**KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

# GENELLEŞTİRİLMİŞ HİPERHARMONİK SAYILAR VE BU SAYILARIN BAZI ÖZELLİKLERİ

**GİZEM BİLGİN**

**KOCAELİ 2018**

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

# GENELLEŞTİRİLMİŞ HİPERHARMONİK SAYILAR VE BU SAYILARIN BAZI ÖZELLİKLERİ

GİZEM BİLGİN

Doç. Dr. Neşe ÖMÜR
Danışman Kocaeli Universitesi

Prof. Dr. Refik KESKİN
Jüri Üyesi, Sakarya Universitesi

Doç. Dr. Yücel TÜRKER ULUTAŞ
Jüri Üyesi, Kocaeli Universitesi



Tezin Savunulduğu Tarih: 08.01.2018

## ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca kıymetli bilgi ve tecrübeleri ile bana yol gösterici olan değerli danışman hocam Doç. Dr. Neşe ÖMÜR'e sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Ayrıca eğitim hayatım boyunca beni yalnız bırakmayan her daim yanımda olan aileme ve eşime sevgi ve minnetlerimi sunarım.

Şubat-2018 Gizem BİLGİN

## İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR ..... i
İÇİNDEKİLER ..... ii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ ..... iii
ÖZET ..... iv
ABSTRACT ..... v
GİRİŞ ..... 1
1. GENEL BİLGİLER ..... 2
1.1. Harmonik Sayılar ..... 6
1.2. Harmonik Sayıları ile Verilen Hiperharmonik Sayılar ..... 10
1.3. m Mertebeli Genelleştirilmiş Harmonik Sayıları ile Verilen Hiperharmonik Sayılar ..... 13
2. GENELLEŞTİRİLMİŞ HİPERHARMONİK SAYILAR VE BU SAYILARIN BAZI ÖZELLİKLERİ ..... 23
3. SONUÇLAR VE ÖNERİLER ..... 48
KAYNAKLAR ..... 49
KİŞİSEL YAYINLAR VE ESERLER ..... 50
ÖZGEÇMİŞ ..... 51

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

| | |
|---|---|
| $\in$ | : Eleman |
| $\sum$ | : Toplam işareti |
| $\prod$ | : Çarpım işareti |
| $\binom{a}{b}$ | : Binom katsayısı |
| $M=[m_{ij}]$ | : $m_{ij}$ terimli matrisler |
| $\|M\|$ | : M matrisinin determinantı |
| $H_n$ | : Harmonik sayı |
| $H_n^r$ | : r mertebeli hiperharmonik sayı |
| $H_{n,m}$ | : m mertebeli genelleştirilmiş harmonik sayı |
| $H_{n,m}^r$ | : m mertebeli genelleştirilmiş harmonik sayı ile elde edilen r mertebeli genelleştirilmiş hiperharmonik sayı |
| $H_n(\propto)$ | : Genelleştirilmiş harmonik sayı |
| $H_n^r(\propto)$ | : Genelleştirilmiş harmonik sayı ile elde edilen r mertebeli genelleştirilmiş hiperharmonik sayı |
| $\mathbb{N}$ | : Doğal sayılar |
| $\mathbb{Z}^+$ | : Pozitif tam sayılar |

## GENELLEŞTİRİLMİŞ HİPERHARMONİK SAYILAR VE BU SAYILARIN BAZI ÖZELLİKLERİ


## ÖZET

Bu çalışmada, $H_n(\propto)$ genelleştirilmiş harmonik sayısı kullanarak $H_n^r(\propto)$ r mertebeli genelleştirilmiş hiperharmonik sayısı tanımlandı. Ayrıca r mertebeli genelleştirilmiş hiperharmonik sayısı ele alınarak bazı yeni özdeşlikler elde edilip matrisler üzerine uygulamaları araştırıldı.



**Anahtar Kelimeler**: Binom Katsayısı, Harmonik Sayı, Hiperharmonik Sayı, Matris, Özdeşlik.

**GENERALİZED HYPERHARMONIC NUMBERS AND SOME PROPERTİES OF THESE NUMBERS**

**ABSTRACT**

In this study, using the generalized harmonic numbers $H_n(\propto)$, we defined a generalized hyperharmonic number of order r $H_n^r(\alpha)$. Also, we gave some new identities and applications on matrices with these numbers.

**Keywords:** Binomial Coefficient, Harmonic Numbers, Hyperharmonic Numbers, Matrix, Identities.

## GİRİŞ

Bu çalışmada $H_n(\alpha)$ genelleştirilmiş harmonik sayısı kullanarak $H_n^r(\alpha)$ r mertebeli genelleştirilmiş hiperharmonik sayısı tanımlandı. Ayrıca genelleştirilmiş harmonik sayısını ve r mertebeli genelleştirilmiş hiperharmonik sayısı ele alınarak bazı yeni özdeşlikler ve matrisler üzerine uygulamalar araştırıldı.

Bu tez genel bilgiler, genelleştirilmiş hiperharmonik sayılar ve uygulamaları, sonuç ve öneriler olmak üzere üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, konu ile ilgili temel tanım ve teoremler ele alındı. Matris tanımları, Pascal matrisi ve bazı özel teoremler verildi. Ayrıca harmonik sayıların tanımı ve özdeşlikleri verildi. Harmonik sayılar ile verilen hiperharmonik sayılar ele alındı. Harmonik sayılar ile hiperharmonik sayılar aralarındaki ilişkiler incelendi ve literatür araştırması yapılarak konu ile ilgili çalışmaların özetleri verildi. Bölümün sonunda m mertebeli genelleştirilmiş harmonik sayıları ile verilen hiperharmonik sayılar verildi. Bu sayılar ile ilgili bazı ilginç sonuçlar ele alındı.

İkinci bölümde, $H_n(\alpha)$ genelleştirilmiş harmonik sayısı ile ilgili bazı özdeşlikler verildi ve $H_n^r(\alpha)$ r mertebeli genelleştirilmiş hiperharmonik sayısı tanımlandı. Bu sayıları kullanarak yeni özdeşlikler elde edildi ve yeni matrisler üzerinde çalışmalar yapıldı.

Üçüncü bölümde ise genelleştirilmiş harmonik sayılar ve r mertebeli genelleştirilmiş hiperharmonik sayılar arasındaki ilişkiler belirtildi. Bu çalışmayla elde edilen yeni r mertebeli genelleştirilmiş hiperharmonik sayılar ile birçok yeni toplam ve özdeşlikler ele alınabileceği söylendi.

## 1. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde ileriki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel bilgiler ve literatür araştırması verilecektir.

Tanım 1.1. $n\in\mathbb{N}$ için $(a_n)$ dizi olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

toplamına sonlu toplam denir.

Tanım 1.2. F bir cisim ve $a_{ij} \in F$, $1\leq i\leq m$, $1\leq j\leq n$, olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2}\dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklindeki bir tablo m satır ve n sütunlu bir matris olarak adlandırılır [1].

Tanım 1.3. $A=[a_{ij}]$ , $B=[b_{ij}]\in F_{m\times n}$ matrisler olsun. Her $1\leq i\leq m$, $1\leq j\leq n$ için $a_{ij}=b_{ij}$ oluyorsa, yani A ve B matrislerinin karşılıklı elemanları birbirine eşit ise, A ve B matrislerine eşit matrisler denir ve A=B ile gösterilir [1].

Tanım 1.4. $A=[a_{i,j}]$ , $B=[b_{i,j}]\in F_{m\times n}$ matrisler olmak üzere,

$$[a_{i,j}]+[b_{i,j}]=[a_{i,j}+b_{i,j}]$$

ve

$k\in F$ için,

$$k.[a_{i,j}]=[ka_{i,j}]$$

işlemlerine sırasıyla matris toplamı ve bir matrisin bir skaler ile çarpımı denir [1].

Tanım 1.5. $A=[a_{i,j}]\in F_{m\times r}$ , $B=[b_{i,j}]\in F_{r\times n}$ve $c=[c_{i,j}]\in F_{m\times n}$ olsun.

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}$$

olmak üzere $[c_{i,j}]$ matrisine A ve B matrislerinin çarpımı denir [1].

Tanım 1.6. $A=[a_{i,j}]\in F_{n\times n}$ kare matrisi bir skaler matris olmak üzere her i=1,2,…,n için $a_{i,i}=1$ oluyorsa A matrisine birim matris denir ve n mertebeli birim matris $I_n$ ile gösterilir [1].

Tanım 1.7. $A=[a_{i,j}]\in F_{n\times n}$ kare matrisinde $i > j$ için $a_{i,j}=0$ ise A matrisine üst üçgensel matris denir [1].

Tanım 1.8. $A=[a_{i,j}]\in F_{n\times n}$ kare matrisinde $i < j$ için $a_{i,j}= 0$ ise A matrisine alt üçgensel matris denir [1].

Tanım 1.9. $A=[a_{i,j}]\in F_{n\times n}$ matrisi verilsin. A matrisinin kendisi ile k defa çarpımına A matrisnin k. kuvveti denir ve bu matris $A^k$ ile gösterilir [1].

Tanım 1.10. $A=[a_{i,j}]\in F_{n\times n}$ kare matris olsun. $\sigma\in S_n$bir permütasyon olmak üzere,

$$\sum_{\sigma\in S_n} s(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)}$$

toplamına A matrisinin determinantı denir ve bu toplam, detA veya |A| ile gösterilir [1].

Tanım 1.11.

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i\le j\le n} (x_j-x_i)$$

şeklinde tanımlı determinanta n. inci mertebeden Vandermonde determinantı denir.

Tanım 1.12. i,j=1,2,…,n için,

$$p_{i,j}=\binom{i+j}{i}$$

olmak üzere $P_n=[p_{i,j}]$ matrisine n mertebeli simetrik Pascal matrisi denir.

Ayrıca $P_n$ matrisinin terimleri,

$$p_{i,j}=p_{i-1,j}+p_{i,j-1}$$

bağıntısını sağlar [2,3].

Teorem 1.13.

$$q_{i,j}=\begin{cases}(-1)^{i-j}\binom{i-1}{j-1}, & \text{eğer } i\geq j \text{ ise}\\ 0, & \text{eğer } i<j \text{ ise}\end{cases}$$

terimli n. mertebeli matris $Q_n=\left[q_{i,j}\right]$ olsun. O zaman,

$$P_n^{-1}=Q_n$$

dır [4].

n mertebeli alt üçgensel Pascal matrisi,

$$l_{i,j}=\begin{cases}\binom{i}{j}, & \text{eğer } i\geq j \text{ ise}\\ 0, & \text{eğer } i<j \text{ ise}\end{cases}$$

terimleriyle tanımlanır ve $L_n=\left[l_{i,j}\right]$ ile gösterilir ve n mertebeli üst üçgensel Pascal matrisi de,

$$u_{i,j}=\begin{cases}\binom{j}{i}, & \text{eğer } j\geq i \text{ ise}\\ 0, & \text{eğer } j<i \text{ ise}\end{cases}$$

terimleriyle tanımlanır ve $U_n=[u_{i,j}]$ ile gösterilir [2].

