İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN ANALİZİ İÇİN ANALİTİK ÇÖZÜMLE SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Uğurcan EROĞLU

Makina Mühendisliği Anabilim Dalı

Katı Cisimlerin Mekaniği Programı

MAYIS 2014

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN ANALİZİ İÇİN ANALİTİK ÇÖZÜMLE SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Uğurcan EROĞLU
(503121514)

Makina Mühendisliği Anabilim Dalı

Katı Cisimlerin Mekaniği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ

MAYIS 2014

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 503121514 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Uğurcan EROĞLU**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı **"EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN ANALİZİ İÇİN ANALİTİK ÇÖZÜMLE SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU"** başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı :	**Prof. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ** İstanbul Teknik Üniversitesi	.....
Jüri Üyeleri :	**Y. Doç. Dr. Oğuz ALTAY** İstanbul Teknik Üniversitesi	.....
	Prof. Dr. Uğur GÜVEN Yıldız Teknik Üniversitesi	.....

Teslim Tarihi : **30 Nisan 2014**
Savunma Tarihi : **26 Mayıs 2014**

ÖNSÖZ

Çalışmanın konusunu oluşturan eğri eksenli çubuklar, mühendisliğin pek çok alanında yapı elemanı olarak kullanılmaktadırlar. Bu çalışmada, eğri eksenli çubuklara ait statik ve dinamik denklemlerin kesin çözümleri verilmekte; bu çözüm yöntemlerinden yola çıkılarak, eğri eksenli çubukların hem statik hem de dinamik davranışlarına uygulanabilecek farklı çözüm yöntemlerinin oluşturulması amaçlanmaktadır.

Çalışma sırasında değerli tecrübesi ve bilgisi ile her aşamada bana yol gösteren saygıdeğer hocam Prof. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ' ye ve Araş. Gör. Serhan Aydın AYA' ya teşekkür ederim.

Mayıs 2014

Uğurcan Eroğlu
(Makina Mühendisi)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ ..... **v**
İÇİNDEKİLER ..... **vii**
SEMBOL LİSTESİ ..... **ix**
ÇİZELGE LİSTESİ ..... **xi**
ŞEKİL LİSTESİ ..... **xiii**
ÖZET ..... **xv**
SUMMARY ..... **xvii**
1. GİRİŞ **1**
1.1 Çalışmanın Amacı **2**
2. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLAR ÜZERİNE YAPILAN ÇALIŞMALAR **5**
2.1 Eğri Eksenli Çubukların Statiği Üzerine Yapılan Çalışmalar 5
2.2 Eğri Eksenli Çubukların Dinamiği Üzerine Yapılan Çalışmalar 10
3. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN GENEL DENKLEMLERİ **17**
3.1 Çubuk Statiğinin Genel Denklemleri 17
3.1.2 Denge denklemleri 22
3.1.3 Bünye denklemleri 22
4. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN STATİK PROBLEMLERİNİN KESİN ÇÖZÜMÜ **29**
4.1 Düzlem İçi Statik Problemlerin Başlangıç Değerleri Yöntemi ile Çözümü 29
4.2 Düzlem Dışı Statik Problemlerin Başlangıç Değerleri Yöntemi ile Çözümü 36
5. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN STATİK PROBLEMLERİNİN ANALİTİK ÇÖZÜMÜNÜN SONLU ELEMAN YÖNTEMİNE UYARLANMASI **43**
5.1 Sonlu Eleman Formülasyonu 43
5.1.1 Rijitlik matrisi 43
5.1.2 Yük vektörü 47
5.1.3 Kütle matrisi 48
6. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN STATİK PROBLEMLERİNİN SONLU ELEMAN YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ **51**
6.1 Düzlem İçi Statik Problemler 51
6.1.1 Ankastre-serbest sınır şartlarında, serbest ucunda normal yönde kuvvet taşıyan çember eksenli çubuk 51
6.1.2 Ankastre-kayar ankastre sınır şartlarında, ucunda normal yönde kuvvet taşıyan çember eksenli çubuk 52
6.1.3 Orta noktasından etkiyen yükü taşıyan sabit kesitli çember eksenli simetrik çubuk 53
6.1.4 Ankastre-serbest sınır şartlarındaki neredeyse düz çubuk 56
6.1.5 Ankastre-serbest sınır şartlarında değişken kesitli çubuk 56
6.1.6 Serbest ucuna normal yönde tekil kuvvet etkiyen spiral eksenli sabit kesitli ankastre serbest çubuk 58

6.2 Düzlem Dışı Statik Problemler 62
6.2.1 Orta noktasından etkiyen tekil binormal kuvveti taşıyan iki ucundan ankastre mesnetli çember eksenli çubuk 62
6.2.2 Bir ucundan ankastre, serbest ucundan tekil binormal yük taşıyan sabit kesitli çember eksenli çubuk 63
6.2.3 İki ucundan ankastre mesnetli ve düzgün yayılı yük etkisindeki sabit kesitli çember eksenli çubuk 64
6.2.4 Bir ucundan ankastre, serbest ucunda tekil kuvvet ve tekil moment taşıyan dairesel değişken kesitli çember eksenli çubuk 65
6.2.5 Serbest ucuna binormal yönde tekil kuvvet etkiyen spiral eksenli sabit kesitli ankastre serbest çubuk 67
7. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN TİTREŞİM PROBLEMLERİNİN SONLU ELEMAN YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ 71
7.1 Düzlem İçi Titreşim Problemleri 71
7.1.1 Sabit kesitli çember eksenli çubuk 71
7.1.2. Değişken kesitli ve değişken eğrilikli çubuklar 73
7.2 Düzlem Dışı Titreşim Problemleri 80
7.2.1 Sabit kesitli çember eksenli çubuk 80
7.2.2 Değişken kesitli ve değişken eğrilikli çubuklar 80
8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 85
KAYNAKLAR 87
ÖZGEÇMİŞ 93

SEMBOL LİSTESİ

A	: Diferansiyel denklem takımının katsayılar matrisi
A	: Çubuğun dik kesit alanı
b	: Çubuk kesitinin derinliği
c	: Boyutsuz frekans
C	: Kayma rijitliği matrisi
D	: Eğilme rijitliği matrisi
E	: Elastiklik modülü
$F_n,\ F_b,\ F_t$	: Kesite ait iç kuvvet bileşenleri
G	: Kayma modülü
h	: Çubuk kesitinin genişliği
I_n , I_b	: Çubuk eğrisinin normal ve binormal eksenlerine göre kesitin eylemsizlik momentleri
I_p	: Polar eylemsizlik momenti
i	: Jiroskobik yarıçap
J	: Çubuk kesitinin burulma rijitliği
K	: Rijiitlik matrisi
k_n, k_b	: Kayma gerilmesinin kesite üniform yayılmadığını gösteren sabitler
M	: Kütle matrisi
M_n, M_b, M_t	: Kesite ait iç moment bileşenleri
m_n, m_b, m_t	: Çubuğa etkiyen yayılı dış moment bileşenleri
n, b, t	: Normal, binormal ve teğetsel koordinatları belirten indisler
q_n, q_b, q_t	: Çubuğa etkiyen yayılı dış kuvvet bileşenleri
$\mathbf{r_o}$, **r**	: Şekil değiştirmiş ve değiştirmemiş çubuğa ait konum vektörleri
R	: Eğrilik yarıçapı
s	: Yay uzunluğu
T	: Kinetik enerji
u	: Yerdeğiştirme vektörü
u, v, w	: Yer değiştirme bileşenleri
X	: Yerdeğiştirme vektörü
Y	: Asal matris
y	: Diferansiyel denklem takımının değişkenler vektörü
$\mathbf{y_o}$	: Başlangıç değerleri vektörü
α	: Spiral geometride kesit değişimini belirleyen sabit katsayı

μ	: Çubuğun birim boyunun kütlesi / spiral geometride sabit katsayı
η	: Kesit alanının değişim oranı
ρ	: Özgül kütle
λ	: Narinlik oranı
ω	: Açısal frekans
$\Omega_n, \Omega_b, \Omega_t$	: Kesite ait dönme açısının bileşenleri
ϕ	: Yay açıklığı, yay ölçüsü
ϕ_T	: Toplam kiriş açısı
ν	: Poisson oranı

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 3.1 : k_n, k_b sabitleri 24
Çizelge 6.1 : Ankastre-serbest çubuk için dış yük altında sonlu eleman ve analitik sonuçların karşılaştırılması 52
Çizelge 6.2 : Şekil 6.2' de verilen ankastre-kayıcı ankastre çubuğun kuvvet etkiyen ucundaki normal yer değiştirme değerlerinin karşılaştırılması 53
Çizelge 6.3 : 120°'lik çubuk için sonlu eleman ve analitik sonuçların karşılaştırılması 55
Çizelge 6.4 : Neredeyse düz çubuğun farklı yükleme koşullarında serbest ucunda meydana gelen çökme değeri (cm) 56
Çizelge 6.5 : Değişken kesitli çubuk için farklı yükleme koşullarındaki boyutsuz yer değiştirme ve dönme değerleri 58
Çizelge 6.6 : Spiral geometriye sahip çubuğa ait sonlu eleman ve analitik sonuçların karşılaştırılması ($\mu = 0.2$) 61
Çizelge 6.7 : İki ucu ankastre çubuk için sonuçların karşılaştırılması 63
Çizelge 6.8 : Ankastre-serbest çubuk için sonuçların karşılaştırılması 64
Çizelge 6.9 : Yayılı yüke maruz iki ucu ankastre çubuğun orta noktasındaki çökme ve dönme değerleri 65
Çizelge 6.10 : Değişken kesitli çubuk için sonuçların karşılaştırılması 67
Çizelge 6.11 : Spiral eksenli çubuk için sonuçların karşılaştırılması ($\mu = 0.4$) 69
Çizelge 7.1 : Ankastre-ankastre sınır şartlarındaki çubuğa ait boyutsuz doğal frekans değerleri 72
Çizelge 7.2 : Sabit-sabit sınır şartlarındaki çubuğa ait boyutsuz doğal frekans değerleri 73
Çizelge 7.3 : Sabit-sabit sınır şartlarındaki simetrik olmayan değişken kesitli çubuğa ait boyutsuz doğal frekans ($\phi_T{}^2 c$) değerleri (ϕ_T=90°) 75
Çizelge 7.4 : Farklı sınır şartları ve eksen açıklıklarına sahip simetrik değişken kesitli narin çubuğun ilk iki doğal frekansı 76
Çizelge 7.5 : Sabit-sabit sınır şartlarında değişken eğrilikli çubuğun boyutsuz doğal frekansları (μ=0.3, ε=0.5) 79
Çizelge 7.6 : Ankastre-ankastre sınır şartlarında değişken eğrilikli çubuğun boyutsuz doğal frekansları (μ=0.1, ε=0.5) 79
Çizelge 7.7 : Ankastre-ankastre mesnetlenmiş sabit kesitli çubuğun düzlem dışı hareketine ait boyutsuz doğal frekans değerleri 81
Çizelge 7.8 : Değişken kesitli çubuğun düzlem dışı hareketine ait doğal frekansları 82
Çizelge 7.9 : Değişken eğrilikli çubuğun düzlem dışı hareketine ait doğal frekansları 83

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 3.1 : Çubuğun şekil değiştirmeden önceki ve sonraki durumları 17
Şekil 3.2 : Çubuk elemanına etki eden dış yükler ve kesit tesirleri 22
Şekil 5.1 : Analitik çözümde kesit tesirleri için kullanılan pozitif yön kabulü ...45
Şekil 5.2 : Sonlu eleman yönteminde kesit tesirleri için kullanılan pozitif yön kabulü.....45
Şekil 6.1 : Serbest ucundan tekil kuvvet taşıyan ankastre-serbest çubuk ve kesiti 51
Şekil 6.2 : Serbest ucundan tekil kuvvet taşıyan ankastre-kayar ankastre çubuk.....52
Şekil 6.3 : Orta noktasından tekil yükler etkiyen sabit-sabit mesnetli çubuk.....54
Şekil 6.4 : Orta noktasından tekil yükler etkiyen ankastre-ankastre mesnetli çubuk.....54
Şekil 6.5 : Değişik yükleme koşullarındaki neredeyse düz çubuk. (a) Serbest uçta normal kuvvet. (b) üniform yayılı yük. (c) lineer yayılı yük 56
Şekil 6.6 : Değişken kesitli çember eksenli çubuk 57
Şekil 6.7 : Eleman sayısı ile yer değiştirmenin değişimi 57
Şekil 6.8 : Spiral eksenli çubuğa ait büyüklükler 59
Şekil 6.9 : Herhangi bir eğri eksenli çubuğa ait açısal büyüklükler 60
Şekil 6.10 : İki ucu ankastre mesnetli ve orta noktasından tekil binormal yük taşıyan çember eksenli çubuk 62
Şekil 6.11 : Bir ucu ankastre, serbest ucundan F tekil yükünü taşıyan çubuk ve kesiti.....63
Şekil 6.12 : İki ucundan ankastre mesnetli ve düzgün yayılı yük taşıyan çember eksenli çubuk 65
Şekil 6.13 : Bir ucundan ankastre bağlı serbest ucundan tekil kuvvet ve moment taşıyan değişken kesitli çubuk 66
Şekil 6.14 : Spiral eksenli çubuk 68
Şekil 7.1 : Sabit-sabit çubuğun beşinci doğal frekans değerinin eleman sayısı ile değişimi.....72
Şekil 7.2 : Lineer değişken kesitli çubuklar (a) simetrik, (b) asimetrik.....74
Şekil 7.3 : Değişken eğrilikli çubuğa ait büyüklükler 76
Şekil 7.4 : Simetrik değişken kesite sahip çubuğa ait büyüklükler 81

EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN ANALİZİ İÇİN KESİN ÇÖZÜM İLE SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU

ÖZET

Eğri eksenli çubuklar, günümüzde makina, inşaat, uçak gibi mühendislik alanlarında ve endüstri kollarında yapısal eleman olarak kullanılmaktadır. Kullanım alanı bu kadar geniş olan bu yapıların statik ve dinamik problemleri birçok araştırmacı tarafından incelenmekte ve doğru çözüm yöntemleri elde edilmeye çalışılmaktadır.

Bu çalışmada düzlemsel eğri eksenli çubukların düzlem içi ve düzlem dışı statik ve dinamik davranışları yeni bir sonlu eleman yöntemiyle incelenmiş ve sonuçlar hem literatürdeki sonuçlarla hem de sonlu eleman paket programlarından elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Çubuğun düzlem içi ve düzlem dışı statik davranışını temsil eden denklemler, eksenel uzama ve kayma deformasyonu etkilerini içermektedir. Hiçbir basitleştirici kabul yapmaksızın değişken kesitli ve değişken eğrilikli çubuğun statik denklemleri elde edilmiş ve bazı özel geometriler için çözüm yapılmıştır. Yapılan bu çözüm, her türlü mesnetleme şartında ve yükleme durumunda uygulanabilmektedir.

Birinci bölümde çubuk teorisi hakkında kısa bilgiler verilerek çalışmanın amacı ve kapsamı belirtilmiştir.

İkinci bölümde literatürde eğri eksenli çubuklar üzerine yapılan çalışmalar incelenerek çubuğun statik ve dinamik problemlerinin çözümünde kullanılan yöntemler hakkında bilgi verilmiştir. Yapılan çalışmaların çoğunda çubuk ekseninin boy değiştirmediği, şekil değiştirmeden önce çubuk eksenine dik olan çubuk kesidinin şekil değiştirmeden sonra da çubuk eksenine dik kaldığı; yani kesit boyunca kayma gerilmelerinin olmadığı, çubuk kesidinin dönmeye karşı direnç göstermediği kabullerinden biri veya birkaçı ile problem basitleştirilerek çözüme ulaşılmaya çalışılmıştır. Ancak bu durum, oluşturulan modelin gerçek çubuk davranışını yeterince iyi temsil edememesine neden olmaktadır. Ayrıca literatürdeki çalışmalarda, elde edilen denklemlerin çözümü için Ritz, Galerkin ve sonlu elemanlar gibi yaklaşık yöntemlerin kullanıldığı da görülmüştür.

Üçüncü bölümde eksen eğrisi herhangi bir düzlemsel eğri olan çubuğun kesiti de değişken kabul edilerek, çubuk statiğinin düzlem içi ve düzlem dışı genel denklemleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde eğri eksenli çubukların düzlem içi ve düzlem dışı statik problemlerinin kesin çözümü başlangıç değerleri yöntemi ile yapılmıştır. Sabit kesitli ve çember eksenli çubuk için asal matrisin ifadeleri elde edilmiştir.

Beşinci bölümde, bir önceki bölümde elde edilen çözüm kullanılarak bir sonlu eleman formülasyonu geliştirilmiştir. Sabit kesitli ve çember eksenli bir çubuk elemanının rijitlik, yük ve kütle matrisleri elde edilmiştir.

Altıncı bölümde, elde edilen sonlu eleman formülasyonu kullanılarak düzlemsel eğri eksenli çubukların düzlem içi ve düzlem dışı statik problemleri çözülmüştür. Literatürde yer alan farklı geometrilere ve yükleme koşullarına sahip çubuklara ait statik problemler çözülerek, yöntem doğrulanmıştır.

Yedinci bölümde, elde edilen sonlu eleman formülasyonu kullanlarak düzlemsel eğri eksenli çubukların serbest titreşim problemleri çözülmüştür. Literatürde yer alan çok sayıda örnek incelenmiştir. Değişken kesitli ve değişken eğrilikli çubuklara ait örnekler çözülmüştür.

Sekizinci bölümde, çalışmanın kapsamı kısaca ele alınmış ve elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

FINITE ELEMENT ANALYSIS OF CURVED BEAMS USING EXACT SOLUTION

SUMMARY

Many structures in different fields of engineering such as mechanical engineering, civil engineering and aerospace engineering contains curved beam elements. Since they are essential for the design of such structures, static and dynamic analysis been an important subject in mechanics.

In this study, a finite element approximation for static and free vibration problems of circular arches with continuously varying curvature and cross-section is presented. The governing differential equations of static problems of arches are solved exactly by using initial value method. The curvature and the cross-section of the arch are considered as variable. Also the cross-section of the beam is assumed to be doubly symmetric with respect to the axes describing the cross-section. With this assumption, it is possible to uncouple the in-plane and the- out-of-plane motion of a planar curved beam. The analytical expressions of the fundamental matrix are given for a circular arch with uniform cross-section. Using this fundamental matrix, a finite circular beam element formulation is obtained. The stiffness matrix and the load vector are obtained using force-displacement relatinos. To obtain the mass matrix, the kinetic energy equation including the rotatory inertias is used. Several examples are solved in order to validate the present method.

In the first chapter, a general view for curved beams and the aim of the present study are given in summary. It is indicated that despite there are several works concerning the analysis of curved beams, most of them consider circular beams having uniform cross-section. In lots of studies, some of the effects such as shear deformation, axial deformation and rotatory inertia are neglected in order to simplify the equations. These assumptions may be valid for only some special cases such as slender beams. Since the analysis of curved beams are much more complex than the straight beams, different solution methods are used such as differential quadrature method and finite element method in previous works. Finite element method is one of the most powerful tools in solid mechanics as it is easy to apply and accurate. The aim here is to develop a new finite element formulation free from numerical difficulties and requires less number of elements to obtain reliable results than conventional formulations. In order to do that, exact solution will be used instead of approximate functions to describe the motion of the curved beam.

In the second chapter, a detailed review for the studies in the literature on both static and dynamic problems is given. It is seen that the finite element method is a major tool dealing with the free vibration problems of curved beams. Most work has been done within the scope of Euler-Bernoulli beam theory. This theory is recognized as adequate for common engineering problems since the shear deformation can be neglected when the beam is slender. However, for arches having large cross-sectional dimensions in

comparison with their span length and for arches in which higher modes of vibration are required, the Timoshenko beam theory, which takes into account the rotatory inertia and the shear effects, gives a better approximation to the actual beam behavior. Only a few works have taken into account the axial extension, shear deformation and rotatory inertia effects. Moreover, it is observed that for the variation of the displacements and internal loads, some approximate functions are used in order to obtain a finite element solution. These approximate functions cannot describe the actual behaviour of a curved beam unless the elements used are small compared to the beam analysed. This requires usage of many elements to obtain relaible results. Also, numerical difficulties such as shear-locking are a major problem when using small curved beam elements. There are also many works in literature dealing with numerical integration problems of finite element method.

In the third chapter, the governing differential equations of a curved beam are given for the static problem. Frenet-Serret coordinate system is used in the formulation. The beam is represented by a space curve whose every point is coupled with a rigid orthonormal vector diad. The vectors are chosen to be perpendicular to the tangent vector of the space curve in the initial state and they represent the cross-section of the beam. In the deformed configuration, these directors still remain unit and perpendicular each other because of the assumption of a rigid cross-section. Assuming doubly-symmetric cross-section, the differential equation systems governing the in-plane and the out-of-plane motion of a planar curved beam is uncoupled to simplify the solution process.

In the fourth chapter, the governing differential equations of static problems of curved beams are solved exactly by using initial value method. The curvature and the cross-section of the arch are considered as variable. The solution does not depend on the loading and boundary conditions which allows us to examine the hyperstatic systems easily. The analytical expressions of the fundamental matrix are obtained for a circular beam having constant cross-section for both in-plane and out-of-plane motion. The displacement components and internal loads can be determined using the fundamental matrix and the initial values vector.

In the fifth chapter, the exact solution is adopted to the finite element method. A two-node six degree of freedom element is built by considering axial extension and shear deformation effects for both in-plane and out-of-plane motions. The stiffness matrix and consistent load vector is obtained from force-displacement relations using the fundamental matrix obtained before. Kinetic energy expression including the rotatory inertia is used to obtain the mass matrix. Using the stiffness and mass matrices given here, it is possible to obtain natural frequencies of a planar curved beam by solving an eigenvalue problem.

In the sixth chapter, static problems of the beams with variable curvature and cross section as well as circular beams having uniform cross section are investigated using the finite element formulation offered. The examples given in the literature are solved and the results are compared. Some problems are also examined using the exact solution method and finite element softwares. It is observed that the minimum number of elements required in order to obtain same results with the exact solution is the number of the regions in the problem in case of circular beams having uniform cross-section. Beams with variable cross-section and curvature are modelled as an assemblage of circular beams having uniform cross-section. It is indicated that the convergence is rapid. 80 elements are shown to be adequate to model a beam having

variable cross-section. In case of variable curvature, the required number of elements are down to 18 while finite element softwares require nearly 80 elements only to model the geometry.

The natural frequencies of curved beams for in-plane vibrations are investigated by means of finite element method in chapter seven. The natural frequencies are obtained by solving the eigenvalue problem. Some numerical examples in the literature are also solved and the results are given. Convergence of the natural frequencies with the number of elements used is examined. It is seen that using 100 elements is adequate in order to obtain the natural frequencies accurately. Beams having symmetricly and un-symmetricly varying cross-sections are examined. For beams having varying curvature, sinusoidal, elliptic and parabolic beams are considered. In all examples solved, a great accuarcy is achieved that shows the reliability of the present formulation.

In the eight chapter, the scope of the study is given with the results and discussions. A two noded finite element formulation is presented based on exact solution analytical method of curved beams. The formulation accounts axial extension, shear deformation and rotatory inertia effects. Arranging the matrix equations algebraically, the stiffness matrix and consistent load vector are derived exactly with respect to the Frenet coordinate system. Mass matrix is obtained using kinetic energy equation. Curved beams with several geometry and loading conditions are investigated. All the examples show that this method is quite efficient in static and dynamic analysis of curved beams. Using the formulation here, it is possible to extend the work for time-dependent problems including damping effects.

1. GİRİŞ

Dış kuvvetlerin etkisi altında şekil değiştiren cisimlerin davranışlarını elastisite teorisi inceler. Ancak bu inceleme sırasında ortaya çıkan karmaşık sınır değer problemleri nedeniyle, çok basit durumlar dışında elastisite teorisinin kullanılması neredeyse imkansızdır. Bu nedenle çoğunlukla, incelenen yapının boyutlarından, yükleme ve sınır koşullarından yola çıkılarak yapılan kabullerle denklemler basitleştirilmektedir. Bu sayede plak, kabuk, levha ve çubuk gibi mühendislik yapılarında sıklıkla kullanılan yapısal elemanların analizini yapmak mümkün olabilmektedir.

Boyutlarından biri, diğer ikisine göre çok büyük olan ve büyük boyuta ait eksenin yanı sıra buna dik eksenlerde de yük taşıyabilen cisimlere çubuk denir. Büyük boyuta ait eksene çubuk ekseni denir ve bu eksen en genel halde uzaysal bir eğridir. Çubuk eksenine dik eksenler çubuk kesidini tarif eder. Bu cisimler günümüzde makina, inşaat, uçak gibi mühendislik alanlarında ve endüstri kollarında yapısal eleman olarak kullanılmaktadır. Kullanım alanı bu kadar geniş olan bu yapıların statik ve dinamik problemleri birçok araştırmacı tarafından incelenmekte ve doğru çözüm yöntemleri elde edilmeye çalışılmaktadır. Yapılan çalışmaların çoğunda çubuk ekseninin boy değiştirmediği, şekil değiştirmeden önce çubuk eksenine dik olan çubuk kesidinin şekil değiştirmeden sonra da çubuk eksenine dik kaldığı; yani kesit boyunca kayma gerilmelerinin olmadığı, çubuk kesidinin dönmeye karşı direnç göstermediği kabullerinden biri veya birkaçı ile problem basitleştirilerek çözüme ulaşılmaya çalışılmıştır. Ancak bu durum, oluşturulan modelin gerçek çubuk davranışını yeterince iyi temsil edememesine neden olmaktadır. Ayrıca literatürdeki çalışmalarda, elde edilen denklemlerin çözümü için Ritz, Galerkin ve sonlu elemanlar gibi yaklaşık yöntemlerin kullanıldığı da görülmüştür. Özellikle bilgisayar teknolojisinin gelişimiyle çubukların statik ve dinamik problemlerinin çözümünde sonlu elemanlar yöntemi oldukça sık kullanılmaya başlamıştır. Geleneksel sonlu elemanlar yöntemi, çubuk ekseni boyunca yer değiştirmelerin bir takım basit fonksiyonlar olarak seçilmesini gerektirdiğinden, ancak fazla sayıda eleman kullanılması halinde doğru çözüme yakın değerler vermekte ve çözümde bazı sayısal güçlükler yaratmaktadır.

Eğri eksenli çubukların düzlem içi ve düzlem dışı statik ve dinamik problemlerini inceleyen fazla sayıdaki çalışmadan büyük bir çoğunluğu sabit eğrilikli ve sabit kesitli çubukları ele almıştır. Eğriliğin veya kesidin değişken olması durumu, az sayıda çalışmaya konu olmuştur.

1.1 Çalışmanın Amacı

Bu çalışmada düzlemsel eğri eksenli çubukların düzlem içi ve düzlem dışı statik ve dinamik davranışları yeni bir sonlu eleman yöntemiyle incelenmiş ve sonuçlar hem literatürdeki sonuçlarla hem de sonlu eleman paket programlarından elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Sonlu eleman yöntemi, bilgisayar teknolojisinin gelişmesiyle birlikte günümüzde mühendislik problemlerinin çözümünde yaygın olarak kullanılır hale gelmiştir. Eğri eksenli çubuklar için bugüne kadar önerilen sonlu eleman formülasyonlarının büyük çoğunluğu, yer değiştirmelerin çubuk ekseni boyunca değişimini ifade eden yaklaşık fonksiyonlar önerilerek oluşturulmuştur. Eğri eksenli çubuklarda yer değiştirme bileşenleri, önerilen yaklaşık fonksiyonlardan çok daha karmaşık ifadeler olduğu için bu fonksiyonlar eğri eksenli çubukları modelleyebilmek için yetersiz kalmaktadır. Bu çalışmada, eğri eksenli çubukların genel denklemlerinin kesin çözümünden elde edilen sonuçlar kullanılarak hem statik hem dinamik problemleri çözecek bir formülasyon geliştirilmiştir. Bu nedenle, literatürde mevcut olmasına rağmen konu bütünlüğü açısından öncelikle eğri eksenli çubuk statiğinin denklemleri elde edilmiştir.

Çubuğun düzlem içi ve düzlem dışı statik davranışını temsil eden denklemler, eksenel uzama ve kayma deformasyonu etkilerini içermektedir. Hiçbir basitleştirici kabul yapmaksızın değişken kesitli ve değişken eğrilikli çubuğun statik denklemleri elde edilmiş ve bazı özel geometriler için çözüm yapılmıştır. Yapılan bu çözüm, her türlü mesnetleme şartında ve yükleme durumunda uygulanabilmektedir.

Sabit kesitli ve sabit eğrilikli çubuk için elde edilen kesin çözümden yola çıkılarak, bu tür çubuklar için eksenel uzama ve kayma deformasyonu etkilerini de içeren yeni bir rijitlik matrisi elde edilmiştir. Elde edilen bu rijitlik matrisi, yer değiştirme bileşenlerinin kesin çözümünden elde edildiği için, problemdeki bölge sayısı kadar eleman ile dahi kesin çözüm ile aynı sonuçları elde etmek mümkündür. Ayrıca bu rijitlik matrisi, değişken kesitli ve değişken eğrilikli çubukların statik problemlerini

çözmek için kullanılabilir. Kesiti ve eğriliği sürekli değişen çubuklar, sabit kesitli ve eğrilikli sonlu elemanlara bölünerek çözüm yapılabilir. Eleman sayısının artması ile sonuçtaki yakınsama incelenerek gerekli minimum eleman sayısını belirlemek mümkündür. Bu sayede, eksenel uzama ve kayma deformasyonu etkileri ihmal edilmeksizin yaklaşık bir çözüm elde etmek mümkündür.

