamma = 8$)

Δ	1-TERM	3-TERM	5-TERM	10-TERM
0	-	769,758	768,859	768,859
2	-	719,658	719,587	719,587
4	491,335	591,068	570,954	570,184

Tablo 5.15. AA Kiriş için VIM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve $\gamma = 12$)

Δ	1-TERM	3-TERM	5-TERM	10-TERM
0	-	1089,760	1088,860	1088,860
2	-	1039,660	1039,590	1039,590
4	811,335	911,068	890,954	890,184

Tablo 5.16. AA Kiriş için HPM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve $\gamma = 4$)

Δ	1-TERM	3-TERM	5-TERM	10-TERM
0	-	577,758	576,859	576,859
2	-	527,658	527,587	527,587
4	299,335	399,068	378,954	378,184

Tablo 5.17. AA Kiriş için HPM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve $\gamma = 8$)

Δ	1-TERM	3-TERM	5-TERM	10-TERM
0	-	769,758	768,859	768,859
2	-	719,658	719,587	719,587
4	491,335	591,068	570,954	570,184

Tablo 5.18. AA Kiriş için HPM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve $\gamma = 12$)

Δ	1-TERM	3-TERM	5-TERM	10-TERM
0	-	1089,760	1088,860	1088,860
2	-	1039,660	1039,590	1039,590
4	811,335	911,068	890,954	890,184

Tablo 5.19. AM Kiriş için AAM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve $\gamma = 4$)

Δ	1-TERM	3-TERM	5-TERM	10-TERM
0	-	313,452	313,224	313,224
2	255,005	267,043	267,090	267,090
4	212,848	203,048	128,692	126,331

Tablo 5.20. AM Kiriş için AAM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve $\gamma = 8$)

Δ	1-TERM	3-TERM	5-TERM	10-TERM
0	-	505,452	505,224	505,224
2	447,005	459,043	459,090	459,090
4	404,848	395,048	320,692	318,331

Tablo 5.21. AM Kiriş için AAM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve $\gamma = 12$)

Δ	1-TERM	3-TERM	5-TERM	10-TERM
0	-	825,452	825,224	825,224
2	767,005	779,043	779,090	779,090
4	724,848	715,048	640,692	638,331

Tablo 5.22. AM Kiriş için VIM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve $\gamma = 4$)

Δ	1-TERM	3-TERM	5-TERM	10-TERM
0	-	313,452	313,224	313,224
2	255,005	267,043	267,090	267,090
4	212,848	203,048	128,692	126,331

Tablo 5.23. AM Kiriş için VIM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve $\gamma = 8$)

Δ	1-TERM	3-TERM	5-TERM	10-TERM
0	-	505,452	505,224	505,224
2	447,005	459,043	459,090	459,090
4	404,848	395,048	320,692	318,331

Tablo 5.24. AM Kiriş için VIM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve $\gamma = 12$)

Δ	1-TERM	3-TERM	5-TERM	10-TERM
0	-	825,452	825,224	825,224
2	767,005	779,043	779,090	779,090
4	724,848	715,048	640,692	638,331

Tablo 5.25. AM Kiriş için HPM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve $\gamma = 4$)

Δ	1-TERM	3-TERM	5-TERM	10-TERM
0	-	313,452	313,224	313,224
2	255,005	267,043	267,090	267,090
4	212,848	203,048	128,692	126,331

Tablo 5.26. AM Kiriş için HPM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve $\gamma = 8$)

Δ	1-TERM	3-TERM	5-TERM	10-TERM
0	-	505,452	505,224	505,224
2	447,005	459,043	459,090	459,090
4	404,848	395,048	320,692	318,331

Tablo 5.27. AM Kiriş için HPM ile λ^2 değerleri (K = 1 ve $\gamma = 12$)

Δ	1-TERM	3-TERM	5-TERM	10-TERM
0	-	825,452	825,224	825,224
2	767,005	779,043	779,090	779,090
4	724,848	715,048	640,692	638,331

Tablo 5.28. MM Kiriş için λ^2 değerlerinin karşılaştırılması (K = 1 ve $\gamma = 4$)

Δ	Kamesawara ve Satyam (1975)	AAM	VIM	HPM
0	171,892	171,279	171,279	171,279
2	130,811	131,800	131,800	131,800
4	12,973	13,117	13,117	13,117

Tablo 5.29. MM Kiriş için λ^2 değerlerinin karşılaştırılması (K = 1 ve $\gamma = 8$)

Δ	Kamesawara ve Satyam (1975)	AAM	VIM	HPM
0	363,043	363,279	363,279	363,279
2	322,826	323,700	323,800	323,700
4	205,435	205,118	205,118	205,118