Örneğin; n=5 için,

$$L_5=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U_5=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Ayrıca herhangi bir pozitif n tamsayısı için,

$U_n=(L_n)^T$

dir [4].

Teorem 1.14. $P_n$ n mertebeli simetrik Pascal matrisi, $L_n$ n mertebeli alt üçgensel Pascal matrisi ve $U_n$ n mertebeli üst üçgensel Pascal matrisi olmak üzere,

$P_n=L_nU_n$

dir.

Sonuç 1.15. $P_n$ n mertebeli simetrik Pascal matrisi olmak üzere,

$\det(P_n)=1$

dir.

Tanım 1.16. $(a_n)_{n\in N}$ dizisinin üreteç fonksiyonu,

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k$$

şeklindedir. Örneğin; $(1)_{n\in N}$ dizisinin üreteç fonksiyonu,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} x^k=\frac{1}{1-x}$$

dir.

## 1.1. Harmonik Sayılar

Antik zamanlardan beri harmonik sayılar ile ilgili çalışmalar yapılmıştır. Halen günümüzde harmonik sayılar üzerine çalışmalar yapılmaktadır. Ayrıca harmonik sayıların bazı genellemeleri yapılmıştır. Bu tezde bu genellemelere dayanarak hiperharmonik sayıların tanımları ve bu sayılar üzerine bazı özellikler verilmiştir.

Tanım 1.1.1. $n\in\mathbb{N}$ için,

$$H_0=0,\quad H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

şeklindeki rasyonel sayılara harmonik sayılar denir.

Harmonik sayıların ilk birkaç tanesi,

$$1,\frac{3}{2},\frac{11}{6},\frac{25}{12},\frac{137}{60},\frac{49}{20},\dots$$

şeklindedir.

Harmonik sayıların tanımından,

$$H_0=0,\quad H_n=\frac{1}{n}+H_{n-1}$$

tekrarlama bağıntısının sağlandığı açıktır. Ayrıca n. inci harmonik sayısının integral gösterimi,

$$H_n=\int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}\,dx$$

şeklindedir.

Teorem 1.1.2. $n\geq 1$ için,

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=H_n$$

dir.

Kanıt:

$$H_n = \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}\,dx$$

integralinde x=1-u dönüşümü yapılırsa,

$$H_n = -\int_1^0 \frac{1-(1-u)^n}{u}\,du$$

elde edilir. Buradan binom özdeşliğinden n. inci harmonik sayısı,

$$H_n = \int_0^1 \left[ -\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} u^{k-1} \right] du$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \int_0^1 u^{k-1}\,du$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k}$$

şeklinde toplam gösterimine de sahiptir.

Lemma (Abel's Lemma) 1.1.3. $k \geq 1$ için, $\{u_k\}$ ve $\{v_k\}$ dizileri $U_0=V_0=0$,

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

ve

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$$

olacak şekilde iki gerçel dizi olsun. O zaman,

$$\sum_{k=1}^{n} u_k V_k + \sum_{k=1}^{n} v_k U_{k-1} = U_n V_n$$

dir [5].

Teorem 1.1.4. n, m≥ 1 için,

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k+m}{m}H_{k+m}=\binom{n+m+1}{m+1}H_{n+m+1}-\frac{1}{m+1}\binom{n+m+1}{m+1}-H_m \qquad (1.1)$$

dir.

Kanıt:

Lemma 1.1.3 te,

$$v_k=\frac{1}{k+m},\qquad u_k=\binom{k+m}{m},\qquad V_k=\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j+m}=H_{k+m}-H_m,$$

$$U_k=\sum_{j=1}^{k}\binom{j+m}{m}=\binom{k+m+1}{m+1}-1$$

alınırsa,

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k+m}{m}H_{k+m}-H_m\sum_{k=1}^{n}\binom{k+m}{m}$$

$$=\left[\binom{n+m+1}{m+1}-1\right](H_{n+m}-H_m)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+m}\left[\binom{k+m}{m+1}-1\right]$$

olur. Buradan,

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k+m}{m}=\binom{n+m+1}{m+1}-1$$

özdeşliğinden,

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k+m}{m}H_{k+m}=\binom{n+m+1}{m+1}H_{n+m}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+m}\binom{k+m}{m+1}-H_m$$

elde edilir. Böylece,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+m}\binom{k+m}{m+1}=\frac{1}{m+1}\binom{n+m}{m+1}$$

eşitliği yukarıda yerine yazılırsa,

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k+m}{m}H_{k+m}=\binom{n+m+1}{m+1}H_{n+m}-\frac{1}{m+1}\binom{n+m}{m+1}-H_m$$

$$=\binom{n+m+1}{m+1}H_{n+m+1}-\frac{1}{n+m+1}\binom{n+m+1}{m+1}-\frac{1}{m+1}\binom{n+m}{m+1}-H_m$$

bulunur. Ayrıca,

$$\frac{1}{n+m+1}\binom{n+m+1}{m+1}+\frac{1}{m+1}\binom{n+m}{m+1}=\frac{1}{m+1}\binom{n+m+1}{m+1}$$

eşitliği yukarıda yerine yazılırsa (1.1) deki toplam kanıtlanmış olur [5].

Son yıllarda harmonik sayıları içeren birçok özdeşlik verilmiştir. Bunlardan birkaçını kanıtsız olarak aşağıdaki gibi verebiliriz:

$n \geq 1$ için,

$$\sum_{k=1}^{n-1}H_k=nH_n-n,$$

$$\sum_{k=m}^{n-1}\binom{k}{m}H_k=\binom{n}{m+1}\left(H_n-\frac{1}{m+1}\right),$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}H_k=2^n\left(H_n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k2^k}\right),$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}\binom{n}{k}=H_{n+1}^2-H_n^2=\left(\frac{1}{n+1}\right)^2+\frac{2}{n+1}H_n,$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^kH_k=-\frac{1}{n},$$

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{2k}H_k=2^{n-1}\left(H_n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k2^{k-1}}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n2^{n-1}}\right),$$

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{2k+1}H_k=2^{n-1}\left(H_n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k2^{k-1}}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n2^{n-1}}\right),$$

ve

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_{n-k}H_k=F_{2n}H_n-\sum_{k=1}^{n}\frac{F_{2n-k}}{k},$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}L_{n-k}H_k=L_{2n}H_n-\sum_{k=1}^{n}\frac{L_{2n-k}}{k}$$

şeklindedir. Burada $F_n$ ve $L_n$ sayıları, sırasıyla n. inci Fibonacci ve Lucas sayılarıdır [5,6,7,8].

### 1.2. Harmonik Sayıları ile Verilen Hiperharmonik Sayılar

Tanım 1.2.1. $H_n^0=\frac{1}{n}$ ve $r<0$ veya $n\leq 0$ için $H_n^r=0$ olmak üzere $n,r\geq 1$ için,

$$H_n^r=\sum_{k=1}^{n}H_k^{r-1} \tag{1.2}$$

sayıları r mertebeli hiperharmonik sayılar olarak tanımlanır [9].

Özellikle eşitlik (1.2) de r =1 alınırsa $H_n^1=H_n$ n.inci harmonik sayısıdır.

Hiperharmonik sayıların tanımından,

$H_n^r=H_{n-1}^r+H_n^{r-1}$

tekrarlama bağıntısının var olduğu görülür.

Harmonik sayılar ve hiperharmonik sayılar arasındaki ilişkiyi veren eşitlik aşağıdaki gibidir.

Teorem 1.2.2. $r\geq 2$ için,

$$H_n^r=\binom{n+r-1}{r-1}(H_{n+r-1}-H_{r-1})$$

dir [4,6,9,10].

Kanıt:

r üzerinde tümevarım yöntemini uygulayalım.

Hiperharmonik sayıların tanımından

$$H_n^2=\sum_{k=1}^{n} H_k \tag{1.3}$$

olur. Ayrıca teorem 1.1.4 de m=0 alınırsa,

$$\sum_{k=1}^{n} H_k=\binom{n+1}{1}(H_{n+1}-H_1) \tag{1.4}$$

elde edilir. Böylece, (1.3) ve (1.4) den,

$$H_n^2=\binom{n+1}{1}(H_{n+1}-H_1)$$

olsun. O halde r=2 için istenilen elde edildi.

(r-1) için iddianın doğru olduğunu kabul edelim, yani

$$H_n^{r-1}=\binom{n+r-2}{r-2}(H_{n+r-2}-H_{r-2})$$

dır. Şimdi r için iddianın doğru olduğunu gösterelim.

$r \geq 3$ bir tamsayısı için,

$$H_n^r=\sum_{k=1}^{n} H_k^{r-1}=\sum_{k=1}^{n}\binom{k+r-2}{r-2}H_{k+r-2}-H_{r-2}\sum_{k=1}^{n}\binom{k+r-2}{r-2}$$

olur. Teorem 1.1.4 de m = r-2 alınırsa,

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k+r-2}{r-2}H_{k+r-2}=\binom{n+r-1}{r-1}H_{n+r-1}-\frac{1}{r-1}\binom{n+r-1}{r-1}-H_{r-2}$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k+r-2}{r-2}=\binom{n+r-1}{r-1}-1$$

olduğundan,

$$H_n^r = \binom{n+r-1}{r-1} H_{n+r-1} - \frac{1}{r-1}\binom{n+r-1}{r-1} - H_{r-2}\binom{n+r-1}{r-1}$$

$$= \binom{n+r-1}{r-1}(H_{n+r-1} - H_{r-1})$$

elde edilir. Böylece kanıt tamamlanmış olur.

Örnek 1.2.3.

Hiperharmonik sayıların tanımından,

$$H_4^3 = H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 + H_4^2$$

$$= H_1 + H_1 + H_2 + H_1 + H_2 + H_3 + H_1 + H_2 + H_3 + H_4$$

$$= 4H_1 + 3H_2 + 2H_3 + H_4$$

$$= 4 + \frac{9}{2} + \frac{11}{3} + \frac{25}{12} = \frac{57}{4}$$

olur. Böylece,

$$H_4^3 = \binom{6}{2}(H_6 - H_2)$$

dır.

Hiperharmonik sayılar ile ilgili bazı özdeşlikleri kanıtsız olarak aşağıda verelim:

$r \in \mathbb{Z}^+$ için,

1) $H_n^r = \sum_{k=1}^{n} \binom{n+r-k-1}{r-1} \frac{1}{k}$

2) $nH_n^r = \binom{n+r-1}{r} + rH_{n-1}^{r+1}$,

3) $1 \leq r \leq m$ için,

$$\binom{m-1}{r-1} H_n^m = \binom{n+m-r}{n} H_{n+m-r}^r - \binom{n+m-1}{n} H_{m-r}^r,$$

4) $\sum_{t=1}^{r} H_n^t = H_{n+1}^r - \frac{1}{n+1}$,

5) $0 \le m \le r-1$

$$H_n^r = \sum_{t=1}^{n} \binom{n+r-m-t-1}{r-m-1} H_t^m,$$

6) $0 \le m \le r$ için,

$$H_n^r = \sum_{t=0}^{m} \binom{m}{t} H_{n+t-m}^{r-t},$$

ve

7) $1 \le l \le r$ ve $1 \le m \le n$ için

$$H_n^r = \sum_{s=m}^{n} \binom{n+r-l-s}{r-l} H_s^{l-1} + \sum_{t=1}^{r} \binom{n+r-m-t}{n-m} H_{m-1}^t$$

dır [6,8,9,10].