Sonlu eleman yöntemiyle çubukların dinamik davranışını incelemek için rijitlik matrisinin yanında bir de kütle matrisine ihtiyaç vardır. Eğri eksenli çubuk için dönme eylemsizliği etkilerini de içeren kinetik enerji ifadesi, yer değiştirmelerin analitik ifadeleri kullanılarak oluşturulmuş ve bu ifade sonlu eleman formülasyonuna uygun bir formata dönüştürülerek yeni bir kütle matrisi elde edilmiştir. Elde edilen bu kütle matrisi ve rijitlik matrisi kullanılarak çubuğun serbest titreşimlerini ifade eden özdeğer problemi çözülerek çubuğa ait doğal frekans değerleri bulunmuş ve analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

2. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLAR ÜZERİNE YAPILAN ÇALIŞMALAR

Çubukların statik ve dinamik problemleri birçok araştırmacı tarafından incelenmekte ve doğru çözüm yöntemleri elde edilmeye çalışılmaktadır. Yapılan çalışmaların çoğunda çubuk ekseninin boy değiştirmediği, şekil değiştirmeden önce çubuk eksenine dik olan çubuk kesidinin şekil değiştirmeden sonra da çubuk eksenine dik kaldığı; yani kesit boyunca kayma gerilmelerinin olmadığı, çubuk kesidinin dönmeye karşı direnç göstermediği kabullerinden biri veya birkaçı ile problem basitleştirilerek çözüme ulaşılmaya çalışılmıştır. Ancak bu durum, oluşturulan modelin gerçek çubuk davranışını yeterince iyi temsil edememesine neden olmaktadır. Ayrıca literatürdeki çalışmalarda, elde edilen denklemlerin çözümü için Ritz, Galerkin ve sonlu elemanlar gibi yaklaşık yöntemlerin kullanıldığı da görülmüştür.

En yaygın eğilme teorisi, eğilmeden önce çubuk kesidine dik ve düzlem olan kesidin, şekil değiştirmeden sonra da şekil değiştirmiş çubuk eksenine dik ve düzlem kaldığını varsayan Euler-Bernoulli varsayımına dayanmaktadır. Eğri eksenleri çubukların burulmasında ise Saint-Venant teorisi yaygın olarak kullanılmaktadır.

Bu bölümde, literatürde eğri eksenli çubuklar üzerine yapılan çalışmalar üzerinde durulmaktadır. Konu bütünlüğü bakımından literatür taraması çubuğun statik ve dinamik davranışlarını inceleyen çalışmalar olarak iki ana başlık altında incelenecektir.

2.1 Eğri Eksenli Çubukların Statiği Üzerine Yapılan Çalışmalar

Eğri eksenli çubuklar ile ilgili yapılan en önemli ve en eski çalışmalardan birinde Love [1], çubuğu bir parametreye bağlı yönlendirilmiş ortam olarak ele almış, dairesel kesitli çember eksenli çubuklar ile tam halkaların statik problemlerini çeşitli yükleme durumları için çözmüştür.

Mukavemet, elastisite teorisi ve çubuk teorisi ile ilgili temel bilgiler çeşitli makale ve kitaplarda [2-6] verilmiştir.

İnan [4] tarafından yapılan çalışma, çubuk teorisi ile ilgili önemli temel eserlerden biridir. Yapılan çalışmada çubuklar, bazı kısıtlamaları sağlayan bir parametreye bağlı yönlendirilmiş ortam olarak ele alınmış ve sınır değer problemi bu ortamda kurulmuştur. Elde edilen denklemler, eksenleri herhangi bir eğri olan ve değişken kesitli çubuklar için kullanılabilmektedir.

Eğri eksenli çubukların statik problemlerinin sonlu eleman yöntemi ile çözümünü araştıran eski çalışmalarda [7-9] eğri eksenli kirişler, doğru eksenli kiriş elemanlarının birleştirilmesiyle oluşturulmuştur. Bu durum, sonucun yakınsaması için çok fazla sayıda eleman kullanılmasına ve hatalara sebep olmuştur.

Cinemre [10], yer ve şekil değiştirme ilişkilerini geometrik yoldan elde etmiştir. Eksenel uzama ve kayma gerilmesi etkilerinin de hesaplara dahil edildiği çalışmada, birim dönme vektörü yerine açısal değişim vektörü, şekil değiştirme vektörü olarak seçilmiştir. Seçilen bu şekil değiştirme vektörü hesapları güçleştirmekle beraber, şekil değiştirmiş çubuğun geometrisi hakkında bilgi vermesi bakımından önem taşımaktadır. Uzaysal eğri eksenli çubuklara ait genel denklemler elde edilmiştir.

Balasubramanian ve Prathap [11], yer değiştirmeler için 3. dereceden bir polinom önererek statik ve dinamik analizlerde kullanılabilecek bir eğri eksenli çubuk elemanı tanımlamıştır. Kayma deformasyonu etkisini de dahil eden bu formülasyonun derin çubukların statik problemlerinde iyi sonuçlar verdiği görülmüştür.

Rajasekaran ve Padmanabhan [12], ince cidarlı açık kesitli eğri eksenli çubukların denklemlerini, kayma deformasyonunun ihmal edildiği durum için virtüel iş prensibi ile elde ederek, düzlem içi ve düzlem dışı stabilite problemlerini çözmüştür.

Nagarayana ve Prathap [13], kayma deformasyonu etkisini de dahil ettikleri çalışmalarında, eğri eksenli bir çubuk için 2. dereceden 3 nodlu izoparametrik bir sonlu eleman formülasyonu oluşturmuş ve çeşitli düzlem dışı statik problemler çözmüştür.

Pantazopoulou [14], 3 boyutlu eğri eksenli çubukların sonlu elemanlar analizi için küçük deformasyon teorisinden yararlanarak, yer değiştirme ve dönme bileşenleri için düşük mertebeli interpolasyon fonksiyonlarını kullanmıştır.

Tüfekçi [15], eğri eksenli düzlemsel çubukların düzlem içi statik problemlerini eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini göz önüne alarak incelemiştir. Elde edilen lineer diferansiyel denklem takımının çözümünü başlangıç

değerleri yöntemi ile yaparak çember ve parabol eksenli çubuklar için çeşitli problemler çözmüştür. Bu çalışmada kullanılan çözüm yöntemi ile Tüfekçi ve Arpacı [16], değişken eğrilikli ve değişken kesitli çubukların düzlem içerisindeki statik problemlerini incelemiştir.

Choi ve Lim [17], çubuktaki şekil değiştirme bileşenlerini sabit kabul ederek 2 nodlu, lineer fonksiyon kabul ederek 3 nodlu sonlu eleman formülasyonları geliştirmiştir. Kayma gerilmesi ve eksenel uzama etkilerinin de dahil edildiği çalışmada statik problem üzerinde durulmuş, 3 nodlu elemanın 2 nodlu elemana göre daha çabuk yakınsadığı görülmüştür.

Kang ve diğerleri [18], sabit kesitli çember eksenli çubuğun farklı sınır şartları ve yükleme koşullarındaki düzlem dışı statik problemlerini, diferansiyel kuadratür ve kesin çözüm yöntemleri ile kayma deformasyonunun dahil edilip edilmediği durumlar için çözmüşlerdir. Diferansiyel kuadratür yönteminde, az sayıda düğüm noktası ile kesin çözüme yakın sonuçlar elde edildiği görülmüştür.

Litewka ve Rakowski [19], trigonometrik fonksiyonların kuvvet serisi açılımlarını kullanarak, 2 nodlu ve 6 serbestlik dereceli sabit kesitli ve sabit eğrilikli çubuk elemanı oluşturmuşlardır. Yer değiştirme fonksiyonlarındaki katsayıların, çubuğun malzeme özellikleri ve geometrilerine bağlı olması sayesinde eksenel uzama ve kayma deformasyonu etkilerinin hesaba dahil edilip edilmediği durumlar için hesaplar kolayca yapılabilmektedir. Farklı narinlik oranı için çözülen problemlerde, kesin çözüm ile uyum içerisinde sonuçlar elde edilmiştir. Aynı yazarlar bir başka çalışmalarında [23], kullandıkları şekil fonksiyonlarında bu kez trigonometrik ifadeler yerine seri açılımlarını kullanmadan sabit kesitli çember eksenli çubuk için rijitlik matrisini elde etmiş ve çeşitli statik problemleri çözmüşlerdir.

Sengupta ve Dasgupta [20], 5 nodlu ve 13 serbestlik dereceli bir sonlu çubuk elemanı oluşturarak eğri eksenli çubukların düzlem dışı statik problemlerini çözmüşlerdir. Çubuk geometrisi ve ötelenme için 4. dereceden, dönmeler için ise 3. dereceden Lagrange polinomlarını kullanmışlardır. Dönme eylemsizliği ve kayma deformasyonu etkilerinin de dahil edildiği çalışmada değişken eğrilikli çubuklar için de hesaplar yapılmış ve sonuçlar mevcut sonuçlar ile karşılaştırılmıştır.

Friedman ve Kosmatka [21], çubuk statiğinin diferansiyel denklem takımının homojen kısmını sağlayan şekil fonksiyonları kullanarak 2 nodlu ve 6 serbestlik dereceli bir sonlu eleman formülasyonu oluşturmuşlardır. Kayma ve membran kilitlenmesi sorununun bulunmadığı bu formülasyon, kayma deformasyonu etkisini de hesaba dahil etmektedir. Elde edilen ifadelerle çember eksenli ve sabit kesitli çubukların statik problemlerini çözmede kullanılmış, mevcut çalışmalarla uyumlu sonuçlar elde edilmiştir.

Krishnan ve Suresh [22], kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini de dahil ederek, her birinde 4 serbestlik derecesi olan 2 nodlu sonlu eleman formülasyonu geliştirerek değişken eğrilikli ve değişken kesitli eğri eksenli çubukların statik davranışlarını incelemişlerdir. Yazarlar, elde edilen doğru sonuçların, formülasyonun kartezyen koordinatlarda elde edilmesi ve eğilme-uzama davranışını ifade ederken kullandıkları teori sayesinde olduğunu düşünmektedirler.

Raveendranath ve diğerleri [24], normal yer değiştirme bileşeni için üçüncü dereceden bir polinom önermiş ve denge denklemleri yardımıyla teğetsel yer değiştirme bileşeni ve dönme açısı ifadelerini elde etmiştir. Bu durum, yer değiştirme alanını ifade eden polinomun sabitlerinin, çubuğun malzeme ve geometrik özelliklerini de içermesini sağlamıştır. Elde edilen sonlu çubuk elemanı kullanılarak sabit kesitli ve çember eksenli çubuğun bazı düzlem içi statik problemleri çözülmüş ve düşük eleman sayısıyla dahi yakınsamanın sağlandığı görülmüştür. Benzer bir çalışmada Raveendranath ve diğerleri [25], bu kez şekil değiştirmiş çubuk ekseninin teğeti ve dönmüş kesit arasındaki açı için dördüncü dereceden bir polinom önererek, denge denklemleri ve kinematik bağıntılar yardımıyla normal ve teğetsel yer değiştirme ifadelerini elde etmişlerdir. Elde edilen 3 nodlu, 9 sebestlik dereceli çember eksenli kiriş elemanı ile bazı statik problemler çözülmüş, mevcut literatür ile uyumlu sonuçlar elde edildiği görülmüştür.

Sheikh [26], yaptığı çalışmada her birinde düzlem dışına ait 3 serbestlik derecesi olan 3 nodlu bir eğri eksenli çubuk formülasyonu oluşturmuştur. Doğru, çebmer ve spiral eksenli çubuklar için çeşitli problemler çözerek formülasyonunu test etmiş, her problemde farklı ve çok sayıda eleman ile yakınsaklığın sağlandığını görmüştür.

Malekzadeh ve Karami [27], çember eksenli çubukların düzlem dışı statik problemlerini çözmek için diferansiyel kuadratür yöntemini kullanmışlardır. Klasik

mesnetleme şartlarının yanısıra, elastik olarak dönen veya ötelenen mesnetlerin bulunduğu bazı problemleri de çözmüşlerdir. Elde edilen formülasyonun doğruluğunu test etmek için sürekli ve kademeli değişken kesitli çubukların da statik problemlerini incelemişlerdir. Elastik zemine oturan çember eksenli çubukların da incelendiği çalışmada, az sayıda düğüm noktasının yakınsama için yeterli olduğunu görmüşlerdir.

Molari ve Ubertini [28], değişken eğrilikli çubukların düzlem içi statik problemlerini çözmek için bir sonlu eleman formülasyonu önermişlerdir. Çember ve elips eksenli çubukların çeşitli yükleme ve mesnetleme koşulları için statik problemlerini çözerek önerilen formülasyon test edilmiş ve az eleman kullanılması halinde dahi yakınsamanın sağlandığı görülmüştür.

Tüfekçi ve Doğruer [29], değişken eğrilikli ve değişken kesitli eğrisel çubuğun düzlem dışı statik davranışını ifade eden difernasiyel denklemlerin kesin çözümünü başlangıç değerleri yöntemi ile elde yapmışlardır. Farklı geometrilerde, farklı yükleme ve sınır koşullarına sahip çubukların yer değiştirme ifadelerini analitik olarak elde etmişlerdir.

Saffari ve Tabatabaei [30], şekil değiştirmiş çubuk ekseninin eğriliği için trigonometrik bir fonksiyon önererek bir sonlu eleman formülasyonu oluşturmuşlardır. Yer değiştirme bileşenlerine göre potansiyel enerjinin minimum olma şartından rijitlik matrisini elde ederek, farklı sınır ve yükleme şartları için sabit kesitli çember eksenli çubuğun bazı statik problemleri çözülmüş ve sonuçlar mevcut sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Az sayıda eleman kullanılmasın halinde dahi sonuçların yakınsadığı görülmüştür.

Gimena ve diğerleri [31] tarafından yapılan çalışmada, eğri eksenli çubuğun düzlem içi ve düzlem dışı davranışını incelemek üzere bir eleman tanımlaması yapılmaktadır. Eksenel uzama ve kayma deformasyonu etkileri hesaplara dahil edilmiştir. Matris yöntemi ile çözüm yapılmış, yayılı yük etkisindeki eğri eksenli çubuklar için hesaplamalar, grafikler halinde verilmiştir. Aynı yazarlara ait bir diğer çalışmada [32], aynı çözüm yöntemi global koordinatlar esas alınarak sunulmuştur.

Atternejad [33], çubuk problemlerinin sonlu eleman yöntemi ile çözümünde kullanılan geleneksel şekil fonksiyonları yerine *"basic displacement functions"* adını verdiği fonksiyonları kullanmayı önermiştir. Yazarın bu çalışmasında önerdiği bu yeni şekil fonksiyonları, Shahba ve diğ. [36-37] tarafından kullanılarak, eğri ve doğru eksenli

çubukların bazı statik problemleri çözülmüştür. Elde edilen sonuçların analitik sonuçlarla ve eski çalışmalarla karşılaştırılması yaplmış ve bu yeni yaklaşımın oldukça iyi sonuçlar verdiği görülmüştür.

2.2 Eğri Eksenli Çubukların Dinamiği Üzerine Yapılan Çalışmalar

Literatürde, eğri eksenli çubukların titreşimleri ile ilgili de pek çok çalışma bulunmaktadır. Yapılan literatür taramasında, statik problemlerin çözümüne benzer olarak farklı sayısal yöntemlerin kullanılığı, kesin analitik çözümü arayan çalışmaların az sayıda olduğu görülmüştür. Bunun yanında daha önce de bahsedildiği gibi, çalışmaların büyük kısmında eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerinden biri veya birkaçı ihmal edilerek problem basitleştirilmeye çalışılmıştır. Ayrıca çalışmaların çoğu çubuğun sabit kesitli ve sabit eğrilikli olduğu durumlar için sonuçlar içermektedir.

Love [1] tarafından ortaya konulan çalışma,eğri eksenli çubukların dinamik davranışı ile ilgili yapılan en eski çalışmalardan biridir. Eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerinin ihmal edildiği çalışmada, daire kesitli tam çember halkasının düzlem içi ve düzlem dışı titreşimleri incelenmiş ve her iki tip titreşimin ilk mod frekanslarının birbirine yakın olduğu görülmüştür.

Volterra ve Morel [38], Rayleigh-Ritz yöntemini kullandıkları çalışmalarında çember, katenari, sikloid ve parabol eksenli dairesel kesitli çubukların düzlem dışı frekanslarını elde etmişlerdir.

Takahashi [39], iki ucu da serbest çember eksenli çubuğun düzlem dışı serbest titreşim hareketini incelemiştir. Dönme eylemsizliği etkisinin göz önüne alındığı çalışmada, doğal frekans değerlerinin çubuğun narinlik oranıyla değişimi incelenmiş, narinlik oranı büyük olan çubuklarda simetrik mod şekilleri gözlenmiştir.

Takahashi ve Suzuki [40], yalnızca eksenel uzama etkisini hesaba dahil ettiği çalışmada, eliptik bir çubuğun düzlem dışı titreşimlerini incelemiştir. Benzer şekilde Suzuki ve diğ. [41], elips, sinüs, parabol, hiperbol, sikloid ve katenari eksenli çubukların doğal frekanslarını sayısal ve deneysel olarak elde etmiş, önceki çalışmalarda elde edilen sonuçlar ile uyum sağlandığı gösterilmiştir.

Bickford ve Mahanty [44], çember eksenli kalın çubukların düzlem dışı titreşim hareketini, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini göz önüne alarak incelemişlerdir.

De Irassar ve Laura [45], kademeli değişken kesitli çember eksenli çubukların düzlem içi titreşimlerini yaklaşık çözüm yöntemleri ile incelemişlerdir. İki kademeli çubukların incelendiği çalışmada, kademenin ortada olması durumu için serbest titreşim hareketinin ilk mod şekli verilmiştir.

Balasubramanian ve Prathap [11], yer değiştirmeler için 3. dereceden bir polinom önererek elde ettikleri çubuk elemanını dinamik analiz için de kullanmıştır. Kayma deformasyonu etkisini de dahil eden bu formülasyonun kademeli eğri çubukların dinamik problemlerinde iyi sonuçlar verdiği görülmüştür.

E Silva ve Urgueria [46], eğri eksenli çubukların düzlem dışı serbest titreşimlerini, sonsuz küçük elemanın difernasiyel denge denklemlerini kullanarak kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini göz önüne alarak incelemiştir. Elde edilen teorik sonuçlar, deneysel çalışmalarla doğrulanmıştır.

Laura ve diğ. [47], Rayleigh-Ritz yönteminin kullanıldığı çalışmada kesiti kademeli değişen çember eksenli çubuğun kendi düzlemindeki titreşimlerini incelemiştir. Eksenel deformasyon, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerinin ihmal edildiğ çalışmada çeşitli mesnetleme koşulları için doğal frekans değerleri elde edilmiş ve sonlu eleman çözümleri ile uyumlu sonuçlar elde edildiği görülmüştür.

Gutierrez ve diğ. [48], yaptıkları çalışmada eksen uzaması, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini ihmal ederek kademeli ve sürekli değişken kesitli ve değişken eğrilikli çubukların düzlem içi titreşimlerini incelemiştir. Yer değiştirmeler için polinom fonksiyonlarının seçildiği çalışmada Ritz yöntemi kullanılmış ve parabol, katenari, spiral, çember ve sikloid şeklinde eksenlere sahip çubukların doğal frekansları, farklı sınır şartları için hesaplanarak sonlu eleman yöntemi ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Auciello ve Rosa [49], çember eksenli, kademeli ve sürekli değişken kesitli çubukların farklı sınır koşullarındaki titreşimlerini Euler-Bernoulli teorisi ile incelemiş ve sonuçları mevcut çalışmalarla kıyaslamıştır.

Tüfekçi [15], başlangıç değerleri yöntemini kullandığı çalışmasında eğri eksenli düzlemsel çubukların düzlem içi dinamik problemlerini eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini göz önüne alarak incelemiştir.

Rossi ve Laura [50], kademeli değişken kesitli ve çember eksenli çubukların düzlem içi titreşimlerini incelediği çalışmada, frekans değişiminin kütle değişimine oranı üzerinde durmuştur. Eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerinin dahil edildiği çalışmada sonlu eleman yöntemi kullanılmış ve kademenin ortada bulunduğu durum için farklı sınır şartlarında doğal frekanslar elde edilmiştir.

Yang ve Sin [51], sırasıyla 2,3,4 ve 5 nodlu, 4,5,6 ve 7 serbestlik dereceli sonlu çubuk elemanı formülasyonu geliştirerek bunu titreşim problemlerini çözmek için kullanmıştır. Formülasyon, deforme olmuş çubuğun eğriliği için önerilen fonksiyonlar ile oluşturulmuş ve bu sayede eğilme hareketinden kaynaklanan şekil değiştirme enerjisi, klasik formülasyonlara göre daha doğru hesaplanabilmiştir. Çalışmada doğru ve eğri eksenli çubuklar için farklı sınır şartlarındaki düzlem içi titreşime ait doğal frekanslar eski çalışmalarla kıyaslanmakta ve sonuçların yakın olduğu görülmektedir.

Howson ve Jemah [52], eğri eksenli düzlemsel çubukların düzlem dışı titreşim hareketini, sonlu elemanlar yöntemi ile incelemişlerdir. Çalışmada çember eksenli ve sabit kesitli narin çubuk incelenmiş ve sayısal örneklere yer verilmiştir.

Benedetti ve diğ. [53], elastodinamiğin varyasyonel prensiplerini kullanarak yeni bir sonlu eleman formülasyonu geliştirmiştir. Yer değiştirmelerin çubuk ekseni boyunca lineer değiştiğini kabul ederek basit bir model oluşturulmuş ve çubuk ekseni, eğri uydurma yöntemi ile tarif edilmiştir. Değişken kesitli ve değişken eğrilikli çubukların düzlem içi titreşim hareketinin incelendiği çalışmada, sonuçlar sonlu eleman paket programlarından elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmış ve model doğrulanmıştır.

Sengupta ve Dasgupta [20], elde ettikleri 5 nodlu ve 13 serbestlik dereceli sonlu çubuk elemanı formulasyonuyla değişken eğrilikli düzlemsel çubukların düzlem dışı dinamik problemlerini de çözmüş ve sonuçları mevcut sonuçlar ile karşılaştırılmıştır.

Friedman ve Kosmatka [21], çubuk statiğinin diferansiyel denklem takımının homojen kısmını sağlayan şekil fonksiyonları kullanarak oluşturdukları 2 nodlu ve 6 serbestlik dereceli sonlu çubuk elemanı ile çember eksenli ve sabit kesitli çubukların dinamik problemlerini de çözmüş, mevcut çalışmalarla uyumlu sonuçlar elde etmiştir.

Krishnan ve Suresh [22], kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini de dahil ederek oluşturduğu, her birinde 4 serbestlik derecesi olan 2 nodlu sonlu çubuk elemanı ile değişken eğrilikli ve değişken kesitli eğri eksenli çubukların dinamik davranışlarını da incelemişlerdir.

Tüfekçi ve Arpacı [54], eğri eksenli çubukların düzlem içi titreşim hareketini ifade eden diferansiyel denklem takımını elde etmiş ve bu denklem takımının kesin çözümünün sadece sabit eğrilikli ve sabit kesitli çubuklar için elde edilebileceğini göstermiştir. Eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerinin dahil edildiği çalışmada çember eksenli ve sabit kesitli çubukların düzlem içi titreim hareketi incelenmiş ve sonuçlar tablo ve grafikler halinde verilmiştir.

Tüfekçi, [55] ve [56]' da sırasıyla tek kademeli ve iki kademeli değişken kesitli ve çember eksenli çubukların düzlem içi titreşimlerine ait tüm etkilerin dahil edildiği diferansiyel denklem takımını elde etmiş, farklı mesnetleme durumları ve farklı narinlik oranları için doğal frekans değerlerini sunmuştur. Bu çalışmalarla aynı çözüm yöntemini kullanarak Tüfekçi [57], sığ çubukları incelemiş, kayma etkisi ve dönme eylemsizliği etkilerinin sığ çubuklarda, sığ olmayan çubuklara göre çok daha baskın olduğu sonucuna varmıştır. Benzer yöntemle Tüfekçi ve Özdemirci [58], tek kademeli değişken kesitli çember eksenli çubuklarda kademe oranının, kademenin konumunun, çubuğun narinlik oranının doğal frekanslar üzerindeki etkisini incelemiş, sonuçları tablo ve grafikler halinde vermiştir.

Huang ve diğ. [59] tarafından yapılan çalışmada, düzlemsel çubukların dinamik analizi, "dinamik katılık matrisi" metodu ile yapılmıştır. Dönme eylemsizliği ve kayma deformasyonu etkilerinin göz önüne alındığı çalışmada değişken kesitli ve değişken eğrilikli çubukların farklı sınır koşullarındaki doğal frekansları elde edilmiş ve yöntem doğrulanmıştır.

Raveendranath ve diğ. [60], normal yer değiştirme için 3. dereceden bir polinom önererek ve denge denklemleri ile teğetsel yer değiştirme için 4. dereceden bir polinom elde ederek, 2 nodlu, 6 serbestlik dereceli bir sonlu çubuk elemanı elde etmişlerdir. Kayma deformasyonunun ihmal edildiği çalışmada, önerilen yöntemin narin çubukları modellemede kullanılabileceği çeşitli örneklerle gösterilmiştir.

Raveendranath ve diğ. [25], statik problemleri çözmek için elde ettiği 3 nodlu, 9 sebestlik dereceli çember eksenli kiriş elemanı için kinetik enerji ifadesinden yararlanarak kütle matrisi oluşturmuştur. Bu kütle matrisi ile, statik problemlerin yanında dinamik problemler de çözülmüş, mevcut literatür ile uyumlu sonuçlar elde edildiği görülmüştür.

Litewka ve Rakowski [61], statik problemleri çözmek için oluşturduğu sabit kesitli, çember eksenli çubuğu temsil eden 2 nodlu, 6 serbestlik dereceli sonlu çubuk elemanını, titreşim problemini çözmek için kullanmıştır. Şekil fonksiyonlarının kullanıldığı çalışmada kayma deformasyonu, eksenel uzama ve dönme eylemsizliği etkileri göz önüne alınmış, ve kalın çubuklarda bu etkilerin önemi vurgulanmıştır.

Wu ve Chiang [62], trigonometrik şekil fonksiyonları ile oluşturdukları sonlu eleman formülasyonunu kinetik enerji ifadesinden faydalanarak kütle matrisi elde etmek için kullanmışlardır. Tüm etkilerin göz önüne alındığı çalışmada, doğru eksenli çubuklar için de hesaplamalar yapılmış, doğru ve eğri eksenli çubuklardan oluşan bazı hibrid sistemlerin doğal frekansları elde edilmiştir. Yazarlar, aynı yöntemi kullandıkları bir başka çalışmada [63], kalın eğrisel kirişlerde kayma deformasyonu, eksenel uzama ve dönme eylemsizliğinin sonuçlara etkisi üzerinde durmuşlardır. Aynı yazarlar düzlem dışı titreşim hareketini inceledikleri çalışmalarında [64], yine benzer yöntemden faydalanmışlardır.

Tüfekçi ve Doğruer [65], [54] ile verilen çalışmayla aynı yöntemi izleyerek bu kez eğri eksenli çubukların düzlem dışı titreşim hareketini ifade eden diferansiyel denklem takımının kesin çözümünü elde etmişlerdir. Benzer olarak, yalnızca sabit kesitli ve çember eksenli çubuk incelenmiş, sonuçlar tablo ve grafikler halinde verilmiştir.

Yang ve diğ. [66], Hamilton prensibinden yararlanarak değişken kesitli ve değişken eğrilikli çubuğun düzlem içi serbest titreşim hareketini yöneten diferansiyel denklem takımını elde etmiştir. Eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerinin dahil edildiği çalışmada elde edilen denklemler, Galerkin sonlu eleman metodu ile nümerik olarak çözülmüştür. Farklı geometri ve sınır şartlarına sahip çubukların düzlem içi doğal frekansları elde edilerek mevcut çalışmalarla karşılaştırma yapılmış ve yöntemin geçerliliği test edilmiştir.

Chen [67], değişken kesitli çember eksenli çubukların düzlem dışı titreşimlerini, difernasiyel kuadratür yöntemi ile incelemiştir. Kayma deformasyonu etkisinin göz önüne alındığı çalışmada elde edilen değerlerin, mevcut değerler ile uyum içerisinde olduğu gösterilmiştir.

Lee ve diğ. [68], değişken eğrilikli çubukların titreşim problemini, sayısal yöntemleri kullanarak yapmıştır. Parabol, sinüs ve elips eksenli çubukların farklı mesnetleme koşullarındaki doğal frekansları tablo ve grafikler halinde verilmiş, deneysel sonuçlar ve sonlu eleman paket programı yardımıyla elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılarak yöntem doğrulanmıştır.

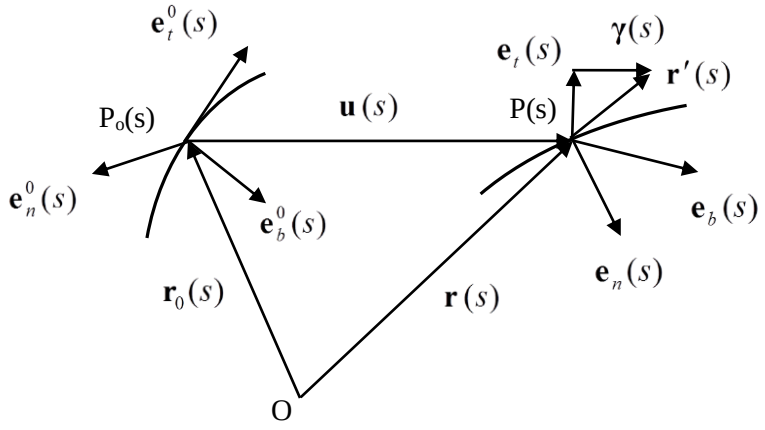
Kim ve diğ. [70], eğri eksenli narin çubukların düzlem dışı titreşimlerini incelemek üzere bir sonlu eleman formülasyonu oluşturmuştur. Denge denklemlerinden yararlanarak elde ettikleri şekil fonksiyonlarını, enerji ifadesinde kullanarak kütle matrisini oluşturmuşlardır. Kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerinin hesaba dahil edildiği çalışmada, oluşturulan formülasyonun çember eksenli narin çubuklar için kullanılabileceği gösterilmiştir.

Atternejad ve diğ. [34-35] ve Shahba ve diğ. [36-37], Atternejad [33] tarafından ortaya konulan yeni şekil fonksiyonlarını kullanarak çubukların titreşim problemlerini, eğri eksenli çubuğun sabit kesitli ve sabit eğrilikli, değişken kesitli ve değişken eğrilikli olması durumları için çözmüş ve bu yeni yaklaşımın oldukça iyi sonuçlar verdiğini göstermiştir.

3. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN GENEL DENKLEMLERİ

3.1 Çubuk Statiğinin Genel Denklemleri

Bu bölümde, çubuk statiğinin ve titreşimlerinin genel denklemlerinin elde edilmesi özetlenecektir. Çubuk malzemesinin elastik, homojen ve izotrop olduğu kabul edilmektedir.



