**KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DOKTORA TEZİ**

# ÇARPANLARA AYRILABİLİR YÜZEYLERİN BİR KARAKTERİZASYONU

**SEZGİN BÜYÜKKÜTÜK**

**KOCAELİ 2018**

**KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DOKTORA TEZİ**

# ÇARPANLARA AYRILABİLİR YÜZEYLERİN BİR KARAKTERİZASYONU

**SEZGİN BÜYÜKKÜTÜK**

| | |
|---|---|
| **Doç.Dr. Günay ÖZTÜRK**<br>**Danışman, Kocaeli Üniv.** | ..... |
| **Prof.Dr. Kadri ARSLAN**<br>**Jüri Üyesi, Uludağ Üniv.** | ..... |
| **Prof.Dr. Murat TOSUN**<br>**Jüri Üyesi, Sakarya Üniv.** | ..... |
| **Prof.Dr. Ahmet KÜÇÜK**<br>**Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv.** | ..... |
| **Yrd.Doç.Dr. Ahmet ZOR**<br>**Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv.** | ..... |

**Tezin Savunulduğu Tarih: 05.01.2018**

## ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Diferensiyel geometrinin başlıca konularından olan yüzeyler teorisi, sanayide ve mimaride uygulamaları olan bir alandır. Yüzeyler için çok sayıda inceleme mevcuttur. Bunlar içinde en dikkat çekici olan yüzeyler minimal ve düz yüzeylerdir. Bu tip yüzeyler Öklid ve Minkowski uzaylarında detaylıca incelenmiştir. Bu çalışmada 4-boyutlu Öklid ve Minkowski uzaylarında çarpanlara ayrılabilir yüzeyler için kayda değer sonuçlar bulunmuştur. Elde edilen bu sonuçlar yeni incelemelere öncülük edecektir.

Yüksek lisansımda, doktoramda ve akademik hayata ilk adımlarımdan bu yana daima yanımda olan beni destekleyen, çalışma konularımı ve bu konuyu veren, inceleyen Danışman Hocam Sayın Doç. Dr. Günay ÖZTÜRK e, bu tezin yazılmasında tecrübeleriyle emek veren hocalarım Sayın Prof. Dr. Ahmet KÜÇÜK ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Ahmet ZOR a, yaptığım çalışmalarda fikirleriyle beni yönlendiren ve destekleyen Hocam Sayın Prof. Dr. Kadri ARSLAN a, teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca çalışmalarım süresince beni motive eden ve daima arkamda olan aileme teşekkür ederim.

Ocak–2018 Sezgin BÜYÜKKÜTÜK

## İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR ..... i
İÇİNDEKİLER ..... ii
ŞEKİLLER DİZİNİ ..... iii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ ..... iv
ÖZET ..... v
ABSTRACT ..... vi
GİRİŞ ..... 1
1. TEMEL KAVRAMLAR ..... 2
1.1. Öklid Uzayı ve Riemann Manifoldu ..... 2
1.2. Öklid Uzayında Yüzey Kavramı ..... 6
1.3. Minkowski Uzayında Yüzey Kavramı ..... 11
2. 3− BOYUTLU UZAYLARDA ÇARPANLARA AYRILABİLİR YÜZEYLER ..... 18
2.1. $IE^3$ Uzayındaki Çarpanlara Ayrılabilir Yüzeyler ..... 18
2.2. $IE_1^3$ Uzayındaki Çarpanlara Ayrılabilir Yüzeyler ..... 21
3. $IE^4$ ÖKLİD UZAYINDA ÇARPANLARA AYRILABİLİR YÜZEYLER ..... 25
3.1. $IE^4$ Uzayında Çarpanlara Ayrılabilir Düz Yüzeyler ..... 32
3.2. $IE^4$ Uzayında Çarpanlara Ayrılabilir Yarı Umbilik Yüzeyler ..... 35
3.3. $IE^4$ Uzayında Çarpanlara Ayrılabilir Minimal Yüzeyler ..... 37
3.4. $IE^4$ Uzayında Çarpanlara Ayrılabilir Wintgen İdeal Yüzeyler ..... 42
3.5. $IE^4$ Uzayında Çarpanlara Ayrılabilir Yüzeyin Eğrilik Elipsi ..... 43
3.6. Çarpanlara Ayrılabilir Yüzeyin Ganchev-Milousheva Değişmezleri ..... 47
4. $IE_1^4$ MİNKOWSKİ UZAYINDA ÇARPANLARA AYRILABİLİR YÜZEYLER ..... 50
4.1. $IE_1^4$ Uzayında Spacelike Çarpanlara Ayrılabilir Yüzeyler ..... 53
4.2. $IE_1^4$ Uzayında Timelike Çarpanlara Ayrılabilir Yüzeyler ..... 56
4.3. $IE_1^4$ deki Null Olmayan Çarpanlara Ayrılabilir Düz Yüzeyler ..... 57
4.4. $IE_1^4$ deki Null Olmayan Çarpanlara Ayrılabilir Minimal Yüzeyler ..... 61
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER ..... 65
KAYNAKLAR ..... 66
EKLER ..... 70
KİŞİSEL YAYINLAR VE ESERLER ..... 77
ÖZGEÇMİŞ ..... 80

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. Eşitlik (3.16) ile verilen yüzeyin izdüşümü.....29
Şekil 3.2. Münih Olimpiyat Stadyumu, Münih, Almanya.....29
Şekil 3.3. Çarpanlara Ayrılabilir Bezier yüzeyi ve semer yüzeyi.....30
Şekil 3.4. Heydar Aliyev Merkezi, Bakü, Azerbaycan.....30
Şekil 3.5. Eşitlik (3.18) ile verilen yüzeyin izdüşümü ve modellemesi .....31
Şekil 3.6. Eşitlik (3.19) ile verilen yüzeyin izdüşümü ve modellemesi .....31
Şekil 3.7. Eşitlik (3.34) ile verilen düz yüzeyin izdüşümü ve Sekapark .....35
Şekil 3.8. Eşitlik (3.37) ile verilen $K = K_N$ olan yüzey.....37
Şekil 3.9. Eşitlik (3.51) ile verilen minimal yüzeyin izdüşümü .....42
Şekil 3.10. Eşitlik (3.62) ile verilen çarpanlara ayrılabilir yüzey.....47
Şekil 4.1. Teorem 4.12. deki (7) nolu yüzeyin izdüşümü.....64

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

| | |
|---|---|
| $A_{N_k}$ | : Şekil operatörü |
| $C^{\infty}$ | : Diferensiyellenebilme |
| $IE^{n}$ | : n-boyutlu Öklid uzayı |
| $IE_1^n$ | : n-boyutlu Minkowski uzayı |
| $h$ | : İkinci temel form |
| $\vec{H}$ | : $M$ manifoldunun $IE^n$ uzayındaki ortalama eğrilik vektörü |
| $p$ | : Nokta |
| $IR$ | : Reel sayılar kümesi |
| $T(M)$ | : Tanjant uzay |
| $T^{\perp}(M)$ | : Normal uzay |
| $T_p(M)$ | : $p \in M$ noktasındaki tanjant uzay |
| $X$ | : İmersiyon |
| $\nabla$ | : Kovaryant türev |
| $\chi(M)$ | : $M$ manifoldunun $C^{\infty}$ vektör alanları uzayı |
| $\langle , \rangle$ | : $\chi(M)$ uzayında iç çarpım fonksiyonu |
| $\partial$ | : Kısmi türev |
| $\tilde{R}$ | : Riemann eğrilik tensörü |
| $\Gamma_{ij}^{k}$ | : Christofel sembolleri |
| $g$ | : Metrik tensör |
| $\Delta$ | : Laplace operatörü |

**ÇARPANLARA AYRILABİLİR YÜZEYLERİN BİR KARAKTERİZASYONU**

## ÖZET

Bu tezde, $3-$boyutlu Öklid ve Minkowski uzaylarında ve $4-$boyutlu Öklid ve Minkowski uzaylarında çarpanlara ayrılabilir yüzeyler incelenmiştir. İlk olarak literatürde var olan $3-$boyutlu uzaylardaki çarpanlara ayrılabilir yüzeylerin karakterizasyonları verilmiştir. Daha sonra $4-$boyutlu uzaylardaki çarpanlara ayrılabilir yüzeyler tanımlanarak bu yüzeylerin düz ve minimal olma koşulları irdelenmiştir. $4-$boyutlu Öklid uzayında çarpanlara ayrılabilir yüzeylerin eğrilik elipsi incelenmiş, ayrıca bu yüzeylerin Wintgen ideal (süperkonformal) yüzey olma koşulu ele alınmıştır. Son olarak $IE_1^4$ Minkowski uzayında spacelike ve timelike çarpanlara ayrılabilir yüzeyler tanımlanmış ve sınıflandırmaları verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Çarpanlara Ayrılabilir Yüzey, Eğrilik Elipsi, Gauss eğriliği, Normal eğrilik, Ortalama eğrilik.

## A CHARACTERIZATION OF FACTORABLE SURFACES


## ABSTRACT

In this thesis, factorable surfaces were focused on, in $3-$dimensional Euclidean and Minkowski spaces and $4-$dimensional Euclidean and Minkowski spaces. Firstly, classification of factorable surfaces were analyzed in $3-$dimensional spaces which was in literature. Then in $4-$dimensional spaces, factorable surfaces were defined and the conditions were examined for such surfaces to become flat and minimal. Moreover, curvature ellipses of factorable surfaces were investigated in four dimensional Euclidean space $IE^4$ and necessary and sufficient conditions were given for this type of surfaces to become Wintgen ideal (superconformal) surface. Finally, spacelike and timelike factorable surfaces were introduced and classify in $IE_1^4$.



**Keywords:** Factorable Surface, Curvature Ellipse, Gaussian curvature, Normal curvature, Mean curvature.

## GİRİŞ

Çarpanlara ayrılabilir yüzeyler, ilk olarak 1993 yılında Van de Woestyne tarafından helikoidlerin bir sınıflandırması olarak ele alınmıştır [45, 46]. Homotetik yüzeyler olarak da anılan çarpanlara ayrılabilir yüzeyler birçok geometrici tarafından farklı uzaylarda farklı bakış açılarıyla değerlendirilmiştir [9, 10, 12, 34, 37, 44, 49].

Bu çalışmadaki amaç, çarpanlara ayrılabilir yüzeyleri 3 ve $4-$boyutlu Öklid ve Minkowski uzaylarında karakterize etmek, bu yüzeyler için örnekler vererek bu yüzeyleri sınıflandırmaktır.

Bu tez, beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm, diğer bölümlere kaynak teşkil edecek bazı temel bilgileri içermektedir.

İkinci bölümde, $3-$boyutlu Öklid uzayı ve $3-$boyutlu Minkowski uzayında çarpanlara ayrılabilir yüzeyler ve özelikleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde, $4-$boyutlu Öklid uzayında çarpanlara ayrılabilir yüzeyler tanımlanmıştır. Çarpanlara ayrılabilir yüzeylerin düz, yarıumbilik ve minimal olma durumları incelenmiştir. Buna ek olarak, bu yüzeylerin Wintgen ideal yüzeyine karşılık gelme şartı verilmiştir. Ayrıca bir yüzeyin eğrilik elipsi kavramı ele alınmış, çarpanlara ayrılabilir yüzeylerin eğrilik elipsi için sınıflandırmalar yapılmıştır. Bu bölümün son kısmında çarpanlara ayrılabilir yüzeylerin Ganchev-Milousheva değişmezleri ele alınmıştır.

Dördüncü bölümde, $4-$boyutlu Minkowski uzayında çarpanlara ayrılabilir yüzeyler tanımlanmıştır. Spacelike ve timelike çarpanlara ayrılabilir yüzeylerin düz ve minimal olma koşulları incelenmiştir. Özel olarak, eliptik tipteki Aminov yüzeyinin $\mathrm{IE}_1^4$ uzayında sınıflandırmaları yapılmıştır.

Beşinci bölümde elde edilen sonuçlar ve daha sonraki çalışmalar için öneriler verilmiştir.

# 1. TEMEL KAVRAMLAR

## 1.1. Öklid Uzayı ve Riemann Manifoldu

Bu kısımda bilinen önemli temel kavramlar ve literatürde var olan, ileriki kısımlarda yardımcı olacak bazı önermeler verilmiştir.

Tanım 1.1.1: A boştan farklı bir küme ve V, bir vektör uzayı olsun. $P,Q \in A$ noktaları için;

$$\begin{aligned} &\phi : A \times A \to V \\ &(P,Q) \to \vec{PQ} \in V \end{aligned} \tag{1.1}$$

dönüşümü tanımlansın. (1.1) dönüşümü

1) $P,Q,R \in A$ için $\vec{PR} = \vec{PQ} + \vec{QR}$ dir.

2) Her $P \in A$ ve her $\alpha \in V$ için $\vec{PQ} = \alpha$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ vardır,

şartlarını sağlıyorsa A kümesine V ile birleştirilmiş afin uzay denir [29, 30].

Her vektör uzayı kendisi ile birleştirilmiş afin uzaydır.

Tanım 1.1.2: A, V vektör uzayı ile birleştirilmiş afin uzay olsun. V üzerinde;

$$\begin{aligned} &\langle , \rangle : V \times V \to IR \\ &(x,y) \to \langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad x = (x_1, x_2, ..., x_n),\ y = (y_1, y_2, ..., y_n) \end{aligned} \tag{1.2}$$

ile tanımlı $\langle , \rangle$ dönüşümü, Öklid iç çarpımıdır. Eşitlik (1.2) deki iç çarpım yardımıyla A kümesinde uzaklık, açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir. Bu durumda, A uzayına n-boyutlu Öklid uzayı denir. $IE^n$ ile temsil edilir [29, 30].

Tanım 1.1.3: M boştan farklı bir küme olmak üzere

1) M kümesinde alınan iki nokta için bu noktaları içeren ayrık iki açık küme bulunabilir (Hausdorff uzayı),

2) M kümesinin açık kümeleri ile n-boyutlu Öklid uzayının açık kümeleri arasında homeomorfizimler var,

3) M kümesi sonlu sayıda açık küme ile örtülebilir,

ise, M kümesine topolojik manifold denir [30].

Tanım 1.1.4: M bir topolojik $n-$manifold olsun. M üzerinde $C^k$ sınıfından bir diferensiyellenebilir yapı tanımlanabilirse M manifolduna $C^k$ sınıfından diferensiyellenebilir manifold denir [30].

Tanım 1.1.5: M, $C^\infty$ sınıfından (diferansiyellenebilir) bir manifold olsun., M üzerinde diferansiyellenebilir vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M kümesinden reel sayılar kümesine tanımlı diferansiyellenebilir fonksiyonların uzayı $C^\infty(M, IR)$ olmak üzere, M üzerinde;

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M, IR) \tag{1.3}$$

metriği tanımlı ise M manifolduna bir Riemann Manifoldu denir. (1.3) de g, metrik tensör (veya Riemann metriği) dir [18].

Tanım 1.1.6: M, $C^\infty$ sınıfından bir manifold olmak üzere;

$$\begin{aligned} &\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M); \\ &(X_1, X_2) \to \nabla(X_1, X_2) = \nabla_{X_1} X_2 \end{aligned} \tag{1.4}$$

verilsin. (1.4) dönüşümü, $\forall$ f, g $\in C^\infty(M, IR)$ ve $\forall$ $X_1, X_2, X_3 \in \chi(M)$ için;

i) $\nabla_{X_1}(X_2 + X_3) = \nabla_{X_1} X_2 + \nabla_{X_1} X_3$

ii) $\nabla_{f X_1 + g X_2} X_3 = f \nabla_{X_1} X_3 + g \nabla_{X_2} X_3$

iii) $\nabla_{x_1}(f X_2) = f \nabla_{x_1} X_2 + X_1(f) X_2$

lineerlik şartları sağlanırsa, $\nabla$ dönüşümü M üzerinde bir afin koneksiyon adını alır [30]. Burada $\nabla_{X_i}$ operatörü, $X_i$ $(i = 1,2,3)$ vektör alanına bağlı kovaryant türevdir.

Tanım 1.1.7: M bir Riemann manifoldu ve $\nabla$, M manifoldu üzerinde bir afin koneksiyon olsun. Bu durumda $\forall$ $X_1, X_2 \in \chi(M)$ için, $\nabla$ dönüşümü

i) $\nabla_{X_1} X_2 - \nabla_{X_2} X_1 = [X_1, X_2]$ (sıfır torsiyon)

ii) $X_1\langle X_2, X_3\rangle = \langle \nabla_{X_1} X_2, X_3\rangle + \langle X_2, \nabla_{X_1} X_3\rangle$ (koneksiyonun metrikle bağdaşması)

özelliklerini sağlıyorsa, $\nabla$ ya M nin Levi-Civita koneksiyonu ( veya sıfır torsiyonlu Riemann koneksiyonu) denir [18, 30].

Tanım 1.1.8: $M_1$ ve $M_2$ sırasıyla n ve $(n+d)-$boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar olmak üzere $f : M_1 \to M_2$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Her $p \in M$ için;

$$df_p : T_P(M_1) \to T_{f(p)}(M_2) \tag{1.5}$$

dönüşümü birebir ise f dönüşümüne bir imersiyon (daldırma) denir. Ayrıca, $f : M_1 \to f(M_1) \subset M_2$ dönüşümü homeomorfizm ise f dönüşümüne bir gömme (imbedding) denir. Eğer $M_1 \subseteq M_2$ ve $f : M_1 \to M_2$ bir gömme ise $M_1$ manifolduna $M_2$ manifoldunun $n-$boyutlu bir gömülen (immersed) altmanifoldu adı verilir.

Ayrıca (1.5) dönüşümü birebir (f imersiyon) olsun. $\forall\ X_1, X_2 \in T_pM$ için;

$$\langle df_p(X_1), df_p(X_2)\rangle_{f(p)} = \langle X_1, X_2\rangle_p \tag{1.6}$$

koşulu sağlanıyorsa f ye bir izometrik daldırma denir [18].

Tanım 1.1.9: $M_1 \subseteq M_2$ bir altmanifold ve $\tilde{\nabla}$ da $M_2$ de kovaryant türev olsun. Bu durumda her $X_1, X_2 \in \chi(M_1)$ ve her $p \in M_1$ noktası için $(\tilde{\nabla}_{X_1} X_2)_p$ iyi tanımlıdır.

Bununla birlikte $(\tilde{\nabla}_{X_1} X_2)_p \in T_pM_1$ ve $h_p(X_1, X_2) \in T_p{}^{\perp}M_1$ olmak üzere;

$$(\tilde{\nabla}_{X_1} X_2)_p = (\nabla_{X_1} X_2)_p + h_p(X_1, X_2) \tag{1.7}$$

şeklinde Gauss denklemi elde edilir. Burada h, $M_1$ manifoldunun ikinci temel formudur [18].

Önerme 1.1.10: $f : M_1 \to M_2$ bir izometrik daldırma ve $g_1$ ve $g_2$ de sırasıyla $M_1$ ve $M_2$ üzerinde tanımlı metrikler olsun. Bu durumda $h(X_1, X_2)$, $M_1$ üzerinde bir

normal vektör alanı olup simetrik ve 2-lineerdir. $\nabla$ da $M_1$ üzerinde indirgenmiş metrik $g_1 = f^*(g_2)$ in bir Riemann koneksiyonudur [18].

Tanım 1.1.11: $M_1 \subseteq M_2$ bir altmanifold olmak üzere $M_1$ manifolduna dik bir birim normal vektör alanı $\eta$ olsun. Böylece $\tilde{\nabla}_X \eta$ nın tanjant kısmı $-A_\eta(X)$ ve dik kısmı $D_X(\eta)$ olmak üzere;

$$\tilde{\nabla}_X \eta = -A\eta X + D_X \eta \tag{1.8}$$

biçiminde Weingarten denklemi tanımlanır. Burada $A_\eta$ operatörüne şekil operatörü, D koneksiyonuna $M_1$ manifoldunun normal demetindeki (normal) koneksiyonu denir [18].

Önerme 1.1.12:

i) $A_\eta(X)$, $\eta$ ve $X$ üstünde 2-lineerdir.

ii) $M_1$ alt manifoldunun her bir $\eta$ normal vektörü ve $X_1, X_2$ teğet vektörleri için $g_1(A_\eta(X_1), X_2) = g_2(h(X_1, X_2), \eta)$ dır [18].

Tanım 1.1.13: $M_1 \subseteq M_2$, bir altmanifold olsun. Bu durumda $M_2$ nin eğrilik tensörü $\tilde{R}$ olmak üzere $\forall X_1, X_2, X_3 \in \chi(M_2)$ için;

$$\tilde{R}(X_1, X_2)X_3 = \tilde{\nabla}_{X_1}\tilde{\nabla}_{X_2}X_3 - \tilde{\nabla}_{X_2}\tilde{\nabla}_{X_1}X_3 - \tilde{\nabla}_{[X_1,X_2]}X_3 \tag{1.9}$$

biçiminde tanımlanır. Ayrıca $M_1$ alt manifoldunun eğrilik tensörü R için;

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X_1, X_2; X_3, X_4) &= R(X_1, X_2; X_3, X_4) + \langle h(X_1, X_3), h(X_2, X_4)\rangle \\ &- \langle h(X_1, X_4), h(X_2, X_3)\rangle\end{aligned} \tag{1.10}$$

dir. Denklem (1.10) Gauss denklemi olarak bilinir. Ayrıca Eşitlik (1.9) daki $\tilde{R}(X_1, X_2)X_3$ ün normal bileşeni;

$$(\tilde{R}(X_1, X_2)X_3)^\perp = (\overline{\nabla}_{X_1} h)(X_2, X_3) - (\overline{\nabla}_{X_2} h(X_1, X_3)) \tag{1.11}$$

denklemi ile verilir. Denklem (1.11) Codazzi denklemi olarak adlandırılır [18].

Ayrıca $M_1$ alt manifoldunun normal vektör alanları $\eta$ ve $\xi$ olmak üzere $M_1$ manifoldunun normal demeti üzerindeki eğrilik tensörü $R^{\perp}$ ise;

$$R^{\perp}(X_1, X_2; \eta, \xi) = \tilde{R}(X_1, X_2; \eta, \xi) + \langle [A_\eta, A_\xi](X_1), X_2 \rangle \tag{1.12}$$

şeklinde Ricci denklemi tanımlanır. Denklem (1.12) de [ , ] Lie parantez operatörü olup;

$$\left[A_\eta, A_\xi\right] = A_\eta A_\xi - A_\xi A_\eta \tag{1.13}$$

eşitliği sağlanır [18].

Eğer

$\forall\ X_1, X_2, X_3 \in \chi(M_1)$ için;

$$R^{\perp}(X_1, X_2) = D_{X_1} D_{X_2} - D_{X_2} D_{X_1} - D_{[X_1, X_2]} = 0 \tag{1.14}$$

oluyorsa Eşitlik (1.14) ü sağlayan $M_1$ alt manifolduna düz normal koneksiyonludur denir [18].