### 1.3. m Mertebeli Genelleştirilmiş Harmonik Sayıları ile Verilen Hiperharmonik Sayılar

Tanım 1.3.1. $m \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$H_{n,m} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^m}, \qquad H_{0,m} = 0 \tag{1.5}$$

ile tanımlanan rasyonel sayılar m mertebeli genelleştirilmiş harmonik sayılar olarak adlandırılır. Burada m=1 alınırsa $H_n$ harmonik sayıları ve m=2 alınırsa $H_n$ (2) sayısının payları, Wolstenholme sayıları olarak bilinir.

Eşitlik (1.5) deki genelleştirmiş harmonik sayıları kullanarak genelleştirilmiş hiperharmonik sayılar aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 1.3.2. $n,m,r \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $r < 0$ veya $n \le 0$ için $H_{n,m}^r = 0$ ve $n \ge 1$ iken,

$$H^0_{n,m}=\frac{1}{n^r} \quad , \qquad H^r_{n,m}=\sum_{k=1}^{n} H^{r-1}_{k,m}$$

sayılarına r mertebeli genelleştirilmiş hiperharmonik sayılar denir.

Açık olarak görülür ki,

$r,n \geq 1$ için,

$$H^r_{n,m}=H^r_{n-1,m}+H^{r-1}_{n,m}$$

dır.

N. Ömür ve S. Koparal, r mertebeli genelleştirilmiş hiperharmonik sayıları kullanarak aşağıdaki teoremleri vermişlerdir [11].

Teorem 1.3.3. m ve r pozitif tamsayıları için,

$$H^r_{n,m}=\sum_{k=1}^{n} \binom{n+r-k-1}{r-1} \frac{1}{k^m}$$

dir.

Ayrıca yazarlar, $A_n=[H^r_{i,j}]$ ve $B_n=[H^j_{i,m}]$ matrislerinin çarpanlarını ve genelleştirilmiş hiperharmonik sayıları içeren bazı özdeşlikler elde etmişlerdir.

Teorem 1.3.4. $s \geq 1$ için $c_{i,j}=H^s_{i,j}$ terimli n mertebeli $C_n=[c_{i,j}]$ ve $s \geq r \geq 1$ için,

$$t_{i,j}=\begin{cases} (-1)^{i-j}\binom{s-r}{i-j}, & \text{eğer } i \geq j \text{ ise} \\ 0, & \text{eğer } i < j \text{ ise} \end{cases}$$

terimli n mertebeli alt üçgensel matris $T_n=[t_{i,j}]$ olmak üzere,

$$A_n=T_nC_n$$

dir [11].

Yukarıdaki teoremdeki matris çarpımının (n,m) inci terimlerinin eşitliğinden aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 1.3.5. $n > 0$ için,

$$H^{r}_{n,m}=(-1)^{n}\sum_{t=1}^{n}\binom{s-r}{n-t}(-1)^{t}H^{s}_{t,m}$$

dir [11].

Teorem 1.3.6.

$$e_{i,j}=\begin{cases}\dfrac{1}{(i-j+1)^{m}}-\dfrac{1}{(i-j)^{m}}, & \text{eğer } i>j \text{ ise}\\ 1, & \text{eğer } i=j \text{ ise}\\ 0, & \text{eğer } i<j \text{ ise}\end{cases}$$

terimli n mertebeli matris $E_n=[e_{i,j}]$ ve $d_{i,j}=\binom{i+j-1}{j}$ terimli n mertebeli Pascal matris $D_n=[d_{i,j}]$ olmak üzere,

$$B_n=E_n.D_n$$

dir [11].

Yukarıdaki teoremdeki matris çarpımının (n,m) inci terimlerinin eşitliğinden aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 1.3.7. $n \geq 1$için,

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{(n-k+1)^{m}}=H_{n,m}-H_{n-1,m-1}+nH_{n-1,m}-n.$$

dir [11].

Lemma 1.3.8. $n \geq 1$ için,

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{k}\right)=(-1)^{n}\frac{1}{(n+1)^{n}}$$

dir [5].

Teorem 1.3.9. $A_n=[H^r_{i,j}]$ ve $B_n=[H^j_{i,m}]$ n mertebeli matrisleri için,

$$|A_n|=(-1)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k^k}$$

ve

$$|B_n|=1$$

dir [11].

M. Bahşi ve S. Solak, m mertebeli,

$$H=\begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-2} & \cdots & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-2} & \frac{1}{n-3} & & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix}$$

matrisini ve n×k mertebeli,

$$G^r_{n,k}=\begin{bmatrix} H^r_n & H^{r+1}_n & \cdots & H^{r+k-1}_n \\ H^r_{n-1} & H^{r+1}_{n-1} & & H^{r+k-1}_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H^r_1 & H^{r+1}_1 & \cdots & H^{r+k-1}_1 \end{bmatrix}$$

matrisini ele alarak aşağıdaki lemmaları ve teoremleri vermişlerdir [12].

Lemma 1.3.10. $p_{i,j}=\binom{i+j-2}{j-2}$ terimli $P=\left[p_{i,j}\right]$ n×k boyutlu Pascal matrisi olmak üzere,

$$G^1_{n,k}=H.P$$

dir [12].

Lemma 1.3.11. $r \geq 1$ için,

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 1 & & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}$$

n mertebeli matris olmak üzere,

$G_{n,k}^{r+1}=A^r.H.P$

dir [12].

Teorem 1.3.12. $r \geq 1$ ve $s \geq 0$ olmak üzere,

$$H_n^{r+s}=\sum_{t=1}^{n}\binom{n+r-t-1}{r-1}H_t^s$$

dır [12].

Teorem 1.3.13. $G_{n,k}^r$ matrisi için,

$n\equiv 0,1 \pmod 4$ ise $\left|G_{n,n}^r\right|=1$

ve

$n\equiv 2,3 \pmod 4$ ise $\left|G_{n,n}^r\right|=-1$

dir [12].

K. Adegoke ve O. Layeni, bazı toplamları kullanarak harmonik sayılar ve m mertebeli genelleştirilmiş harmonik sayılar ile ilgili bazı özdeşlikler elde etmişlerdir. Şimdi bu toplam ve özdeşlikleri verelim [8].

Teorem 1.3.14. $f_{rs}$ singüler olmayan fonksiyon, $r,s\in\mathbb{Z}^+$ , $1\leq r$ , $s\leq n$ ve $n\in\mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{r}(f_{rs}+f_{sr})=\sum_{r=1}^{n}f_{rr}+\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}f_{sr} \qquad (1.6)$$

dir [8].

Özel olarak,

1) Eşitlik (1.6) da $f_{rs}=f_{sr}$ alınırsa,

$$2\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{r} f_{rs}=\sum_{r=1}^{n} f_{rr}+\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} f_{rs}$$

dır.

2) Eşitlik (1.6) da $f_{rs}=g_r h_s$ ise,

$$\sum_{r=1}^{n}\left\{g_r\sum_{s=1}^{r} h_s\right\}+\sum_{r=1}^{n}\left\{h_r\sum_{s=1}^{r} g_s\right\}=\sum_{r=1}^{n} g_r h_r+\left(\sum_{r=1}^{n} g_r\right)\left(\sum_{r=1}^{n} h_r\right) \tag{1.7}$$

dır. Burada, $f_{rs}=g_r g_s$ alınırsa,

$$2\sum_{r=1}^{n}\left\{g_r\sum_{s=1}^{r} g_s\right\}=\sum_{r=1}^{n} (g_r)^2+\left(\sum_{r=1}^{n} g_r\right)^2$$

elde edilir.

3) Eşitlik (1.6) da $f_{rs}=g_s$ alınırsa,

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{r} g_s=(n+1)\sum_{r=1}^{n} g_r+\sum_{r=1}^{n} r g_r \tag{1.8}$$

elde edilir [8].

Özdeşlik (1.8) kullanılarak aşağıdaki 1.3.15 teoremi verilebilir.

Teorem 1.3.15. $n,m\geq 1$ için

$$\sum_{k=1}^{n} H_{k,m}=(n+1)H_{n,m}-H_{n,m-1},$$

$$\sum_{k=1}^{n} kH_{k,m}=\frac{1}{2}\left(n(n+1)H_{n,m}+H_{n,m-1}-H_{n,m-2}\right),$$

ve

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 H_{k,m}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}H_{n,m}-\frac{1}{6}H_{n,m-1}+\frac{1}{2}H_{n,m-2}+\frac{1}{3}H_{n,m-3}$$

dir [8].

Teorem 1.3.15 te m=1 alınırsa harmonik sayılar ile ilgili aşağıdaki sonuçta verilen toplamlar elde edilebilir.

Sonuç 1.3.16. $n\geq 1$ için,

$$\sum_{k=1}^{n} H_k=(n+1)H_n-n,$$

$$\sum_{k=1}^{n} kH_k=\frac{1}{2}n(n+1)H_n-\frac{1}{4}n(n-1),$$

ve

$$\sum_{k=1}^{n} k^2H_k=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}H_n-\frac{n(n-1)(4n+1)}{36}$$

dir [8].

Teorem 1.3.17. $r,s\in\mathbb{Z}^+$ , $1\leq r,\ s\leq n,n\in\mathbb{Z}^+$ ve p,q,m,n,a,b gerçel sayılar olmak üzere,

$$f_{rs}=\frac{x^{pr}y^{qs}}{(r+a)^m(s+b)^n}$$

için,

$$\sum_{r=1}^{n}\left\{\frac{x^{pr}}{(r+a)^m}\sum_{s=1}^{r}\frac{y^{qs}}{(s+b)^n}\right\}+\sum_{r=1}^{n}\left\{\frac{y^{qr}}{(r+b)^n}\sum_{s=1}^{r}\frac{x^{ps}}{(s+a)^m}\right\}$$

$$=\sum_{r=1}^{n}\frac{(x^py^q)^r}{(r+a)^m(r+b)^n}+\left(\sum_{r=1}^{n}\frac{x^{pr}}{(r+a)^m}\right)\left(\sum_{r=1}^{n}\frac{y^{qr}}{(r+b)^n}\right)$$

dir [8].

Özel olarak p=q=0 alınırsa,

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{H_{r+b,n}}{(r+a)^m}+\sum_{r=1}^{n}\frac{H_{r+a,m}}{(r+b)^n}$$

$$=H_{n+a,m}H_{n+b,n}-H_{a,m}H_{b,n}+\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{(r+a)^m(r+b)^n} \quad (1.9)$$

dır.