Şekil 3.1 : Çubuğun şekil değiştirmeden önceki ve sonraki durumları.

Çubuk eksen eğrisi, üzerindeki her noktada birbirine dik iki birim vektör bağlı bir parametreli yönlendirilmiş bir ortamla temsil edilmektedir. Çubuğun yüksüz ve gerilmesiz olduğu başlangıç durumunda, birim vektörler uzay eğrisinin teğetine diktir ve çubuğun kesitini belirlemektedir. Bu durumda, üçüncü vektör, teğet birim vektörünü ifade eder. Çubuk şekil değiştirdikten sonra, kesit vektörleri yine birbirlerine dik birim vektörler olarak kalmaktadır. Başlangıçtaki teğet birim vektörü ise kesit vektörlerine dik kalmasına rağmen, artık, ne şekil değiştirmiş eksen eğrisine teğet ne de birim vektör olma şartı vardır. Böylece, çubuk dik kesitinin rijit olması varsayımı yapılmaktadır. Dik kesit ötelenir ve döner; ancak şekil değiştirmez. Yani kesit, serbestçe dönebileceği için şekil değiştirmeden sonraki eksene dik kalmayabilir [10].

Çubuk eksen eğrisi üzerindeki $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(s)$ konum fonksiyonu ile belirlenen noktada, birbirine dik $\mathbf{e}_n^0(s)$ ve $\mathbf{e}_b^0(s)$ birim vektörleri yer almaktadır. s parametresi, başlangıç durumunda, yay uzunluğudur. Bu iki vektöre dik olan $\mathbf{e}_t^0(s)$ birim vektörü, başlangıçta, eğrinin teğeti ile çakışmaktadır ve

$$\mathbf{e}_t^0(s) = \mathbf{e}_n^0 \times \mathbf{e}_b^0$$
$$\mathbf{e}_t^0(s) = \frac{d\mathbf{r}_0(s)}{ds} \qquad \textbf{(3.1)}$$

şeklinde ifade edilmektedir. $\mathbf{e}_n^0(s)$, $\mathbf{e}_b^0(s)$ kesit vektörleri, sırasıyla çubuk eksen eğrisinin normal ve binormal doğrultularıdır. Bu doğrultular kesit asal eksenleriyle çakışmayabilir. Bu durumda, aralarındaki ilişkiyi belirleyecek bir fonksiyona ihtiyaç vardır. Burada, bu doğrultuların çakıştığı durum göz önüne alınacaktır. Fakat denklemler, çakışmadığı durum için çıkartılacak, daha sonra gerekli düzenleme yapılacaktır.

$\mathbf{r}_0(s)$, $\mathbf{e}_n^0(s)$ ve $\mathbf{e}_b^0(s)$ vektörleri çubuğun yüksüz ve gerilmesiz olduğu başlangıç durumuna ait bilinen vektörlerdir. Çubuk şekil değiştirdikten sonra, geometriyi $\mathbf{r}(s)$, $\mathbf{e}_n(s)$ ve $\mathbf{e}_b(s)$ vektörleri belirlemektedir. Şekil değiştirmeden sonraki kesit vektörleri $\mathbf{e}_n(s)$ ve $\mathbf{e}_b(s)$, yine birim vektörler olup birbirlerine diktirler. Ancak, başlangıçtaki teğet birim vektörü, $\mathbf{e}_n$ ve $\mathbf{e}_b$ vektörlerine dik kalmasına rağmen, artık ne şekil değiştirmiş eksen eğrisine teğet, ne de birim vektör olma şartı vardır. Yani, dik kesit ötelenir ve döner; ancak, herhangi bir deformasyona uğramaz. Serbestçe dönebilme yeteneği nedeniyle,

$$\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} \neq \alpha.\mathbf{e}_t(s) \qquad \textbf{(3.2)}$$

olacak, dik kesit şekil değişiminden sonra çubuk eksenine dik kalmayacaktır. Bu, kayma deformasyonu etkisiyle ortaya çıkan haldir. Ayrıca, artık s parametresi yay uzunluğuna eşit olmadığından $\mathbf{r}'(s)$ vektörü şekil değiştirmiş eğriye teğet olmakla birlikte birim vektör olmayabilir.

Şekil 3.1 'de, çubuğun şekil değiştirmeden önceki ve sonraki durumları gösterilmektedir. Buradaki (0) üst indisi, şekil değiştirmemiş durumu ifade eder.

Çubuğun yer değiştirme durumu, iki vektörle tanımlanabilir: Birincisi, eksen üzerindeki noktanın yer değiştirme vektörü,

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{r}(s) - \mathbf{r}_0(s) \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlanır.

İkinci yer değiştirme vektörü, rijit cisim gibi hareket ettiği varsayılan dik kesitin dönme vektörüdür. Aslında, rijit cismin sonlu dönmeleri, vektörle ifade edilemez. Fakat, burada, yer ve şekil değiştirmeler küçük varsayılarak dönme, bir vektörle belirlenecektir.

Ortogonal olan $\mathbf{e}_n^0, \mathbf{e}_b^0, \mathbf{e}_t^0$ vektör üçlüsü, yine kendisi gibi ortogonal olan $\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_t$ vektör üçlüsüne,

$$\mathbf{e}_i(s) = Q_{ji}\mathbf{e}_j^0(s) \tag{3.4}$$

şeklinde, **Q** ortogonal dönüşüm matrisi ile dönüşmektedir. Çok küçük dönmeler için bu matris;

$$Q_{ij} = \delta_{ij} + W_{ij} \qquad \delta_{ij} : \text{Kronecker Deltası} \tag{3.5}$$

olarak yazılabilir. Bu durumda (3.4) eşitliği,

$$\mathbf{e}_i(s) = \mathbf{e}_i^0(s) + W_{ji}\ \mathbf{e}_j^0(s) \tag{3.6}$$

biçiminde yazılabilir. **W**, yalnızca köşegeni dışındaki elemanları sıfırdan farklı ve çok küçük olan bir matristir. O halde;

$$\mathbf{(I+W)(I-W)=I-W+W-W^2} \cong \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{(I-W)=Q^{-1}} \tag{3.7}$$

Q matrisinin ortogonalliği kullanılarak;

$$\mathbf{Q^T = I+W^T = I-W} \Rightarrow \mathbf{W^T = -W} \tag{3.8}$$

Böylece, küçük yer ve şekil değiştirmeler için **W** antisimetrik bir matris olacaktır.

Antisimetrik bir matris için,

$$W_{ij}\mathbf{e}_i^0 = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{e}_i^0 \tag{3.9}$$

özelliğini sağlayan bir **Ω** vektörü bulunabilir. Çubuk kesitinin dönme vektörü olan **Ω**(s) ile (3.6) eşitliği,

$$\mathbf{e}_i(s) = \mathbf{e}_i^0(s) + \mathbf{\Omega}(s) \times \mathbf{e}_i^0(s) \tag{3.10}$$

şekline dönüşür. **Ω**(*s*) dönme vektörü, ağırlık merkezinden geçen eksen etrafındaki dönmeyi belirten vektördür.

Çubuğun şekil değiştirme durumu da iki vektörle tanımlanabilir. Birinci vektör, çubuğa ait eksenel şekil değiştirme vektörü olan **γ** vektörüdür. Eksen eğrisinin boy değişimini ve eksen eğrisi ile dik kesit arasındaki kaymaları ifade etmektedir **γ**, eksenel şekil değiştirme vektörü, şekil değiştirmeden sonraki yer vektörünün türevi ile dik kesit normali arasındaki farktır ve

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} - \mathbf{e}_t \tag{3.11}$$

şeklinde tarif edilmektedir.

Diğer şekil değiştirme vektörü, bazı çalışmalarda, birim dönme vektörü olarak tanımlanır ve

$$\boldsymbol{\omega}_\mathbf{I} = \frac{d\mathbf{\Omega}}{ds} \tag{3.12}$$

şeklinde ifade edilir [4]. Bu durumda, ilgili şekil değiştirme denklemi,

$$\mathbf{M} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\omega}_\mathbf{I} \tag{3.13}$$

şeklinde yazılabilir. Burada **M** kesite etkiyen momentlerin bileşke vektörü, **D** ise eğilme rijitliği matrisidir.

Bazı mühendislik çalışmaları ise, ikinci şekil değiştirme vektörü olarak, **ω** açısal değişim vektörünü kullanmaktadır. Bu vektör, üçlü eksen takımının, çubuk eksen eğrisi üzerinde birim uzunluk kadar ilerletildiğinde açısal değişimini belirleyen vektör olarak tarif edilmektedir. Bileşenleri, çubuk ekseninin eğriliklerini ve burulmasını veren bu vektör,

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i \tag{3.14}$$

olarak tarif edilmektedir. Açısal değişim vektörünün şekil değiştirme büyüklüğü olarak kullanılması, daha genel problemlerin çözümüne ve şekil değiştirmiş çubuğun geometrisini tanımaya olanak sağlamaktadır.

Yer ve şekil değiştirme büyüklükleri tanımlandıktan sonra, çubuk teorisinin **M**, **R**, **u**, **Ω**, **γ**, **ω** olarak bilinen altı bilinmeyeni, iki yer değiştirme ve şekil değiştirme bağıntısı, iki denge denklemi ve iki bünye denklemi yardımıyla çözülebilir.

3.1.1 Yer değiştirme ve şekil değiştirme bağıntıları

Yer değiştirme vektörünü tanımlayan (3.3) ifadesi türetilerek,

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} - \frac{d\mathbf{r}_0}{ds} \tag{3.15}$$

elde edilir. (3.1), (3.10) ve (3.11) ifadelerinden faydalanılarak,

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_t^0 + \boldsymbol{\gamma} \tag{3.16}$$

şeklinde, ilk yer değiştirme-şekil değiştirme bağıntısı elde edilmiş olur.

(3.10) ifadesi türetilerek elde edilen,

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{ds} = \frac{d\mathbf{e}_i^0}{ds} + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{ds} \times \mathbf{e}_i^0 + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{e}_i^0}{ds} \tag{3.17}$$

eşitliğinde (3.12) ve (3.14) ifadeleri ile vektörel çarpımın $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a}.\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{c}$ özelliği kullanılarak,

$$\left(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0 - \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{ds} + \boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{\Omega} \right) \times \mathbf{e}_i^0 = (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0) \times (\mathbf{e}_i^0 \times \boldsymbol{\Omega}) \tag{3.18}$$

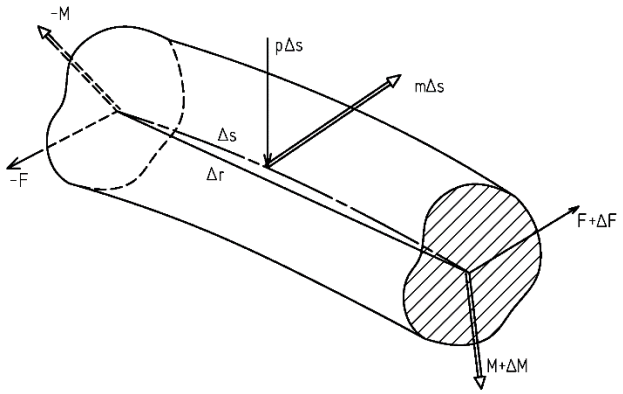
elde edilir. Şekil değiştirmelerin küçük olduğu varsayımı ile eşitliğin sağ tarafı sıfır olur. Bu durumda, eşitliğin sol tarafındaki parantez içerisindeki terim de sıfır olmalıdır. Buradan,

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{ds} = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{\Omega} \tag{3.19}$$

eşitliği elde edilir.

3.1.2 Denge denklemleri

$\mathbf{p}(s)$ ve $\mathbf{m}(s)$ vektörleri, birim uzunluktaki çubuğa etkiyen dış kuvvetler ve momentler olarak tanımlanmaktadır. $\mathbf{F}$ ve $\mathbf{M}$ vektörleri ise, sırasıyla, kesite etkiyen iç kuvvet ve moment vektörlerini göstermek üzere, 'deki elemana ait denge denklemleri,



Şekil 3.2: Çubuk elemanına etki eden dış yükler ve kesit tesirleri.

$$-\mathbf{F}+\mathbf{F}+\Delta\mathbf{F}+\mathbf{p}\,\Delta s=0$$

$$-\mathbf{M}+\mathbf{M}+\Delta\mathbf{M}+\mathbf{m}\,\Delta s+\Delta\mathbf{r}\times\left(\mathbf{F}+\Delta\mathbf{F}\right)=0 \qquad \textbf{(3.20)}$$

olarak yazılabilir. Gerekli sadeleştirmeler yapılıp, ($\Delta s \to 0$) için limit alındığında,

$$\frac{d\mathbf{F}}{ds}+\mathbf{p}=0$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds}+\mathbf{e}_t^0\times\mathbf{F}+\mathbf{m}=0 \qquad \textbf{(3.21)}$$

şeklinde denge denklemleri elde edilir.

3.1.3 Bünye denklemleri

D ve **C** çubuk kesidine ait dönme ve ötelenme rijitlik tansörlerini göstermek üzere bünye denklemleri,

$$\mathbf{M}=\mathbf{D}.\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{ds}$$

$$\mathbf{F}=\mathbf{C}.\boldsymbol{\gamma} \qquad \textbf{(3.22)}$$

eşitlikleri ile ifade edilirler. Burada, **D** ve **C** ile gösterilen tansörler, yalnız çubuk malzemesine ve kesit geometrisine bağlı büyüklüklerden oluşan, ikinci mertebeden simetrik tansörlerdir.

Böylece, elastik çubuk teorisinin genel denklemlerine ait 6 adet denklem elde edilmiş olmaktadır. Bunlar, yer değiştirme ve dönme olarak adlandırdığımız **u** ve **Ω**, şekil değiştirme elemanları olan **γ** ve **ω**, kesite etkiyen iç kuvvet ve moment vektörleri olan **F** ve **M**'dir. Çubuk teorisinin genel denklemleri,

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds}+\mathbf{e}_t^0\times\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{\gamma}=0$$

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{ds}-\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}_0+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\omega}_0=0$$

$$\frac{d\mathbf{F}}{ds}+\mathbf{p}=0 \qquad \textbf{(3.23)}$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds}+\mathbf{e}_t^0\times\mathbf{F}+\mathbf{m}=0$$

$$\mathbf{M}=\mathbf{D}.(\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega}_0-\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\omega}_0)$$

$$\mathbf{F}=\mathbf{C}.\boldsymbol{\gamma}$$

şeklinde yazılabilir [10].

$\mathbf{e}_n^0,\mathbf{e}_b^0,\mathbf{e}_t^0$ eksen takımında **C** ve **D** tansörleri matris gösterimiyle aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} C_{nn} & C_{nb} & 0 \\ C_{nb} & C_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & C_{tt} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D}=\begin{bmatrix} D_{nn} & D_{nb} & 0 \\ D_{nb} & D_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & D_{tt} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.24)}$$

$\mathbf{e}_n^0,\mathbf{e}_b^0$ eksenlerinin, kesidin asal eksenleri ile çakışması halinde bu tansörler;

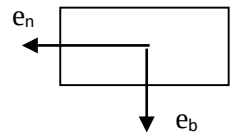
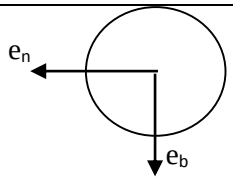
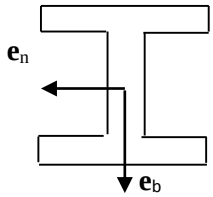
$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} C_{nn} & 0 & 0 \\ 0 & C_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & C_{tt} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D}=\begin{bmatrix} D_{nn} & 0 & 0 \\ 0 & D_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & D_{tt} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.25)}$$

şeklini alır [4]. Kesit belirlendiğinde bu matrislerin bileşenleri;

$$D_{nn} = EI_n \qquad D_{nb} = -EI_{nb}$$
$$D_{bb} = EI_b \qquad D_{tt} = GJ$$
$$C_{nn} = \frac{GA}{k_n} \qquad C_{bb} = \frac{GA}{k_b} \qquad C_{tt} = EA \tag{3.26}$$

Burada, E ve G malzemenin elastiklik ve kayma modüllerini, I_n , I_b kesit eylemsizlik momentlerini, J kesitin burulma eylemsizlik momentini, A kesit alanını ve k_n , k_b ise kayma gerilmelerinin kesite üniform olarak yayılmadıklarını karakterize eden sabitlerdir. Bu sabitler, Çizelge ’de çeşitli kesitler için verilmektedir. İleride ele alınacak sayısal örnekler, kesit geometrisine bağlı olarak, çizelgedeki değerler kullanılarak çözülmüştür.

Çizelge 3.1 : k_n , k_b sabitleri.

Kesit	k_n	k_b
	6/5	6/5
	10/9	10/9
 I-300	2.10	2.20

(3.22) eşitliklerinden,

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{ds} = \mathbf{D}^{-1}.\mathbf{M}$$
$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{C}^{-1}.\mathbf{F} \tag{3.27}$$

elde edilir.

Bunlar, (3.23) ile verilen genel denklemlerin ilk ikisine konulursa, eşitlikler aşağıdaki hale gelir.

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} + \mathbf{e}_t^0 \times \boldsymbol{\Omega} - \mathbf{C}^{-1}\mathbf{F} = 0$$

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{ds} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{M} = 0 \qquad \textbf{(3.28)}$$

$$\frac{d\mathbf{F}}{ds} = -\mathbf{p}$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{e}_t^0 \times \mathbf{F} = -\mathbf{m}$$

Buradaki **u, Ω, F, M, p** ve **m** vektörleri, şekil değiştirmelerin küçük olduğu varsayımıyla, şekil değiştirmemiş çubuk eksenine yerleştirilmiş $\mathbf{e}_n^0, \mathbf{e}_b^0, \mathbf{e}_t^0$ eksen takımında;

$$\mathbf{u} = u\ \mathbf{e}_n^0 + v\ \mathbf{e}_b^0 + w\ \mathbf{e}_t^0$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_n\ \mathbf{e}_n^0 + \Omega_b\ \mathbf{e}_b^0 + \Omega_t\ \mathbf{e}_t^0$$

$$\mathbf{F} = F_n\ \mathbf{e}_n^0 + F_b\ \mathbf{e}_b^0 + F_t\ \mathbf{e}_t^0$$

$$\mathbf{M} = M_n\ \mathbf{e}_n^0 + M_b\ \mathbf{e}_b^0 + M_t\ \mathbf{e}_t^0 \qquad \textbf{(3.29)}$$

$$\mathbf{p} = p_n\ \mathbf{e}_n^0 + p_b\ \mathbf{e}_b^0 + p_t\ \mathbf{e}_t^0$$

$$\mathbf{m} = m_n\ \mathbf{e}_n^0 + m_b\ \mathbf{e}_b^0 + m_t\ \mathbf{e}_t^0$$

şeklinde ifade edilebilirler.

Ekseni herhangi bir uzaysal eğri olan çubuk için, kesit asal eksenleri ile çubuk eksen eğrisinin normal ve binormal eksenlerinin çakışması durumunda, açısal değişim vektörü,

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \kappa_0\ \mathbf{e}_n^0 + \kappa_0^{'}\ \mathbf{e}_b^0 + \tau_0\ \mathbf{e}_t^0 \qquad \textbf{(3.30)}$$

olarak ifade edilir. Burada, κ_0, $(\mathbf{e}_b^0 - \mathbf{e}_t^0)$ düzlemindeki eğrilik bileşeni, κ_0', $(\mathbf{e}_n^0 - \mathbf{e}_t^0)$ düzlemindeki eğrilik bileşeni, τ_0 ise eğrinin burulma açısıdır [4].

(3.29) denklemlerindeki büyüklüklerin türevleri hesaplanırken,

$$\frac{d\mathbf{e}_i^0}{ds} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{e}_i^0 \qquad \textbf{(3.31)}$$

eşitliğinden faydalanılacaktır.

Kesit asal eksenleri, eksen eğrisinin normal ve binormal eksenleri ile çakışan düzlemsel eğri eksenli çubuk için;

$$\kappa_0 = 0 \qquad \kappa'_0 = 1/R_o \qquad \tau_0 = 0 \qquad \textbf{(3.32)}$$

olarak alınır. Böylece, (3.28) denklemleri,

$$\begin{aligned}
&\frac{du}{ds} + \frac{w}{R_o} - \Omega_b - \frac{k_n F_n}{GA} = 0 && \frac{dF_n}{ds} + \frac{F_t}{R_o} + p_n = 0 \\
&\frac{dv}{ds} + \Omega_n - \frac{k_b F_b}{GA} = 0 && \frac{dF_b}{ds} + p_b = 0 \\
&\frac{dw}{ds} - \frac{u}{R_o} - \frac{F_t}{EA} = 0 && \frac{dF_t}{ds} - \frac{F_n}{R_o} + p_t = 0 \\
&\frac{d\Omega_n}{ds} + \frac{\Omega_t}{R_o} - \frac{M_n}{EI_n} = 0 && \frac{dM_n}{ds} + \frac{M_t}{R_o} - F_b + m_n = 0 \\
&\frac{d\Omega_b}{ds} - \frac{M_b}{EI_b} = 0 && \frac{dM_b}{ds} + F_n + m_b = 0 \\
&\frac{d\Omega_t}{ds} - \frac{\Omega_n}{R_o} - \frac{M_t}{GJ} = 0 && \frac{dM_t}{ds} - \frac{M_n}{R_o} + m_t = 0
\end{aligned} \qquad \textbf{(3.33)}$$

şeklinde elde edilir.

Bu düzlemsel çubuk denklemlerinde, düzlem içi ve düzlem dışı hareketlere ait büyüklüklerin aynı denklemlerde bulunmaması, $\mathbf{e}_n^0, \mathbf{e}_b^0$ eksenlerinin, kesidin asal ekseni ile çakışmasının bir sonucudur.

Düzlemsel eğri eksenli çubuğun kendi düzlemindeki şekil değiştirmelerini ifade eden denklemlerde, yay uzunluğu yerine $ds = R_o(\phi)d\phi$ eşitliği konarak düzenlenirse; u ve w normal ve teğetsel yer değiştirmeler; ϕ kiriş açıklığı, Ω_b binormal eksen üzerindeki dönme açısı, $R_o(\phi)$ şekil değiştirmemiş çubuğun eksen eğrisinin eğrilik yarıçapı; F_n ve F_b normal ve teğetsel tekil iç kuvvetler; M_b binormal eksen üzerindeki tekil iç moment; p_n ve p_t, normal ve teğetsel eksen üzerindeki yayılı dış yük; m_b binormal eksen üzerindeki yayılı dış momentler olmak üzere,

$$\frac{dw}{d\phi} = u + \frac{R_o(\phi)}{EA(\phi)} F_t$$

$$\frac{du}{d\phi} = -w + \frac{k_n R_o(\phi)}{GA(\phi)} F_n + R_o(\phi)\Omega_b$$

$$\frac{d\Omega_b}{d\phi} = \frac{R_o(\phi)}{EI_b(\phi)} M_b$$

$$\frac{dM_b}{d\phi} = -R_o(\phi)F_n - R_o(\phi)\, m_b \qquad \textbf{(3.34)}$$

$$\frac{dF_t}{d\phi} = F_n - R_o(\phi)\, p_t$$

$$\frac{dF_n}{d\phi} = -F_t - R_o(\phi)\, p_n$$

denklemleri elde edilir. Benzer şekilde düzlem dışı harekete ait denklemler;

$$\frac{dv}{d\phi} = -R_o(\phi)\Omega_n + \frac{k_b F_b}{GA(\phi)} R_o(\phi)$$

$$\frac{d\Omega_n}{d\phi} = -\Omega_t + \frac{R_o(\phi)}{EI_n(\phi)} M_n$$

$$\frac{d\Omega_t}{d\phi} = \Omega_n + \frac{R_o(\phi)}{GJ(\phi)} M_t$$

$$\frac{dF_b}{d\phi} = -R_o(\phi)\, p_b \qquad \textbf{(3.35)}$$

$$\frac{dM_n}{d\phi} = -M_t + R_o(\phi)F_b - R_o(\phi)m_n$$

$$\frac{dM_t}{d\phi} = M_n - R_o(\phi)m_t$$

olarak elde edilir. Burada v binormal yer değiştirme, Ω_n ve Ω_t normal ve teğetsel eksen üzerindeki dönme açıları, F_b binormal iç kuvvet, M_n ve M_t normal ve teğetsel eksen üzerindeki iç momentler, p_b binormal eksen üzerindeki yayılı dış yük, m_n ve m_t normal ve teğetsel eksen üzerindeki yayılı dış momentler şeklinde tanımlanabilir.

4. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN STATİK PROBLEMLERİNİN KESİN ÇÖZÜMÜ

Eğri eksenli çubukların düzlem içi ve düzlem dışı statik problemlerinin kesin çözümü, çubuk eksen eğrisi ve kesiti ne olursa olsun, yer değiştirmelerin ve kesit tesirlerinin çubuk eksen eğrisi boyunca belirlenmesine imkan verecek şekilde, başlangıç değerleri yöntemi ile elde edilebilmektedir. Burada, kesin çözüm yönteminden bahsedilerek, sabit kesitli ve çember eksenli çubuk için çözüm verilecektir. Sonraki bölümde bu çözüm, sonlu eleman formülasyonunda rijitlik ve kütle matrisleri ve yük vektörünü elde etmek için kullanılacaktır.

4.1 Düzlem İçi Statik Problemlerin Başlangıç Değerleri Yöntemi ile Çözümü

Eğri eksenli çubukların kendi düzlemindeki şekil değiştirmelerine ait (3.34) denklemleri, birinci dereceden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemlerden oluşmaktadır. Denklemler matris şeklinde ifade edildiğinde;

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\phi} = \mathbf{A}(\phi)\mathbf{y} + \mathbf{f}(\phi) \tag{4.1}$$

Burada , $\mathbf{y}(\phi)$ 6 elemanlı değişkenler vektörünü ve $\mathbf{A}(\phi)$, 6×6 elemanlı katsayılar matrisini, $\mathbf{f}(\phi)$ ise 6 elemanlı yayılı dış yüklere ait bileşke vektörünü ifade etmektedir. Denklemin çözümü,

$$\mathbf{y}(\phi) = \mathbf{Y}(\phi,\phi_o)\mathbf{y}_o + \mathbf{Y}(\phi,\phi_o)\int_{\phi_o}^{\phi} \mathbf{Y}^{-1}(\xi,\phi_o)\mathbf{f}(\xi)d\xi \tag{4.2}$$

olarak elde edilir.

$\phi_0 = 0$ olarak belirlenen doğrultu, referans doğrultusu olarak alınmaktadır. Burada $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(\phi_0)$, sınır şartlarından elde edilen başlangıç değerleri vektörü ve $\mathbf{Y}(\phi,\phi_o)$ referans koordinatına ait asal matristir. $\mathbf{f}(\phi)$ vektörünün özdeş olarak sıfır olması yani, çubuk üzerine hiçbir yayılı kuvvet ya da momentin etkimemesi durumunda, çubuğun

kendi düzlemindeki statik davranışını ifade eden denklemler, homojen diferansiyel denklemlerdir ve,

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\phi} = \mathbf{A}(\phi)\mathbf{y}(\phi) \tag{4.3}$$

şeklinde ifade edilirler.

Tekil kuvvet ve momentlerin etkidiği çubuğa ait denklemlerin çözümü,

$$\mathbf{y}(\phi) = \mathbf{Y}(\phi, \phi_0)\mathbf{y}_0 \tag{4.4}$$

şeklinde verilir.

$\mathbf{f}(\phi)$ vektörünün bulunmadığı yani çubuk üzerine hiçbir yayılı yük ya da momentin etkimediği durumda $\mathbf{Y}(\phi, \phi_o)$ asal matrisi,

$$\frac{d\mathbf{Y}(\phi, \phi_0)}{d\phi} = \mathbf{A}(\phi)\mathbf{Y}(\phi, \phi_0), \qquad \mathbf{Y}(\phi_o, \phi_o) = \mathbf{I} \tag{4.5}$$

şeklinde ifade edilir. Burada, **I** birim matrisi göstermektedir.

Eksen eğrisinin normal ve binormal doğrultularının, kesitin asal doğrultularıyla çakıştığı durumu belirleyen (3.34)'da verilen denklem takımının homojen kısmı,

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{d\phi} &= u + \frac{R_o(\phi)}{EA(\phi)} F_t \\
\frac{du}{d\phi} &= -w + \frac{k_n R_o(\phi)}{GA(\phi)} F_n + R_o(\phi)\Omega_b \\
\frac{d\Omega_b}{d\phi} &= \frac{R_o(\phi)}{EI_b(\phi)} M_b \\
\frac{dM_b}{d\phi} &= -R_o(\phi) F_n \\
\frac{dF_t}{d\phi} &= F_n \\
\frac{dF_n}{d\phi} &= -F_t
\end{aligned} \tag{4.6}$$

olarak elde edilir.

Denklemler matris şeklinde ifade edildiğinde;

$$\frac{d}{d\phi}\begin{bmatrix} w \\ u \\ \Omega_b \\ F_t \\ F_n \\ M_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{R_o(\phi)}{EA(\phi)} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & R_o(\phi) & 0 & \frac{k_n R_o(\phi)}{GA(\phi)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{R_o(\phi)}{EI_b(\phi)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -R_o(\phi) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \\ \Omega_b \\ F_t \\ F_n \\ M_b \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.7)}$$

yazılabilir.

Denklem takımı içerisinde teğetsel kuvvet vektörünün türevini içeren dördüncü denklem bir kez türetildiğinde elde edilen,

$$\frac{d^2F_t}{d\phi^2} = \frac{dF_n}{d\phi} \quad \textbf{(4.8)}$$

denklemi beşinci denklemde yerine koyulursa,

$$\frac{d^2F_t}{d\phi^2} + F_t = 0 \quad \textbf{(4.9)}$$

şeklinde ikinci dereceden bir diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklemin çözümü,

$$F_t = A\cos\phi + B\sin\phi \quad \textbf{(4.10)}$$

olarak ifade edilir. Buradan,

$$F_n = -A\sin\phi + B\cos\phi \quad \textbf{(4.11)}$$

olarak elde edilir. F_{to} ve F_{no} , $\phi = 0$ başlangıç noktasındaki tekil kuvvetler olmak üzere, (4.10) ve (4.11) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} A &= F_{to} \\ B &= F_{no} \end{aligned} \quad \textbf{(4.12)}$$

bulunur.

