T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI CEBİRLERİN OTOMORFİZMLERİ VE DERİVASYONLARI

İbrahim Halil COŞKUN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2018

Yrd. Doç. Dr. Zehra Velioğlu danışmanlığında İbrahim Halil COŞKUN'un hazırladığı **"Bazı Cebirlerin Otomorfizmleri ve Derivasyonları"** konulu bu çalışma …/…/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

İmza

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Zehra VELİOĞLU ……

Üye : Yrd.Doç.Dr. Cennet ESKAL ……

Üye : Yrd. Doç. Dr. Nazmiye Feyza YALÇIN ……

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım.

Prof. Dr. Halil Murat ALĞIN
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iii
SİMGELER DİZİNİ iv
1. GİRİŞ 1
2. KURAMSAL TEMELLER 3
2.1. Polinom Halkaları 3
2.2. Cisim Genişlemeleri 9
2.3. Cebirler 14
3. MATERYAL ve YÖNTEM 16
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA 17
4.1. Polinom Halkalarının Derivasyonları 18
4.1.1. Derivasyonlar 18
4.1.2. Derivasyonların genişlemesi 23
4.1.3. Bir derivasyonun kuvveti 29
4.1.4. Bir derivasyonun çekirdeği 34
4.1.5. Lokal nilpotent derivasyonlar 37
4.2. Polinom Halkalarının Otomorfizmleri 46
4.2.1. Polinom dönüşümleri 46
4.2.2. $R[x_1, x_2]$ nin tame otomorfizmlerinin grubu 49
4.3. Serbest Poisson Cebirlerinin Otomorfizmleri ve Derivasyonları 62
4.3.1. Poisson cebirleri 62
4.3.2. Poisson cebiri üzerinde tanımlı derece fonksiyonları 65
4.3.3. Poisson cebirlerinin derivasyonları üzerinde tanımlı derece fonksiyonları 70
4.3.4. Başkatsayılar 73
4.3.5. $k\{x_1, x_2\}$ nin tame otomorfizmlerinin grubu 75
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER 89
KAYNAKLAR 90
ÖZGEÇMİŞ 92

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAZI CEBİRLERİN OTOMORFİZMLERİ VE DERİVASYONLARI

İbrahim Halil COŞKUN

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Zehra VELİOĞLU
Yıl: 2018, Sayfa: 92

k, karakteristiği 0 olan bir cisim ve $K = k[x_1, x_2, \dots, x_n]$, k üzerinde tanımlanan $x_1, x_2, \dots, x_n$ değişkenlerine bağlı polinomların halkası olsun. Bu tezde K halkasının derivasyonları ve otomorfizmleri detaylı bir şekilde ele alınmış ve özellikle n=2 için K halkasının k-otomorfizimlerinin bir alt grubu olan $T(2,k)$ tame otomorfizmleri incelenmiştir. Bunun yanı sıra iki değişkenli polinom halkalarının otomorfizmlerinin tame olduğu sonucu çalışılmıştır. Ayrıca $P = k\{x_1, x_2\}$ ile ifade edilen iki değişkenli serbest Poisson cebirleri tanımlanmış ve polinom halkalarındaki çalışmalardan hareketle P cebirinin de otomorfizmleri ve derivasyonları çalışılmıştır. Son olarak bu cebirin otomorfizmlerinin tame olduğu sonucu incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Polinom Halkaları, Poisson Cebirleri, Derivasyonlar, Otomorfizmler

ABSTRACT

MSc Thesis

AUTOMORPHISMS AND DERIVATIONS OF SOME ALGEBRAS

İbrahim Halil COŞKUN

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Zehra VELİOĞLU
Year: 2018, Page: 92

Let k be a field of characteristic zero and $K = k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ be the polynomial ring in variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ over k. In this thesis, the derivations and automorphisms of the K-ring are discussed in detail and spacially the tame automorphisms T (2, k), a subset of the k-automorphisms of the K-ring for n = 2, is investigated. Besides this, the result that the automorphisms of the two variable polynomial rings are tame is studied. In addition, the free Poisson algebras with two variables expressed by $P = k\{x_1, x_2\}$ is defined and based on results in polynomial rings, the automorphisms and derivations of P are studied. Finally, the result about tameness of automophisms of this algebra is investigated.

KEY WORDS: Polynomial Rings, Poisson Algebras, Derivations, Automorphisms

TEŞEKKÜR

Bu tezin konusunun seçiminde ve çalışmalarımın her aşamasında yardımlarını esirgemeyen, görüş ve önerileriyle daima bana yol gösteren, sabrıyla ve matematiğe bakışıyla daima örnek alacağım danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Zehra VELİOĞLU'na saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Başta Dr. Öğr. Üyesi N. Feyza YALÇIN olmak üzere Harran Üniversitesi Matematik Bölümü değerli hocalarına çalışmalarım boyunca vermiş oldukları destekten dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Uludağ Üniversitesi Matematik Bölümü hocalarından Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL hocama desteklerinden dolayı can-ı gönülden teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmalarımın en başından beri desteklerini esirgemeyen, maddi ve manevi olarak hep yanımda olan babam Emin COŞKUN, annem Fatma COŞKUN ve eşim Zelal COŞKUN başta olmak üzere tüm aileme sevgi, saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{Z}$	Tamsayılar
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tamsayılar
$\mathbb{R}$	Reel sayılar
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	n modunda tamsayılar
$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu uzay
$f^{-1}(A)$	A nın f altındaki ters görüntüsü
$A \cong B$	A ve B izomorftur
$Z(G)$	G grubunun merkezi
$Aut_k(G)$	G nin k-otomorfizmlerinin grubu
$R[X] = R[x_1, \dots, x_n]$	$x_1, \dots, x_n$ değişkenli polinomların halkası
$R[x]$	x değişkenine bağlı R halkası üzerinde tanımlı polinomlar halkası
$k(x_1, x_2, \dots, x_n)$	$x_1, x_2, \dots, x_n$ değişkenlerine bağlı polinomu halkasının kesirler cismi
$A \oplus B$	A ve B nin direkt toplamı
$ch(F)$	F cisminin karakteristiği
K/F	F cisminin K cisim genişlemesi
$[K:F]$	K/F cisim genişlemesinin derecesi
$ker\varphi$	φ nin çekirdeği
$F(\alpha)$	F üzerinde α tarafından üretilen cisim
$k\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$	$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ tarafından üretilen ve k cismi üzerinde tanımlı serbest Poisson cebirleri
F(X)	X kümsi tarafından üretilen Serbest Lie cebiri
R^*	R nin tersinir elemanlarının kümesi
ad	Adjoint dönüşümü
deg	Standart derece fonksiyonu
$pdeg$	Toplam derece fonksiyonu
$wdeg$	Ağırlık derece fonksiyonu
$mdeg$	Multi-homojen derece
$\delta_{i,j}$	Kronecker delta
$[-,-]$	Lie cebiri braketi
$\{-,-\}$	Poisson cebiri braketi
$<,>$	$\mathbb{R}^n$ de iç çarpım
$\bar{F}$	F cisminin kapanışı
$Der_R A$	A halkası üzerindeki bütün R-derivasyonların kümesi
$S^{-1}A$	S nin A halkasına göre kesirler cismi
$trdeg_k R$	k nın bir genişlemesi olan F cisminin transandant derecesi
$\gcd(a,b)$	a ve b nin en büyük ortak böleni
$Aff(k,n)$	Affine dönüşümlerinin grubu
$T(k,n)$	Tame dönüşümlerinin grubu
$E(k,n)$	Elementer dönüşümlerinin grubu
$J(k,n)$	Üçgensel dönüşümlerin grubu
A^D	A halkası üzerinde tanımlı D derivasyonunun çekirdeği
LND	Lokal nilpotent derivasyonlar
$S(g)$	Simetrik Poisson cebirleri
S_n	Symplektik cebirler
∂_x	x e göre kısmi türev
$Im\varphi$	φ dönüşümünün görüntü kümesi

1. GİRİŞ

Bir R halkasının otomorfizmi R den R ye birebir ve örten olan ve $\forall a, b \in R$ için

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) \text{ ve } \varphi(a.b) = \varphi(a).\varphi(b) \tag{1.1}$$

koşullarını sağlayan özel bir dönüşümdür. R nin tüm otomorfizmlerinin kümesi fonksiyonlar üzerinde tanımlanan bilinen bileşke işlemine göre bir grup yapısı oluşturur ve bu grup $Aut\ R$ ile gösterilir.

k bir cisim olmak üzere $k[X] = k[x_1, \dots, x_n]$ halkası, k üzerinde $x_1, \dots, x_n$ değişkenlerine bağlı polinomlar halkasını temsil etsin.
$F_i \in k[x_1, \dots, x_n]$ olmak üzere

$$F = (x_1, \dots, x_n): k^n \to k^n$$
$$(x_1, \dots, x_n) \to (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n)) \tag{1.2}$$

tanımlı olan F dönüşümüne polinom dönüşümü denir. Böyle bir dönüşümün tersinir olması $k[X]$ nın otomorfizlerini incelemede önemlidir. Çünkü tersinir bir F polinom dönüşümü $Aut_k k[X]$ nın elemanları ile birebir eşleşir.
$1 \leq i \leq n$ olmak üzere

$$E = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + a, x_{i+1}, \dots, x_n) \tag{1.3}$$

dönüşümüne elementer polinom dönüşümleri denir. Elementer polinom dönüşümleri ile Aff(k,n) (derecesi 1 olan dönüşümler) dönüşümlerin sonlu kompozisyonlarından oluşan otomorfizmlere tame denir. $Aut_k k[X]$ nın tame otomorfizmlerinin oluşturduğu alt gruba tame alt grup denir ve $T(k,n)$ ile gösterilir.

Cebirlerin otomorfizmleri konusunda en ilgi çekici araştırmalarından biri de bir cebir yapısının otomorfizmlerinin tame olup olmamasıdır. Sonlu üreteçli serbest Lie cebirinin otomorfizmlerinin tame olduğu ispatlandı (Cohn, 1968). Benzer biçimde iki değişkenli polinom cebirlerinin otomorfizmlerinin tame olduğu ispatlandı (Jung, 1942) ve (Kulk, 1953). Ayrıca iki ranklı serbest bir asosyatif cebirin otomorfizmleri tame olduğu sonucu elde edildi (Makar-Limanov, 1970) ve (Czerniakiewicz, 1972). Bu çalışmaların yanı sıra iki değişkenli serbest Poisson cebirlerinin otomorfizmleri incelenip bunların tame olduğunu ispatlandı (Limanov, Trusbekova ve Umirbaev, 2008)

Cebirlerin otomorfizmlerinin incelenmesinde bu cebirlerin derivasyonları önemli rol oynar. Örneğin, karakteristiği sıfır olan bir cisim üzerinde tanımlı iki değişkenli polinom cebirlerinin local nilpotent derivasyonlarının üçgenleştirilebilir olduğunu ispatlanmıştır (Rentschler, 1968). Bu çalışma ile bazı cebirlerin otomorfizmlerinin tame olmasını ispatlamada farklı bir metot sunulmuştur.

Cebirlerin yapıları hakkında önemli bilgiler verdiğinden, otomorfizmler ve dolayısıyla derivasyonlar Cebir alanında çalışılan önemli konulardan biri olmuştur. Bu durum bizim tez konumuzun motivasyonunu oluşturmuştur. Bu çalışmada polinom halkalarının otomorfizmleri detaylı bir şekilde çalışılmıştır. Ayrıca bu otomorfizmlerin tame olup olmadığı incelenmiştir. Bu konu için temel kaynaklarımızın yanı sıra özellikle Essen (2000)'den yararlanılmıştır.

Daha sonra çalışmamızda özel bir Lie cebiri olan Poisson Cebirleri tanıtılmıştır. Poisson cebirleri serbest asosyatif ve serbest Lie cebirleri ile yakından bağlantılı olmasına rağmen çok çalışılmış olan bir konu değildir. Özellikle bu cebirler ile ilgili Türkçe kaynak çok azdır. Bu yüzden tezin son bölümünde bu cebirlere yer verildi ve özellikle serbest Poisson cebirleri, bir polinom halkası yapısını taşıdıklarından dolayı polinom halkalarının otomorfizmleri konusunda kullanlan teknik ve çalışmalar bu cebirlere de uygulandı. Bu bölümdeki çalışmalar Makar Limanov, Turusbekova ve Umirbaev (2009) kaynağından incelenmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde, çalışmamızda kullanacağımız temel tanım ve teoremleri vereceğiz. Özellikle polinom halkaları, cisim genişlemeleri ve cebirler ile ilgili önemli yapılardan bahsedeceğiz. Bu bölümdeki çalışmalar için (Dummit & Foote, 2004) kaynağı kullanılmıştır. Bu yüzden bu bölümde yer alan teorem, lemma ve sonuçların ispatları bu kaynaktan bakılabilir.

2.1. Polinom Halkaları

Tanım 2.1.1. Boştan farklı bir R kümesi üzerinde '$+$' ve '$\cdot$' ikili işlemleri tanımlansın. Eğer R bu iki işlemler ile birlikte aşağıdaki koşulları sağlıyor ise R ye bir halka denir ve $(R,+,\cdot)$ ile gösterilir.

(1) $(R,+)$ bir abelyan gruptur.

(2) $(R,\cdot)$ bir yarı gruptur. Yani her $a,b,c \in R$ için $(a.b).c=a.(b.c)$ dir.

(3) R de sağdan ve soldan dağılma özellikleri sağlanır: Her $a,b,c \in R$ için $(a+b).c=(a.c)+(b.c)$ ve $a.(b+c)=(a.b)+(a.c)$ dir.

Tanım 2.1.2. R halkası çarpma işlemine göre komütatif (değişmeli) ise R halkasına komütatif halka, R halkasının çarpma işlemine göre birimi varsa, R halkasına birimli halka denir.

Örnek 2.1.1. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ birimli ve komütatif halkalardır.

Tanım 2.1.3. Birimli bir R halkasının sıfırdan farklı her elemanının tersi varsa bu R halkasına bölüm halkası denir.

Tanım 2.1.4. R bir halka olsun. Herhangi bir $a \in R$ $(a \neq 0)$ için $a.b=0$ veya $b.a=0$ olacak şekilde bir $b \in R$ $(b \neq 0)$ varsa a elemanına sıfır bölen denir.

Tanım 2.1.5. R birimli bir halka olsun. Herhangi bir $u \in R$ için $u.v = v.u = 1$ olacak biçimde bir $v \in R$ varsa u elemanına bir tersinir veya birimsel (unit) denir. Bir R halkasındaki birimsel elemanlarının kümesi R^* ile gösterilir.

Örnek 2.1.2. $\mathbb{Z}$ de sıfır bölen yoktur. $\mathbb{Z}$ de tersinir olan elemanlar sadece ∓ 1 dir. Yani $\mathbb{Z}^* = \{-1, +1\}$ dir.

Tanım 2.1.6. Birimli ve komütatif bir halka sıfır bölensiz ise bu halkaya tamlık bölgesi denir.

Tanım 2.1.7. Bir tamlık bölgesinin her elemanının tersi varsa bu tamlık bölgesine cisim denir.

Örnek 2.1.3. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ tamlık bölgeleri birer cisimdir.

Tanım 2.1.8. R bir tamlık bölgesi olsun.

(1) Varsayalım ki $r \in R$ sıfırdan farklı ve tersinir olmasın. Eğer $a, b \in R$ olmak üzere $r = ab$ için a ve b den en az biri tersinir ise r ye R de indirgenemez denir. Aksi halde r indirgenebilirdir.

(2) (p) ideali asal ideal ise $p \in R$ ye asal eleman denir.

(3) R nin farklı a ve b elemanları için u, R de tersinir bir eleman olmak üzere $a = ub$ biçiminde yazılabiliyorsa, a ve b ye R de ilişkilidir denir.

Önerme 2.1.1. Bir tamlık bölgesinde asal eleman indirgenemezdir.

Tanım 2.1.9. R bir tamlık bölgesi olsun. Sıfırdan farklı ve tersinir olmayan her $r \in R$ için aşağıdaki özellikler sağlanırsa R ye tek çarpanlama bölgesi denir.

(i) Her $1 \leq i \leq n$ için $p_i \in R$ indirgenemez elemanlar olmak üzere $r = p_1 p_2 \dots \dots \dots p_n$ şeklinde yazılabilir.

(ii) Eğer $r = q_1 q_1 \dots \dots \dots q_m$, r nin başka bir indirgenemez elemanlarla çarpılmış hali ise $m = n$ dir ve $i = 1,2, \dots \dots, n$ için p_i ve q_i ilişkilidir.

Örnek 2.1.4. F cismi aşikar tek çarpanlama bölgesidir. Çünkü her elemanı tersinirdir.

Tanım 2.1.10. R komütatif bir halka, D, R nin boş kümeden farklı bir alt kümesi ve $0 \notin D$ olsun. D sıfır bölensiz ve çarpma işlemine göre kapalı olan bir küme olsun. O halde komütatif ve birimli bir Q halkası vardır öyle ki bu halka R halkasının alt halkasıdır ve D nin her elemanı Q da tersinirdir. Q nun her elemanı $r.d^{-1}$, $r \in R, d \in D$ şeklindedir. Eğer $D = R - \{0\}$ ise Q bir cisimdir. Bu şekilde tanımlanan Q halkasına D nin R ye göre kesirler halkası denir ve $D^{-1}R$ ile gösterilir. Eğer R bir tamlık bölgesi ve $D = R - \{0\}$ ise Q ya R nin kesirler cismi ya da bölüm cismi denir.

Tanım 2.1.11. R ve S iki halka olsun. $\varphi: R \to S$ fonksiyonu verilsin. Eğer φ,

(1) Her $a, b \in R$ için $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ ve

(2) Her $a, b \in R$ için $\varphi(ab) = \varphi(a).\varphi(b)$

koşullarını sağlıyorsa φ ye bir halka homomorfizmi denir. $R = S$ olması durumunda φ'ye bir endomorfizm denir.

$$ker\varphi = \{r \in R | \varphi(r) = 0\} \text{ ve } Im\varphi = \{\varphi(r) \in S | r \in R\} \tag{2.1}$$

kümeleri tanımlansın. Bu kümelere sırasıyla halka homomorfizminin çekirdeği ve görüntü kümesi denir. Bijektif (birebir ve örten) bir halka homomorfizmine izomorfizm denir. Eğer φ bir izomorfizm ise R ve S ye izomorf halkalar denir ve $R \cong S$ ile gösterilir. R=S olması durumunda ise bu izomorfizme bir otomorfizm denir. Bir R halkasının tüm otomorfizmlerinin kümesi $AutR$ ile gösterilir. Bu küme fonksiyonların bilinen bileşke işlemi ile birlikte bir grup yapısını taşır.

Tanım 2.1.12. R birimli ve komütatif bir halka olsun. Her $a_i \in R$ için

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_o, \; n \in \mathbb{N} \tag{2.2}$$

şeklindeki x değişkenine bağlı bütün polinomların kümesini ele alalım. Bu küme polinomlarda bilinen toplama ve çarpma işlemleriyle birlikte birimli ve komütatif bir halkadır ve bu halka $R[x]$ ile gösterilir. Eğer $a_n \neq 0$ ise $p(x)$ polinomu $n.$ derecedendir denir. $a_n x^n$ e polinomun başterimi ve a_n e ise bu polinomun başkatsayısı denir ve $l(p(x)) = a_n$ ile gösterilir. Eğer $a_n = 1$ ise bu polinoma monik (monic) polinom denir.
Bu bölümde R yi birimli ve komütatif bir halka olarak alalım.

Önerme 2.1.2. R bir tamlık bölgesi olsun.

(1) $der\big(p(x)q(x)\big) = derp(x) + derq(x), p(x), q(x) \neq 0$

(2) $R[x]$ teki birimsel elemanlar R deki birimsel elemanlardır.

(3) $R[x]$ bir tamlık bölgesidir.

Önerme 2.1.3. I, R halkasının bir ideali ve $R[x]$ in I tarafından üretilen ideali $(I) = I[x]$ olsun.

$$R\,[x]/(I) \cong (R/I)[x] \tag{2.3}$$

dir. Eğer I, R nin asal ideali ise, $(I), R[x]$ in asal idealidir.

Daha önce tek değişkene bağlı polinom halkaları tanımlanmıştı. Aşağıda birden fazla değişkene bağlı polinomların halkası tanımlanmıştır.

Tanım 2.1.13. Katsayıları R de olan $x_1, x_2, \dots \dots x_n$ değişkenleri kullanılarak oluşturulan $R[X] = R[x_1, x_2, \dots \dots x_n]$ polinom halkası,

$$R[x_1, x_2, \dots \dots x_n] = R[x_1, x_2, \dots \dots x_{n-1}][x_n] \tag{2.4}$$

şeklinde yazılabilir. Katsayıları R den alınan n değişkenli polinomları basitçe bir değişkenli polinomlar olarak düşünebiliriz. Bu durumda katsayılar $n-1$ değişkenli polinomlar olur. Biraz daha somut ifadeyle, katsayıları R de olan, $x_1, x_2, \dots \dots x_n$ değişkenlerine bağlı sıfırdan farklı bir polinom, sıfırdan farklı monomial terimlerin

sonlu toplamıdır. Yani ${x_1}^{d_1}{x_2}^{d_2} \dots {x_n}^{d_n}$, $a \in R$, $d_i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ formundaki elemanların sonlu toplamıdır. $a{x_1}^{d_1}{x_2}^{d_2} \dots \dots {x_n}^{d_n}$ terimine monomial (monomial) ve $a = 1$ olması durumunda ise ${x_1}^{d_1}{x_2}^{d_2} \dots \dots {x_n}^{d_n}$ monomialine monik (monic) denir. d_i ye x_i nin derecesi denir ve $d = d_1 + d_2 + \cdots d_n$ toplamına ise $a{x_1}^{d_1}{x_2}^{d_2} \dots \dots {x_n}^{d_n}$ teriminin derecesi denir. Sıfırdan farklı bir polinomun derecesi, monomial terimlerinin en büyük derecesidir. Sıralı $(d_1, d_2, \dots \dots d_n)$ ne $a{x_1}^{d_1}{x_2}^{d_2} \dots \dots {x_n}^{d_n}$ teriminin multi-derecesi (multi-degree) denir. Eğer bir polinomun bütün terimlerinin derecesi aynı ise bu polinoma homojen denir. Eğer f sıfırdan farklı, n değişkenli bir polinom ise, f de derecesi k olan tüm monomial terimlerin toplamına, f nin derecesi k olan homojen bileşimleri denir. Eğer f nin derecesi d ise, f_k, f nin derecesi k olan homojen bileşimi olmak üzere, $0 \leq k \leq d$ için $f = f_0 + f_1 + \cdots f_d$ biçiminde tek şekilde yazılabilir.

Sonuç olarak R de katsayılı, keyfi sayıda değişkenli bir polinom halkası tanımlamak için, bilinen toplama ve çarpma işlemleriyle birlikte yukarıdaki formda verilen monomial terimlerin sonlu toplamını alırız.

Örnek 2.1.5. $\mathbb{Z}[x, y]$ iki değişkenli polinom halkası, $ax^i y^j$ formundaki monomial terimlerin bütün sonlu toplamlarından oluşur. Örneğin;

$$p(x, y) = 2x^3 + xy - y^2 \text{ ve } q(x, y) = -3xy + 2y^2 + x^2y^3$$

polinomları $\mathbb{Z}[x, y]$ nin elemanlarıdır. $p(x, y)$ nin derecesi 3, $q(x, y)$ nin derecesi 5 tir. Polinomların toplamı olan

$$p(x, y) + q(x, y) = 2x^3 - 2xy + y^2 + x^2y^3$$

nin derecesi 5 tir. Ayrıca

$$p(x, y)q(x, y) = -6x^4y + 4x^3y^2 + 2x^5y^3 - 3x^2y^2 + 5xy^3 + x^3y^4$$
$$-2y^4 - x^2y^5$$

derecesi 8 olan bir polinomdur.