Özdeşlik (1.8) ve (1.9) kullanılarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 1.3.18 n,m≥1 için,

$$2\sum_{k=1}^{n}\frac{H_{k,m}}{k}=H_{n,2m}+(H_{n,m})^2,$$

$$\sum_{k=1}^{n}H_{k,m}^2=(n+1)H_{n,m}^2+H_{n,2m-1}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{H_{k,m}}{k^{m-1}},$$

dır.

Teorem 1.3.18 de m=1 alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 1.3.19. n≥1 için,

$$2\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k}{k}=H_{k,2}+(H_n)^2,$$

$$\sum_{k=1}^{n}H_k^2=(n+1)H_n^2-(2n+1)H_n+2n$$

olur [8].

Tanım 1.3.20. $(\alpha,n)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{N}$ her sıralı ikilisi için,

$$H_n(\alpha):=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j\alpha^j}$$

rasyonel sayıları genelleştirilmiş harmonik sayıları olarak adlandırılır. $H_n(1)=H_n$, n.yinci harmonik sayısıdır [13].

Ayrıca, $L(\propto)=1-\frac{1}{\propto}$ olmak üzere,

$$H_n(\propto)=\int_{L(\propto)}^{1}\frac{1-(1-x)^n}{x}dx$$

formunda integral gösterimi vardır. Hatta $|q|>1$ ve $\propto\geq 1$olacak şekildeki $q\in\mathbb{R}$ ve $\propto\in\mathbb{R}^+$ için,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n(\propto)}{q^n}=\frac{q}{q-1}\ln\frac{\propto q}{\propto q-1},$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nH_n(\propto)}{q^n}=\frac{q}{(q-1)^2}\left(\ln\frac{\propto q}{\propto q-1}+\frac{q-1}{\propto q-1}\right)$$

dır [13].

Teorem 1.3.21. $\propto\geq 1$ ve $|q|>\frac{1}{4}$ olmak üzere $(\propto,a,b,q,m_1,m_2,k)\in(\mathbb{R}_0^+)^4\times\mathbb{N}^2\times N_0$ olsun.

$$\sigma_1:=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n(\propto)}{q^n}\varphi_n\left(\begin{matrix}m_1, & m_2\\ a, & b\end{matrix}\right)\sum_{j=0}^{k}\frac{\binom{k}{j}}{(-q)^j}\varphi_{n,j}\left(\begin{matrix}m_1, & m_2\\ a, & b\end{matrix}\right),$$

$$\sigma_2:=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nH_n(\propto)}{q^n}\varphi_n\left(\begin{matrix}m_1, & m_2\\ a, & b\end{matrix}\right)\sum_{j=0}^{k}\frac{\binom{k}{j}}{(-q)^j}\varphi_{n,j}\left(\begin{matrix}m_1, & m_2\\ a, & b\end{matrix}\right)$$

olarak tanımlayalım. O zaman,

$$\sigma_1=\frac{1}{(a+b+1)B(a+1,b+1)}\int_0^1 x^a(1-x)^b\left(1-\frac{x^{m_1}(1-x)^{m_2}}{q}\right)^{k-1}\times$$

$$\times\ln\frac{\propto q}{\propto q-x^{m_1}(1-x)^{m_2}}d_x,$$

$$\sigma_2=\frac{q}{(a+b+1)B(a+1,b+1)}\int_0^1 x^{a+m_1}(1-x)^{b+m_2}\left(1-\frac{x^{m_1}(1-x)^{m_2}}{q}\right)^{k-2}\times$$

$$\times\left(\ln\frac{\propto q}{\propto q-x^{m_1}(1-x)^{m_2}}+\frac{q-x^{m_1}(1-x)^{m_2}}{\propto q-x^{m_1}(1-x)^{m_2}}\right)d_x$$

dır. Burada n pozitif tamsayı ve

$$B(x,y)=\frac{(x-1)!(y-1)!}{(x+y-1)!}$$

Beta fonksiyonu olmak üzere,

$$\varphi_n\begin{pmatrix} m_1, & m_2 \\ a, & b \end{pmatrix}=\frac{1}{(a+b+1)B(a+1,b+1)}\int_0^1 t^{m_1n+a}(1-t)^{m_2n+b}d_t$$

şeklindedir.

Örnek 1.3.22.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n(\propto)}{\binom{2n}{n}}\cdot\frac{6n^2+25n+25}{8n^3+36n^2+46n+15}=\begin{cases} 4-\frac{2}{\sqrt{3}}\pi\alpha=1 & \text{ise,} \\ 4-\frac{7+4\sqrt{3}}{3(2+\sqrt{3})}\pi\propto=2+\sqrt{3} & \text{ise,} \\ 4-\frac{3+2\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{2})}\pi\propto=1+\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{ise,} \end{cases}$$

dır [13].

## 2. GENELLEŞTİRİLMİŞ HİPERHARMONİK SAYILAR VE BU SAYILARIN BAZI ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, ilk olarak genelleştirilmiş harmonik sayılar $H_n(\propto)$ ile ilgili bazı özdeşlikler verilecektir. Harmonik sayıların üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$$

dir. $H_n(\propto)$ genelleştirilmiş harmonik sayılarının üreteç fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.1.α pozitif gerçel sayı olmak üzere,

$$\sum_{k=1}^{\infty} H_k(\propto) x^k = \frac{1}{1-x} \ln\left(\frac{\propto}{\propto-x}\right)$$

dır.

Kanıt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} H_k(\propto) x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i\alpha^i} \right) x^k = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i\alpha^i} \sum_{k=i}^{\infty} x^k$$

olduğu kullanılarak,

$$\sum_{k=1}^{\infty} H_k(\propto) x^k = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \left(\frac{x}{\propto}\right)^i \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \left(\frac{x}{\propto}\right)^i$$

ve

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

olduğundan,

$$\ln\left(\frac{\propto}{\propto-x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{\propto}\right)^n$$

olduğu görülür. O zaman,

$$\sum_{k=1}^{\infty} H_k(\alpha)x^k=\frac{1}{1-x}\left(\ln\left(\frac{\alpha}{\alpha-x}\right)\right)=\frac{1}{1-x}\ln\left(\frac{\alpha}{\alpha-x}\right)^{-1}=-\frac{1}{1-x}\ln\left(\frac{\alpha}{\alpha-x}\right)$$

elde edilir. Böylece,

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n=\frac{1}{1-x}\ln\left(\frac{\alpha}{\alpha-x}\right)\sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n=\frac{1}{1-x}\ln\left(\frac{\alpha}{\alpha-x}\right)$$

olur.

Harmonik sayılar ile ilgili olan,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k+1}H_k=\frac{1}{n}$$

toplamının benzerini genelleştirilmiş harmonik sayısı için aşağıdaki teoremde verelim.

Teorem 2.2. $n\geq 1$ ve $\alpha\in\mathbb{R}^+$ için

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k H_k(\alpha)=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)^n$$

dir.

Kanıt:

Toplam özelliklerinden,

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k H_k(\alpha)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\alpha^k}\sum_{t=k}^{n}\binom{n}{t}(-1)^t=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\alpha^k}\left[-1-\sum_{t=1}^{k-1}\binom{n}{t}(-1)^t\right]$$

yazılabilir. Böylece,

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{r}{k}=(-1)^n\binom{r-1}{n}$$

toplamı yukarıda kullanırsa,

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k H_k(\alpha)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\alpha^k}\left[-1-\sum_{t=1}^{k-1}\binom{n}{t}(-1)^t\right]=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\frac{1}{k}\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^j$$

eşitliği elde edilir.

Ayrıca,

$$\sum_{j=1}^{n}\binom{n-1}{j-1}\frac{x^j}{j}=\frac{(1+x)^n}{n}+\frac{1}{n}$$

eşitliği kullanılırsa istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 2.3. $(\alpha,n)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{N}$

için $L(\alpha)=1-\frac{1}{\alpha}$ olmak üzere,

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-L(\alpha))^k}{k}=H_n(\alpha)-H_n$$

dir.

Kanıt:

$$H_n(\alpha)=\int_{L(\alpha)}^{1}\frac{1-(1-x)^n}{x}dx\ ,\quad x\neq 1$$

integralinde u=1-x dönüşümü yapılırsa,

$$H_n(\alpha)=\int_{1-L(\alpha)}^{0}\frac{u^n-1}{1-u}du=\int_{0}^{1-L(\alpha)}\frac{1-u^n}{1-u}du$$

integrali elde edilir. Tekrar burada v=1-u dönüşümü yapılırsa,

$$H_n(\alpha)=\int_{L(\alpha)}^{1}\frac{1-(1-v)^n}{v}dv$$

bulunur. Böylece binom toplamından,

$$H_n(\alpha)=\int_{L(\alpha)}^{1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}u^{k-1}du=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\int_{L(\alpha)}^{1}u^{k-1}du$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k-1}\frac{1-(L(\alpha))^k}{k}=H_n+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-L(\alpha))^k}{k}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-L(\alpha))^k}{k}=H_n(\alpha)-H_n$$

olur.

Teorem 2.4. n>m>1 için,

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{m}H_k(\alpha)=\binom{n+1}{m+1}H_n(\alpha)-\sum_{j=1}^{n}\binom{j}{m+1}\frac{1}{j\alpha^j}$$

dir

Kanıt: Toplam özelliklerinden,

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{m}H_k(\alpha)=\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{m}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j\alpha^j}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{m}\frac{1}{j\alpha^j}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n}\binom{k}{m}\frac{1}{j\alpha^j}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j\alpha^j}\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{m}-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j\alpha^j}\sum_{k=1}^{j-1}\binom{k}{m}$$

eşitliği yazılabilir. Ayrıca,

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{m}=\binom{n+1}{m+1}$$

toplamından,

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{m}H_k(\alpha)=\binom{n+1}{m+1}H_n(\alpha)-\sum_{j=1}^{n}\binom{j}{m+1}\frac{1}{j\alpha^j}$$

elde edilir.

Örneğin, Teorem 2.4 de $\alpha=1$ alınırsa,

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{m}H_k=\binom{n+1}{m+1}\left(H_{n+1}-\frac{1}{m+1}\right) \tag{2.1}$$

bulunur.

Sonuç 2.5. $n\geq 1$ için,

$$\sum_{k=1}^{n}H_k=(n+1)(H_{n+1}-1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}kH_k=\binom{n+1}{2}\left(H_{n+1}-\frac{1}{2}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2H_k=\left(\binom{n+1}{3}+\binom{n+2}{3}\right)H_{n+1}-\frac{2}{3}\binom{n+1}{3}-\frac{1}{2}\binom{n+1}{2}$$

dır.

Kanıt:

Eşitlik (2.1) de sırasıyla $m=0,1,2$ değerleri alınırsa istenilen sonuç elde edilir.