Tablo 5.30. MM Kiriş için λ^2 değerlerinin karşılaştırılması (K = 1 ve $\gamma = 12$)

Δ	Kamesawara ve Satyam (1975)	AAM	VIM	HPM
0	662,015	683,279	683,279	683,279
2	639,963	643,800	643,800	643,800
4	529,979	525,118	525,118	525,118

Tablo 5.31. AA Kiriş için λ^2 değerlerinin karşılaştırılması (K = 1 ve $\gamma = 4$)

Δ	Kamesawara ve Satyam (1975)	AAM	VIM	HPM
0	576,507	576,859	576,859	576,859
2	526,806	527,658	527,658	527,658
4	385,574	378,954	378,954	378,954

Tablo 5.32. AA Kiriş için λ^2 değerlerinin karşılaştırılması (K = 1 ve $\gamma = 8$)

Δ	Kamesawara ve Satyam (1975)	AAM	VIM	HPM
0	780,181	768,859	768,859	768,859
2	719,813	719,587	719,587	719,587
4	572,956	570,954	570,954	570,954

Tablo 5.33. AA Kiriş için λ^2 değerlerinin karşılaştırılması (K = 1 ve $\gamma = 12$)

Δ	Kamesawara ve Satyam (1975)	AAM	VIM	HPM
0	1091,030	1088,860	1088,860	1088,860
2	1032,690	1039,590	1039,590	1039,590
4	895,408	890,954	890,954	890,954

Tablo 5.34. AM Kiriş için λ^2 değerlerinin karşılaştırılması (K = 1 ve $\gamma = 4$)

Δ	Kamesawara ve Mirza (1989)	AAM	VIM	HPM
0	314,265	313,224	313,224	313,224
2	268,632	267,090	267,090	267,090
4	132,226	128,692	128,692	128,692

Tablo 5.35. AM Kiriş için λ^2 değerlerinin karşılaştırılması (K = 1 ve $\gamma = 8$)

Δ	Kamesawara ve Mirza (1989)	AAM	VIM	HPM
0	506,302	505,224	505,224	505,224
2	460,548	459,090	459,090	459,090
4	324,676	320,692	320,692	320,692

Tablo 5.36. AM Kiriş için λ^2 değerlerinin karşılaştırılması (K = 1 ve $\gamma = 12$)

Δ	Kamesawara ve Mirza (1989)	AAM	VIM	HPM
0	826,253	825,224	825,224	825,224
2	780,735	779,090	779,090	779,090
4	644,378	640,692	640,692	640,692

Tablo 5.1 – 5.27 arasında, kullanılması önerilen farklı yöntemlerden elde edilen, 1.mertebe, 3.mertebe, 5.mertebe ve 10.mertebe çözümleri olmak üzere üç farklı çözüm sunulmuştur. 1.mertebeden çözümde $\Delta = 0$ için katsayı matrisinin determinantının reel kökü yoktur. 3. ve 5.mertebeden çözümler arasında $\Delta = 0$ ve $\Delta = 2$ için anlamlı bir fark bulunmamaktadır. Bununla birlikte $\Delta = 4$ olduğunda, 3. ve 5. mertebeden çözümler arasında bir farklılık meydana gelmiştir. Bu durum $\Delta = 0$ ve $\Delta = 2$ için 3.mertebeden çözümün yeterli olabileceğini ancak $\Delta = 4$ içinse daha üst

mertebe çözüm gerektiğini göstermektedir. Δ'nın artan değerleri, çözümlerde ek terim ihtiyacını artırır. Tablolardan kullanılan üç metodun da frekans parametresi λ^2 için aynı sonuçları verdiğini gözlemlenebilir.