$p(x,y)q(x,y)$ polinomu, katsayıları $\mathbb{Z}[x]$ de olan, y değişkenine bağlı bir polinom olarak da yazılabilir.

$$(-6x^4)y + (4x^3 - 3x^2)y^2 + (2x^5 + 5x)y^3 + (x^3 - 2)y^4 - (x^2)y^5$$

tir. Bu polinomun sıfırdan farklı homojen birleşimleri;

$$f_4 = -3x^2y^2 + 5xy^3 - 2y^4,$$
$$f_5 = -6x^4y + 4x^3y^2,$$
$$f_7 = x^3y^4 - x^2y^5$$
$$f_8 = 2x^5y^3$$

polinomlarıdır.

Tanım 2.1.14. Sabit olmayan, birden fazla polinomun çarpımı biçiminde yazılamayan polinomlara indirgenemez polinomlar denir.

2.2. Cisim Genişlemeleri

Hatırlayalım ki bir F cismi, sıfırdan farklı her elemanının tersi olan, birimli ve komütatif bir halkadır. $F^* = F - \{0\}, F$ nin sıfırdan farklı elemanlarının kümesi çarpma altında abelyan bir gruptur.

F nin birimi 1_F olmak üzere $F, 1_F, 1_F + 1_F, 1_F + 1_F + 1_F, \ldots$ elemanlarını içerir. $n \in \mathbb{Z}^+$ için $n.1_F = 1_F + \cdots + 1_F$(n-tane) olsun. Bu durumda ya bütün $n.1_F$ ler farklıdır yada bazı n ler için $n.1_F = 0$ dır.

Tanım 2.2.1. Bir F cisminin karakteristiği, $p.1_F$ olacak şekildeki pozitif p tamsayılarının en küçüğüdür. $ch(F)$ ile gösterilir. Kolaylıkla görülebilir ki $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$n.1_F + m.1_F = (m+n).1_F \text{ ve } (n.1_F)(m.1_F) = nm.1_F \tag{2.5}$$

dir.

Bir cismin karakteristiği ya 0 dır ya da asaldır. Bunu kısaca şöyle gösterelim. Kabul edelim ki F cisminin karakteristiği asal olmasın. Yani $n = ab$ olsun. $n.1_F = 0$ ise $ab.1_F = 0$ dır. Bu durumda $(a.1_F)(b.1_F) = 0$ olur. Sonuç olarak $a.1_F = 0$ ya da $b.1_F = 0$ olur ki bu F nin karakteristiğinin n olmasıyla çelişir. Yani $ch(F)$ asaldır.

Önerme 2.2.1. $ch(F) = p$ ise, herhangi bir $\alpha \in F$ için

$$p.\alpha = \underbrace{\alpha + \alpha + \cdots + \alpha}_{p\ -\text{tane}} = 0 \tag{2.6}$$

dır.

İspat: $p.\alpha = p.(1_F\alpha) = (p.1_F)(\alpha) = 0$ olur.

Örnek 2.2.1. $ch(\mathbb{Q}) = ch(\mathbb{R}) = 0$ dır. Bir tamlık bölgesi olan $\mathbb{Z}$ nin karakteristiği de 0 dır. Her p asal sayısı için sonlu $F_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ cisminin karakteristiği p dir. Bir tamlık bölgesi $F_p[x]$ in karakteristiği p dir.

F cisminin kendi karakteristiğine bağlı olarak ya $\mathbb{Q}$ ya da $F_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ye izomorf olan bir alt cismi vardır. Her iki durumda da bu alt cisim, F nin 1_F yi içeren en küçük altcismidir.

Tanım 2.2.2. F nin çarpımsal birimi 1_F tarafından üretilen altcisme asal alt cisim denir. Eğer $ch(F) = 0$ ise bu altcisim $\mathbb{Q}$ ya izomorftur. Eğer $ch(F) = p$ ise bu altcisim F_p ye izomorftur.

Örnek 2.2.2. $\mathbb{Q}$ nun ve $\mathbb{R}$ nin asal altcismi $\mathbb{Q}$ dur ve $F_p[x]$ cisminin asal altcismi F_p ye izomorftur.

Tanım 2.2.3. K bir cisim ve F, K nın bir altcismi olsun. K ya F nin bir cisim genişlemesi denir ve K/F ile gösterilir. Özellikle her F cismi, asal altcisminin bir genişlemesidir.
Eğer K/F bir cisim genişlemesi ise K üzerinde tanımlı çarpma işlemi K yı F üzerinde bir vektör uzayı yapar. Özellikle her F cismi, asal altcismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

Tanım 2.2.4. K/F cisim genişlemesinin derecesi, F üzerinde bir vektör uzayı olan K nın boyutudur ve $[K:F]$ ile gösterilir. Yani $[K:F] = dim_F K$ dır. Eğer $[K:F]$ sonlu ise cisim genişlemesi sonludur.
Cisim genişlemesi konusunda önemli çalışmalardan biri, verilen bir F cismi üzerinde denklem çözme çalışmalarıdır. Örneğin $F = \mathbb{R}$ alırsak, $x^2 + 1 = 0$ denkleminin $\mathbb{R}$ de çözümü yoktur. Bu durumda Bu denklemin de çözümünü bulunduran, $\mathbb{R}$ yi içeren daha geniş bir cisim olup olmadığı sorusu sorulabilir. Diğer yandan verilen herhangi bir F cismi ve $p(x) \in F[x]$ polinomu için de benzer bir soru sorulabilir. Yani F nin, $p(x) = 0$ denkleminin kökünü bulunduran bir K cisim genişlemesi var mıdır?

Teorem 2.2.1. $K = F[x]/(p(x))$, $p(x)$ in bir kökünü bulunduran, F nin bir cisim genişlemesi olur.
Bu teorem ileride, F cisminin $p(x)$ in bütün köklerini bulunduran genişlemelerini oluşturmak için kullanılacaktır.

Tanım 2.2.5. K, F nin bir genişlemesi ve $\alpha, \beta, \ldots \in K$ olsun. O zaman hem F yi hemde $\alpha, \beta, \ldots$ elemanlarını içeren K nın en küçük altcismi, F üzerinde $\alpha, \beta, \ldots$ elemanları tarafından üretilen bir cisimdir ve $F(\alpha, \beta, \ldots)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2.6. Eğer K cismi F üzerinde tek bir α elemanı tarafından üretiliyorsa yani $K = F(\alpha)$ ise, K ya F nin basit genişlemesi denir ve α ya genişlemenin ilkel elemanı denir.

Teorem 2.2.2. F bir cisim ve $p(x) \in F[x]$ indirgenemez bir polinom olsun. Varsayalım ki $K, p(x)$ in bir α kökünü bulunduran, F nin bir cisim genişlemesi olsun. O halde K da $p(\alpha) = 0$ dır. $F(\alpha), \alpha$ tarafından F üzerinde üretilen K nın bir altcismi olsun. O halde $F(\alpha) \cong F[x]/(p(x))$ tir.

Örnek 2.2.3. $x^2 - 2 = 0$ eşitliğinin $\mathbb{R}$ de başka bir çözümü $(-\sqrt{2})$ dir. Bu çözüm tarafından $\mathbb{Q}$ üzerinde oluşturulan cisim, $\{a + b(-\sqrt{2}) | a, b \in \mathbb{Q}\}$ elemanlarından oluşur.

Tanım 2.2.7. Eğer α, bazı sıfırdan farklı $f(x) \in F[x]$ polinomları için bir kök ise $\alpha \in K$ ya F üzerinde cebirsel denir. Eğer α, F üzerinde cebirsel değilse transandanttır denir. Eğer K nın her elemanı F üzerinde cebirsel ise K/F genişlemesine cebirsel genişleme denir. Eğer α, F cismi üzerinde cebirsel ise, F nin herhangi bir L genişlemesi üzerinde de cebirseldir.

Önerme 2.2.2. α elemanının F üzerinde cebirsel olması için gerek ve yeter şart, $F(\alpha)/F$ basit genişlemesinin sonlu olmasıdır. Dahası, eğer α, F üzerinde $n.$ dereceden bir genişlemenin bir elemanı ise, α, F üzerinde en fazla $n.$ dereceden bir

polinomun köküdür. Eğer α, F üzerinde $n.$ dereceden bir polinomun kökü ise $F(\alpha)$ nın derecesi en fazla n dir.

Sonuç 2.2.1. Eğer K/F genişlemesi sonlu ise, bu genişleme cebirseldir.

Tanım 2.2.8. $K = F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ olacak şekilde K da $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ elemanları varsa K/F genişlemesi sonlu üretilmiş genişlemedir. Hatırlayalım ki, K cisminin elemanlarıyla F üzerinde üretilen cisim, K nın bu elemanları ve F yi içeren en küçük altcismiydi.

Tanım2.2.9. $\bar{F}$, F üzerinde cebirsel olsun. Eğer her $f(x) \in F[x]$ polinomu $\bar{F}$ üzerinde tamamen çarpanlarına ayrılabiliyorsa, $\bar{F}$ cismine F nin bir cebir kapanışı denir.

Tanım 2.2.10. $K[x]$ teki her polinomun K da bir kökü varsa, bu K cismine cebirsel kapalı denir.

Eğer K cebirsel kapalı ise her $f(x) \in K[x]$ polinomunun bütün kökleri K da bulunur. Tanımdan, $\alpha \in K$ elemanı $f(x)$ in bir kökü olduğundan $K[x]$ de bir $x - \alpha$ çarpanı vardır. $f(x)$ in kalan çarpanı $K[x]$ te bir polinomdur. Dolayısıyla kökü vardır. Bu şekilde devam edersek, $f(x)$ tamamen lineer çarpanlara ayrılır. Sonuç olarak K cebirsel kapalı ise K nın kendisi K nın bir cebir kapanışıdır ve tersi de doğrudur. Buradan, $K = \overline{K}$ olması için gerekli ve yeter koşul K nın cebirsel kapalı olmasıdır.

Önerme 2.2.3. K, cebirsel kapalı bir cisim ve F, K nın bir altcismi olsun. K nın F üzerinde cebirsel olan $\bar{F}$ elemanlarının kümesi F nin bir cebir kapanışıdır. F nin bir cebir kapanışı izomorfizme göre tektir.

Teorem 2.2.3. $\mathbb{C}$ cismi cebirsel kapalıdır.

Sonuç 2.2.2. $\mathbb{C}$ cismi, herhangi bir altcisminin bir cebirsel kapanışını içerir. Özellikle, $\mathbb{Q}$ üzerinde kompleks sayılar cebirinin kümesi $\overline{\mathbb{Q}}$, $\mathbb{Q}$ nun bir cebirsel kapanışıdır.

Bir F cismi üzerindeki cebirsel elemanları içeren bütün hesaplamalar $\bar{F}$ cisminde düşünülebilir. Benzer şekilde cebirsel genişlemelerin tüm kümelerinin birleşimini cebirsel kapanışın altcisimleri olarak görebiliriz.

Tanım 2.2.11. F bir cisim ve $f(x) \in F[x]$ bir polinomu olsun.

$$f(x) = (x - \alpha_1)^{n_1}(x - \alpha_2)^{n_2} \dots (x - \alpha_k)^{n_k} \tag{2.7}$$

polinomunu ele alalım. Eğer $n_i = 1$ ise α_i ye bir basit kök, $n_i > 1$ ise α_i ye katlı kök denir.

Tanım 2.2.12. Eğer F cismi üzerindeki bir polinomun hiç katlı kökü yok ise bu polinoma ayrılabilir denir. Ayrılabilir olmayan polinomlara ise ayrılamaz denir.

Tanım 2.2.13. A ve B komütatif, tersinir halkalar ve A halkası B nin bir alt halkası olmak üzere $\alpha \in B$ olsun. $a_i \in A$ ve $n \geq 1$ için α elemanı

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{2.8}$$

polinomunun bir kökü ise α ya A halkası üzerinde tam (integral) eleman denir.

Tanım 2.2.14. A ve B komütatif, tersinir halkalar ve A halkası B nin bir alt halkası olsun. Eğer A üzerinde tam olan B nin her elemanı A ya ait ise A halkasına B de tamamen kapalı (integrally closed) denir.

2.3. Cebirler

Tanım 2.3.1. F bir cisim olsun. F üzerinde bir cebir

$$\cdot:\ A\times A \to A$$
$$(x,y) \to x.y$$

şeklinde bir bilineer işlemle birlikte bir A vektör uzayıdır.

Eğer $\forall\ x,y,z \in A$ için $x.(y.z) = (x.y).z$ ise A ya bir asosyatif cebir denir. Eğer $\forall\ x,y \in A$ için $x.y = y.x$ ise A ya komütatif cebir denir.

Tanım 2.3.2. R bir komütatif halka olsun. $f: R \to A$ bir halka homomorfizmi ile birlikte aşağıdaki şartları sağlayan A halkasına bir $R-$cebir denir.

i) $f(1_R) = 1_A$

ii) $f(R) \subseteq Z(A)$

Burada $Z(A)$, A nın merkezidir.

$$Z(A) = \{a \in A | \forall\ b \in A \text{ için } ab = 0\} \tag{2.9}$$

Tanım 2.3.3. F bir cisim ve L, F üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. Eğer L üzerinde aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde bir bilineer

$$[\ ,\ ]: L\times L \to L$$
$$(x,y) \to [x,y]$$

işlemi tanımlıysa L ye bu işlemle birlikte bir Lie cebiri denir.

i) $\forall\ x \in L$ için $[x,x] = 0$

ii) $\forall\ x,y,z \in L$ için $\big[x,[y,z]\big] + \big[y,[z,x]\big] + \big[z,[x,y]\big] = 0$ (Jacobi Özdeşliği)

Tanım 2.3.4. L_1 ve L_2 iki Lie cebiri olsun.

$$\varphi: L_1 \to L_2$$

bir dönüşüm olmak üzere eğer φ aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, φ dönüşümüne bir

Lie cebiri homomorfizmi denir.

1) φ bir lineer dönüşümdür:

$$\forall\, a \in F \text{ ve } \forall\, x, y \in L_1 \text{ için } \varphi(ax + y) = a.\varphi(x) + \varphi(y) \tag{2.10}$$

2) φ bir Lie cebir homomorfizmidir:

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] \tag{2.11}$$

Tanım 2.3.5. X boş olmayan herhangi bir küme, F bir Lie cebiri ve $i: X \to F$ bir dönüşüm olsun. Her A Lie cebiri ve $f: X \to A$ dönüşümü için $f = g \circ i$ olacak şekilde bir tek $g: F \to A$ Lie cebiri homomorfizmi varsa, F Lie cebirine X üzerinde bir serbest Lie cebiri veya X tarafından üretilen serbest Lie cebiri denir ve genel olarak $F(X)$ ile gösterilir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Tez çalışması sırasında internetten ve Harran Üniversitesi kütüphanesinden çalışmamızın temelini oluşturabilmesi için temel Cebir kaynakları tespit edildi ve bu kaynaklara çalışıldı. Daha sonra tez konusu olarak belirlediğimiz otomorfizmler ve derivasyonlarla ilgili literatürde bulunan çalışmalar araştırıldı ve faydalı olacağı düşünülen kitap, tez, makale, vs. gibi kaynaklar edinildi ve bunlar detaylı bir şekilde incelendi.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Polinom otomorfizmleri birçok problemin çözümünde önemli bir rol oynar. Sonlu her $F: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ polinom otomorfizmi için $\varphi^{-1}F\varphi$ bir lineer dönüşüm olacak şekilde bir $\varphi: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ polinom otomorfizminin var olduğu biliniyor iken $n \geq 3$ olma durumunda $\mathbb{C}^n$ için böyle bir sonucun doğru olup olmadığı henüz bilinmiyor.

Çalışmamızda ele aldığımız tersinir polinom dönüşümleri, derivasyonlar, bir derivasyonun kuvveti ve lokal nilpotent derivasyonlar, polinom otomorfizmleri ile ilgili birçok problemin çözümünde önemli bir rol oynar.

4.1. Polinom Halkalarının Derivasyonları

Derivasyonlar polinom otomorfizmlerini çalışmada önemli bir rol oynar. Bu bölümde bir halka üzerinde derivasyonların bazı temel özelliklerini hatırlayacağız ve karakteristiği sıfır olan bir cisim üzerindeki polinom halkalarının derivasyonları ile ilgili bazı temel sonuçlar inceleyeceğiz. Bu bölümdeki çalışmalar için (Essen, 2000) kaynağı kullanılmıştır. Bu kaynakta verilen teoremler daha detaylı incelenmiş ve ayrıca bu bölümde belirtilen kaynaktaki çözülmemiş bazı problemlerin çözümlerine yer verilmiştir.

4.1.1. Derivasyonlar

A herhangi bir halka ve R, komütatif bir halka olsun.

Tanım 4.1.1.1: Her $a, b \in A$ için

$$D(a+b) = D(a) + D(b) \tag{4.1}$$

ve

$$D(ab) = a.D(b) + b.D(a) \quad \text{(Leibniz koşulu)} \tag{4.2}$$

koşulunu sağlayan $D: A \to A$ dönüşümüne A nın bir derivasyonu denir.

Örnek 4.1.1.1. $A = R[X] = R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ olsun. Bilinen kısmi türev $\frac{\partial}{\partial x_i}$, A üzerinde bir derivasyondur. $f(x), g(x) \in R[X]$ olsun.

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f(x) + g(x)) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) + \frac{\partial}{\partial x_i} g(x)$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f(x).g(x)) = f(x).\frac{\partial}{\partial x_i}g(x) + g(x).\frac{\partial}{\partial x_i}f(x)$$

eşitliklerinin sağlandığı kolaylıkla görülebilir. Her $a, b \in A, n \geq 1$ için

$$D^n(ab) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} D^i(a).D^{n-i}(b) \tag{4.3}$$

dir. Bu eşitliğin doğruluğunu tümevarım yöntemiyle gösterelim;
$n = 1\ için$:

$$D(ab) = a.D(b) + b.D(a) \tag{4.4}$$

eşitliği sağlanır. Buna Leibniz koşulu denir.
$n = k\ için$:

$$D^k(ab) = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i} D^i(a).D^{k-i}(b) \tag{4.5}$$

eşitliğinin doğru olduğunu kabul edelim.
$n = k + 1\ için$:

$$D^{k+1}(ab) = \sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i} D^i(a).D^{k+1-i}(b) \tag{4.6}$$

eşitliğinin doğru olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} D^{k+1}(ab) = D\left(D^k(ab)\right) &= D(a.D^k(b) + k.D(a).D^{k-1}(b) + \cdots + D^k(a).b) \\ &= a.D^{k+1}(b) + D(a).D^k(b) + \cdots + D^k(a).D(b) + D^{k+1}(a).b \\ &= \sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i} D^i(a).D^{k+1-i}(b) \end{aligned} \tag{4.7}$$

olup, ispat tamamlanmış olur.

Bir A halkası üzerindeki tüm derivasyonların kümesini $DerA$ ile gösterelim.

Tanım 4.1.1.2. $f: R \to A$ halka homomorfizmi, A bir R-cebir olsun. Eğer $D \circ f = 0$ ise D ye bir R-derivasyon denir. A üzerindeki bütün R-derivasyonların kümesi $Der_R A$ ile gösterilir.

Her $D \in DerA$ için $D(1) = D(1.1) = D(1) + D(1)$ olduğundan $D(1) = 0$ olur. Eğer A bir $\mathbb{Z}$-cebir ise $DerA = Der_{\mathbb{Z}} A$ dır. Bunu şöyle gösterebiliriz:
A bir $\mathbb{Z}$-cebir olsun. Bu durumda

$$f: \mathbb{Z} \to A$$
$$n \to n.1$$

olacak şekilde bir halka homomorfizmi vardır. $D \in DerA$ olsun.

$$D \circ f(n) = D\big(f(n)\big) = D\big(f(n.1)\big) = D\big(f(n).f(1)\big) = D\big(n.f(1)\big) = D(n)$$
$$= n.D(1) = 0$$

olur. Böylece A üzerindeki her derivasyon bir $\mathbb{Z}$ -derivasyon yani $DerA = Der_{\mathbb{Z}} A$ dır.

Eğer D ve D', $DerA$ nın elemanları ise $[D, D'] = DD' - D'D$ Lie braketi de $Der_R A$ nın elemanıdır. Bu braket çarpımı ile birlikte $DerA$ bir Lie cebiridir:
$D_1, D_{2,} D_3 \in Der_R A$ olsun.
i) $[D_1, D_1] = D_1.D_1 - D_1.D_1 = 0$ olur.
ii) $\big[D_1, [D_2, D_3]\big] + \big[D_2, [D_3, D_1]\big] + \big[D_3, [D_1, D_2]\big]$
$= [D_1, D_2D_3 - D_3D_2] + [D_2, D_3D_1 - D_1D_3] + [D_3, D_1D_2 - D_2D_1]$
$= D_1D_2D_3 - D_1D_3D_2 - D_2D_3D_1 + D_3D_2D_1 + D_2D_3D_1 - D_2D_1D_3 - D_3D_1D_2$
$+D_1D_3D_2 + D_3D_1D_2 - D_3D_2D_1 - D_1D_2D_3 + D_2D_1D_3 = 0$

olup, $Der_R A$ bir Lie cebiridir.

Lemma 4.1.1.1. A bir R-cebir, G kümesi A için bir üreteç kümesi ve $D \in Der_R A$ olsun. Bu durumda $g \in G$ için D derivasyonu $D(g)$ elemanları ile tamamenbelirlidir.

İspat: $G = \{g_1, g_2, \dots g_n\}$ olsun. $a \in A$ ve $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in R$ olmak üzere

$$a = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \cdots + \alpha_n g_n$$

şeklinde yazılabilir. $D \in Der_R A$ ise

$$D: A \to A$$
$$\text{a} \to D(a)$$

şeklinde tanımlı derivasyonu ele alalım.

$$\begin{aligned} D(a) &= D(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \cdots + \alpha_n g_n) \\ &= D(\alpha_1 g_1) + D(\alpha_2 g_2) + \cdots + D(\alpha_n g_n) \\ &= \alpha_1 . D(g_1) + \alpha_2 . D(g_2) + \cdots + \alpha_n . D(g_n) \end{aligned}$$

olur. Yani $D, g \in G$ için $D(g)$ elemanları ile tamamen belirlidir.

Önerme 4.1.1.1. $A = R[X] = R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ olsun.
$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ için $[\partial_i, \partial_j] = 0$ olmak üzere $\partial_1, \partial_2 \dots \partial_n$ baz elemanları ile birlikte $Der_R R[X]$ bir serbest $R[X] -$ modüldür.

İspat: i. $D \in Der_R R[x]$ ve $D_0 = D - \sum D(x_i)\, \partial_i$ olsun.

$$D_0 = D - \sum D(x_i)\, \partial_i$$

$$\begin{aligned} D_0(x_i) &= D(x_i) - (D(x_1)\partial_1 + D(x_2)\partial_2 + \cdots + D(x_n)\partial_n)(x_i) \\ &= D(x_i) - D(x_1)\partial_1(x_i) - D(x_2)\partial_2(x_i) - \cdots - D(x_i)\partial_i(x_i) - \cdots \\ &\quad -D(x_n)\partial_n(x_i) \\ &= D(x_i) - D(x_i)\partial_i(x_i) = 0 \end{aligned}$$

yani, $D_0 = 0$,

$$D = \sum D(x_i)\,\partial_i \tag{4.8}$$

olur.

ii. Bazı $a_i \in R[X]$ ler için $\sum a_i\,\partial_i = 0$ ise, x_i elemanının bu derivasyon altındaki görüntüsünden $a_i = 0$ elde edilir.

$$\sum a_i\partial_i = 0 = a_1\partial_1 + a_2\partial_2 + \cdots + a_n\partial_n \tag{4.9}$$

dir.

iii. $D_0 = [\partial_i, \partial_j]$ olsun. x_i nin bu derivasyon altındaki görüntüsü sıfırdır. Dolayısıyla $D_0 = 0$ dır. Ayrıca

$$[\partial_i, \partial_j] = (\partial_i\partial_j - \partial_j\partial_i)(x_i) = \partial_i\partial_j(x_i) - \partial_j\partial_i(x_i) = 0 - 0 = 0 \tag{4.10}$$

dır.