Böylece,

$$F_t = F_{no}\sin\phi + F_{to}\cos\phi$$
$$F_n = F_{no}\cos\phi - F_{to}\sin\phi \qquad \textbf{(4.13)}$$

olarak elde edilir. F_n'i veren denklem, (4.6) içerisinde M_b momentinin türevini içeren altıncı denklemde yerine konulursa,

$$\frac{dM_b}{d\phi} = -R(\phi)F_{no}\cos\phi + R(\phi)F_{to}\sin\phi \qquad \textbf{(4.14)}$$

elde edilir. Bu denklem bir kez integre edildiğinde,

$$M_b = M_{bo} + \int_0^{\phi} R(\psi)\sin\psi d\psi F_{to} - \int_0^{\phi} R(\psi)\cos\psi d\psi F_{no} \qquad \textbf{(4.15)}$$

ifadesine ulaşılır. M_b'yi veren bu denklem Ω_b kesitin dönmesini içeren, (4.6)'nın üçüncü denkleminde yerine konulursa,

$$\frac{d\Omega_b}{d\phi} = \frac{R}{EI_b(\phi)}(M_{bo} + \int_0^{\phi} R(\psi)\sin\psi d\psi F_{to} - \int_0^{\phi} R(\psi)\cos\psi d\psi F_{no}) \qquad \textbf{(4.16)}$$

elde edilir. Bu denklem integre edilerek kesitin binormal eksene göre dönmesini veren,

$$\Omega_b = \Omega_{bo} + \int_0^{\phi}\frac{R(\psi)}{EI_b(\psi)}d\psi M_{bo} + \int_0^{\phi}\frac{R(\psi)}{EI_b(\psi)}\int_0^{\psi} R(\xi)\sin\xi\, d\,\xi\, d\,\psi\, F_{to} - \int_0^{\phi}\frac{R(\psi)}{EI_b(\psi)}\int_0^{\psi} R(\xi)\cos\xi\, d\,\xi\, d\,\psi\, F_{no} \qquad \textbf{(4.17)}$$

ifadesine ulaşılır. Çubuk ekseninin normal ve teğet ekseni doğrultusundaki yer değiştirmelerini veren (4.6)'nın birinci ve ikinci denklemleri,

$$f_1(\phi) = \frac{R(\phi)}{k_n}GA(\phi)F_n + R(\phi)\Omega_b, \qquad f_2(\phi) = \frac{R(\phi)}{EA(\phi)}F_t \qquad \textbf{(4.18)}$$

olmak üzere,

$$\frac{du}{d\phi} = -w + f_1(\phi), \qquad \frac{dw}{d\phi} = u + f_2(\phi) \tag{4.19}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklem takımının homojen çözümü, $\phi = \phi_o$ başlangıç noktasında, w_o ve u_o başlangıç değerleri olmak üzere,

$$\begin{aligned} u &= u_o \cos\phi - w_o \sin\phi \\ w &= u_o \sin\phi + w_o \cos\phi \end{aligned} \tag{4.20}$$

şeklinde elde edilir. Matris gösterimi ile,

$$\begin{aligned} &\mathbf{y}(\phi) = \mathbf{Y}(\phi, \phi_o)\mathbf{y}_o \\ &\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_o \\ w_o \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{4.21}$$

olarak ifade edilir. (4.1) denklemine uygulanıldığında,

$$\begin{aligned} &\frac{d\mathbf{y}}{d\phi} = \mathbf{A}(\phi)\mathbf{y} + \mathbf{f}(\phi) \\ &\frac{d}{d\phi}\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dfrac{R(\phi)}{k_n} GAF_{no} + R(\phi)\Omega_{bo} \\ \dfrac{R(\phi)}{EA} F_{to} \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{4.22}$$

denklemi elde edilir. (4.2) denkleminde,

$$\mathbf{Y}^{-1}(\phi, \phi_o) = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

olarak yerine konulursa,

$$\begin{aligned} &\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_o \\ w_o \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \int_{\phi_o}^{\phi} \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{R(\phi)}{k_n} GA(\phi)F_{no} + R(\phi)\Omega_{bo} \\ \dfrac{R(\phi)}{EA(\phi)} F_{to} \end{Bmatrix} d\xi \end{aligned} \tag{4.24}$$

elde edilir. Bu denklemin çözümünden normal ve teğetsel yer değiştirmeler,

$$u = -\sin\phi w_o + \cos\phi\, u_o + \left[\sin\phi \int_0^{\phi} R(\psi)\sin\psi\, d\psi + \cos\phi \int_0^{\phi} R(\psi)\cos\psi\, d\psi \right] \Omega_{bo} +$$

$$\left[\sin\phi \int_0^{\phi} R(\psi)\sin\psi \int_0^{\psi} \frac{R(\xi)}{EI_b(\xi)}\, d\xi\, d\psi + \cos\phi \int_0^{\phi} R(\psi)\cos\psi \int_0^{\psi} \frac{R(\xi)}{EI_b(\xi)}\, d\xi\, d\psi \right] M_{bo}$$

$$+ \left\{ -\sin\phi \int_0^{\phi} R(\psi) \left[\frac{\cos^2\psi}{EA(\psi)} + \frac{k_n \sin^2\psi}{GA(\psi)} - \sin\psi \int_0^{\psi} \frac{R(\xi)}{EI_b(\xi)} \int_0^{\xi} R(\theta)\sin\theta\, d\theta\, d\xi \right] d\psi \right.$$

$$\left. + \cos\phi \int_0^{\phi} R(\psi)\cos\psi \left[\frac{\sin\psi}{EA(\psi)} - \frac{k_n \sin\psi}{GA(\psi)} + \int_0^{\psi} \frac{R(\xi)}{EI_b(\xi)} \int_0^{\xi} R(\theta)\sin\theta\, d\theta\, d\xi \right] d\psi \right\} F_{to}$$

$$+ \left\{ \cos\phi \int_0^{\phi} R(\psi) \left[\frac{\sin^2\psi}{EA(\psi)} + \frac{k_n \cos^2\psi}{GA(\psi)} - \cos\psi \int_0^{\psi} \frac{R(\xi)}{EI_b(\xi)} \int_0^{\xi} R(\theta)\cos\theta\, d\theta\, d\xi \right] d\psi \right.$$

$$\left. - \sin\phi \int_0^{\phi} R(\psi)\sin\psi \left[\frac{\cos\psi}{EA(\psi)} - \frac{k_n \cos\psi}{GA(\psi)} + \int_0^{\psi} \frac{R(\xi)}{EI_b(\xi)} \int_0^{\xi} R(\theta)\cos\theta\, d\theta\, d\xi \right] d\psi \right\} F_{no}$$

(4.25)

ve

$$w = \cos\phi\, w_o + \sin\phi\, u_o + \left[\sin\phi \int_0^{\phi} R(\psi)\cos\psi\, d\psi - \cos\phi \int_0^{\phi} R(\psi)\sin\psi\, d\psi \right] \Omega_{bo}$$

$$+ \left[\sin\phi \int_0^{\phi} R(\psi)\cos\psi \int_0^{\psi} \frac{R(\xi)}{EI_b(\xi)} d\xi\, d\psi - \cos\phi \int_0^{\phi} R(\psi)\sin\psi \int_0^{\psi} \frac{R(\xi)}{EI_b(\xi)} d\xi\, d\psi \right] M_{bo}$$

$$+ \left\{ \cos\phi \int_0^{\phi} R(\psi) \left[\frac{\cos^2\psi}{EA(\psi)} + \frac{k_n \sin^2\psi}{GA(\psi)} - \sin\psi \int_0^{\psi} \frac{R(\xi)}{EI_b(\xi)} \int_0^{\xi} R(\theta)\sin\theta\, d\theta\, d\xi \right] d\psi \right.$$

$$\left. + \sin\phi \int_0^{\phi} R(\psi)\cos\psi \left[\frac{\sin\psi}{EA(\psi)} - \frac{k_n \sin\psi}{GA(\psi)} + \int_0^{\psi} \frac{R(\xi)}{EI_b(\xi)} \int_0^{\xi} R(\theta)\sin\theta\, d\theta\, d\xi \right] d\psi \right\} F_{to}$$

$$+ \left\{ \cos\phi \int_0^{\phi} R(\psi)\sin\psi \left[\frac{\cos\psi}{EA(\psi)} - \frac{k_n \cos\psi}{GA(\psi)} + \int_0^{\psi} \frac{R(\xi)}{EI_b(\xi)} \int_0^{\xi} R(\theta)\cos\theta\, d\theta\, d\xi \right] d\psi \right.$$

$$\left. + \sin\phi \int_0^{\phi} R(\psi) \left[\frac{\sin^2\psi}{EA(\psi)} + \frac{k_n \cos^2\psi}{GA(\psi)} - \cos\psi \int_0^{\psi} \frac{R(\xi)}{EI_b(\xi)} \int_0^{\xi} R(\theta)\cos\theta\, d\theta\, d\xi \right] d\psi \right\} F_{no}$$

(4.26)

olarak bulunur. u_o, w_o, Ω_{bo}, F_{no}, F_{to}, M_{bo} büyüklükleri, $\phi = \phi_o$ başlangıç noktasına ait bilinen değerlerdir.

Elde edilen, (4.13), (4.15), (4.17), (4.25), (4.26) eşitlikleri kısaltmalar yardımıyla ifade edilebilir.

$$\begin{aligned}
w &= Y_{11}w_o + Y_{12}u_o + Y_{13}\Omega_{bo} + Y_{14}F_{to} + Y_{15}F_{no} + Y_{16}M_{bo} \\
u &= Y_{21}w_o + Y_{22}u_o + Y_{23}\Omega_{bo} + Y_{24}F_{to} + Y_{25}F_{no} + Y_{26}M_{bo} \\
\Omega_b &= Y_{31}w_o + Y_{32}u_o + Y_{33}\Omega_{bo} + Y_{34}F_{to} + Y_{35}F_{no} + Y_{36}M_{bo} \\
F_t &= Y_{41}w_o + Y_{42}u_o + Y_{43}\Omega_{bo} + Y_{44}F_{to} + Y_{45}F_{no} + Y_{46}M_{bo} \\
F_n &= Y_{51}w_o + Y_{52}u_o + Y_{53}\Omega_{bo} + Y_{54}F_{to} + Y_{55}F_{no} + Y_{56}M_{bo} \\
M_b &= Y_{61}w_o + Y_{62}u_o + Y_{63}\Omega_{bo} + Y_{64}F_{to} + Y_{65}F_{no} + Y_{66}M_{bo}
\end{aligned} \qquad \textbf{(4.27)}$$

Böylece, eğri eksenli çubuk için kesit ve eksen eğrisinden bağımsız bir asal matris elde edilmiş olur.

$$Y = \begin{bmatrix}
Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} & Y_{15} & Y_{16} \\
Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} & Y_{25} & Y_{26} \\
Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} & Y_{35} & Y_{36} \\
Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} & Y_{45} & Y_{46} \\
Y_{51} & Y_{52} & Y_{53} & Y_{54} & Y_{55} & Y_{56} \\
Y_{61} & Y_{62} & Y_{63} & Y_{64} & Y_{65} & Y_{66}
\end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.28)}$$

Elde edilen çözüm, çubuk ekseninin eğrisi, kesitin değişim fonksiyonu, mesnetleme şartları belli olan her çubuğa uygulanabilecek genel bir çözümdür. Hiperstatik problemlerin çözümü de oldukça kolay bir şekilde yapılabilmektedir. Bir başka deyişle, birinci mertebeden, değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem takımı olan genel denklemlerin kesin çözümü elde edilmiş olmaktadır. Eksenel uzama, kayma, dönme rijitlikleri ve eğrilik yarıçapı terimleri sabit olarak kabul edilirse, sabit katsayılı bir diferansiyel denklem takımı elde edilir. Bu, sabit kesitli çember eksenli çubuğa ait denklem takımıdır. Bu durum için, çözüm ifadelerinde yer alan integrallerin hesaplanması daha kolay olmaktadır. İntegraller, sembolik hesap yapabilen bir paket program ile hesaplanmıştır. Çember eksenli ve sabit kesitli çubuk için çözümü ifade eden asal matrisin sıfırdan farklı elemanları aşağıda verilmektedir.

$$Y_{11}=\cos\phi\,;Y_{12}=\sin\phi\,;\;Y_{13}=R_o(1-\cos\phi);$$

$$Y_{14}=\frac{R_o}{2A_o}\left[\sin\phi\left(\frac{1}{E}-\frac{k_n}{G}\right)+\phi\cos\phi\left(\frac{1}{E}+\frac{k_n}{G}\right)\right]+\frac{R_o^3}{2EI_{bo}}\phi(\cos\phi+2)-\frac{3R_o^{\,3}}{2EI_{bo}}\sin\phi\,;$$

$$Y_{15}=\frac{R_o}{2A_o}\phi\sin\phi\left(\frac{1}{E}+\frac{k_n}{G}\right)+\frac{R_o^3}{2EI_{bo}}(-2+2\cos\phi+\phi\sin\phi)\,;\;Y_{16}=\frac{R_o^2}{EI_{bo}}(\phi-\sin\phi);$$

$$Y_{21}=-\sin\phi\,;\;Y_{22}=\cos\phi\,;Y_{23}=R_o\sin\phi\,;$$

$$Y_{24}=-\frac{R_o}{2A_o}\phi\sin\phi\left(\frac{1}{E}+\frac{k_n}{G}\right)+\frac{R_o^{\,3}}{2EI_{bo}}(2-2\cos\phi-\phi\sin\phi);$$

$$Y_{25}=\frac{R_o}{2A_o}\left[\phi\cos\phi\left(\frac{1}{E}+\frac{k_n}{G}\right)-\sin\phi\left(\frac{1}{E}-\frac{k_n}{G}\right)\right]+\frac{R_o^{\,3}}{2EI_{bo}}(\phi\cos\phi-\sin\phi)\,;$$

$$Y_{26}=\frac{R_o^{\,2}}{EI_{bo}}(1-\cos\phi)\,;\;\;Y_{33}=1\,;\;Y_{34}=\frac{R_o^2}{EI_{bo}}(\phi-\sin\phi)\,;$$

$$Y_{35}=\frac{R_o^{\,2}}{EI_{bo}}(-1+\cos\phi)\,;Y_{36}=\frac{R_o\phi}{EI_{bo}}\,;\;Y_{44}=\cos\phi;\;Y_{45}=\sin\phi;$$

$$Y_{54}=-\sin\phi;\;\;Y_{55}=\cos\phi;\;Y_{64}=R_o(1-\cos\phi);Y_{65}=-R_o\sin\phi;\;Y_{66}=1$$

(4.29)

4.2 Düzlem Dışı Statik Problemlerin Başlangıç Değerleri Yöntemi ile Çözümü

Eksen eğrisinin normal ve binormal doğrultularının, kesitin asal doğrultularıyla çakıştığı durumu belirleyen (3.35)'da verilen denklem takımının homojen şekli,

$$\frac{dv}{d\phi}=-R_o(\phi)\Omega_n+\frac{k_b\,F_b}{GA(\phi)}R_o(\phi)$$

$$\frac{d\Omega_n}{d\phi}=-\Omega_t+\frac{R_o(\phi)}{EI_n(\phi)}M_n$$

$$\frac{d\Omega_t}{d\phi}=\Omega_n+\frac{R_o(\phi)}{GJ(\phi)}M_t$$

$$\frac{dF_b}{d\phi}=-R_o(\phi)\,p_b$$

$$\frac{dM_n}{d\phi}=-M_t+R_o(\phi)F_b$$

$$\frac{dM_t}{d\phi}=M_n$$

(4.30)

şeklindedir. Bu denklem takımında altıncı denklem bir kez türetilir ve beşinci denklemde yazılırsa;

$$\frac{d^2M_t}{d\phi^2} + M_t - R_o(\phi)F_b = 0 \qquad \textbf{(4.31)}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin homojen kısmının çözümü;

$$M_t = A\cos\phi + B\sin\phi \qquad \textbf{(4.32)}$$

şeklindedir. Buradan M_n ise;

$$M_n = -A\sin\phi + B\cos\phi \qquad \textbf{(4.33)}$$

şeklinde elde edilir. Başlangıç noktası olarak $\phi_o = 0$ alınır ve buradaki başlangıç değerleri M_{no} ve M_{to} bilinirse (4.31) denkleminin homojen çözümü;

$$\begin{aligned} M_n &= M_{no}\cos\phi - M_{to}\sin\phi \\ M_t &= M_{no}\sin\phi + M_{to}\cos\phi \end{aligned} \qquad \textbf{(4.34)}$$

olarak elde edilir. Matris gösterimiyle

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(\phi) &= \mathbf{Y}(\phi,\phi_0)\mathbf{y}_0 \\ \begin{Bmatrix} M_n \\ M_t \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{no} \\ M_{to} \end{Bmatrix} \end{aligned} \qquad \textbf{(4.35)}$$

şeklinde ifade edilebilir. (4.1) yardımıyla;

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{y}}{d\phi} &= \mathbf{A}(\phi)\mathbf{y} + \mathbf{f}(\phi) \\ \frac{d}{d\phi}\begin{Bmatrix} M_n \\ M_t \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_n \\ M_t \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_o(\phi)F_{bo} \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \qquad \textbf{(4.36)}$$

matrisel diferansiyel denklemi elde edilir. (4.2) denkleminde;

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(\phi) &= \mathbf{Y}(\phi,\phi_o)\mathbf{y}_o + \mathbf{Y}(\phi,\phi_o)\int_0^{\phi} \mathbf{Y}^{-1}(\xi,\phi_o)\mathbf{f}(\xi)d\xi \\ \mathbf{Y}^{-1}(\phi,\phi_o) &= \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad \textbf{(4.37)}$$

olacağından, normal ve teğetsel eksen üzerindeki iç momentler;

$$\begin{Bmatrix} M_n \\ M_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{no} \\ M_{to} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \int_0^{\phi} \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_o(\phi) F_{bo} \\ 0 \end{Bmatrix} d\xi$$

(4.38)

halini alır. İfade düzenlendiğinde;

$$M_n = \cos\phi M_{no} - \sin\phi M_{to} + \cos\phi \int_0^{\phi} R_o(\psi)\cos\psi d\psi F_{bo} + \sin\phi \int_0^{\phi} R_o(\psi)\sin\psi d\psi F_{bo}$$

$$M_t = \sin\phi M_{no} + \cos\phi M_{to} + \sin\phi \int_0^{\phi} R_o(\psi)\cos\psi d\psi F_{bo} - \cos\phi \int_0^{\phi} R_o(\psi)\sin\psi d\psi F_{bo}$$

(4.39)

ifadeleri elde edilir.

Kesitin dönmesini ifade eden (4.30) denklem takımının ikinci ve üçüncü denklemleri matris gösterimiyle;

$$\frac{d}{d\phi} \begin{Bmatrix} \Omega_n \\ \Omega_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Omega_n \\ \Omega_t \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dfrac{R_o(\phi)}{EI_n(\phi)} M_n \\ \dfrac{R_o(\phi)}{GJ(\phi)} M_t \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(4.40)}$$

şeklinde yazılabilir. Başlangıç noktası olarak $\phi_o = 0$ alınır ve buradaki başlangıç değerleri Ω_{no} ve Ω_{to} bilinirse (4.40) denkleminin homojen çözümü;

$$\begin{Bmatrix} \Omega_n \\ \Omega_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Omega_{no} \\ \Omega_{to} \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(4.41)}$$

olarak elde edilir. (4.2) denkleminden faydalanarak;

$$\begin{Bmatrix} \Omega_n \\ \Omega_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Omega_{no} \\ \Omega_{to} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \int_0^{\phi} \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{R_o(\phi)}{EI_n(\phi)} M_n \\ \dfrac{R_o(\phi)}{GJ(\phi)} M_t \end{Bmatrix} d\psi$$

(4.42)

ifadesi elde edilir. Bu denklem açılarak, kesitin normal eksen etrafında dönmesini veren ifade;

$$\Omega_n = \cos\phi\,\Omega_{no} - \sin\phi\,\Omega_{to} + \left\{ \cos\phi \int_0^{\phi} R_o(\psi) \left[\frac{\cos^2\psi}{EI_n(\psi)} + \frac{\sin^2\psi}{GJ(\psi)} \right] d\psi \right.$$

$$\left. + \sin\phi \int_0^{\phi} R_o(\psi) \cos\psi \sin\psi \left(\frac{1}{EI_n(\psi)} - \frac{1}{GJ(\psi)} \right) d\psi \right\} M_{no}$$

$$+ \left\{ \cos\phi \int_0^{\phi} R_o(\psi) \cos\psi \sin\psi \left(\frac{1}{GJ(\psi)} - \frac{1}{EI_n(\psi)} \right) d\psi - \sin\phi \int_0^{\phi} R_o(\psi) \left[\frac{\sin^2\psi}{EI_n(\psi)} \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\cos^2\psi}{GJ(\psi)} \right] d\psi \right\} M_{to} + \left\{ \cos\phi \left[\int_0^{\phi} R_o(\psi) \left[\frac{\cos^2\psi}{EI_n(\psi)} + \frac{\sin^2\psi}{GJ(\psi)} \right] \int_0^{\psi} R_o(\xi) \cos\xi \, d\xi \, d\psi \right. \right.$$

$$\left. + \int_0^{\phi} R_o(\psi) \cos\psi \sin\psi \left(\frac{1}{EI_n(\psi)} - \frac{1}{GJ(\psi)} \right) \int_0^{\psi} R_o(\xi) \sin\xi \, d\xi \, d\psi \right]$$

$$+ \sin\phi \left[\int_0^{\phi} R_o(\psi) \cos\psi \sin\psi \left(\frac{1}{EI_n(\psi)} - \frac{1}{GJ(\psi)} \right) \int_0^{\psi} R_o(\xi) \cos\xi \, d\xi \, d\psi \right.$$

$$\left. \left. + \int_0^{\phi} R_o(\psi) \left[\frac{\sin^2\psi}{EI_n(\psi)} + \frac{\cos^2\psi}{GJ(\psi)} \right] \int_0^{\psi} R_o(\xi) \sin\xi \, d\xi \, d\psi \right] \right\} F_{bo}$$

(4.43)

olarak elde edilir. Kesitin teğetsel eksen etrafında dönmesini veren ifade;

$$\Omega_t = \sin\phi\,\Omega_{no} + \cos\phi\,\Omega_{to} + \left\{ \cos\phi \int_0^{\phi} R_o(\psi) \cos\psi \sin\psi \left(\frac{1}{GJ(\psi)} - \frac{1}{EI_n(\psi)} \right) d\psi \right.$$

$$\left. + \sin\phi \int_0^{\phi} R_o(\psi) \left[\frac{\cos^2\psi}{EI_n(\psi)} + \frac{\sin^2\psi}{GJ(\psi)} \right] d\psi \right\} M_{no} + \left\{ \cos\phi \int_0^{\phi} R_o(\psi) \left[\frac{\sin^2\psi}{EI_n(\psi)} + \frac{\cos^2\psi}{GJ(\psi)} \right] d\psi \right.$$

$$\left. - \sin\phi \int_0^{\phi} R_o(\psi) \cos\psi \sin\psi \left(\frac{1}{EI_n(\psi)} - \frac{1}{GJ(\psi)} \right) d\psi \right\} M_{to}$$

$$+ \left\{ \cos\phi \left[\int_0^{\phi} R_o(\psi) \cos\psi \sin\psi \left(\frac{1}{GJ(\psi)} - \frac{1}{EI_n(\psi)} \right) \int_0^{\psi} R_o(\xi) \cos\xi \, d\xi \, d\psi \right. \right.$$

$$\left. - \int_0^{\phi} R_o(\psi) \left[\frac{\sin^2\psi}{EI_n(\psi)} + \frac{\cos^2\psi}{GJ(\psi)} \right] \int_0^{\psi} R_o(\xi) \sin\xi \, d\xi \, d\psi \right]$$

$$+ \sin\phi \left[\int_0^{\phi} R_o(\psi) \left[\frac{\cos^2\psi}{EI_n(\psi)} + \frac{\sin^2\psi}{GJ(\psi)} \right] \int_0^{\psi} R_o(\xi) \cos\xi \, d\xi \, d\psi \right.$$

$$\left. \left. + \int_0^{\phi} R_o(\psi) \cos\psi \sin\psi \left(\frac{1}{EI_n(\psi)} - \frac{1}{GJ(\psi)} \right) \int_0^{\psi} R_o(\xi) \sin\xi \, d\xi \, d\psi \right] \right\} F_{bo}$$

(4.44)

olarak elde edilir.

Çubuk eğrisinin binormal eksen doğrultusundaki yer değiştirmesi, v_o, $\phi_o = 0$ noktasındaki başlangıç değeri olmak üzere, (4.30) denklem takımındaki birinci denklem ve (4.43) denklemi kullanılarak;

$$
\begin{aligned}
v = v_o &- \int_0^{\phi} R_o(\psi)\cos\psi\, d\psi\, \Omega_{no} + \int_0^{\phi} R_o(\psi)\sin\psi\, d\psi\, \Omega_{to} \\
&- \left\{ \int_0^{\phi} R_o(\psi)\cos\psi \int_0^{\psi} R_o(\xi)\left[\frac{\cos^2\xi}{EI_n(\xi)} + \frac{\sin^2\xi}{GJ(\xi)} \right] d\xi\, d\psi \right. \\
&+ \left. \int_0^{\phi} R_o(\psi)\sin\psi \int_0^{\psi} R_o(\xi)\cos\xi\sin\xi \left(\frac{1}{EI_n(\xi)} - \frac{1}{GJ(\xi)} \right) d\xi d\psi \right\} M_{no} \\
&- \left\{ \int_0^{\phi} R_o(\psi)\cos\psi \int_0^{\psi} R_o(\xi)\cos\xi\sin\xi \left(\frac{1}{GJ(\xi)} - \frac{1}{EI_n(\xi)} \right) d\xi d\psi \right. \\
&- \left. \int_0^{\phi} R_o(\psi)\sin\psi \int_0^{\psi} R_o(\xi)\left[\frac{\sin^2\xi}{EI_n(\xi)} + \frac{\cos^2\xi}{GJ(\xi)} \right] d\xi d\psi \right\} M_{to} \\
&+ \left\{ \int_0^{\phi} \frac{k_b R_o(\psi)}{GA(\psi)} d\psi - \int_0^{\phi} R_o(\psi)\cos\psi \left[\int_0^{\psi} R_o(\xi)\left[\frac{\cos^2\xi}{EI_n(\xi)} + \frac{\sin^2\xi}{GJ(\xi)} \right] \int_0^{\xi} R_o(\theta)\cos\theta\, d\theta\, d\xi \right. \right. \\
&+ \left. \left. \int_0^{\psi} R_o(\xi)\cos\xi\sin\xi \left(\frac{1}{EI_n(\xi)} - \frac{1}{GJ(\xi)} \right) \int_0^{\xi} R_o(\theta)\sin\theta\, d\theta\, d\xi \right] d\psi \right. \\
&- \int_0^{\phi} R_o(\psi)\sin\psi \left[\int_0^{\psi} R_o(\xi)\cos\xi\sin\xi \left(\frac{1}{EI_n(\xi)} - \frac{1}{GJ(\xi)} \right) \int_0^{\xi} R_o(\theta)\cos\theta\, d\theta\, d\xi \right. \\
&+ \left. \left. \int_0^{\psi} R_o(\xi)\left[\frac{\sin^2\xi}{EI_n(\xi)} + \frac{\cos^2\xi}{GJ(\xi)} \right] \int_0^{\xi} R_o(\theta)\sin\theta\, d\theta\, d\xi \right] d\psi \right\} F_{bo}
\end{aligned}
\qquad \textbf{(4.45)}
$$

Elde edilen, (4.39), (4.43), (4.44), (4.45) eşitlikleri kısaltmalar yardımıyla ifade edilebilir.

$$
\begin{aligned}
v &= Y_{11}v_o + Y_{12}\Omega_{no} + Y_{13}\Omega_{to} + Y_{14}F_{bo} + Y_{15}M_{no} + Y_{16}M_{to} \\
\Omega_n &= Y_{21}v_o + Y_{22}\Omega_{no} + Y_{23}\Omega_{to} + Y_{24}F_{bo} + Y_{25}M_{no} + Y_{26}M_{to} \\
\Omega_t &= Y_{31}v_o + Y_{32}\Omega_{no} + Y_{33}\Omega_{to} + Y_{34}F_{bo} + Y_{35}M_{no} + Y_{36}M_{to} \\
F_b &= Y_{41}v_o + Y_{42}\Omega_{no} + Y_{43}\Omega_{to} + Y_{44}F_{bo} + Y_{45}M_{no} + Y_{46}M_{to} \\
M_n &= Y_{51}v_o + Y_{52}\Omega_{no} + Y_{53}\Omega_{to} + Y_{54}F_{bo} + Y_{55}M_{no} + Y_{56}M_{to} \\
M_t &= Y_{61}v_o + Y_{62}\Omega_{no} + Y_{63}\Omega_{to} + Y_{64}F_{bo} + Y_{65}M_{no} + Y_{66}M_{to}
\end{aligned}
\qquad \textbf{(4.46)}
$$

Böylece, (4.28) ile benzer olarak, eğri eksenli çubuk için kesit ve eksen eğrisinden bağımsız bir asal matris elde edilmiş olur.