Tablo 5.28 - 5.36 arasında frekans parametresi λ^2 sonuçları (Kameswara ve Satyam, 1975 ve Kameswara ve Mirza, 1989) ile karşılaştırılmıştır. AAM, HPM ve VIM uygulanan problemler için 5.mertebe ve 10.mertebede çok yakın sonuç verdiğinden, Tablo 5.28 – 5.36 arasında 5.mertebe çözüm kullanılmıştır. Burada düşük mertebeli çözümlerde bile çok iyi sonuç alınabildiği vurgulanmak istenmiştir. Tablolardan, bu çalışmada elde edilen sonuçların (Kameswara ve Satyam, 1975 ve Kameswara ve Mirza, 1989) ile iyi bir uyum içerisinde olduğu gözlenmektedir. (Kameswara Rao ve Satyam, 1975) tarafından sayısal sonuçların grafik olarak verildiğinden bahsedilmişti. Bu makaledeki sayısal değerler grafiklerin bir dijitalleştirme yazılımında kullanılması ile elde edildiğinden grafiğin fotokopisi üzerinden yapılan okumalarda da bir miktar okuma hatası olduğu tablolarda kıyaslanan sonuçlardan da anlaşılabilmektedir. Bazı durumlarda Δ'nın daha büyük değerleri için daha yakın değerler elde edilirken, Δ'nın küçük değerleri için bağıl hatası daha yüksek değerler elde edilmiştir. Bu problemlerde de (Kameswara Rao ve Satyam, 1975) ile iyi uyum yakalayan sonuçlar elde edilmekle birlikte dijital okumalarda hata oluşmasına rağmen sonuçların yine de uyum içerisinde olduğu gözlemlenmektedir.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada elastik zemin üzerine oturan burulma titreşimine maruz çift simetri eksenli ince duvarlı açık kesitli kirişlerin homotopi pertürbasyon yöntemi (HPM), Adomian ayrıştırma metodu (AAM) ve varyasyonel iterasyon yöntemi (VIM) ile stabilite analizleri yapılmıştır. Uygulanan yöntemlerle 1.mertebeden, 2.mertebeden, 5.mertebeden ve 10.mertebeden çözümler elde edilerek yöntemlerin sonuca asimptotik olarak yakınsadıkları gözlemlenmiştir. Varsayılan Δ değerleri için 5.mertebeden ve 10.mertebeden çözümler arasında belirgin bir fark oluşmamıştır. Bu durum denklemin doğrusal olmasından kaynaklanmaktadır. Başlangıç fonksiyonumuz polinom olduğundan yöntemler sonuç analitik tahminlerini polinom olarak vermiştir. Sınır koşullarının polinomlara uygulanması ile katsayı matrisinin determinantı da yine polinom olarak elde edilmiştir. Bu determinanta ait fonksiyonun sıfırlarının elde edilmesi, problemin analitik çözümünde yer alan trigonometrik ve hiperbolik trigonometrik fonksiyonlardan ve onların türevlerinden oluşan bir denkleme göre daha kolay olmaktadır. Yöntemlerin en önemli avantajlarından birisi budur. AAM başlangıç fonksiyonunu formülasyon sürecinde kendisinin otomatik oluşturması VIM ve HPM'na göre ek bir avantaj olarak değerlendirilebilir. Elde edilen sonuçlardan her üç yönteminde elastik zemin üzerine oturan burulma titreşimine maruz ince duvarlı açık kesitli kirişlerin stabilite analizinde etkin bir şekilde kullanılabileceği söylenebilir. Gelecekte aynı yöntemler enkesiti değişken kirişlere de uygulanarak önerilen yöntemlerin uygulama alanları bir adım daha ileriye götürülebilir.

KAYNAKLAR

Adomian G., *Applied Stochastic Processes,* 1st ed., Academic Press, New York, 1980.

Adomian G., *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method,* 1st ed., Springer Netherlands, Dordrecht, 1994.

Aggarwal H. R., Cranch E. T., A Theory of Torsional and Coupled Bending Torsional Waves in Thin-Walled Open Section Beams, *Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME,* 1967, **34**, 337-343.

Başkonuş H.M., Bazı Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemlerin Adomian Ayrışım Metodu ve Homotopi Pertürbasyon Metodu ile Sayısal Çözümleri, Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ, 2010, 270000.

Bazant, Z. P., Nimeiri M., Large deflection spacial buckling of thin walled beams and frames, *J. Engng Mech. Div., ASCE,* 1973, **99**, 1259-81.

Buckley J. C., The bifilar property of twisted strips. *Phil. Magazine,* London, 1914, **28**, 778.

Cheung Y.K., Zienkiewicz O.C., Plates and tanks on elastic foundations - An application of finite element method, *Int. J. Solids and Structures,* 1965, **1**, 451- 461.

Christiano P., Salmela L., Frequencies of Beams with Elastic Warping Restraint, *Journal of the Structural Division, Proceedings of the ASCE,* 1971, **97**, 1835-1840.

Civalek Ö., Elastik Zemine Oturan Yapıların Hesap Yöntemlerine Genel Bir Bakış, *TMH – Türkiye Mühendislik Haberleri,* 2004, **432**, 45-54.

Cullimore M. S. G., The shortening effect - A non-linear feature of pure torsion, *Engineering Structures,* Butterworths, London, 1949, 153-164.

Datta S., Large amplitude free vibrations of irregular plates placed on an elastic foundation, *Int. J. Non-Linear Mech.,* 1976, **11**, 337-345.

Demirci İ., Adomian Ayrıştırma Metodu Yardımıyla Lineer Olmayan Adi Diferansiyel Denklemler İçin Başlangıç Değer Probleminin Çözümü, Yüksek Lisans Tezi, Dumlupınar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kütahya, 2010, 259732.