### 1.2. Öklid Uzayında Yüzey Kavramı

Bu kısımda Öklid uzayınlarındaki yüzey kavramı ve buna bağlı tanım ve teoremler ele alınmıştır.

Tanım 1.2.1: I, IR de bir açık bir aralık ve $\alpha : I \subseteq IR \to IE^n$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olmak üzere $\forall s \in I$ için $\alpha'(s) \neq 0$ koşulu sağlanıyorsa $\alpha$ dönüşümüne Öklid uzayında bir regüler eğri denir [39].

Tanım 1.2.2: $S \subset IE^n$ olsun. $X : U \subset IE^2 \to S$, türevlenebilir dönüşümü $IE^n$ uzayında bir koordinat yaması oluşturur. $X(U)$ yaması regüler ise S kümesine $IE^n$ Öklid uzayında bir lokal yüzey denir [39].

$S \subset IE^n$, $X(u, v)$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. S yüzeyinin p noktasındaki teğet uzayı $T_pS$ nin bir bazı, $\{X_u, X_v\}$ dir. Bu durumda S yüzeyinin birinci temel formu;

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \tag{1.15}$$

ile tanımlanır. Eşitlik (1.15) de birinci temel formun katsayıları;

$$E = \langle X_u, X_u \rangle, \quad F = \langle X_u, X_v \rangle \ , \ G = \langle X_v, X_v \rangle \tag{1.16}$$

ile hesaplanır. X(u,v) yaması ile verilen S yüzeyinin regüler olması için gerek yeter koşul $W^2 = EG - F^2 > 0$ olmasıdır.

S nin p noktasındaki normal uzayı $T_p^{\perp}S$ nin ortonormal bir bazı $\{N_1,...,N_{n-2}\}$, olmak üzere $\forall p \in S$ için;

$$T_p IE^n = T_p S \oplus T_p^{\perp} S \tag{1.17}$$

dir.

$\tilde{\nabla}$ ve $\nabla$ sırasıyla S ve $IE^n$ in Levi-Civita koneksiyonları olmak üzere, $\forall X_1, X_2 \in T_p S$ ve $\forall N_k \in T_p^{\perp} S$ için Eşitlik (1.7) de tanımlanan Gauss denklemi;

$$\tilde{\nabla}_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k X_k + \sum_{k=1}^{n-2} c_{ij}^k N_k \tag{1.18}$$

biçimine dönüşür. Eşitlik (1.7) de

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k X_k \tag{1.19}$$

ve

$$h(X_i, X_j) = \sum_{k=1}^{n-2} c_{ij}^k N_k \tag{1.20}$$

dir. Bununla birlikte Eşitlik (1.8) ile tanımlanan Weingarten denklemi;

$$\tilde{\nabla}_{X_i} N_k = -A_{N_k} X_i + D_{X_i} N_k ; \qquad 1 \le i \le 2 \, , \, 1 \le k \le n-2$$

için

$$\left\langle A_{N_k} X_i, h\left(X_i, X_j\right) \right\rangle = c_{ij}^k \tag{1.21}$$

dir. Denklem (1.18) de $\Gamma_{ij}^k$ ya Christofel sembolleri, Denklem (1.21) deki $c_{ij}^k$ ya ikinci temel form katsayıları adı verilir.

Tanım 1.2.3: $IE^n$ uzayında $X(u,v)$ yaması ile verilen S yüzeyi için 2. mertebeden kısmi türevler $X_{uu} = \tilde{\nabla}_{X_u} X_u$ , $X_{uv} = \tilde{\nabla}_{X_u} X_v$, $X_{vv} = \tilde{\nabla}_{X_v} X_v$ olmak üzere S yüzeyinin ikinci temel form katsayıları;

$$\begin{aligned} c_{11}^k &= \langle X_{uu}, N_k \rangle, \\ c_{12}^k &= \langle X_{uv}, N_k \rangle, \quad 1 \le k \le n-2 \\ c_{22}^k &= \langle X_{vv}, N_k \rangle \end{aligned} \tag{1.22}$$

ile hesaplanır [35].

Önerme 1.2.4: $S \subset IE^n$ n-boyutlu Öklid uzayında bir lokal yüzey olmak üzere;

$$\begin{aligned} h(X_u, X_u) &= c_{11}^1 N_1 + c_{11}^2 N_2 + ... + c_{11}^{n-2} N_{n-2} \\ h(X_u, X_v) &= c_{12}^1 N_1 + c_{12}^2 N_2 + ... + c_{12}^{n-2} N_{n-2} \\ h(X_v, X_v) &= c_{22}^1 N_1 + c_{22}^2 N_2 + ... + c_{22}^{n-2} N_{n-2} \end{aligned} \tag{1.23}$$

dir [14].

Önerme 1.2.5: $S : X(u,v)$ yüzeyi için $T_p(S)$ tanjant uzayının ortonormal baz vektörleri $X_1, X_2$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{X_u}{\|X_u\|} \\ X_2 &= \frac{\sqrt{E}}{W}\left( X_v - \langle X_u, X_v \rangle \frac{X_u}{\|X_u\|^2} \right) \end{aligned} \tag{1.24}$$

şeklinde hesaplanır. Eşitlik (1.24) de $W = \sqrt{EG - F^2}$ dır [14].

Önerme 1.2.6: S yüzeyinin $\{X_1, X_2\}$ ortonormal bazı için ikinci temel form dönüşümü;

$$\begin{aligned} h(X_1, X_1) &= \frac{1}{E} h(X_u, X_u) \\ h(X_1, X_2) &= \frac{1}{W} h(X_u, X_v) - \frac{F}{WE} h(X_u, X_u) \end{aligned} \tag{1.25}$$

$$h(X_2,X_2)=\frac{E}{W^2}h(X_v,X_v)-\frac{2F}{W^2}h(X_u,X_v)+\frac{F^2}{W^2E}h(X_u,X_u)$$

ile verilir [14].

Tanım 1.2.7: $S\subset IE^n$ yüzeyi $X(u,v)$ regüler yaması ile verilsin. $\chi(S)$ nin ortonormal bir bazı $\{X_1,X_2\}$ olmak üzere S nin ikinci temel form katsayıları;

$$h_{ij}^k=\langle h(X_i,X_j),N_k\rangle \tag{1.26}$$

ile tanımlanır.

Önerme 1.2.8: $S\subset IE^n$ yüzeyi $X(u,v)$ regüler yaması ile verilsin. Her $\{X_1,X_2\}\in\chi(S)$ ve $\{N_1,N_2,..,N_{n-2}\}\in\chi^{\perp}(S)$ ortonormal bazları için ikinci temel form katsayıları $(1\le k\le n-2)$

$$\begin{aligned}
h_{11}^k&=\langle h(X_1,X_1),N_k\rangle=\frac{c_{11}^k}{E},\\
h_{12}^k&=\langle h(X_1,X_2),N_k\rangle=\frac{1}{W}\left(c_{12}^k-\frac{F}{E}c_{11}^k\right),\\
h_{22}^k&=\langle h(X_2,X_2),N_k\rangle=\frac{1}{W^2}\left(Ec_{22}^k-2Fc_{12}^k+\frac{F^2}{E}c_{11}^k\right)
\end{aligned} \tag{1.27}$$

dir.

Sonuç 1.2.9: $X(u,v)$ regüler yaması ile verilen $S\subset IE^n$ yüzeyinin $N_k$ normal vektörüne göre şekil operatörü matrisi;

$$A_{N_k}=\begin{pmatrix}\frac{c_{11}^k}{E} & \frac{1}{W}\left(c_{12}^k-\frac{F}{E}c_{11}^k\right)\\ \frac{1}{W}\left(c_{12}^k-\frac{F}{E}c_{11}^k\right) & \frac{1}{W^2}\left(Ec_{22}^k-2Fc_{12}^k+\frac{F^2}{E}c_{11}^k\right)\end{pmatrix} \tag{1.28}$$

dir.

İspat: $X_1$ ve $X_2$ ortonormal teğet vektörler omak üzere (1.8) ve (1.23) eşitliklerinden;

$$\begin{aligned} A_{N_k} X_1 &= \langle A_{N_k} X_1, X_1 \rangle X_1 + \langle A_{N_k} X_1, X_2 \rangle X_2, \\ &= \langle h(X_1, X_1), N_k \rangle X_1 + \langle h(X_1, X_2), N_k \rangle X_2, \\ &= h_{11}^k X_1 + h_{12}^k X_2 \end{aligned} \tag{1.29}$$

dir.

Ayrıca,

$$A_{N_k} X_2 = h_{12}^k X_1 + h_{22}^k X_2 \tag{1.30}$$

dir. Dolayısıyla, Eşitlik (1.29) ve (1.30) dan $A_{N_k}$ şekil operatörü matrisi;

$$A_{N_k} = \begin{pmatrix} h_{11}^k & h_{12}^k \\ h_{12}^k & h_{22}^k \end{pmatrix} \tag{1.31}$$

olduğundan Eşitlik (1.19) ve (1.27) yardımıyla istenilen sonuç elde edilir.

Tanım 1.2.10: S yüzeyinin Gauss eğriliği;

$$K = \frac{1}{W^2} \sum_{k=1}^{n-2} (c_{11}^k c_{22}^k - (c_{12}^k)^2) \tag{1.32}$$

şeklinde tanımlanır [36].

Tanım 1.2.11: S yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü;

$$\vec{H} = \frac{1}{2W^2} \sum_{k=1}^{n-2} c_{11}^k G + c_{22}^k E - 2c_{12}^k F) N_k \tag{1.33}$$

dir. Ortalama eğrilik vektörünün normu $H = \left\| \vec{H} \right\|$ , S yüzeyinin ortalama eğriliği olarak adlandırılır [35].

Tanım 1.2.12: $K = 0$ ise S yüzeyine düz (flat) yüzey, $\vec{H} = 0$ ise S yüzeyine minimal yüzey denir [18].

Tanım 1.2.13: S yüzeyinin k yıncı ortalama eğrililiği

$$H_k = \frac{1}{W^2} (c_{11}^k G + c_{22}^k E - 2c_{12}^k F) \quad , \quad 1 \le k \le n-2 \tag{1.34}$$

dir. Eğer S yüzeyinin k yıncı ortalama eğriliği sıfırsa, S yüzeyine $H_k$-minimaldir denir [18].

Tanım 1.2.14: $IE^4$ uzayında S yüzeyi $X(u,v)$ yaması ile verilsin. $T_p(S)$ uzayının ortonormal bazı $\{X_1, X_2\}$, $T_p^{\perp}(S)$ nin ortonormal bazı $\{N_1, N_2\}$ olmak üzere S yüzeyinin normal eğriliği;

$$K_N = \langle R^{\perp}(X_1, X_2)N_2, N_1\rangle \tag{1.35}$$

şeklinde tanımlıdır [26]. Eğer normal eğrilik sıfır ise S yüzeyine düz normal koneksiyonludur denir.

Eşitlik (1.35) deki $K_N$ birinci ve ikinci temel form katsayıları yardımıyla aşağıdaki teorem yardımıyla verilir.

Teorem 1.2.15: $IE^4$ Öklid uzayında bir yüzeyin normal eğrilik fonksiyonu;

$$K_N = \frac{E\left(c_{12}^1 c_{22}^2 - c_{12}^2 c_{22}^1\right) - F\left(c_{11}^1 c_{22}^2 - c_{11}^2 c_{22}^1\right) + G\left(c_{11}^1 c_{12}^2 - c_{11}^2 c_{12}^1\right)}{W^3} \tag{1.36}$$

dir [3].

### 1.3. Minkowski Uzayında Yüzey Kavramı

Minkowski uzayı, Einstein'in özel görelilik kuramının en uygun şekilde gösterimlendiği matematiksel yapıdır. Lorentz iç çarpımı yardımıyla tanımlanır. İç çarpım her zaman pozitif tanımlı olmadığından eğriler ve yüzeyler çeşitlilik gösterir. Spacelike vektörler, eğriler ve yüzeyler Öklid uzayındaki yapılara benzerlik gösterir.

Tanım 1.3.1: $IE_t^n$, n-boyutlu yarı-Öklid uzayında iki vektör $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ve $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ olmak üzere t indeksli Lorentz metriği;

$$g(X,Y) = -\sum_{i=1}^{t} x_i y_i + \sum_{j=t+1}^{n} x_j y_j \tag{1.37}$$

ile tanımlıdır. Bu metrik yardımıyla tanımlı yarı Öklid uzayı, $IE_t^n$ ile gösterilir [20].

$IE_t^n$ yarı-Öklidyen uzayı $t = 1$ için özel olarak Minkowski uzayı olarak adlandırılır.

Bu durumda Eşitlik (1.37) daki Lorentz-metriği;

$$g(X,Y) = -x_1 y_1 + \sum_{j=2}^{n} x_j y_j \tag{1.38}$$

biçiminde ifade edilir.

Tanım 1.3.2: $IE_1^n$ n-boyutlu Minkowski uzayında $X, Y \in E_1^n$ için;

$$g(X,Y) = 0 \tag{1.39}$$

ise $X$ ve $Y$ vektörleri Lorentz anlamında diktir (ortogonaldir) denir [43].

Tanım 1.3.3: $X, Y \in IE_1^n$ Eşitlik (1.39) i sağlayan, sıfır olmayan Lorentz vektörler olsun. $X$ timelike vektör ise $Y$ spaceliketır [43].

Tanım 1.3.4: $X = (x_1,...,x_n) \in IE_1^n$ için $X$ vektörünün normu;

$$|X| = \sqrt{|g(X,X)|} \tag{1.40}$$

olarak tanımlıdır [43].

Tanım 1.3.5: X sıfırdan farklı ve $X \in IE_1^n$ olsun. Bu takdirde

i) $|X| > 0$ dır.

ii) $|X| = 0 \Leftrightarrow X$ bir null vektördür. (1.41)

iii) $X$ bir timelike vektör $\Rightarrow |X|^2 = -g(X,X)$ dir.

iv) X bir spacelike vektör $\Rightarrow |X|^2 = g(X,X)$ dir [43].

Tanım 1.3.6: $S \subset IE_1^n$ olsun. $X : U \subset IE_1^2 \to S$, türevlenebilir dönüşümü $IE_1^n$ uzayında bir koordinat yaması oluşturur. $S : X(U)$ yamasına $IE_1^n$ Minkowski uzayında bir yüzey denir.

$S : X(u,v)$, Minkowski uzayında bir yüzey olsun. S yüzeyinin birinci temel form dönüşümü;

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \tag{1.42}$$

dir.

Eşitlik (1.42) deki birinci temel formun katsayıları;

$$E = g(X_u, X_u), \quad F = g(X_u, X_v), \; G = g(X_v, X_v) \tag{1.43}$$

şeklinde Eşitlik (1.38) deki Lorentz metriği yardımıyla hesaplanır.

$EG - F^2 > 0$ ise S yüzeyi spaceliketır.

$EG - F^2 < 0$ ise S yüzeyi timeliketır.

$EG - F^2 = 0$ ise S yüzeyi null (ligtlike) tır [22, 23, 24].

$\forall p \in S$ için $T_p IE^n = T_p S \oplus T_p^{\perp} S$ olsun. Burada $T_p^{\perp} S$, $IE_1^n$ uzayında tanjant uzayın ortogonal tümleyenidir.

S yüzeyine tanjant ve normal diferensiyellenebilir vektör alanlarının uzayı, $\chi(S)$ ve $\chi^{\perp}(S)$, S ve $IE_1^n$ nin koneksiyonları ise sırasıyla $\nabla$ ve $\tilde{\nabla}$ olsun. $X_1, X_2 \in \chi(S)$ ve $N_k \in \chi_p^{\perp}(S)$ için;

$$h : \chi(S) \times \chi(S) \to \chi^{\perp}(S)$$
$$h(X_1, X_2) = \tilde{\nabla}_{X_1} X_2 - \nabla_{X_1} X_2 \tag{1.44}$$

şeklindeki dönüşüm S yüzeyinin ikinci temel form dönüşümüdür. S nin şekil operatörü;

$$A : \chi(S) x \chi^{\perp}(S) \to \chi(S);$$
$$A_{N_k} X_i = -(\nabla_{X_i} N_j)^T, \quad X_i \in \chi(S) \tag{1.45}$$

olarak tanımlıdır [22,24].

Tanım 1.3.7: $S \subset IE_1^n$ yüzeyi $X(u, v)$ yaması ile verilsin. $X(u, v)$ yamasının ikinci mertebeden kısmi türevleri $X_{uu}, X_{uv}, X_{vv}$ olmak üzere S yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları;

$$
\begin{aligned}
c_{11}^{k} &= g(X_{uu}, N_k), \\
c_{12}^{k} &= g(X_{uv}, N_k), \quad 1 \le k \le n-2 \\
c_{22}^{k} &= g(X_{vv}, N_k)
\end{aligned}
\tag{1.46}
$$

şeklinde tanımlanır [22,24].

Teorem 1.3.8: $IE_1^3$, Minkowski uzayındaki bir S yüzeyinin Gauss eğriliği;

$$
K = -\frac{c_{11}^{1}c_{22}^{1} - \left(c_{12}^{1}\right)^2}{\left|EG - F^2\right|} \tag{1.47}
$$

dir [25].

Teorem 1.3.9: $IE_1^3$, Minkowski uzayındaki bir S yüzeyinin ortalama eğriliği;

$$
H = \frac{c_{11}^{1}g - 2c_{12}^{1}f + c_{22}^{1}e}{2\left|EG - F^2\right|}, \tag{1.48}
$$

dir [25].

$IE_1^4$, 4-boyutlu Minkowski uzayında bir spacelike yüzey için $EG - F^2 > 0$ dır. $N_1$ timelike, $N_2$ spacelike olacak şekilde normal demetinin bir $\{N_1, N_2\}$ ortonormal bazını ele alalım. Bu durumda aşağıdaki tanımlar verilebilir:

$X(u,v)$ yaması ile verilen $S \subset IE_1^4$ spacelike yüzeyinin Eşitlik (1.32) deki ikinci temel form dönüşümü $X_u$ ve $X_v$ teğet vektörler olmak üzere;

$$
\begin{aligned}
h(X_u, X_u) &= -c_{11}^{1}X_u + c_{11}^{2}X_v, \\
h(X_u, X_v) &= -c_{12}^{1}X_u + c_{12}^{2}X_v, \\
h(X_v, X_v) &= -c_{22}^{1}X_u + c_{22}^{2}X_v
\end{aligned}
\tag{1.49}
$$

şeklinde yazılır [22].

$S : X(u,v)$ spacelike yüzeyi için $T_p(S)$ tanjant uzayının ortonormal baz vektörleri $X_1, X_2$ olmak üzere;

$$X_1 = \frac{X_u}{\sqrt{E}},$$
$$X_2 = \frac{W}{\sqrt{E}}\left(X_v - \frac{F}{E}X_u\right) \tag{1.50}$$

şeklinde hesaplanır.

İkinci temel form dönüşümü ortonormal teğet vektörler yardımıyla;

$$h(X_1, X_1) = -h_{11}^1 X_1 + h_{11}^2 X_2,$$
$$h(X_1, X_2) = -h_{12}^1 X_u + h_{12}^2 X_v, \tag{1.51}$$
$$h(X_2, X_2) = -h_{22}^1 X_1 + h_{22}^2 X_2$$

ile verilir. Eşitlik (1.51) deki, $h_{ij}^k$ lar $S \subset IE_1^4$ spacelike yüzeyinin şekil operatörü matrislerinin elemanlarıdır. Dolayısıyla, Eşitlik (1.49) ve (1.50) den $S$ yüzeyinin şekil operatörü matrisleri;

$$A_{N_k} = \begin{pmatrix} \frac{c_{11}^k}{E} & \frac{1}{W}\left(c_{12}^k - \frac{F}{E}c_{11}^k\right) \\ \frac{1}{W}\left(c_{12}^k - \frac{F}{E}c_{11}^k\right) & \frac{1}{W^2}\left(Ec_{22}^k - 2Fc_{12}^k + \frac{F^2}{E}c_{11}^k\right) \end{pmatrix}$$

dır [22].

Tanım 1.3.10: $IE_1^4$ Minkowski uzayında şekil operatörü matrisleri $A_{N_1}$ ve $A_{N_2}$ olan bir spacelike yüzeyin Gauss eğriliği;

$$K = \frac{1}{W^2}\left(-\det(A_{N_1}) + \det(A_{N_2})\right) \tag{1.52}$$

dir [22].

Dolayısıyla Eşitlik (1.52) ikinci temel formun katsayıları yardımıyla;

$$K = \frac{-\left(c_{11}^1 c_{22}^1 - (c_{12}^1)^2\right) + \left(c_{11}^2 c_{22}^2 - (c_{12}^2)^2\right)}{W^2} \tag{1.53}$$

olarak elde edilir [31].

Tanım 1.3.11: $IE_1^4$ Minkowski uzayında ikinci temel formun katsayıları $c_{11}^k, c_{12}^k, c_{22}^k$ olan bir spacelike yüzeyin k-yıncı ortalama eğriliği;

$$H_k = \frac{1}{2W^2}(c_{11}^k G + c_{22}^k E - 2c_{12}^k F) \tag{1.54}$$

dir.

Belirlenen baza göre spacelike yüzeyin ortalama eğrilik vektörü;

$$\vec{H} = \frac{1}{2W^2}\left(-(c_{11}^1 G + c_{22}^1 E - 2c_{12}^1 F)N_1 + (c_{11}^2 G + c_{22}^2 E - 2c_{12}^2 F)N_2\right) \tag{1.55}$$

ile tanımlıdır [31].

$IE_1^4$ uzayında $S: X(u, v)$ yaması ile verilen bir timelike yüzeyin keyfi bir p noktasındaki teğet uzayı $T_pS = \text{span}\{X_u, X_v\}$ dir. S timelike yüzey olduğundan $E = g(X_u, X_u) < 0$ ve $G = g(X_v, X_v) > 0$ ve $W = \sqrt{F^2 - EG}$ dir. Dolayısıyla $g(N_1, N_1) = 1,\ g(N_2, N_2) = 1$ dir. O halde;

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{X_u} X_u &= X_{uu} = -\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + c_{11}^1 N_1 + c_{11}^2 N_2; \\
\tilde{\nabla}_{X_u} X_v &= X_{uv} = -\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + c_{12}^1 N_1 + c_{12}^2 N_2; \\
\tilde{\nabla}_{X_v} X_v &= X_{vv} = -\Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + c_{22}^1 N_1 + c_{22}^2 N_2;
\end{aligned} \tag{1.56}$$

türev formüllerini elde edilir. Eşitlik (1.56) da $\Gamma_{ij}^k$ lar Christoffel sembolleridir [24].

Ayrıca ikinci temel form dönüşümü;

$$\begin{aligned}
h(X_u, X_u) &= c_{11}^1 N_1 + c_{11}^2 N_2; \\
h(X_u, X_v) &= c_{12}^1 N_1 + c_{12}^2 N_2; \\
h(X_v, X_v) &= c_{22}^1 N_1 + c_{22}^2 N_2;
\end{aligned} \tag{1.57}$$

dir [24].