Elde edilen çözüm, çubuk ekseninin eğrisi, kesitin değişim fonksiyonu, mesnetleme şartları belli olan her çubuğa uygulanabilecek genel bir çözümdür. Bir başka deyişle, birinci mertebeden, değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem takımı olan genel denklemlerin kesin çözümü elde edilmiş olmaktadır. Çember eksenli ve sabit kesitli çubuk için çözümü ifade eden asal matrisin sıfırdan farklı elemanları aşağıda verilmektedir.

$$Y_{11}=1; \quad Y_{12}=-R_o\sin\phi; \quad Y_{13}=R_o(1-\cos\phi);$$

$$Y_{14}=\frac{k_b R_o\,\phi}{GA_o}+\frac{R_o^3}{GJ_o}\left(\phi+\frac{1}{2}\phi\cos\phi-\frac{3}{2}\sin\phi\right)+\frac{R_o^3}{2EI_{no}}\left(\phi\cos\phi-\sin\phi\right);$$

$$Y_{15}=\frac{R_o^2}{GJ_o}\left(1-\cos\phi-\frac{1}{2}\phi\sin\phi\right)-\frac{R_o^2\phi\sin\phi}{2EI_{no}}; \quad Y_{16}=\frac{R_o^2}{2}\left(\frac{1}{EI_{no}}+\frac{1}{GJ_o}\right)\left(\sin\phi-\phi\cos\phi\right);$$

$$Y_{22}=\cos\phi; \quad Y_{23}=-\sin\phi; \quad Y_{24}=\frac{R_o^2\phi\sin\phi}{2EI_{no}}+\frac{R_o^2}{GJ_o}\left(\cos\phi+\frac{1}{2}\phi\sin\phi-1\right);$$

$$Y_{32}=\sin\phi; \quad Y_{33}=\cos\phi; \quad Y_{34}=\frac{R_o^2}{2}\left(\frac{1}{EI_{no}}+\frac{1}{GJ_o}\right)\left(\sin\phi-\phi\cos\phi\right);$$

$$Y_{35}=\frac{R_o\,\phi\sin\phi}{2}\left(\frac{1}{EI_{no}}+\frac{1}{GJ_o}\right); \quad Y_{36}=\frac{R_o}{2GJ_o}\left(\phi\cos\phi+\sin\phi\right)+\frac{R_o}{2EI_{no}}\left(\phi\cos\phi-\sin\phi\right);$$

$$Y_{44}=1; \quad Y_{54}=R_o\sin\phi; \quad Y_{55}=\cos\phi; \quad Y_{56}=-\sin\phi; \quad Y_{64}=R_o(1-\cos\phi);$$

$$Y_{65}=\sin\phi; \quad Y_{66}=\cos\phi \qquad \textbf{(4.47)}$$

5. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN STATİK PROBLEMLERİNİN ANALİTİK ÇÖZÜMÜNÜN SONLU ELEMAN YÖNTEMİNE UYARLANMASI

5.1 Sonlu Eleman Formülasyonu

Sonlu eleman yöntemi, bilgisayar teknolojisinin gelişmesiyle birlikte günümüzde mühendislik problemlerinin çözümünde yaygın olarak kullanılır hale gelmiştir. Sonlu elemanlar yönteminde yapı, davranışı daha önce belirlenmiş olan elemanlara bölünür. Elemanlar, "nod" adı verilen noktalarda birleşmektedirler. Her bir yapı sınıfını modellemek için farklı eleman tipleri oluşturulur. İki boyutu, üçüncü boyutunun yanında çok küçük olan, ekseni ve normal kesitiyle tanımlı olan elemana kiriş eleman adı verilir. Eğri eksenli çubuklar için bugüne kadar önerilen sonlu eleman formülasyonlarının büyük çoğunluğu, yer değiştirmelerin çubuk ekseni boyunca değişimini ifade eden yaklaşık fonksiyonlar önerilerek oluşturulmuştur. Eğri eksenli çubuklarda yer değiştirme bileşenleri, önerilen yaklaşık fonksiyonlardan çok daha karmaşık ifadeler olduğu için bu fonksiyonlar eğri eksenli çubukları modelleyebilmek için yetersiz kalmaktadır. Bu bölümde eğri eksenli çubuklar için elde edilen kesin çözümden faydalanarak bir sonlu eleman formülasyonu oluşturulacaktır.

5.1.1 Rijitlik matrisi

Üzerine tekil kuvvet ve momentlerin etkidiği eğri eksenli çubuğun statik problemine ait çözüm, ister düzlem dışı ister düzlem içi problem olsun,

$$\mathbf{y}(\phi) = \mathbf{Y}(\phi, \phi_o)\,\mathbf{y}_o \qquad \textbf{(5.1)}$$

olarak ifade edilebilir. $\phi = \phi_o$ değeri için başlangıç değerleri vektörü $\mathbf{y}_o$ biliniyorsa, yer değiştirmeler, dönmeler, iç kuvvetler ve iç momentler hesaplanabilir. $\mathbf{y}(\phi)$ ve $\mathbf{y}_o$ vektörlerinin ilk üç elemanını yer değiştirme ve dönmeler, son üç elemanını ise iç kuvvet ve iç momentler oluşturmaktadır. O halde bu vektörleri,

$$\mathbf{y}(\phi)=\begin{Bmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{F}\end{Bmatrix};\quad \mathbf{y}_o=\begin{Bmatrix}\mathbf{X}_o\\ \mathbf{F}_o\end{Bmatrix} \tag{5.2}$$

biçiminde alt matrislere ayırarak ifade etmek mümkündür. Buradaki alt matrisler, düzlem içi problemlerde;

$$\mathbf{X}=\begin{Bmatrix}w\\ u\\ \Omega_b\end{Bmatrix};\quad \mathbf{F}=\begin{Bmatrix}F_t\\ F_n\\ M_b\end{Bmatrix};\quad \mathbf{X}_o=\begin{Bmatrix}w_o\\ u_o\\ \Omega_{bo}\end{Bmatrix};\quad \mathbf{F}_o=\begin{Bmatrix}F_{to}\\ F_{no}\\ M_{bo}\end{Bmatrix} \tag{5.3}$$

şeklindeyken, düzlem dışı problemlerde;

$$\mathbf{X}=\begin{Bmatrix}v\\ \Omega_n\\ \Omega_t\end{Bmatrix};\quad \mathbf{F}=\begin{Bmatrix}F_b\\ M_n\\ M_t\end{Bmatrix};\quad \mathbf{X}_o=\begin{Bmatrix}v_o\\ \Omega_{no}\\ \Omega_{to}\end{Bmatrix};\quad \mathbf{F}_o=\begin{Bmatrix}F_{bo}\\ M_{no}\\ M_{to}\end{Bmatrix} \tag{5.4}$$

halini alır. Ayrıca 6×6 boyutundaki asal matris de 3×3 boyutundaki 4 adet alt matrise ayrılırsa, $\phi_o=0$ kabul ederek (5.1) ifadesi;

$$\begin{Bmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{F}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}(\phi) & \mathbf{B}(\phi)\\ \mathbf{C}(\phi) & \mathbf{D}(\phi)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{X}_o\\ \mathbf{F}_o\end{Bmatrix} \tag{5.5}$$

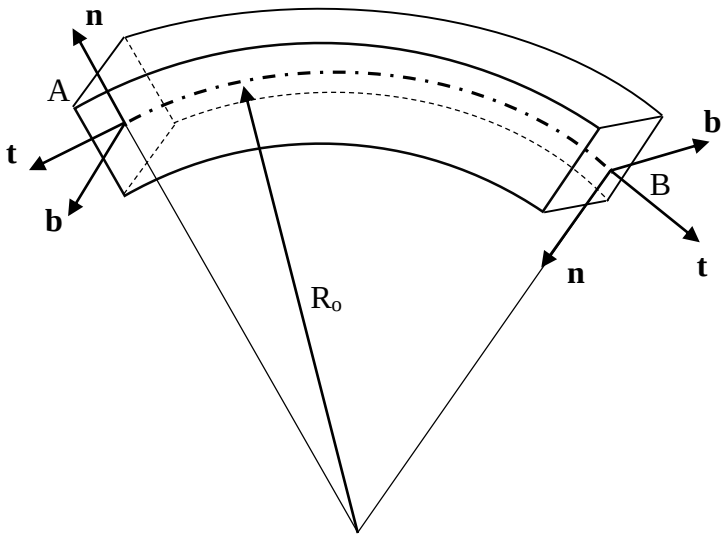
biçiminde yazılabilir. Buradaki alt matrisler;

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\phi)&=\begin{bmatrix}Y_{11} & Y_{12} & Y_{13}\\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23}\\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33}\end{bmatrix};\quad \mathbf{B}(\phi)=\begin{bmatrix}Y_{14} & Y_{15} & Y_{16}\\ Y_{24} & Y_{25} & Y_{26}\\ Y_{34} & Y_{35} & Y_{36}\end{bmatrix}\\ \mathbf{C}(\phi)&=\begin{bmatrix}Y_{41} & Y_{42} & Y_{43}\\ Y_{51} & Y_{52} & Y_{53}\\ Y_{61} & Y_{62} & Y_{63}\end{bmatrix};\quad \mathbf{D}(\phi)=\begin{bmatrix}Y_{44} & Y_{45} & Y_{46}\\ Y_{54} & Y_{55} & Y_{56}\\ Y_{64} & Y_{65} & Y_{66}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{5.6}$$

şeklinde olmaktadır. Bu alt matrisler, düzlem içi problemler için (4.29), düzlem dışı problemler için (4.47) ile verilen ifadeler ile oluşturulmalıdır.

Burada, kesit tesirlerinin kabul edilen pozitif yönleri önemli bir konudur. Dış birim normali, Frenet koordinat takımındaki teğet vektörle aynı yönlü olan kesite pozitif kesit, ters yönlü olan kesite negatif kesit denir. Teoride, pozitif kesite pozitif yönde ve negatif kesite negatif yönde gelen kuvvetler pozitif kabul edilirken, sonlu eleman formülasyonunda kuvvetlerin işareti kesitten bağımsız olarak belirlenir. Fakat yer değiştirme bileşenleri için aynı kural geçerli değildir. Mevcut çalışmada verilen

teoride, kesit tesirleri için kabul edilen pozitif yönler Şekil 5.1'de, sonlu eleman analizinde kullanılan pozitif yönler Şekil 5.2'de görülmektedir.

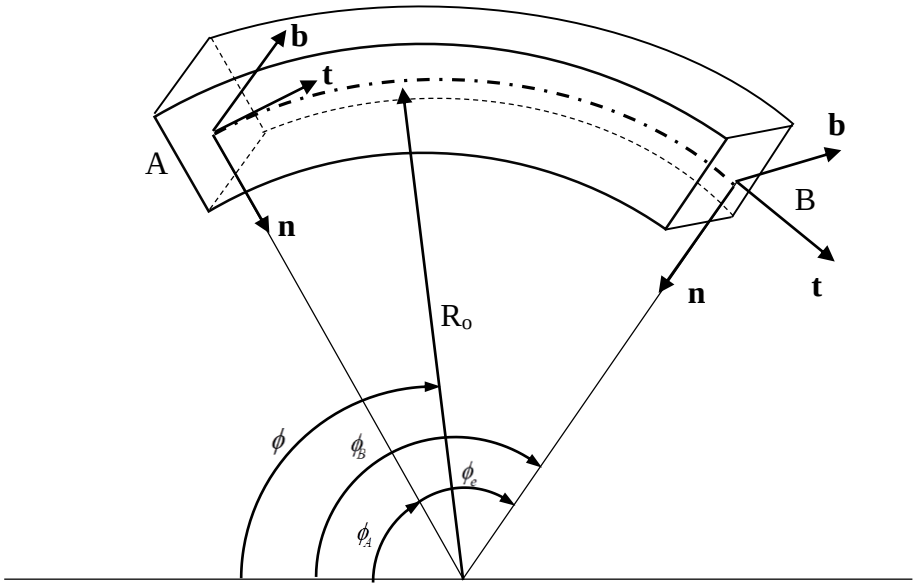


Şekil 5.1: Analitik çözümde kesit tesirleri için kullanılan pozitif yön kabulü.

A noktasındaki kesitin $\phi_A = \phi_o = 0$ noktasında yer aldığı düşünülürse, A noktasından ϕ_e kadar uzaktaki B noktası için;

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{X}_B \\ \mathbf{F}_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\phi_e) & \mathbf{B}(\phi_e) \\ \mathbf{C}(\phi_e) & \mathbf{D}(\phi_e) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_A \\ \mathbf{F}_A \end{Bmatrix} \tag{5.7}$$

yazılabilir.



Şekil 5.2 : Sonlu eleman yönteminde kesit tesirleri için kullanılan pozitif yön kabulü.

Bu eşitlikte, sonlu eleman yöntemi için kullanılan işaret anlaşması gereği,

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{X}_B \\ \mathbf{F}_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\phi_e) & \mathbf{B}(\phi_e) \\ \mathbf{C}(\phi_e) & \mathbf{D}(\phi_e) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_A \\ -\mathbf{F}_A \end{Bmatrix} \tag{5.8}$$

olması gerektiği açıktır. Bu ifade açılırsa;

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_B &= \mathbf{A}(\phi_e)\,\mathbf{X}_A - \mathbf{B}(\phi_e)\,\mathbf{F}_A \\ \mathbf{F}_B &= \mathbf{C}(\phi_e)\,\mathbf{X}_A - \mathbf{D}(\phi_e)\,\mathbf{F}_A \end{aligned} \tag{5.9}$$

eşitlikleri elde edilir. Denklemler, kuvvet ve yer değiştirme ifadeleri eşitliğin ayrı tarafına alınarak düzenlenirse;

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\phi_e)\,\mathbf{F}_A &= \mathbf{A}(\phi_e)\,\mathbf{X}_A - \mathbf{X}_B \\ \mathbf{D}(\phi_e)\,\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B &= \mathbf{C}(\phi_e)\,\mathbf{X}_A \end{aligned} \tag{5.10}$$

eşitlikleri elde edilir. Matris olarak,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}(\phi_e) & \mathbf{O} \\ \mathbf{D}(\phi_e) & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_A \\ \mathbf{F}_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\phi_e) & \mathbf{-I} \\ \mathbf{C}(\phi_e) & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_A \\ \mathbf{X}_B \end{Bmatrix} \tag{5.11}$$

yazılabilir. Burada **I** ve **O**, sırasıyla 3×3 boyutunda birim ve sıfır matrisi ifade eder. Böylece;

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_A \\ \mathbf{F}_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(\phi_e) & \mathbf{O} \\ \mathbf{D}(\phi_e) & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\phi_e) & \mathbf{-I} \\ \mathbf{C}(\phi_e) & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_A \\ \mathbf{X}_B \end{Bmatrix} \tag{5.12}$$

ifadesine ulaşılır. Bu ifade, sonlu eleman formülasyonunun temelini oluşturan,

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\,\mathbf{X} \tag{5.13}$$

eşitliğine benzetilerek, sabit kesitli ve çember eksenli bir çubuk elemanına ait rijitlik matrisi;

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(\phi_e) & \mathbf{O} \\ \mathbf{D}(\phi_e) & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\phi_e) & \mathbf{-I} \\ \mathbf{C}(\phi_e) & \mathbf{O} \end{bmatrix} \tag{5.14}$$

olarak elde edilir. Burada **F** dış yük vektörü, **X** yer değiştirme vektörü ve **K** rijitlik matrisidir.

Elde edilen bu rijitlik matrisi, içerisinde yer alan alt matrislerin ifadeleri değiştirilerek hem düzlem içi hem düzlem dışı problemlerde kullanılabilir. Geleneksel sonlu eleman

yöntemlerinde olduğu gibi yer değiştirme bileşenleri için yaklaşık fonksiyonlar yerine, eksenel uzama ve kayma deformasyonu etkilerini içerer kesin çözümden elde edilen sonuçlar kullanılmıştır.

5.1.2 Yük vektörü

Sonlu eleman yönteminde, çubuk üzerine etkiyen yükler yalnızca nodlarda tanımlanabilir. Üzerine yayılı yük etkiyen çubukları sonlu eleman yöntemiyle incelemek için, bu yayılı yükleri eleman sınırlarındaki nodlara etkiyen tekil yüklere indirgemek gerekir.

Yayılı yükler taşıyan çember eksenli çubuk için (4.1) ifadesindeki yayılı yük terimi;

$$\mathbf{f}(\phi) = -R_o \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ p_t(\phi) \\ p_n(\phi) \\ m_b(\phi) \end{Bmatrix} \text{(Düzlem içi)};\quad \mathbf{f}(\phi) = -R_o \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ p_b(\phi) \\ m_n(\phi) \\ m_t(\phi) \end{Bmatrix} \text{(Düzlem dışı)} \qquad \textbf{(5.15)}$$

şeklindedir. Düzlem içi ve düzlem dışı problemler için ortak bir gösterim olması bakımından,

$$\mathbf{f}(\phi) = -R_o \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p}(\phi) \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(5.16)}$$

yazılabilir. Burada **0,** 3 elemanlı sıfır vektörü, **p** ise yayılı yük bileşenlerinden oluşan 3 elemanlı vektörü ifade etmektedir. Çözüm ifadesi

$$\mathbf{y}(\phi) = \mathbf{Y}(\phi,0)\,\mathbf{y}_o + \mathbf{Y}(\phi,0)\int_0^{\phi} \mathbf{Y}^{-1}(\xi,0)\,\mathbf{f}(\xi)\,d\xi \qquad \textbf{(5.17)}$$

olarak yazılabilir.

Hesapların kolay ve anlaşılır olması bakımından,

$$\mathbf{E}(\phi) = \mathbf{Y}(\phi,0)\int_0^{\phi} \mathbf{Y}^{-1}(\xi,0)\,\mathbf{f}(\xi)\,d\xi$$

$$\mathbf{p}_1(\phi) = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix};\qquad \mathbf{p}_2(\phi) = \begin{bmatrix} E_4 \\ E_5 \\ E_6 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(5.18)}$$

matrisleri tanımlanırsa (5.17) denklemi;

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{F} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\phi) & \mathbf{B}(\phi) \\ \mathbf{C}(\phi) & \mathbf{D}(\phi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_o \\ \mathbf{F}_o \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_1(\phi) \\ \mathbf{p}_2(\phi) \end{Bmatrix} \tag{5.19}$$

şeklinde yazılabilir. Analitik çözüm ile sonlu eleman çözümü arasındaki pozitif yön kabulü farkı göz önüne alınarak; Şekil 5.2'de görülen A noktasındaki kesitin $\phi_A = \phi_o$ noktasında yer aldığı düşünülürse, A noktasından ϕ_e kadar uzaktaki B noktası için (5.8) ifadesine benzer olarak;

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{X}_B \\ \mathbf{F}_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\phi_e) & \mathbf{B}(\phi_e) \\ \mathbf{C}(\phi_e) & \mathbf{D}(\phi_e) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_A \\ -\mathbf{F}_A \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_1(\phi) \\ \mathbf{p}_2(\phi) \end{Bmatrix} \tag{5.20}$$

ifadesi yazılabilir. Bu ifade açılırsa;

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_B &= \mathbf{A}(\phi_e)\,\mathbf{X}_A - \mathbf{B}(\phi_e)\,\mathbf{F}_A + \mathbf{p}_1(\phi_e) \\ \mathbf{F}_B &= \mathbf{C}(\phi_e)\,\mathbf{X}_A - \mathbf{D}(\phi_e)\,\mathbf{F}_A + \mathbf{p}_2(\phi_e) \end{aligned} \tag{5.21}$$

Denklemler, kuvvet ve yer değiştirme ifadeleri eşitliğin ayrı tarafına alınarak düzenlenirse;

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\phi_e)\,\mathbf{F}_A - \mathbf{p}_1(\phi_e) &= \mathbf{A}(\phi_e)\,\mathbf{X}_A - \mathbf{X}_B \\ \mathbf{F}_B + \mathbf{D}(\phi_e)\,\mathbf{F}_A - \mathbf{p}_2(\phi_e) &= \mathbf{C}(\phi_e)\,\mathbf{X}_A \end{aligned} \tag{5.22}$$

eşitlikleri elde edilir. Matris olarak düzenlenirse;

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}(\phi_e) & \mathbf{O} \\ \mathbf{D}(\phi_e) & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_A - \mathbf{B}^{-1}(\phi_e)\,\mathbf{p}_1(\phi_e) \\ \mathbf{F}_B - \mathbf{p}_2(\phi_e) + \mathbf{D}(\phi_e)\,\mathbf{B}^{-1}(\phi_e)\,\mathbf{p}_1(\phi_e) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\phi_e) & \mathbf{-I} \\ \mathbf{C}(\phi_e) & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_A \\ \mathbf{X}_B \end{Bmatrix}$$
$$\mathbf{F} + \begin{Bmatrix} -\mathbf{B}^{-1}(\phi_e)\,\mathbf{p}_1(\phi_e) \\ -\mathbf{p}_2(\phi_e) + \mathbf{D}(\phi_e)\,\mathbf{B}^{-1}(\phi_e)\,\mathbf{p}_1(\phi_e) \end{Bmatrix} = \mathbf{K}\,\mathbf{X} \tag{5.23}$$

denklemi elde edilir. (5.23) ifadesinin sol tarafındaki ikinci terim, yayılı yüklerin nodlara etkiyen tekil yüklere indirgenmesi sonucu oluşan yük vektörüdür.

Her elemanın ilk nodunda $\phi_o = 0$ olarak kabul edildiğinden, n. elemana etkiyen yayılı yük ifadesi, $\mathbf{f}_n = \mathbf{f}(\phi + (n-1)\phi_e)$ olarak hesaplanmalıdır.

5.1.3 Kütle matrisi

Sonlu eleman yönteminde, bir sistemin sönümsüz serbest titreşim hareketine ait denklem,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = 0 \tag{5.24}$$

olarak bilinmektedir. Burada **M** kütle matrisi, **K** rijitlik matrisi, **u** yer değiştirme vektörü ve $\ddot{\mathbf{u}}$ ivme vektörüdür. Basit harmonik hareket için yer değiştirmeler,

$$\mathbf{u}(\phi, t) = \mathbf{u}(\phi)e^{i\omega t} \tag{5.25}$$

olarak ifade edilebilir. Burada ω açısal frekansı, t ise zamanı göstermektedir. Bu durumda (5.24) denklemi,

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{u} = 0 \tag{5.26}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadede yer değiştirme vektörünün sıfırdan farklı çözümleri için, katsayılar matrisinin determinantının sıfır olması gerekir. Bu şart kullanılarak doğal frekanslar elde edilir.

Titreşim problemlerinin çözümü için, (5.26) denkleminde yer alan **M** kütle matrisinin de elde edilmesi gerekir. Sonlu eleman formülasyonuna uygun olarak kütle matrisinin elde edilmesinde tanımlanan yer değiştirme fonksiyonlarının önemi büyüktür. Literatür taraması kısmında da değinildiği üzere, geleneksel sonlu elemanlar metodlarında yer değiştirme ifadeleri için yaklaşık fonksiyonlar kullanılmaktadır. Burada elde edilecek kütle matrisinde, yer değiştirmeler için elde edilen kesin analitik çözüm esas alınacaktır.

$\mathbf{A}(\phi)$ ve $\mathbf{B}(\phi)$, (5.6) ile tanımlanmış matrisler olmak üzere; (4.27) ve (4.46) denklemlerinden, yer değiştirmeler;

$$\mathbf{u}(\phi) = \begin{bmatrix}\mathbf{A}(\phi) & \mathbf{B}(\phi)\end{bmatrix}\mathbf{y}_o = \mathbf{H}(\phi)\mathbf{y}_o \tag{5.27}$$

olarak elde edilir. Düzlem içi hareket için **A** ve **B** matrisleri (4.29) ile verilen ifadelerden, düzlem dışı hareket söz konusu ise (4.48) ile verilen asal matris bileşenlerinden oluşturulmalıdır. Şekil 5.2'de yer alan çubuk elemanının uçlarındaki yer değiştirme bileşenleri $\boldsymbol{\delta}$ vektörü ile gösterilirse, (5.27) ifadesinden yararlanarak;

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{Bmatrix}\mathbf{u}(\phi_A) \\ \mathbf{u}(\phi_B)\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{H}(\phi_A) \\ \mathbf{H}(\phi_B)\end{bmatrix}\mathbf{y}_o = \mathbf{G}\,\mathbf{y}_o \tag{5.28}$$

olacağı açıktır. Bu ifadeden başlangıç değerleri vektörü,

$$\mathbf{y}_o = \mathbf{G}^{-1}\boldsymbol{\delta} \tag{5.29}$$

olarak elde edilir. (5.29) denklemi, (5.27) denkleminde yazılırsa;

$$\mathbf{u}(\phi) = \mathbf{H}(\phi)\mathbf{G}^{-1}\boldsymbol{\delta} \tag{5.30}$$

ifadesine ulaşılır.

Eğri eksenli çubuk elemanı için kinetik enerji ifadesi,

$$T = \frac{1}{2}\int_{\phi_A}^{\phi_B} \frac{\partial \mathbf{u}^T(\phi,t)}{\partial t}\,\rho\,\mathbf{P}\,\frac{\partial \mathbf{u}(\phi,t)}{\partial t} R_o\, d\phi \qquad \textbf{(5.31)}$$

olarak bilinmektedir. ρ çubuk malzemesinin yoğunluğunu göstermektedir. **P** matrisi, düzlem içi titreşim hareketi inceleniyorsa;

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} A_o & 0 & 0 \\ 0 & A_o & 0 \\ 0 & 0 & I_{bo} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(5.32)}$$

şeklinde olurken, düzlem dışı titreşim hareketi için,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} A_o & 0 & 0 \\ 0 & I_{no} & 0 \\ 0 & 0 & I_{po} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(5.33)}$$

olmaktadır.

Yer değiştirme vektörünün, (5.25) ifadesindeki gibi yazılabileceği göz önünde bulundurularak, (5.30) ile verilen yer değiştirme vektörü, (5.31)'de yazılırsa;

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\omega^2 \rho R_o \int_{\phi_A}^{\phi_B} \left(\mathbf{H}(\phi)\mathbf{G}^{-1}\boldsymbol{\delta}\right)^T \mathbf{P}\,\left(\mathbf{H}(\phi)\mathbf{G}^{-1}\boldsymbol{\delta}\right) d\phi \\ T &= \frac{1}{2}\omega^2 \rho R_o \int_{\phi_A}^{\phi_B} \boldsymbol{\delta}^T \left(\mathbf{G}^{-1}\right)^T \mathbf{H}^T(\phi)\mathbf{P}\,\left(\mathbf{H}(\phi)\mathbf{G}^{-1}\boldsymbol{\delta}\right) d\phi \end{aligned} \qquad \textbf{(5.34)}$$

ifadesi elde edilir. Sabit terimlerden oluşan **G** matrisi ve $\boldsymbol{\delta}$ vektörü integralin dışına alınarak;

$$T = \frac{1}{2}\omega^2 \boldsymbol{\delta}^T \rho R_o (\mathbf{G}^{-1})^T \int_{\phi_A}^{\phi_B} \mathbf{H}^T(\phi)\mathbf{P}\,\mathbf{H}(\phi) d\phi\, \mathbf{G}^{-1}\boldsymbol{\delta} \qquad \textbf{(5.35)}$$

ifadesine ulaşılır. Kinetik enerji ifadesi,

$$T = \frac{1}{2}\omega^2 \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{M}\,\boldsymbol{\delta} \qquad \textbf{(5.36)}$$

olarak ifade edilirse, kütle matrisi;

$$\mathbf{M} = \rho R_o (\mathbf{G}^{-1})^T \int_{\phi_A}^{\phi_B} \mathbf{H}^T(\phi)\mathbf{P}\,\mathbf{H}(\phi) d\phi\, \mathbf{G}^{-1} \qquad \textbf{(5.37)}$$

olarak elde edilir.

6. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN STATİK PROBLEMLERİNİN SONLU ELEMAN YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ

Bir önceki bölümde elde edilen rijitlik matrisi kullanılarak, farklı geometriler için çeşitli yükleme ve sınır koşullarına sahip problemler çözülmüştür. Sınır şartlarının uygulanmasında eliminasyon metodu kullanılmıştır. Yani global rijitlik ve yük matrisleri elde edildikten sonra, kısıtlanan yer değiştirme bileşeni ile ilgili satır ve sütunlar silinerek elde edilen denklem takımı çözülmüştür.

6.1 Düzlem İçi Statik Problemler

6.1.1 Ankastre-serbest sınır şartlarında, serbest ucunda normal yönde kuvvet taşıyan çember eksenli çubuk

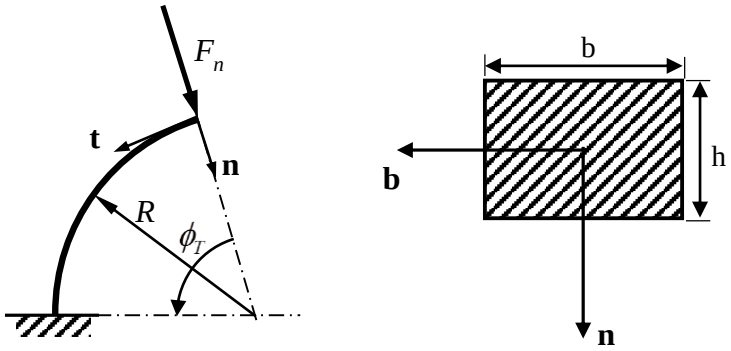
Şekil 6.1'de görülen çember eksenli, sabit kesitli çubuk bir ucundan ankastre mesnetlenmiştir. Serbest ucundan etkiyen F_n = 1000 N kuvvetini taşımaktadır. Çubuk geometrisinin ve malzemesinin özellikleri,

$R = 1\text{m}$ $\qquad$ $E = 2.1\times10^{11}\ \text{N/m}^2$

$h = 0.03\ \text{m}$ $\qquad$ $\nu = 0.3$

$b = 0.04\ \text{m}$

olarak alınmıştır.



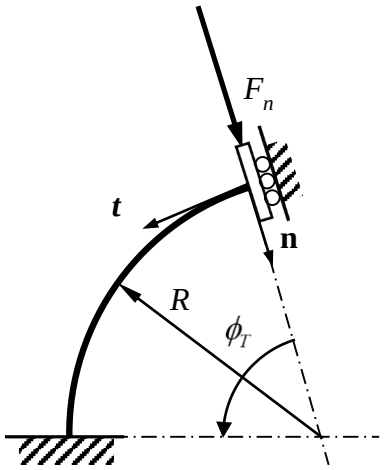
Şekil 6.1 : Serbest ucundan tekil kuvvet taşıyan ankastre-serbest çubuk ve kesiti.

Serbest uca ait normal, teğetsel yer değiştirmeler ve dönme açıları, eksen açıklığı $\phi_T = 60°, 90°, 120°, 180°$ değerleri için tek eleman kullanılarak elde elde edilmiş ve Çizelge 6.1'de analitik sonuçlarla karşılaştırılmalı olarak verilmiştir. Elde edilen sonuçların, analitik sonuçlarla birebir aynı olduğu görülmektedir.

Çizelge 6.1 : Ankastre-serbest çubuk için dış yük altında sonlu eleman ve analitik sonuçların karşılaştırılması.