4.1.2. Derivasyonların genişlemesi

Tanım 4.1.2.1. k, karakteristiği 0 olan bir cisim olsun. Eğer her $x \in k$ için $D(x) = 0$ ise bu derivasyona aşikar derivasyon denir. K, bir k cisminin bir genişlemesi olsun. Her $x \in k$ için $D(x) = 0$ ise D derivasyonu k cismi üzerinde aşikardır denir.

Asal cisimler üzerinde bir derivasyon her zaman aşikardır. Bunu şöyle ispaylayabiliriz;
H, K nın asal cismi olsun. Bu durumda her $a \in H$ için

$$a = 1_K + 1_K + \cdots + 1_K \tag{4.11}$$

yazılabilir. O halde

$$D(a) = D(1_K + 1_K + \cdots + 1_K) = D(1_K) + D(1_K) + \cdots + D(1_K) = 0 \tag{4.12}$$

olur.

Önerme 4.1.2.1. i. A komütatif bir halka, $D \in DerA$ ve S, A nın çarpma işlemi altında kapalı bir altkümesi olsun. O halde $D, S^{-1}A$ üzerinde bir $\widetilde{D}$ derivasyonu oluşturur. Özellikle bir tamlık bölgesinin her derivasyonu, bu tamlık bölgesinin kesirler cisminin bir derivasyonuna tek olarak genişler.
ii. $K \subset L$ bir ayrılabilir cebirsel genişleme ve $D \in DerK$ olsun. O halde D derivasyonu L nin bir $\widetilde{D}$ derivasyonuna tek şekilde genişler.

İspat: i. $S^{-1}A = \{s^{-1}a : \mathrm{s} \in \mathrm{S}, \mathrm{a} \in \mathrm{A}\}$

$$\widetilde{D}: S^{-1}A \to S^{-1}A$$
$$\left(\frac{a}{b}\right) \to \widetilde{D}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{b.D(a) - a.D(b)}{b^2} \tag{4.13}$$

tanımlansın.

$$\widetilde{D}\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)=\widetilde{D}\left(\frac{ad+bc}{bd}\right)$$
$$=\frac{bd.D(ad+bc)-(ad+bc).D(bd)}{(bd)^2}$$
$$=\frac{bd.\big(D(ad)+D(bc)\big)-(ad+bc).D(bd)}{b^2d^2}$$
$$=\frac{bd\big(a.D(d)+d.D(a)+b.D(c)+c.D(b)\big)}{b^2d^2}$$
$$-\frac{(ad+bc)\big(b.D(d)+d.D(b)\big)}{b^2d^2}$$
$$=\frac{bda.D(d)+bd^2.D(a)+b^2d.D(c)+bdc.D(b)}{b^2d^2}$$
$$-\frac{adb.D(d)+ad^2.D(b)+b^2c.D(d)+bcd.D(b)}{b^2d^2}$$
$$=\frac{bd^2.D(a)-ad^2.D(b)}{b^2d^2}+\frac{b^2d.D(c)-b^2c.D(d)}{b^2d^2}$$
$$=\frac{b.D(a)-a.D(b)}{b^2}+\frac{d.D(c)-c.D(d)}{d^2}$$
$$=\widetilde{D}\left(\frac{a}{b}\right)+\widetilde{D}\left(\frac{c}{d}\right) \qquad (4.14)$$

$$\widetilde{D}\left(\frac{a}{b}.\frac{c}{d}\right)=\widetilde{D}\left(\frac{ac}{bd}\right)$$
$$=\frac{bd.D(ac)-ac.D(bd)}{b^2d^2}$$
$$=\frac{bd\big(a.D(c)+c.D(a)\big)-ac\big(b.D(d)+d.D(b)\big)}{b^2d^2}$$
$$=\frac{bda.D(c)+bdc.D(a)-acb.D(d)-acd.D(b)}{b^2d^2}$$
$$=\frac{da.D(c)-ac.D(d)}{bd^2}+\frac{bc.D(a)-ac.D(b)}{b^2d}$$
$$=\frac{a}{b}\left(\frac{d.D(c)-c.D(d)}{d^2}\right)+\frac{c}{d}\left(\frac{b.D(a)-a.D(b)}{b^2}\right)$$
$$=\frac{a}{b}.\widetilde{D}\left(\frac{c}{d}\right)+\frac{c}{d}.\widetilde{D}\left(\frac{a}{b}\right) \qquad (4.15)$$

(4.14) ve (4.15) eşitliklerinden, $\widetilde{D}$, $S^{-1}A$ üzerinde bir derivasyondur.

ii. $L = K(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ bir sonlu üretilmiş cisim genişlemesi ve $D \in DerK$ olsun. K ya kısıtlanışı D olacak şekilde L nin bir D^* derivasyonu aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$f \in K[x_1, x_2, \dots x_n] = K[x] \text{ ve } (\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n) \tag{4.16}$$

olmak üzere $f(\alpha) = 0$ olsun. f^D, f nin tüm katsayılarının D altındaki görüntüsü olmak üzere

$$D^* f(\alpha) = f^D(\alpha) + \sum \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_i}\right) D^*(\alpha_i) \tag{4.17}$$

tanımlansın.

$$f(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \in K[x] \tag{4.18}$$

olsun.

$$f(\alpha) = a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + \cdots + a_n \alpha_n = 0 \tag{4.19}$$

dır. Bu durumda

$$\begin{aligned} D^* f(\alpha) &= D^*(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n) \\ &= D^*(a_1\alpha_1) + D^*(a_2\alpha_2) + \cdots + D^*(a_n\alpha_n) \\ &= a_1 D^*(\alpha_1) + \alpha_1 D^*(a_1) + a_2 D^*(\alpha_2) + \alpha_2 D^*(a_2) + \cdots \\ &\quad + a_n D^*(\alpha_n) + \alpha_n D^*(a_n) \end{aligned} \tag{4.20}$$

D^* ın K ya kısıtlanışı D ye eşit olacağından

$$D^*(a_i) = D(a_i) \tag{4.21}$$

dir. Bu durumda

$$D^*f(\alpha) = \alpha_1 D(a_1) + \alpha_2 D(a_2) + \cdots + \alpha_n D(a_n) + a_1 D^*(\alpha_1) + \cdots + a_n D^*(\alpha_n) = f^D(\alpha) + \sum(\frac{\partial f}{\partial \alpha_i}) D^*(\alpha_i) \quad (4.22)$$

olur. Böylece D^* ın varlığı için gerekli koşul sağlanmıştır. Şimdi tersini gösterelim. Yani D^*, Lnin (4.16) eşitliğini sağlayan bir derivasyonu olsun. D^* ın D nin bir genişlemesi olduğunu gösterelim: $g(x), h(x) \in K[x]$ ve $h(x) \neq 0$ ise

$$D^*\big(g(\alpha)\big) = g^D(\alpha) + \sum \frac{\partial g}{\partial \alpha_i} D^*(\alpha_i) \quad (4.23)$$

$$D^*\left(\frac{g}{h}\right) = \frac{h.D^*(g) - g.D^*(h)}{h^2}$$

formülleriyle tanımlanan D^* dönüşümü iyi tanımlıdır ve L nin bir derivasyonudur. Şimdi L, K nın bir ayrılabilir cisim genişlemesi olsun. Kolaylık olması için $L = K(\alpha)$ alalım. Bu durumda $f \in K[x]$ için $f(\alpha) = 0$ olacak şekilde bir $f(x)$ indirgenemez polinomu vardır. O halde $f'(\alpha) \neq 0$ dır. (Kaplansky, 1972)

$$0 = D^*f(\alpha) = f^D(\alpha) + \frac{\partial f}{\partial \alpha} D^*(\alpha) \quad (4.24)$$

$$0 = f^D(\alpha) + f'(\alpha) D^*(\alpha)$$

$f'(\alpha) \neq 0$ olduğundan $D^*(\alpha) = -\frac{f^D(\alpha)}{f'(\alpha)}$ dır. O halde $D, K(\alpha)$ ya tek şekilde genişler.

Sonuç 4.1.2.1. $K \subset L$ ayrılabilir bir cisim genişlemesi ve $D \in Der_K L$ olsun. Eğer $\alpha \in L, K$ üzerinde cebirsel ise $D(\alpha) = 0$ dır.

İspat: $K \subset L$ ayrılabilir bir cisim genişlemesi ve $D \in Der_K L$ olsun. $\alpha \in L, K$ üzerinde bir cebirsel ise bir $f \in K[x]$ vardır öyle ki $f(\alpha) = 0$ dır.

$$0 = D\big(f(\alpha)\big) = f^D(\alpha) + f'(\alpha) D(\alpha) \quad (4.25)$$

($D \in Der_K L$ iken $a \in K$ ise $D(a) = 0$ olacağından) $f^D(\alpha) = 0$ dır. O halde

$$0=0+f'(\alpha)D(\alpha) \tag{4.26}$$

olur. $f'(\alpha) \neq 0$ dır (Kaplansky, 1972). Bu durumda $D(\alpha) = 0$ olur.

Örnek 4.1.2.1. A bir halka ve $a \in A$ olsun.

$$D: A \to A$$
$$b \to [a,b] = ab - ba$$

dönüşümü A üzerinde bir derivasyondur. Bu derivasyona A nın iç derivasyonu (inner derivasyonu) denir. Bu dönüşümün bir derivasyon olduğunu gösterelim.

$$D: A \to A$$
$$b \to D(b) = [a,b] = ab - ba$$
$$D(b+c) = [a,b+c] = a(b+c) - (b+c)a$$
$$= ab + ac - ba - ca = (ab - ba) + (ac - ca) = D(b) + D(c)$$

Şimdi $D(bc) = bD(c) + D(b)c$ olduğunu gösterelim.

$$D(bc) = [a,bc] = abc - bca$$
$$= bac - bca + abc - bac$$
$$= b(ac - ca) + (ab - ba)c = bD(c) + D(b)c$$

Böylece $b \to [a,b] = ab - ba$ dönüşümü A üzerinde bir derivasyondur.

Örnek 4.1.2.2. $1 \in A_0, A = \cup A_n$ ve her $n, m \in \mathbb{Z}$ için $A_n A_m \subset A_{n+m}$ koşullarını sağlayan $\ldots A_{n-1} \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \ldots$ toplamsal altgrupların artan zincirinden oluşan halkaya filtrelenmiş halka (filtered ring) denir. $D \in DerA$ olsun. $\forall\, n \in \mathbb{Z}$ için öyle bir $k \in \mathbb{Z}$ vardır ki $DA_n \subset A_{n+k}$ dır. $grA = \oplus A_n/A_{n-1}$ A nın derecelendirilmiş (associated graded) halkası olsun. Her $a \in A_n$ için

$$grD: grA \to grA$$
$$grD(a + A_{n-1}) = Da + A_{n+k-1} \tag{4.27}$$

olarak tanımlanan dönüşüm grA üzerinde bir derivasyon olduğunu gösterelim:

$a, b \in A_n$ için

$$\begin{aligned} grD\big((a + A_{n-1}) + (b + A_{n-1})\big) &= grD\big((a + b) + A_{n-1}\big) \\ &= D(a + b) + A_{n+k-1} \\ &= D(a) + D(b) + A_{n+k-1} \\ &= grD(a + A_{n-1}) + grD(b + A_{n-1}) \end{aligned}$$

Şimdi

$$grD\big((a + A_{n-1})(b + A_{n-1})\big)$$
$$= (a + A_{n-1})D(b + A_{n-1}) + D(a + A_{n-1})(b + A_{n-1})$$

olduğunu gösterelim;

$$\begin{aligned} grD\big((a + A_{n-1})(b + A_{n-1})\big) &= grD\big((ab) + A_{n-1}\big) \\ &= D(ab) + A_{n+k-1} \\ &= aD(b) + D(a)b + A_{n+k-1} \end{aligned}$$

Diğer taraftan

$$\begin{aligned} &(a + A_{n-1})D(b + A_{n-1}) + D(a + A_{n-1})(b + A_{n-1}) \\ &= (a + A_{n-1})(D(b) + A_{n+k-1}) + (D(a) + A_{n+k-1})(b + A_{n-1}) \\ &= (aD(b) + A_{n+k-1}) + (D(a)b + A_{n+k-1}) \\ &= aD(b) + D(a)b + A_{n+k-1} \end{aligned}$$

Böylece grD dönüşümünün grA üzerinde bir derivasyon olduğu gösterilmiş oldu.

4.1.3. Bir derivasyonun kuvveti

A bir $\mathbb{Q}$ −cebir olsun. Derivasyonları çalışırken en önemli konulardan biri bir derivasyonun kuvvet dönüşümüdür. Şimdi $D \in DerA$ ve A üzerinde tek T değişkenli $A[[T]]$ formal kuvvet serisi halkasını düşünelim.
$A[T] \in A[[T]]$ için

$$A[T] = a_0 + a_1T + a_2T^2 + \cdots + a_nT^n + \cdots \qquad a_n \in A, n \in \mathbb{N} \tag{4.28}$$

D nin $A[[T]]$ üzerinde bir $\widetilde{D}$ derivasyonuna genişlemesi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\widetilde{D}\left(\sum a_i\, T^i\right) = \sum D(a_i)\, T^i \tag{4.29}$$

Bu şekilde tanımlanan $\widetilde{D}$ nin bir derivasyon olduğunu gösterelim:
$f(T), g(T) \in A\left[[T]\right]$ için

$$f(T) = (a_0 + a_1T + a_2T^2 + \cdots + a_nT^n + \cdots) \tag{4.30}$$

ve

$$g(T) = (b_0 + b_1T + b_2T^2 + \cdots + b_nT^n + \cdots) \tag{4.31}$$

olsun.

$$\begin{aligned}\widetilde{D}\big(f(T) + g(T)\big) &= \widetilde{D}(a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)T + \cdots + (a_n + b_n)T^n + \cdots \\ &= D(a_0 + b_0) + D(a_1 + b_1)T + \cdots + D(a_n + b_n)T^n + \cdots \\ &= D(a_0) + D(b_0) + D(a_1)T + D(b_1)T + \cdots \\ &+ D(a_n)T^n + D(b_n)T^n + \cdots \\ &= \widetilde{D}\big(f(T)\big) + \widetilde{D}\big(g(T)\big)\end{aligned} \tag{4.32}$$

Benzer şekilde

$$\widetilde{D}\big(f(T).g(T)\big) = \widetilde{D}\begin{pmatrix}(a_0 + a_1T + a_2T^2 + \cdots + a_nT^n + \cdots).\\ (b_0 + b_1T + b_2T^2 + \cdots + b_nT^n + \cdots)\end{pmatrix}$$
$$= \widetilde{D}(a_0b_0 + a_0b_1T + a_0b_2T^2 + \cdots + a_0b_nT^n + \cdots + a_1b_0T + a_1b_1T^2$$
$$+a_1b_2T^3 + \cdots + a_1b_nT^{n+1} + \cdots a_nb_0T^n + a_nb_1T^{n+1} + a_nb_2T^{n+2} + \cdots$$
$$+a_nb_nT^{2n} + \cdots)$$
$$= D(a_0b_0) + D(a_0b_1)T + D(a_0b_2)T^2 + \cdots + D(a_0b_n)T^n + \cdots + D(a_1b_0)T$$
$$+D(a_1b_1)T^2 + \cdots + D(a_1b_n)T^{n+1} + \cdots + D(a_nb_0)T^n + D(a_nb_1)T^{n+1} + \cdots$$
$$+D(a_nb_n)T^{2n} + \cdots$$
$$= a_0D(b_0) + b_0D(a_0) + \big(a_0D(b_1) + b_1D(a_0)\big)T + \cdots + (a_0D(b_n)$$
$$+b_nD(a_o))T^n + \cdots + \big(a_nD(b_0) + b_0D(a_n)\big)T^n \qquad (4.33)$$
$$+\big(a_nD(b_1) + b_1D(a_n)\big)T^{n+1} + \cdots + (a_nD\big(b_n) + b_nD(a_n)\big)T^{2n} + \cdots$$
$$= a_0(D(b_0) + D(b_1)T + \cdots + D(b_n)T^n + \cdots)$$
$$+a_1T(D(b_0) + D(b_1)T + \cdots + D(b_n)T^n + \cdots)$$
$$+ \cdots + a_nT^n(D(b_0) + D(b_1)T + \cdots + D(b_n)T^n + \cdots) + \cdots$$
$$+b_0(D(a_0) + D(a_1)T + \cdots + D(a_n)T^n + \cdots) + b_1T(D(a_0) + D(a_1)T + \cdots$$
$$+D(a_n)T^n + \cdots) + \cdots + b_nT^n(D(a_0) + D(a_1)T + \cdots + D(a_n)T^n + \cdots) + \cdots$$
$$= (b_0 + b_1T + \cdots + b_nT^n + \cdots).(D(a_0) + D(a_1)T + \cdots + D(a_n)T^n + \cdots)$$
$$+(a_0 + a_1T + \cdots + a_nT^n + \cdots).(D(b_0) + D(b_1)T + \cdots + D(b_n)T^n + \cdots)$$
$$= g(T).\widetilde{D}\big(f(T)\big) + f(T).\widetilde{D}\big(g(T)\big)$$

Böylece $\widetilde{D}$, $A[[T]]$ üzerinde bir derivasyondur.

Kolaylık olması bakımından $\widetilde{D}$ yerine D yazalım;

$\forall$ g$\in$ $A[[T]]$ için

$$expTD: A\big[[T]\big] \to A\big[[T]\big] \qquad (4.34)$$

$$expTD(g) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} D^p(g)T^p \qquad (4.35)$$

dönüşümü tanımlansın. Bu durumda

$$\frac{d}{dT}\big(expTD(a)\big) = expTD(Da) \qquad (4.36)$$

$$expTD(a)\big|_{T\,=\,0} = a \qquad (4.37)$$

eşitlikleri vardır. Bunların doğruluklarını gösterelim.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dT}expTD(a) &= \frac{d}{dT}(a + D(a)T + \frac{1}{2!}D^2(a)T^2 + \cdots + \frac{1}{n!}D^n(a)T^n + \cdots \\ &= D(a) + D^2(a)T + \frac{3}{3!}D^3(a)T^2 + \cdots + \frac{n}{n!}D^n(a)T^{n-1} + \cdots \\ &= D(a) + D\big(D(a)\big)T + \tfrac{1}{2}D^2\big(D(a)\big)T^2 + \cdots \\ &+ \frac{1}{(n-1)!}D^{n-1}\big(D(a)\big)T^{n-1} + \frac{1}{n!}D^n\big(D(a)\big)T^n + \cdots \\ &= expTD(Da)\end{aligned} \tag{4.38}$$

yani

$$\tfrac{d}{dT}expTD(a) = expTD(Da) \tag{4.39}$$

olur. Diğer taraftan

$$expTD(a)|_{T=0} = \left(a + D(a)T + \tfrac{1}{2}D^2(a)T^2 + \cdots\right)|_{T=0} = a \tag{4.40}$$

olduğu aşikardır.

Önerme 4.1.3.1. $expTD: A[[T]] \to A[[T]]$ dönüşümü bir halka otomorfizmidir.

İspat: i. $\forall\, p \geq 0$ için

$D^p(a+b) = D^p(a) + D^p(b)$ olduğunu yani D nin toplamsal olduğunu tümevarım yöntemiyle gösterelim.

$p = 1$ için: Derivasyon tanımından

$$D(a+b) = D(a) + D(b) \tag{4.41}$$

eşitliği sağlanır.

$p = k$ için:

$$D^k(a+b) = D^k(a) + D^k(b) \tag{4.42}$$

eşitliğinin doğru olduğunu kabul edelim.

$p = k+1$ için

$$D^{k+1}(a+b) = D^{k+1}(a) + D^{k+1}(b) \tag{4.43}$$

eşitliğinin doğru olduğunu göstermeliyiz.

$$D\Big(D^k(a+b)\Big) = D\Big(D^k(a) + D^k(b)\Big) \tag{4.44}$$
$$D^{k+1}(a+b) = D^{k+1}(a) + D^{k+1}(b)$$

Şimdi $expTD = A[[T]] \to A[[T]]$ dönüşümünün toplamsal olduğunu gösterelim.

$$expTD = A[[T]] \to A[[T]] \tag{4.45}$$
$$f \to \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} D^p(f) T^p$$

$$expTD(f+g) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} D^p(f+g) T^p \tag{4.46}$$

D^p toplamsal olduğundan

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} D^p(f+g) T^p = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} (D^p(f) + D^p(g)) T^p \tag{4.47}$$

yazabiliriz. Buradan

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \big(D^p(f) + D^p(g)\big) T^p = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} D^p(f) T^p + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} D^p(g) T^p \tag{4.48}$$
$$= expTD(f) + expTD(g)$$

yani $expTD$ dönüşümü de toplamsaldır.

ii. $f, g \in A[[T]]$ olsun.

$$\begin{aligned} expTD(f)expTD(g) &= \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} D^p(f)T^p\right)\left(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} D^q(g)T^q\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p+q=n} \frac{1}{p!q!} D^p(f)D^q(q)\right)T^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} D^n(fg)T^n = expTd(fg) \end{aligned} \tag{4.49}$$

iii. $\exp(-TD)\ \exp(TD)$, $A[[T]]$ üzerinde birim dönüşümdür.

$f \in A[[T]]$ olsun. Bu durumda

$$\exp(-TD)\ (f) = f - D(f)T + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} D^n(f)T^n + \cdots \tag{4.50}$$

şeklinde tanımlanır.

$$\begin{aligned} &\exp(-TD)\exp(TD) = \exp(-TD)(\exp TD)(f) \\ &= \exp(-TD)(f + D(f)T + \tfrac{1}{2!}D^2(f)T^2 + \cdots + \tfrac{1}{n!}D^n(f)T^n + \cdots \\ &= \left(f + D(f)T + \tfrac{1}{2!}D^2(f)T^2 + \cdots + \tfrac{1}{n!}D^n(f)T^n + \cdots\right) \\ &-D\left(f + D(f)T + \tfrac{1}{2!}D^2(f)T^2 + \cdots + \tfrac{1}{n!}D^n(f)T^n + \cdots\right)T \\ &+\tfrac{1}{2!}D^2\left(f + D(f)T + \tfrac{1}{2!}D^2(f)T^2 + \cdots + \tfrac{1}{n!}D^n(f)T^n + \cdots\right)T^2 + \cdots \\ &+(-1)^n \tfrac{1}{n!}D^n\left(f + D(f)T + \tfrac{1}{2!}D^2(f)T^2 + \cdots + \tfrac{1}{n!}D^n(f)T^n + \cdots\right)T^n + \cdots \\ &= f \end{aligned} \tag{4.51}$$

Yani $\exp(-TD)\ \exp(TD)$ dönüşümü $A[[T]]$ üzerinde birim dönüşümdür.

4.1.4. Bir derivasyonun çekirdeği

Bu bölümde bir cisim üzerindeki bir polinom halkasının derivasyonunun çekirdeği ile ilgili bazı sonuçlar vereceğiz. Polinom otomorfizmleri ile ilgili bir çok problemin bazı derivasyonların çekirdekleri ile ilgili problemlere dönüşebilmesinden dolayı derivasyonların çekirdeklerini çalışmak önemlidir. Bir cisim üzerindeki polinom halkalarının derivasyonuna değinmeden önce bazı notasyonlardan bahsedelim.