Önerme 1.3.12: $IE_1^4$ Minkowski uzayında $S: X(u, v)$ timelike yüzeyinin Gram-Schmidt ortonormalleştirme metodu ile timelike $X_u$ ve spacelike $X_v$ vektörleri için ortonormal teğet vektörler;

$$X_1 = \frac{X_u}{\sqrt{|E|}},$$
$$X_2 = \frac{\sqrt{|E|}}{W}\left(X_v - \frac{F}{E}X_u\right), \tag{1.58}$$

dir. Buradan ortonormal teğet vektörler yardımıyla ikinci temel form dönüşümü;

$$\begin{aligned} h(X_1, X_1) &= h_{11}^1 N_1 + h_{11}^2 N_2, \\ h(X_1, X_2) &= h_{12}^1 N_1 + h_{12}^2 N_2, \\ h(X_2, X_2) &= h_{22}^1 N_1 + h_{22}^2 N_2, \end{aligned} \tag{1.59}$$

olup burada $h_{ij}^k$ fonksiyonları Eşitlik (1.57) ve (1.58) yardımıyla,

$$h_{11}^k = -\frac{c_{11}^k}{E} \ , \ h_{12}^k = \frac{Ec_{12}^k - Fc_{11}^k}{EW}, h_{22}^k = -\frac{E^2c_{22}^k - 2EFc_{12}^k + F^2c_{11}^k}{EW^2}, i = 1,2 \tag{1.60}$$

dir.

Tanım 1.3.13: $IE_1^4$ Minkowski uzayında bir timelike yüzeyin Gauss eğriliği;

$$K = \sum_{k=1}^{2} h_{11}^k h_{22}^k - (h_{12}^k)^2 \tag{1.61}$$

dir [13]. Ayrıca $IE_1^4$ de bir timelike yüzeyin ortalama eğriliği;

$$\vec{H} = \frac{1}{2}\left(-h(X_1, X_1) + h(X_2, X_2)\right) \tag{1.62}$$

olarak verilir [24].

# 2. 3 – BOYUTLU UZAYLARDA ÇARPANLARA AYRILABİLİR YÜZEYLER

## 2.1 $IE^3$ Uzayındaki Çarpanlara Ayrılabilir Yüzeyler

Tanım 2.1.1:

$$X : U \subset IE^2 \to IE^3$$
$$X(u,v) = (u,v,z(u,v)) \tag{2.1}$$

$3-$boyutlu uzaylarda bir Monge yaması olarak adlandırılır [28].

Tanım 2.1.2: S, 3 boyutlu Öklid uzayında bir yüzey olsun. u, v, z $IE^3$ uzayındaki kartezyen koordinatlar, f, g, $C^\infty$ sınıfından fonksiyonlar olmak üzere;

$$z = f(u)g(v) \tag{2.2}$$

olarak tanımlı S yüzeyi, çarpanlara ayrılabilir yüzey olarak adlandırılır. Dolayısıyla S yüzeyinin bir parametrizasyonu Eşitlik (2.1) deki gibi Monge yaması olarak,

$$X(u,v) = (u,v,f(u)g(v)) \tag{2.3}$$

şeklinde verilebilir [34, 49].

S, $3-$boyutlu Öklid uzayında (2.3) parametrizasyonu ile verilen bir çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. S yüzeyinin teğet uzayı;

$$\begin{aligned} X_u &= (1,0,f'(u)g(v)), \\ X_v &= (0,1,f(u)\,g'(v)) \end{aligned} \tag{2.4}$$

vektör alanları tarafından gerilir. Dolayısıyla Eşitlik (1.16) ve (2.4) den yüzeyin birinci temel formunun katsayıları;

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = 1 + (f'g)^2, \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = ff' + gg', \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = 1 + (fg')^2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

şeklindedir. Buradaki iç çarpım $IE^3$ Öklid uzayındaki standart iç çarpımdır. Bundan sonraki kullanımlar için $W = \|X_u \times X_v\|$ olsun.

$X(u, v)$ nin ikinci mertebeden kısmi türevleri;

$$\begin{aligned} X_{uu} &= (0,0, f''(u)g(v)), \\ X_{uv} &= (0,0, f'(u)g'(v)), \\ X_{vv} &= (0,0, f(u)g''(v)) \end{aligned} \tag{2.6}$$

dir. Ayrıca S yüzeyinin birim normal vektör alanı;

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{(-f'g, -fg', 1)}{\sqrt{1 + (f'g)^2 + (fg')^2}} \tag{2.7}$$

olarak bulunur. Eşitlikler (2.6) ve (2.7) yardımıyla ikinci temel formunun katsayıları;

$$\begin{aligned} c_{11}^1 &= \frac{f''(u)g(v)}{W} \\ c_{12}^1 &= \frac{f'(u)g'(v)}{W} \\ c_{22}^1 &= \frac{f(u)g''(v)}{W} \end{aligned} \tag{2.8}$$

dır. Eşitlik (2.8) ve (1.28) yardımıyla S yüzeyinin şekil operatörü matrisi;

$$A_N = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} f''g & \frac{Ef'g' - Ff''g}{W} \\ \frac{Ef'g' - Ff''g}{W} & \frac{E^2fg'' - 2EFf'g' + F^2f''g}{W^2} \end{bmatrix},$$

olarak bulunur.

Teorem 2.1.3: S, $IE^3$ Öklid uzayında (2.3) parametrizasyonu ile verilen bir çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. S yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri;

$$K = \frac{ff''gg'' - (f'g')^2}{(1 + (f'g)^2 + (fg')^2)^2} \tag{2.9}$$

ve

$$H = \frac{f''g(1+(fg')^2 + fg''(1+(fg')^2 - 2fg(f'g')^2}{2(1+(f'g)^2 + (fg')^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.10}$$

dir [12].

Teorem 2.1.4: S, $IE^3$ Öklid uzayında (2.3) parametrizasyonu ile verilen çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. S yüzeyi düz (flat) ise aşağıdaki yüzeylerden biri ya da onların bir parçasıdır:

(1) $X(u, v) = (u, v, c_1 g(v))$

(2) $X(u, v) = (u, v, c_1 f(u))$

(3) $X(u, v) = (u, v, \exp(c_1 u + c_2 v + c_3))$

(4) $X(u, v) = (u, v, (c_1 u + c_2)^{\frac{1}{1-k_1}} (c_3 u + c_4)^{\frac{k_1}{k_1 - 1}})$

Burada $k_1$ reel sabit, $c_i\ (i = 1,2,3,4)$ integral sabitleridir [12].

Teorem 2.1.5: S, $IE^3$ Öklid uzayında (2.3) parametrizasyonu ile verilen çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. S yüzeyinin ortalama eğriliği sıfır ise aşağıdaki yüzeylerden biri ya da onların bir parçasıdır:

(1) $X(u, v) = (u, v, c_1 u + c_2)$,

(2) $X(u, v) = (u, v, c_1 v + c_2)$,

(3) $X(u, v) = (u, v, c_1 u \tan(c_2 v))$,

(4) $X(u, v) = (u, v, c_1 v \tan(c_2 u))$,

(5) $X(u, v) = (u, v, f(u)g(v))$ .

Burada f(u) ve g(v)

$$u = \int \frac{df(u)}{\sqrt{2a\ln f(u) + c_1}}, \quad v = \int \frac{dg(v)}{\sqrt{c_2 g^4(v) - \frac{b}{2}}}$$

ya da

$$u = \int \frac{df(u)}{\sqrt{c_1 f^4(u) - \frac{a}{2}}} \ , \ v = \int \frac{dg(v)}{\sqrt{2b\ln g(v) + c_2}}$$

ya da

$$u = \int \frac{df(u)}{\sqrt{c_1 f^{2(1+k)}(u) - c_2}} \ , \ v = \int \frac{dg(v)}{\sqrt{c_3 g^{2(1-k)}(v) - c_4}}$$

eşitliklerini sağlar. Ayrıca $a,b,k,c_1,c_2,c_3,c_4$ reel sabitler, $a^2 + b^2 \neq 0$ , $k \neq \pm 1$dir [49].

## 2.2. $IE_1^3$ Uzayındaki Çarpanlara Ayrılabilir Yüzeyler

Tanım 2.2.1: S, $3-$boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey olsun. u, v, z $IE_1^3$ uzayındaki kartezyen koordinatlar, f, g $C^\infty$ sınıfından fonksiyonlar olmak üzere;

$$z=f(u)g(v) \tag{2.11}$$

olarak tanımlı S yüzeyi, çarpanlara ayrılabilir yüzey olarak adlandırılır. Dolayısıyla S yüzeyinin bir parametrizasyonu Monge yaması olarak,

$$X(u,v) = (u,v,f(u)g(v)) \tag{2.12}$$

olarak verilebilir [37].

S yüzeyinin teğet uzayı;

$$\begin{aligned} X_u &= (1,0,f'(u)g(v)), \\ X_v &= (0,1,f(u)g'(v)) \end{aligned} \tag{2.13}$$

vektör alanları tarafından gerilir. Dolayısıyla Eşitlik (2.13) ve ( 1.43) den yüzeyin birinci temel formunun katsayıları;

$$\begin{aligned} E &= g(X_u, X_u) = -1 + (f'g)^2, \\ F &= g(X_u, X_v) = ff'gg', \\ G &= g(X_v, X_v) = 1 + (fg')^2 \end{aligned} \tag{2.14}$$

şeklindedir.

Bundan sonraki kullanımlar için $W = \|X_u \times X_v\|$ olarak tanımlayalım.

$X(u, v)$ nin ikinci mertebeden kısmi türevleri;

$$\begin{aligned} X_{uu} &= (0,0,f''(u)g(v)) \\ X_{uv} &= (0,0,f'(u)g'(v)) \\ X_{vv} &= (0,0,f(u)g''(v)) \end{aligned} \tag{2.15}$$

dir. Ayrıca S yüzeyinin birim normal vektör alanı;

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{(f'g, -fg', 1)}{\sqrt{|1-(f'g)^2+(fg')^2|}} \tag{2.16}$$

olarak bulunur. Eşitlik (1.46), (2.15) ve (2.16) yardımıyla ikinci temel formunun katsayıları aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} c_{11}^1 &= \frac{f''(u)g(v)}{W}, \\ c_{12}^1 &= \frac{f'(u)g'(v)}{W}, \\ c_{22}^1 &= \frac{f(u)g''(v)}{W}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Böylece, Eşitlik (1.47), (1.48) ve (2.17) kullanılarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 2.2.2: S, $IE_1^3$ Minkowski uzayında bir null-olmayan çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. S yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri;

$$K = -\frac{ff''gg'' - (f'g')^2}{W^4} \tag{2.18}$$

ve

$$H = \frac{f''g(1+f^2g'^2) + fg''(-1+f'^2g'^2) - 2f'^2fg'^2g}{2W^3} \tag{2.19}$$

şeklindedir [12].

Teorem 2.2.3: S, $IE_1^3$ Minkowski uzayında (2.12) parametrizasyonu ile verilen null olmayan çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. S yüzeyinin düz olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki yüzeylerden biri ya da onların bir parçası olmasıdır:

(1) $X(u, v) = (u, v, c_1 g(v))$,

(2) $X(u, v) = (u, v, c_1 f(u))$,

(3) $X(u, v) = (u, v, \exp(c_1 u + c_2 v + c_3))$,

(4) $X(u, v) = (u, v, (c_1 u + c_2)^{\frac{1}{1-k_1}} (c_3 u + c_4)^{\frac{k_1}{k_1 - 1}})$.

Burada $k_1$ reel sabit, $c_i$ $(i = 1,2,3,4)$ integral sabitleridir [37].

Teorem 2.2.4: S, $IE_1^3$ Minkowski uzayında (2.12) parametrizasyonu ile verilen çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. Eğer S yüzeyi minimal ise aşağıdaki yüzeylerden birisi ya da onların bir parçasıdır:

(1) $X(u, v) = (u, v, c_1 u + c_2)$,

(2) $X(u, v) = (u, v, c_1 v + c_2)$,

(3) $X(u, v) = (u, v, (c_1 u + c_2)\coth(c_2 v + c_3))$,

(4) $X(u, v) = (u, v, (c_1 v + c_2)\tanh(c_2 u + c_3))$,

(5) $X(u, v) = (u, v, c_1 \exp(c_2 (u + v)))$,

(6) $X(u, v) = \left(u, v, \sqrt[k]{\frac{c_1 v + c_2}{c_3 u + c_4}}\right)$,

(7) $X(u, v) = (u, v, f(u)g(v))$.

Burada f(u) ve g(v)

$$u = \int \frac{df(u)}{\sqrt{2a\ln f(u) + c_1}}, \quad v = \int \frac{dg(v)}{\sqrt{c_2 g^4(v) - \frac{b}{2}}}$$

ya da

$$u = \int \frac{df(u)}{\sqrt{c_1 f^4(u) - \frac{a}{2}}}, \quad v = \int \frac{dg(v)}{\sqrt{2b\ln g(v) + c_2}}$$

ya da

$$u = \int \frac{df(u)}{\sqrt{c_1 f^{2(1+k)}(u) - c_2}} \ , \ v = \int \frac{dg(v)}{\sqrt{c_3 g^{2(1-k)}(v) - c_4}}$$

eşitliklerini sağlar. Ayrıca a,b,k, $c_1, c_2, c_3, c_4$ reel sabitler ve $a^2 + b^2 \neq 0$ , $k \neq \pm 1$ dir [49].

## 3. $IE^4$ ÖKLİD UZAYINDA ÇARPANLARA AYRILABİLİR YÜZEYLER

$IE^4$, $4-$boyutlu Öklid uzayında, birçok yüzey tipi tanımlanmıştır. Bu yüzeylerden bazıları genelleştirilmiş dönel yüzeyler, Benz yüzeyleri, tensör çarpım yüzeyleri, küresel çarpım yüzeyleri, Vranceanu yüzeyleri, süperkonformal regle yüzeyler ve Chen yüzeyleridir [4, 5, 6, 7, 8, 15, 32]. Bu yüzeylerle ilgili birçok sonuç elde edilerek, bu yüzeylerin karakterizasyonları verilmiştir. Bu bölümde $IE^4$, $4-$boyutlu Öklid uzayında Monge yaması yardımıyla verilebilen çarpanlara ayrılabilir yüzeyler tanımlanmıştır ve bu yüzeyler için sonuçlar verilerek karakterizasyonları elde edilmiştir.

Tanım 3.1: $X : U \subset IE^2 \to IE^4$

$$X(u,v) = (u, v, z(u,v), w(u,v)) \tag{3.1}$$

4-boyutlu uzayda bir Monge yaması olarak adlandırılır [1].

Tanım 3.2: S, 4 boyutlu Öklid uzayında bir yüzey olsun. u, v, z, w $IE^4$ deki kartezyen koordinatlar, $f_1, f_2, g_1, g_2$ $C^\infty$ sınıfından fonksiyonlar olmak üzere;

$$z = f_1(u)g_1(v),\ w = f_2(u)g_2(v) \tag{3.2}$$

olarak tanımlı S yüzeyi, çarpanlara ayrılabilir yüzey olarak adlandırılır. Dolayısıyla S yüzeyinin bir parametrizasyonu Eşitlik (3.1) deki gibi Monge yaması olarak,

$$X(u,v) = (u, v, f_1(u)g_1(v), f_2(u)g_2(v)) \tag{3.3}$$

şeklinde verilir [17].

S yüzeyinin teğet uzayı;

$$\begin{aligned} X_u &= (1,0, f_1'(u)g_1(v), f_2'(u)g_2(v)), \\ X_v &= (0,1, f_1(u)g_1'(v), f_2(u)g_2'(v)), \end{aligned} \tag{3.4}$$

vektörleri tarafından gerilir. Buna göre Eşitlik (3.4) yardımıyla yüzeyin birinci temel formunun katsayıları;

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = 1 + (f_1'(u)g_1(v))^2 + (f_2'(u)g_2(v))^2$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = f_1'(u)f_1(u)g_1'(v)g_1(v) + f_2'(u)f_2(u)g_2'(v)g_2(v) \tag{3.5}$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = 1 + (f_1(u)g_1'(v))^2 + (f_2(u)g_2'(v))^2$$

şeklinde elde edilir. Burada $\langle\ ,\ \rangle$, $IE^4$ uzayında Öklid iç çarpımıdır. Eşitlik (3.5) yardımıyla,

$$EG - F^2 = 1 + f_1^2(g_1')^2 + f_2^2(g_2')^2 + (f_1')^2 g_1^2 + (f_2')^2 g_2^2$$
$$+ (f_1' f_2 g_1 g_2' - f_1 f_2' g_1' g_2)^2 > 0$$

olduğundan S yüzeyi bir regüler yüzeydir. $X(u,v)$ nin ikinci mertebeden kısmi türevleri;

$$X_{uu} = (0,0,f_1''(u)g_1(v), f_2''(u)g_2(v)),$$

$$X_{uv} = (0,0,f_1'(u)g_1'(v), f_2'(u)g_2'(v)), \tag{3.6}$$

$$X_{vv} = (0,0,f_1(u)g_1''(v), f_2(u)g_2''(v)),$$

şeklinde bulunur.

Şimdi S yüzeyinin normal uzayını geren ortonormal vektör alanlarını elde edelim. Bunun için;

$$\langle X_u, N_1 \rangle = 0,$$

$$\langle X_v, N_1 \rangle = 0,$$

$$\langle X_u, N_2 \rangle = 0, \tag{3.7}$$

$$\langle X_v, N_2 \rangle = 0,$$

$$\langle N_1, N_2 \rangle = 0,$$

eşitliklerini sağlayan $N_1$ ve $N_2$ ortonormal vektör alanlarını hesaplayalım.

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}}(a_1, a_2, a_3, a_4) \tag{3.8}$$

olmak üzere Eşitlik (3.4) ve (3.8) yardımıyla,

$$\begin{aligned}&\left\langle (1,0,f_1'(u)g(v),f_2'(u)g_2(v)),(a_1,a_2,a_3,a_4)\right\rangle = 0,\\&\left\langle (0,1,f_1(u)g_1'(v),f_2(u)g_2'(v)),(a_1,a_2,a_3,a_4)\right\rangle = 0,\end{aligned} \tag{3.9}$$

bulunur ve (3.9) dan,

$$\begin{aligned}&a_1 + f_1'(u)g_1(v)a_3 + f_2'(u)g_2(v)a_4 = 0,\\&a_2 + f_1(u)g_1'(v)a_3 + f_2(u)g_2'(v)a_4 = 0,\end{aligned} \tag{3.10}$$

elde edilir. Eşitlik (3.10) da $a_3 = 1$, $a_4 = 0$ olarak alınırsa $a_1 = -f_1'(u)g_1(v)$, $a_2 = -f_1(u)g_1'(v)$ bulunur. Böylece;

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{1+(f_1'(u)g_1(v))^2 + (f_1(u)g_1'(v))^2}}\left(-f_1'(u)g_1(v),-f_1(u)g_1'(v),1,0\right)$$

elde edilir.

Benzer şekilde;

$$N_2 = \frac{1}{\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2}}(b_1,b_2,b_3,b_4) \tag{3.11}$$

olmak üzere Eşitlik (3.4) ve (3.11) den,

$$\begin{aligned}&b_1 + f_1'(u)g_1(v)b_3 + f_2'(u)g_2(v)b_4 = 0,\\&b_2 + f_1(u)g_1'(v)b_3 + f_2(u)g_2'(v)b_4 = 0,\\&-f_1'(u)g_1(v)b_1 - f_1(u)g_1'(v)b_2 + b_3 = 0,\end{aligned} \tag{3.12}$$

denklem sistemi elde edilir.

Denklem sistemi (3.12) nin çözümünde $b_4 = 1+(f_1'(u))^2(g_1(v))^2 + (f_1(u))^2(g_1'(v))^2$ yazarak;

$$\tilde{E} = 1+(f_1'(u))^2(g_1(v))^2 + (f_1(u))^2(g_1'(v))^2\ ,$$

$$\tilde{F} = f_1'(u)f_2'(u)g_1(v)g_2(v) + f_1(u)f_2(u)g_1'(v)g_2'(v)\ , \tag{3.13}$$

$$\tilde{G} = 1 + (f_2'(u))^2(g_2(v))^2 + (f_2(u))^2(g_2'(v))^2,$$

fonksiyonlarını ele alabiliriz. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2 &= 1 + f_1^{\,2}(g_1')^2 + f_2^{\,2}(g_2')^2 + (f_1')^2 g_1^{\,2} + (f_2')^2 g_2^{\,2} \\ &\quad + (f_1' f_2 g_1 g_2' - f_1 f_2' g_1' g_2)^2 = W^2 = EG - F^2\end{aligned}$$

dir. Eşitlik (3.12) ve (3.13) yardımıyla,

$$N_2 = \frac{1}{\sqrt{\tilde{E}}W}(\tilde{F}f_1'(u)g_1(v) - \tilde{E}f_2'(u)g_2(v), \tilde{F}f_1(u)g_1'(u) - \tilde{E}f_2(u)g_2'(v), -\tilde{F}, \tilde{E})$$

bulunur. Böylece (3.3) parametrizasyonu ile verilen S çarpanlara ayrılabilir yüzeyinin normal uzayının ortonormal bir çatısı;

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{\tilde{E}}(-f_1'(u)g_1(v), -f_1(u)g_1'(v), 1, 0) \\ N_2 &= \frac{1}{\sqrt{\tilde{E}}W}(\tilde{F}f_1'(u)g_1(v) - \tilde{E}f_2'(u)g_2(v), \tilde{F}f_1(u)g_1'(u) - \tilde{E}f_2(u)g_2'(v), -\tilde{F}, \tilde{E}) \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

şeklinde elde edilir.

Eşitlik (1.22), (3.6) ve (3.14) yardımıyla, S yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları;

$$\left.\begin{aligned} c_{11}^1 &= \frac{f_1'' g_1}{\sqrt{\tilde{E}}}\ , \quad c_{22}^1 = \frac{f_1 g_1''}{\sqrt{\tilde{E}}} \\ c_{12}^1 &= \frac{f_1' g_1'}{\sqrt{\tilde{E}}}, \\ c_{12}^2 &= \frac{f_2' g_2' \tilde{E} - f_1' g_1' \tilde{F}}{\sqrt{\tilde{E}}W} \\ c_{11}^2 &= \frac{f_2'' g_2 \tilde{E} - f_1'' g_1 \tilde{F}}{\sqrt{\tilde{E}}W} \\ c_{22}^2 &= \frac{f_2 g_2'' \tilde{E} - f_1 g_1'' \tilde{F}}{\sqrt{\tilde{E}}W} \end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

şeklinde bulunur.