		Bu Çalışma	Analitik Yöntem
$\phi_T = 60°$	w(mm)	-6.6169	-6.6169
	u(mm)	16.2587	16.2587
	Ω(rad)	-0.02645	-0.02645
$\phi_T = 90°$	w(mm)	-26.4592	-26.4592
	u(mm)	41.5683	41.5683
	Ω(rad)	-0.05291	-0.05291
$\phi_T = 120°$	w(mm)	-59.5269	-59.5269
	u(mm)	66.8779	66.8779
	Ω(rad)	0.07936	-0.07936
$\phi_T = 180°$	w(mm)	-105.8201	-105.8201
	u(mm)	83.1366	83.1366
	Ω(rad)	-0.10582	-0.10582

6.1.2 Ankastre-kayar ankastre sınır şartlarında, ucunda normal yönde kuvvet taşıyan çember eksenli çubuk



Şekil 6.2 : Serbest ucundan tekil kuvvet taşıyan ankastre-kayar ankastre çubuk.

Şekil 6.2'de verilen, sabit kesitli, çember eksenli çubuk bir ucundan ankastre, diğer ucundan ise normal yönde yer değiştirmeye izin verecek şekilde kayar ankastre olarak mesnetlenmiştir. Dikdörtgen kesitli çubuğun özellikleri aşağıdaki gibidir.

$$R = 100 \text{ cm} \qquad E = 10.5 \times 10^7 \text{ N/cm}^2$$
$$h \times b = 2 \times 1 \text{ cm} \qquad \nu = 0.3125$$

Çubuğa etkiyen F_n = 1000 N büyüklüğündeki kuvvet etkisinde, kuvvetin etkidiği noktadaki normal yer değiştirme değerleri farklı eksen açıklıkları için tek eleman kullanılarak elde edilmiştir. Sonuçlar, Saffari ve Tabatabei [30] tarafından elde edilen sonuçların yanısıra, 4. bölümde bahsedilen başlangıç değerleri metodu ile elde edilen sonuçlar ile de Çizelge 6.2'de karşılaştırılmıştır. Tek elemanla elde edilen bu sonuçlar hem analitik çözümle, hem de literatürde elde edilen sonuçlarla oldukça uyumludur.

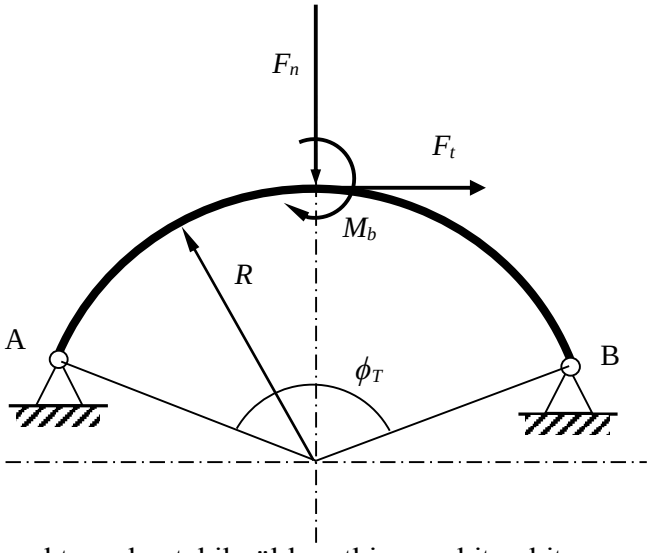
Çizelge 6.2 : Şekil 6.2'de verilen ankastre-kayıcı ankastre çubuğun kuvvet etkiyen ucundaki normal yer değiştirme değerlerinin karşılaştırılması.

Kiriş Açısı	[30]	Analitik Çözüm	Bu Çalışma
10°	0.00419	0.00419	0.00419
20°	0.0077	0.0077	0.0077
30°	0.01423	0.01423	0.01423
40°	0.02876	0.02876	0.02876
50°	0.054	0.05401	0.05401
60°	0.09316	0.09316	0.09316
70°	0.14995	0.14995	0.14995
80°	0.2288	0.2288	0.2288
90°	0.3351	0.3351	0.3351
100°	0.4752	0.4752	0.4752
120°	0.8898	0.8898	0.8898
140°	1.5589	1.5589	1.5589
160°	2.6138	2.6138	2.6138
180°	4.2539	4.2539	4.2539

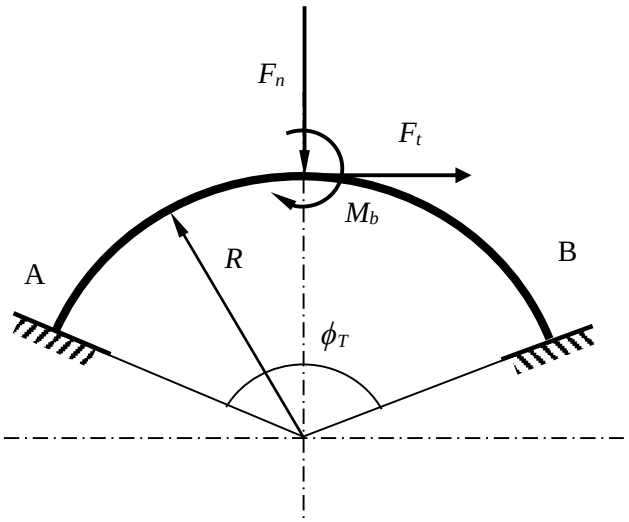
6.1.3 Orta noktasından etkiyen yükü taşıyan sabit kesitli çember eksenli simetrik çubuk

Şekil 6.3 ve Şekil 6.4'de verilen $\phi_T = 120°$ eksen açıklığına sahip çubuğun, orta noktasından ayrı ayrı etkiyen F_n = 1000 N, F_t = 1000 N ve M_b = 1000 Nm büyüklüğündeki yükler altındaki yer değiştirmeleri hesaplanmıştır. İki bölgeli bu

problem, simetri şartından faydalanarak tek bölgeli bir problem gibi düşünülmüş ve önceki örneklerdeki gibi sonuçlar, tek eleman kullanılarak elde edilmiştir.



Şekil 6.3: Orta noktasından tekil yükler etkiyen sabit-sabit mesnetli çubuk.



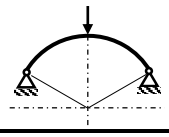
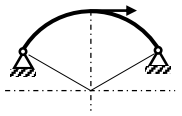
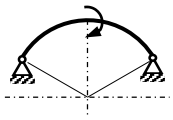
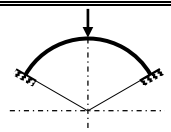
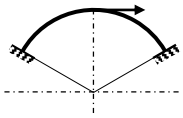
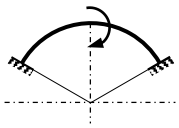
Şekil 6.4: Orta noktasından tekil yükler etkiyen ankastre-ankastre mesnetli çubuk.

İncelenen eğri eksenli çubuk dikdörtgen kesitli olup, çubuğa ait özellikler aşağıdaki gibidir.

$R = 4$ m	$\phi_T = 2\pi / 3$
$h = 0.6$ m	$E = 3\times10^{10}$ N/m^2
$b = 0.4$ m	$\nu = 0.17$

Dış yüklerin etkidiği orta noktaya ait yer değiştirme değerleri, Çizelge 6.3'de mevcut çalışmalarla karşılaştırmalı olarak verilmiştir.

Çizelge 6.3 : 120°'lik çubuk için sonlu eleman ve analitik sonuçların karşılaştırılması.

Yükleme Durumu	$\times 10^{-6}$	Analitik Çözüm [16]	[37]	Bu Çalışma
	$\frac{u}{R\,\phi_T}$	0.280916	-	0.280915
	$\frac{w}{R\,\phi_T}$	0.288351	0.2883	0.288351
	$\frac{\Omega_b}{\phi_T}$	-0.806359	-0.8064	-0.806359
	$\frac{w}{R\,\phi_T}$	-0.20159	-0.2016	-0.20159
	$\frac{\Omega_b}{\phi_T}$	1.36129	1.3613	1.36129
	$\frac{u}{R\,\phi_T}$	0.248781	0.2488	0.248781
	$\frac{w}{R\,\phi_T}$	0.12522	0.1252	0.12522
	$\frac{\Omega_b}{\phi_T}$	-0.3796417	-0.3796	-0.3796417
	$\frac{w}{R\,\phi_T}$	-0.09491	-0.0949	-0.09491
	$\frac{\Omega_b}{\phi_T}$	1.08224	1.0822	1.08224

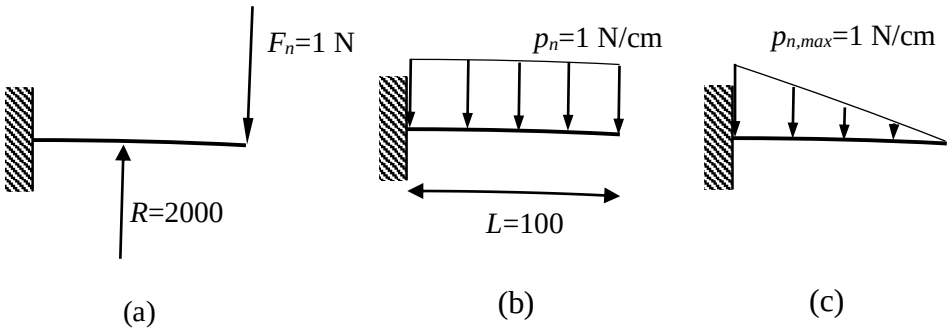
Çizelge 6.3'de görüldüğü gibi, simetri şartından yararlanarak tek elemanla elde edilen çözüm, mevcut çözümlerle oldukça yakın sonuçlar vermektedir.

6.1.4 Ankastre-serbest sınır şartlarındaki neredeyse düz çubuk

Şekil 6.5'de verilen çok büyük eğrilik yarıçapına sahip, neredeyse düz olarak tanımlanabilecek çubuğa ait yer değiştirmeler, farklı yükleme koşulları için elde edilmiştir. Sabit, dikdörtgen kesitli ve çember eksenli çubuğa ait özellikler aşağıdaki gibidir.

$$L = 100 \text{ cm} \qquad E = 10^6 \text{ N/cm}^2 \quad b \times h = 1 \times 10 \text{ cm}$$
$$R = 2000 \text{ cm} \qquad \nu = 0.3$$

Lineer yayılı yük taşıyan çubukta $\mathbf{f}(\phi) = 1 - \phi / \phi_T$ şeklindedir.



Şekil 6.5: Değişik yükleme koşullarındaki neredeyse düz çubuk. (a) Serbest uçta normal kuvvet. (b) üniform yayılı yük. (c) lineer yayılı yük.

Çizelge 6.4'de, elde edilen çökme değerleri, Raveendranath ve diğ. [25] tarafından yapılan çalışmadan ve analitik çözümden elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmaktadır.

Çizelge 6.4 : Neredeyse düz çubuğun farklı yükleme koşullarında serbest ucunda meydana gelen çökme değeri (cm).

Yükleme durumu	Bu Çalışma	[25]	Analitik Çözüm
Serbest uçtan tekil yük	0.004029	0.004029	0.004029
Üniform yayılı yük	0.15149	0.15150	0.15149
Lineer yayılı yük	0.040504	0.040504	0.040504

Tek eleman kullanılarak elde edilen sonuçlarla, analitik çözümden elde edilen sonuçların birebir aynı olduğu görülmektedir.

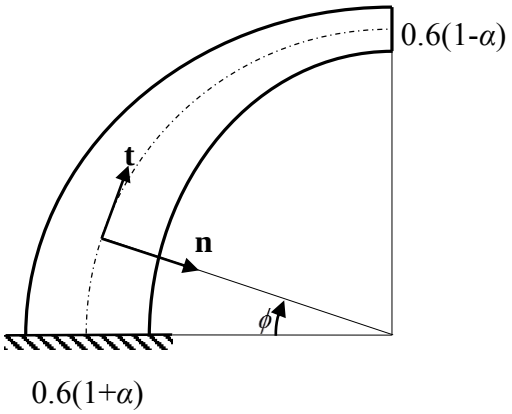
6.1.5 Ankastre-serbest sınır şartlarında değişken kesitli çubuk

Şekil 6.6'de görülen bir ucu ankastre diğer ucu serbest ve çember eksenli çubuk, dikdörtgen kesite sahiptir. Kesitin genişliği b=0.4 m sabitken, yüksekliği;

$$h(\xi) = 0.6\left[1 - \alpha\left(2\xi - 1\right)\right] \qquad \textbf{(6.1)}$$

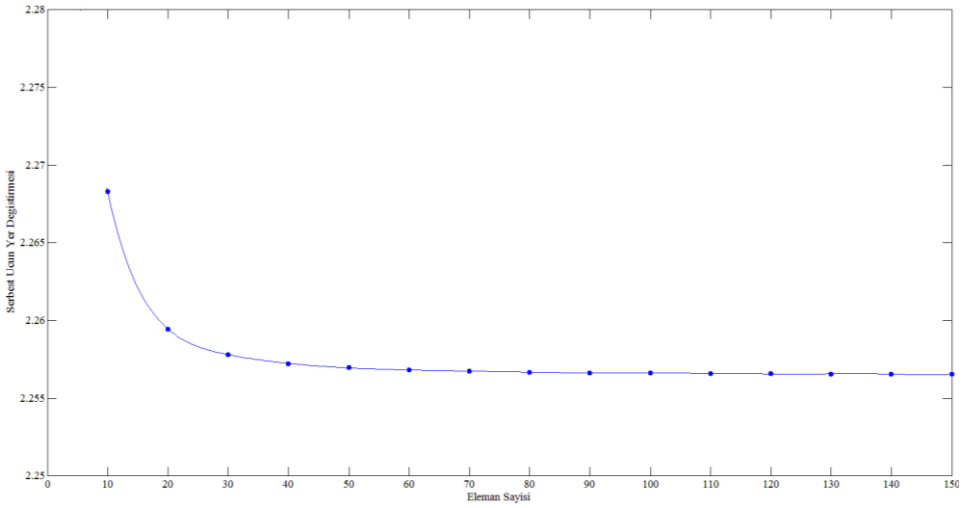
ifadesiyle değişmektedir. Burada α bir katsayı ve $\xi = \phi/\phi_T$ normalleştirilmiş açı büyüklüğüdür.

Çubuğun, $\alpha = 0.4$ ve serbest ucundan normal yönde yük taşıdığı durum için eleman sayısı ile normal yöndeki yer değiştirme arasındaki ilişki, Şekil 6.7'de görülmektedir. Grafikten, 80 elemandan fazla eleman kullanılması halinde sonuçların çok değişmediği görülmüştür. Bu nedenle analizde 80 eleman kullanılmıştır.



Şekil 6.6 : Değişken kesitli çember eksenli çubuk.

Elastisite modülü E=30 GPa, poisson oranı $\nu = 0.3$, yarıçapı R=5 m ve eksen açıklığı $\phi_T = 90°$ olan çubuğun serbest ucuna ait yer değiştirme ve dönme açısı değerleri, çubuğun serbest ucuna normal ve teğetsel yönde kuvvetlerin ve tekil momentin etkimesi durumu ile çubuğun ekseni boyunca normal ve teğetsel yönde üniform yayılı yükler taşıması halleri için Shahba ve diğ. [37] tarafından elde edilen sonuçlarla karşılaştırmalı olarak Çizelge 6.5'de verilmiştir.



Şekil 6.7: Eleman sayısı ile yer değiştirmenin değişimi.

Çizelge 6.5 : Değişken kesitli çubuk için farklı yükleme koşullarındaki boyutsuz yer değiştirme ve dönme değerleri.

Yükleme Durumu	α	$w/(R\phi_T)\times 10^{-5}$		$u/(R\phi_T)\times 10^{-5}$		$\Omega_b/\phi_T \times 10^{-5}$	
		Bu Çalışma	[37]	Bu Çalışma	[37]	Bu Çalışma	[37]
F_t=1kN	0.1	2.2173	2.2172	3.1716	3.1716	3.6883	3.6882
	0.2	1.8896	1.8895	2.7801	2.7800	3.3104	3.3103
	0.4	1.4424	1.4422	2.2567	2.2566	2.8495	2.8492
F_n=1kN	0.1	3.1716	3.1716	5.2168	5.2167	6.8887	6.8886
	0.2	2.7801	2.7800	4.7893	4.7891	6.6296	6.6294
	0.4	2.2567	2.2566	4.3172	4.3167	6.7344	6.7341
M_b=1kNm	0.1	0.7377	0.7376	1.3777	1.3777	2.3618	2.3618
	0.2	0.6621	0.6621	1.3259	1.3259	2.5117	2.5117
	0.4	0.5699	0.5698	1.3469	1.3468	3.2804	3.2806
p_t=1kN/m p_n=1kN/m	0.1	16.0484	16.0479	22.5121	22.5116	25.7353	25.7348
	0.2	13.5964	13.5956	19.5824	19.5815	22.8595	22.8586
	0.4	10.2484	10.2474	15.6364	15.6351	19.2272	19.2258

Çizelge 6.5'de görüldüğü gibi, farklı yükleme koşulları ve farklı α katsayıları için sonuçlar oldukça uyumludur.

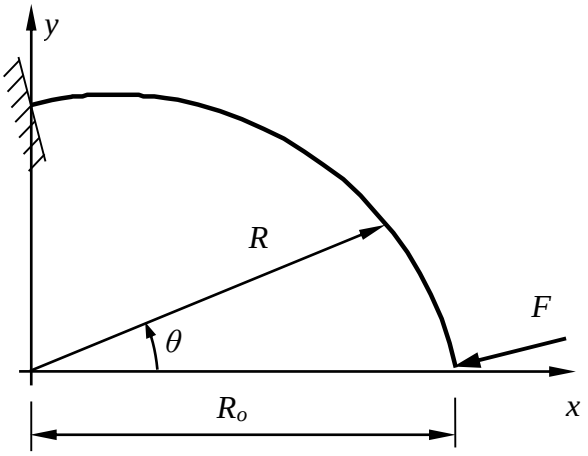
6.1.6 Serbest ucuna normal yönde tekil kuvvet etkiyen spiral eksenli sabit kesitli ankastre serbest çubuk

Bu örnekte, spiral eksenli çubuğun statik problemi incelenmiştir. Çözüm hem analitik olarak, hem tanımlanan rijitlik matrisi kullanılarak sonlu elemanlar yöntemi ile, hem de bir sonlu eleman paket programı ile çözülmüştür.

Şekil 6.8'de gösterilen spiral eksenli çubuk dikdörtgen kesitlidir. Eğrilik yarıçapı, aşağıdaki ifadeyle tanımlanmaktadır.

$$R = R_o(1-\mu\theta) \qquad \textbf{(6.2)}$$

Burada R, herhangi bir θ açısal koordinatındaki eğrilik yarıçapını; R_o ise $\theta = 0°$ açısal koordinatındaki eğrilik yarıçapı değeridir. μ ise spiral geometriye ait bir katsayıdır.



Şekil 6.8: Spiral eksenli çubuğa ait büyüklükler.

Spiral çubuğun, Şekil 6.8'de gösterilen herhangi bir (*x*,*y*) koordinatındaki *R* eğrilik yarıçapı aşağıdaki şekilde hesaplanır [5].

$$\frac{1}{R} = -\frac{d^2y/dx^2}{(1+(dy/dx)^2)^{3/2}} \tag{6.3}$$

x ve y koordinatları, θ açısal koordinatına bağlı olarak ifade edilebilir.

$$x = R_o(1-\mu\theta)\cos\theta$$
$$y = R_o(1-\mu\theta)\sin\theta \tag{6.4}$$

Türevler hesaplandığında $x' = \partial x/\partial\theta$ ve $y' = \partial y/\partial\theta$ göstermek üzere,

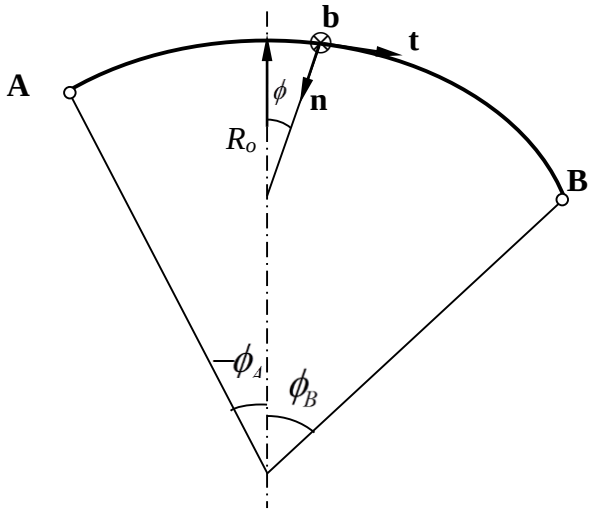
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial\theta}\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial\theta}} = \frac{y'}{x'} \tag{6.5}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial\theta}}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial\theta}}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{x'}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{y'}{x'}\right) = \frac{1}{x'}\frac{y''x'-x''y'}{x'^2}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''x'-x''y'}{x'^3} \tag{6.6}$$

(6.5) ve (6.6) eşitlikleri (6.3) eşitliğinde yerine konursa,

$$\frac{1}{R} = -\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{(1+(\frac{dy}{dx})^2)^{3/2}} = -\frac{\frac{y''x'-x''y'}{x'^3}}{(1+\frac{y'^2}{x'^2})^{3/2}} = -\frac{y''x'-x''y'}{(x'^2+y'^2)^{3/2}} \tag{6.6}$$

elde edilir.



Şekil 6.9: Herhangi bir eğri eksenli çubuğa ait açısal büyüklükler.

Şekil 6.9'da herhangi bir eğri eksenli çubuğa ait açılar gösterilmektedir. Spiral eksenli çubuğun problemlerini Frenet koordinat takımında çözebilmek için, ϕ açısal büyüklüğünün θ cinsinden ifade edilebilmesi gerekmektedir. ϕ açısı, herhangi bir noktada eğriye çizilen normal doğrultudaki vektörün referans doğrultusu ile yaptığı açı olmak üzere,

$$\tan\phi = \frac{dy}{dx}$$

$$\phi = \operatorname{atan}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \operatorname{atan}\left(\frac{\frac{\partial y}{\partial \theta}}{\frac{\partial x}{\partial \theta}}\right) = \operatorname{atan}\left(\frac{\cos\theta - \mu\sin\theta - \mu\theta\cos\theta}{-\sin\theta - \mu\cos\theta + \mu\theta\sin\theta}\right) \quad \textbf{(6.8)}$$

olarak hesaplanabilir. Sonlu eleman metodu ile çözüm yapılırken her elemanın eksen açıklığı değeri, bu ifadeler ile hesaplanır.

Statik davranışı incelenecek dikdörtgen kesitli spiral çubuğa ait özellikler aşağıdaki gibidir.

$R_o = 1\ \text{m}$ $\quad I_b = 8.333\times10^{-6}\ \text{m}^4$ $\quad k_n = 6/5$

$A = 0.01\ \text{m}^2$ $\quad E = 2\times10^{10}\ \text{N/m}^2$ $\quad \nu = 0.3$

Çizelge 6.6 : Spiral geometriye sahip çubuğa ait sonlu eleman ve analitik sonuçların karşılaştırılması, ($\mu = 0.2$)

		θ									
		0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
w (cm)	Analitik	-0.19024	-0.13729	-0.09365	-0.05952	-0.03445	-0.01747	-7.20×10^{-3}	-2.02×10^{-3}	-1.98×10^{-4}	0
	Bu çalışma	-0.19027	-0.13732	-0.09367	-0.05954	0.03447	-0.01748	-7.21×10^{-3}	-2.02×10^{-3}	-1.99×10^{-4}	0
	ABAQUS	-0.18468	-0.13366	-0.09608	-0.05565	-0.03465	-0.01977	-7.23×10^{-3}	-1.49×10^{-3}	-2.59×10^{-4}	0
u (cm)	Analitik	0.31637	0.26639	0.21341	0.16144	0.11377	0.07291	0.04055	0.01761	4.24×10^{-3}	0
	Bu çalışma	0.31630	0.26633	0.21337	0.16141	0.11375	0.07290	0.04055	0.01761	4.25×10^{-3}	0
	ABAQUS	0.31934	0.26797	0.21203	0.16261	0.11352	0.07227	0.04048	0.01765	4.23×10^{-3}	0
$\Omega b \times 10^{-3}$ (rad)	Analitik	-4.56325	-4.47162	-4.21191	-3.38098	-3.29360	-2.69270	-2.03636	-1.35242	-0.66626	0
	Bu çalışma	-4.56270	-4.47107	-4.21139	-3.38093	-3.29314	-2.69229	-2.03637	-1.35219	-0.66614	0
	ABAQUS	-4.56064	-4.46901	-4.20926	-3.80734	-3.29125	-2.69127	-2.03482	-1.35181	-0.66573	0
F_t (N)	Analitik	0	-180.484	-355.507	-519.263	-666.226	-791.326	-890.111	-958.893	-994.879	-996.274
	Bu çalışma	0	-180.484	-355.507	-519.263	-666.226	-791.326	-890.111	-958.893	-994.879	-996.274
	ABAQUS	0	-193.820	-344.165	-539.097	-663.969	-771.879	-888.464	-967.071	-992.847	-997.423
F_n (N)	Analitik	-1000	-983.578	-934.674	-854.615	-745.750	-611.394	-455.744	-283.769	-101.076	86.241
	Bu çalışma	-1000	-983.578	-934.674	-854.615	-745.750	-611.394	-455.744	-283.769	-101.076	86.241
	ABAQUS	-1000	-981.037	-938.906	-842.235	-747.769	-635.741	-458.947	-254.508	-119.393	71.743
M_b (Nm)	Analitik	0	174.053	336.658	483.008	609.157	712.122	789.945	841.723	867.585	868.638
	Bu çalışma	0	174.052	336.647	482.989	609.124	712.071	789.874	841.628	867.465	868.492
	ABAQUS	0	174.055	336.585	482.873	608.830	712.065	789.557	841.654	867.975	868.638

Çizelge 6.6'da, 4. bölümde bahsedilen başlangıç değerleri metodu ile ve 5. bölümde elde edilen rijitlik matrisi kullanılarak sonlu eleman metodu ile elde edilen sonuçların yanında, bir sonlu eleman paket programı olan ABAQUS ile elde edilen sonuçlar da verilmektedir. Bu çalışmada sunulan rijitlik matrisi ile yapılan sonlu eleman metodunda 18 eleman kullanılırken, ABAQUS ile yapılan çözümde 85 eleman kullanılmıştır. Eleman tipi olarak, kayma deformasyonu etkisini de dahil eden B22 tipi eleman kullanılmıştır. Çizelgeden görüldüğü üzere, yeni sonlu eleman metoduyla elde edilen sonuçlar ile analitik çözümle elde edilen sonuçlar oldukça uyumludur.

6.2 Düzlem Dışı Statik Problemler

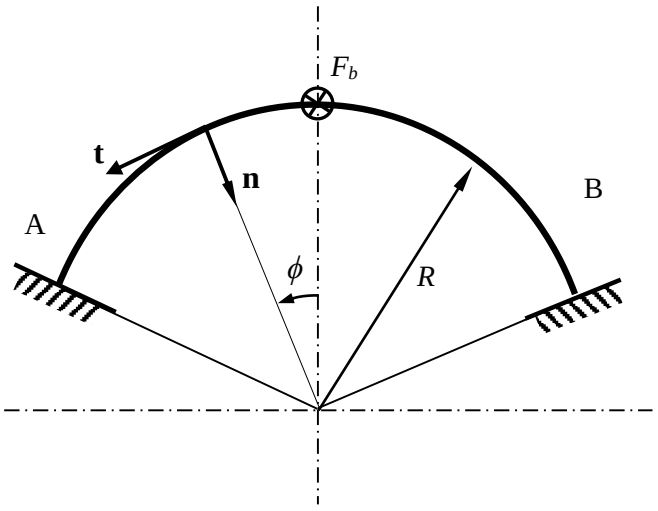
6.2.1 Orta noktasından etkiyen tekil binormal kuvveti taşıyan iki ucundan ankastre mesnetli çember eksenli çubuk

Eksen açıklığı $\phi_T = 90°$ olan iki ucundan ankastre mesnetli dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğa orta noktasından tekil binormal kuvvet etkimektedir. Şekil 6.10'da görülen çubuğa ait özellikler aşağıdaki gibidir.

$R = 108\,\text{in}\,(2745\ \text{mm})$ $\quad E = 4240\,\text{psi}\,(29\ \text{MPa})$

$J = 14.5\ \text{in}^4\,(10^7\ \text{mm}^4)$ $\quad G = 1760\ \text{psi}\,(12\ \text{MPa})$

$I_n = 354\ \text{in}^4\,(147\times10^6\ \text{mm}^4)$ $\quad A = 72\ \text{in}^2\ (46500\ \text{mm}^2)$



Şekil 6.10: İki ucu ankastre mesnetli ve orta noktasından tekil binormal yük taşıyan çember eksenli çubuk.

Problemdeki simetriden faydalanarak sonlu eleman yöntemi ile çözüm yaparken tek eleman kullanmak mümkündür. Çizelge 6.7'de, tek eleman ile elde edilen sonuçlarla

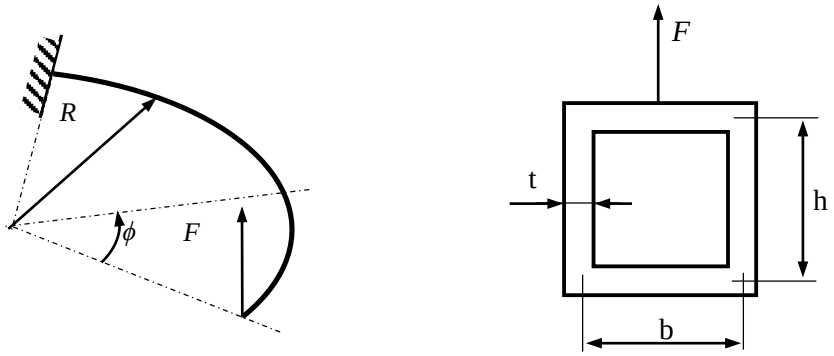
analitik çözüm ve Pantazopoulou [14] tarafından 10 tane 3 nodlu eleman kullanılarak elde edilen sonuçlar birlikte verilmektedir. Bu çalışmada kullanılan sonlu eleman metodunun ile analitik çözümün sonuçlarının birebir aynı olduğu görülmektedir.