D, A üzerinde bir derivasyon olsun. $D: A \to A$ dönüşümünün çekirdeği A^D veya $\ker(D, A)$ ile gösterilir. Kolaylıkla görülebilir ki A^D, A nın bir althalkasıdır. Bu halkaya D nin sabitlerinin halkası denir. A bir cisim ise A^D, A nın bir altcismidir.

Lemma 4.1.4.1. Eğer A bir tamlık bölgesi ise A^D, A da tam kapalıdır.

İspat: $0 \neq a \in A$ ve a, A üzerinde tam olsun. O halde $n \in \mathbb{N}$ ve $c_0, c_1, \dots c_{n-1} \in A^D$ için

$$a^n + c_{n-1}a^{n-1} + c_{n-2}a^{n-2} + \cdots + c_1 a + c_0 = 0 \tag{4.52}$$

dır. Bu eşitliğin her iki tarafının D altındaki görüntüsü alınırsa,

$$(na^{n-1} + (n-1)c_{n-1}a^{n-2} + \cdots + c_1)D(a) = 0 \tag{4.53}$$

olur.

A bir tamlık bölgesi olduğundan n in minimal seçimiyle $D(a) = 0$ olur, yani $a \in A^D$ dir. Yani A^D üzerinde tam olan A nın her elemanı A^D ye aittir. Böylece A^D, A da tam kapalıdır.

Problem 4.1.4.1(Hilbert 14. Problem). k bir cisim ve L, k yı içeren $k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ cisminin bir altcismi olsun. $L \cap k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ sonlu üretilmiş bir $k-$cebir midir?

Teorem 4.1.4.1. k, karakteristiği 0 olan bir cisim ve $n \geq 1$ için $k \subseteq R \subseteq k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 1-boyutlu bir tam kapalı halka olsun. Bazı $f \in k[X]$ polinomları için $R = k[f]$ tir.

İspat: Bu teoremin ispatı için tümevarım metodunu kullanalım.
i) $n = 1$ olsun. Problem 4.1.4.1 den bazı $u \in k[x_1]$ ler için $R \subset Q(R) \cap k[x_1] = k[u]$ dur. $r, s \in R, s \neq 0$ için $u = r/s$ olsun. $s \in R \subseteq k[u]$ olduğundan $p(T) \in k[T]$ için $s = p(u)$ yazabiliriz. $u.p(u) - r = 0$ olduğundan u, R üzerinde tamdır. R tam kapalı olduğundan $u \in R$ dir. Yani $k[u] \subset R$ olur. Sonuç olarak $R = k[u]$ dur.
ii) $n \geq 2$ olsun. $a \in k$ ve

$$\pi_a : k[x_1, x_2, \dots, x_n] \to k[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}] \qquad (4.54)$$
$$x_n \to a$$

şeklinde bir dönüşüm olsun. $\phi_a = \pi_a|_R$ diyelim. $M_a = ker\phi_a = R \cap (x_n - a)$ R de bir asal idealdir. Eğer $M_a = 0$ ise $R \cong \phi_a(R) \subseteq k[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$ olup sonuç tümevarımdan elde edilir. Her $a \in k$ için $M_a \neq 0$ olsun. R nin boyutu 1 olduğundan M_a bir maksimal idealdir. Bu yüzden $\phi_a(R) \cong R/M_a$ bir cisimdir ve $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ cismi tarafından kapsanır. $k[x_1, x_2, \dots, x_n]^* = k^*$ olduğundan $\phi_a(R) = k$ dır. Her $f \in R$ için bir $c \in k$ vardır öyle ki $f - c \in M_a \subset (x_n - a)k[X]$ dir. $g \in k[X]$ için $f - c = (x_n - a)g$ dir. Özellikle

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = (x_n - a)\frac{\partial g}{\partial x_i}, 1 \leq i \leq n-1 \qquad (4.55)$$

dir. Her $a \in k$ ve $1 \leq i \leq n-1$ için $(x_n - a)$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ yi böler. Böylece her $1 \leq i \leq n-1$ için $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ dır. Yani $f \in k[x_n]$ dir. Sonuç olarak $R \subset k[x_n]$ ve i) koşulundan $R = k[x_n]$ dir.

Teorem 4.1.4.2. k karakteristiği 0 olan bir cisim ve $0 \neq D \in Der_k k[X, Y]$ olsun. O halde bazı $f \in k[X, Y]$ için $k[X, Y]^D = k[f]$ tir.

İspat: $R = k[X,Y]^D$ ve $s = trdeg_k Q(R)$ olsun. O halde $s \leq 1$ dir. Eğer $s = 0$ ise R nin her elemanı k üzerinde cebirseldir ve $R = k$ dır. Çünkü $k(X,Y)$ nin sadece k üzerinde cebirsel bağımlı elemanları k nın elemanlarıdır. Bu yüzden örneğin $f = 1$ için $R = k[f]$ tir. Şimdi $s = 1$ olsun. O halde R nin boyutu 1 dir. Lemma 4.1.4.1 den $R, k[X,Y]$ de ve $k(X,Y)$ de tam kapalıdır. Bu yüzden R tam kapalıdır.

4.1.5. Lokal nilpotent derivasyonlar

Bu bölümde özel bir derivasyon olan lokal nilpotent derivasyonları ele alacağız. R komütatif bir halka ve A bir $R-$cebir olsun. Eğer her $a \in A$ için $D^n a = 0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ varsa A üzerindeki D derivasyonuna lokal nilpotent derivasyon denir. Bu ifadeyi kısaca LND ile göstereceğiz.

Örnek 4.1.5.1. $R[X]$ üzerinde $\frac{\partial}{\partial x_i}$ kısmi derivasyonu lokal nilpotenttir.

Bunu gösterelim:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : R[X] \to R[X]$$

Her $p(x) \in R[X]$ için

$$(\frac{\partial}{\partial x_i})^n \big(p(x)\big) = 0$$

olmalıdır.

$$p(x) = a{x_1}^{d_1}{x_2}^{d_2} \dots {x_i}^{d_i} \dots {x_n}^{d_n}$$

olsun.

$$(\frac{\partial}{\partial x_i})^{\,n}(a{x_1}^{d_1}{x_2}^{d_2} \dots {x_i}^{d_i} \dots {x_n}^{d_n}) = (\frac{\partial}{\partial x_i})^{\,n-1}(d_i a{x_1}^{d_1}{x_2}^{d_2} \dots {x_i}^{d_i-1} \dots {x_n}^{d_n})$$

$$= \Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)^{\,n-2}((d_i-1)d_i a{x_1}^{d_1}{x_2}^{d_2} \dots {x_i}^{d_i-2} \dots {x_n}^{d_n}\Big) = \cdots$$

$$= (\frac{\partial}{\partial x_i})^{\,n-d_i}(d_i!\, a{x_1}^{d_1}{x_2}^{d_2} \dots {x_i}^{d_i-d_i} \dots {x_n}^{d_n})$$

$$= (\frac{\partial}{\partial x_i})^{\,n-d_i-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(d_i!\, a{x_1}^{d_1}{x_2}^{d_2} \dots {x_n}^{d_n})\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{n-d_i-1}(0) = 0$$

Yani her $p(x) \in R[X]$ için $(\frac{\partial}{\partial x_i})^n\big(p(x)\big) = 0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır.

Önerme 4.1.5.1. A, G kümesi tarafından üretilen bir R- cebir ve D, A üzerinde bir R derivasyon olsun. O halde D nin lokal nilpotent olması için gerek ve yeter şart her $g \in G$ için $D^n g = 0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ olmasıdır (Essen,2000).

İspat: $G = \{g_1, g_2, \dots g_n, \dots\}$ olsun. $\alpha_i \in R$ olmak üzere her $a \in A$ elemanı $a = \sum_i \alpha_i g_i$ şeklinde yazılabilir. D lokal nilpotent ise her $a \in A$ için

$$D^n a = D^n(\textstyle\sum_i \alpha_i g_i) = \sum_i \big(D^n(\alpha_i g_i)\big) = \sum \alpha_i\, D^n(g_i) = 0 \tag{4.56}$$

Buradan

$$\alpha_1 D^n(g_1) + \alpha_2 D^n(g_2) + \cdots + \alpha_n D^n(g_n) + \cdots = 0 \tag{4.57}$$

ise her i için $D^n(g_i) = 0$ dır. Benzer şekilde her $g \in G$ için $D^n g = 0$ ise $D^n a = 0$ olur.

Tanım 4.1.5.1. $a_i \in R[x_{i+1}, \dots, x_n], 1 \le i \le n-1$ ve $a_n \in R$ olmak üzere $R[X]$ üzerinde tanımlı bir D derivasyonu

$$D = a_1(x_2, x_3, \dots x_n)\partial_1 + \cdots + a_{n-1}(x_n)\partial_{n-1} + a_n\partial_n \tag{4.58}$$

formunda yazılabiliyorsa, D ye üçgensel derivasyon denir.

Sonuç 4.1.5.1. Üçgensel derivasyonlar lokal nilpotenttir (Essen,2000).

İspat: İspatı n üzerinden tümevarım ile yapacağız.
$n = 1$ için $= a_1\partial_1$, $f \in R[X]$ için $D^n(f) = 0$ olur.
$n \ge 2$ için $D = a_1\partial_1 + D_0$ yazalım. O halde $D_0 \in Der_R R[x_2, \dots, x_n]$ ve bu durumda D üçgensel derivasyon formundadır. Tümevarımdan, $D_0, R[x_2, \dots, x_n]$ üzerinde lokal

nilpotenttir. Şimdi her $g \in R[x_2, \dots, x_n]$ için $Dg = D_0 g$ ve her i için $Dx_i \in R[x_2, \dots, x_n]$ olduğunu görelim. $Dg = (a_1\partial_1 + D_0)(g) = a_1\partial_1(g) + D_0 g$
Son olarak $D^{m+1}(x_i) = D^m\big(D(x_i)\big) = {D_0}^m(D(x_i))$ eşitliği yeterince büyük m değerleri için sıfırdır çünkü $D_0, R[x_2, \dots, x_n]$ üzerinde lokal nilpotenttir ve $Dx_i \in R[x_2, \dots, x_n]$ dir.

Tanım 4.1.5.2. s, A nın bir elemanı olsun. Eğer $D(s) = 1$ ise bu s ye D nin bir slice elemanı denir. Eğer bir slice eleman var ise bu eleman A^D nin bir elemanı tarafından tek şekilde belirlenir. Lokal nilpotent derivasyonların her zaman bir slice elemanı olmayabilir. Örneğin, $\mathbb{C}[X, Y]$ üzerinde $Y\partial_1$ derivasyonunun bir slice elemanı yoktur. $Y\partial_1\left(\frac{X}{Y}\right) = 1$ dir fakat $\frac{X}{Y} \notin \mathbb{C}[X, Y]$ dir.

Ancak slice elemanı olan LND lerin bazı güzel özellikleri vardır. Bu derivasyonları tanımlamadan önce bazı notasyonlar verelim.

Bundan sonra A nın bir komütatif cebir olduğunu kabul edeceğiz. Her $a \in A$ için $\pi_a: A[T] \to A$ yerine koyma homomorfizmini her $g(T) \in A[T]$ için

$$\pi_a\big(g(T)\big) = g(a) \tag{4.59}$$

şeklinde tanımlayalım. $D(T) = 0$ tanımlayarak D yi $A[T]$ ye genişletebiliriz. Bu durumda D nin A üzerinde LND olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$expTD(A) \subset A[T] \tag{4.60}$$

olmasıdır.

$$expTD(a) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} D^i(a)T^i = a + D(a)T + \frac{1}{2!}D^2(a)T^2 + \cdots \tag{4.61}$$

Eğer D, A üzerinde lokal nilpotent ise bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için $D^n(a) = 0$ olur. Bu durumda $expTD(a) \in A[T]$ yani $expTD(A) \subset A[T]$ olur.

Eğer D, A üzerinde lokal nilpotent ise o zaman $\varphi = expTD$ nin $A[T]$ nin bir halka otomorfizmi olduğu daha önce gösterildi. Her $a \in A$ için $\pi_a \circ \varphi$ bileşkesini $\pi_a \circ \varphi: A[T] \to A$ şeklinde gösterelim.

Lemma 4.1.5.1. D, A üzerinde LND ve $s \in A$ keyfi bir eleman olsun. O halde her $a \in A, s$ ye bağlı bir polinomdur ve bu polinom

$$a = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \varphi_{-s}(D^i(a)) s^i \tag{4.62}$$

formundadır.

İspat: $a \in A$ olsun. $\varphi(a) \in A[T]$ dir.

$$deg_T \varphi(a) = N$$

diyelim.

$$\begin{aligned}
a &= exp(-TD)\exp(TD)\,(a) = \exp(-TD)\,\varphi(a) \\
&= \exp(-TD)\left(a + D(a)T + \tfrac{1}{2!}D^2(a)T^2 + \cdots + \tfrac{1}{N!}D^N(a)T^N\right) \\
&= \exp(-TD)\,(a) + \exp(-TD)\,(D(a)T) + \exp(-TD)\left(\frac{1}{2!}D^2(a)T^2\right) \\
&+ \cdots + \exp\,(-TD)\left(\frac{1}{N!}D^N(a)T^N\right) \\
&= \exp(-TD)\,(a) + \exp(-TD)\left(D(a)\right)\exp(-TD)\,(T) \\
&+ \exp(-TD)\left(\frac{1}{2!}D^2(a)\right)\exp(-TD)\,(T^2) \\
&+ \cdots + \exp(-TD)\left(\frac{1}{N!}D^N(a)\right)\exp(-TD)\,(T^N) \\
&= \exp(-TD)\,(a) + \exp(-TD)\left(D(a)\right)T + \exp(-TD)\left(\tfrac{1}{2!}D^2(a)T^2\right) \\
&+ \cdots + \exp\,(-TD)\left(\tfrac{1}{N!}D^N(a)\right)T^N) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \exp(-TD)\left(D^i(a)\right)T^i
\end{aligned} \tag{4.63}$$

olur. Bu eşitlikte T yerine s yazarsak ispat tamamlanmış olur. (Burada her i için $\exp(-TD)\left(T^i\right) = T^i$ eşitliği kullanıldı.)

Önerme 4.1.5.2. D, A da bir slice elemanı olan bir LND ve A bir $\mathbb{Q}$ −cebir olsun. A, A^D üzerinde s ye bağlı bir polinom halkasıdır, yani $A = A^D[s]$ dir ve A üzerinde $D = \frac{d}{ds}$ dir.

İspat: $a \in A$ olsun. O zaman $D(s) = 1$ olduğundan

$$D\varphi_{-s}(a) = D\left(\sum \frac{(-1)^i}{i!} D^i(a)s^i\right) = 0 \tag{4.64}$$

dır. Buradan, her $a \in A$ için $\varphi_{-s}(a) \in A^D$ dir. Bir önceki lemmadan, A nın her elemanı katsayıları A^D de olan, s ye bağlı bir polinomdur. Sonuç olarak D yi uygulayarak $\sum a_i s^i = 0$ oluyorsa $(a_i \in A^D)$ bütün a_i ler sıfırdır. Yani $A = A^D[s]$ bir polinom halkasıdır ve $D = \frac{d}{ds}$ dir.

Sonuç 4.1.5.2. A bir $R-$ cebir ve R bir $\mathbb{Q}$ −cebir olsun. $D \in Der_R A, A$ da bir s slice elemanı olan bir LND olsun. O zaman $A^D = \varphi_{-s}(A)$ dır. Özellikle eğer G, A için bir üreteç kümesi ise o zaman $\varphi_{-s}(G)$, A^D için bir üreteç kümesidir.

İspat: Her $a \in A$ için $\varphi_{-s}(a) \in A^D$ den $\varphi_{-s}(A) \subset A^D$ dir. Diğer taraftan, eğer $a \in A^D$ ise $a = expTD(a)$ dır. Bu yüzden $a = \varphi_{-s}(a) \in \varphi_{-s}(A)$ dır. Yani $A^D \subset \varphi_{-s}(A)$ olur. Sonuç olarak $\varphi_{-s}(A) = A^D$ dir.

Bir tamlık bölgesinde lokal nilpotent derivasyonlar

Bundan sonra A nın $\mathbb{Q}$ yu içeren bir tamlık bölgesi olduğunu kabul edeceğiz. Önerme 4.1.5.3 de bir tamlık bölgesi üzerindeki LND ların en önemli özelliklerinden bazılarını göreceğiz. İspatlarda kullanılan ana teknik, böyle derivasyonları A yı uygun bir çarpımsal kapalı altkümeye lokalize ederek çalışmaktır. Daha sonra Önerme 4.1.5.2 kullanarak A üzerindeki orjinal derivasyon hakkında çıkarım

yapacağız. Önerme 4.1.5.3 teki ana sonucu ispatlamadan önce bu lokalizasyon prosedürünü açıklayalım.

$0 \neq D, A$ üzerinde bir LND olsun. O zaman $D(a) \neq 0$ olacak şekilde bir $a \in A$ vardır. $n \geq 1, D^{n+1}(a) = 0$ şartını sağlayan en küçük pozitif tamsayı olsun. $p = D^{n-1}(a)$ diyelim. O halde $D = D(p) \neq 0$ ve $D^2(p) = 0$ dır. Burada $d \in A^D$ olur. Böyle bir p elemanına D nin bir preslice elemanı denir.

Şimdi $\tilde{A} = A[d^{-1}]$ ve $s = \frac{p}{d}$ diyelim. Önerme 4.1.2.1 den D derivasyonu $\tilde{A}$ ya tek bir şekilde genişletilebilir ve bu genişleme D ile gösterilir. D nin $\tilde{A}$ üzerinde lokal nilpotent olduğu kolayca görülebilir. Şimdi $D(s) = 1$ olsun. Yani D nin $\tilde{A}$ da bir slice elemanı olsun. Kolayca görülebilir ki $\tilde{A}^D = A^D[d^{-1}]$ dir. Böylece Önerme 4.1.5.2 den $\tilde{A} = A^D[d^{-1}][s]$ ve $\tilde{A}$ üzerinde $D = \frac{d}{ds}$ dir. $d \in A^D$ olduğundan

$$\tilde{A} = A[d^{-1}] \text{ ve } s = \frac{p}{d} \tag{4.65}$$

ve

$$\tilde{A} = A^D[d^{-1}][s] \text{ ve } D = \frac{d}{ds} \tag{4.66}$$

eşitliklerinden $Q(A) = Q(A^D)(s)$ elde edilir. Burada $Q(A)$, A nın genellemesidir ve $s, Q(A^D)$ üzerinde transandantaldir. Son olarak kullandığımız bazı özellikleri A^D nin tanımından $A \cap Q(A^D) = A^D$ şeklinde yazabiliriz. Bu hazırlıklardan sonra artık ispatı yapabiliriz.

Önerme 4.1.5.3. k, karakteristiği 0 olan bir cisim olsun ve $0 \neq D, A$ üzerinde bir lokal nilpotent bir k −derivasyon olsun.

i) Eğer $trdeg_k Q(A)$ sonlu ise $trdeg_k Q(A^D) = trdeg_k Q(A) - 1$ dir.

ii) Eğer bazı $0 \neq a \in A$ için $Da = \lambda a$ ve $\lambda \in A$ ise, $\lambda = 0$ dır (Özdeğer Özelliği).

iii) Eğer $0 \neq a, b \in A$ için $ab \in A^D$ ise A^D ye A da faktöryel kapalı denir. A^D, A da faktöryel kapalı ise $a, b \in A^D$ dir.

iv) $Da \neq 0$ ve $a \in A$ olsun. $\rho(D, a) = D$ nin a yı yok eden en küçük kuvveti olsun. $\rho(D, a) = |Q(A): Q(A^D)(a)| + 1$ dir.

İspat: i) $Q(A) = Q(A^D)(s)$ eşitliğinden görülebilir.

ii) $a = f(s), \lambda = g(s)$ yazabiliriz.

$Da = \lambda a \Longrightarrow f'(s) = g(s)f(s) \Longrightarrow f'(s) = 0$ olur. A tamlık bölgesi olduğundan $g(s), f(s)$ den biri sıfır olur. $a = f(s) \neq 0$ olduğundan $g(s) = \lambda = 0$ dır.

iii) $0 \neq a, b \in A$ için $ab \in A^D$ olsun. Yani

$D(ab) = 0 \Longrightarrow aD(b) + D(a)b = 0$ olsun. $a, b \neq 0$ olduğundan $D(b) = 0, D(a) = 0$ yani $b \in A^D$ ve $a \in A^D$ olur.

iv) $a = f(s) \in A^d[d^{-1}][s], deg_s f(s) = d \geq 1$ diyelim.

$$f(s) = a_0 d^{-1} + a_1 d^{-1} s + \cdots + a_d d^{-1} s^d \tag{4.67}$$

şeklindedir öyle ki $a_i \in A^D$ dir. $D = \frac{d}{ds}$ olduğundan $\rho(D, a) = d + 1$ dir.

$$|Q(A): Q(A^D)(a)| = Q(A^D)(s): Q(A^D)\big(f(s)\big)| = d \tag{4.68}$$

dir.

Sonuç 4.1.5.3. k, karakteristiği 0 olan bir cisim olsun ve $0 \neq D, A$ üzerinde lokal nilpotent bir $k-$derivasyon olsun. Eğer $trdeg_k Q(A) = 1$ ise $Ds = 1$ ve $k \subset A^D$ cebirsel bir cisim genişlemesi iken $A = A^D[s]$ dir. Özellikle, k cebirsel kapalı ise $A = k[s], k$ üzerinde tek değişkenli bir polinom halkasıdır.

İspat: Önerme 4.1.5.3 ten $trdeg_k Q(A^D) = 0$ dır. Böylece A^D nin her elemanı k üzerinde cebirseldir. Yani $k \subset A^D$ bir tam genişlemedir. Buradan A^D bir cisimdir. O halde $d, A^D \subset A$ da bir tersinir elemandır. Sonuç olarak $s = \frac{p}{d} \in A,$ yani D nin A da bir slice elemanı vardır.

Sonuç 4.1.5.4. $0 \neq D, A$ üzerinde bir derivasyon ve $0 \neq a \in A$ olsun. aD nin lokal nilpotent olması için gerek ve yeter koşul D nin lokal nilpotent olması ve $a \in A^D$ olmasıdır.

İspat: i) D, lokal nilpotent ve $a \in A^D$ olsun. Bu durumda her $b \in A$ için

$$(aD)^n(b) = a^n D^n(b) = 0 \tag{4.69}$$

yani aD lokal nilpotenttir.

ii) aD, A üzerinde lokal nilpotent olsun. $(aD)(a) = D(a)a$ yazabiliriz. Özdeğer özelliğinden $D(a) = 0$ dır. O halde $a \in A^D$ dir. aD lokal nilpotent olduğundan

$$(aD)^n(b) = a^n D^n(b) = 0 \tag{4.70}$$

dır. A tamlık bölgesi ve $a \neq 0$ olduğundan $D^n(b) = 0$ dır. Yani D, lokal nilpotenttir.

Sonuç 4.1.5.5. $0 \neq D$, A üzerinde bir LND olsun. $(A^D)^* = A^*$ dır ve A^D nin her indirgenemez elemanı A da indirgenemezdir. Özellikle, eğer A bir tek çarpanlama bölgesi ise A^D de tek çarpanlama bölgesidir.

İspat: $(A^D)^* = \{a \in A^D : a.b = 1$ olacak şekilde bir $b \in A^D$ vardır$\}$

$A^* = \{a \in A : a.b = 1$ olacak şekilde bir $b \in A$ vardır$\}$ $x \in (A^D)^*$ olsun. Bu durumda $D(x) = 0$ ve $x.y = 1$ olacak şekilde bir $y \in A^D$ vardır. $A^D \subset A$ olduğundan $x, y \in A$ ve $x.y = 1$ olduğundan $x \in A^*, (A^D)^* \subset A^*$ dır. Diğer taraftan $x \in A^*$ olsun. O halde $x.y = 1$ olacak şekilde bir $y \in A$ vardır. $D(1) = D(x.y) = 0$ olduğundan $x.y \in A^D$, buaradan da $x \in A^D, y \in A^D$ elde edilir. Bu durumda $x \in (A^D)^*$ yani $A^* \subset (A^D)^*$ olur. O halde $(A^D)^* = A^*$ bulunur.