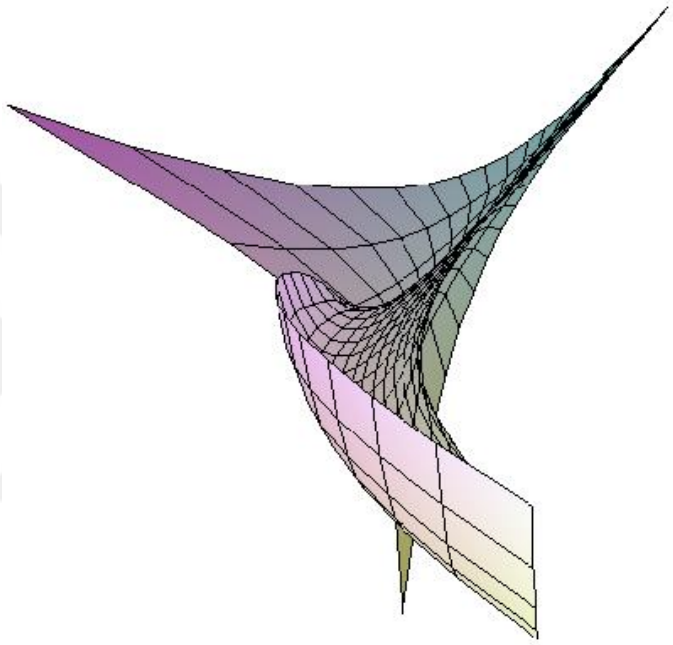
Örnek 3.3:

$$X(u, v) = (u, v, \exp u \ln v, \exp v \ln u) \tag{3.16}$$

parametrizasyonu ile verilen yüzey $IE^4$ uzayında bir çarpanlara ayrılabilir yüzeydir.

plot3d([x + y, z,w], x = a..b, y = c..d), $a, b, c, d \in IR$

maple çizim komutu ile $IE^4$ uzayında çarpanlara ayrılabilir yüzeyin 3-boyutlu Öklid uzayına izdüşümü Şekil 3.1. de verilmiştir.



Şekil 3.1. Eşitlik (3.16) ile verilen yüzeyin izdüşümü

Bu yüzeyin Münih olimpiyat stadı üzerinde bir uygulaması mevcuttur. (Şekil 3.2)



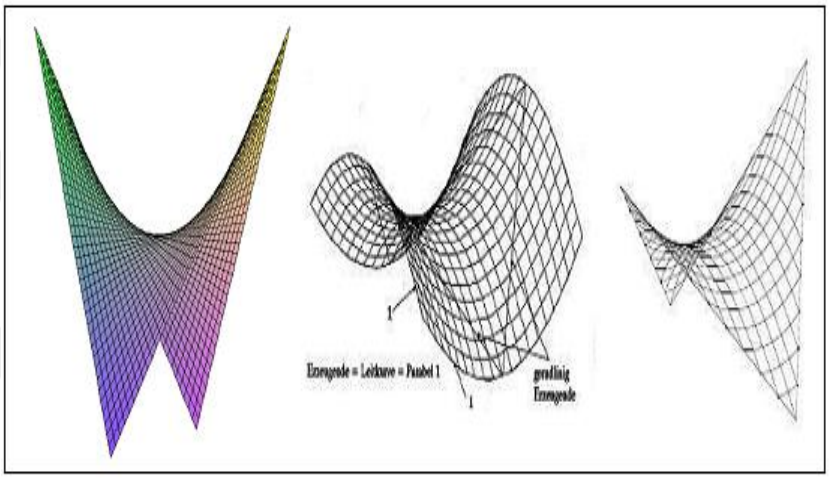
Şekil 3.2. Münih Olimpiyat Stadyumu, Münih, Almanya

Örnek 3.4: (Kuadratik Üçgensel Bezier Yüzeyi)

$$X(u,v) = (u, v, 2uv + 5u - 3v, -uv - 2u + 4v) \tag{3.17}$$

parametrizasyonu ile verilen yüzey bir kuadratik üçgensel Bezier yüzeyi ve çarpanlara ayrılabilir yüzeydir.

Eşitlik (3.17) yardımıyla verilen çarpanlara ayrılabilir Bezier yüzeyinin $IE^3$ Öklid uzayındaki izdüşümü Şekil 3.3. de verilmiştir. Ayrıca bu yüzey hiperbolik paraboloid (semer) yüzeyinin bir kesiti olup bir uygulaması Heydar Aliyev merkezinde (Azerbaycan'da) mevcuttur (Şekil 3.4) [42].



Şekil 3.3. Çarpanlara Ayrılabilir Bezier yüzeyi ve semer yüzeyi

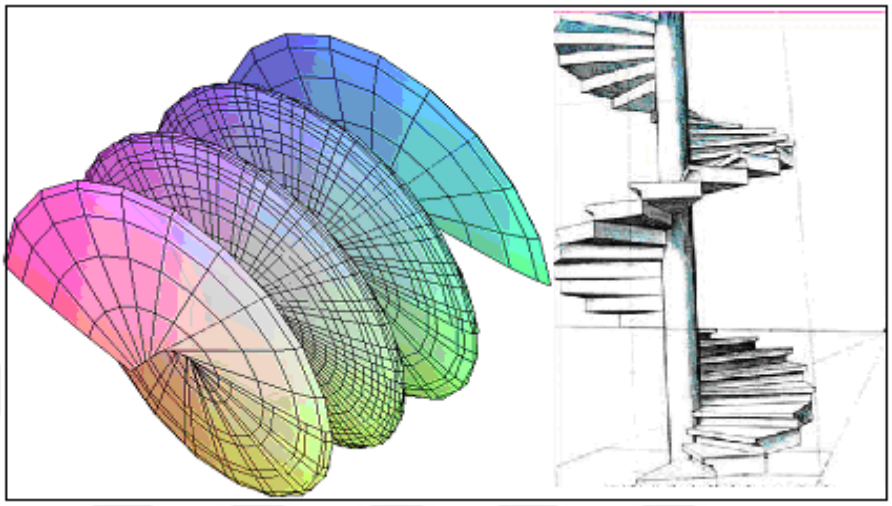


Şekil 3.4. Heydar Aliyev Merkezi, Bakü, Azerbaycan

Örnek 3.5:

$$X(u, v) = (u, v, \cos u \cos v, \cos u \sin v) \tag{3.18}$$

parametrizasyonu ile verilen yüzey $IE^4$ uzayında bir çarpanlara ayrılabilir yüzeydir. $3-$boyutlu Öklid uzayındaki izdüşümü Şekil 3.5 de verilmiştir.

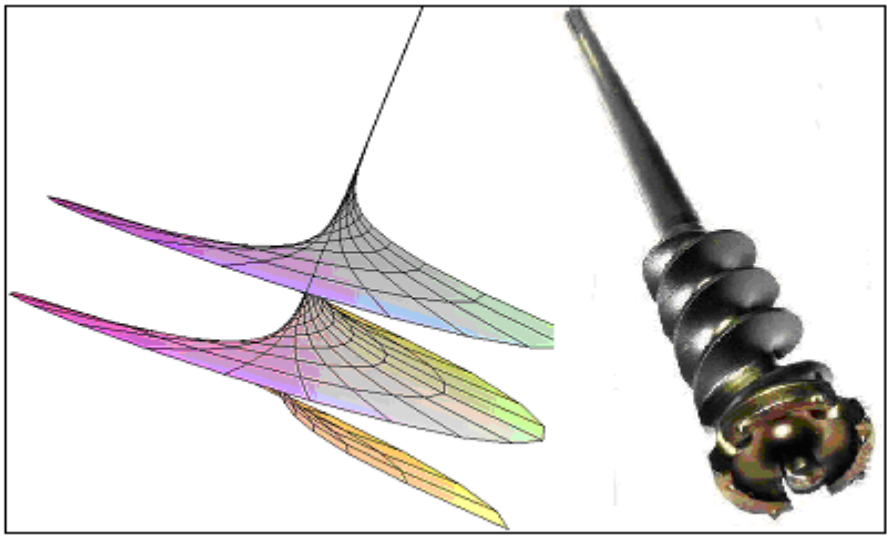


Şekil 3.5. Eşitlik (3.18) ile verilen yüzeyin izdüşümü ve modellemesi

Örnek 3.6:

$$X(u, v) = (u, v, \exp u \cos v, \exp u \sin v) \tag{3.19}$$

parametrizasyonu ile verilen yüzey $IE^4$ uzayında bir çarpanlara ayrılabilir yüzeydir (Şekil 3.6).



Şekil 3.6. Eşitlik (3.19) ile verilen yüzeyin izdüşümü ve modellemesi

### 3.1. $IE^4$ Uzayında Çarpanlara Ayrılabilir Düz Yüzeyler

Bu bölümde $4-$boyutlu Öklid uzayında çarpanlara ayrılabilir yüzeylerin Gauss eğriliği elde edilerek $IE^4$ Öklid uzayında çarpanlara ayrılabilir düz yüzeyler karakterize edilmiştir.

Teorem 3.7: S, $IE^4$ Öklid uzayında (3.3) parametrizasyonu ile verilen bir çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. S yüzeyinin Gauss eğriliği;

$$K=\frac{1}{W^4}\begin{bmatrix}\left(f_1''f_1g_1''g_1-\left(f_1'g_1'\right)^2\right)\tilde{G}\\-\left(f_1''f_2g_1g_2''+f_1f_2''g_1''g_2-2f_1'f_2'g_1'g_2'\right)\tilde{F}\\+\left(f_2''f_2g_2''g_2-\left(f_2'g_2'\right)^2\right)\tilde{E}\end{bmatrix} \tag{3.20}$$

dir.

İspat: S, $IE^4$ Öklid uzayında (3.3) parametrizasyonu ile verilen bir çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. Eşitlik (1.32) yardımıyla S yüzeyinin Gauss eğriliği;

$$K=\frac{1}{W^2}\left(\left[c_{11}^1c_{22}^1-(c_{12}^1)^2\right]+\left[c_{11}^2c_{22}^2-(c_{12}^2)^2\right]\right) \tag{3.21}$$

dır. Buradan Eşitlik (3.15) , Eşitlik (3.21) de yazılarak,

$$K=\frac{1}{W^2}\begin{bmatrix}\left(\frac{f_1''g_1}{\sqrt{\tilde{E}}}\frac{f_1g_1''}{\sqrt{\tilde{E}}}-\left(\frac{f_1'g_1'}{\sqrt{\tilde{E}}}\right)^2\right)\\+\frac{\tilde{E}f_2''g_2-\tilde{F}f_1''g_1}{\sqrt{\tilde{E}}W}\frac{\tilde{E}f_2g_2''-\tilde{F}f_1g_1''}{\sqrt{\tilde{E}}W}-\left(\frac{f_2'g_2'\tilde{E}-f_1'g_1'\tilde{F}}{\sqrt{\tilde{E}}W}\right)^2\end{bmatrix}$$

bulunur. Düzenleme yapılırsa Eşitlik (3.20) elde edilir.

Sonuç 3.8: S, $IE^4$ Öklid uzayında (3.3) parametrizasyonu ile verilen bir çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. S yüzeyinin düz olması için gerek ve yeter koşul;

$$\left(f_1'' f_1 g_1'' g_1 - \left(f_1' g_1'\right)^2\right)\tilde{G}$$
$$-\left(f_1'' f_2 g_1 g_2'' + f_1 f_2'' g_1'' g_2 - 2f_1' f_2' g_1' g_2'\right)\tilde{F} \qquad (3.22)$$
$$+\left(f_2'' f_2 g_2'' g_2 - \left(f_2' g_2'\right)^2\right)\tilde{E} = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Sonuç 3.9: S, $IE^4$ Öklid uzayında (3.3) parametrizasyonu ile verilen bir çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. S yüzeyi düz ise, aşağıdaki yüzeylerden biri ya da onların bir parçasıdır:

(1) $X(u,v) = (u, v, c_1 g_1(v), c_2 g_2(v))$,

(2) $X(u,v) = (u, v, c_1 f_1(u), c_2 f_2(u))$,

(3) $X(u,v) = (u, v, c_1 g_1(v), c_2 f_2(u))$,

(4) $X(u,v) = (u, v, c_1, \exp(c_2 u + c_3 v + c_4))$,

(5) $X(u,v) = (u, v, c_1, (c_2 u + c_3)^{\frac{1}{1-k_1}} (c_4 v + c_5)^{\frac{k_1}{k_1 - 1}})$, (3.23)

(6) $X(u,v) = (u, v, \exp(c_1 u + c_2 v + c_3), \exp(c_4 u + c_4 \frac{c_1}{c_2} v + c_5))$,

(7) $X(u,v) = (u, v, \exp(c_1 u + c_2 v + c_3), \exp(c_4 u - c_4 \frac{c_2}{c_1} v + c_5))$,

(8) $X(u,v) = (u, v, r(u)\cos v, r(u)\sin v)$: $u = \pm\int \sqrt{\frac{c_1 r(u) - 1}{r(u) + 1}}\, dr(u)$.

Burada $c_i$, $(i = 1,..,5)$ ve $k_1 \neq 1$ reel sabitlerdir.

İspat: S, $IE^4$ Öklid uzayında (3.3) parametrizasyonu ile verilen bir çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. (3.20) eşitliğinde $f_1'(u) = 0, f_2'(u) = 0$ veya $g_1'(v) = 0, g_2'(v) = 0$ veya $f_1'(u) = 0, g_2'(v) = 0$ alınırsa $K = 0$ olur. Böylece (1), (2), (3) yüzeyleri elde edilir. Eğer $f_1'(u) = 0, g_1'(v) = 0$ ise;

$$f_2'' f_2 g_2'' g_2 - f_2'^2 g_2'^2 = 0 \tag{3.24}$$

bulunur. Eşitlik (3.24) de $p(u) = \frac{df_2}{du}$ ve $q(v) = \frac{dg_2}{dv}$ alalım. $p(u) \neq 0$ ve $q(v) \neq 0$ ise;

$$f_2(u)p(u)\frac{dp}{df_2} g_2(v)q(v)\frac{dq}{dg_2} - (p(u)q(v))^2 = 0 \tag{3.25}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu eşitlik üzerinde u ve v parametrelerine bağlı fonksiyonları ayırarak,

$$\frac{f_2(u)\frac{dp}{df_2}}{p(u)} = \frac{q(v)}{g_2(v)\frac{dq}{dg_2}} = k_1 \tag{3.26}$$

bulunur. Burada $k_1$ bir reel sabittir.

(i) $k_1 = 1$ ise Eşitlik (3.26) dan;

$$\left.\begin{aligned} f_2(u) &= \exp(c_1 u + c_2) \\ g_2(v) &= \exp(c_3 v + c_4) \end{aligned}\right\} \tag{3.27}$$

(ii) $k_1 \neq 1$ ise,

$$\left.\begin{aligned} f_2(u) &= (c_1 u + c_2)^{\frac{1}{1-k_1}} \\ g_2(u) &= (c_3 v + c_4)^{\frac{k_1}{k_1 - 1}} \end{aligned}\right\} \tag{3.28}$$

bulunur. Dolayısıyla (4) ve (5) yüzeyleri elde edilir. Ayrıca Eşitlik (3.22) de,

$$\begin{aligned} f_1'' f_1 g_1'' g_1 - f_1'^2 g_1'^2 &= 0 \\ f_2'' f_2 g_2'' g_2 - f_2'^2 g_2'^2 &= 0 \end{aligned} \tag{3.29}$$

ile birlikte,

$$f_1'' f_2 g_1 g_2'' + f_1 f_2'' g_1'' g_2 - 2 f_1' f_2' g_1' g_2' = 0 \tag{3.30}$$

ya da

$$\tilde{F} = 0, \tag{3.31}$$

olduğunu düşünelim. Eşitlik (3.29), Eşitlik (3.24) e denktir dolayısıyla;

$$f_1(u) = \exp(c_1 u + c_2) \qquad f_2(u) = \exp(c_5 u + c_6)$$
$$g_1(v) = \exp(c_3 v + c_4) \qquad g_2(v) = \exp(c_7 v + c_8) \tag{3.32}$$

fonksiyonları elde edilir. Eşitlik (3.32) deki fonksiyonlar Eşitlik (3.30) da yerine yazılırsa (6) yüzeyi Eşitlik (3.31) de yerine yazılırsa (7) yüzeyi elde edilir. Son olarak $f_1(u) = f_2(u) = r(u)$, $g_1(v) = \cos v$, $g_2(v) = \sin v$ kabul edelim. Bu durumda $S: X(u,v)$ yüzeyi özel olarak $IE^4$ uzayında Aminov yüzeyine karşılık gelir. Bu fonksiyonlar Eşitlik (3.22) de yerine yazılırsa;

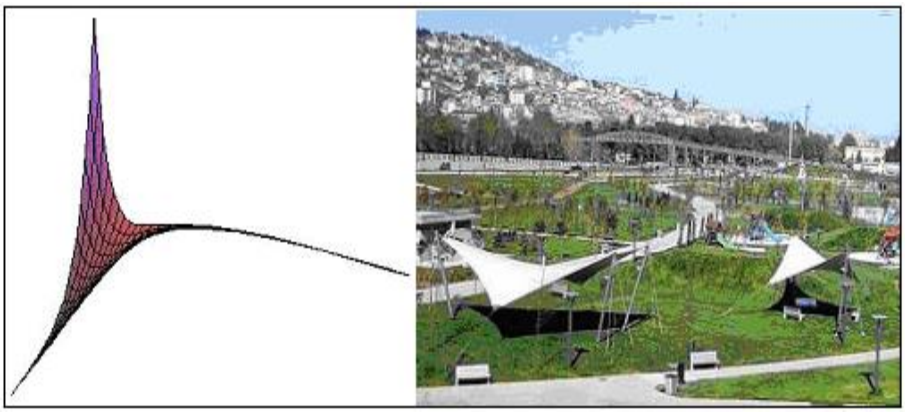
$$r(u)r''(u)(1+r^2(u)) + (r'(u))^2(1+(r'(u))^2) = 0 \tag{3.33}$$

diferensiyel denklemi bulunur. Denklem (3.33) ün çözümünden (8) yüzeyi elde edilir.

Örnek 3.10:

$$S: X(u,v) = (u, v, \exp(u+v), \exp(u-v)) \tag{3.34}$$

yüzeyi $4-$boyutlu Öklid uzayında bir düz yüzeydir. $3-$boyutlu uzaya izdüşümünün grafiği ve Sekapark (Kocaeli) mimarisi üzerindeki uygulaması Şekil 3.7. de verilmiştir.



Şekil 3.7. Eşitlik (3.34) ile verilen düz yüzeyin izdüşümü ve Sekapark

### 3.2. $IE^4$ Uzayında Çarpanlara Ayrılabilir Yarı Umbilik Yüzeyler

Bu bölümde $4-$boyutlu Öklid uzayında çarpanlara ayrılabilir yüzeylerin normal eğrilik fonksiyonu elde edilmiş ve $IE^4$ Öklid uzayında çarpanlara ayrılabilir yarı-umbilik yüzeyler için bir sonuç verilmiştir. Yüzey üzerinde normal eğrilik

fonksiyonunu sıfırlayan noktaya yarı-umbilik nokta denir. Tüm noktaları yarı-umbilik olan yüzeye yarı-umbilik yüzey adı verilir [27].

Teorem 3.11: S, $IE^4$ Öklid uzayında (3.3) parametrizasyonu ile verilen bir çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. S yüzeyinin normal eğrilik fonksiyonu;

$$K_N = \frac{1}{W^4}\begin{bmatrix} E\left(f_1' f_2 g_1' g_2'' - f_1 f_2' g_1'' g_2'\right) \\ -F\left(f_1'' f_2 g_1 g_2'' - f_1 f_2'' g_1'' g_2\right) \\ +G\left(f_1'' f_2' g_1 g_2' - f_1' f_2'' g_1' g_2\right) \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

dir. Burada E, F, G, S yüzeyinin birinci temel formun katsayıları olup Eşitlik (3.5) te verilmiştir.

İspat: Eşitlik (3.15) Eşitlik (1.36) da yerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 3.12: S, $IE^4$ Öklid uzayında (3.3) parametrizasyonu ile verilen bir çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. Eğer $f_1, f_2, g_1, g_2$ fonksiyonları lineer polinom fonksiyonları ise S yüzeyi çarpanlara ayrılabilir yarı umbilik yüzeydir.

İspat: Eşitlik (3.31) de $f_1, f_2, g_1, g_2$ fonksiyonları lineer polinomlar olarak seçilirse Eşitlik (3.35) den her $p \in S$ için $K_N(p) = 0$ dır. Dolayısıyla S bir yarı umbilik yüzeydir.

Önerme 3.13: S, $IE^4$ Öklid uzayında (3.3) parametrizasyonu ile verilen bir çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. Eğer,

$$f_2'(u) = f_1(u)$$
$$g_1'(v) = g_2(v) \tag{3.36}$$

ise S yüzeyinin Gauss eğriliği ile normal eğriliği çakışır.

İspat: Eşitlik (3.5) ve (3.7) de, $f_2'(u) = f_1(u)$ ve $f_2'(u) = f_1(u)$ alınırsa,

$E = \tilde{E}$, $F = \tilde{F}$, $G = \tilde{G}$

elde edilir. Dolayısıyla Eşitlik (3.20) ve (3.35) denk olup $K = K_N$ bulunur.

Örnek 3.14:

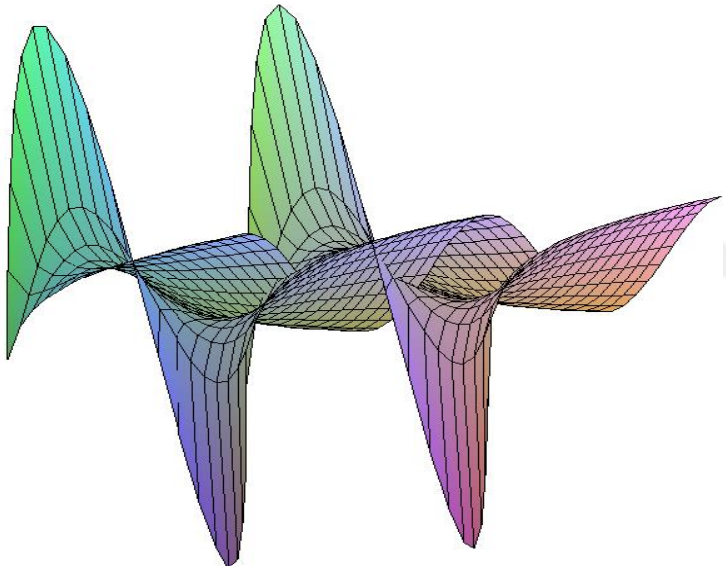
$$X : U \subset IE^2 \to IE^4 \qquad U = \{(u,v) \subset IE^2 : u \neq 0\} \tag{3.37}$$

$$X(u,v) = (u, v, \frac{1}{u}\sin v, \ln u \cos v)$$

parametrizasyonu ile verilen yüzeyin Gauss ve normal eğrilikleri eşittir.

plot3d([x + y, z,w], x = a..b, y = c..d) , $a, b, c, d \in IR$

maple çizim komutu ile (3.37) parametrizasyonu ile verilen yüzeyin 3-boyutlu uzaydaki izdüşümü Şekil 3.8 de verilmiştir.