Dillard D.A., Bending of plates on thin elastomeric foundations, *J. Of Applied Mechanics,* ASME, 1989, **56**, 382-386.

Epstein M., Murray D.W., Three-dimensional large deformation analysis of thin-walled beams, *Int. J Solids Struct.*, 1976, **12**, 867-876.

Gere J. M., Torsional Vibrations of Beams of Thin-Walled Open Section, *Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME*, 1954, **21**, 381-387.

Ghobarah A. A., Tso W. K., A non-linear thin-walled beam theory. *Int. J. Mech. Sci.*, 1971, **13**, 1025-1038.

He J. H., A variational iteration method for nonlinearity and its applications (in Chinese), *Mech. Practice*,1998, **20**, 30-32.

He J. H., Homotopy perturbation method-a new non-linear analytical technique, *Appl.Math.Comput.*, 2003, **135**, 73-79.

He J. H., Variational iteration method-a kind of non-linear analytical technique: some examples, *Internat. J. Nonlinear Mech.*, 1999, **34**, 699-708.

İlhan E., Diferansiyel Denklemlerin Varyasyonel İterasyon Metodu ile Yaklaşık Analitik Çözümleri, Yüksek Lisans Tezi, Ahi Evran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kırşehir, 2011.

Kameswara Rao C., Appala Satyam A., Torsional vibration and stability of thin walled beams on continuous elastic foundation, *AIAA Journal*, 1975, **13**, 232-234.

Kameswara Rao C., Apparao K. V., Sarma P. K., Effect of Longitudinal Inertia and Shear Deformation on the Torsional Frequency and Normal Modes of Thin-Walled Open Section Beams, *Journal of the Aeronautical Society of India*, to be published.

Kameswara Rao C., Gupta B. V. R., Rao D. L. N., Torsional vibrations of thin walled beams on continuous elastic foundation using finite element method. *Proceedings of International Conference on Finite Element Methods in Engineering*, Coimbatore, 1974, **9**, 231-248.

Kameswara Rao C., S. Mirza, Torsional vibrations and buckling of thin-walled beams on elastic foundation, *Thin-walled Structures*, 1989, **7**, 73-82.

Kerr A. D., Elastic and viscoelastic foundation models, *Journal of Applied Mechanics*, 1964, **31**, 491-498.

Krishna Murty A. V., Joga Rao C. V., General Theory of Vibrations of Cylindrical Tubes, *Journal of the Aeronautical Society of India*, 1968, **20**, 1-38; **4**, 235-258.

Reissner E., The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *J. Appl. Mech*., 1945, **12**, 69-77.

Roberts T. M., Azizian Z. G., Instability of thin-walled bars, *J. Engng Mech., ASCE*, 1938, **109**, 781-94.

Sladek J., Sladek V., Mang H. H, Meshless local boundary integral equation method for simply supported and clamped plates resting on elastic foundation, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng*., 2002, **191**, 5943-5959.

Szymzak C., Buckling and initial post-buckling behaviour of thin-walled I-columns. *Comput. Struct*., 1980, **11**, 481-487.

Timoshenko S. P., Gere J. M., Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, New York, 1961.

Timoshenko S. P., Strength of Materials, D. Van Nostrand Co. Inc., Princeton, NJ, 1956.

Tso W. K., Ghobarah A. A., Non-linear non-uniform torsion of thin walled beams, *lnt. J. Mech. Sci*., 1971, **13**, 1039-1047.

Wekezer J. W., Instability of thin-walled bars, *J. Engng Mech., ASCE*, 1985, **111**, 923-35.

Wekezer J. W., Non-linear torsion of thin-walled bars of variable cross sections, *Int. J. Mech. Sci*., 1985, **27**, 631-641

Yang T. Y., A finite element analysis of plates on a two parameter foundation model, *Computers and Structures*, 1972, **2**, 593-614.

KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER

Coşkun S.B., Kutsal S. M., **Göçer M.**, Some Analytical Approximate Methods for Torsional Vibrations and Stability of Thin-Walled Beams on Elastic Foundation, *Third Conference on Advances in Mechanical Engineering ICAME2017*, İstanbul, December, 19-21, 2017.

ÖZGEÇMİŞ

1991 yılında Diyarbakır'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Diyarbakır'da tamamladı. 2007 yılında girdiği Ege Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü'nden 2012 yılında İnşaat Mühendisi olarak mezun oldu. 2016 yılında Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı. 2015 yılından beri İstanbul Bilgi Üniversitesi MYO İnşaat Teknolojisi Programında öğretim görevlisi ve program koordinatörü olarak görev yapmaktadır.