$x \in (A^D)^*$ indirgenemez olsun. Varsayalım $x = r_1.r_2,\ r_1, r_2 \in A$ olsun. Yani x, A da indirgenebilir olsun. $x \in A^D$ olduğundan $D(x) = D(r_1.r_2) = 0$ olmalı. Bu durumda $r_1.r_2 \in A^D$ yani $r_1 \in A^D,\ r_2 \in A^D$ olur. Bu x in A^D de indirgenemez olmasıyla çelişir. Yani x, A da indirgenemezdir.

Önerme 4.1.5.4. $0 \neq D = a\partial_1 + b\partial_2,\ k[x_1, x_2]$ üzerinde bir LND ve $\gcd(a, b) = 1$ olsun. D nin $k[x_1, x_2]$ de bir slice elemanı vardır.

İspat: $p, A = k[x_1, x_2]$ de minimal dereceli bir preslice eleman olsun.

$$d = D(p) \neq 0, D(d) = D^2(p) = 0,\ d \in kerD.$$

$D(p) \in k^*$ ise $s = \frac{p}{D(p)} \in k[x_1, x_2]$ bir slice elemandır. $D(p) \notin k^*$ olsun. O halde bir indirgenemez $q \in k[x_1, x_2]$ vardır öyle ki $D(p)$ yi böler, yani $D(p) \in q$ dir. $D(p) \in A^D$ olduğundan $q \in A^D$ dir. Bu yüzden $\widetilde{D}: A/(q) \to A/(q)$ derivasyonunu düşünebiliriz. Bu derivasyon lokal nilpotenttir. Şimdi $\widetilde{D} \neq 0$ olduğunu görebiliriz. Çünkü aksi halde $Dx_i \in (q), i = 1,2$ için $\gcd(a, b) = 1$ olmasıyla çelişir. Sonuç 4.1.5.3 ten $ker\widetilde{D} = k$ dır. $D(p) \in (q)$ dan $\widetilde{D}\big(p + (q)\big) = 0$, bazı $\lambda \in k$ lar için $p + (q) = \lambda + (q)$ tir. $h \in k[x_1, x_2]$ için $p - \lambda = h.q$ olsun. Kolaylıkla görebiliriz ki $D^2(h) = 0$ dır. Çünkü $D^2(p) = 0$ ve $D(q) = 0$ dır. $D(p) \neq 0$ ve $D(q) = 0$ olduğundan $D(h) \neq 0$ dır. Fakat $p - \lambda = h.q$ gösterir ki $derh < derp$ dir. Bu p nin minimal preslice eleman olmasıyla çelişir. O halde $D(p) \in k^*$ dır.

Teorem 4.1.5.2. $0 \neq D, k[x_1, x_2]$ üzerinde LND olsun. Bir $\varphi \in Aut_k k[x_1, x_2]$ vardır öyle ki $f(x_2) \in k[x_2]$ için $\varphi^{-1} D \varphi = f(x_2)\frac{\partial}{\partial x_1}$ dir.

İspat: $g = \gcd(a, b)$ olsun. $a = g\tilde{a}$ ve $b = g\tilde{b}$ diyelim. $D_0 = \tilde{a}\partial_1 + \tilde{b}\partial_2$ için $D = gD_0$ olur. D lokal nilpotent olduğundan Sonuç 4.1.5.4 ten D_0 lokal nilpotenttir ve $D_0(g) = 0$ dır. $k[X] = k[x_1, x_2]$ olsun. Önerme 4.1.5.4 ten bazı $F_1 \in k[X]$ ler için $D_0(F_1) = 1$ dir. Önerme 4.1.5.2 den $k[X] = k[x]^D[F_1]$ dir. Teorem 4.1.4.2 den bazı $F_2 \in k[X]$ için $k[X]^D = k[F_2]$ dir. Buradan $k[X] = k[F_1, F_2]$ elde edilir. Dolayısıyla $F = (F_1, F_2)$ ve her $h \in k[X]$ için $\varphi(h) = h(F_1, F_2)$, $k[X]$ in bir polinomu otomorfizmidir. $g \in k[X]^D = k[F_2]$ olduğundan $F(T) \in k[T]$ için $g = f(F_2)$ yazabiliriz. Sonuç olarak $D_1 = \varphi^{-1} D \varphi = \varphi^{-1} g D_0 \varphi$ derivasyonunu düşünelim. $D_1(x_1) = f(x_2)$ ve $D_1(x_2) = 0$ dir. Bu yüzden $D_1 = f(x_2)\partial_1$ dir.

4.2. Polinom Halkalarının Otomorfizmleri

Bu bölümde polinom dönüşümleri, tersinir polinom dönüşümleri ve özel olarak $R[x_1, x_2]$ halkası üzerinde tanımlı tame otomorfizmleri grubunu ele alacağız. Ayrıca bu bölümde, çalışmamızda önemli bir yer tutan Jung van der Kulk ve Rentschler Teoremlerini vereceğiz. Bu bölümdeki çalışmalar (Essen, 2000) kaynağından çalışılmıştır.

4.2.1. Polinom dönüşümleri

k keyfi bir cisim, $k[X] = k[X_1, X_2, \dots, X_n]$ k cismi üzerinde bir polinom halkası olsun. Her $F_i \in k[X]$ için

$$F = (F_1, F_2, \dots, F_n): k^n \to k^n \qquad (4.71)$$
$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \to \big(F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\big)$$

dönüşümüne bir polinom dönüşümü denir. Eğer her $1 \le i \le n$ için $X_i = G_i(F_1, \dots, F_n)$ olacak şekilde $G = (G_1, G_2, \dots, G_n): k^n \to k^n$ bir polinom dönüşümü varsa F polinom dönüşümüne tersinir dönüşüm denir. Burada G ye F nin sol tersi denir. Eğer G, F nin sol tersi ise aynı zamanda sağ tersidir.

Not: Kabul edelim ki k bir sonlu cisim ve $F: k^n \to k^n$ bir polinom dönüşümü olsun. Eğer her $x \in k^n$ için $G\big(F(x)\big) = x$ olacak şekilde bir $G: k^n \to k^n$ polinom dönüşümü varsa F tersinir olmak zorunda değildir.

Tersinir polinom dönüşümleri $k[X]$ polinom halkasının $k-$otomorfizmleri ile birebir eşleşir.

$$F \to F^*: g \to g(F) \qquad (4.72)$$

k^n den k^n ye tersinir polinom dönüşümlerini tanımlamak, $k[X]$ in $k-$otomorfizmlerini tanımlamakla aynıdır. Eğer $F: k^n \to k^n$ bir tersinir polinom

dönüşümü ise $F_1, \dots, F_n$ kümesine $k[X]$ in bir koordinat sistemi denir. $f, F_2, \dots, F_n$, $k[X]$ in koordinat sistemi olacak şekilde $k[X]$ te $F_2, \dots, F_n$ varsa $f \in k[X]$ polinomuna koordinat denir.

Lemma 4.2.1.1. $F: k^n \to k^n$ bir polinom dönüşümü olsun. F nin tersinir olması için gerek ve yeter koşul $k[x_1, \dots, x_n] = k[F_1, \dots, F_n]$ olmasıdır.

İspat: F bir polinom dönüşümü ve tersi $G = (G_1, G_2, \dots, G_n)$ olsun. O halde her $1 \leq i \leq n$ için $X_i = G_i(F_1, \dots, F_n)$ dir. Bu durumda her i için $x_i \in k[F_1, \dots, F_n]$ dir ve $k[x_1, \dots, x_n] = k[F_1, \dots, F_n]$ ise her i için $x_i \in k[F_1, \dots, F_n]$ dir. Bu yüzden $x_i = G_i(F_1, \dots, F_n)$ dir, yani F tersinirdir.

Bu Lemma 'lineer olmayan polinom otomorfizmleri var mıdır?' sorusunun cevabını verir. Eğer $F = (F_1, \dots, F_n): \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dönüşümü, tersi de bir polinom dönüşümü olan birebir bir polinom dönüşümü ise herbir F_i birinci dereceden midir? Bu soruya şu örnekle hayır cevabı verilmiştir.
$1 \leq i \leq n$ ve $a = a(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n]$ olsun. Burada $\hat{x}_i$, $k[x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n]$ nin x_i yi içermediği bilgisini verir. O halde Lemma 4.2.1.1 den $E = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + a, x_{i+1}, \dots, x_n)$ polinom dönüşümü tersinirdir. Çünkü E nin bileşenleri $k-$cebir olan $k[X]$ i üretir. E Dönüşümün tersi $E' = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i - a, x_{i+1}, \dots, x_n)$ dir.

Tanım 4.2.1.1. Yukarıdaki şekilde tanımlanan E dönüşümüne bir elementer polinom dönüşümü denir. Bu dönüşümlerin oluşturduğu küme $Aut_k k[X]$ in bir altgrubu olup $E(k, n)$ ile gösterilir.

Her i için $derF_i = 1$ olan F otomorfizmlerinin grubuna Affine altgrup denir, $Aff(k, n)$ ile gösterilir.

Elementer dönüşümlerin ve affine altgrupların elemanlarının sonlu bileşimleri ile elde edilen dönüşüme tame dönüşüm denir. Tame otomorfizmlerin oluşturduğu küme

$Aut_k k[X]$ in bir altgrubu olup bu altgrup $T(k,n)$ ile gösterilir. Tame olmayan dönüşümlere wild dönüşümler denir.

$F: k^n \to k^n$ bir polinom otomorfizmi olsun. Aşağıdaki koşulun sağlanması durumunda F ye üçgensel ya da 'de Jonquieres' otomorfizm denir. $\forall\ 1 \leq i \leq n$ için

$$F_i \in k[x_i, \dots, x_n] \tag{4.73}$$

dir. Tüm üçgensel otomorfizmlerin oluşturduğu alt grup $J(k,n)$ ile gösterilir.

Not: $k[X]$ polinom halkasının her k otomorfizminin bir tame otomorfizmi olup olmadığı (ya da bir $F: k^n \to k^n$ tersinir polinom dönüşümünün tame olup olmadığı) önemli bir problemdir. Bu problemin cevabı $n = 2$ için pozitiftir. Bu sonuç Jung-van der Kulk teoremi olarak bilinir. Bu teoremi tezin sonraki bölümlerinde detaylı bir şekilde inceleyeceğiz. Ancak $n \geq 3$ için bu problem hala tam olarak cevaplanmamıştır. Fakat n=3 için bir ters örnek verilmiştir. Nagata tarafından 1972 yılında kurulan aşağıdaki otomorfizmin tame olmadığı ispatlanmıştır (Shestakov & Umirbaev, 2003).

$$\begin{aligned} \sigma(X) &= X - 2(XZ + Y^2)Y - (XZ + Y^2)^2 Z, \\ \sigma(Y) &= Y + (XZ + Y^2)Z, \\ \sigma(Z) &= Z. \end{aligned} \tag{4.74}$$

Diğer taraftan $n \geq 3$ için tame altgrubunun, affine altgrubu ve bir lineer olmayan $(\varepsilon = \left(X_1 + {X_2}^2, X_2, \dots, X_n\right)$ dönüşüm tarafından üretildiği Harm Derksen (1994) tarafından iddia edildi.

4.2.2. $R[x_1, x_2]$ nin tame otomorfizmlerinin grubu

Bu bölüm boyunca R bir tamlık bölgesi olarak alınacaktır. Ayrıca kolaylık olması için iki değişkene bağlı polinom halkasının değişkenleri X ve Y alınacaktır. Bu bölümde ilk olarak $T(R,2), Aff(R,2)$ ve $J(R,2)$ nin kesişimleri üzerinde amalgamated serbest çarpımı olduğunu göstereceğiz. Daha sonra $R[X,Y]$ nin bir F endomorfizminin tame olup olmadığını belirten bir algoritma tanımlayacağız. Bu algoritma F nin tame olduğu durumda F yi elementer ve lineer otomorfizmlerin çarpımı olarak yazabilmek için kullanılabilir. Buradan, R bir cisim değilse $T(R,2)$ nin $Aut_R R[X,Y]$ nin bir öz altgrubu olduğu sonucunu çıkaracağız. Diğer taraftan, eğer R bir cisim ise göreceğiz ki $Aut_R R[X,Y] = T(R,2)$ dir ve böylece $Aut_R R[X,Y]$, $Aff(R,2)$ ve $J(R,n)$ in amalgamated serbest çarpımıdır. Buna Jung van der Kulk teoremi ya da Otomorfizm Teoremi denir.

Yukarıda bahsedilen ifadeleri ispatlamak için aşağıdaki lemmaya bakalım.

Lemma 4.2.2.1. G, H ve K altgrupları tarafından üretilen bir grup olsun. Bu durumda $\forall\, g \in G, g = h_0 k_1 h_1 \dots k_l h_l$ şeklinde yazılabilir. Burada $l \geq 1,\ 1 \leq i \leq l-1$ için $h_i \in H/K$ ve $1 \leq i \leq l$ için $k_i \in K/H$ ve $h_0 \in H$ dır.

İspat: Eğer $g \in G$ ise $l \geq 1, h_i \in H$ ve $k_i \in K$ için $g = h_0 k_1 h_1 \dots k_l h_l$ dir. h_i ve k_i için yukarıda belirtilen $h_1, \dots, h_{l-1} \in H/K$ ve $k_1, \dots, k_l \in K/H$ şartlarının sağlanmadığını düşünelim. Örneğin bir $1 \leq i_0 \leq l-1$ için $h_{i_0} \in K$ olsun. Bu durumda $g = h_0 k_1 \dots h_{i_0-1}\left(k_{i_0} h_{i_0} k_{i_0+1}\right) \dots k_l h_l$ dir. $k_{i_0} h_{i_0} k_{i_0+1} \in K$ olduğundan g yi istenen forma gelecek şekilde kısaltabiliriz. Bu işlem gerektiği kadar tekrarlanırsa istenen sonuç elde edilir. Aşağıdaki lemmayı ve bahsedilen algoritmayı formüle etmek için aşağıdaki notasyonlara ihtiyacımız vardır.

$F = (F_1, F_2) \in R[X,Y]^2$ olsun. O halde $bidegF = (degF_1, degF_2)$ ve $tdegF = degF_1 + degF_2$ dir.

Şimdi $F \in T(R,2)$ olsun. Lemma 4.2.2.1 i $G = T(R,2)$, $H = Aff(R,2)$ ve $K = J(R,2)$ için uygulayalım. $g = F$ olsun. O halde $1 \leq i \leq l-1$ için $\lambda_i \in Aff(R,2) \backslash J(R,2)$ ve $1 \leq i \leq l$ için $\tau_i \in J(R,2) \backslash Aff(R,2)$ olmak üzere

$$F = \lambda_0 \tau_1 \lambda_1 \dots \tau_l \lambda_l \tag{4.75}$$

yazabiliriz.

$$\lambda_i = (a_i X + b_i Y + c_i, d_i X + e_i Y + f_i) \tag{4.76}$$

olsun.

Lemma 4.2.2.2. Her $1 \leq i \leq l$ için

$$bideg(\tau_i \lambda_i \dots \tau_l \lambda_l) = \left(\prod_{j=i}^{l} deg\tau_j \, , \prod_{j=i+1}^{l} deg\tau_j\right) \tag{4.77}$$

dir. Öyle ki $i = l$ ise yukarıdaki eşitliğin ikinci çarpanı 1 dir.

İspat: İspatı i üzerinden azalan tümevarım yöntemiyle yapalım. $i = l$ iken

$$bideg(\tau_l \lambda_l) = (deg\tau_l, 1) \tag{4.78}$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$\tau_i = (k_i X + m_i Y^{\alpha} + n_i, p_i Y + r_i) \tag{4.79}$$

olsun.

$$\begin{aligned} \tau_i \lambda_i &= (k_i X + m_i Y^{\alpha} + n_i, p_i Y + r_i) \circ (a_i X + b_i Y + c_i, d_i X + e_i Y + f_i) \\ &= (k_i a_i X + k_i b_i Y + k_i c_i + m_i (d_i X + e_i Y + f_i)^{\alpha} + n_i, p_i d_i X + p_i e_i Y \\ &\quad + p_i f_i + r_i) \end{aligned} \tag{4.80}$$

dir. Bu durumda

$$bideg(\tau_l\lambda_l) = (\alpha, 1) = (deg\tau_l, 1) \tag{4.81}$$

olur. Şimdi $2 \leq i \leq l$ için eşitliğin doğru olduğunu kabul edelim yani

$$bideg(\tau_i\lambda_i \dots \tau_l\lambda_l) = \left(\prod_{j=i}^{l} deg\tau_j \, , \prod_{j=i+1}^{l} deg\tau_j\right) \tag{4.82}$$

olsun. $\lambda_{i-1} \notin J(R,2)$ olduğundan $d_{i-1} \neq 0$ dır. O halde

$$bideg(\lambda_{i-1}\tau_i\lambda_i \dots \tau_l\lambda_l) = \left(p_i, \sum_{j=i}^{l} deg\, \tau_j\right) \tag{4.83}$$

olur. Burada $\lambda_{i-1} == (a_{i-1}X + b_{i-1}Y + c_{i-1}, d_{i-1}X + e_{i-1}Y + f_{i-1})$ için $a_{i-1} = 0, b_{i-1} \neq 0$ ise $p_i < \sum_{j=i}^{l} deg\, \tau_j$ ve $a_{i-1} \neq 0, b_{i-1} = 0$ ise $p_i = \sum_{j=i}^{l} deg\, \tau_j$ olur. dolayısıyla $p_i \leq \sum_{j=i}^{l} deg\, \tau_j$ dir.Son olarak $\tau_{i-1} \notin Aff(R,2)$ olduğundan $deg\tau_{i-1} \geq 2$ dir. Bu yüzden

$$bideg(\tau_{i-1}\lambda_{i-1}\tau_i\lambda_i \dots \tau_l\lambda_l) = \left(\sum_{j=i-1}^{l} deg\, \tau_j, \sum_{j=i}^{l} deg\, \tau_j\right) \tag{4.84}$$

olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.2.2.1. $T(R,2), Aff(R,2)$ ve $J(R,2)$ nin amalgamated serbest çarpımıdır. Yani $T(R,2)$, bu iki grup tarafından üretilir ve $\tau_i \in J(R,2) \backslash Aff(R,2)$ ve $\lambda_i \in Aff(R,2) \backslash J(R,2)$ ise $\tau_1\lambda_1 \dots \tau_n\lambda_n\tau_{n+1} \notin Aff(R,2)$ dir.

İspat: Sonuç 4.2.2.1 de gördük ki $T(R,2), Aff(R,2)$ ve $J(R,2)$ tarafından üretilir. Varsayalım ki $\tau_1\lambda_1 \dots \tau_n\lambda_n\tau_{n+1} = \lambda \in Aff(R,2)$ olsun. Burada $\tau_i \in J(R,2) \backslash Aff(R,2)$ ve $\lambda_i \in Aff(R,2) \backslash J(R,2)$ dir. O halde $\tau_1\lambda_1 \dots \tau_n\lambda_n\tau_{n+1}\lambda^{-1} = (X,Y)$ dir. Buradan $bideg(\tau_1\lambda_1 \dots \tau_n\lambda_n\tau_{n+1}\lambda^{-1}) = (1,1)$ dir. Diğer taraftan Lemma 4.2.2.2 den

$$bideg(\tau_1\lambda_1 \dots \tau_n\lambda_n\tau_{n+1}\lambda^{-1}) = \left(\prod_{j=1}^{n+1} deg\tau_j \, , \prod_{j=2}^{n+1} deg\tau_j\right) \tag{4.85}$$

dir. $deg\tau_1 \geq 2$ olduğundan

$$\left(\prod_{j=1}^{n+1} deg\tau_j , \prod_{j=2}^{n+1} deg\tau_j\right) = (1,1) \tag{4.86}$$

olur. Bu da bir çelişkidir. O halde $\lambda \notin Aff(R,2)$ dir.

Not: $g(Y) \in R[Y]$ olmak üzere $J_0, J(R,2)$ nin $(X + g(Y), Y)$ elemanlarından oluşan bir altgrubu olsun. Kolaylıkla görülebilir ki $T(R,2), Aff(R,2)$ ve J_0 tarafından üretilir. Fakat $T(R,2), Aff(R,2)$ ve J_0 ın amalgamated serbest çarpımı değildir. Örneğin,

$$\tau_1 = (X - Y^2, Y), \lambda_1 = (X, Y + 1)$$

ve

$$\tau_2 = (X + (Y + 1)^2, Y)$$

olsun. $\tau_1\lambda_1\tau_2 = \lambda_1 \in Aff(R,2)$ fakat $\tau_1, \lambda_1, \tau_2$ nin hiçbiri $Aff(R,2) \cap J_0$ ın elemanı değildir.

Uyarı 4.2.2.1. Eğer R tamlık bölgesi değilse, $T(R,2), Aff(R,2)$ ve $J(R,2)$ nin amalgamated serbest çarpımı değildir. Varsayalım R komütatif bir halka fakat tamlık bölgesi olmasın. Yani $a, b \neq 0 \in R$ için $a.b = 0$ olsun.

$$\tau = (X + aY^2, Y),$$
$$\lambda = (X, Y + bX)$$
$$\tau^{-1} = (X - aY^2, Y)$$

diyelim. $\tau, \tau^{-1} \in J(R,2) \backslash Aff(R,2)$ ve $\lambda \in Aff(R,2) \backslash J(R,2)$ olduğu halde

$$\tau\lambda\tau^{-1} = (X, Y + bX) = \lambda \in Aff(R,2)$$

dir. Yani R tamlık bölgesi değilse $T(R,2)$, $Aff(R,2)$ ve $J(R,2)$ nin amalgamated serbest çarpımı değildir.

Sonuç 4.2.2.2. $F=(F_1,F_2)\in T(R,2), bidegF=(d_1,d_2)$ olsun. Derecesi d_i olan F_i lerin homojen bileşimini h_i ile gösterelim. O halde

a) $d_1|d_2$ veya $d_2|d_1$ dir.

b) $degF>1$ ise

i) $d_1<d_2$ ise $c\in R$ için $h_2=c.{h_1}^{d_2/d_1}$

ii) $d_2<d_1$ ise $c\in R$ için $h_1=c.{h_2}^{d_1/d_2}$

iii) $d_2=d_1$ ise $({F_1}',{F_2}')=\lambda\circ F$ iken bir $\lambda\in Aff(R,2)$ vardır öyle ki $deg{F_1}'>deg{F_2}'$ dir.

Uyarı 4.2.2.2. $F=(F_1,F_2)\in T(R,2), bidegF=(d_1,d_2)$ olsun. Derecesi d_i olan F_i lerin homojen bileşimini h_i ile gösterelim. Eğer $d_1=d_2$ ise genelde $h_1=ch_2$ veya $h_2=ch_1$ olacak şekilde bir $c\in R$ elemanı yoktur.

Uyarı 4.2.2.3. R tamlık bölgesi değilse Sonuç 4.2.2.2 nin a) koşulu yanlıştır. Bunu bir örnek ile gösterelim.

R tamlık bölgesi olmasın. $0\neq a,b\in R$ için $a.b=0$ olsun.

$$F=(X,Y+aX^3)\circ(X+bY^2,Y)$$

diyelim. O halde

$$F=(X+bY^2,Y+aX^3)$$

yani $(d_1,d_2)=bidegF=(2,3)$ olur fakat $2\nmid 3$ tür.