Şekil 3.8. Eşitlik (3.37) ile verilen $K = K_N$ olan yüzey

### 3.3. $IE^4$ Uzayında Çarpanlara Ayrılabilir Minimal Yüzeyler

Bu bölümde 4 – boyutlu Öklid uzayında çarpanlara ayrılabilir yüzeylerin ortalama eğriliği elde edilerek $IE^4$ Öklid uzayında çarpanlara ayrılabilir minimal yüzeyler sınıflandırılmıştır.

Teorem 3.15: S, $IE^4$ Öklid uzayında (3.3) parametrizasyonu ile verilen bir çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. Buna göre S yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü;

$$\vec{H} = \frac{f_1'' g_1 G + f_1 g_1'' E - 2f_1' g_1' F}{2\sqrt{\tilde{E}} W^2} N_1 + \frac{\tilde{E}\left(f_2'' g_2 G + f_2 g_2'' E - 2f_2' g_2' F\right) - \tilde{F}\left(f_1'' g_1 G + f_1 g_1'' E - 2f_1' g_1' F\right)}{2\sqrt{\tilde{E}} W^3} N_2 \tag{3.38}$$

şeklindedir.

İspat: S, $IE^4$ Öklid uzayında (3.3) parametrizasyonu ile verilen bir çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. Eşitlik (1.33) yardımıyla, S yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü;

$$\vec{H} = \frac{1}{2W^2}\left[(c_{11}^1 G + c_{22}^1 E - 2c_{12}^1 F)N_1 + (c_{11}^2 G + c_{22}^2 E - 2c_{12}^2 F)N_2\right] \tag{3.39}$$

dir. Buradan Eşitlik (3.15), Eşitlik (3.39) de yerine yazılırsa,

$$\vec{H} = \frac{1}{2W^2}\left[\begin{array}{l}\left(\frac{f_1'' g_1}{\sqrt{\tilde{E}}} G + \frac{f_1 g_1''}{\sqrt{\tilde{E}}} E - \frac{2f_1' g_1'}{\sqrt{\tilde{E}}} F\right) N_1 + \\ \left(\frac{\tilde{E} f_2'' g_2 - \tilde{F} f_1'' g_1}{\sqrt{\tilde{E}} W} G + \frac{\tilde{E} f_2 g_2'' - \tilde{F} f_1 g_1''}{\sqrt{\tilde{E}} W} E - \frac{2\left(\tilde{E} f_2' g_2' - \tilde{F} f_1' g_1'\right)}{\sqrt{\tilde{E}} W} F\right) N_2\end{array}\right]$$

bulunur. Düzenleme yapılırsa istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 3.16: S, $IE^4$ Öklid uzayında (3.3) parametrizasyonu ile verilen bir çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. S yüzeyinin ortalama eğriliği;

$$\left\|\vec{H}\right\| = \frac{1}{2W^3}\left[\begin{array}{l}\tilde{G}\left(f_1'' g_1 G + f_1 g_1'' E - 2f_1' g_1' F\right)^2 \\ -2\tilde{F}\left(f_1'' g_1 G + f_1 g_1'' E - 2f_1' g_1' F\right)\left(f_2'' g_2 G + f_2 g_2'' E - 2f_2' g_2' F\right) \\ +\tilde{E}\left(f_2'' g_2 G + f_2 g_2'' E - 2f_2' g_2' F\right)^2\end{array}\right]^{\frac{1}{2}}$$

dir.

Teorem 3.17: S, $IE^4$ Öklid uzayında (3.3) parametrizasyonu ile verilen bir çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. S yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter koşul;

$$f_i'' g_i G + f_i g_i'' E - 2 f_i g_i F = 0, \quad i = 1,2 \tag{3.40}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat: S, $IE^4$ Öklid uzayında (3.3) parametrizasyonu ile verilen bir çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. S yüzeyi minimal ise ortalama eğrilik vektörü sıfırdır. Eşitlik (3.38) dan Eşitlik (3.40) elde edilir. Tersine Eşitlik (3.40) sağlanırsa S yüzeyi minimaldir.

Sonuç 3.18: S, $IE^4$ Öklid uzayında (3.3) parametrizasyonu ile verilen bir çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. Buna göre S yüzeyi minimal ise aşağıda verilen yüzeylerden biri ya da onların bir parçasıdır:

(1) $X(u,v) = (u, v, c_1 u + c_2, c_3 u + c_4)$,

(2) $X(u,v) = (u, v, c_1 v + c_2, c_3 v + c_4)$,

(3) $X(u,v) = (u, v, c_1 u + c_2, c_1 v + c_2)$,

(4) $X(u,v) = (u, v, c_1, c_2 u \tan(c_3 v))$,

(5) $X(u,v) = (u, v, c_1, c_2 v \tan(c_3 u))$,

(6) $X(u,v) = (u, v, r(u)\cos v, r(u)\sin v)$:

$$r(u) = \frac{1}{2c_1}\left( {c_1}^2 e^{\pm\frac{2(u+c_2)}{c_1}} + {c_1}^2 - 1 \right) e^{\pm\frac{(u+c_2)}{c_1}},$$

(7) $X(u,v) = (u, v, c_1 u \tan(c_2 v), c_1 u \tan(c_2 v))$,

(8) $X(u,v) = (u, v, c_1 v \tan(c_2 v), c_1 v \tan(c_2 u))$,

(9) $X(u,v) = (u, v, c_1, f_2(u) g_2(u))$,

(10) $X(u,v) = (u, v, f_1(u) g_1(u), f_1(u) g_1(u))$,

burada $c_i$, $i = 1,..,4$ reel sabitler olup $f_i(u), g_i(v)$ fonksiyonları

$$u = \int \frac{df_i(u)}{\sqrt{2a \ln f_i(u) + c_1}}, \quad u = \int \frac{df_i(u)}{\sqrt{c_1 {f_i}^4(u) - \frac{a}{2}}}, \quad u = \int \frac{df_i(u)}{\sqrt{c_1 {f_i}^{2(1+k)}(u) - c_2}},$$

$$v=\int \frac{dg_i(v)}{\sqrt{c_2 g_i{}^4(v)-\frac{b}{2}}}, \quad v=\int \frac{dg_i(v)}{\sqrt{2b\ln g_i(v)+c_2}}, v=\int \frac{dg_i(v)}{\sqrt{c_3 g_i{}^{2(1-k)}(v)-c_4}},$$

denklemlerini sağlar.

İspat: S, $IE^4$ Öklid uzayında (3.3) parametrizasyonu ile verilen bir çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. S yüzeyi minimal ise $H=0$ dır. Bu durumda Eşitlik (3.40) da birinci temel form katsayıları yerine yazılarak,

$$\begin{aligned} &f_1''g_1(1+f_1{}^2g_1'^2+f_2{}^2g_2'^2) \\ &+f_1g_1''(1+f_1'^2g_1{}^2+f_2'^2g_2{}^2)-2f_1'g_1'(f_1'f_1g_1'g_1+f_2'f_2g_2'g_2)=0 \end{aligned} \tag{3.41}$$

ve

$$\begin{aligned} &f_2''g_2(1+f_1{}^2g_1'^2+f_2{}^2g_2'^2) \\ &+f_2g_2''(1+f_1'^2g_1{}^2+f_2'^2g_2{}^2)-2f_2'g_2'(f_1'f_1g_1'g_1+f_2'f_2g_2'g_2)=0 \end{aligned} \tag{3.42}$$

eşitlikleri elde edilir. $f_1'(u)=0$ ve $f_2'(u)=0$ ise Eşitlik (3.41) ve Eşitlik (3.42) den $g_1''(v)=0$ , $g_2''(v)=0$ dır. $g_1'(v)=0$ ve $g_2'(v)=0$ ise $f_1''(u)=0$ , $f_2''(u)=0$ dır. $f_2'(u)=0$ ve $g_1'(v)=0$ ise $f_1''(u)=0$ , $g_2''(v)=0$ dır. Sırasıyla, (1), (2) ve (3) yüzeyleri elde edilir. Eğer $f_1'(u)=0$ ve $g_1'(u)=0$ ise Eşitlik (3.41) sağlanır. Eşitlik (3.42) den,

$$\begin{aligned} &\frac{f_2''(u)}{f_2(u)}+\frac{g_2''(v)}{g_2(v)} \\ &+(f_2''(u)f_2(u)-f_2'^2(u))g_2'^2(v)+(g_2''(v)g_2(v)-g_2'^2(v))f_2'^2(u)=0 \end{aligned} \tag{3.43}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklemde $f_2''(u)=0$ ya da $g_2''(u)=0$ ise (4) ve (5) yüzeyleri elde edilir. $f_2''(u)g_2''(v)\neq 0$ ise Eşitlik (3.43) ün önce u ya sonra v ye göre kısmi türevleri alınırsa;

$$\frac{(f_2''(u)f_2(u)-f_2'^2(u))'}{(f_2'^2(u))'}=-\frac{(g_2''(v)g_2(v)-g_2'^2(v))'}{(g_2'^2(v))'}=k \tag{3.44}$$

bulunur. Bu eşitlikten;

$$(f_2''(u)f_2(u) - (1+k)f_2'^2(u)) = a \tag{3.45}$$

ve

$$(g_2''(v)g_2(v) - (1+k)g_2'^2(v)) = b \tag{3.46}$$

dir. $a^2 + b^2 \neq 0$ olsun. Eşitlik (3.45) ve (3.46) da $k = -1$ ise,

$$f_2''(u)f_2(u) = a \tag{3.47}$$

ve

$$(g_2''(v)g_2(v) - 2g_2'^2(v) = b \tag{3.48}$$

dir. Eşitlik (3.47) ve (3.48) den $f_2(u)$ ve $g_2(v)$ fonksiyonları (9) daki yüzey denklemlerini sağlar. Eğer $f_1(u) = f_2(u)$, $g_1(v) = g_2(v)$ ise Eşitlik (3.41) ve (3.42) birbirine denktir ve

$$\frac{f_1''(u)}{f_1(u)} + \frac{g_1''(v)}{g_1(v)} + (f_1''(u)f_1(u) - f_1'^2(u))2g_1'^2(v) + (g_1''(v)g_1(v) - g_1'^2(v))2f_1'^2(u) = 0$$

eşitliği elde edilir. $f_1''(u) = 0$ ya da $g_1''(v) = 0$ ise (7) ve (8) yüzeyleri elde edilir. Eğer $f_1''(u)g_1''(v) \neq 0$ alınırsa;

$$\frac{(f_1''(u)f_1(u) - f_1'^2(u))'}{(f_1'^2(u))'} = -\frac{(g_1''(v)g_1(v) - g_1'^2(v))'}{(g_1'^2(v))'} = k \tag{3.49}$$

bulunur. Böylece Eşitlik (3.49), Eşitlik (3.44) ile denk olup (9) sağlanır. Ayrıca kabul edelim ki $f_1(u) = f_2(u) = r(u)$ ve $g_1(v) = \cos v$, $g_2(v) = \sin v$ olsun. Eşitlik (3.41) ve (3.42) de yerine yazarak,

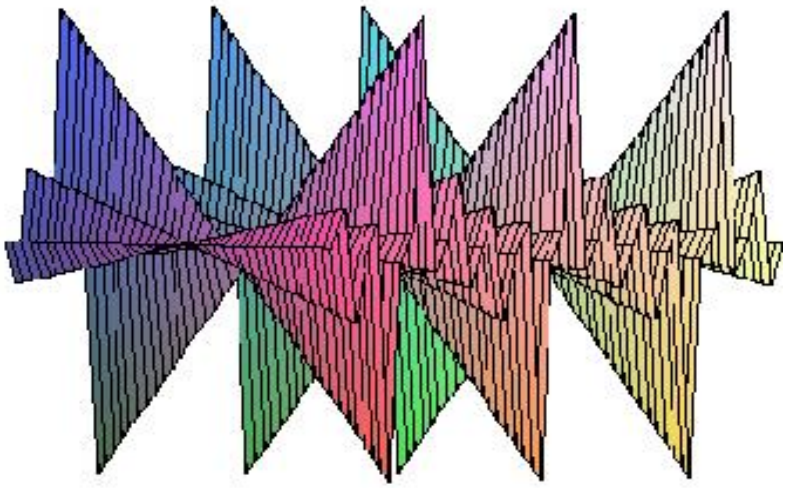
$$r''(u)\left(1 + (r(u))^2\right) - r(u)\left(1 + (r'(u))^2\right) = 0 \tag{3.50}$$

diferensiyel denklemi bulunur. Bu diferensiyel denklemden (6) yüzeyi elde edilir.

Örnek 3.19:

$$S: X(u,v) = (u, v, 2u\tan 3v, 2u\tan 3v) \tag{3.51}$$

parametrizasyonu ile verilen çarpanlara ayrılabilir yüzey minimaldir. (Şekil 3.9)



Şekil 3.9: Eşitlik (3.51) ile verilen minimal yüzeyin izdüşümü

### 3.4 $IE^4$ Uzayında Çarpanlara Ayrılabilir Wintgen İdeal Yüzeyler

1979 yılında Wintgen, yüzeyin Gauss eğriliği, normal eğriliği ve ortalama eğriliği arasında;

$$K + |K_N| \leq \|H\|^2 \tag{3.52}$$

eşitliğinin var olduğunu ispatlamıştır. Yani, yüzeyin Gauss eğriliği, normal eğriliği ve ortalama eğriliği arasında temel bir ilişki vardır [19, 47].

Tanım 3.20: $K + |K_N| = \|H\|^2$ eşitliğini sağlayan yüzeylere özel olarak Wintgen ideal yüzeyleri denir [2, 16, 47].

Teorem 3.21: S, $IE^4$ Öklid uzayında (3.3) parametrizasyonu ile verilen çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. S yüzeyinin Wintgen ideal yüzey olması için gerek ve yeter koşul;

$$\tilde{G}\left[\left(f_1^{"}g_1G+f_1g_1^{''}E-2f_1^{'}g_1^{'}F\right)^2-4W^2\left(f_1^{''}f_1g_1^{''}g_1-f_1^{'2}g_1^{'2}\right)\right]$$
$$+\tilde{E}\left[\left(f_2^{"}g_2G+f_2g_2^{''}E-2f_2^{'}g_2^{'}F\right)^2-4W^2\left(f_2^{''}f_2g_2^{''}g_2-f_2^{'2}g_2^{'2}\right)\right]$$
$$-2\tilde{F}\begin{bmatrix}\left(f_1^{"}g_1G+f_1g_1^{''}E-2f_1^{'}g_1^{'}F\right)\left(f_2^{"}g_2G+f_2g_2^{''}E-2f_2^{'}g_2^{'}F\right)\\-2W^2\left(f_1^{''}f_2g_1g_2^{''}+f_1f_2^{''}g_1^{''}g_2-2f_1^{'}f_2^{'}g_1^{'}g_2^{'}\right)\end{bmatrix}$$
$$=\pm4W^2\begin{bmatrix}E\left(f_1^{'}f_2g_1^{'}g_2^{''}-f_1f_2^{'}g_1^{''}g_2^{'}\right)\\-F\left(f_1^{''}f_2g_1g_2^{''}-f_1f_2^{''}g_1^{''}g_2\right)+G\left(f_1^{''}f_2^{'}g_1g_2^{'}-f_1^{'}f_2^{''}g_1^{'}g_2\right)\end{bmatrix}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat: Eşitlikler (3.20), (3.35), (3.38) ve Tanım 3.20 yardımıyla istenilen sonuç elde edilir.

Örnek 3.22: $X(u,v)=(u,v,c_1v+c_2,c_3u+c_4)$ düzlemi çarpanlara ayrılabilir Wintgen ideal yüzeyidir.

### 3.5. $IE^4$ Uzayında Çarpanlara Ayrılabilir Yüzeyin Eğrilik Elipsi

Tanım 3.23 : $S\subset IE^4$ yüzeyi X(u.v) regüler yaması ile verilsin. $p\in S$ noktasındaki $T_P(S)$ teğet uzayında $\theta\in[0,2\pi]$ açısı parametreli bir çemberi düşünelim. p noktasındaki normal düzlem ve

$$X=\cos\theta X_1+\sin\theta X_2 \tag{3.53}$$

tanjant vektörü yönündeki doğrunun direkt toplamı olan hiperdüzlem ile S yüzeyinin arakesit eğrisi $\gamma(\theta)$ ile gösterilsin. Burada $X_1$, $X_2$ vektörleri $T_P(S)$ uzayının ortonormal bir bazıdır. Bu eğriye S yüzeyinin p noktasında ve X vektörü yönündeki normal kesit eğrisi denir. Bununla birlikte, eğrinin $\eta_\theta$ normal eğrilik vektörü de normal düzlemde yatan bir vektördür. $\theta$ açısı 0 dan $2\pi$ ye değiştiğinde bu vektör normal düzlemde bir elips oluşturur. Bu elipse S yüzeyinin p noktasındaki eğrilik elipsi adı verilir. Dolayısıyla;

$$\gamma_\theta'=X=\cos\theta X_1+\sin\theta X_2 \tag{3.54}$$

vektörü, normal kesit eğrisinin birim vektörü olmak üzere yüzeyin p noktasındaki eğrilik elipsi;

$$E(p) = \{ h(X,X) : X \in T_p(S), \|X\| = 1 \} \tag{3.55}$$

dir. Burada h, $X(u,v)$ yamasının ikinci temel formu dönüşümüdür. Elips oluşumunu görmek için ikinci temel form dönüşümü ve $X = \cos\theta X_1 + \sin\theta X_2$ ile elde edilen

$$h(X,X) = H + \cos 2\theta B + \sin 2\theta C \tag{3.56}$$

eşitliğine bakmak yeterlidir. Burada,

$$B = \frac{1}{2}\left(h(X_1,X_1) - h(X_2,X_2)\right) \quad , \quad C = h(X_1,X_2) \tag{3.57}$$

normal vektörler ve $H$ ortalama eğrilik vektörüdür. Buna göre X birim vektörü birim çember etrafında bir tur atarken $h(X,X)$ vektörü $\vec{H}$ merkezli elips etrafında iki tur atar. Elde edilen elips p noktasında $X(u,v)$ yamasının $E(p)$ elipsidir. Bu elipsin, noktaya ya da doğruya dejenere olması mümkün olabilir [14, 32, 33, 38, 40, 48].

Tanım 3.24: $S \subset IE^4$ yüzeyi $X(u,v)$ regüler yaması ile verilsin. Bu durumda;

$$\langle B, C \rangle = 0 \text{ ve } \|B\| = \|C\| \tag{3.58}$$

koşulu sağlanırsa yüzeyin eğrilik elipsi bir çember belirtir. Eğrilik elipsleri çember olan yüzeyler süperkonformal yüzeyler olarak da bilinir [11, 14, 26].

Açıklama: Eğrilik elipsinin çember belirtmesi için gerek ve yeter koşul;

$$\|H\|^2 - K - |K_N| = 0 \tag{3.59}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Dolayısıyla süperkonformal yüzeyler, Wintgen ideal yüzeyler olarak da adlandırılır [47].

Tanım 3.25: $S \subset IE^4$ yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları yardımıyla $\Delta(p)$ determinantı ve $\alpha(p)$ matrisi;

$$\Delta(p)=\frac{1}{4W^2}\det\begin{bmatrix} c_{11}^1 & 2c_{12}^1 & c_{22}^1 & 0 \\ c_{11}^2 & 2c_{12}^2 & c_{22}^2 & 0 \\ 0 & c_{11}^1 & 2c_{12}^1 & c_{22}^1 \\ 0 & c_{12}^2 & 2c_{12}^2 & c_{22}^2 \end{bmatrix}(p) \tag{3.60}$$

ve

$$\alpha(p)=\begin{bmatrix} c_{11}^1 & c_{12}^1 & c_{22}^1 \\ c_{11}^2 & c_{12}^2 & c_{22}^2 \end{bmatrix}(p) \tag{3.61}$$

olarak tanımlıdır.

$T_p^{\perp}(S)$ uzayının orijini p noktası olarak alındığında aşağıdaki sınıflandırmalar verilebilir [38].

a) $\Delta(p)<0$ ise p noktası $E(p)$ eğrilik elipsinin dışında olup hiperbolik nokta olarak adlandırılır.

b) $\Delta(p)=0$ ise p noktası $E(p)$ eğrilik elipsinin üzerinde olup parabolik nokta olarak adlandırılır. Buna göre

i) $\Delta(p)=0$ ve $K(P)>0$ ise p noktası sanal tipte büküm noktasıdır.

ii) $\Delta(p)=0$ ve $K(P)<0$ ise,

rank $\alpha(p)=2$ durumunda p noktası non-dejeneredir.

rank $\alpha(p)=1$ durumunda p noktası reel tipte büküm noktasıdır.

iii) $\Delta(p)=0$ ve $K(P)=0$ durumunda p noktası düz tipte büküm noktasıdır.

c) $\Delta(p)>0$ ise p noktası $E(p)$ eğrilik elipsinin içinde olup bu nokta eliptik nokta olarak adlandırılır.

Teorem 3.26: S, $IE^4$ Öklid uzayında (3.3) parametrizasyonu ile verilen bir çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. $T_p^{\perp}(S)$ uzayının orijini olan $p\in S$ noktası aşağıdaki gibi karakterize edilebilir.

1)Eğer,

$$4\left(f_1''g_1f_2'g_2'-f_2''g_2f_1'g_1'\right)\left(f_2g_2''f_1'g_1'-f_1g_1''f_2'g_2'\right)=\left(f_1''g_1f_2g_2''-f_1g_1''f_2''g_2\right)^2$$

ise, p noktası eğrilik elipsinin üzerindedir. Bu nokta, S yüzeyinin parabolik noktasıdır.

2)Eğer,

$$4\left(f_1''g_1f_2'g_2' - f_2''g_2f_1'g_1'\right)\left(f_2g_2''f_1'g_1' - f_1g_1''f_2'g_2'\right) < \left(f_1''g_1f_2g_2'' - f_1g_1''f_2''g_2\right)^2$$

ise, p noktası eğrilik elipsinin dışındadır. Bu nokta, S yüzeyinin hiperbolik noktasıdır.

3)Eğer,

$$4\left(f_1''g_1f_2'g_2' - f_2''g_2f_1'g_1'\right)\left(f_2g_2''f_1'g_1' - f_1g_1''f_2'g_2'\right) > \left(f_1''g_1f_2g_2'' - f_1g_1''f_2''g_2\right)^2$$

ise, p noktası eğrilik elipsinin içindedir. Bu nokta, S yüzeyinin eliptik noktasıdır.