Şimdi, genel bilgilerde verilen Teorem 1.3.14 teki sonuçlara alternatif olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 2.6. $\propto\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$ ve $n\geq 1$ için,

1)

$$\sum_{k=1}^{n}H_k(\propto)=(n+1)H_n(\propto)-\frac{1-\propto^{-n}}{\propto-1},$$

2)

$$2\sum_{k=1}^{n}kH_k(\propto)=n(n+1)H_n(\propto)-\frac{n-n\propto+\propto^n-1}{\propto^n(\propto-1)^2},$$

3)

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 H_k(\alpha)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} H_n(\alpha)$$

$$+\frac{1}{3}\left(-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{n-n\alpha+\alpha^n-1}{\alpha^n(\alpha-1)^2}+\frac{n+1}{(\alpha-1)^2}\left(\frac{1}{\alpha^n}+1\right)-\frac{2\alpha}{(\alpha-1)^3}\left(1-\frac{1}{\alpha^{n+1}}\right)\right)$$

dır.

Kanıt:

1) Eşitlik (1.8) de verilen,

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{k} g_s = (n+1)\sum_{k=1}^{n} g_k - \sum_{k=1}^{n} k g_k$$

denkleminde $g_s=\frac{1}{s\alpha^s}$ alınırsa,

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{k} \frac{1}{s\alpha^s} = (n+1)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\alpha^k} - \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{\alpha^k}$$

olup istenilen sonuç kolaylıkla elde edilir.

2) Eşitlik (1.8) de verilen,

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{k} g_s = (n+1)\sum_{k=1}^{n} g_k - \sum_{k=1}^{n} k g_k$$

denkleminde $g_s=H_s(\alpha)$ alınırsa,

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{k} H_s(\alpha) = (n+1)\sum_{k=1}^{n} H_k(\alpha) - \sum_{k=1}^{n} kH_k(\alpha)$$

olup 1) deki toplam yukarıdaki eşitlikte yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)H_k(\alpha)-\frac{1-\alpha^{-k}}{\alpha-1}\right]=(n+1)\left[(n+1)H_n(\alpha)-\frac{1-\alpha^{-n}}{\alpha-1}\right]-\sum_{k=1}^{n} kH_k(\alpha)$$

$$2\sum_{k=1}^{n} kH_k(\alpha)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\alpha^{-k}}{\alpha-1}-\sum_{k=1}^{n}H_k(\alpha)+(n+1)^2H_n(\alpha)-(n+1)\frac{1-\alpha^{-n}}{\alpha-1}$$

$$2\sum_{k=1}^{n} kH_k(\alpha)=H_n(\alpha)\left[(n+1)^2-(n+1)\right]-\frac{1-\alpha^{-n}}{\alpha-1}n+\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\alpha^{-k}}{\alpha-1}$$

ve

$$2\sum_{k=1}^{n} kH_k(\alpha)=n(n+1)H_n(\alpha)+\frac{n-n\alpha+\alpha^n-1}{\alpha^n(\alpha-1)^2}$$

olarak bulunur.

3) Eşitlik (1.8) da verilen,

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{k} g_s=(n+1)\sum_{k=1}^{n} g_k-\sum_{k=1}^{n} kg_k$$

denkleminde $g_s=sH_s(\alpha)$ alınırsa,

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{k} sH_s(\alpha)=(n+1)\sum_{k=1}^{n} kH_k(\alpha)-\sum_{k=1}^{n} k^2H_k(\alpha)$$

elde edilir. Bu toplamda 1) ve 2) deki toplamlar yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(k(k+1)H_k(\alpha)+\frac{k-k\alpha+\alpha^k-1}{\alpha^k(\alpha-1)^2}\right)=(n+1)\sum_{k=1}^{n} kH_k(\alpha)-\sum_{k=1}^{n} k^2H_k(\alpha)$$

$$\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2H_k(\alpha)=\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n(n+1)H_n(\alpha)+\frac{n-n\alpha+\alpha^n-1}{\alpha^n(\alpha-1)^2}\right)-\frac{1}{2(\alpha-1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\alpha^k}+\frac{n}{2(\alpha-1)^2}-\frac{1}{2(\alpha-1)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\alpha^k}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2H_k(\alpha)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}H_n(\alpha)$$

$$+\frac{1}{3}\left(-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{n-n\alpha+\alpha^n-1}{\alpha^n(\alpha-1)^2}+\frac{n+1}{(\alpha-1)^2}\left(\frac{1}{\alpha^n}+1\right)-\frac{2\alpha}{(\alpha-1)^3}\left(1-\frac{1}{\alpha^{n+1}}\right)\right)$$

sonucu elde edilir.

Teorem 2.7. Her $(\propto, n) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{Z}^+$ için,

$$2\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k(\propto)}{k\propto^k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2\propto^{2k}}+(H_n(\propto))^2$$

dır.

Kanıt: Eşitlik (1.7) de verilen,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(g_k\sum_{s=1}^{k}h_s\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(h_k\sum_{s=1}^{k}g_s\right)=\sum_{k=1}^{n}g_kh_k+\left(\sum_{k=1}^{n}g_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}h_k\right)$$

denklemindef$_{ks}=g_kh_s$ olmak üzere,

$$f_{ks}=\frac{x^{pk}y^{qk}}{(k+a)\propto^{(k+a)}(s+b)\propto^{(sk+b)}}$$

yazılırsa,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x^{pk}}{(k+a)\propto^{(k+a)}}\sum_{s=1}^{k}\frac{y^{qk}}{(s+b)\propto^{(s+b)}}\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{y^{qk}}{(k+b)\propto^{(k+b)}}\sum_{s=1}^{k}\frac{x^{pk}}{(s+a)\propto^{(s+a)}}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{pk}y^{qk}}{(k+a)\propto^{(k+a)}(k+b)\propto^{(k+b)}}+\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{pk}}{(k+a)\propto^{(k+a)}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{y^{qk}}{(k+b)\propto^{(k+b)}}\right)$$

elde edilir. Burada p=q=0 alınırsa,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(k+a)\propto^{(k+a)}}\left(H_{k+b,\propto}-H_{b,\propto}\right)\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(k+b)\propto^{(k+b)}}\left(H_{k+a,\propto}-H_{a,\propto}\right)\right)=$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+a)(k+b)\propto^{2k+a+b}}+\left(H_{n+a,\propto}-H_{a,\propto}\right)\left(H_{n+b,\propto}-H_{b,\propto}\right)$$

ve buradan a=b=0 alınırsa,

$$2\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k(\propto)}{k\propto^k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2\propto^{2k}}+(H_n(\propto))^2$$

elde edilir.

Teorem 2.8. Her $(\propto, n) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{Z}^+$ için,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(H_k(\propto)\right)^2 = H_n(\propto^2)+(n+1)\left(H_n(\propto)\right)^2 - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k(\propto)}{\propto^k}$$

dır.

Kanıt: Eşitlik (1.8) de verilen,

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{k} g_s = (n+1)\sum_{k=1}^{n} g_k - \sum_{k=1}^{n} k g_k$$

denkleminde $g_s = \frac{H_s(\propto)}{s\propto^s}$ alınırsa,

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{k}\frac{H_s(\propto)}{s\propto^s} = (n+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k(\propto)}{k\propto^k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{H_k(\propto)}{\propto^k}$$

elde edilir. Burada Teorem 2.7 kullanılırsa,

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{k}\frac{H_s(\propto)}{s\propto^s} = (n+1)\left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2\propto^{2k}} + \frac{1}{2}(H_k(\propto))^2\right] - \sum_{k=1}^{n}\frac{H_k(\propto)}{\propto^k}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{k}\frac{1}{s^2\propto^{2s}} + \frac{1}{2}(H_k(\propto))^2\right) = (n+1)\left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2\propto^{2k}} + \frac{1}{2}(H_k(\propto))^2\right] - \sum_{k=1}^{n}\frac{H_k(\propto)}{\propto^k}$$

olur. Buradan,

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{k}\frac{1}{s^2\propto^{2s}} = -H_n(\propto^2)+(n+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2\propto^{2k}}$$

eşitliği yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(H_k(\propto)\right)^2 = H_n(\propto^2)+(n+1)\left(H_n(\propto)\right)^2 - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k(\propto)}{\propto^k}$$

elde edilir.

Teorem 2.9. $(\propto, n) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{Z}^+$ için,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)\propto^{2k}} = \frac{1}{\propto}\left(H_n(\propto) - \frac{1}{2}H_n(\propto^2)\right)$$

ve

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)\alpha^{2k}} = \frac{1}{\alpha}\left(H_{2n-1}(\alpha) - \frac{1}{2}H_{n-1}(\alpha^2)\right)$$

dır.

Kanıt:

$a_s \equiv s \pmod 2$

olup,

$$\sum_{k=1}^{s} f_k = \sum_{k=1}^{(s-a_s)/2} f_{2k} + \sum_{k=1}^{(s+a_s)/2} f_{2k-1}$$

eşitliğinde $f_k = \frac{1}{k\alpha^k}$ alınırsa,

$$H_s(\alpha) = \sum_{k=1}^{(s-a_s)/2} \frac{1}{2k\alpha^{2k}} + \sum_{k=1}^{(s+a_s)/2} \frac{1}{(2k-1)\alpha^{2k-1}}$$

bulunur. Böylece s=2n ve s=2n-1 alınırsa istenilen sonuç elde edilir.

Tanım 2.10. $r,n \in \mathbb{Z}$ ve $\alpha \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $r<0$ veya $n \leq 0$ için,

$H_n^r(\alpha)=0$

ve $n \geq 1$ iken,

$$H_n^0(\alpha) = \frac{1}{n\alpha^n} \quad , \qquad H_n^r(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} H_k^{r-1}(\alpha) \tag{2.2}$$

Biçiminde tanımlanan sayıları r mertebeli genelleştirilmiş hiperharmonik sayı denir.

Açıktır ki $n \geq 1$ ve $\alpha \in \mathbb{R}^+$ için,

$$H_n^r(\alpha) = H_{n-1}^r(\alpha) + H_n^{r-1}(\alpha) \tag{2.3}$$

bağıntısı vardır.

Eşitlik (2.2) de r=1 alınırsa,

$$H_n^1(\propto)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\propto^k}=H_n(\propto)$$

genelleştirilmiş hiperharmonik sayısı elde edilir. Burada $\propto=1$ alınırsa, $H_n^1(1)=H_n$ n. y.inci harmonik sayısı bulunur.

Teorem 2.11. $r,n\geq 1$ve $\propto\in\mathbb{R}^+$için,

$$\sum_{t=1}^{r}H_n^t(\propto)=H_{n+1}^r(\propto)-\frac{1}{(n+1)\propto^{(n+1)}}$$

dir.

Kanıt**:** Kanıt için tümevarım yöntemini uygulayalım.

r=1için,

$$\sum_{t=1}^{1}H_n^t(\propto)=H_n^1(\propto)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\propto^k}=H_{n+1}^1(\propto)-\frac{1}{(n+1)\propto^{(n+1)}}$$

dır.

r için iddia doğrudur. Yani,

$$\sum_{t=1}^{r}H_n^t(\propto)=H_{n+1}^r(\propto)-\frac{1}{(n+1)\propto^{n+1}}$$

olsun. O zaman (r+1) için iddianın doğru olduğunu gösterelim.

$$\sum_{t=1}^{r+1}H_n^t(\propto)=\sum_{t=1}^{r}H_n^t(\propto)+H_n^{r+1}(\propto)$$

$$=H_{n+1}^r(\propto)-\frac{1}{(n+1)\propto^{n+1}}+H_n^{r+1}(\propto)$$

$$=H_{n+1}^{r+1}(\propto)-\frac{1}{(n+1)\propto^{n+1}}$$

olup kanıt tamamlanır.