Eğer $degF>1$, $d_1<d_2$ $(d_2<d_1)$ ise

$$\tau=\left(X,Y+cX^{\frac{d_2}{d_1}}\right)\left(\tau=\left(X+cY^{\frac{d_1}{d_2}},Y\right)\right) \tag{4.87}$$

için $tdeg\tau^{-1} \circ F < tdegF$ dir. Sonuç olarak $F = (F_1, F_2) \in R[X,Y]^2 \in T(R,2)$ olup olmadığını belirleyen algoritma elde edilir;

Girdi: $F = (F_1, F_2) \in R[X,Y]^2$

1. $(d_1, d_2) = bideg(F_1, F_2)$ olsun.
2. $d_1 = d_2$=1 ise 7 ye git.
3. $d_1 \neq d_2$ ise 5 e git.
4. $tdeg\lambda F < tdegF$ olacak şekilde $\lambda \in Aff(R,2)$ varsa F yerine λF yaz ve 1 e git. Böyle bir λ yoksa dur: $F \notin T(R,2)$.
5. $d_2 < d_1$ ise F yerine (F_2, F_1) yaz.
6. $d_1 | d_2$ ve $h_2 = ch_1{}^{d_2/d_1}$ olacak şekilde bir $c \in R$ varsa, F yerine
$$\left(X, Y - cX^{\frac{d_2}{d_1}}\right) \circ F$$
yaz ve 1 e git. Böyle bir c yoksa dur: $F \notin T(R,2)$.
7. Eğer $detJF \in R^*$ ise dur: $F \in T(R,2)$, $detJF \notin R^*$ ise dur: $F \notin T(R,2)$ dir.

Şimdi bu algoritmayı ya da Sonuç 4.2.2.2 yi kullanarak aşağıdaki soruya bakalım.

Soru: Hangi koşullar altında $R[X,Y]$ nin bütün $R-$otomorfizmleri tamedir? Yani hangi koşullar altında $T(R,2) = Aut_R R[X,Y]$ dir?

Önerme 4.2.2.1. Eğer R bir cisim değilse, $T(R,2) \neq Aut_R R[X,Y]$ dir. Ayrıca, $0 \neq z \in R$ tersinir olmasın.

$$F = \left(X - 2Y(zX + Y^2) - z(zX + Y^2)^2, Y + z(zX + Y^2)\right) \tag{4.88}$$

olsun. O halde $F \in Aut_R R[X,Y] \backslash T(R,2)$ dir.

İspat: $D = (zX + Y^2)(-2Y\partial_X + z\partial_Y)$, $R[X,Y]$ üzerinde bir LND olsun. O halde $F \in Aut_R R[X,Y]$ dir. Eğer $F \in T(R,2)$ ise Sonuç 4.2.2.2 nin ii) koşulundan bir $c \in R$ için $-zY^4 = c(zY^2)^2$ dir. Bu durumda $-z$, dolayısıyla z, R de tersinir olur. Bu bir çelişkidir. O halde $F \in Aut_R R[X,Y] \backslash T(R,2)$ olur.

Teorem 4.2.2.1. k bir cisim ise

$$Aut_k k[X,Y] = T(k,2) \tag{4.89}$$

dir. Dahası, $Aut_k k[X,Y], Aff(k,2)$ ve $J(k,2)$ nin arakesitleri üzerinde amalgamated serbest çarpımdır (Jung, 1942)**.**

Bu teoremin ispatı için Rentschler teoreminin ifadesine ihtiyacımız var.

k karakteristiği 0 olan bir cisim olsun.

Teorem 4.2.2.2. $0 \neq D, k[X_1, X_2]$ üzerinde bir LND olsun. O halde $h \in T(k,2)$ ve $f(X_2) \in k[X_2]$ vardır öyle ki $h^{-1}Dh = f(X_2)\partial_{X_1}$ dir (Rentschler, 1968).

Teorem 4.2.2.1 in ispatı: $A = k[X_1, X_2]$ diyelim. Sonuç 4.2.2.1 den $T(k,2) = Aut_k A$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. $F = (F_1, F_2) \in Aut_k A$ olsun. O halde $\frac{\partial}{\partial F_1}$ lokal nilpotenttir. Yani Teorem 4.2.2.2 den $h \in T(k,2)$ ve $f(X_2) \in k[X_2]$ vardır öyle ki

$$h^{-1}\frac{\partial}{\partial F_1}h = f(X_2)\partial_{X_1} \tag{4.90}$$

dir. $g \in A$ olsun.

$$h^{-1}\frac{\partial}{\partial F_1}h(g) = 0 \tag{4.91}$$

olması için gerek ve yeter koşul $h(g) \in ker\frac{\partial}{\partial F_1} = k[F_2]$ olmasıdır, yani

$$ker h^{-1}\frac{\partial}{\partial F_1}h = k[h^{-1}(F_2)] \tag{4.92}$$

dir. Diğer taraftan

$$ker f(X_2)\partial_{X_1} = k[X_2] \tag{4.93}$$

dir. Buradan

$$k[X_2] = k[h^{-1}(F_2)] \tag{4.94}$$

dir ve bazı $c \in k^*$ ve $d \in k$ için

$$h^{-1}(F_2) = cX_2 + d \tag{4.95}$$

dir. O halde

$$F_2 = ch(X_2) + d \tag{4.96}$$

olur. Üstelik

$$\left(h^{-1}\frac{\partial}{\partial F_1}h\right)\left(h^{-1}(F_1)\right) = 1 \tag{4.97}$$

olduğundan

$$f(X_2)\partial_{X_1}\left(h^{-1}(F_1)\right) = 1 \tag{4.98}$$

dir. Buradan $\partial_{X_1}\left(h^{-1}(F_1)\right) \in k^*$ olur, yani $c' \in k^*$ ve $d'(X_2) \in k[X_2]$ için

$$h^{-1}(F_1) = c'X_1 + d'(X_2) \tag{4.99}$$

dir. Sonuç olarak

$$F_1 = c'h(X_1) + d'\left(h(X_2)\right) \tag{4.100}$$

dir. Özetle

$$F = (F_1, F_2) = \left(c'h(X_1) + d'\left(h(X_2)\right), ch(X_2) + d\right) \tag{4.101}$$

dir. $h \in T(k,2)$ olduğundan $F \in T(k,2)$ dir.

Önerme 4.2.2.2. $R = \oplus_{m\in\mathbb{Z}} R_m$ bir derecelendirilmiş halka ve D, R üzerinde sıfırdan farklı bir derivasyon olsun. Varsayalım $D, D = D_p + D_{p+1} + \cdots + D_d$ şeklinde derivasyonların sonlu toplamı şeklinde yazılabilsin. Burada $D_n R_m \subset R_{n+m},\ n, m \in \mathbb{Z}$ dir. Eğer D lokal nilpotent ise D_d de lokal nilpotenttir.

İspat: Her $m \in \mathbb{Z}$ için R_m in her elemanının D_d nin bazı kuvvetleri tarafından sıfırlandığını göstermek yeterlidir. $g \in R_m$ olsun. D lokal nilpotent olduğundan $D^N g = 0$ olacak şekilde bir N vardır. $D^N g$ nin R_{m+Nd} ye ait olan bileşenleri ${D_d}^N g$ ye eşittir. $D^N g = 0$ olduğundan ${D_d}^N g = 0$ dır.

Bundan sonra $R = k[X] = k[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ alacağız.

Önerme 4.2.2.3. $0 \neq w \in \mathbb{Z}^n$ olsun ve R üzerinde $w-$derecelendirmeyi düşünelim. D, R üzerinde sıfırdan farklı bir derivasyon olsun. Her $p, d \in \mathbb{Z}$ için $D_p R_d \subset R_{p+d}$ olmak üzere D, derivasyonların sonlu toplamı olarak $\sum D_p$ tek şekilde yazılabilir.

İspat: D derivasyonunun $\sum D_p$ şeklinde tek bir biçimde yazılabileceği tanımdan açıktır. Geriye varlığını ispat etmek kalır. $T = cX^a \partial_i, D$ de bir terim olsun. $e_i,\ R^n$ in $i-$inci standart baz vektörü olmak üzere $s = a - e_i$ olsun. O halde her m için $T(X^m) \in kX^{m+s}$ dir. Burada s ye T nin kuvveti denir ve
$suppD = \{s \in \mathbb{Z}^n | D,$ kuvveti s olan bir terim içerir$\}$ şeklinde gösterilir. Son olarak $D(s)$ ile, D de kuvveti s olan bütün terimlerin toplamını gösterelim ve

$$D_p = \sum_{<s,w>=p} D(s) \tag{4.102}$$

olsun.

$$D = \sum D_p \tag{4.103}$$

olduğu açıktır. D de sıfırdan farklı her terimin kuvveti vardır. $p_0 =< s_0, w >$ için s_0, D_{p_0} ın kuvvetidir. Geriye $D_p R_d \subset R_{p+d}$ olduğunu veya denk olarak her $X^m \in R_d$ ve $< s, w >= p$ iken her $s \in \mathbb{Z}^n$ için $D(s)X^m \in R_{p+d}$ olduğunu göstermek kaldı. Bunu göstermek için ilk olarak $D(s)X^m \in kX^{m+s}$ olduğunu görelim. Bu yüzden

$$< m + s, w >= p + d \tag{4.104}$$

olduğunu göstermeliyiz. $X^m \in R_d$ kullanılarak

$$< m + s, w >=< m, w > +< s, w >= d + p \tag{4.105}$$

olduğu görülür.

Bir önceki önermede tanımlanan D nin ayrıştırılmasına D nin $w-$ homojen ayrıştırılması denir. Eğer $D_p \neq 0$ iken p maksimal ise p ye D nin $w-$derecesi denir ve $wdegD$ ile gösterilir. $w = (\underbrace{1,1,\dots,1}_{\text{n-tane}})$ olduğunda p ye D nin derecesi denir ve $degD$ ile gösterilir.

Aşağıdaki sonuç Rentschler teoreminin ispatı için önemlidir.

Önerme 4.2.2.4. $R = \oplus_{d\in\mathbb{Z}} R_d, R = k[X]$ üzerinde herhangi bir derecelendirme olsun ve her $p, d \in \mathbb{Z}$ için $D_p R_d \subset R_{p+d}$ olacak şekilde

$$D = \sum D_p \tag{4.106}$$

sonlu bir ayrışma olsun. $D_p \neq 0$ iken p maksimal olsun. Eğer her $s_i \geq 0$ iken $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{Z}^n$ için $D_p = D(s)$ ise D, lokal nilpotent değildir.

İspat: $s \in \mathbb{Z}^n$ olsun. $c_j \in k$ için

$$D(s) = X^s \sum c_j X_j \partial_j \tag{4.107}$$

dir. $D(s) = D_p \neq 0$ olduğundan $c_j \neq 0$ dır. Eğer her $s_i \geq 0$ ise,

$$D(s)(X_j) = c_j X^s X_j \tag{4.108}$$

dir. Özdeğer özelliğinden $c_j X^s \neq 0$ olduğu için $D(s)$ lokal nilpotent değildir. O halde D_p de lokal nilpotent değildir. Yani D, lokal nilpotent değildir.

Sonuç 4.2.2.3. Eğer D, R üzerinde lokal nilpotent ise o zaman; ya

- **i)** $f(Y) \in k[Y]$ için $D = f(Y)\partial_X$ tir. Ya
- **ii)** $f(X) \in k[X]$ için $D = f(X)\partial_Y$ tir. Ya da
- **iii)** $s_0, t_o \geq 0$ vardır öyle ki $(s_0, -1)$ ve $(-1, t_0)$, $suppD$ ye aittir ve dahası $suppD$, köşeleri $(s_0, -1), (-1, -1)$ ve $(-1, t_0)$ olan üçgendedir.

İspat: $p_0 = degD$ olsun. O halde $p_0 \geq -1$ dir. Eğer $p_0 = -1$ ise o zaman $a, b \in k$ için $D = a\partial_X + b\partial_Y$ dir(Burada a ve b aynı anda sıfır değil).
$p_0 \geq 0$ olsun ve $l, x + y = p_0$ doğrusunu göstersin.

1.durum: l doğrusu $(-1, t_0)$ şeklinde bir nokta içersin. l nin tanımından $suppD$ nin bütün noktaları bu doğrunun üzerinde veya altındadır. Şimdi l yi $(-1, t_0)$ noktası etrafında saat yönünde, $suppD$ nin bir noktası diğer noktasıyla karşılaşana kadar çevirelim. Eğer $l, suppD$ nin birden fazla noktasını içeriyorsa l yi çevirmek zorunda değiliz. Yani 0 derecelik bir açı üzerinde çevirириz. $suppD$ nin bir noktası başka bir noktasıyla karşılaşmazsa $suppD = \{(-1, t_0)\}$ dır ve sonuç olarak $c \in k^*$ için $D = cY^{t_0}\partial_X$ tir. Bu da **i)** koşulunu verir. Eğer $suppD$ nin bir noktası $(-1, t)$ şeklinde noktalara denk gelirse o zaman bütün bu noktalar için $t \leq t_0$ dır ve $deg_Y f(Y) \leq t_0$ için $D = f(Y)\partial_X$ tir. Bu da **i)** koşulunu verir.
$s \geq 0$ için $suppD$ nin en azından bir (s, t) noktasıyla karşılaştığımızı varsayabiliriz. Bütün bu noktalardan t nin minimal olanını seçelim. Bu noktaya (s', t') diyelim. $t' = -1$ olduğunu gösterelim ki bu bizi **iii** ye götürür. Varsayalım $t' \geq 0$ olsun. Bir

çelişkiye varacağız. Biliyoruz ki $s' \geq 0$ dır. Dolayısıyla $s', t' \geq 0$ dır. Şimdi l yi (s', t') etrafında saat yönünde küçük bir açıyla döndürerek $l' = w_1 x + w_2 y = d$ $(w_1, w_2, d \in \mathbb{Z})$ elde ederiz öyle ki $(s', t'), suppD$ nin bu doğru üzerindeki tek noktasıdır ve $suppD$ nin diğer bütün noktaları l' doğrusunun altındadır. $w = (w_1, w_2)$ ve $p = wdegD$ dersek $D_p = D\big((s', t')\big)$ dir. $s', t' \geq 0$ olduğundan Önerme 4.2.2.4 gereği D, lokal nilpotent değildir. Bu da çelişkidir. O halde $t' = -1$ olur.

2.durum: $l, (s', -1)$ şeklinde bir nokta içersin. Bu durum 1.durum ile benzerdir.

3.durum: l, ne $(s, -1)$ ne de $(-1, t)$ şeklinde bir nokta bulundurmasın. t minimal iken $(s, t) \in l$ olsun. $s, t \geq 0$ olduğundan bir l' bulabiliriz öyle ki $(s, t), suppD$ nin l' üzerindeki tek noktasıdır ve $suppD$ nin diğer bütün noktaları l' doğrusunun altındadır. Bu bir çelişkidir.

Rentschler Teoreminin ispatı: i) Sonuç 4.2.2.3 ü kullanalım. Eğer $D = f(X)\partial_Y$ ise $h = (Y, X)$ alalım. O zaman

$$h^{-1}Dh = f(Y)\partial_X \tag{4.109}$$

tir. Bu yüzden Sonuç 4.2.2.3 deki gibi s_0, t_0 olduğunu varsayabiliriz. Eğer gerekirse s_0 ve t_0 yerinde sırasıyla $s_0(D)$ ve $t_0(D)$ yazabiliriz. $l', (s_0, -1)$ ve $(-1, t_0)$ dan geçen bir doğru olsun. O halde

$$l' = (t_0 + 1)x + (s_0 + 1)y = p \tag{4.110}$$

dir.$(p = s_0 t_0 - 1)$.

$$w = (t_0 + 1, s_0 + 1) \tag{4.111}$$

olsun. O halde Sonuç 4.2.2.3 den $wdegD = p$ dir ve Önerme 4.2.2.2 den D_p lokal nilpotenttir. $\gcd(a, b) = 1$ i sağlayan $D_1 = a\partial_X + b\partial_Y$ için $D_p = gD_1$ olsun. Sonuç

4.1.5.4 ten D_1 lokal nilpotenttir ve $D_1(g) = 0$ dır. D_p, w −homojen olduğundan g ve D_1 de w −homojendir.

ii) $\gcd(a,b) = 1$ için D_1 lokal nilpotent olduğundan Önerme 4.1.5.4 ten D_1 in $k[X,Y]$ de bir slice elemanı vardır, $a(0) \neq 0$ veya $b(0) \neq 0$ dır. Varsayalım $a(0) \neq 0$ olsun. O halde $c \in k^*$ için D_1 in $c\partial_X$ şeklinde bir terimi vardır. $(s_0, -1) \in suppD$ olduğundan, yani D_p, $c'X^{s_0}\partial_Y$ şeklinde bir terim içerdiğinden $D_p = gD_1$ olduğundan, $d \in k^*$ ve $r \geq 0$ için D_1 ayrıca $dX^r\partial_Y$ şeklinde bir terim içerir. O halde $D_1 = c\partial_X + dX^r\partial_Y$ olur. Yani $suppD_1$ bir doğru üzerindeyken D_1 w −homojendir. Açıkça bu doğru $(-1,0)$ ve $(r,-1)$ noktalarından geçer. Fakat bu doğru ≥ -1 tamsayı koordinatlı başka bir nokta içermez.

iii) $D_1(g) = 0$ olduğundan $g \in kerD_1 = k\left[Y - \frac{d}{(r+1)c}X^{r+1}\right]$ dir. g nin homojenliği $a \in k^*$ ve $N \in \mathbb{N}$ için $g = a\left(Y - \frac{d}{(r+1)c}X^{r+1}\right)^N$ yi sağlar. Dolayısıyla $D_p = a\left(Y - \frac{d}{(r+1)c}X^{r+1}\right)^N (c\partial_X + dX^r\partial_Y)$ olur.

iv) Son olarak $h, h(X) = X$ ve $h(Y) = Y - \frac{d}{(r+1)c}X^{r+1}$ ile verilen bir otomorfizm olsun. O halde $h^{-1}D_p h = aY^N c\partial_X$ tir. Ayrıca kolaylıkla görülebilir ki her $d \in \mathbb{Z}$ için $h(R_d) \subset R_d$ dir ve böylece $h(R_d) = R_d$ dir. Sonuç olarak her $m \in \mathbb{Z}$ için $(h^{-1}Dh)_m = h^{-1}D_m h$ dir. Özellikle $h^{-1}Dh$ nin $w-$derecesi, D nin $w-$derecesi olan p ye eşittir. $h^{-1}D_p h = acY^N\partial_X$ olduğu için $(h^{-1}Dh)_p$ den gelen $supph^{-1}Dh$ daki $(s,-1)$ şeklinde bir noktaya katkısı yoktur. Sonuç olarak $s_0(h^{-1}Dh) < s_0(D)$ dir. O halde Teorem $s_0(D) + t_0(D)$ üzerinden tümevarımdan gelir.

4.3. Serbest Poisson Cebirlerinin Otomorfizmleri ve Derivasyonları

Bu bölümde özel bir Lie cebiri olan Poisson cebirleri ve serbest Poisson cebirleri tanıtılacak, Poisson cebirlerinin sınıflarından, derece fonksiyonlarından ve Poisson cebirlerinin derivasyonlarının derece fonksiyonlarından bahsedilecektir. Son olarak serbest Poisson cebirlerinin tame otomorfizmleri grubu ele alınacaktır. Bu bölüm Leonid Makar-Limanov, Umut Turusbekov ve Ualbai Umirbaev'in (2009) makalesi incelenerek oluşturulmuştur.

4.3.1. Poisson cebirleri

Tanım 4.3.1.1. B, k cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Bu vektör uzayının üzerinde bilineer olan $x.y$ (çarpma işlemi) ve $\{x,y\}$ (Poisson braketi) işlemleri tanımlansın. Eğer B aşağıdaki koşulları sağlarsa B ye bir Poisson cebiri denir.

1) B, çarpma işlemine göre asosyatif ve komütatif bir cebirdir.

2) B, Poisson braketi altında bir Lie cebiridir.

3) B üzerinde Leibniz özdeşliği sağlanır. Yani her $x,y,z \in B$ için

$$\{x,y.z\} = \{x,y\}.z + y.\{x,z\} \tag{4.112}$$

Tanım 4.3.1.2. B bir Poisson cebiri ve $D: B \to B$ bir lineer homomorfizm olsun. Eğer D, Leibniz ve Jacobi özdeşliklerini sağlarsa, D ye B nin bir derivasyonu denir. Bu durumda D, hem asosyatif cebir olarak hem de Lie cebiri olarak B nin bir derivasyonudur.

Örnek 4.3.1.1. $ad_x: B \to B$

$$y \to \{x,y\}$$

dönüşümü B nin bir derivasyonudur. Bunu şöyle gösterebiliriz.

$\forall\, x,y,z \in B$ için

$$ad_x(y.z) = \{x,y.z\} = \{x,y\}.z + y.\{x,z\} = ad_x(y).z + y.ad_x(z) \tag{4.113}$$

Böylece ad_x, B nin bir derivasyonudur.

Örnek 4.3.1.2. Bu kez B yi bir Lie cebiri olarak düşünelim. ad_x dönüşümü Jacobi özdeşliğini sağlar. Yani $ad_x\{y,z\} = \{x,\{y,z\}\}$ dir.
Jacobi özdeşliğinden,

$$\{x,\{y,z\}\} + \{y,\{z,x\}\} + \{z,\{x,y\}\} = 0$$
$$\{x,\{y,z\}\} = -\{y,\{z,x\}\} - \{z,\{x,y\}\}$$
$$\{x,\{y,z\}\} = \{y,\{x,z\}\} + \{\{x,y\},z\}$$
$$ad_x\{y,z\} = \{y, ad_x(z)\} + \{ad_x(y), z\}$$

olur.

Poisson cebirlerinin sınıfları

1) S_n Simplektik (symplectic) Cebirleri: Her n için S_n cebiri, Poisson braketini aşağıdaki gibi sağlayan bir $k[x_1, y_1, \dots, x_n, y_n]$ polinom cebiridir.

$$\{x_i, y_j\} = \delta_{ij},\ \{x_i, x_j\} = 0,\ \{y_i, y_j\} = 0 \qquad (4.114)$$

Burada $1 \le i, j \le n$ olmak üzere δ_{ij} kronecker semboldür.

2) $PS(g)$ Simetrik Poisson Cebirleri: $g, e_1, e_2, \dots, e_k, \dots$ lineer bazına sahip bir Lie cebiri olsun. g nin $S(g)$ simetrik cebiri $e_1, e_2, \dots, e_k, \dots$ değişkenlerine bağlı bilinen $k[e_1, e_2, \dots, e_k, \dots]$ polinom cebiri olarak tanımlanır. Her i, j için $[x, y], g$ Lie cebirinin Lie çarpımı olsun. $\{e_i, e_j\} = [e_i, e_j]$ Poisson braketi ile birlikte $S(g)$ bir Poisson cebiridir. Bu cebire simetrik Poisson cebiri denir ve $PS(g)$ ile gösterilir.

Tanım 4.3.1.3. $g, x_1, x_2, \dots, x_n$ serbest Lie üreteçleri ile birlikte bir serbest Lie cebiri olsun. Bu durumda $PS(g)$ cebiri g ile aynı üreteç kümesi üzerinde tanımlı olan bir serbest Poisson cebiridir (Shestakov, 1993). Bu cebiri

$$P = k\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \tag{4.115}$$

ile gösterelim.

4.3.2. Poisson cebiri üzerinde tanımlı derece fonksiyonları

1) Standart derece fonksiyonu: P homojen cebirinin standart derece fonksiyonu deg ile gösterilir ve $1 \leq i \leq n$ olmak üzere $\deg(x_i) = 1$ olarak tanımlanır. Bu durumda $\{f, g\} \neq 0$ olmak üzere f ve g, P nin homojen elemanları ise

$$\deg\{f, g\} = degf + degg \tag{4.116}$$

dir.