İspat: S, $IE^4$ Öklid uzayında (3.3) parametrizasyonu ile verilen bir çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. İkinci temel form katsayıları ve Eşitlik (3.49) yardımıyla;

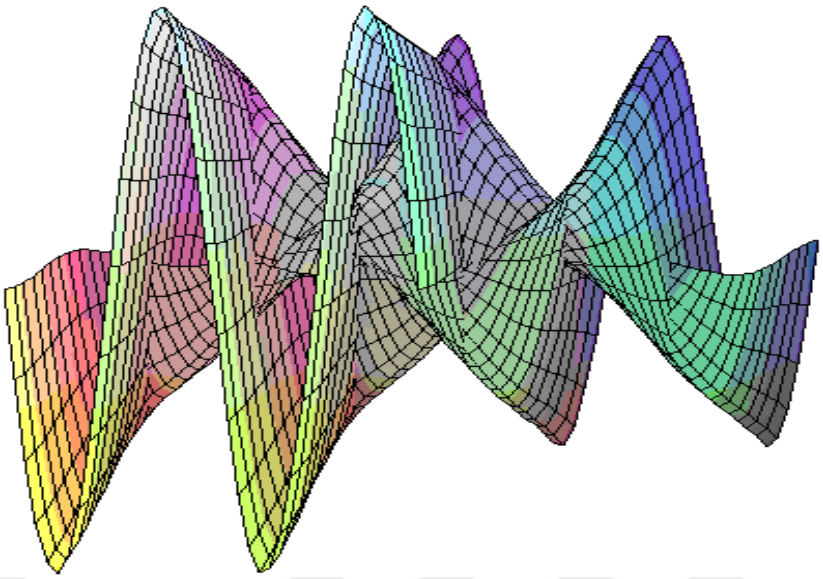
$$\Delta(p) = \frac{\left[\begin{array}{l} 4\left(f_1''g_1f_2'g_2' - f_2''g_2f_1'g_1'\right)\left(f_2g_2''f_1'g_1' - f_1g_1''f_2'g_2'\right) \\ -\left(f_1''g_1f_2g_2'' - f_1g_1''f_2''g_2\right)^2 \end{array}\right]}{4W^4}$$

şeklinde elde edilir. Buna göre Tanım 3.25. yardımıyla, $\Delta(p) < 0$ ise p noktası eğrilik elipsinin dışında, $\Delta(p) > 0$ ise p noktası eğrilik elipsinin içinde, $\Delta(p) = 0$ ise p noktası eğrilik elipsinin içindedir. Dolayısıyla istenilen sonuç elde edilir.

Örnek 3.27: S, $IE^4$ Öklid uzayında (3.3) parametrizasyonu ile verilen bir çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. Eğer,

$$\begin{aligned} f_1(u) &= 3u+1, \qquad g_1(v) = \cos v, \\ f_2(u) &= 2u+2, \qquad g_2(v) = \sin v, \end{aligned} \tag{3.62}$$

şeklinde seçilirse $T_p^{\perp}(S)$ uzayının orijini olan $p \in S$ noktası eğrilik elipsinin üzerindedir. Ayrıca Eşitlik (3.62) deki fonksiyonlar yardımıyla verilen S yüzeyinin $IE^3$ Öklid uzayındaki izdüşümünün grafiği Şekil 3.10 da verilmiştir.



Şekil 3.10. Eşitlik (3.62) ile verilen çarpanlara ayrılabilir yüzey

### 3.6. Çarpanlara Ayrılabilir Yüzeylerin Ganchev Milousheva Değişmezleri

$X : U \subset IE^2 \to IE^4$ yaması S yüzeyini temsil etsin. E, F, G ve $c_{11}^1,...,c_{22}^2$, sırasıyla S yüzeyi üzerindeki bir $p \in X(u,v)$ noktasındaki birinci ve ikinci temel form katsayıları olmak üzere;

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} c_{11}^1 & c_{12}^1 \\ c_{11}^2 & c_{12}^2 \end{vmatrix},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11}^1 & c_{22}^1 \\ c_{11}^2 & c_{22}^2 \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} c_{12}^1 & c_{22}^1 \\ c_{12}^2 & c_{22}^2 \end{vmatrix} \tag{3.63}$$

$$L(u,v) = \frac{2\Delta_1}{W},\ M(u,v) = \frac{2\Delta_2}{W},\ N(u,v) = \frac{2\Delta_3}{W},\ W = \sqrt{EG - F^2} \tag{3.64}$$

ve

$$\gamma_1^1 = \frac{FM - GL}{EG - F^2},\ \gamma_1^2 = \frac{FL - EM}{EG - F^2},\ \gamma_2^1 = \frac{FN - GM}{EG - F^2},\ \gamma_2^2 = \frac{FM - EN}{EG - F^2} \tag{3.65}$$

fonksiyonları tanımlansın.

Tanım 3.28: $X : U \subset IE^2 \to IE^4$ regüler yaması bir S yüzeyini temsil etsin. $X_u$ ve $X_v$, S yüzeyinin bir $p \in X(u,v)$ noktasındaki teğet vektörleri olmak üzere;

$$\begin{aligned} \gamma(X_u) &= \gamma_1^1 X_u + \gamma_1^2 X_v \\ \gamma(X_v) &= \gamma_2^1 X_u + \gamma_2^2 X_v \end{aligned} \tag{3.66}$$

şeklinde tanımlanan $\gamma : T_pS \to T_pS$ lineer dönüşümünün matris temsilcisi,

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1^1 & \gamma_1^2 \\ \gamma_1^2 & \gamma_2^2 \end{pmatrix} \tag{3.67}$$

dir. Dolayısıyla Eşitlik (3.65) ve (3.67) den,

$$g = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},\ h = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \tag{3.68}$$

için,

$$\gamma = -hg^{-1} \tag{3.69}$$

bulunur. Ayrıca;

$$k = \det\gamma = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},\ \tau = \frac{1}{2}\text{iz}\,\gamma = \frac{EN + GL - 2FM}{2\left(EG - F^2\right)} \tag{3.70}$$

biçiminde tanımlı foksiyonları sırasıyla S yüzeyinin 1. ve 2. Ganchev-Mileusheva değişmezleri olarak adlandırılır [21].

Teorem 3.29: $S \subset IE^4$ yüzeyinin normal eğriliği $K_N$ ve 2. değişmezi $\tau$ olmak üzere;

$$\tau = K_N \tag{3.71}$$

dir [14].

Teorem 3.30: k, $S \subset IE^4$ yüzeyinin 1. değişmezi ise $k = 4\Delta$ dir [7].

Teorem 3.31: $F = 0$ olmak üzere $S \subset IE^4$ yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter koşul;

$$\tau^2 - k = 0 \tag{3.72}$$

olmasıdır [21].

Önerme 3.32: k ve $\tau$ değişmezlerinin durumuna göre $S \subset IE^4$ yüzeyinin noktaları aşağıdaki gibi dört farklı şekilde sınıflandırılabilir. Alınan bir p noktası için

i) $k > 0$ ise p noktası hiperboliktir.

ii) $k = 0, \tau \neq 0$ ise p noktası paraboliktir.

iii) $k < 0$ ise p noktası eliptiktir.

iv) $k = \tau = 0$ ise p noktası düzlemseldir [21].

Yukarıdaki tanım ve ifadelere göre çarpanlara ayrılabilir yüzeyin Ganchev-Milousheva değişmezleri aşağıdaki şekilde hesaplansın.

$S \subset IE^4$ (3.3) parametrizasyonu ile verilen çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. Bu taktirde Eşitlik (3.15) daki S yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları, Eşitlik (3.63) ve (3.64) de yerine yazılırsa;

$$\Delta_1 = \frac{f_1'' g_1 f_2' g_2' - f_2'' g_2 f_1' g_1'}{W}, \quad \Delta_2 = \frac{f_1'' g_1 f_2 g_2'' - f_1 g_1'' f_2'' g_2}{W}$$
$$\Delta_3 = \frac{f_2 g_2'' f_1' g_1' - f_1 g_1'' f_2' g_2'}{W} \tag{3.73}$$

ve

$$L = \frac{2\left(f_1'' g_1 f_2' g_2' - f_2'' g_2 f_1' g_1'\right)}{W^2}, \quad M = \frac{2\left(f_1'' g_1 f_2 g_2'' - f_1 g_1'' f_2'' g_2\right)}{W^2},$$
$$N = \frac{2\left(f_2 g_2'' f_1' g_1' - f_1 g_1'' f_2' g_2'\right)}{W^2}, \tag{3.74}$$

elde edilir. Dolayısıyla, Eşitlik (3.73) ve Eşitlik (3.74) deki ifadeler (3.70) de yerine yazılırsa çarpanlara ayrılabilir yüzeyinin Ganchev-Milousheva değişmezleri sırasıyla;

$$k = \frac{\left[\begin{array}{l} 4\left(f_1'' g_1 f_2' g_2' - f_2'' g_2 f_1' g_1'\right)\left(f_2 g_2'' f_1' g_1' - f_1 g_1'' f_2' g_2'\right) \\ -\left(f_1'' g_1 f_2 g_2'' - f_1 g_1'' f_2'' g_2\right)^2 \end{array}\right]}{4W^4},$$

$$\tau = \frac{\left[\begin{array}{l} E\left(f_1' f_2 g_1' g_2'' - f_1 f_2' g_1'' g_2'\right) - F\left(f_1'' f_2 g_1 g_2'' - f_1 f_2'' g_1'' g_2\right) \\ +G\left(f_1'' f_2' g_1 g_2' - f_1' f_2'' g_1' g_2\right) \end{array}\right]}{W^4}$$

olarak hesaplanır.

## 4. $IE_1^4$ MİNKOWSKİ UZAYINDA ÇARPANLARA AYRILABİLİR YÜZEYLER

Tanım 4.1: S, $4-$boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey olsun. u, v, z, w, $IE_1^4$ uzayındaki kartezyen koordinatlar, $f_1, f_2, g_1, g_2$ $C^\infty$ sınıfından fonksiyonlar olmak üzere;

$$z = f_1(u)g_1(v),\ w = f_2(u)g_2(v) \tag{4.1}$$

olarak tanımlı ise S yüzeyi, çarpanlara ayrılabilir yüzey olarak adlandırılır. Dolayısıyla S yüzeyinin Monge yaması şeklinde bir parametrizasyonu;

$$X(u,v) = (u, v, f_1(u)g_1(v), f_2(u)g_2(v)), \tag{4.2}$$

şeklinde verilebilir.

S yüzeyinin teğet uzayı;

$$\begin{aligned} X_u &= (1,0,f_1'(u)g_1(v), f_2'(u)g_2(v)) \\ X_v &= (0,1,f_1(u)g_1'(v), f_2(u)g_2'(v)) \end{aligned} \tag{4.3}$$

teğet vektörleri tarafından gerilir. Yüzeyin birinci temel formunun katsayıları;

$$\begin{aligned} E &= g(X_u, X_u) = -1 + (f_1'(u)g_1(v))^2 + (f_2'(u)g_2(v))^2 \\ F &= g(X_u, X_v) = f_1'(u)f_1(u)g_1'(v)g_1(v) + f_2'(u)f_2(u)g_2'(v)g_2(v) \\ G &= g(X_v, X_v) = 1 + (f_1(u)g_1'(v))^2 + (f_2(u)g_2'(v))^2 \end{aligned} \tag{4.4}$$

şeklinde elde edilir. Eşitlik (4.4) yardımıyla,

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= -1 - f_1^2(g_1')^2 - f_2^2(g_2')^2 + (f_1')^2 f_1^2 (g_1')^2 g_1^2 + (f_2')^2 g_2^2 \\ &\quad + (f_2')^2 f_1^2 (g_1')^2 g_2^2 + 2f_1' f_2' g_1' g_2' f_1 f_2 g_1 g_2 \end{aligned}$$

bulunur. S çarpanlara ayrılabilir yüzeyi;

$EG - F^2 > 0$ ise spaceliketır,

$EG - F^2 < 0$ ise timeliketır,

$EG - F^2 = 0$ ise ligtlike (null) dır. $X(u, v)$ yamasının ikinci mertebeden kısmi türevleri;

$$X_{uu} = (0,0, f_1''(u)g_1(v), f_2''(u)g_2(v))$$

$$X_{uv} = (0,0, f_1'(u)g_1'(v), f_2'(u)g_2'(v)) \tag{4.5}$$

$$X_{vv} = (0,0, f_1(u)g_1''(v), f_2(u)g_2''(v))$$

şeklinde bulunur.

Şimdi S yüzeyinin normal uzayını geren ortonormal vektör alanlarını elde edelim. Bunun için;

$$g(X_u, N_1) = 0,$$

$$g(X_v, N_1) = 0,$$

$$g(X_u, N_2) = 0, \tag{4.6}$$

$$g(X_v, N_2) = 0,$$

$$g(N_1, N_2) = 0,$$

eşitliklerini sağlayan $N_1$ ve $N_2$ ortonormal vektör alanlarını hesaplayalım.

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}}(a_1, a_2, a_3, a_4) \tag{4.7}$$

olmak üzere Eşitlik (4.6) dan,

$$g\Big((1,0, f_1'(u)g(v), f_2'(u)g_2(v)), (a_1, a_2, a_3, a_4)\Big) = 0,$$

$$g\Big((0,1, f_1(u)g_1'(v), f_2(u)g_2'(v)), (a_1, a_2, a_3, a_4)\Big) = 0, \tag{4.8}$$

dir. Eşitlik (4.8) yardımıyla,

$$a_2 + f_1(u)g_1'(v)a_3 + f_2(u)g_2'(v)a_4 = 0,$$

$$a_2 + f_1(u)g_1'(v)a_3 + f_2(u)g_2'(v)a_4 = 0 \tag{4.9}$$

elde edilir. Eşitlik (4.9) da $a_3 = 1$ , $a_4 = 0$ olarak alınırsa $a_1 = f_1'(u)g_1(v)$ , $a_2 = f_1(u)g_1'(v)$ bulunur. Böylece;

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{\left|1-(f_1'(u)g_1(v))^2 + (f_1(u)g_1'(v))^2\right|}}(f_1'(u)g_1(v), f_1(u)g_1'(v), 1, 0)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$N_2 = \frac{1}{\sqrt{\left|-b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2\right|}}(b_1, b_2, b_3, b_4) \tag{4.10}$$

olmak üzere,

$$-b_1 + f_1'(u)g_1(v)b_3 + f_2'(u)g_2(v)b_4 = 0,$$

$$b_2 + f_1(u)g_1'(v)b_3 + f_2(u)g_2'(v)b_4 = 0, \tag{4.11}$$

$$-f_1'(u)g_1(v)b_1 - f_1(u)g_1'(v)b_2 + b_3 = 0,$$

denklem sistemi elde edilir.

Bu denklem sisteminin çözümünde $b_4 = 1-(f_1'(u))^2(g_1(v))^2 + (f_1(u))^2(g_1'(v))^2$ alınırsa;

$$A = 1-(f_1'(u))^2(g_1(v))^2 + (f_1(u))^2(g_1'(v))^2 ,$$

$$B = -f_1'(u)f_2'(u)g_1(v)g_2(v) + f_1(u)f_2(u)g_1'(v)g_2'(v) , \tag{4.12}$$

$$C = 1-(f_2'(u))^2(g_2(v))^2 + (f_2(u))^2(g_2'(v))^2,$$

elde edilir. Ayrıca,

$$AC - B^2 = D$$

eşitlikleri yardımıyla,

$$N_2 = \frac{1}{\sqrt{|AD|}}(Af_2'(u)g_2(v) - Bf_1'(u)g_1(v), Bf_1(u)g_1'(u) - Af_2(u)g_2'(v), -B, A)$$

bulunur. Böylece (4.2) parametrizasyonu ile verilen S çarpanlara ayrılabilir yüzeyinin normal uzayının ortonormal bir çatısı;

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{|A|}}(f_1'(u)g_1(v), f_1(u)g_1'(v), 1, 0)$$

$$N_2 = \frac{1}{\sqrt{|AD|}}(Bf_1'(u)g_1(v) - Af_2'(u)g_2(v), Bf_1(u)g_1'(u) - Af_2(u)g_2'(v), -B, A) \tag{4.13}$$

şeklinde elde edilir.

Eşitlikler (1.46), (4.5) ve (4.13) yardımıyla, S yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları;

$$\left.\begin{aligned} c_{11}^1 &= \frac{f_1''(u)g_1(v)}{\sqrt{|A|}} \quad , \quad c_{22}^1 = \frac{f_1(u)g_1''(v)}{\sqrt{|A|}} \\ c_{12}^1 &= \frac{f_1'g_1'}{\sqrt{|A|}}, \\ c_{12}^2 &= \frac{f_2'g_2'A - f_1'g_1'B}{\sqrt{|AD|}} \\ c_{11}^2 &= \frac{f_2''(u)g_2(v)A - f_1''(u)g_1(v)B}{\sqrt{|AD|}} \\ c_{22}^2 &= \frac{f_2(u)g_2''(v)A - f_1(u)g_1''(v)B}{\sqrt{|AD|}} \end{aligned}\right\} \tag{4.14}$$

şeklinde bulunur.

### 4.1. $IE_1^4$ Uzayında Spacelike Çarpanlara Ayrılabilir Yüzeyler

$IE_1^4$ uzayında bir S spacelike yüzeyinin birinci normal vektörü $N_1$, timelike, ikinci normal vektörü $N_2$, spacelike olacak şekilde $\{N_1, N_2\}$ ortonormal tabanını ele alalım.

Bu durumda yüzey spacelike oldugundan $EG - F^2 > 0$ dır. Ayrıca yüzeyin normal vektör alanları;

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{\sqrt{|A|}}(f_1'(u)g_1(v), f_1(u)g_1'(v), 1, 0) \\ N_2 &= \frac{1}{\sqrt{|AD|}}(Bf_1'(u)g_1(v) - Af_2'(u)g_2(v), Bf_1(u)g_1'(u) - Af_2(u)g_2'(v), -B, A) \end{aligned}\right\}$$

dir. $N_1$ timelike, $N_2$ spacelike olduğundan A ve D negatif tanımlıdır.

Teorem 4.2: S, $IE_1^4$ Minkowski uzayında (4.2) parametrizasyonu ile verilen bir spacelike çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. Buna göre S yüzeyinin Gauss eğriliği;

$$K = \frac{1}{DW^2}\left[\begin{aligned} &\left(f_1'' f_1 g_1'' g_1 - f_1'^2 g_1'^2\right)C \\ &-\left(f_1'' f_2 g_1 g_2'' + f_1 f_2'' g_1'' g_2 - 2f_1' f_2' g_1' g_2'\right)B \\ &+\left(f_2'' f_2 g_2'' g_2 - f_2'^2 g_2'^2\right)A \end{aligned}\right] \tag{4.15}$$

dir [17].

İspat: S, $IE_1^4$ Minkowski uzayında (4.2) parametrizasyonu ile verilen bir spacelike çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. Eşitlik (1.53) yardımıyla S yüzeyinin Gauss eğriliği;

$$K = \frac{1}{W^2}\left(-\left[c_{11}^1 c_{22}^1 - (c_{12}^1)^2\right] + \left[c_{11}^2 c_{22}^2 - (c_{12}^2)^2\right]\right) \tag{4.16}$$

bulunur. Eşitlik (4.14), Eşitlik (4.16) da yerine yazılırsa,

$$K=\frac{1}{W^2}\begin{bmatrix}-\left(\dfrac{f_1''(u)g_1(v)}{\sqrt{|A|}}\dfrac{f_1(u)g_1''(v)}{\sqrt{|A|}}-\left(\dfrac{f_1'g_1'}{\sqrt{|A|}}\right)^2\right)\\ +\dfrac{Af_2''(u)g_2(v)-Bf_1''(u)g_1(v)}{\sqrt{|AD|}}\dfrac{Af_2(u)g_2''(v)-Bf_1(u)g_1''(v)}{\sqrt{|AD|}}\\ -\left(\dfrac{f_2'g_2'A-f_1'g_1'B}{\sqrt{|AD|}}\right)^2\end{bmatrix}$$

bulunur. Düzenleme yapılırsa Eşitlik (4.15) elde edilir.

Teorem 4.3: S, $IE_1^4$ Minkowski uzayında (4.2) parametrizasyonu ile verilen bir spacelike çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. Buna göre S yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü;

$$\begin{aligned}\vec{H}&=-\frac{f_1''g_1G+f_1g_1''E-2f_1'g_1'F}{2\sqrt{|A|}W^2}N_1\\ &+\frac{A\left(f_2''g_2G+f_2g_2''E-2f_2'g_2'F\right)-B\left(f_1''g_1G+f_1g_1''E-2f_1'g_1'F\right)}{2\sqrt{|AD|}W^2}N_2\end{aligned}\qquad(4.17)$$

dir.

İspat: S, $IE_1^4$ Minkowski uzayında (4.2) parametrizasyonu ile verilen bir spacelike çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. Eşitlik (4.14), Eşitlik (1.55) de yerine yazılırsa S yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü;

$$\vec{H}=\frac{1}{2W^2}\left[-(c_{11}^1G+c_{22}^1E-2c_{12}^1F)N_1+(c_{11}^2G+c_{22}^2E-2c_{12}^2F)N_2\right]$$

$$\vec{H}=\frac{1}{2W^2}\begin{bmatrix}-\left(\dfrac{f_1''g_1}{\sqrt{|A|}}G+\dfrac{f_1g_1''}{\sqrt{|A|}}E-\dfrac{2f_1'g_1'}{\sqrt{|A|}}\right)N_1+\\ \left(\dfrac{Af_2''g_2-Bf_1''g_1}{\sqrt{|AD|}}G+\dfrac{Af_2g_2''-Bf_1g_1''}{\sqrt{|AD|}}E-\dfrac{2\left(Af_2'g_2'-Bf_1'g_1'\right)}{\sqrt{|AD|}}\right)N_2\end{bmatrix}$$

$$\vec{H} = -\frac{f_1'' g_1 G + f_1 g_1'' E - 2f_1' g_1' F}{2\sqrt{|A|}W^2} N_1$$
$$+ \frac{A\left(f_2'' g_2 G + f_2 g_2'' E - 2f_2' g_2' F\right) - B\left(f_1'' g_1 G + f_1 g_1'' E - 2f_1' g_1' F\right)}{2\sqrt{|AD|}W^2} N_2$$

olarak bulunur.

### 4.2. $IE_1^4$ Uzayında Timelike Çarpanlara Ayrılabilir Yüzeyler

S, $IE_1^4$ Minkowski uzayında çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. $EG - F^2 < 0$ olarak alalım. Bu durumda S, timelike yüzey gösterir. S, timelike yüzey olduğundan $E = g(X_u, X_u) < 0$ ve $G = g(X_v, X_v) > 0$ ve $W = \sqrt{F^2 - EG}$ sağlanır. Dolayısıyla $g(N_1, N_1) = 1,\ g(N_2, N_2) = 1$ olup A ve D pozitif tanımlıdır.