Çizelge 6.7 : İki ucu ankastre çubuk için sonuçların karşılaştırılması.

	v (mm)	Ω_t (rad)	M_t ($\phi = 0°$) (Nm)	M_t ($\phi = 45°$) (Nm)	M_n ($\phi = 0°$) (Nm)	M_n ($\phi = 45°$) (Nm)
Analitik çözüm	-10.0056	0.02252	0.0	10.8285	-45.9726	72.1149
[14] (3 nodlu eleman)	9.86815	0.02250	0.0	10.7108	45.832	72.235
Bu çalışma	-10.0056	0.02252	0.0	10.8285	-45.9726	72.1149

6.2.2 Bir ucundan ankastre, serbest ucundan tekil binormal yük taşıyan sabit kesitli çember eksenli çubuk

Şekil 6.11'de yükleme ve mesnet durumu gösterilen, bir ucundan ankastre ve serbest ucundan etkiyen F tekil yükünü taşıyan sabit kesitli çember eksenli çubuk için statik hesap yapılmıştır. Sonuçlar, Tufekci ve Dogruer [29] tarafından elde edilen analitik ifadeler kullanarak hesaplanan sonuçlarla karşılaştırılmıştır.



Şekil 6.11: Bir ucu ankastre, serbest ucundan F tekil yükünü taşıyan çubuk ve kesiti.

Çubuğun özellikleri aşağıdaki gibidir.

$\phi_T = 90°$ $E = 200$ GPa $b = 50$ mm $t = 2$ mm
$R = 1$ m $\nu = 0.3$ $h = 100$ mm $F = 100$ N

Burada, burulma sabiti için Timoshenko ve Goodier [2] tarafından verilen formülasyon kullanılmıştır;

$$J = \frac{4A_o^2}{\sum \frac{s}{\delta}} \qquad \textbf{(6.9)}$$

Bu denklemde yer alan A_o kesitin eksen eğrisinin çevrelediği alan, s uzunluk ve δ et kalınlığı olarak tanımlanmaktadır.

Kayma gerilmesinin kesite üniform yayılmadıklarının karakterieze eden k_b sabitinin de hesaplanması gerekir. Kesitteki gerçek kayma gerilmesi dağılımı kullanılarak hesaplanan şekil değiştirme enerjisinin, kesit boyunca sabit kayma gerilmesi olduğu kabulü ile hesaplanan şekil değiştirme enerjisine oranlanması ile elde edilebilecek bu sabit, bu problem için 1.563 olarak hesaplanmıştır.

Çizelge 6.8 : Ankastre-serbest çubuk için sonuçların karşılaştırılması.

	v (m)	Ω_t (rad)	Ω_n (rad)
Analitik Çözüm	-1.171×10^{-3}	5.25×10^{-5}	1.275×10^{-3}
Bu Çalışma	-1.171×10^{-3}	5.25×10^{-5}	1.275×10^{-3}
Y. Y. Kim, Y. Kim [71]	-1.830×10^{-3}	7.494×10^{-4}	1.808×10^{-3}

Problemin sonlu eleman çözümünde tek eleman kullanılmıştır. Çizelge 6.8'de görüldüğü gibi, analitik çözümle birebir aynı sonuçlar elde edilmiştir. Kim ve Kim [71] tarafından elde edilen sonuçlar ise, modellerinde kesitin çarpılmasını da dahil ettikleri için bu çalışmadan daha büyük değerlerdir.

6.2.3 İki ucundan ankastre mesnetli ve düzgün yayılı yük etkisindeki sabit kesitli çember eksenli çubuk

Şekil 6.12'de görülen iki ucundan ankastre mesnetlenmiş ve düzgün binormal yayılı yük taşıyan çubuğun orta noktasındaki çökme değeri hesaplanmıştır. Çubuğa ait özellikler aşağıdaki gibi kabul edilmiştir.

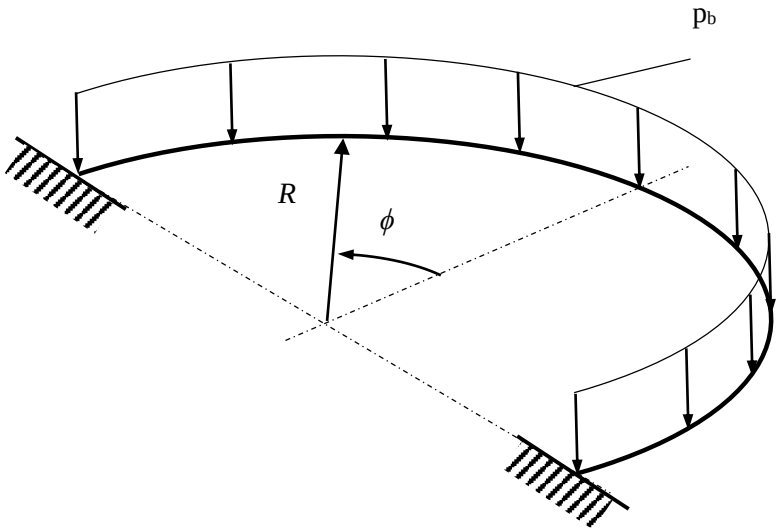
$R = 10$ m $\qquad E = 2\times10^{11}$ N/m^2 $\qquad p_b = 10$ kN/m

$I_n = 4.9\times10^{-3}$ m^4 $\qquad G = 9.1673\times10^{10}$ N/m^2 $\qquad \phi_T = 180°$

$I_p = 8.944\times10^{-3}$ m^4 $\qquad A = 0.7854$ m^2

Simetriden faydalanarak tek eleman ile yapılan çözümden elde edilen sonuçlar, Sheikh [26] tarafından elde edilen sonuçlar ve analitik çözüm ile karşılaştırılmalı olarak verilmiştir.

Çizelge 6.9'da görüldüğü gibi tek elemanla elde edilen sonuçlar, analitik çözümle birebir aynıdır. Mevcut formülasyonun, yayılı yükler söz konusu olduğunda da oldukça iyi sonuçlar verdiği görülmektedir.



Şekil 6.12: İki ucundan ankastre mesnetli ve düzgün yayılı yük taşıyan çember eksenli çubuk.

Çizelge 6.9 : Yayılı yüke maruz iki ucu ankastre çubuğun orta noktasındaki çökme ve dönme değerleri.

	v (m)	Ω_t (rad)
Sheikh [26]	0.0404	-
Analitik Çözüm	0.0403044	-0.0045108
Bu Çalışma	0.0403044	-0.0045108

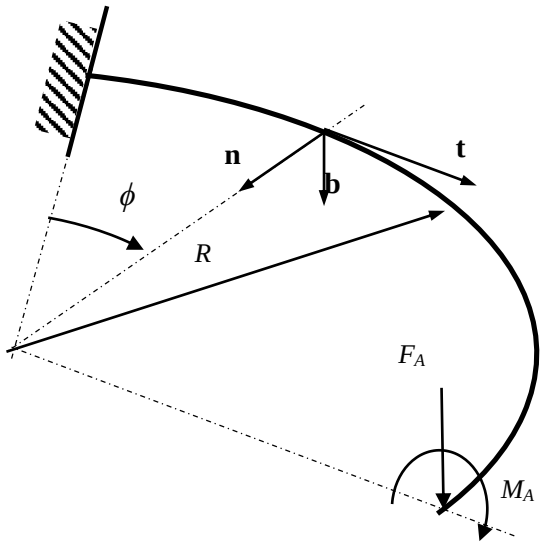
6.2.4 Bir ucundan ankastre, serbest ucunda tekil kuvvet ve tekil moment taşıyan dairesel değişken kesitli çember eksenli çubuk

Bu örnekte, Şekil 6.13'de mesnetleme ve yükleme durumu görülen dairesel değişken kesitli ve çember eksenli çubuk ele alınmıştır. Çubuk kesitine ait özellikler, aşağıdaki gibidir.

$$A = A_o\left(1+\alpha\Phi\right)^2 \qquad I_n = I_{no}\left(1+\alpha\Phi\right)^4 \qquad J = J_o\left(1+\alpha\Phi\right)^4 \qquad \textbf{(6.10)}$$

Burada, $\left(_o\right)$ indisi, referans koordinatındaki $(\phi = 0)$ değerleri, α kesit değişim parametresini ve $\Phi = \phi/\phi_T$ açısal koordinatı göstermektedir.

Çubuk eksen eğrisinin açıklığı $\phi_T = 180°$, eğrilik yarıçapı R ile çubuk kesiti yarıçapı r arasındaki oran R/r=5 olarak alınmıştır.Çubuğa ait malzeme özellikleri E=200 GPa ve $\nu = 0.3$ şeklindedir.



Şekil 6.13: Bir ucundan ankastre bağlı serbest ucundan tekil kuvvet ve moment taşıyan değişken kesitli çubuk.

Çubuğun serbest ucunda etkiyen tekil moment ve kuvvet arasında, $F_A = -M_A/R$ ilişkisi vardır. Sonuçlar verilirken, aşağıdaki boyutsuzlaştırmalar yapılmıştır.

$$v^* = v\frac{GJ_o}{M_A R^2}, \quad \Omega_t^* = \Omega_t \frac{GJ_o}{M_A R} \tag{6.11}$$

Sonuçlar, Malekzadeh ve Karami [27] ile Tüfekçi ve Doğruer [29] tarafından elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmalı olarak Çizelge 6.10'da verilmiştir. Söz konusu çalışmalarda kayma deformasyonu ihmal edilerek problem çözülmüştür. Bu nedenle burada da bu etki hesaba dahil edilmemiştir. Çökme için parantez içinde verilen değerler, kayma deformasyonu etkisinin hesaba dahil edildiği durumda hesaplanan değerlerdir. Şekil 6.7'de, değişken kesitli çubukların statik problemlerinde kullanılan eleman sayısı ile bir noktadaki yer değiştirmenin değişimi verilmekteydi. Bu bölümde çözülen problemde de benzer bir değişim olacağı bilindiğinden, çözümde benzer olarak 80 eleman kullanılmıştır.

Çizelge 6.10'da görüldüğü üzere, sonlu eleman formülasyonu ile elde edilen değerler, mevcut değerlerle oldukça uyumludur. Sonlu eleman formülasyonu, değişken kesitli düzlemsel eğri eksenli çubukların düzlem dışı statik problemlerinde oldukça iyi sonuçlar vermektedir.

Çizelge 6.10 : Değişken kesitli çubuk için sonuçların karşılaştırılması

			$\phi(^\circ)$						
	α		0	36	72	90	108	144	180
v^*	0	[27]	0.0000	-0.1181	-1.3012	-2.3400	-3.6471	-6.5628	-8.6998
		[29]	0.0000	-0.1181125	-1.30119	-2.34003	-3.46708	-6.56276	-8.6997
		Bu çalışma	0.0000	-0.181125 (-0.19508)	-1.30119 (-1.32911)	-2.34003 (-2.37493)	-3.46708 (-3.68897)	-6.56276 (-6.61861)	-8.6998 (-8.7696)
	-0.2	[27]	0.0000	-0.1913	-1.4529	-2.6861	-4.3011	-8.1328	-11.168
		[29]	0.0000	-0.19129	-1.45292	-2.68614	-4.30112	-8.13278	-11.168
		Bu çalışma	0.0000	-0.19213 (-0.20584)	-1.45297 (-1.48332)	-2.68621 (-2.72499)	-4.30122 (-4.34882)	-8.13292 (-8.19941)	-11.168 (-11.255)
	-0.4	[27]	0.0000	-0.2026	-1.6414	-3.1419	-5.2148	-10.594	-15.377
		[29]	0.0000	-0.202575	-1.6414	-3.14192	-5.21488	-10.59400	-15.376
		Bu çalışma	0.0000	-0.202601 (-0.217778)	-1.6415 (-1.6747)	-3.14209 (-3.18573)	-5.21512 (-5.27024)	-10.59441 (-10.6765)	-15.377 (-15.494)
Ω_t^*	0	[27]	0.0000	-1.6228	-1.8576	-1.2308	-0.13998	2.8793	5.5582
		[29]	0.0000	-1.62276	-1.85756	-1.23077	-0.139984	2.87392	5.5582
		Bu çalışma	0.0000	-1.62276	-1.85756	-1.23077	-0.139984	2.87392	5.5582
	-0.2	[27]	0.0000	-1.7636	-2.2284	-1.5942	-0.3217	3.7078	7.9646
		[29]	0.0000	-1.76355	-2.22835	-1.59417	-0.321709	3.70776	7.96455
		Bu çalışma	0.0000	-1.76354	-2.22832	-1.59413	-0.321676	3.7078	7.96458
	-0.4	[27]	0.0000	-1.9256	-2.7294	-2.1350	-0.6387	5.1972	13.344
		[29]	0.0000	-1.92557	-2.72935	-2.13499	-0.638601	5.19741	13.3445
		Bu çalışma	0.0000	-1.9255	-2.72927	-2.13490	-0.63851	5.19744	13.3444

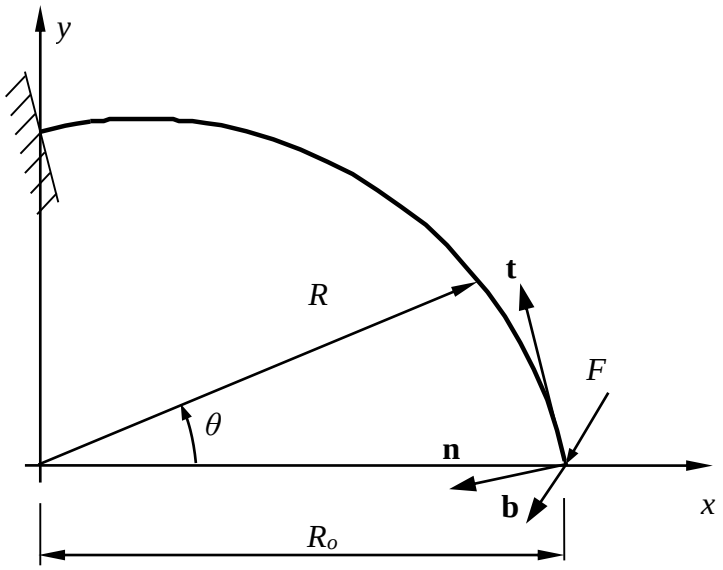
6.2.5 Serbest ucuna binormal yönde tekil kuvvet etkiyen spiral eksenli sabit kesitli ankastre serbest çubuk

Bu örnekte, spiral eksenli çubuğun statik problemi incelenmiştir. Sonuçlar, analitik çözümle ve farklı bir sonlu eleman formülasyonundan elde edilen değerlerle karşılaştırılmıştır. Şekil 6.14'de görülen çubuk, serbest ucundan etkiyen tekil binormal

yükü taşımaktadır. Dikdörtgen kesitli çubuğun eğrilik yarıçapı, (6.2) ifadesinde verildiği gibi değişmektedir. $\mu = 0$ olması, çember eksenli çubuğa karşılık gelmektedir. Spiral eksenli çubuğu Frenet koordinat takımını kullanarak incelemek için ihtiyaç duyulan eğrilik yarıçapı ve eksen açıklığı hesabı, aynı geometriye sahip çubuğun düzlem içi problemi sırasında detaylı olarak verilmiştir. Çubuğa ait özellikler aşağıdaki gibidir.

$R_o = 1\ \text{m}$ $\quad J = 1.406\times10^{-5}\ \text{m}^4$ $\quad I_n = 8.333\times10^{-6}\ \text{m}^4$

$A = 0.01\ \text{m}^2$ $\quad E = 2\times10^{10}\ \text{N/m}^2$ $\quad \nu = 0.15$



Şekil 6.14: Spiral eksenli çubuk.

Aynı problemin analitik çözümü, Tüfekçi ve Doğruer [29] tarafından yapılmıştır. Sengupta ve Dasgupta [20], önerdikleri sonlu eleman formülasyonuyla aynı problemi çözmüştür. $\mu = 0.4$ için burada elde edilen sonuçlar, adı geçen çalışmalarda elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmalı olarak Çizelge 6.11'de verilmiştir.

Düzlem içi problemdekine benzer olarak, analizde 18 çember eksenli eleman kullanılmıştır. Çizelge 6.11'de görüldüğü gibi, yer değiştirme, dönme açısı ve kesit tesirleri için elde edilen sonuçlar birbiriyle uyumludur. Burada verilen formülasyon, değişken eğriliğe sahip çubukların düzlem dışı hareketlerini oldukça iyi modellemektedir.

Çizelge 6.11 : Spiral eksenli çubuk için sonuçların karşılaştırılması $(\mu = 0.4)$.

		θ									
		0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
v (mm)	[20]	3.952	3.088	2.273	1.561	0.984	0.553	0.263	0.095	0.018	0.0000
	[29]	3.95217	3.08777	2.27336	1.5615	0.9841	0.55315	0.26316	0.0963	0.01837	0.0000
	Bu Çalışma	3.95251	3.08805	2.27356	1.5616	0.9841	0.55316	0.26315	0.0946	0.01837	0.0000
$\Omega_n(10^{-2})$ (rad)	[20]	0.4598	0.4795	0.4637	0.4178	0.3494	0.2673	0.1814	0.1018	0.0384	0.0000
	[29]	0.45978	0.479523	0.463708	0.41782	0.349366	0.267282	0.181398	0.10183	0.038413	0.0000
	Bu Çalışma	0.45974	0.479516	0.463739	0.41789	0.34945	0.267375	0.181487	0.10191	0.038453	0.0000
$\Omega_t(10^{-2})$ (rad)	[20]	-0.1951	-0.1013	-0.0107	0.0667	0.1226	0.1519	0.1255	0.1240	0.0709	0.0000
	[29]	-0.19505	-0.10133	-0.01066	0.066653	0.122619	0.151935	0.15218	0.12396	0.070946	0.0000
	Bu Çalışma	-0.19526	-0.10154	-0.01085	0.66477	0.122474	0.151825	0.152109	0.12392	0.070931	0.0000
M_n (Nm)	[20]	0.0000	-181.10	-343.58	-480.21	-584.02	-648.40	-667.37	-635.81	-549.98	-408.42
	[29]	0.0000	-181.102	-343.58	-480.213	-584.016	-648.40	-663.372	-635.812	-549.977	-408.42
	Bu Çalışma	0.0000	-181.111	-343.612	-480.278	-584.128	-648.57	-667.607	-636.120	-550.360	-408.873
M_t (Nm)	[20]	0.0000	-18.42	-72.26	-158.40	-272.31	-408.00	-557.85	-712.34	-859.72	-985.57
	[29]	0.0000	-18.4205	-72.2632	-158.399	-272.311	-408.005	-557.849	-712.336	-859.717	-985.566
	Bu Çalışma	0.0000	-18.632	-72.148	-158.231	-272.098	-407.755	-557.575	-712.053	-859.442	-985.323

7. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN TİTREŞİM PROBLEMLERİNİN SONLU ELEMAN YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ

5. bölümde elde edilen rijitlik ve kütle matrisleri kullanılarak, farklı geometri ve sınır koşullarına sahip çubukların titreşim problemleri çözülmüştür. Matris hesaplamaları Matlab programında yapılmış, uzun ve karmaşık ifadelerden oluşan kütle matrisi sayısal olarak hesaplanmıştır. Statik problemin çözümündekine benzer olarak, sınır şartları eliminasyon metoduyla uygulandıktan sonra özdeğer problemi çözülerek doğal frekanslar elde edilmiştir.

7.1 Düzlem İçi Titreşim Problemleri

7.1.1 Sabit kesitli çember eksenli çubuk

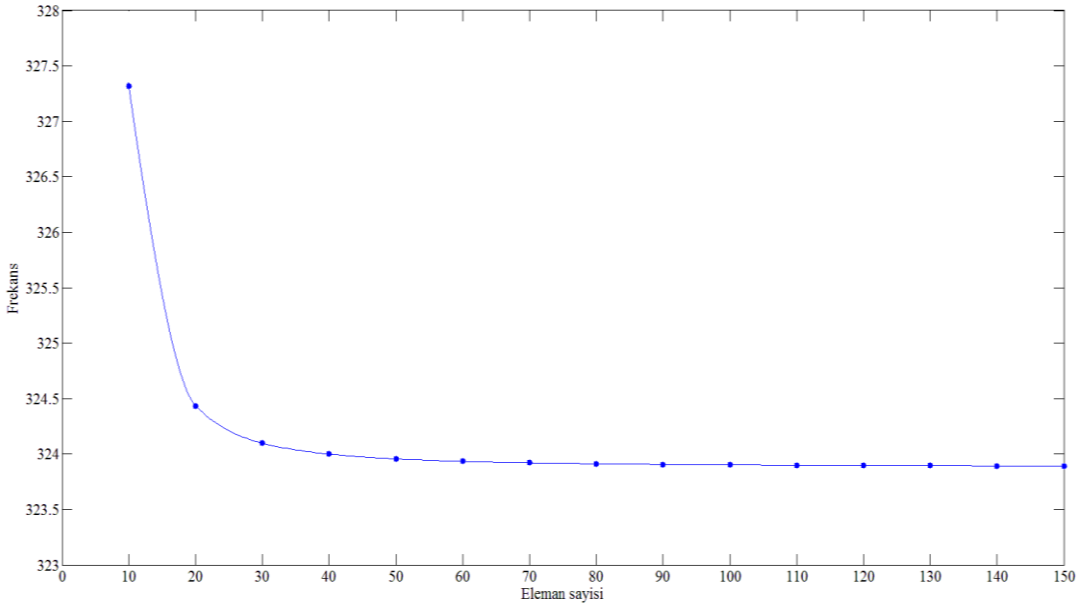
Tüfekçi ve Arpacı [54]' ya ait çalışmada, farklı eksen açıklıklarına ve narinlik oranlarına sahip çember eksenli sabit kesitli çubukların doğal frekansları hesaplanmaktadır. Burada karşılaştırma yapılan değerler, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerinin hesaplara dahil edilmesi durumunda elde edilen değerlerdir. Doğal frekanslar, $c = \omega R^2 \phi_T^{\,2} \sqrt{\rho A / EI_b}$ şeklinde boyutsuzlaştırılarak verilmiştir. Narinlik oranı;

$$\lambda = \frac{R}{i} = \frac{R}{\sqrt{I_b / A}} \tag{7.1}$$

şeklinde tanımlanır.

Şekil 7.1'de, narinlik oranı λ = 50 olan, sabit-sabit sınır şartlarında, 180° eksen açıklığına sahip çubuğun 5. doğal frekansının eleman sayısıyla değişimi görülmektedir.

Doğal frekansın eleman sayısıyla değişimi, her problemde benzer karakterdedir. Şekil 7.1 referans alınarak, 70 elemanın yakınsama için yeterli olduğu söylenebilir. Hassas sonuçlar elde etmek için, 100 eleman kullanılmıştır.



Şekil 7.1: Sabit-sabit çubuğun beşinci doğal frekans değerinin eleman sayısı ile değişimi.

Çizelge 7.1 : Ankastre-ankastre sınır şartlarındaki çubuğa ait boyutsuz doğal frekans değerleri.

		ϕ_T=90°		ϕ_T=120°		ϕ_T=180°	
λ	Mod no.	[54]	Bu Çalışma	[54]	Bu Çalışma	[54]	Bu Çalışma
100	1	55.3434	55.3436	51.70454	51.70466	43.17091	43.17091
	2	102.3868	102.3877	101.9366	101.9374	94.75567	94.7556
	3	188.4994	188.5022	185.7236	185.7266	175.7111	175.7112
	4	219.1514	219.1528	269.2141	269.2193	268.4875	268.4889
	5	299.1958	299.1865	393.7767	393.7821	387.7377	387.7542
75	1	55.97678	54.9772	51.50119	51.50144	43.09223	43.0923
	2	98.5094	98.5119	100.6416	100s.6432	94.36575	94.3667
	3	174.9116	174.9212	183.7216	183.7268	174.8113	174.8130
	4	185.1081	185.1165	253.5605	253.8737	265.9794	265.9831
	5	284.7500	284.7666	332.4988	332.5327	383.9120	383.8801
50	1	53.96596	53.96729	50.93224	50.9329	42.86968	42.8699
	2	86.19077	86.19839	96.85173	96.85578	93.26808	93.2695
	3	132.7272	132.74199	178.1998	178.21076	172.2951	172.3001
	4	175.8392	175.85788	198.0489	198.07889	258.4766	258.4950
	5	265.8141	265.8624	282.9555	282.9957	372.7893	372.78988

Çizelge 7.2 : Sabit-sabit sınır şartlarındaki çubuğa ait boyutsuz doğal frekans değerleri.

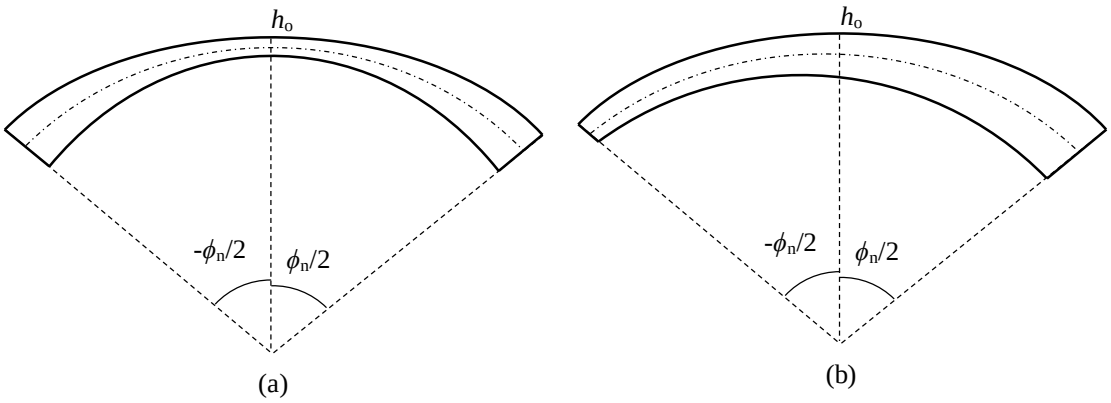
		ϕ_T=90°		ϕ_T=120°		ϕ_T=180°	
λ	Mod no.	[54]	Bu Çalışma	[54]	Bu Çalışma	[54]	Bu Çalışma
100	1	33.83406	33.83412	30.31780	30.31781	22.34968	22.3497
	2	78.72588	78.72633	76.23734	76.2376	68.16436	68.1644
	3	150.0300	150.0328	146.9290	146.9306	137.4288	137.4291
	4	214.8133	214.819	229.9762	229.9773	223.7427	223.74311
	5	259.7674	259.7725	339.1900	339.1647	332.0705	332.0761
75	1	33.73672	33.73682	30.26647	30.2665	22.33250	22.33251
	2	77.70250	77.70333	75.83952	75.8399	68.03600	68.03617
	3	148.4183	148.4227	145.9973	146.0002	137.0236	137.0245
	4	173.9414	173.9517	225.3067	225.3137	222.5925	222.5932
	5	239.3448	239.3569	321.9759	322.0071	329.9577	329.9300
50	1	33.46323	33.46357	30.12124	30.1214	22.28359	22.2836
	2	74.34122	74.34437	74.69487	74.6962	67.67219	67.67276
	3	121.4958	121.51254	143.4124	143.4196	135.8837	135.8862
	4	144.0231	144.0333	197.2652	197.292	219.2887	219.2849
	5	226.3381	226.3701	242.4045	242.4277	323.9065	323.9023

Çizelge 7.1 ve Çizelge 7.2'de görüldüğü üzere, önerilen kütle ve rijitlik matrisleri kullanılarak elde edilen, sabit kesitli ve çember eksenli çubukların düzlem içi titreşim hareketine ait doğal frekansları, analitik çözümle oldukça uyumludur.

7.1.2 Değişken kesitli ve değişken eğrilikli çubuklar

Sürekli değişken kesitli ve eğrilikli çubukların düzlem içi serbest titreşimleri, sonlu eleman yöntemiyle incelenmiştir. Bu inceleme yapılırken, bir önceki bölümde elde edilen rijitlik ve kütle matrisleri kullanılmıştır. Sabit kesitli ve çember eksenli çubuk elemanları uç uca eklenerek, değişken kesitli ve değişken eğrilikli çubuklar modellenmiştir.

İlk olarak, simetrik ve asimetrik olarak iki farklı geometriye sahip sürekli değişken kesitli çember eksenli çubuklar incelenmiştir. Kesit alanı dikdörtgen olup, kesit genişliği eğri boyunca sabittir. Kesit yüksekliği, aşağıda verilen ifadelere bağlı değişmektedir.



Şekil 7.2: Lineer değişken kesitli çubuklar (a) simetrik, (b) asimetrik.

Şekil (a) için;

$$\begin{aligned} h(\phi) &= h_o(1-2\eta\phi/\phi_n) \qquad -\phi_n/2 \le \phi \le 0, \\ h(\phi) &= h_o(1+2\eta\phi/\phi_n) \qquad 0 \le \phi \le \phi_n/2 \end{aligned} \tag{7.2}$$

Şekil (b) için;

$$h(\phi) = h_o(1+2\eta\phi/\phi_n) \qquad -\phi_n/2 \le \phi \le \phi_n/2 \tag{7.3}$$

Karami ve Malekzadeh [72], simetrik olmayan çubuğun ilk dört doğal frekansını, farklı narinlik oranları için diferansiyel kuadratür yöntemiyle elde etmiştir. Narinlik oranı λ ve boyutsuz frekans *c*, aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\lambda = \frac{R\phi_T}{\sqrt{\frac{I_b}{A}}}, \qquad c = \omega R^2\sqrt{\rho A/EI_b} \tag{7.4}$$

Bahsedilen çalışmada, kayma deformasyonu etkisi hesaplara dahil edilmemiştir. Karşılaştırma yapabilmek açısından, burada yapılan hesaplarda da kayma deformasyonu etkisinin ihmal edilmiştir. Fakat parantez içerisinde, kayma deformasyonu etkisinin hesaplara dahil edildiği durumda elde edilen sonuçlar verilmektedir.

Çizelge 7.3'de görüldüğü üzere, kayma deformasyonu etkisinin dahil edilmediği durum için sonuçlar, Karami ve Malekzadeh [72] tarafından elde edilen sonuçlarla oldukça uyumludur. Kayma deformasyonunun doğal frekanslar üzerindeki etkisi, narinlik oranı büyüdükçe azalmaktadır.

Çizelge 7.3 : Sabit-sabit sınır şartlarındaki simetrik olmayan değişken kesitli çubuğa ait boyutsuz doğal frekans ($\phi_T{}^2 c$) değerleri (ϕ_T=90°).