Teorem 2.12. $\alpha\in\mathbb{R}^+$ ve $n,r\in\mathbb{Z}^+$ için,

$$H_n^r(\alpha)=\sum_{k=1}^{n}\binom{n+r-k-1}{r-1}\frac{1}{k\alpha^k}$$

dır.

Kanıt: Tümevarım yöntemini kullanalım.

n=1 için,

$$\sum_{k=1}^{1}\binom{r-k}{r-1}\frac{1}{k\alpha^k}=\binom{r-1}{r-1}\frac{1}{\alpha^1}=\frac{1}{\alpha}$$

dir. Tanım 2.10 kullanılırsa,

$$H_1^r(\alpha)=\sum_{k=1}^{1}H_k^{r-1}(\alpha)=H_1^{r-1}(\alpha)=\sum_{k=1}^{1}H_k^{r-2}(\alpha)=H_1^{r-2}(\alpha)=\ldots=H_1^0(\alpha)=\frac{1}{\alpha}$$

olur. Böylece n=1 için iddia doğrudur.

(n-1) için iddianın doğru olduğunu kabul edelim. Yani,

$$H_{n-1}^r(\alpha)=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n+r-k-2}{r-1}\frac{1}{k\alpha^k}$$

olsun.

Şimdi n için iddianın doğru olduğunu gösterelim. Özdeşlik (2.3) den,

$$H_n^r(\alpha)=H_{n-1}^r(\alpha)+H_n^{r-1}(\alpha)=H_{n-1}^r(\alpha)+H_{n-1}^{r-1}(\alpha)+H_n^{r-2}(\alpha)$$

$$=H_{n-1}^r(\alpha)+H_{n-1}^{r-1}(\alpha)+H_{n-1}^{r-2}(\alpha)+H_n^{r-3}(\alpha)$$

$$=H_{n-1}^r(\alpha)+H_{n-1}^{r-1}(\alpha)+\ldots+H_{n-1}^1(\alpha)+H_n^0(\alpha)$$

$$=\sum_{s=1}^{r}H_{n-1}^s(\alpha)+\frac{1}{n\alpha^n}$$

elde edilir. Hipotezde,

$$H_n^r(\propto)=\sum_{s=1}^{r}\left(\sum_{t=1}^{n-1}\binom{n+s-t-2}{s-1}\frac{1}{t\propto^t}\right)+\frac{1}{n\propto^n}$$

$$=\sum_{t=1}^{n-1}\frac{1}{t\propto^t}\left(\sum_{s=1}^{r}\binom{n+s-t-2}{s-1}\right)+\frac{1}{n\propto^n}$$

$$=\sum_{t=1}^{n-1}\frac{1}{t\propto^t}\left(\sum_{s=0}^{r-1}\binom{n+s-t-1}{s}\right)+\frac{1}{n\propto^n}$$

olup buradan,

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{r+i}{i}=\binom{r+n+1}{n}$$

ve böylece,

$$H_n^r(\propto)=\sum_{t=1}^{n-1}\frac{1}{t\propto^t}\left(\sum_{s=0}^{r-1}\binom{n+s-t-1}{s}\right)+\frac{1}{n\propto^n}$$

$$=\sum_{t=1}^{n-1}\binom{n-1-t+r}{r-1}\frac{1}{t\propto^t}+\frac{1}{n\propto^n}$$

$$=\sum_{t=1}^{n}\binom{n-1-t+r}{r-1}\frac{1}{t\propto^t}$$

bulunur. Yani,

$$H_n^r(\propto)=\sum_{t=1}^{n}\binom{n+r-t-1}{r-1}\frac{1}{t\propto^t}$$

olup kanıt tamamlanmış olur.

Teorem 2.13. $n>m\geq 1$ ve $\propto\in\mathbb{R}^+$ için,

$$\sum_{t=0}^{m}\binom{m}{t}H_{n-m+t}^{r-t}(\propto)=H_n^r(\propto)$$

dir.

Kanıt: Cebirsel işlemlerle,

$$\sum_{t=0}^{m}\binom{m}{t}H_{n-m+t}^{r-t}(\propto)=\sum_{t=0}^{m}\binom{m}{t}\sum_{j=1}^{n-m+t}\binom{n-m-j+r-1}{r-t-1}\frac{1}{j\propto^{j}}$$

$$=\sum_{t=0}^{m}\binom{m}{t}\sum_{j=1}^{n-t}\binom{n-m-j+r-1}{r-m+t-1}\frac{1}{j\propto^{j}}$$

$$=\sum_{t=0}^{m}\binom{m}{t}\sum_{j=1}^{n-t}\binom{n-m-j+r-1}{n-j-t}\frac{1}{j\propto^{j}}$$

$$=\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{j\propto^{j}}\sum_{t=j}^{n}\binom{n-m-j+r-1}{n-j-t}\binom{m}{t}$$

$$=\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{j\propto^{j}}\sum_{t=j}^{n-j}\binom{n-m-j+r-1}{n-j-t}\binom{m}{t}$$

$$=\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{j\propto^{j}}\sum_{t=0}^{n-2j}\binom{n-m-j+r-1}{n-2j-t}\binom{m}{t+j}$$

elde edilir. Burada,

$$\sum_{t=0}^{k}\binom{n}{k-t}\binom{m}{t+r}=\binom{m+n}{k+r}$$

eşitliğinde k=n-2j , r=j ,n=n-m-j+r-1alınırsa,

$$\sum_{t=0}^{m}\binom{m}{t}H_{n-m+t}^{r-t}(\propto)=\sum_{t=0}^{n}\binom{n-j+r-1}{r-1}\frac{1}{j\propto^{j}}=H_{n}^{r}(\propto)$$

olduğu görülür.

Şimdi $A_n=[H_i^r(j)]$ve $B_n=\left[H_i^j(\propto)\right]$ matrislerinin iki matrisin çarpımı şeklinde yazılacağını göstereceğiz.

Teorem 2.14. s≥1 için, $c_{i,j}=H_i^s(j)$ terimli n mertebeli matris $C_n=[c_{i,j}]$ ve

s≥r olmak üzere,

$$f_{ij}=\begin{cases}(-1)^{i-j}\binom{s-r}{i-j}, & \text{eğer } i\geq j \text{ ise}\\ 0, & \text{eğer } i<j \text{ ise}\end{cases}$$

terimli n mertebeli alt üçgensel matris $F_n=[f_{i,j}]$ olsun. O zaman,

$A_n=F_nC_n$

dir.

Kanıt:

i=1 ve j≥1 için,

$$a_{1,j}=\sum_{k=1}^{n} f_{1,k}.c_{k,j}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{1-k}\binom{s-r}{1-k}H_k^s(j)=H_1^s(j)$$

elde edilir.

i>1 ve j≥1 için,

$$a_{i,j}=\sum_{k=1}^{n} f_{i,k}.c_{k,j}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i-k}\binom{s-r}{i-k}H_k^s(j)$$

dir. Teorem 2.13 kullanılırsa,

$$a_{i,j}=\sum_{k=1}^{i}(-1)^{i-k}\binom{s-r}{i-k}\left[\sum_{t=1}^{k}\binom{k+s-t-1}{s-1}\frac{1}{t\times j^t}\right]$$

$$=\sum_{t=1}^{i}\frac{1}{t\times j^t}\sum_{k=t}^{i}(-1)^{i-k}\binom{s-r}{i-k}\binom{k+s-t-1}{s-1}$$

elde edilir. Burada,

$$\binom{s-r}{i-k}=(-1)^{i-k}\binom{r-s+i-k-1}{i-k}$$

binom özdeşliği kullanılırsa,

$$a_{i,j}=\sum_{t=1}^{i}\frac{1}{t\times j^t}\sum_{k=t}^{i}\binom{r-s+i-k-1}{r-s-1}\binom{k+s-t-1}{s-1}$$

$$= \sum_{t=1}^{i} \frac{1}{t \times j^t} \sum_{k=s-1}^{i-t+s-1} \binom{i+r-t-2-k}{r-s-1} \binom{k}{s-1}$$

olur. Ayrıca,

$$\sum_{k=p}^{n-q} \binom{k}{p} \binom{n-k}{q} = \binom{n+1}{p+q+1}$$

toplamında s-1=p, i-t-2+r=n ver-s-1=q alınırsa,

$$\sum_{k=t}^{i} \binom{r-s+i-k-1}{r-s-1} \binom{k+s-t-1}{s-1} = \binom{i+r-t-1}{r-1}$$

elde edilir. Böylece,

$$a_{i,j} = \sum_{t=1}^{i} \binom{i+r-t-1}{r-1} \frac{1}{t \times j^t} = H_i^r(j)$$

olup kanıt tamamlanmış olur.

Sonuç 2.15. $\propto, n \in \mathbb{Z}^+$ ve $s \geq r \geq 1$ olmak üzere,

$$H_n^r(\propto) = (-1)^n \sum_{t=1}^{n} \binom{s-r}{n-t} (-1)^t H_t^s(\propto)$$

dir.

Kanıt: Matrislerin eşitliğinde $(n, \propto)$ terimlerin eşitliğinden istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 2.16. $\propto \in \mathbb{Z}^+$ ve $s \geq r$ olmak üzere,

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{s-r+n-k-1}{s-r-1} H_k^r(j) = H_n^s(j)$$

dir.

Kanıt: $F_n$ matrisinin tersi $s \geq r$ olmak üzere,

$$h_{ij}=\begin{cases}\binom{s-r+i-j+1}{i-j}, & \text{eğer } i\geq j \text{ ise}\\ 0, & \text{eğer } i<j \text{ ise}\end{cases}$$

terimlerine sahip n mertebeli alt üçgensel matris $H_n$ olduğundan $C_n=A_n.H_n$ dır. Bu matris çarpımında karşılıklı terimlerin eşitliğinden istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 2.17.

$$y_{i,j}=\begin{cases}\frac{1}{(i-j+1)\propto^{i-j+1}}-\frac{1}{(i-j)\propto^{i-j}}, & \text{eğer } i>j \text{ ise}\\ \frac{1}{\propto}, & \text{eğer } i=j \text{ ise}\\ 0, & \text{eğer } i<j \text{ ise}\end{cases}$$

terimli n mertebeli alt üçgensel matris $Y_n=\left[y_{i,j}\right]$ ve $\binom{i+j-1}{j}$ terimli n mertebeli Pascal matrisi $D_n=\left[d_{i,j}\right]$ olsun. O zaman

$B_n=Y_nD_n$

dir.