Eşitlik (1.59) daki ikinci temel form dönüşümünden yüzeyin şekil operatörü matrisleri;

$$A_{N_1} = \begin{pmatrix} h_{11}^1 & h_{12}^1 \\ h_{12}^1 & h_{22}^1 \end{pmatrix},\ A_{N_2} = \begin{pmatrix} h_{11}^2 & h_{12}^2 \\ h_{12}^2 & h_{22}^2 \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

şeklindedir. Burada $h_{ij}^k$ fonksiyonları, eşitlik (1.60) yardımıyla,

$$h_{11}^1 = -\frac{f_1'' g_1}{E\sqrt{A}},\ h_{12}^1 = \frac{f_1' g_1' E - f_1'' g_1 F}{EW\sqrt{A}},\ h_{22}^1 = -\frac{f_1 g_1'' E^2 - 2f_1' g_1' EF + f_1'' g_1 F^2}{EW^2\sqrt{A}},$$

$$h_{11}^2 = -\frac{Af_2'' g_2 - Bf_1'' g_1}{E\sqrt{AD}}, h_{12}^1 = \frac{\left(f_2' g_2' A - f_1' g_1' B\right)E - \left(f_2'' g_2 A - f_1'' g_1 B\right)F}{EW\sqrt{AD}}, \tag{4.19}$$

$$h_{22}^2 = -\frac{\left(f_2 g_2'' A - f_1 g_1'' B\right)E^2 - 2\left(f_2' g_2' A - f_1' g_1' B\right)EF + \left(f_2'' g_2 A - f_1'' g_1 B\right)F^2}{EW^2\sqrt{AD}}$$

olarak hesaplanır.

Teorem 4.4: S, $IE_1^4$ Minkowski uzayında (4.2) parametrizasyonu ile verilen bir timelike çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. Buna göre S yüzeyinin Gauss eğriliği;

$$K=\frac{1}{DW^2}\begin{bmatrix}\left(f_1''f_1g_1''g_1-f_1'^2g_1'^2\right)C\\-\left(f_1''f_2g_1g_2''+f_1f_2''g_1''g_2-2f_1'f_2'g_1'g_2'\right)B\\+\left(f_2''f_2g_2''g_2-f_2'^2g_2'^2\right)A\end{bmatrix} \tag{4.20}$$

dir.

İspat: S, $IE_1^4$ Minkowski uzayında (4.2) parametrizasyonu ile verilen bir timelike çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. Eşitlik (1.61) yardımıyla $4-$boyutlu Minkowski uzayında bir timelike yüzeyin Gauss eğriliği;

$$K=\left(h_{11}^1h_{22}^1-\left(h_{12}^1\right)^2\right)+\left(h_{11}^2h_{22}^2-\left(h_{12}^2\right)^2\right) \tag{4.21}$$

dir. Eşitlik (4.19) deki $h_{ij}^k$ fonksiyonları Eşitlik (4.21) de yazılırsa istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 4.5: S, $IE_1^4$ Minkowski uzayında (4.2) parametrizasyonu ile verilen bir timelike çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. Buna göre S yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü;

$$\begin{aligned}\vec{H}=&-\frac{f_1''g_1G+f_1g_1''E-2f_1'g_1'F}{2\sqrt{A}W^2}N_1\\&-\frac{A\left(f_2''g_2G+f_2g_2''E-2f_2'g_2'F\right)-B\left(f_1''g_1G+f_1g_1''E-2f_1'g_1'F\right)}{2\sqrt{AD}W^2}N_2\end{aligned} \tag{4.22}$$

dir.

İspat: Eşitlik (4.19) deki $h_{ij}^k$ fonksiyonları Eşitlik (1.59) ve Eşitlik (1.62) de yerine yazılırsa sonuç elde edilir.

### 4.3. $IE_1^4$ deki Null Olmayan Çarpanlara Ayrılabilir Düz Yüzeyler

Bu bölümde null olmayan (spacelike ve timelike) çarpanlara ayrılabilir yüzeylerin düz olma koşulu verilmiş ve $IE_1^4$ Minkowski uzayında null olmayan çarpanlara ayrılabilir düz yüzeyler sınıflandırılmıştır.

Sonuç 4.6: S, $IE_1^4$ Minkowski uzayında (4.2) parametrizasyonu ile verilen null olmayan bir çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. S yüzeyinin düz olması için gerek ve yeter koşul;

$$\begin{bmatrix} \left(f_1'' f_1 g_1'' g_1 - f_1'^2 g_1'^2\right) C \\ -\left(f_1'' f_2 g_1 g_2'' + f_1 f_2'' g_1'' g_2 - 2 f_1' f_2' g_1' g_2'\right) B \\ +\left(f_2'' f_2 g_2'' g_2 - f_2'^2 g_2'^2\right) A \end{bmatrix} = 0 \tag{4.23}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Tanım 4.7: S, $IE_1^4$ Minkowski uzayında (4.2) parametrizasyonu ile verilen bir çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. (4.2) parametrizasyonu üzerinde $f_1 = f_2 = r(u)$, $g_1 = \cos v$, $g_2 = \sin v$ alınırsa S yüzeyinin parametrizasyonu;

$$S : X(u,v) = (u, v, r(u)\cos v, r(u)\sin v) \tag{4.24}$$

dir. (4.24) parametrizasyonu ile verilen yüzey $IE_1^4$ Minkowski uzayında eliptik tipte Aminov yüzeyi olarak tanımlanır [1, 3].

Teorem 4.8: S, $IE_1^4$ Minkowski uzayında (4.17) parametrizasyonu ile verilen eliptik tipteki Aminov yüzeyi olsun. S yüzeyinin düz yüzey olması için gerek ve yeter koşul;

$$-r''r\left(r^2+1\right) + r'^2\left(r'^2 - 1\right) = 0 \tag{4.25}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır [17].

İspat: S, $IE_1^4$ Minkowski uzayında (4.24) parametrizasyonu ile verilen eliptik tipteki Aminov yüzeyi olsun. S yüzeyi düz ise, Eşitlik (4.23) yardımıyla (4.25) diferensiyel denklemi elde edilir. Tersine Eşitlik (4.25) sağlanırsa S yüzeyi düzdür.

Teorem 4.9: S, $IE_1^4$ Minkowski uzayında (4.2) parametrizasyonu ile verilen bir null olmayan çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. S yüzeyi düz ise, aşağıdaki yüzeylerden biri ya da bir parçasıdır:

(1) $X(u,v)=(u,\ v, a_1 g_1(v), c_2 g_2(v))$,

(2) $X(u,v)=(u, v, b_1 f_1(u), b_2 f_2(u))$,

(3) $X(u,v)=(u, v, a_1 g_1(v), b_2 f_2(u))$,

(4) $X(u,v)=(u, v, b_1 f_1(u), b_2 g_2(v))$,

(5) $X(u,v)=(u, v, a_1 b_1, \exp(a_2 u+b_2)\exp(a_3 v+b_3))$,

(6) $X(u,v)=(u, v, a_1 b_1, (a_2 u+b_2)^{\frac{1}{1-\lambda}}(a_3 v+b_3)^{\frac{\lambda}{\lambda-1}})$,

(7) $X(u,v)=(u, v, \exp(a_1 u+b_1)\exp(a_2 v+b_2), \exp(a_3 u+b_3), \exp(a_3 \frac{a_i}{a_j} v+b_4))$,

(8) $X(u,v)=(u, v, r(u)\cos v, r(u)\sin v)$; $\quad u=\pm\int \frac{a_1 r^2(u)+1}{r^2(u)+1} dr(u)$.

Burada $i, j=1,2$, $i\neq j$ ve $a_k, b_k$ $k=1,...,4$ reel sabitlerdir.

İspat: S, $IE_1^4$ Minkowski uzayında (4.2) parametrizasyonu ile verilen bir null olmayan çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. (4.23) eşitliğinde $f_1'(u)=0, f_2'(u)=0$ veya $g_1'(v)=0, g_2'(v)=0$ veya $f_1'(u)=0, g_2'(v)=0$ ise $K=0$ dır. (1), (2), (3), (4) yüzeyleri elde edilir. Eğer $f_1'(u)=0, g_1'(v)=0$ ise,

$$f_2'' f_2 g_2'' g_2 - f_2'^2 g_2'^2 = 0 \tag{4.26}$$

bulunur. Bu eşitlikte $p(u)=\frac{df_2}{du}$ ve $q(v)=\frac{dg_2}{dv}$ alalım. $p(u)\neq 0$ ve $q(v)\neq 0$ ise,

$$f_2(u)p(u)\frac{dp}{df_2} g_2(v)q(v)\frac{dq}{dg_2} - (p(u)q(v))^2 = 0 \tag{4.27}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu eşitlik üzerinde u ve v parametrelerine bağlı fonksiyonları ayırarak;

$$\frac{f_2(u)\dfrac{dp}{df_2}}{p(u)} = \frac{q(v)}{g_2(v)\dfrac{dq}{dg_2}} = \lambda \tag{4.28}$$

elde edilir. Burada $\lambda$ bir reel sabittir.

(i) $\lambda = 1$ ise (4.28) eşitliğinden,

$$\left.\begin{aligned} f_2(u) &= \exp(a_2u + b_2) \\ g_2(v) &= \exp(a_3v + b_3) \end{aligned}\right\} \tag{4.29}$$

(ii) $\lambda \neq 1$ ise (4.28) eşitliğinden,

$$\left.\begin{aligned} f_2(u) &= (a_2u + b_2)^{\frac{1}{1-\lambda}} \\ g_2(u) &= (a_3v + b_3)^{\frac{\lambda}{\lambda-1}} \end{aligned}\right\} \tag{4.30}$$

bulunur. (5), (6) yüzeyleri elde edilir. Bununla birlikte $f_i'' f_i g_i'' g_i - f_i'^2 g_i'^2 = 0$ eşitliğinin $i = 1,2$ için sağlandığını varsayalım. Bu durumda;

$$\left.\begin{aligned} f_1(u) &= \exp(a_1u + b_1), \quad f_2(u) = \exp(a_3u + b_3), \\ g_1(v) &= \exp(a_2v + b_2), \quad g_2(v) = \exp(a_4v + b_4), \end{aligned}\right\} \tag{4.31}$$

elde edilir. Eşitlik (4.31) deki fonksiyonlar $B = 0$ ve $f_1'' f_2 g_1 g_2'' + f_1 f_2'' g_1'' g_2 - 2f_1' f_2' g_1' g_2' = 0$ eşitliklerinde yerine yazılırsa $a_4 = \dfrac{a_3 a_i}{a_j}$, i=1,2 ($i \neq j$) elde edilir. Buna göre (7) çarpanlara ayrılabilir düz yüzeyi bulunur.

Son olarak, eliptik tipteki Aminov yüzeyi, (4.2) parametrizasyonu ile verilen çarpanlara ayrılabilir yüzeyler sınıfından olduğundan (4.25) diferansiyel denkleminden $u = \pm\int \dfrac{a_1 r^2(u) - 1}{r^2(u) - 1} dr(u)$ bulunur ve (8) yüzeyi elde edilir.

## 4.4. $IE_1^4$ deki Null Olmayan Çarpanlara Ayrılabilir Minimal Yüzeyler

Bu bölümde null olmayan (spacelike ve timelike) çarpanlara ayrılabilir yüzeylerin minimal olma koşulu verilmiş ve $IE_1^4$ Minkowski uzayında null olmayan çarpanlara ayrılabilir minimal yüzeyler sınıflandırılmıştır.

Sonuç 4.10: S, $IE_1^4$ Minkowski uzayında (4.2) parametrizasyonu ile verilen bir null olmayan çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. S yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter koşul;

$$f_i'' g_i G + f_i g_i'' E - 2 f_i g_i F = 0 , \quad i = 1,2 \tag{4.32}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Teorem 4.11: S, $IE_1^4$ Minkowski uzayında (4.24) parametrizasyonu ile verilen eliptik tipteki Aminov yüzeyi olsun. S yüzeyinin minimal yüzey olması için gerek ve yeter koşul;

$$r''\left(1 + r^2\right) - r\left(1 + r'^2\right) = 0 \tag{4.33}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat: S, $IE_1^4$ Minkowski uzayında (4.24) parametrizasyonu ile verilen eliptik tipteki Aminov yüzeyi olsun. S minimal ise Eşitlik (4.32) yardımıyla (4.33) diferensiyel denklemi elde edilir. Tersine Eşitlik (4.33) sağlanırsa S yüzeyi minimaldir.

Teorem 4.12: S, $IE_1^4$ Minkowski uzayında (4.2) parametrizasyonu ile verilen bir null olmayan çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. S yüzeyi minimal ise, aşağıdaki verilen yüzeylerden biri ya da onların bir parçasıdır:

(1) $X(u,v) = \left(u, v, \left(a_1 u + a_2\right) b_1, \left(a_3 u + a_4\right) b_2\right)$,

(2) $X(u,v) = \left(u, v, a_1\left(b_1 v + b_2\right), a_2\left(b_3 v + b_4\right)\right)$,

(3) $X(u,v) = \left(u, v, \left(a_1 u + a_2\right) b_1, a_3\left(b_3 v + b_4\right)\right)$,

(4) $X(u,v) = \left(u, v, a_1 b_1, -\left(u + a_2\right)\dfrac{e^{b_3 v + b_4} + 1}{e^{b_3 v + b_4} - 1}\right)$,

(5) $X(u,v)=\left(u,v,a_1b_1,\tan(a_2u)(b_3v+b_4)\right)$,

(6) $X(u,v)=\left(u,v,\dfrac{-1-a_1^2+e^{\pm 2a_1^{\pm 1}(u+a_2)}}{2a_1e^{\pm a_1^{\pm 1}(u+a_2)}}\cos v,\dfrac{-1-a_1^2+e^{\pm 2a_1^{\pm 1}(u+a_2)}}{2a_1e^{\pm a_1^{\pm 1}(u+a_2)}}\sin v\right)$,

(7) $X(u,v)=\left(u,v,-(u+a_2)\dfrac{e^{b_3v+b_4}+1}{e^{b_3v+b_4}-1},-(u+a_2)\dfrac{e^{b_3v+b_4}+1}{e^{b_3v+b_4}-1}\right)$,

(8) $X(u,v)=\left(u,v,\tan(a_2u)(b_3v+b_4),\tan(a_2u)(b_3v+b_4)\right)$,

(9) $X(u,v)=(u,v,a_1b_1,f_2(u)g_2(v))$,

(10) $X(u,v)=(u,v,f_1(u)g_1(v),f_1(u)g_1(v))$,

Burada $a,b,a_j,b_j,c_j$, $j=1,...,4$ reel sabitler olup $f_i(u),g_i(v)$ fonksiyonları,

$$u=\int\frac{df_i(u)}{\sqrt{2a\ln f_i(u)+c_1}},\quad u=\int\frac{df_i(u)}{\sqrt{c_1{f_i}^4(u)-\frac{a}{2}}},\quad u=\int\frac{df_i(u)}{\sqrt{c_1{f_i}^{2(1+k)}(u)-c_2}},$$

$$v=\int\frac{dg_i(v)}{\sqrt{c_2{g_i}^4(v)-\frac{b}{2}}},\quad v=\int\frac{dg_i(v)}{\sqrt{2b\ln g_i(v)+c_2}},\quad v=\int\frac{dg_i(v)}{\sqrt{c_3{g_i}^{2(1-k)}(v)-c_4}},$$

denklemlerini sağlar [17].

İspat: S, $IE_1^4$ Minkowski uzayında (4.2) parametrizasyonu ile verilen bir çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. S yüzeyi minimal ise $H=0$ dır. Bu durumda Eşitlik (4.32) de birinci temel form katsayıları yerine yazılarak $i=1,2$ için,

$$\begin{aligned}&f_i''g_i(1+{f_1}^2{g_1}'^2+{f_2}^2{g_2}'^2)\\&+f_ig_i''(1+{f_1}'^2{g_1}^2+{f_2}'^2{g_2}^2)-2f_i'g_i'(f_1'f_1g_1'g_1+f_2'f_2g_2'g_2)=0,\end{aligned}\tag{4.34}$$

eşitliği elde edilir. $f_1'(u)=0$ ve $f_2'(u)=0$ ise Eşitlik (4.34) den $g_1''(v)=0$, $g_2''(v)=0$ dır. Benzer şekilde $g_1'(v)=0$ ve $g_2'(v)=0$ ise Eşitlik (4.34) den $f_1''(u)=0$, $f_2''(u)=0$ dır. (1) ve (2) yüzeyleri elde edilir. $f_2'(u)=0$ ve $g_1'(v)=0$ ise $f_1''(u)=0$, $g_2''(v)=0$ dır. (3) yüzeyi elde edilir. Eğer $f_1'(u)=0$ ve $g_1'(u)=0$ ise Eşitlik (4.34) $i=1$ için sağlanır. $i=2$ için,

$$\frac{f_2''(u)}{f_2(u)} + \frac{g_2''(v)}{g_2(v)}$$
$$+ (f_2''(u)f_2(u) - f_2'^2(u))g_2'^2(v) + (g_2''(v)g_2(v) - g_2'^2(v))f_2'^2(u) = 0 \quad (4.35)$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklemde $f_2''(u) = 0$ ya da $g_2''(u) = 0$ ise (4) ve (5) yüzeyleri elde edilir. $f_2''(u)g_2''(v) \neq 0$ ise (4.35) eşitliğinin önce u ya sonra v ye göre diferensiyeli alınırsa,

$$\frac{(f_2''(u)f_2(u) - f_2'^2(u))'}{(f_2'^2(u))'} = -\frac{(g_2''(v)g_2(v) - g_2'^2(v))'}{(g_2'^2(v))'} = k \quad (4.36)$$

bulunur. Bu eşitlikten,

$$(f_2''(u)f_2(u) - (1+k)f_2'^2(u)) = a \text{ ve } (g_2''(v)g_2(v) - (1+k)g_2'^2(v)) = b \quad (4.37)$$

dir. $a^2 + b^2 \neq 0$ olsun. Eşitlik (4.37) de $k = -1$ ise

$$f_2''(u)f_2(u) = a \text{ ve } (g_2''(v)g_2(v) - 2g_2'^2(v) = b \quad (4.38)$$

dir. Buradan (9) yüzeyi elde edilir. Eğer $f_1(u) = f_2(u)$, $g_1(v) = g_2(v)$ ise Eşitlik (4.34) $i = 1$ ve $i = 2$ için denktir. $i = 1$ alınırsa;

$$\frac{f_1''(u)}{f_1(u)} - \frac{g_1''(v)}{g_1(v)} + (f_1''(u)f_1(u) - f_1'^2(u))2g_1'^2(v) + (g_1''(v)g_1(v) - g_1'^2(v))2f_1'^2(u) = 0$$

$f_1''(u) = 0$ ya da $g_1''(u) = 0$ ise (7) ve (8) yüzeyleri elde edilir. $f_1''(u)g_1''(v) \neq 0$ ise,

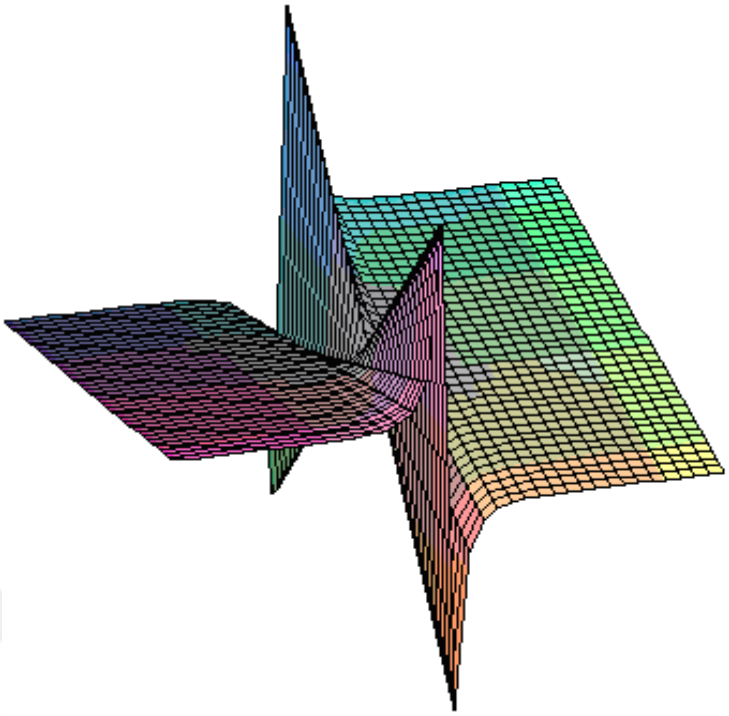
$$\frac{(f_1''(u)f_1(u) - f_1'^2(u))}{(f_1'^2(u))'} = -\frac{(g_1''(v)g_1(v) - g_1'^2(v))}{(g_1'^2(v))'} = k, \quad (4.38)$$

elde edilir. Bu ise (4.36) diferansiyel denklemi ile denk olduğundan (10) yüzeyi bulunur.

Örnek 4.13: Teorem 4.12 de verilen minimal yüzeylerden (7) yüzeyi için $a_2 = 1$, $b_3 = 2$, $b_4 = 0$ seçilirse, bu yüzeyin

$$\text{plot3d}([x, y, z + w], x = a..b, y = c..d), \quad a, b, c, d \in IR$$

Mapple çizim komutu ile $3-$boyutlu uzaya izdüşümü Şekil 4.1. de verilmiştir.



Şekil 4. 1. Teorem 4.12. deki (7) nolu yüzeyin izdüşümü

## 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

$4-$boyutlu Öklid uzayında çarpanlara ayrılabilir yüzeyler tanımlanarak bu yüzeylerin Gauss eğriliği, ortalama eğrilik vektörü ve normal eğrilik fonksiyonu elde edilmiştir. $IE^4$ uzayında çarpanlara ayrılabilir yüzeylerin Wintgen ideal yüzeyi olma koşulu verilmiştir. Çarpanlara ayrılabilir yüzeyin eğrilik elipsi yardımıyla bazı sınıflandırmalar yapılmıştır. Ayrıca çarpanlara ayrılabilir yüzeylerin 4-boyutlu Minkowski uzayında tanımı verilerek bu uzaydaki Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği hesaplanmıştır. Bu fonksiyonlar yardımıyla düz ve minimal null olmayan çarpanlara ayrılabilir yüzeyler sınıflandırılmıştır.

Bu tezde çarpanlara ayrılabilir yüzey yapısı teorik olarak değerlendirilmiştir. Daha sonra bu yüzeyler uygulamaya aktarılarak yeni çalışmalara kaynak olabilir.

## KAYNAKLAR


[1] Aminov Y. A., Surfaces in $IE^4$ with a Gaussian Curvature Coinciding with a Gaussian Torsion up to sign, *Mathematical Notes*, 1994, **56**, 5-6.

[2] Akçay E., $IE^n$ deki Wintgen İdeal Yüzeylerin Bir Karakterizasyonu, Yüksek Lisans Tezi, Uludağ Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Bursa, 2013, 343154.

[3] Arslan K. and Bulca B., Surfaces Given with the Monge Patch in $IE^4$, *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*, 2013, **9**(4), 435-447.

[4] Arslan K., Bayram B. K., Bulca B., Öztürk G., Generalized Rotation Surfaces in $IE^4$, *Results in Mathematics*, 2012, **61**(3-4), 315-327.