Örnek 4.3.2.1. $f = {x_1}^2 + {x_2}^2 + [x_1, x_3]$ ve $g = {x_1}^2 x_2 + [x_1, [x_2, x_3]]$ olsun.
f, 2. dereceden homojen ve g, 3. dereceden homojendir.

$$\{f, g\} = [f, g] = \left[{x_1}^2 + {x_2}^2 + [x_1, x_3]\,, {x_1}^2 x_2 + \left[x_1, [x_2, x_3]\right]\right]$$

Bilineerlikten

$$[f, g] = \left[{x_1}^2, {x_1}^2 x_2\right] + \left[{x_1}^2, \left[x_1, [x_2, x_3]\right]\right] + \left[{x_2}^2, {x_1}^2 x_2\right] + \left[{x_2}^2, \left[x_1, [x_2, x_3]\right]\right]$$
$$+\left[[x_1, x_3], {x_1}^2 x_2\right] + \left[[x_1, x_3], \left[x_1, [x_2, x_3]\right]\right]$$

olup

$$\deg\{f, g\} = 5 = degf + degg$$

dir. Ayrıca f ve g homojen iken $\{f, g\}$ de homojendir.

2) Bir x_i elemanına göre derece fonksiyonu: P nin x_i ye göre derece fonksiyonu deg_{x_i} ile gösterilir ve $1 \leq i, j \leq n$ olmak üzere $deg_{x_i}(x_j) = \delta_{ij}$ olarak tanımlanır.

Örnek 4.3.2.2. $f = {x_1}^2 + {x_2}^2 + [x_1, x_2]$ için

$$deg_{x_1} f = 2,\ deg_{x_2} f = 2,\ deg_{x_3} f = 0$$

dır.

$g = {x_1}^2 x_2 + [x_1, [x_2, x_3]]$ için

$$deg_{x_1} g = 2,\ deg_{x_2} g = 1,\ deg_{x_3} g = 1$$

ve $h = {x_1}^2 x_2 x_3 + x_1[x_1, [x_2, x_3]]$ için

$$deg_{x_1} h = 2,\ deg_{x_2} h = 1,\ deg_{x_3} h = 1$$

olur.

P nin deg_{x_i} ye göre homojen elemanları basit bir yolla tanımlanabilir. Örneğin yukarıdaki örnekte P nin deg_{x_1} e göre homojen elemanı h, deg_{x_2} ye göre homojen elemanları g ve h, deg_{x_3} e göre homojen elemanı h dır.

Eğer f, $1 \leq i \leq n$ iken her bir deg_{x_i} ye göre homojen ise f ye multi-homojen denir. P nin multi-homojen her f elemanı için $mdeg(f) = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ yazılır. Burada her $1 \leq i \leq n$ için $deg_{x_i} f = m_i$ dir.

Örnek 4.3.2.3. $h = {x_1}^2 x_2 x_3 + x_1[x_1, [x_2, x_3]]$, deg_{x_1}, deg_{x_2} ve deg_{x_3} e göre homojen olduğundan h ye multi-homojen denir. $mdeg(h) = (2,1,1)$ olur.

Şimdi g serbest Lie cebirinin bir multi-homojen

$$x_1, x_2, \dots, x_n, [x_1, x_2], \dots, [x_1, x_n], \dots, [x_{n-1}, x_n], \big[[x_1, x_2], x_3\big], \dots$$

lineer bazı seçilsin ve bu bazın elemanları $e_1, e_2, \dots, e_m, \dots$ elemanları ile tekrar isimlendirilsin. Eğer $i \neq j$ ise

$$mdeg\{e_i, e_j\} = mdeg(e_i) + mdeg(e_j)$$

dir.

Örnek 4.3.2.4. $e_i = [[x_1, x_2], x_3]$ ve $e_j = [[[x_2, x_3], x_4], x_5]$ olsun.

$mdeg(e_i) = (\underbrace{1,1,1,0,\dots,0}_{\text{n tane}})$ ve $mdeg(e_j) = (\underbrace{0,1,1,1,1,0,\dots,0}_{\text{n tane}})$ dır.

$$mdeg(e_i) + mdeg(e_j) = (\underbrace{1,2,2,1,1,0,\dots,0}_{\text{n tane}})$$

olur. Diğer taraftan

$$mdeg\{e_i, e_j\} = mdeg[e_i, e_j] = \Big[[[x_1, x_2], x_3], \Big[[[x_2, x_3], x_4], x_5\Big]\Big]$$
$$= (\underbrace{1,2,2,1,1,,0,\dots,0}_{\text{n tane}})$$

olur. Serbest Poisson cebirinin tanımından

$$P = k\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = k[e_1, e_2, \dots, e_m, \dots] \tag{4.117}$$

olduğunu söyleyebiliriz. Bu durumda $i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_k$ için $u = e_{i_1}.e_{i_2}.\dots.e_{i_k}$ elemanları P nin lineer bir bazını oluşturur. Burada $e_1, e_2, \dots, e_m, \dots$ elemanları multi-homojen olduklarından $u = e_{i_1}.e_{i_2}.\dots.e_{i_k}$ bazı da multi-homojendir.

3) Ağırlık derece fonksiyonu: Sıfırdan farklı her $w \in \mathbb{Z}^n$ vektörü için ağırlık derece fonksiyonu $wdeg$ ile gösterilir. Bu derece fonksiyonu $u = e_{i_1}.e_{i_2}.\dots.e_{i_k}$ formunda bir eleman olmak üzere

$$wdeg(u) =< mdeg(u), w > \tag{4.118}$$

olarak tanımlanır. Burada $<,>, \mathbb{R}^n$ de standart iç çarpımdır. P_m, P nin m dereceli ağırlık derece fonksiyonlarına göre homojen olan elemanlarının altkümesini göstersin. Bu fonksiyonu aşağıdaki örnek ile daha detaylı görelim.

Örnek 4.3.2.5. $w = (\underbrace{1,2,3,0,\dots,0}_{\text{n tane}})$ olsun. $u_1 = x_1x_2\big[[x_1,x_2],x_3\big]$ alalım.

$$mdeg(u_1) = (\underbrace{2,2,1,0,\dots,0}_{\text{n tane}}) \text{ ve}$$

$$wdeg(u_1) =< mdeg(u_1), w >=< (2,2,1,0,\dots,0),(1,2,3,0,\dots,0) >= 9$$

dır.

$u_2 = x_1x_2[x_1,x_2][x_1,x_4][x_2,x_5]$ olarak alalım.

$$mdeg(u_2) = (\underbrace{3,3,0,1,1,0,\dots,0}_{\text{n tane}}) \text{ ve } wdeg(u_2) = 9$$

olur. $f = u_1 + u_2$ için $f \in P_9$ olur.

P nin sıfırdan farklı herhangi bir teriminin multi-derecesi s olsun. P_m kümesi $< s, w >= m$ koşulunu sağlayan terimleri içersin. O halde $P = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} P_m$ ayrışımı P nin bir derecelendirmesidir.

4) Toplam derece fonksiyonu: P üzerinde toplam derece fonksiyonu $pdeg$ ile gösterilir ve $e_1, e_2, \dots, e_m, \dots$ tüm homojen baz elemanları için $pdeg(e_i) = 1$ dir. $[a,b] \neq 0$ olmak üzere $a,b \in P, P$ nin toplam derece fonksiyonuna göre homojen olan elemanları ($p-$homojen) olsun. Bu durumda

$$pdeg[a,b] = pdega + pdegb - 1 \tag{4.119}$$

dir. Bu derece fonksiyonu için bir örnek verelim.

Örnek 4.3.2.6. $a = x.y,\ b = y.z$ olsun. O halde $pdega = 2$ ve $pdegb = 2$ dir.

$$\{a,b\} = \{x.y, y.z\} = x.\{y, y.z\} + \{x, y.z\}.y$$
$$= x.y.\{y,z\} + \{y,y\}.z + y.\{x,z\}.y + \{x,y\}.z.y$$

O halde $pdeg[a,b] = 3 = pdega + pdegb - 1$ olur.

$P_m{}^*, P$ nin m dereceli tüm $p-$homojen elemanlarının altkümesi olsun. Bu durumda $P = \oplus_{m\in\mathbb{Z}} P_m{}^*$ ayrışımı da P nin bir derecelendirmesidir.

4.3.3. Poisson cebirlerinin derivasyonları üzerinde tanımlı derece fonksiyonları

P Poisson cebirinin bütün derivasyonları $DerP$ ile gösterilsin. $DerP$ nin bir Lie cebiri olduğu gösterilmişti. P nin $f_1, f_2, \dots, f_n$ elemanlarının her sistemi için Önerme 4.1.1.1 den

$$D = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{4.120}$$

ile gösterilen, $1 \leq i \leq n$ için $D(x_i) = f_i$ olarak tanımlanan D derivasyonu, P nin tek derivasyonudur. O halde $1 \leq i \leq n$ iken ve $u = e_{i_1}.e_{i_2}.\dots.e_{i_k}$ için $v = u\frac{\partial}{\partial x_i}$ derivasyonları $Der(P)$ nin lineer bir bazını oluşturur. $v = u\frac{\partial}{\partial x_i}$ deki her v elemanı için

$$mdeg(v) = mdeg(u) - \mathcal{E}_i \tag{4.121}$$

olsun. Burada $\mathcal{E}_i \in \mathbb{Z}^n$, standart baz vektörüdür.

Şimdi P cebirinin multihomojen derivasyonları tanımlanabilir ve $Der(P)$ nin her elemanı farklı multidereceli multihomojen derivasyonların toplamı olarak tek bir şekilde gösterilebilir.

1) $DerP$ nin Ağırlık Derece Fonsiyonu: Sıfırdan farklı her $w \in \mathbb{Z}^n$ vektörü için $Der(P)$ üzerindeki ağırlık derece fonksiyonu $wdeg$ ile gösterilir. Bu derece fonksiyonu, $v = u\frac{\partial}{\partial x_i}$ formunda bir eleman olmak üzere

$$wdeg(v) = < mdeg(v), w > \tag{4.122}$$

olarak tanımlanır. Ağırlık derece fonksiyonuna göre homojen elemanları $w-$ homojen olarak ifade edelim. $Der_m P$ ise $Der(P)$ derecesi m olan tüm $w-$homojen elemanlarının altkümesi olsun.

Bu derece fonksiyonunu aşağıdaki örnekle inceleyelim.

Örnek 4.3.3.1. $w = (\underbrace{1,2,3,0,\dots,0}_{\text{n-tane}})$ ve $u_1 = x_1x_2[[x_1,x_2],x_3]$ olsun. O halde

$$v_1 = x_1x_2\big[[x_1,x_2],x_3\big]\frac{\partial}{\partial x_1}$$

olur.

$$mdeg(v_1) = \underbrace{(2,2,1,0,\dots,0)}_{\text{n-tane}} - \underbrace{(1,0,\dots,0)}_{\text{n-tane}} = \underbrace{(1,2,1,0,\dots,0)}_{\text{n-tane}}$$

$$wdeg(v_1) =< (1,2,1,0,\dots,0),(1,2,3,0,\dots,0) >= 8$$

$$u_2 = x_1\big[[x_1,x_2],x_4\big]\big[[x_1,x_2],x_5\big][x_1,x_2]$$

olsun. O halde

$$v_2 = u_2\frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$mdeg(v_2) = \underbrace{(4,2,0,1,1,0,\dots,0)}_{\text{n-tane}} \text{ ve } wdeg(v_2) = 8$$

olur.

$$d = u_1\frac{\partial}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial}{\partial x_2} = v_1 + v_2$$

için, d, 8. dereceden w −homojendir, $d \in Der_8P$ dir.

Bu drumumda $Der(P) = \oplus_{m\in\mathbb{Z}} Der_mP$ ayrışımı, $Der(P)$ nin bir derecelendirmesidir. Dahası, her $d \in Der_mP$ için

$$d(P_k) \subseteq P_{m+k}$$

dır.

2) $DerP$ nin Toplam Derece Fonksiyonu: $DerP$ Lie cebiri üzerinde toplam derece fonksiyonu $pdeg$ ile gösterilir ve $v = u\frac{\partial}{\partial x_i}$ formunda bir eleman olmak üzere

$$pdegv = pdegu - 1 \tag{4.123}$$

olarak tanımlanır. $DerP$ nin toplam derece fonksiyonuna göre homojen olan elemanlarını $p-$homojen olarak ifade edelim. ${Der_m}^*P, DerP$ nin m dereceli tüm $p-$homojen elemanlarının altkümesi olsun. O halde $Der(P) = \oplus_{m\in\mathbb{Z}} {Der_m}^*P$ ayrışımı $Der(P)$ nin bir derecelendirmesidir ve her $d \in {Der_m}^*P$ için

$$d({P_k}^*) \subset {P_{m+k}}^* \tag{4.124}$$

dır.

4.3.4. Başkatsayılar

f, P nin herhangi bir elemanı ve D ise herhangi bir derivasyonu olsun. Bu durumda

$$D = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{4.125}$$

dir. Ayrıca

$$fD = \sum_{i=1}^{n} (ff_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{4.126}$$

tanımlansın. $1 \leq j \leq k$ olmak üzere eğer $f \in k[S(f)]$ ve $f \notin k[S(f_i) \setminus \{e_{i_j}\}]$ ise f nin desteği (support)

$$S(f) = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}\} \tag{4.127}$$

olarak tanımlanır. D derivasyonunun desteği ise

$$S(D) = S(f_1) \cup S(f_2) \dots \cup S(f_n) \tag{4.128}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $x = e_i$ ise P üzerinde x e göre polinomu derece fonksiyonu $pdeg_x$ ile gösterilsin. $f \in P$ ve $D \in DerP$ elemanları sırasıyla aşağıdaki gibi tek bir şekilde yazılabilir.

$$f = f_0 + xf_1 + \cdots + x^m f_m, x \notin S(f_i), 0 \leq i \leq m \tag{4.129}$$

ve

$$D = D_0 + xD_1 + \cdots + x^m D_m, x \notin S(D_i), 0 \leq i \leq m \tag{4.130}$$

Örnek 4.3.4.1. $S(f) = \{e_1, e_2, e_3\}$ olsun. $f = e_1 {e_2}^2 e_3 + e_1 e_2 e_3 + e_3 e_2 + {e_1}^5 {e_3}^2 e_2 + e_1 e_2$ iken $x = e_3$ alalım.

$$f = e_3(e_1{e_2}^2) + (e_1e_2)e_3 + e_3e_2 + {e_3}^2({e_1}^5e_2) + e_1e_2$$
$$= e_3(e_1{e_2}^2 + e_1e_2 + e_2) + {e_3}^2({e_1}^5e_2) + e_1e_2$$

$f_0 = e_1e_2,\ f_1 = e_1{e_2}^2 + e_1e_2 + e_2$ ve $f_2 = {e_1}^5e_2$ için

$$f = f_0 + xf_1 + x^2f_2$$

olur. Şimdi bir

$$f = f_0 + xf_1 + \cdots + x^mf_m \tag{4.131}$$

elemanını ele alalım. Eğer $f_m \neq 0$ ise $pdeg_xf = m$ ve bu derece fonksiyonuna göre f nin başkatsayısı $l_x(f) = f_m$ olur. Benzer şekilde

$$D = D_0 + xD_1 + \cdots + x^mD_m \tag{4.132}$$

için $D_m \neq 0$ ise $pdeg_xD = m$ dir ve $l_x(D) = D_m$ ile gösterelim. Ayrıca $i < j$ ise $e_i < e_j$ kabul edelim.

4.3.5. $k\{x_1, x_2\}$ nin tame otomorfizmlerinin grubu

Önerme 4.3.5.1. $R = \oplus_{m\in\mathbb{Z}} R_m$ bir derecelendirilmiş cebir olsun. Varsayalım ki D, R üzerinde bir LND olsun ve $p \leq i \leq q$ ve $D_q \neq 0$ olmak üzere $D_i(R_m) \subseteq R_{i+m}$ için

$$D = D_p + D_{p+1} + \cdots + D_q \tag{4.133}$$

olsun. O halde D_q Lokal nilpotenttir.

İspat: $r \leq i \leq s, f_i \in R_i$ ve $f_s \neq 0$ olmak üzere

$$f = f_r + f_{r+1} + \cdots + f_s \in R \tag{4.134}$$

ise $\hat{f} = f_s$ diyelim. $a \in R_m$ olsun ve varsayalım ki ${D_q}^i(a) \neq 0$ olsun. Tümevarımdan $\widehat{D^i(a)} = {D_q}^i(a)$ olduğu açıktır. Sonuç olarak $D^i(a) \neq 0$ olur ve bu çelişkidir. O halde D_q lokal nilpotenttir.

Önerme 4.3.5.2. D, P nin bir derivasyonu olsun ve $x, S(D)$ nin minimal elemanı olsun. O halde

$$pdeg_x D(f) \leq pdeg_x D + pdeg_x f \tag{4.135}$$

tir. Bu eşitsizliğin eşitlik olabilmesi için gerek ve yeter koşul $l_x(D)(l_x(f)) \neq 0$ olmasıdır. Bu durumda

$$l_x\big(D(f)\big) = l_x(D)(l_x(f)) \tag{4.136}$$

olur.

İspat: i) $pdegf = 1$ olsun. $f = x_j$ olduğunu düşünelim. Bu durumda $pdeg_x D = d$ olsun. O halde $D = x^d h \frac{\partial}{\partial x_i}$ alalım. Burada $h \in L(x) = \{e_i | e_i > x, 1 \leq i \leq n\}$ dir.

Bu durumda

$$D(x_i) = x^d h \frac{\partial}{\partial x_i} x_j \tag{4.137}$$

dir. Eğer $i = j$ ise $D(x_i) = x^d h$ olur. Bu durumda

$$pdeg_x D(f) = d = pdeg_x D \tag{4.138}$$

bulunur. Eğer $i \neq j$ ise $D(x_j) = 0$ olur. Bu durumda

$$pdeg_x D(f) < pdeg_x D = d \tag{4.139}$$

bulunur.

$$pdeg_x D(f) \leq pdeg_x D \tag{4.140}$$

olduğundan $x = x_j$ olup olmaması eşitliği bozmaz. Diğer taraftan $f = \{a, b\}$ olduğunu düşünelim.

$$D(f) = \{D(a), b\} + \{a, D(b)\} \tag{4.141}$$

dir.

$$pdeg_x D(f) = \max\{pdeg_x\{D(a), b\}, pdeg_x\{a, D(b)\}\} \tag{4.142}$$

olur. Bu durumda kabul edelim ki

$$pdeg_x\{D(a), b\} > pdeg_x\{a, D(b)\} \tag{4.143}$$

olsun. O halde $pdeg_x\{D(a), b\}$ yi incelemeliyiz. Kabul edelim ki $pdeg_x D(a) = d$ olsun. O halde $S(a_1) \subset L(x)$ olmak üzere $D(a) = x^d a_1$ dir. $i < j$ iken $\{e_i, e_j\}$ nin

$m > j$ olmak üzere e_m lerin lineer kombinasyonu olduğunu biliyoruz. O halde

$$S(\{a_1, b\}) \subset L(x) \text{ ve } S(\{x, b\}) \subset L(x) \tag{4.144}$$

tir. Bu durumda

$$\{D(a), b\} = \{x^d a_1, b\} = x^d\{a_1, b\} + dx^{d-1}a_1\{x, b\} \tag{4.145}$$

yazılabilir.

$$pdeg_x\{D(a), b\} = pdeg_x D(a) \tag{4.146}$$

bulunur. O halde ispatlamak istediğimiz eşitsizlik a için doğru ise f için de doğru olmuş olur. Benzer şekilde

$$pdeg_x\{a, D(b)\} > pdeg_x\{D(a), b\} \tag{4.147}$$

olması durumunda ise eşitsizlik b için doğru ise f için de doğru olmuş olur. O halde a, b için doğru olan bu eşitsizlik f için de doğru olmuş olur. Bu durumda i) de ispatlandığı gibi eşitsizlik herhangi bir x_i için doğru olduğundan $f = \{x_i, x_j\}$ olma durumu için de doğrudur. Benzer düşünce ise eşitsizlik $f = \{\{x_i, x_j\}, x_k\}$ olma durumu için de sağlanır. Bu yöntemle braket çarpımlarından oluşan ve $pdegf = 1$ olan tüm f değerleri için eşitsizlik sağlanır.

ii) $pdegf = 2$ olsun. O halde $f = a.b$ olur öyle ki $pdega = 1$ ve $pdegb = 1$ olup

$$D(f) = D(a).b + a.D(b) \tag{4.148}$$

dir. Önerme a ve b için doğru ise f için de doğrudur. Yani

$$pdeg_x D(a) \leq pdeg_x D + pdeg_x a \tag{4.149}$$

ve

$$pdeg_x D(b) \leq pdeg_x D + pdeg_x b \tag{4.150}$$

ise

$$pdeg_x D(f) \leq pdeg_x D + pdeg_x f \tag{4.151}$$

olur. Ayrıca

$$pdeg_x D(f) = \max\{pdeg_x D(a).\, b, pdeg_x a.\, D(b)\} \tag{4.152}$$

dır. Kabul edelim ki $pdeg_x D(a).\, b > pdeg_x a.\, D(b)$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} pdeg_x D(f) &= pdeg_x D(a).\, b = pdeg_x D(a) + pdeg_x b \\ &\leq pdeg_x D + pdeg_x a + pdeg_x b \leq pdeg_x D + pdeg_x f \end{aligned} \tag{4.153}$$

olur. Diğer taraftan

$$pdeg_x a.\, D(b) > pdeg_x D(a).\, b \tag{4.154}$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} pdeg_x D(f) &= pdeg_x a.\, D(b) = pdeg_x a + pdeg_x D(b) \\ &\leq pdeg_x D + pdeg_x b + pdeg_x a \\ &\leq pdeg_x D + pdeg_x f \end{aligned} \tag{4.155}$$

olur. i den a ve b için doğru olduğu ispatlanmıştı. O halde $f = a.\, b$ için de doğrudur. Böylece $pdegf$ üzerinde tümevarım yöntemiyle eşitsizliğin sağlandığı ispatlandı. Şimdi önermenin ikinci kısmını ispatlayalım. Yani eşitlik olma durumunda

$$l_x\big(D(f)\big) = l_x(D)(l_x(f)) \tag{4.156}$$

olduğunu gösterelim. Bunun için $pdeg_x(f_n) = 0$ ve $u \in L(x)$ olmak üzere $f = x^n f_n$ ve $d = x^m u \frac{\partial}{\partial x_i}$ olsun. Yani $pdeg_x f = n$ ve $pdeg_x D = m$ olsun. Bu durumda eşitlik gereği $pdeg_x D(f) = m + n$ olmalıdır.

$$D(f) = x^n D(f_n) + n x^{n-1} f_n D(x) \tag{4.157}$$

olduğundan, burada x^{n+m} yi içeren tek terim $x^n D(f_n)$ olabilir. Bu durumda $D_m = u \frac{\partial}{\partial x_i}$ iken $l_x\big(D(f_n)\big) = x^m D_m(f_n)$ olduğunu göstermeliyiz. Bunu gösterirken önermenin ilk kısmında indirgeme ile yaptığımız $pdegf_n = 1$ ve $degf_n = 1$ olma durumlarına göre inceleyeceğiz. Kabul edelim ki $degf_n = 1$ olsun. O halde $f_n = x_j$ olup $D(f_n) = x^m u \frac{\partial}{\partial x_i} x_j$ olur. Bu durumda $i = j$ ise $u \in L(x)$ için

$$D(f_n) = x^m u = x^m D_m(f_n) \tag{4.158}$$

olup,

$$l_x\big(D(f_n)\big) = x^m D_m(f_n) \tag{4.159}$$

dir. $i \neq j$ ise

$$D(f_n) = 0 = x^m . 0 = x^m D_m(f_n) \tag{4.160}$$

olup aşikardır. $pdegf_n = 1$ olsun. O halde $f_n = \{u, v\}$ alalım.

$$\begin{aligned} D(f_n) = D(\{u,v\}) &= \{D(u), v\} + \{u, D(v)\} = \left\{x^m u \frac{\partial}{\partial x_i} u, v\right\} + \left\{u, x^m u \frac{\partial}{\partial x_i}\right\} \\ &= x^m \left(\left\{u \frac{\partial}{\partial x_i} u, v\right\} + \left\{u, u \frac{\partial}{\partial x_i}\right\}\right) = x^m (\{D_m(u), v\} + \{u, D_m\}) \\ &= x^m D_m\{u, v\} \end{aligned} \tag{4.161}$$

olup,

$$l_x\big(D(f_n)\big) = x^m D_m(f_n) \tag{4.162}$$

dir.