Kanıt:

i=j=1 için,

$$b_{1,1}=y_{1,1}.d_{1,1}=\frac{1}{\propto}=\sum_{k=1}^{1}\binom{1-k}{0}=H_1^1(\propto)=b_{1,1}$$

ve

i=1 , j>1 için,

$$b_{1,j}=y_{1,1}.d_{1,j}+y_{1,2}.d_{2,j}+\ldots+y_{1,n}.d_{n,j}=y_{1,1}.d_{1,j}=\frac{1}{\propto}=H_1^j(\propto)$$

dır.

i>1 , j=1 için,

$$b_{i,1}=\sum_{k=1}^{n}y_{i,k}.d_{k,1}=y_{i,1}.d_{1,1}+y_{i,2}.d_{2,1}+\cdots+y_{i,i}.d_{i,1}$$

$$=-\frac{(\alpha-1)i+1}{(i-1)i\alpha^{i}}1-\frac{(\alpha-1)(i-1)+1}{(i-2)(i-1)\alpha^{i-1}}2+\ldots+-\frac{2(\alpha-1)+1}{2\alpha^{2}}(i-1)+\frac{i}{\alpha}$$

$$=-\frac{(\alpha-1)i}{(i-1)i\alpha^{i}}-\frac{1}{(i-1)i\alpha^{i}}-\frac{2(\alpha-1)(i-1)}{(i-2)(i-1)\alpha^{i-1}}-\frac{2}{(i-2)(i-1)\alpha^{i-1}}-\ldots$$

$$-\frac{2(i-1)(\alpha-1)}{2\alpha^{2}}-\frac{(i-1}{2\alpha^{2}}+\frac{i}{\alpha}$$

$$=-(\alpha-1)\left(\frac{1}{(i-1)\alpha^{i}}+\frac{2}{(i-2)\alpha^{i-1}}+\ldots+\frac{(i-1)}{\alpha^{2}}\right)$$

$$-\left(\frac{1}{(i-1)i\alpha^{i}}+\frac{2}{(i-2)(i-1)\alpha^{i-1}}+\ldots+\frac{(i-1)}{2\alpha^{2}}\right)+\frac{i}{\alpha}$$

$$=-(\alpha-1)\sum_{k=1}^{i-1}\frac{k}{(i-k)\alpha^{i-k+1}}-\sum_{k=1}^{i-1}\frac{k}{(i-k)(i-k+1)\alpha^{i-k+1}}+\frac{i}{\alpha}$$

bulunur. Böylece,

$$b_{i,1}=\sum_{k=1}^{n}y_{i,k}.d_{k,1}$$

$$=-\frac{(\alpha-1)}{\alpha^{i+1}}\left(-\sum_{k=1}^{i-1}\alpha^{k}+i\sum_{k=1}^{i-k}\frac{\alpha^{k}}{i-k}\right)-\frac{1}{\alpha^{i+1}}\left(i\sum_{k=1}^{i-1}\frac{\alpha^{k}}{i-k}-(1+i)\sum_{k=1}^{i-1}\frac{\alpha^{k}}{i-k+1}\right)+\frac{i}{\alpha}$$

$$=\frac{(\alpha-1)}{\alpha^{i+1}}\sum_{k=1}^{i-1}\alpha^{k}-\frac{(\alpha-1)i}{\alpha^{i+1}}\sum_{k=1}^{i-1}\frac{\alpha^{k}}{i-k}-\frac{i}{\alpha^{i+1}}\sum_{k=1}^{i-1}\frac{\alpha^{k}}{i-k}+\frac{(1+i)}{\alpha^{i+1}}\sum_{k=1}^{i-1}\frac{\alpha^{k}}{i-k+1}+\frac{i}{\alpha}$$

$$=\frac{(\alpha-1)}{\alpha^{i+1}}\sum_{k=1}^{i-1}\alpha^{k}-\frac{\alpha i}{\alpha^{i+1}}\sum_{k=1}^{i-1}\frac{\alpha^{k}}{i-k}+\frac{(1+i)}{\alpha^{i+1}}\sum_{k=1}^{i-1}\frac{\alpha^{k}}{i-k+1}+\frac{i}{\alpha}$$

dır. Ayrıca,

$$\sum_{k=1}^{i-1}\frac{\alpha^{k}}{i-k}=\alpha^{i}\sum_{k=1}^{i-1}\frac{1}{k\alpha^{k}}$$

olduğundan,

$$b_{i,1}=\frac{(\alpha-1)}{\alpha^{i+1}}\sum_{k=1}^{i-1}\alpha^{k}-i\sum_{k=1}^{i-1}\frac{1}{k\alpha^{k}}+\frac{(i+1)}{\alpha^{i+1}}\left(\alpha^{i+1}\sum_{k=1}^{i-1}\frac{1}{k\alpha^{k}}+\frac{\alpha}{i}-\alpha^{i}\right)+\frac{i}{\alpha}$$

$$=\frac{(\propto-1)}{\propto^{i+1}}\sum_{k=1}^{i-1}\propto^{k}-i\sum_{k=1}^{i-1}\frac{1}{k\propto^{k}}+(1+i)\sum_{k=1}^{i-1}\frac{1}{k\propto^{k}}+\frac{(1+i)\propto}{i\propto^{i+1}}-\frac{(1+i)}{\propto}+\frac{i}{\propto}$$

$$=\frac{(\propto-1)}{\propto^{i+1}}\sum_{k=1}^{i-1}\propto^{k}+\sum_{k=1}^{i-1}\frac{1}{k\propto^{k}}-\frac{(1+i)}{\propto}-\frac{(1+i)}{i\propto^{i}}+\frac{i}{\propto}$$

elde edilir. Burada,

$$\sum_{k=1}^{n}r^{k-1}=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

özelliği kullanılırsa,

$$b_{i,1}=\frac{\propto^{i}-\propto}{\propto^{i+1}}+\sum_{k=1}^{i-1}\frac{1}{k\propto^{k}}+\frac{(1+i)\propto}{i\propto^{i+1}}-\frac{1}{\propto}$$

$$=\frac{\propto^{i}-\propto}{\propto^{i+1}}+\frac{(1+i)}{i\propto^{i}}-\frac{1}{\propto}-\frac{1}{i\propto^{i}}+\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{k\propto^{k}}$$

$$=\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{k\propto^{k}}=H_{i}^{1}(\propto)$$

olur.

i>1 ve j>1 için matris çarpımından,

$$b_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}y_{i,k}.d_{k,j}=\sum_{k=1}^{i-1}\left(-\frac{(\propto-1)(i-k+1)+1}{\propto^{i-k+1}(i-k)(i-k+1)}\right)\binom{k+j-1}{j}+\frac{1}{\propto}\binom{i+j-1}{j}$$

$$=-\frac{(\propto-1)}{\propto^{i+1}}\sum_{k=1}^{i-1}\frac{\propto^{k}}{(i-k)}\binom{k+j-1}{j}-\frac{1}{\propto^{i+1}}\sum_{k=1}^{i-1}\frac{\propto^{k}}{(i-k)(i-k+1)}\binom{k+j-1}{j}+\frac{1}{\propto}\binom{i+j-1}{j}$$

elde edilir. Böylece,

$$\left(\frac{1}{(i-k)(i-k+1)}\right)=\frac{1}{i-k}-\frac{1}{i-k+1}$$

eşitliğinden,

$$b_{i,j}=-\frac{(\alpha-1)}{\alpha^{i+1}}\sum_{k=1}^{i-1}\frac{\alpha^k}{i-k}\binom{k+j-1}{j}$$

$$-\frac{1}{\alpha^{i+1}}\left(\sum_{k=1}^{i-1}\frac{\alpha^k}{i-k}\binom{k+j-1}{j}-\sum_{k=1}^{i-1}\frac{\alpha^k}{i-k+1}\binom{k+j-1}{j}\right)+\frac{1}{\alpha}\binom{i+j-1}{j}$$

$$=-\frac{\alpha}{\alpha^{i+1}}\sum_{k=1}^{i-1}\frac{\alpha^k}{i-k}\binom{k+j-1}{j}+\frac{1}{\alpha^{i+1}}\sum_{k=1}^{i-1}\frac{\alpha^k}{i-k+1}\binom{k+j-1}{j}+\frac{1}{\alpha}\binom{i+j-1}{j}$$

$$=\frac{1}{\alpha^{i+1}}\sum_{k=1}^{i-1}\left(-\frac{\alpha^{k+1}}{i-k}+\frac{\alpha^k}{i-k+1}\right)\binom{k+j-1}{j}+\frac{1}{\alpha}\binom{i+j-1}{j}$$

elde edilir. Buradan,

$$\sum_{k=1}^{i-1}\frac{\alpha^{k+1}}{i-k}\binom{k+j-1}{j}=\alpha^{i+1}\sum_{k=1}^{i-1}\frac{1}{k\alpha^k}\binom{i+j-k-1}{j}$$

ve

$$\sum_{k=1}^{i-1}\frac{\alpha^k}{i-k+1}\binom{k+j-1}{j}=\alpha^{i}\sum_{k=1}^{i-1}\frac{1}{(k+1)\alpha^k}\binom{i+j-k-1}{j}$$

toplamları yukarıda kullanılırsa,

$$b_{i,j}=\frac{1}{\alpha^{i+1}}\left(-\alpha^{i+1}\sum_{k=1}^{i-1}\frac{1}{k\alpha^k}\binom{i+j-k-1}{j}+\alpha^{i}\sum_{k=1}^{i-1}\frac{1}{(k+1)\alpha^k}\binom{i+j-k-1}{j}\right)+\frac{1}{\alpha}\binom{i+j-1}{j}$$

$$=-\sum_{k=1}^{i-1}\frac{1}{k\alpha^k}\binom{i+j-k-1}{j}+\sum_{k=1}^{i-1}\frac{1}{(k+1)\alpha^{k+1}}\binom{i+j-k-1}{j}+\frac{1}{\alpha}\binom{i+j-1}{j}$$

$$=\frac{1}{i\alpha^{i}}\binom{i+j-i-1}{j}-\sum_{k=1}^{i}\binom{i+j-k-1}{j}\frac{1}{k\alpha^k}+\sum_{k=2}^{i}\binom{i+j-k}{j}\frac{1}{k\alpha^k}+\frac{1}{\alpha}\binom{i+j-1}{j}$$

$$=-\sum_{k=1}^{i}\binom{i+j-k-1}{j}\frac{1}{k\alpha^k}+\sum_{k=1}^{i}\binom{i+j-k}{j}\frac{1}{k\alpha^k}$$

$$=\sum_{k=1}^{i}\left(-\binom{i+j-k-1}{j}+\binom{i+j-k}{j}\right)\frac{1}{k\alpha^k}$$

olur. Son olarak,

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

binom eşitliğinden,

$$b_{i,j}=\sum_{k=1}^{i}\binom{i+j-k-1}{j}\frac{1}{k\alpha^k}$$

olup kanıt tamamlanmış olur.

Sonuç 2.18. $(\alpha,n)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{Z}^+$ için,

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{i+k-1}{i}\left(\frac{1}{\alpha(n-k+1)}-\frac{1}{n-k}\right)\alpha^k=\alpha^n H_n^i(\alpha)-\alpha^{n-1}\binom{n+i-1}{i}$$

dır.