[5] Arslan K., Bulca B., Milousheva V., Benz Surfaces Induced by Rotational Surfaces in $IE^4$, *Differ. Geom. Dyn. Syst.*, 2012, **14**, 5-18.

[6] Arslan K., Bayram B. K., Bulca B., Kim Y. H., Murathan C., Öztürk G., Rotational Embeddings in $IE^4$ with Pointwise 1-Type Gauss Map, *Turk J Math*, 2011, **35**, 493-499.

[7] Arslan K., Bulca B., Bayram B. K., Kim Y. H., Murathan C., Öztürk G., Tensor Product Surfaces with Pointwise 1-Type Gauss Map, *Bull. Korean Math. Soc.*, 2011, **48**(3), 601-609.

[8] Arslan K., Bayram B. K., Bulca B., Kim Y. H., Murathan C., Öztürk G., Vranceanu Surface in $IE^4$ with Pointwise 1- Type Gauss Map, *Indian J. Pure Appl. Math.*, 2011, **42**(1), 41-51.

[9] Aydın M. E., Ogrenmiş A. O., Linear Weingarten Factorable Surfaces in Isotropic Spaces, *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Mathematica*, 2017, **62**(2), 261-268.

[10] Aydın M. E., Ogrenmiş A. O., Ergüt M., Classification of Factorable Surfaces in the Pseudo-Galilean space, *Glasnic Mathematicki*, 2015, **50**(2), 441-451.

[11] Bayram B. K., Bulca B., Arslan K., Öztürk G., Superconformal Ruled Surfaces $IE^4$, *Math. Commun.*, 2009, **14**(2), 235-244.

[12] Bekkar M., Senoussi B., Factorable Surfaces In Three-Dimensional Euclidean and Lorentzian Spaces Satisfying $\Delta r_i = \lambda_i r_i$, *2012 Springer Basel AG*, DOI 10.107/s00022-012-0117-3.

[13] Bektaş B., Dursun U., Timelike Rotational Surfaces of Elliptic, Hyperbolic and Parabolic Types in Minkowski 4-space with Pointwise 1-type Gauss map, *Filomat*, 2015, **29**(3)**,** 381-392.

[14] Bulca B., $IE^4$ teki yüzeylerin bir karakterizasyonu, Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Bursa, 2012, 329387.

[15] Bulca B., Arslan K., Bayram B. K., Öztürk G., Spherical Product Surface in $IE^4$, *An. St. Univ. Ovidius Constanta*, 2012, **20**(1)**,** 41-54.

[16] Bulca B., Arslan K., Semiparallel Wintgen Ideal Surfaces in $IE^n$, *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, 2014, **67**(5)**,** 613-622.

[17] Büyükkütük S., Öztürk G., Spacelike Factorable Surfaces In Four-Dimensional Minkowski Space, *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, 2017, **9**(4), 12-20.

[18] Chen B.Y., *Geometry of Submanifolds*, Dekker, New York**,** 1973.

[19] Chen B.Y., On Wintgen Ideal Surfaces, *Proceedings of the Conference RIGA 2011 Riemannian Geometry and Applications*, Bucharest, Romania, 2011.

[20] Chen B.Y., Van Der Veken J., Marginally trapped surface in Lorentzian space forms with positive relative nullity, *Class. Quantum Grav.*, 2007, **24**, 551-563.

[21] Ganchev G., Milousheva V., On the Theory of Surfaces in the Four Dimensional Euclidean Space, *Kodai Math. J.*, 2008, **31**, 183-198.

[22] Ganchev G., Milousheva V., An Invariant Theory of Marginally Trapped Surfaces in Four Dimensional Minkowski space, *Journal of Mathematical Physics*, 2012, **53**(3), 033705.

[23] Ganchev G., Milousheva V., An Invariant Theory of Spacelike Surfaces in the Four-Dimensional Minkowski space, *Pliska Stud. Math. Bulgar*., 2012, **21**, 177-200.

[24] Ganchev G., Milousheva V., Timelike Surfaces with Zero Mean Curvature in Minkowski 4-space, *Israel Journal of Mathematics.*, 2013, **196**, 413-433.

[25] Geomans W., Surfaces in Three-Dimensional Euclidean and Minkowski Space, in Particular a Study of Weingarten Surfaces, PhD Thesis, Katholieke Universiteit Leuven- Faculty of Science, Leuven, 2010.

[26] Guadalupe I. V., Rodriguez L., Normal Curvature of Surfaces in Space Forms., *Pasific J. Math*., 1983, **106**(1), 95-103.

[27] Gutierrez Nunez J. M., Romero Fuster M.C., Sanchez-Bringas F., Codazzi Fields on Surfaces Immersed in Euclidean 4-space, *Osaka J. Math.*, 2008, **45**, 877-894.

[28] Gray A., A Monge Patch, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, 2nd ed*, FL: CRC Press, Boca Raton, 1997.

[29] Gray A., *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, Crc Pres., Boca Raton, 1998.

[30] Hacısalihoğlu H. H., *Diferansiyel Geometri*, İnönü Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, 1983.

[31] Haesen S., Ortega M., Marginally Trapped Surfaces in Minkowski 4-space Invariant Under a Rotation Subgroup of the Lorentz Group, *Gen Relativ Gravit*, 2009, **41,** 1819-1834.

[32] İyigün E., Arslan K., Öztürk G., A Characterization of Chen Surfaces in $IE^4$, *Bull. Malays. Math. Soc.*, 2008, **31**(2)**,** 209-215.

[33] Little J. A., On Singularities of Submanifolds of a Higher Dimensional Euclidean Space, *Ann. Math. Pura Appl.*, 1969, **83**, 261-335.

[34] Lopez R., Moruz M., Translation and Homothetical Surfaces in Euclidean Surfaces with Constant Curvature, J. *Korean Math. Soc.*, 2015, **52**(3), 523-535.

[35] Mello L. F., Mean Directionally Curved Lines on Surfaces Immersed in $IR^4$, *Publ. Math.* ,2003, **47**, 415-440.

[36] Mello L. F., Orthogonal Asymptotic Lines on Surfaces Immersed in $IR^4$, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 2009, **39**(5)**,** 1597-1612.

[37] Meng H., Liu H., Factorable Surfaces In 3-Minkowski Space, *Bull Korean Math. Soc.*, 2009, **46**(1), 155-169.

[38] Mochida D. K., Fuster M. D. C. R, Ruas M. A. S, The Geometry of Surfaces in 4-Space From a Contact Viewpoint, *Geometriae Dedicata*, 1995, **54** , 323-332.

[39] O'Neill B., *Elemantary Differantial Geometry*, Academic Press, 1966.

[40] Rouxel B., Ruled A-Submanifolds in Euclidean Space $IE^4$, *Soochow J. Math*., 1980, **6**, 117-121.

[41] Sederberg T. W., Anderson D. C., Steiner Surface Patches, IEEE Comp. *Graphics and Applications*, 1985, **5**, 23-36.

[42] Struik D., *Lectures on Classical Differential Geometry*, 2nd edn. Addison-Wesley, New York, 1961.

[43] Turgut A., 3-boyutlu Minkowski uzayında Spacelike ve Timelike Regle Yüzeyler, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, 1995, 45768.

[44] Turhan E., Altay G., Maximal and Minimal Surfaces of Factorable Surfaces in Heis3, *Int. J. Open Problems Compt. Math.*, 2010, **3**(2), 201-212.

[45] Van de Woestyne I., A New Characterization of Helicoids, Geometry and Topology of Submanifolds V, *World Sci. Publ. River Edge*, NJ, 1993.

[46] Van de Woestyne I., Minimal homothetical hypersurfaces of a Semi-Euclidean space, *Results Math.*, 1993, **27**(3), 333-342.

[47] Wintgen P., Sur 1'inegalite de Chen-Wilmore. C.R. *Acad. Sci. Paris* 288, 1979, 993-995.

[48] Wong Y. C., Contributions to the Theory of Surfaces in 4-space of Constant Curvature, *Trans. Amer. Math. Soc*., 1946, **59**, 467-507.

[49] Yu Y., Liu H., The factorable minimal surfaces, *Proceedings of the Eleventh International Workshop on Diff. Geom.*, 2007, **11**, 33-39.

# EKLER

**Ek-A**

Aşagıda elde edilen şekillerin çizimi ve elde edilen diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılan Maple kodları verilmiştir;

Tezin genelinde 4-boyutlu uzaylarda

$$X(u,v)=\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v),w(u,v)\big)$$

parametrizasyonu ile verilen yüzeylerin 3-boyutlu Öklid uzayına izdüşümleri Maple 11 programı yardımıyla

plot3d([x+y,z,w], x=a..b,y=c..d)

komutu kullanılarak çizdirilmiştir.

**1- (3.26) ve (4.28) diferansiyel denklemlerinin k=1 için Maple 11 programında çözümü**

ode:=diff(f(u),u,u)-diff(f(u),u)=0;

$$\frac{d^2}{du^2}f(u)-\left(\frac{d}{du}f(u)\right)=0$$

dsolve(ode);

$$f(u)=_C1+_C2e^{u}$$

ode:=diff(g(v),v,v)-diff(g(v),v)=0;

$$\frac{d^2}{dv^2}g(v)-\left(\frac{d}{dv}g(v)\right)=0$$

dsolve(ode);

$$g(v)=_C1+_C2e^{v}$$

**2- (3.26) diferansiyel denkleminin $k\neq 1$ için Maple 11 programında çözümü**

ode:=diff(f(u),u)-(f(u))^k=0;

$$\frac{d}{du}f(u)-f(u)^{k}=0$$

dsolve(ode);

$$f(u) = (u - uk + _C1)^{\frac{1}{1-k}}$$

ode:=diff(g(v),v)^k-g(v)=0;

$$\left(\frac{d}{dv}g(v)\right)^{k} - g(v) = 0$$

dsolve(ode);

$$g(v) = \left(\frac{vk - v + _C1k}{k}\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

**3- (3.33) diferansiyel denkleminin Maple 11 programında çözümü**

ode:=r(u)*diff(r(u),u,u)*(1+(r(u))^2)+((diff(r(u),u))^2)*(1+(diff(r(u),u))^2)=0;

$$r(u)\left(\frac{d^2}{du^2}r(u)\right)\left(1 + r(u)^2\right) + \left(\frac{d}{du}r(u)\right)^2\left(1 + \left(\frac{d}{du}r(u)\right)^2\right) = 0$$

dsolve(ode);

$$r(u) = _C1, \int^{r(u)} \frac{_C1_a^2 - 1}{\sqrt{(_C1_a^2 - 1)(1 + _a^2)}} d_a - u - _C2 = 0,$$

$$\int^{r(u)} \left(-\frac{_C1_a^2 - 1}{\sqrt{(_C1_a^2 - 1)(1 + _a^2)}}\right) d_a - u - _C2 = 0$$

**4- (3.45), (3.46) ve (4.37) diferansiyel denklemlerinin Maple 11 programında çözümü**

ode:=(diff(f(u),u,u))*f(u)-(1+k)*((diff(f(u),u))^2)-c=0;

$$\left(\frac{d^2}{du^2}f(u)\right)f(u) - (1+k)\left(\frac{d}{du}f(u)\right)^2 - c = 0$$

dsolve(ode);

$$\int^{f(u)} \frac{a^{-2-2k}(1+k)}{\sqrt{-a^{-2-2k}(1+k)(a^{-2-2k}c-_C1}}da-u-C_2=0,$$

$$\int^{f(u)}\left(-\frac{a^{-2-2k}(1+k)}{\sqrt{-a^{-2-2k}(1+k)(a^{-2-2k}c-C_1}}\right)da-u-C_2=0,$$

ode:=(diff(g(v),v,v))*g(v)-(1-k)*((diff(g(v),v))^2)-b=0;

$$\left(\frac{d^2}{dv^2}g(v)\right)g(v)-(1-k)\left(\frac{d}{dv}g(v)\right)^2-b=0$$

dsolve(ode);

$$\int^{g(v)}\left(-\frac{a^{-2+2k}(-1+k)}{\sqrt{a^{-2+2k}(-1+k)(a^{-2-2k}b+C_1}}\right)da-v-C_2=0,$$

$$\int^{g(v)} \frac{a^{-2+2k}(-1+k)}{\sqrt{a^{-2+2k}(-1+k)(a^{-2-2k}b-C_1}}da-v-C_2=0,$$

**5- (3.47) ve (4.38) diferansiyel denklemlerinin Maple 11 programında çözümü**

ode:=diff(f(u),u,u)*f(u)-c=0;

$$\left(\frac{d^2}{du^2}f(u)\right)f(u)-c=0$$

dsolve(ode);

$$\int^{f(u)} \frac{1}{\sqrt{-2c\ln(a)-2_C1c}}d_a-u-_C2=0,$$

$$\int^{f(u)} -\frac{1}{\sqrt{-2c\ln(a)-2_C1c}}d_a-u-_C2=0$$

**6- (3.48) ve (4.38) diferansiyel denklemlerinin Maple 11 programında çözümü**

ode:=diff(g(v),v,v)*g(v)-2*((diff(g(v),v))^2)-b=0;

$$\left(\frac{d^2}{dv^2}g(v)\right)g(v)-2\left(\frac{d}{dv}g(v)\right)^2-b=0$$

dsolve(ode);

$$\int^{g(v)} \frac{2}{\sqrt{-2b+2_C1a^4}} d_a - v - _C2 = 0,$$

$$\int^{g(v)} \left( -\frac{2}{\sqrt{-2b+2_C1a^4}} \right) d_a - v - _C2 = 0$$

**7- (3.50) diferansiyel denkleminin Maple 11 programında çözümü**

ode:=diff(r(u),u,u)*(1+(r(u))^2)- r(u)*(1+(diff(r(u),u))^2)=0;

$$\left(\frac{d^2}{du^2} r(u)\right)\left(1+r(u)^2\right) - r(u)\left(1+\left(\frac{d}{du} r(u)\right)^2\right) = 0$$

dsolve(ode);

$$r(u) = -\frac{1}{2}\frac{-1+_C1^2-\left(e^{u-C1}\right)^2\left(e^{-C2-C1}\right)^2}{e^{u-C1}e^{-C2-C1}_C1},$$

$$r(u) = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{_C1^2}{\left(e^{\frac{u}{-C1}}\right)^2\left(e^{\frac{-C2}{-C1}}\right)^2} - _C1^2 - 1\right)e^{\frac{u}{-C1}}e^{\frac{-C2}{-C1}}}{_C1}$$

**8- (4.25) diferansiyel denkleminin Maple 11 programında çözümü**

ode:=-diff(r(u),u,u)*r(u)*((r(u))^2+1)+(( diff(r(u),u,u))^2)*(( (diff(r(u),u))^2)+1)=0

$$-\left(\frac{d^2}{du^2} r(u)\right) r(u)\left(r(u)^2+1\right) + \left(\frac{d}{du} r(u)\right)^2\left(\left(\frac{d}{du} r(u)\right)^2 - 1\right) = 0$$

dsolve(ode);

$$r(u) = _C1, \int^{r(u)} \frac{_C1_a^2+1}{\sqrt{\left(_C1_a^2+1\right)\left(1+_a^2\right)}} d_a - u - _C2 = 0,$$

$$\int^{r(u)}\left(-\frac{_C1_a^2+1}{\sqrt{\left(_C1_a^2+1\right)\left(1+_a^2\right)}}\right)d_a-u-_C2=0$$

**9- (4.28) diferansiyel denkleminin $\lambda \neq 1$ için Maple 11 programında çözümü**

ode:=diff(f(u),u)-(f(u))^lambda=0;

$$\frac{d}{du}f(u)-f(u)^{\lambda}=0$$

dsolve(ode);

$$f(u)=\left(u-u\lambda+_C1\right)^{\frac{1}{1-\lambda}}$$

ode:=diff(g(v),v)^(lambda)-g(v)=0;

$$\left(\frac{d}{dv}g(v)\right)^{\lambda}-g(v)=0$$

dsolve(ode);

$$g(v)=\left(\frac{v\lambda-v+_C1\lambda}{\lambda}\right)^{\frac{\lambda}{\lambda-1}}$$

**10- (4.33) diferansiyel denkleminin Maple 11 programında çözümü**

ode:=diff(r(u),u,u)*(1+(r(u))^2)- r(u)*(1+(diff(r(u),u))^2)=0;

$$\left(\frac{d^2}{du^2}r(u)\right)\left(1+r(u)^2\right)-r(u)\left(1+\left(\frac{d}{du}r(u)\right)^2\right)=0$$

dsolve(ode);

$$r(u)=-\frac{1}{2}\frac{-1+_C1^2-\left(e^{u-_C1}\right)^2\left(e^{-_C2-_C1}\right)^2}{e^{u-_C1}e^{-_C2-_C1}_C1},$$

$$r(u) = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{-C1^2}{\left(e^{\frac{u}{-C1}}\right)^2\left(e^{\frac{-C2}{-C1}}\right)^2} - C1^2 - 1\right)e^{\frac{u}{-C1}}e^{\frac{-C2}{-C1}}}{-C1}$$

## KİŞİSEL YAYINLAR VE ESERLER

[1] **Büyükkütük S.**, Öztürk G., Spacelike Factorable Surfaces In Four Dimensional Minkowski Space, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, 2017, **9**(4), 12-20.

[2] **Büyükkütük S.**, Öztürk G., On Factorable Surfaces in Euclidean 4-Space, *14. International Geometry Symposium*, Pamukkale Üniversitesi, Denizli, 25-28 Mayıs 2016.

[3] **Büyükkütük S.**, Kişi İ., Öztürk G., Spacelike Factorable Surfaces In Four Dimensional Minkowski Space, *International Conference on Mathematics and Engineering*, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul, 10-12 Mayıs 2017.

[4] **Büyükkütük S.**, Kişi İ., Mishra V.N., Öztürk G., Some Characterizations of Curves in Galilean 3-space $G_3$, Facta Universitatis Series: Mathematics and Informatics, 2016, **31**, 503-512.

[5] **Büyükkütük S.**, Öztürk G., Constant Ratio Curves According to Parallel Transport Frame in Euclidean 4-Space $IE^4$, New Trends in Mathematical Sciences, 2015, **3**(4), 171-178.

[6] **Büyükkütük S.**, Öztürk G., Constant Ratio Curves According to Bishop Frame in Euclidean 3-Space $IE^3$, Gen. Math. Notes, 2015, **28**(1), 81-91.

[7] **Büyükkütük S.**, Kişi İ., Öztürk G., A Characterization Curves According to Parallel Transport Frame in Euclidean n-Space $IE^n$, New Trends in Mathematical Sciences, 2017, **5**(2), 61-68.

[8] **Büyükkütük S.**, Kişi İ., Öztürk G., On Constant Ratio Curves in Galilean Spaces, *4th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications IECMSA(2015)*, Athens, Greece, 31 August-03 September 2015.

[9] **Büyükkütük S.**, Öztürk G., On Constant Ratio Curves in Euclidean Spaces, *13. Ulusal Geometri Sempozyumu*, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul, 27-30 Temuuz 2015.

[10] **Büyükkütük S.**, Kişi İ., Öztürk G., A Characterization Non-null Curves According to Parallel Transport Frame in Minkowski Space-Time, *International Congress on Fundamental and Applied Sciences*, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul, 22-26 Ağustos 2016.

[11] **Büyükkütük S.**, Kişi İ., Öztürk G., A Characterization of Curves According to Parallel Transport Frame in Euclidean n-Space $IE^n$, *International*

*Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM 2016)*, Muğla, 19-23 Mayıs 2016.

[12] **Büyükkütük S.**, Kişi İ., Öztürk G., Spacelike Translation Surfaces in Minkowski 4-Space $IE_1^4$, *15th International Geometry Symposium*, Amasya Üniversitesi, Amasya, 3-6 Temmuz 2017.

[13] Kişi İ., **Büyükkütük S.**, Deepmala, Öztürk G., AW(k)-Type Curves According to Parallel Transport Frame in Euclidean Space $IE^4$, Facta Universitatis Series: Mathematics and Informatics, 2016, **31**, 885-905.

[14] Kişi İ., **Büyükkütük S.**, Öztürk G., Zor A., A New Characterization of Curves on Dual Unit Sphere, Journal of Abstract and Computational Mathematics, 2017, **2**(1), 71-76.

[15] Kişi İ., **Büyükkütük S.**, Öztürk G., Arslan K., AW(k)-Type Curves According to Parallel Transport Frame in Euclidean Space $IE^4$, *12. Ulusal Geometri Sempozyumu*, Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi, Bilecik, 23-26 Haziran 2014.

[16] Kişi İ., **Büyükkütük S.**, Öztürk G., Constant Ratio Quaternionic Curves in Euclidean 4-Space $IE^4$, *International Congress on Fundamental and Applied Sciences (ICFAS 2016),* Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul, 22-26 Ağustos 2016.

[17] Kişi İ., **Büyükkütük S.**, Öztürk G., Some Characterizations of Curves in Pseudo-Galilean 3-Space, . *14th International Geometry Symposium*, Pamukkale Üniversitesi, Denizli, 25-28 Mayıs 2016.

[18] Kişi İ., **Büyükkütük S.**, Öztürk G., A New Type Tubular Surface with Pointwise 1-Type Gauss Map in Euclidean 4-Space $IE^4$, *15th International Geometry Symposium*, Amasya Üniversitesi, Amasya, 3-6 Temmuz 2017.

[19] Kişi İ., **Büyükkütük S.**, Öztürk G., A New Characterization of Curves on Dual Unit Sphere, *International Conference on Mathematics and Engineering (ICOME-2017)*, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul, 10-12 Mayıs 2017.

[20] Öztürk G., **Büyükkütük S.**, Kişi İ., A Characterization of Curves in Galilean 4-Space $G_4$, Bulletin of Irannian Mathematical Society, 2017, **43**(3), 771-780.

[21] Öztürk G., Kişi İ., **Büyükkütük S.**, Constant Ratio Quaternionic Curves in Euclidean Spaces, Advances in Applied Clifford Algebras, 2017, **27**(2), 1659-1673.

[22] Öztürk G., **Büyükkütük S.**, Kişi İ., Arslan K., Some Characterizations of Curves in n-Dimensional Eucliean Space $IE^n$, *15th International Geometry Symposium*, Amasya Üniversitesi, Amasya, 3-6 Temmuz 2017.

[23] Öztürk G., Kişi İ., **Büyükkütük S.**, Constant Ratio Quaternionic Curves in Euclidean Spaces, *14th International Geometry Symposium*, Pamukkale Üniversitesi, Denizli, 25-28 Mayıs 2016.

## ÖZGEÇMİŞ

1988 yılında İzmit'te doğdu. İlköğretim ve lise eğitimini Kocaeli'nin Derince ilçesinde tamamladı. 2006 yılında girdiği Zonguldak Karaelmas Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümünden Matematikçi olarak mezun oldu. 2010-2012 yılları arasında Kocaeli Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı. 2012 yılında Matematik Anabilim dalında Doktora öğrenimine başladı.

2014 yılı itibariyle Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak görev yapmaktadır.