Lemma 4.3.5.1. D, P nin bir derivasyonu olsun ve x, $S(D)$ nin minimal elemanı olsun. Eğer D lokal nilpotent ise $l_x(D)$ de lokal nilpotenttir.

İspat: D lokal nilpotent fakat $l_x(D)$ lokal nilpotent olmasın. O halde bir x_i elemanı vardır öyle ki $\forall\, k \geq 0$ için $l_x(D)^k(x_i) \neq 0$ dır. $l_x(D)(x_i) = a$ olsun. Bu durumda $D = D_0 + xD_1 + \cdots + x^m D_m$ için $l_x(D) = D_m$ olup $a = D_m(x_i)$ dir. O halde $x \notin S(D_m)$ olduğundan $x \notin S(a)$ olup $l_x(a) = a$ dır ($a = a.x^0$ gibi düşünülebilir).

$$l_x(D)\big(l_x(a)\big) = l_x(D)(a) \neq 0 \tag{4.163}$$

olduğundan Önerme 4.3.5.2 gereği

$$l_x\big(D(a)\big) = l_x(D).l_x(a) = l_x\big(D(a)\big) \tag{4.164}$$

dır. Şimdi tümevarım yöntemiyle

$$l_x\Big(D^k(a)\Big) = l_x(D)^k(a) \tag{4.165}$$

eşitliğinin doğruluğunu gösterelim. $k = 1$ durumu yukarıda ispatlandı. $k - 1$ için bu eşitlik doğru olsun. Yani

$$l_x(D^{k-1}(a)) = l_x(D)^{k-1}(a) \tag{4.166}$$

olsun. O halde

$$\begin{aligned} l_x\Big(D^k(a)\Big) = l_x(D)\Big(l_x\Big(D^{k-1}(a)\Big)\Big) &= l_x(D).\Big(l_x(D)^{k-1}(a)\Big) \\ &= l_x(D)^k(a) \end{aligned} \tag{4.167}$$

olur. $l_x(D)^k(a) \neq 0$ olduğu biliniyor. Bu durumda $l_x(D^k(a)) \neq 0$ olup D nin lokal nilpotent olmasıyla çelişir.

Önerme 4.3.5.3. $x \notin S(D_i)$ ve $0 \leq i \leq m-1$ olmak üzere D, P nin aşağıdaki formda bir derivasyonu olsun.

$$D = D_0 + xD_1 + \cdots + x^{m-1}D_{m-1} + x^m \frac{\partial}{\partial x_1} \tag{4.168}$$

Burada x, $S(D)$ nin minimal elemanıdır. $x_1 \notin S(f)$ olacak şekilde f, P nin bir elemanı olsun. O halde

$$pdeg_x D(f) \leq m - 1 + pdeg_x f \tag{4.169}$$

tir. Bu eşitsizliğin eşitlik olabilmesi için gerek ve yeter koşul $D' = D_{m-1} + mx\frac{\partial}{\partial x_1}$ iken $D'\big(l_x(f)\big) \neq 0$ olmasıdır. Bu durumda

$$l_x\big(D(f)\big) = D'\big(l_x(f)\big) \tag{4.170}$$

olur.

İspat: $D^* = D_0 + xD_1 + \cdots + x^{m-1}D_{m-1}$ olsun. Bu durumda $pdeg_x(D^*) \leq m-1$ ve $D = D^* + x^m \frac{\partial}{\partial x_1}$ olur. Önerme 4.3.5.2 nin ispatında kullanılan adımları burada da gözönünde bulundurduğumuzda

$$pdeg_x\left(x^m \frac{\partial}{\partial x_1}(f)\right) \leq m - 1 + pdeg_x f \tag{4.171}$$

olup $\frac{\partial}{\partial x_1}(l_x(f)) \neq 0$ ise

$$l_x\left(x^m \frac{\partial}{\partial x_i}(f)\right) = m.\, l_x\left(x \frac{\partial}{\partial x_1}(f)\right) \tag{4.172}$$

olduğu görülür.

Lemma 4.3.5.2. $x \notin S(D_i)$ ve $0 \leq i \leq m-1$ olmak üzere D, P nin aşağıdaki formda bir lokal nilpotent derivasyonu olsun.

$$D = D_0 + xD_1 + \cdots + x^{m-1}D_{m-1} + x^m \frac{\partial}{\partial x_1} \tag{4.173}$$

Burada x, $S(D)$ nin minimal elemanıdır. Eğer $x \neq x_1$ ise o halde $D_{m-1} + mx\frac{\partial}{\partial x_1}$ de lokal nilpotenttir.

İspat: Kabul edelim ki $D' = D_{m-1} + mx\frac{\partial}{\partial x_1}$ lokal nilpotent olmasın. O halde her $k \geq 0$ için $D'^k(x_i) \neq 0$ olacak şekilde bir x_i elemanı vardır. $D'^2(x_i) = a$ olsun. Bu durumda $x_1, x \notin S(a)$ olup $l_x(a) = a$ dır. Şimdi tümevarım yöntemini kullanarak

$$l_x\left(D^k(a)\right) = D'^k(a) \tag{4.174}$$

olduğunu gösterelim. Bunun için Önerme 4.3.5.3 ü kullanacağız.
$k = 1$ için; $l_x\big(D(a)\big) = D'\big(l_x(a)\big) = D'(a)$ olup eşitlik sağlanır.
$k-1$ için eşitlik doğru olsun. Yani

$$l_x\left(D^{k-1}(a)\right) = D'^{k-1}(a) \tag{4.175}$$

olsun. Bu durumda eşitliğin bir k sayısı için sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned} l_x\left(D^k(a)\right) &= l_x\left(D.\left(D^{k-1}(a)\right)\right) = D'\left(l_x\left(D^{k-1}(a)\right)\right) \\ &= D'\left(D'^{k-1}(a)\right) = D'^k(a) \end{aligned} \tag{4.176}$$

olup $D'^{k}(a) \neq 0$ olduğundan $l_x\left(D^k(a)\right) \neq 0$ dır. Bu da D nin lokal nilpotent olmasıyla çelişir.

Lemma 4.3.5.3. $P = k\{x_1, x_2\}$ olmak üzere D, P nin sıfırdan farklı bir lokal nilpotent multihomojen derivasyonu olsun ve $mdeg(D) = (m_1, m_2)$ olsun. O zaman ya $m_1 = -1$ dir ya da $m_2 = -1$ dir.

İspat: Varsayalım ki D lemmaya karşıt örnek olsun. Önerme 4.3.5.1 den ayrıca varsayabiliriz ki $D, p-$homojendir. $x, S(D)$ nin minimal elemanı olsun. Lemma 4.3.5.1 den $l_x(D)$ lokal nilpotenttir. $mdegl_x(D) = (n_1, n_2)$ diyelim. $degl_x(D) < degD$ olduğundan, n_1 ve n_2 nin her ikisi de negatif değilken $degD$ nin minimal oluşuyla çelişki olur. Bu yüzden n_1 ya da n_2 den biri -1 olmalı. Genelliği bozmadan varsayalım ki $n_1 = -1$ olsun. O halde $P = k\{x_1, x_2\}$ için $b = e_1, e_2, \dots, e_m, \dots$ bazının x_2 dışındaki bütün elemanları x_1 e göre pozitif dereceli olmak üzere $0 \neq \alpha \in k$ için

$$l_x(D) = \alpha {x_2}^{n_2} \frac{\partial}{\partial x_1} \tag{4.177}$$

dir. Eğer $x = x_1$ ise $n_2 = m_2$ dir ve $D, {x_1}^{m_1+1} l_x(D) = \alpha {x_1}^{m_1+1} {x_2}^{m_2} \frac{\partial}{\partial x_1}$ şeklinde bir terim içerir. Bu durumda $\beta \in k$ için

$$D = \alpha {x_1}^{m_1+1} {x_2}^{m_2} \frac{\partial}{\partial x_1} + \beta {x_1}^{m_1} {x_2}^{m_2+1} \frac{\partial}{\partial x_2} \tag{4.178}$$

dir. Aslında f_1 ve f_2 multihomojen ve $p - deg$ homojen ve

$$mdegf_1 = (m_1 + 1, m_2),\ mdegf_2 = (m_1, m_2 + 1) \tag{4.179}$$

için

$$D = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \tag{4.180}$$

olur. Dolayısıyla

$$degf_1 = degf_2 = m_1 + m_2 + 1 \tag{4.181}$$

dir. Ayrıca

$$pdegf_1 = pdegf_2 = m_1 + m_2 + 1 \tag{4.182}$$

dir. $e_i > x_2$ için $dege_i > pdege_i$ olduğundan bunu sağlayan $u = e_{i_1}.e_{i_2} \dots e_{i_k}$ nın elemanları sadece ${x_1}^{m_1+1}{x_2}^{m_2}$ ve ${x_1}^{m_1}{x_2}^{m_2+1}$ dir. Bu yüzden D, bir D' derivasyonuna kısıtlanabilir. Fakat $D' \neq 0$ ve $m_1 \geq 0, m_2 \geq 0$ ise Önerme 4.2.2.4 ten D', lokal nilpotent bir derivasyon olamaz.

$x \neq x_1$ olsun. Eğer $x = x_2$ ise $l_x(D) = \alpha \frac{\partial}{\partial x_1}$ dir ve $D, \alpha {x_2}^{m_2} \frac{\partial}{\partial x_1}$ şeklinde bir terim içerir. D, multihomojen olduğundan varsayımımızın aksine $m_1 = -1$ dir.

O zaman $x > x_2$ dir ve $x, S(D)$ nin minimal elemanı olduğundan x_2 nin $l_x(D)$ de kuvveti 0 dan farklı olamaz. O halde $l_x(D) = \alpha \frac{\partial}{\partial x_1}$ dir. Varsayabiliriz ki $\alpha = 1$ olsun ve D,

$$D = D_0 + xD_1 + \cdots + x^{m-1}D_{m-1} + x^m \frac{\partial}{\partial x_1} \tag{4.183}$$

formunda bir derivasyon olsun. Dolayısıyla Lemma 4.3.5.2 den

$$D' = D_{m-1} + mx \frac{\partial}{\partial x_1} \tag{4.184}$$

sıfırdan farklı bir lokal nilpotent derivasyondur. D' multihomojen ve $p-$homojen olduğundan $m \neq 0,\ \alpha_i, \beta_i \in k,\ y_i, z_i \in b,$

$$mdegy_i = (m_1 + 1, m_2),\ mdeg(z_i) = (m_1, m_2 + 1) \tag{4.185}$$

ve $y_i > x,\ z_i > x$ için

$$D' = mx\frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_i \alpha_i y_i \frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_i \beta_i z_i \frac{\partial}{\partial x_2} \quad (4.186)$$

dir. Dolayısıyla D', x_1, x_2 tarafından üretilen g serbest Lie cebirinin D'' derivasyonuna kısıtlanabilir ve D'', g nin nir lokal nilpotent derivasyonudur. Dolayısıyla $expD'', g$ nin bir φ otomorfizmini verir (Essen, 2000) ve $S(f_1) \subset R(x)$ için

$$\varphi(x_1) = x_1 + D''(x_1) + \frac{1}{2!}D''^2(x_1) + \cdots = x_1 + mx + f_1 \quad (4.187)$$

dir. Fakat g nin herhangi bir ϕ otomorfizmi için $\phi(x_1) = \alpha x_1 + \beta x_2$ olduğundan bu imkansızdır. (Cohn, 1964)

Teorem 4.3.5.1. $D, P = k\{x_1, x_2\}$ nin lokal nilpotent bir derivasyonu olsun. O halde P nin bir φ tame otomorfizmi vardır ve $f(x_2) \in k[x_2]$ için $\varphi^{-1}D\varphi = f(x_2)\frac{\partial}{\partial x_1}$ dir.

İspat: $\{x_1, x_2\}$ tarafından üretilen P nin Poisson idealini I ile gösterelim.

$$D(\{x_1, x_2\}) = \{D(x_1), x_2\} + \{x_1, D(x_2)\} \in I \quad (4.188)$$

olduğundan $D(I) \subseteq I$ dir. Bu yüzden $D,\ P/I \cong k[x_1, x_2]$ üzerinde lokal nilpotent bir D' derivasyonuna neden olur. Rentschler Teoreminden (Rentschler, 1968) $k[x_1, x_2]$ nin bir ψ tame otomorfizmi vardır ve $f(x_2) \in k[x_2]$ dir öyle ki

$$\psi^{-1}D'\psi = f(x_2)\frac{\partial}{\partial x_1} \quad (4.189)$$

dir. Biliyoruz ki $k[x_1, x_2]$ nin her elementer otomorfizmi sadece P nin bir elementer otomorfizmine genişler. Bu yüzden $k[x_1, x_2]$ nin herhangi bir tame otomorfizmi P nin bir tame otomorfizmine genişletilebilir. ψ nin bir P ye tame genişlemesini φ ile gösterelim. D yerine $\varphi^{-1}D\varphi$ yazarak $D' = f(x_2)\frac{\partial}{\partial x_1}$ varsayabiliriz. Dolayısıyla $a, b \in I$ için

$$D = (f(x_2) + a)\frac{\partial}{\partial x_1} + b\frac{\partial}{\partial x_2} \tag{4.190}$$

dir. Göstermek istiyoruz ki $a = b = 0$ dır. Aksini kabul edelim. $degx_1$ i düşünelim ve D nin en yüksek homojen kısmını D'' ile gösterelim. $c, d \in I$ için ve c veya d sıfırdan farklı iken

$$D'' = c\frac{\partial}{\partial x_1} + d\frac{\partial}{\partial x_2} \tag{4.191}$$

dir. Önerme 4.3.5.1 den D'' derivasyonu lokal nilpotenttir. Lemma 4.3.5.3 ten $c = d = 0$ dır ki bu çelişkidir. D'' lokal nilpotent olamaz.

Teorem 4.3.5.2. Karakteristiği sıfır olan bir cisim üzerinde iki değişkenli serbest Poisson cebirlerinin otomorfizmleri tamedir.

İspat: θ, $P = k\{x_1, x_2\}$ nin keyfi bir otomorfizmi olsun. Yukarıdaki gibi $\{x_1, x_2\}$ elemanları tarafından üretilen P Poisson idealini I ile gösterelim. $\theta(\{x_1, x_2\}) = \{\theta x_1, \theta x_2\} \in I$ olduğundan $\theta, k[x_1, x_2]$ nin bir ψ otomorfizmine neden olur. Jung un Teoreminden(1942) ψ tame dönüşümüdür. ψ den P ye tame genişlemesini φ ile gösterelim. O halde $\varphi|_{k[x_1, x_2]} = \psi$ dir. θ yerine $\theta' = \theta\varphi^{-1}$ yazalım. O halde θ ve θ' nün her ikisi de ya tam dönüşümdür ya da wild dönüşümdür ve θ', $k[x_1, x_2]$ nin birim otomorfizmini üretir. Dolayısıyla $a, b \in I$ için

$$\theta(x_1) = x_1 + a,\ \theta(x_2) = x_2 + b \tag{4.192}$$

dır. $x_1 + a,\ x_2 + b$ elemanları P nin serbest üreteçleri olduğundan P üzerindeki bir derivasyonu, $x_1 + a$ ve $x_2 + b$ yi P nin keyfi elemanlarına eşleştirecek şekilde tanımlayabiliriz. $h \in k[x]$ iken $D_h(x_1 + a) = h(x_2 + b),\ D_h(x_2 + b) = 0$ olarak tanımlanan P nin bir derivasyonunu D_h ile gösterelim. Bu derivasyon lokal nilpotenttir.

$c = \big(h(x_2 + b) - h(x_2)\big) - D_h(a)$ için

$$D_h(x_1) = h(x_2 + b) - D_h(a) = h(x_2) + c \tag{4.193}$$

ve

$$D_h(x_2) = -D_h(b) = d \tag{4.194}$$

dir. I ideali her derivasyon altında sabittir. Dolayısıyla $c \in I$ ve $d \in I$ dır. $c, d \in I$ iken

$$D_h = (h(x_2) + c)\frac{\partial}{\partial x_1} + d\frac{\partial}{\partial x_2} \tag{4.195}$$

dir. Teorem 4.3.5.1 in ispatında D_h lokal nilpotent ise $c = d = 0$ olduğu gösterilmişti. Bundan dolayı

$$D_h(a) = h(x_2 + b) - h(x_2) \tag{4.196}$$

ve

$$D_h = h(x_2)\frac{\partial}{\partial x_1} \tag{4.197}$$

dir. Eğer $h, n.$ dereceden bir polinom ise o halde $degD_h = n - 1$ dir ve Lemma 4.3.5.1 den her $f \in P$ için

$$degD(f) \leq degf + n - 1 \tag{4.198}$$

dir. $h = x$ olsun. O zaman $D_h(a) = b$ dir. Dolayısıyla $degb \leq dega$ dır. Eğer D_h nın tanımında x_1 ve x_2 yi değiştirirsek $dega \leq degb$ elde ederiz.

$a = b = 0$ olduğunu gösterelim. Varsayalım ki durum böyle değil. O zaman $dega = degb$ olduğundan $a \neq 0$ ve $b \neq 0$ dır. $a, b \in I$ olduğundan $dega = degb \geq 2$ dir.

Şimdi $h = x^2$ diyelim. O halde $D_h(a) = 2x_2b + b^2$ ve $\deg(2x_2b + b^2) \leq dega + 1$ dir. Dolayısıyla $degb \geq 2$ ve $degx_2 = 1$ olduğundan $dega + 1 \geq 2degb$ dir. O halde

$$dega + 1 \geq 2dega \text{ ve } dega \leq 1 \tag{4.199}$$

dir. Bu bir çelişkidir. O halde $a = 0$ ve $b = 0$ dır.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışmada polinom halkalarının otomorfizmleri ve derivasyonları detaylı bir şekilde çalışılmıştır. Ayrıca bu otomorfizmlerin tame olup olmadığı bu otomorfizmlerin derivasyonları yardımıyla incelenmiştir. Bundan hareketle bir polinom halkası yapısını taşıdıklarından iki değişkene bağlı serbest Poisson cebirleri ve otomorfizmleri incelenmiş ve bu cebirlerin otomorfizmlerinin tame olduğu sonucu üzerine çalışılmıştır. Poisson cebirleri, serbest asosyatif ve serbest Lie cebirleri ile yakından ilgili olmasına ragmen çok çalışılan bir konu olmamıştır. Özellikle bu cebirler ile ilgili Türkçe kaynak çok azdır. Bu yüzden bu çalışmada, cebirlerin yapıları hakkında önemli bilgiler veren otomorfizmler konusu çalışılırken az bilinen bir cebir yapısı olan Poisson cebirleri tanıtılmış ve otomorfizmleri detaylı bir şekilde incelenmiş oldu.

Bu çalışmada iki değişkene bağlı polinom halkaları ve serbest Poisson cebirlerinin otomorfizmleri incelenmiştir. Bu çalışmadan hareketle daha fazla değişkene bağlı cebirlerin otomorfizmleri ve derivasyonu çalışılabilir ve dolayısıyla iki değişkene bağlı olan bu sonuçlar daha çok değişkene bağlı cebir yapılarına genelleştirilebilir.

KAYNAKLAR

ASAR, A. O., ARIKAN, A., ve ARIKAN, A., 2012. Cebir. Gazi Kitabevi, Ankara, 381s.

COHN, P. M., 1985. Free Rings and Their Relations (Second Edition ed.). Academic Press, London, 588p.

COHN, P. M., 1964. Subalgebras of free associative algebras. Proceedings of the London Mathematical Society, 3(14):618-632.

CZERNIAKIEWICZ, A. J., 1971. Automorphisms of a Free Associative Algebra of rank 2. Bulletin of the American Mathematical Society, 77(6):992-994.

DAIGLE, D., 2003. Locally nilpotent derivations. Lecture notes for the "September School" of Algebraic Geometry. Lukecin, 48p.

DUMMIT, D. S., and FOOTE, R. M., 2004. Abstract Algebra (Third edition ed.). John Wiley&Sons, Inc., New York, 932p.

ESSEN, A. V., 2000. Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture. Birkhäuser, Basel, 329p.

FREUDENBURG, G., 2006. Algebraic Theory of Locally Nilpotent Derivations. Springer-Verlag, Berlin, 261p.

HUNGERFORD, T. W., 1974. Algebra. Springer-Verlag, New York Inc., 502p.

JUNG, H. W., 1942. Über ganze birationale Transformationen der Ebene. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1942(184):161-174.

KAPLANSKY, I., 1972. Fields and Rings (Second Edition ed.). The University of Chicago Press., Chicago and London, 206p.

KARAKAŞ, H. İ., 2012. Cebir Dersleri. Türkiye Bilimler Akademisi, Ankara, 464s.

KULK, W. V., 1953. On polynomial rings in two variables. Nieuw Archief voor Wiskunde, 3(1):33-41.

LANG, S., 2002. Algebra (Revised Third Edition ed., Vol. 211). Springer-Verlag New York Inc., New York, 914p.

MAGNUS, W., KARRASS, A., and SOLITAR, D., 1966. Combinatorial Group Theory. Interscience Publishers, New York, 444p.

MAKAR-LIMANOV, L., 1970. The automorphisms of the free algebra with two generators. Funktsional. Anal. i Prilozhen, 4(3):107-108.

MAKAR-LIMANOV, L., TURUSBEKOVA, U., and UMIRBAEV, U., 2009. Automorphisms and derivations of free Poisson algebras in two variables. Journal of Algebra, 322(9):3318-3330.

NAGATA, M., 1972. On the Automorphism group of k[x,y]. Kinokuniya Book-Store Co., Ltd., Tokyo, 53p.

RENTSCHLER, R., 1968. Opérations du groupe additif sur le plane affine. C.R. Acad. Sci, 1968(267):384-387.

REUTENAUER, C., 1993. Free Lie Algebras. Clarendon Press, Oxford, 269p.

SHESTAKOV, I. P., 1993. Quantization of Poisson superalgebras and speciality of Jordan Poisson superalgebras. Algebra and Logic , 32(5):309-317.

SHESTAKOV, I. P., and UMIRBAEV, U. U., 2004. Tame and wild automorphisms of rings of polynomials in three variables. American Mathematical Society, 2004(17):197-227.

SHESTAKOV, I. P., and UMIRBAEV, U. U., 2003. The Nagata automorphisms is wild. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 100(22):12561-12563.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:** İbrahim Halil COŞKUN
Uyruğu	**:** T.C
Doğum Yeri ve Tarihi	**:** Şanlıurfa, 29.10.1991
Telefon	**:** 0 507 977 66 45
e-mail	**:** ibrhmcskn19@gmail.com

EĞİTİM

Derece	**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:Mehmet Güneş Anadolu Öğretmen Lisesi, ŞANLIURFA	2009
Üniversite	:Uludağ Üniversitesi, Nilüfer, BURSA	2014

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2018-halen	Özel İlgi Okulları	Matematik Öğretmeni