Şimdi $B_n$ matrisi ve $p_{i,j}=\binom{i+j-2}{j-1}$ terimli $P_n=\left[p_{i,j}\right]$ n mertebeli pascal matrisi arasındaki çarpımsal ilişkiyi verelim.

Teorem 2.19.

$$g_{i,j}=\begin{cases}\dfrac{1}{(i-j+1)\alpha^{(i-j+1)}}, & \text{eğer } i>j \text{ ise}\\ \dfrac{1}{\alpha}, & \text{eğer } i=j \text{ ise}\\ 0, & \text{eğer } i<j \text{ ise}\end{cases}$$

terimli n mertebeli alt üçgensel matris $G_n=\left[g_{i,j}\right]$ ve $p_{i,j}=\binom{i+j-2}{j-1}$ terimli $P_n=\left[p_{i,j}\right]$ n mertebeli Pascal matris olsun. O zaman,

$B_n=G_nP_n$

dir.

Kanıt: Matris çarpımından,

$$G_nP_n=\begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2m^2} & \frac{1}{m} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{(n-1)m^{(n-1)}} & \frac{1}{(n-2)m^{(n-2)}} & \cdots & 0 \\ \frac{1}{nm^n} & \frac{1}{(n-1)m^{(n-1)}} & \cdots & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \cdots & \binom{n-1}{n-1} \\ \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{n}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n-1}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{2n-2}{n-1} \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\propto} & \frac{1}{\propto} & \frac{1}{\propto} & \cdots & \frac{1}{\propto} \\ \sum_{s=1}^{2}\frac{1}{s\propto^s} & \sum_{s=1}^{2}(3-s)\frac{1}{s\propto^s} & \sum_{s=1}^{2}\binom{4-s}{2}\frac{1}{s\propto^s} & \cdots & \sum_{s=1}^{2}\binom{n-s+1}{n-1}\frac{1}{s\propto^s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{s=1}^{n-1}\frac{1}{s\propto^s} & \sum_{s=1}^{n-1}\binom{n-s}{1}\frac{1}{s\propto^s} & \sum_{s=1}^{n-1}\binom{n-s+1}{2}\frac{1}{s\propto^s} & \cdots & \sum_{s=1}^{n-1}\binom{2n-s-2}{n-1}\frac{1}{s\propto^s} \\ \sum_{s=1}^{n}\frac{1}{s\propto^s} & \sum_{s=1}^{n}\binom{n-s+1}{1}\frac{1}{s\propto^s} & \sum_{s=1}^{n}\binom{n-s+2}{2}\frac{1}{s\propto^s} & \cdots & \sum_{s=1}^{n}\binom{2n-s-1}{n-1}\frac{1}{s\propto^s} \end{bmatrix}$$

$=B_n$

olduğu kolaylıkla gösterilir.

Teorem 2.20. $n,k>0$, $r\in\mathbb{Z}^+$ ve $\propto\in\mathbb{R}^+$ için $Q=[H_i^{j+k}(\propto)]$ olmak üzere,

$Q^{r+1}=A^rG_nP_n$

dir.

Kanıt:

Matris çarpımından istenilen sonuç açıktır.

Teorem 2.21. n mertebeli $A_n$ ve $B_n$ matrisleri için,

$$|A_n|=(-1)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{k+1}}$$

ve

$$|B_n|=\frac{1}{\propto^n}$$

dir.

Kanıt:

$H_n^r(\propto)$ r mertebeli genelleştirilmiş hiperharmonik sayıları kullanılarak

$$|A_n|=\begin{vmatrix} H_1^r(1) & H_1^r(2) & \cdots & H_1^r(n) \\ H_2^r(1) & H_2^r(2) & \cdots & H_1^r(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_n^r(1) & H_n^r(2) & \cdots & H_n^r(n) \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ r+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}r+\frac{1}{8} & \cdots & \frac{1}{2n^2(2nr+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n}\binom{n+r-k-1}{r-1}\frac{1}{k} & \sum_{k=1}^{n}\binom{n+r-k-1}{r-1}\frac{1}{k2^k} & \cdots & \sum_{k=1}^{n}\binom{n+r-k-1}{r-1}\frac{1}{kn^k} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{18} & \frac{1}{32} & \cdots & \frac{1}{2n^2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{24} & \frac{1}{81} & \frac{1}{192} & \cdots & \frac{1}{3n^3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n2^n} & \frac{1}{n3^n} & \frac{1}{n4^n} & \cdots & \frac{1}{n^{n+1}} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}\cdots\frac{1}{n}\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{3^2} & \cdots & \frac{1}{n^2} \\ 1 & \frac{1}{2^3} & \frac{1}{3^3} & \cdots & \frac{1}{n^3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{3^n} & \cdots & \frac{1}{n^n} \end{vmatrix}$$

elde edilir. Ayrıca bu determinant aşağıdaki gibi yazılabilir.Yani,

$$|A_n|=\frac{1}{n!}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4} & \cdots & \frac{1}{2^n} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3^2} & \frac{1}{3^3} & \frac{1}{3^4} & \cdots & \frac{1}{3^n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n^2} & \frac{1}{n^3} & \frac{1}{n^4} & \cdots & \frac{1}{n^n} \end{vmatrix}=\frac{1}{(n!)^2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \cdots & \frac{1}{2^{n-1}} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3^2} & \frac{1}{3^3} & \cdots & \frac{1}{3^{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n^2} & \frac{1}{n^3} & \cdots & \frac{1}{n^{n-1}} \end{vmatrix}$$

olup Vandermonde matrisinin determinantının tanımından,

$$|A_n|=\frac{1}{n!}\prod_{1\le i\le j\le n}(\alpha_j-\alpha_i)=\frac{1}{(n!)^2}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k^{k-1}}$$

$$=\frac{1}{n!}(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k^k}=(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{k+1}}$$

olduğu görülür.Böylece kanıt tamamlanış olur.

Şimdi de $|B_n|=\frac{1}{\alpha^n}$ olduğunu kanıtlayalım.

Determinant tanımına göre,

$$|B_n|=\begin{vmatrix} H_1^1(\alpha) & H_1^2(\alpha) & \cdots & H_1^n(\alpha) \\ H_2^1(\alpha) & H_2^2(\alpha) & \cdots & H_2^n(\alpha) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_n^1(\alpha) & H_n^2(\alpha) & \cdots & H_n^n(\alpha) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \binom{0}{0}\frac{1}{\alpha} & \binom{1}{1}\frac{1}{\alpha} & \cdots & \binom{n-1}{n-1}\frac{1}{\alpha} \\ \binom{1}{0}\frac{1}{\alpha}+\binom{0}{0}\frac{1}{2\alpha^2} & \binom{2}{1}\frac{1}{\alpha}+\binom{1}{1}\frac{1}{2\alpha^2} & & \binom{n}{n-1}\frac{1}{\alpha}+\binom{n-1}{n-1}\frac{1}{2\alpha^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n-1}{0}\frac{1}{\alpha}+\ldots+\binom{0}{0}\frac{1}{n\alpha^n} & \binom{n}{1}\frac{1}{\alpha}+\ldots+\binom{1}{1}\frac{1}{n\alpha^n} & \cdots & \binom{2n-2}{n-1}\frac{1}{\alpha}+\ldots+\binom{n-1}{n-1}\frac{1}{n\alpha^n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} & \cdots & \frac{1}{\alpha} \\ \frac{1}{\alpha} & \binom{2}{1}\frac{1}{\alpha} & & \binom{n}{n-1}\frac{1}{\alpha} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\alpha} & \binom{n}{1}\frac{1}{\alpha} & \cdots & \binom{2n-2}{n-1}\frac{1}{\alpha} \end{vmatrix} = \frac{1}{\alpha^n} \begin{vmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \cdots & \binom{n-1}{n-1} \\ \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{n}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n-1}{n-1} & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{2n-2}{n-1} \end{vmatrix}$$

olur. Pascal matrisinin determinantı 1 olduğundan,

$$|B_n| = \frac{1}{\alpha^n} \cdot 1 = \frac{1}{\alpha^n}$$

elde edilir.

# 3. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Genelleştirilmiş harmonik sayılar ve r mertebeli genelleştirilmiş hiperharmonik sayılar arasındaki ilişkiler irdelenmiştir. Bu sayıları kullanarak toplamlar ve matris üzerinde uygulamalar yapılmıştır. Bu çalışmayla elde edilen yeni r mertebeli genelleştirilmiş hiperharmonik sayılar ile birçok yeni toplam ve özdeşlikler elde edilebilir.

## KAYNAKLAR


[1] Ömür N., Türker Ulutaş Y., *Lineer cebir ve çözümlü problemler*, 2. Basım, Umuttepe Yayınları, Kocaeli, 2015.

[2] Edalman A., Strang G., Pascal Matrices, *The Mathematical Association of America*, 2004, **111,** 189-197.

[3] Chall G. S., Vellman D. J., Pascal's Matrices*, The American Mathematical Monthly*, 1993, **100**, 372-376.

[4] Bacher R., Chapman R., Symmetric Pascal Matrices Modulo p, *EuropeanJournal of Combinatirics*, 2004**, 25**, 459-473.

[5] Cereceda J.L., An Introdution to Hyperharmonic Numbers*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 2015,**46**(3), 461-469.

[6] Benjamin A. T., Preston G. O. and Quinn J. J., A Stirlingen Counter with Harmonic Numbers, *Mathematics Magazine*, 2002, **75**, 95-103.

[7] Munarini E., Riordan Matrices and Sums of Harmonic Numbers, *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, DOI: 10.2298/AADM110609014M.

[8] Adegokeand K., Layeni O., New Finite and Infinite Summation Identities Involving the Generalized Harmonic Numbers, *Journal of Analysis and Number Theory*, 2016, **4**(1), 49-60.

[9] Benjamin T., Gaeblerand D., Gaebler R., A Combinatorial Approachto Hyperharmonic Numbers, *Integers: Electronic Journal of Combinatorial Number Theory*, 2003, **3**, 1-9.

[10] Conway J.H., Guy R.K., *The book of numbers*, Copernicus, 1996.

[11] Ömür N., Koparal S., On the Matrices With The Generalized Hyperharmonic Numbers of Order r*, Asian-European J. Math*., DOI: 10.1142/S17935571185004.

[12] Bahşi M., Solak S., An Application of Hyperharmonic Numbers in Matrices, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics,* 2013, **42**(4), 387-393.

[13] Gencev M., Binonial Involving Harmonic Numbers, *Mathematica Slovaca*, 2011, **61**(2), 215-226.

## KİŞİSEL YAYINLAR VE ESERLER

[1] **Bilgin G**., Some Applications to Generalized Hyperharmonic Numbers of Order R and Matrices, *International Conference on Mathematics and Engineering,* Yıldız Technical University, İstanbul, Turkey, 10-12 May 2017.

## ÖZGEÇMİŞ

1992 yılında Kocaeli'nin Gölcük ilçesinde doğdu. İlkokul, ortaokul ve lise öğrenimini Kocaeli'nde tamamladı. 2010 yılında Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümüne girdi. 2015 yılında Matematik bölümünden mezun oldu. 2015 yılında Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine başladı.