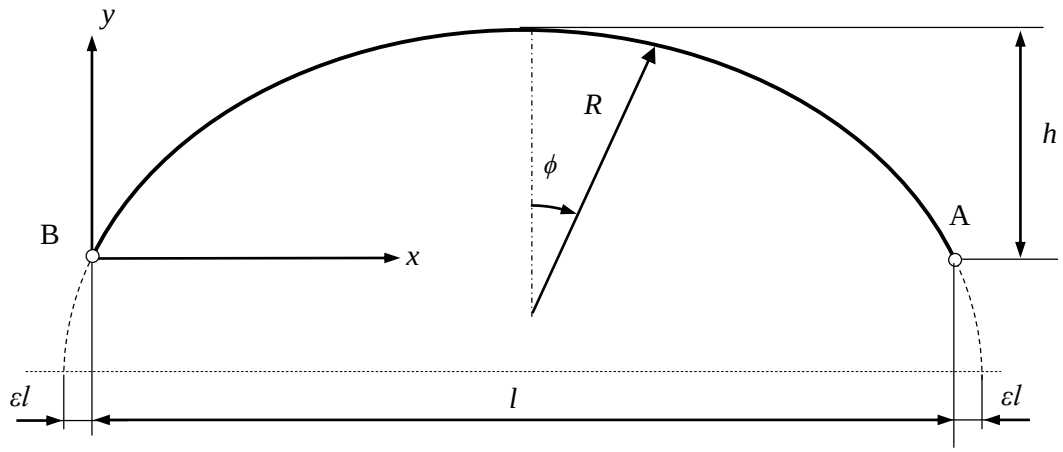
η	λ	1.mod		2.mod		3.mod		4.mod	
		[72]	Bu çalışma	[72]	Bu çalışma	[72]	Bu çalışma	[72]	Bu çalışma
0.2	10	15.0512	15.9254 (15.4746)	26.4509	24.6815 (20.0789)	36.6221	38.9765 (35.9394)	59.8374	56.5254 (41.2816)
	20	28.1055	28.4942 (27.3176)	32.1210	31.5481 (29.2248)	68.5767	69.5232 (62.7681)	76.6721	76.0298 (68.5581)
	40	33.0889	32.9502 (31.8346)	53.9646	53.9221 (53.1661)	85.5789	85.7582 (80.8698)	130.1944	129.5876 (121.9938)
	100	33.5420	33.5192 (33.3199)	77.1428	77.0299 (76.0755)	148.2080	148.2096 (145.3317)	151.3740	151.4046 (150.5484)
	200	33.6053	33.5995 (33.5489)	78.7802	78.7536 (78.4900)	150.3466	150.3171 (149.4244)	229.1882	229.0749 (227.1819)
	400	33.6211	33.6195 (33.6068)	79.1144	79.1075 (79.0404)	150.6357	150.6279 (150.4012)	234.7231	234.7013 (234.1548)
	500	33.6230	33.6219 (33.6138)	79.1528	79.1483 (79.1052)	150.6699	150.6647 (150.5193)	235.0911	235.0772 (234.7249)
	1000	33.6256	33.6252 (33.6231)	79.2036	79.2022 (79.1914)	150.7155	150.7137 (150.6773)	235.5328	235.5287 (235.4399)
	10000	33.6264	33.6262 (33.6262)	79.2202	79.2198 (79.2197)	150.7306	150.7298 (150.7295)	235.6682	235.6669 (235.6660)
0.4	10	14.6229	15.4279 (14.9433)	26.2164	24.4631 (20.0484)	36.2061	38.5178 (35.6697)	59.1208	55.9254 (40.8493)
	20	26.9219	27.2551 (25.9612)	32.2817	31.7249 (29.6989)	68.1048	68.8927 (61.6995)	74.9140	74.4648 (68.1666)
	40	31.9341	31.8308 (30.8195)	53.6324	53.5236 (52.7056)	128.3776	83.9309 (79.4477)	149.8200	127.6651 (119.7814)
	100	32.4839	32.4649 (32.2826)	74.9931	74.8859 (74.0004)	143.4350	143.4255 (140.7280)	151.1600	151.1676 (150.3664)
	200	32.5562	32.5509 (32.5046)	76.5140	76.4877 (76.2444)	145.8354	145.8067 (144.9855)	222.7171	222.6090 (220.8355)
	400	32.5771	32.5723 (32.5607)	76.8448	76.8208 (76.7588)	146.1922	146.1199 (145.9113)	227.7362	227.5612 (227.0585)
	500	32.5763	32.5749 (32.5674)	76.8647	76.8593 (76.8196)	146.1634	146.1565 (146.0228)	227.9260	227.9093 (227.5854)
	1000	32.5791	32.5783 (32.5764)	76.9126	76.9100 (76.9001)	146.2089	146.2050 (146.1715)	228.3376	228.3302 (228.2485)
	10000	32.5801	32.5794 (32.5794)	76.9283	76.9267 (76.9266)	146.2238	146.2209 (146.2206)	228.4640	228.4596 (228.4588)

Simetrik değişken kesitli çubuklarla ilgili çözülen örnekte, narin çubuklar göz önüne alınmıştır. Çubuğun narinlik oranı arttığında; yani çubuk boyu, kesit boyutlarına göre çok büyük olduğunda, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri, eğilmenin yanında ihmal edilebilir. Bu durumda, Euler-Bernoulli çubuk teorisi geçerli olur. Liu ve Wu [73], çalışmalarında simetrik değişken kesitli ve Euler-Bernoulli çubuk teorisine uyan narin çubukların doğal frekanslarını elde etmişlerdir. Elde ettikleri sonuçlar, bu çalışmada elde edilen sonuçlarla beraber Çizelge 7.4'de verilmiştir. Yapılan hesaplamalarda narinlik oranı λ=10^4 olarak alınmıştır. Ankastre-ankastre (AA) ve sabit sabit (SS) sınır şartları göz önüne alınmıştır.

Çizelge 7.4 : Farklı sınır şartları ve eksen açıklıklarına sahip simetrik değişken kesitli narin çubuğun ilk iki doğal frekansı.

			η =0.1		η =0.2		η =0.3	
Sınır şartı	Mod no.	ϕ_T	[73]	Bu çalışma	[73]	Bu çalışma	[73]	Bu çalışma
AA	1	10°	2149.7593	2149.6027	2275.3957	2275.0820	2399.1619	2398.6914
		20°	535.4500	535.4399	566.8193	566.7993	597.7229	597.6931
		30°	236.5183	236.5137	250.3404	250.4215	264.1371	264.1238
		40°	131.9088	131.9062	139.7107	139.70571	147.3984	147.3909
		50°	83.5073	83.5056	88.4809	88.4777	93.3824	93.3776
	2	10°	3859.2373	3857.2488	4073.8708	4071.5046	4286.188	4283.4553
		20°	963.4309	963.3048	1017.0424	1016.8928	1070.0756	1069.9030
		30°	427.1733	427.1458	450.9661	450.9309	474.5023	474.4599
		40°	239.4866	239.4761	252.8428	252.8286	266.0552	266.0374
		50°	152.6181	152.6130	161.1439	161.1365	169.5779	169.5684
SS	1	10°	1357.2106	1357.2058	1419.0535	1419.0345	1479.2608	1479.2197
		20°	337.8891	337.3885	352.7986	352.7972	367.8006	367.7979
		30°	148.5490	148.5488	155.3598	155.3592	161.9904	161.9892
		40°	82.4735	82.4734	86.2745	86.2741	89.9750	89.9743
		50°	51.9095	51.9094	54.3172	54.3170	56.6613	56.6609
	2	10°	2913.2945	2912.9451	3058.9326	3058.6159	3202.8152	3202.5277
		20°	726.9054	726.8830	763.2575	763.2371	799.1712	799.1525
		30°	322.0217	322.0181	338.1359	338.1333	354.0553	354.0537
		40°	180.3163	180.3154	189.3472	189.3469	198.2689	198.2691
		50°	114.7310	114.7308	120.4836	120.4838	126.1664	126.1669

Oh ve diğ. [74], parabolik, eliptik ve sinusoidal değişken eğriliğe sahip çubukların düzlem içi titreşim problemini incelemişlerdir. Bu inceleme yapılırken, eksen eğrisinin denklemi kartezyen koordinatlarda verilmiştir. En genel durum, Şekil 7.3'de görülmektedir.



Şekil 7.3: Değişken eğrilikli çubuğa ait büyüklükler.

Hesapların basitliği açısından, aşağıdaki boyutsuzlaştırılmalar yapılmıştır.

$$f=\frac{h}{l},\ s=\frac{l}{\sqrt{I_b/A}},\ \mu=\frac{G}{k_n E},\ \xi=\frac{x}{l},\ \eta=\frac{y}{l},\ c=\omega s l\sqrt{\rho/E} \tag{7.5}$$

(6.3) ile verilen ifade kullanılarak, eğrilik yarıçapı hesaplanabilir. Değişken dönüşümü yapılırsa eğrilik yarıçapı;

$$\frac{1}{R}=-\frac{\frac{1}{l}\frac{d^2\eta}{d\xi^2}}{\left\{1+\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2\right\}^{3/2}} \tag{7.6}$$

olarak elde edilir. Eksen eğrisinin eğimi ile ϕ açısı arasında;

$$\frac{d\eta}{d\xi}=-\tan\phi \tag{7.7}$$

bağıntısı vardır. O halde A ve B noktalarının açıları,

$$\begin{aligned}\phi_A&=\tan^{-1}\left(-\frac{d\eta}{d\xi}(\xi=1)\right)\\ \phi_B&=\tan^{-1}\left(-\frac{d\eta}{d\xi}(\xi=0)\right)\end{aligned} \tag{7.8}$$

ifadeleriyle elde edilir.

Parabolik çubuğun eksen eğrisinin boyutsuz denklemi;

$$\eta=-4f\xi(\xi-1),\quad 0\le\xi\le 1 \tag{7.9}$$

şeklinde verilmiştir. (7.6) ve (7.7) ifadelerinden faydalanarak;

$$R=\frac{l/8f}{\cos^3\phi},\quad \phi_A=\tan^{-1}(4f),\quad \phi_B=-\tan^{-1}(4f) \tag{7.10}$$

olarak elde edilir.

Eliptik çubuğa ait denklem;

$$\eta=(b_2/b_1)\left[b_1^{\,2}-(\xi-1/2)^2\right]^{1/2}+f-b_2,\quad 0\le\xi\le 1 \tag{7.11}$$

olarak verilmiştir. Burada,

$$b_1 = \frac{(1+2\varepsilon)}{2}, \quad b_2 = \frac{f}{\left[1-\dfrac{2\left(\varepsilon+\varepsilon^2\right)^{1/2}}{1+2\varepsilon}\right]} \tag{7.12}$$

olarak tanımlanmaktadır. (7.6) ve (7.7) ifadelerinden faydalanarak;

$$R = \frac{l\left(\dfrac{b_1^{\,2}b_2^{\,2}}{b_2^{\,2}+b_1^{\,2}\tan^2\phi}\right)^{3/2}}{b_1 b_2\cos^3\phi}$$

$$\phi_A = \tan^{-1}\left(\frac{b_2}{b_1\sqrt{4b_1^{\,2}-1}}\right) \tag{7.13}$$

$$\phi_B = -\tan^{-1}\left(\frac{b_2}{b_1\sqrt{4b_1^{\,2}-1}}\right)$$

olarak elde edilir.

Sinusoidal çubuğa ait denklem;

$$\eta = f - c_1 + c_1\sin\left(c_2\xi + c_2\varepsilon\right), \quad 0 \le \xi \le 1 \tag{7.14}$$

olarak verilmiştir. Burada,

$$c_1 = \frac{f}{1-\sin(c_2\varepsilon)}, \quad c_2 = \frac{\pi}{1+2\varepsilon} \tag{7.15}$$

olarak tanımlanmıştır. Eğrilik yarıçapı ve açılar,

$$R = \frac{l}{c_1 c_2^{\,2}\sin\left(\cos^{-1}\left(-\dfrac{\tan\phi}{c_1 c_2}\right)\right)\cos^3\phi}$$

$$\phi_A = \tan^{-1}\left(-c_1 c_2\cos\left(c_2\left(\varepsilon+1\right)\right)\right) \tag{7.16}$$

$$\phi_A = \tan^{-1}\left(-c_1 c_2\cos\left(c_2\varepsilon\right)\right)$$

şeklinde elde edilir.

Çizelge 7.5 ve Çizelge 7.6'da görüldüğü üzere, burada önerilen sonlu eleman formülasyonu, değişken eğrilikli çubukların düzlem içi titreşimlerini oldukça iyi bir şekilde modelleyebilmektedir

Çizelge 7.5 : Sabit-sabit sınır şartlarında değişken eğrilikli çubuğun boyutsuz doğal frekansları (μ=0.3, ε=0.5).

			1.mod		2.mod		3.mod		4.mod	
f	*s*	Eksen eğrisi	[74]	Bu Çalışma	[74]	Bu Çalışma	[74]	Bu Çalışma	[74]	Bu Çalışma
0.1	30	Parabol	22.48	22.355	34.21	33.186	74.94	71.065	93.87	93.536
		Elips	22.59	22.463	34.05	33.034	75.00	71.142	93.82	93.382
		Sinüs	22.38	22.261	34.32	33.295	74.93	71.043	93.84	93.573
	60	Parabol	35.64	35.306	41.67	41.597	82.26	80.681	141.1	136.760
		Elips	35.47	35.148	41.56	41.468	83.02	81.457	140.2	135.923
		Sinüs	35.75	35.420	41.66	41.594	81.86	80.274	141.6	137.249
	100	Parabol	35.95	35.822	64.76	64.621	88.35	87.804	146.0	144.072
		Elips	35.79	35.661	62.69	62.523	91.79	91.272	145.3	143.421
		Sinüs	36.06	35.936	66.10	65.986	86.14	85.569	146.4	144.455
0.2	30	Parabol	27.40	26.734	36.79	36.631	64.52	61.560	91.23	90.370
		Elips	27.04	26.388	36.75	36.551	64.73	61.829	91.01	89.806
		Sinüs	27.66	26.986	36.74	36.598	64.48	61.489	91.18	90.520
	60	Parabol	28.57	28.363	64.64	63.895	77.88	77.383	122.2	118.825
		Elips	28.20	27.994	61.99	61.302	81.33	80.773	120.8	117.593
		Sinüs	28.84	28.632	66.64	65.830	75.41	74.979	122.9	119.554
	100	Parabol	28.83	28.752	68.68	68.244	123.3	123.239	125.9	124.432
		Elips	28.46	28.378	66.74	66.334	124.7	123.318	126.8	126.616
		Sinüs	29.10	29.025	69.80	69.351	121.3	121.222	126.6	125.099

Çizelge 7.6 : Ankastre-ankastre sınır şartlarında değişken eğrilikli çubuğun boyutsuz doğal frekansları (μ=0.1, ε=0.5).

			1.mod		2.mod		3.mod		4.mod	
f	*s*	Eksen eğrisi	[74]	Bu Çalışma	[74]	Bu Çalışma	[74]	Bu Çalışma	[74]	Bu Çalışma
0.3	30	Parabol	26.43	26.198	44.15	43.825	53.00	52.445	75.37	74.000
		Elips	26.09	25.869	42.85	42.476	54.19	53.684	74.24	72.953
		Sinüs	26.68	26.445	45.03	44.759	52.24	51.636	76.04	74.638
	60	Parabol	32.91	32.763	65.93	65.313	92.09	91.925	107.8	106.242
		Elips	32.60	32.361	63.99	63.426	93.75	93.532	106.6	105.104
		Sinüs	33.21	33.065	67.15	66.507	91.13	91.012	108.5	106.951
	100	Parabol	34.99	34.921	73.11	72.757	122.3	121.333	148.2	147.917
		Elips	34.56	34.493	71.47	71.142	121.1	120.120	148.8	148.306
		Sinüs	35.30	35.242	74.08	73.734	123.1	122.102	148.0	147.801
0.4	30	Parabol	21.18	21.018	42.26	41.671	49.92	49.840	65.15	63.974
		Elips	20.85	20.701	41.33	40.785	50.66	50.546	64.63	63.507
		Sinüs	21.42	21.261	42.76	42.159	49.59	49.532	65.37	64.198
	60	Parabol	25.63	25.543	55.05	54.598	89.87	88.743	97.32	97.193
		Elips	25.23	25.152	54.53	53.835	89.13	88.043	97.63	97.482
		Sinüs	25.92	25.842	55.47	55.022	90.30	89.179	97.29	97.192
	100	Parabol	26.97	26.945	59.52	59.298	100.1	99.409	143.4	142.262
		Elips	26.55	26.529	58.75	58.545	99.21	98.594	142.1	141.080
		Sinüs	27.28	27.262	59.94	59.727	100.6	99.934	144.2	143.139

7.2 Düzlem Dışı Titreşim Problemleri

7.2.1 Sabit kesitli çember eksenli çubuk

Tüfekçi ve Doğruer [65]' e ait çalışmada, farklı eksen açıklıklarına ve narinlik oranlarına sahip çember eksenli sabit kesitli çubukların doğal frekansları hesaplanmaktadır. Burada karşılaştırma yapılan değerler, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerinin hesaplara dahil edilmesi durumunda elde edilen değerlerdir. Doğal frekanslar, boyutsuzlaştırılarak verilmiştir. Boyutsuz frekans ve narinlik oranı;

$$\lambda = \frac{R}{i} = \frac{R}{\sqrt{\frac{I_n}{A}}} \qquad c = \omega R^2 \sqrt{\frac{\rho A}{E I_n}} \tag{7.17}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Eksen açıklığı 60°-120°-180° ve narinlik oranı λ=20-100 olan, ankastre-ankastre mesnetli, dairesel ve kare kesitli çubukların ilk dört moduna ait doğal frekanslar, Çizelge 7.7'de literatürdeki sonuçlarla kıyaslanmıştır. Hesaplarda v = 0.3 olarak alınmıştır. Kayma gerilmelerinin kesite üniform olarak yayılmadığını karakterize eden k_b sabiti, dairesel kesitli çubuk için k_b=10/9 ve kare kesitli çubuk için k_b=6/5 olarak alınmıştır. Şekil 7.1'deki yakınsama durumu göz önüne alınarak, düzlem içi titreşim problemindekine benzer olarak hassas sonuçlar elde etmek için, hesaplarda 100 sonlu çubuk elemanı kullanılmıştır.

Çizelge 7.7'de görüldüğü üzere, önerilen kütle ve rijitlik matrisleri kullanılarak elde edilen, sabit kesitli ve çember eksenli çubukların düzlem dışı titreşim hareketine ait doğal frekansları, literatürdeki sonuçlarla oldukça yakındır.

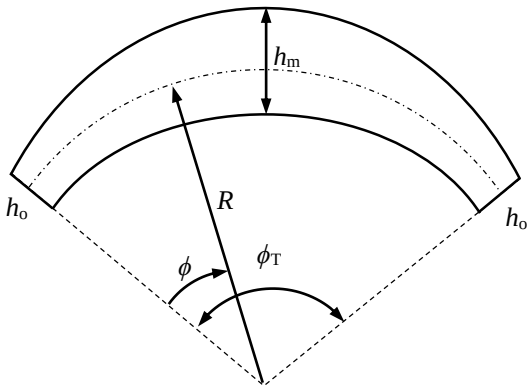
7.2.2 Değişken kesitli ve değişken eğrilikli çubuklar

Sürekli değişken kesitli ve eğrilikli çubukların düzlem içi serbest titreşimleri, sonlu eleman yöntemiyle incelenmiştir. Bu inceleme yapılırken, bir önceki bölümde elde edilen rijitlik ve kütle matrisleri kullanılmıştır. Sabit kesitli ve çember eksenli çubuk elemanları uç uca eklenerek, değişken kesitli ve değişken eğrilikli çubuklar modellenmiştir.

Çizelge 7.7 : Ankastre-ankastre mesnetlenmiş sabit kesitli çubuğun düzlem dışı hareketine ait boyutsuz doğal frekans değerleri.

			Dairesel Kesitli Çubuk			Kare Kesitli Çubuk		
λ	ϕ	Mod	[65]	[75]	Bu Çalışma	[65]	[75]	Bu Çalışma
20	60	1	16.8849	16.885	16.8851	16.7439	16.743	16.7441
		2	39.7003	39.700	39.7022	36.9463	36.921	36.9481
		3	40.9340	40.934	40.9363	40.4505	40.449	40.4528
		4	70.8505	70.851	70.5917	69.6197	69.618	69.631
	120	1	4.3094	4.3094	4.30943	4.28255	4.2823	4.28256
		2	11.7959	11.796	11.7962	11.6906	11.690	11.6908
		3	22.5102	22.510	22.5117	22.0535	22.045	22.0551
		4	23.3027	23.303	23.3042	22.3819	22.379	22.3835
	180	1	1.79085	1.7908	1.79085	1.77652	1.7764	1.77652
		2	5.03244	5.032	5.03248	4.98189	4.9814	4.98193
		3	10.2322	10.232	10.2326	10.1340	10.133	10.1343
		4	16.9173	16.917	16.9188	16.7627	16.762	16.7642
100	60	1	19.4547	19.454	19.4538	19.4019	19.401	19.4019
		2	54.1477	54.148	54.1479	54.0295	54.029	54.0298
		3	105.861	105.86	105.862	105.648	105.65	105.65
		4	173.158	173.16	173.165	172.773	172.77	172.781
	120	1	4.47308	4.4731	4.47308	4.45145	4.4512	4.45145
		2	12.8916	12.892	12.8916	12.8263	12.826	12.8263
		3	26.0805	26.081	26.0807	25.9893	26.988	25.9895
		4	43.6839	43.684	43.6844	43.5705	43.570	43.571
	180	1	1.81817	1.8182	1.81817	1.80434	1.8042	1.80434
		2	5.2415	5.2415	5.24153	5.19799	5.1975	5.198
		3	10.9889	10.989	10.9889	10.9182	10.917	10.9182
		4	18.8133	18.813	18.8134	18.7255	18.725	18.7256

Lee ve diğ. [76], yaptıkları çalışmada yüksekliği açısal koordinat ile lineer olarak değişen çember eksenli çubuğun düzlem dışı titreşimini incelemiştir. Simetrik değişken kesite sahip çubuk, Şekil 7.4'de görülmektedir. Yüksekliğin açısal koordinat ile değişimi (7.18) ifadesi ile verilmiştir. Çubuğun genişliği *b* sabittir.



Şekil 7.4: Simetrik değişken kesite sahip çubuğa ait büyüklükler.

$$h(\phi) = h_o\left(1+\frac{2(h_m-h_o)}{h_o}\frac{\phi}{\phi_T}\right); \qquad 0 \le \phi \le \frac{\phi_T}{2}$$
$$h(\phi) = h_o\left(\frac{2h_m-h_o}{h_o}-\frac{2(h_m-h_o)}{h_o}\frac{\phi}{\phi_T}\right); \quad \frac{\phi_T}{2} \le \phi \le \phi_T \qquad \textbf{(7.18)}$$

Bu ifadelerde yer alan h_o, çubuğun uçlarındaki yükseklik değeri, h_m ise çubuğun orta noktasındaki yükseklik değeridir. Ayrıca, $g = G/E$, $m = h_m/h_o$ ve $n = b/h_o$ parametreleri tanımlanmıştır. Çizelge 7.8'de, ankastre-ankastre (AA), ankastre-sabit (AS) ve sabit-sabit (SS) olmak üzere 3 farklı mesnetleme durumu için bu çalışmada elde edilen sonuçlarla Lee ve diğ. [76] tarafından elde edilen sonuçlar karşılaştırılmaktadır. Boyutsuz frekans parametresi ve narinlik oranı, (7.17)'de tanımlandığı gibidir.

Çözülen problemde, parametreler aşağıdaki gibi kabul edilmiştir.

$$\phi_T = 70° \quad n = 0.2 \quad k_b = 6/5$$
$$m = 1.3 \quad \lambda = 173 \quad g = 0.38$$

Çizelge 7.8 : Değişken kesitli çubuğun düzlem dışı hareketine ait doğal frekansları.

Sınır şartları	Mod	[76]	Bu Çalışma
AA	1	13.58	13.5368
	2	39.39	39.2861
	3	78.59	78.3999
	4	84.24	84.381
	5	130.5	130.203
	6	179.2	179.524
	7	194.7	194.405
AS	1	9.077	9.04813
	2	31.85	31.7639
	3	67.91	67.7374
	4	84.23	84.3754
	5	116.8	116.501
	6	178.1	177.766
	7	179.2	179.537
SS	1	5.293	5.27412
	2	25.07	24.9987
	3	57.97	57.8243
	4	84.23	84.3746
	5	103.7	103.516
	6	162.1	161.835
	7	179.2	179.521

Diğer örneklere benzer olarak 100 eleman kullanılarak yapılan bu çözümde, Çizelge 7.8'de görüldüğü gibi literatürle oldukça yakın sonuçlar elde edilmiştir.

Değişken eğrilikli çubuklara örnek olarak, düzlem içi titreşim hareketi incelenen parabolik, eliptik ve sinüsoidal çubuklar ele alınmıştır. h yüksekliğinde ve b genişliğinde kesite sahip çubuğa ait geometrik özellikler, aşağıda verildiği gibidir.

$$s = l/\sqrt{I_n/A} = 100 \qquad l/b = 28.87 \qquad \nu = 0.3$$
$$s_p = l/\sqrt{I_p/A} = 31.6 \qquad h/b = 3 \qquad e = GJ/EI_n = 1.22$$
$$\varepsilon = 0.5 \qquad f = h/l = 0.2 \qquad k_b = 6/5$$

Çubuklara ait eğrilik ve eksen açıklığı değerleri, (7.10), (7.13) ve (7.16) ifadeleriyle verildiği gibi hesaplanmaktadır. Bir önceki örneğe benzer olarak 3 farklı sınır şartı için yapılan hesaplar, (7.5) ifadesinde verilen boyutsuzlaştırma yapılarak Çizelge 7.9'da Lee ve diğ. [68] tarafından elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmalı olarak verilmiştir. Sonuçların birbirine oldukça yakın olduğu görülmektedir.

Çizelge 7.9 : Değişken eğrilikli çubuğun düzlem dışı hareketine ait doğal frekansları.

Sınır Şartı	Eksen Eğrisi	Mod No:	1	2	3	4	5	6	7
AA	Parabol	[68]	17.12	48.77	96.06	109.9	158.7	203.8	234.7
		Bu Çalışma	17.0436	48.399	95.0249	109.932	156.51	203.801	230.924
	Elips	[68]	17.10	48.53	95.87	109.2	158.0	203.7	233.7
		Bu Çalışma	17.0171	48.1539	94.8315	109.192	155.862	203.704	229.936
	Sinüs	[68]	17.14	48.95	96.05	110.6	159.0	203.9	235.3
		Bu Çalışma	17.0627	48.5802	95.0305	110.609	156.907	203.92	231.571
AS	Parabol	[68]	11.15	39.10	82.61	109.8	141.4	203.8	213.8
		Bu Çalışma	11.1284	38.9635	82.1922	109.821	140.464	203.797	212.204
	Elips	[68]	11.04	38.82	82.33	109.1	140.7	203.7	212.9
		Bu Çalışma	11.0152	38.6795	81.9073	109.173	139.833	203.701	211.259
	Sinüs	[68]	11.24	39.29	82.71	110.3	141.8	203.8	214.4
		Bu Çalışma	11.2094	39.1637	82.3032	110.382	140.857	203.895	212.83
SS	Parabol	[68]	6.090	30.40	70.03	109.8	125.0	194.0	203.8
		Bu Çalışma	6.08254	30.4016	70.0328	109.8	125.048	193.974	203.799
	Elips	[68]	5.905	30.03	69.72	109.1	124.4	193.1	203.7
		Bu Çalışma	5.90426	30.0301	69.7228	109.17	124.437	193.064	203.702
	Sinüs	[68]	6.215	30.65	70.15	110.3	125.4	194.5	203.8
		Bu Çalışma	6.20726	30.6662	70.1616	110.34	125.42	194.563	203.903

8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, eğri eksenli çubukların düzlem içi ve düzlem dışı statik davranışlarına ait denklemler, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve hem eğilmeden hem burulmadan kaynaklanan dönme eylemsizliği etkileri göz önüne alınarak, analitik olarak elde edilmektedir. Diferansiyel denklem takımının kesin çözümü, başlangıç değerleri yöntemi kullanılarak yapılmış, eğri eksenli çubuklar için genel bir çözüm elde edilmiştir. Böylece, birçok çalışmada ancak yaklaşık hesabı yapılabilen eğri eksenli çubukların, düzlem içi ve düzlem dışı statik problemlerinin kesin hesabı yapılabilmektedir.

Literatürde, eğri eksenli çubukların düzlem içi ve düzlem dışı statik ve dinamik problemlerini inceleyen, pek çok çalışma olmasına rağmen, bunların çoğu sabit kesit alanına sahip çubukları ele almaktadır. Yapılan kaynak taramasında, çubuk teorisinin genel denklemlerine çeşitli birleştirici varsayımlarla ve yaklaşık yöntemlerle çözüm arandığı görülmüştür. Özellikle, sayısal yöntemler ve bilgisayar teknolojisinin gelişmesiyle birlikte, yaygınlaşan sonlu eleman yönteminin çalışmaların büyük bölümünde uygulama alanı bulduğu söylenebilir. Sadece basit problemler söz konusu olduğunda kesin çözüme başvurulduğu görülmektedir.

Bu çalışmada, düzlemsel eğri eksenli çubukların düzlem iç ve düzlem dışı statik ve dinamik problemlerini çözmek üzere yeni bir sonlu eleman formülasyonu geliştirilmiştir. Bu formülasyon, çember eksenli ve sabit kesitli çubukların statik problemlerinin kesin çözümünden yola çıkılarak elde edilmiştir. Elde edilen rijitlik matrisi, yer değiştirme ve dönme ifadelerinin kesin çözümü kullanılarak elde edildiği için, bu yöntemin geleneksel sonlu eleman yöntemlerine göre oldukça iyi sonuç verdiği görülmüştür. Sabit kesitli ve çember eksenli çubukların statik problemlerinde, problemdeki bölge sayısı kadar eleman kullanılması halinde dahi kesin çözümle aynı sonuçlar elde edilebilmektedir. Ayrıca bu rijitlik matrisi, değişken kesitli ve değişken eğrilikli çubukların statik problemlerini çözmek için kullanılabilir. Kesidi ve eğriliği sürekli değişen çubuklar, sabit kesitli ve eğrilikli sonlu elemanlara bölünerek çözüm

yapılabilir. Eleman sayısının artması ile sonuçtaki yakınsama incelenerek gerekli minimum eleman sayısını belirlemek mümkündür. Bu sayede, eksenel uzama ve kayma deformasyonu etkileri ihmal edilmeksizin yaklaşık bir çözüm elde etmek mümkündür.

Düzlemsel eğri eksenli çubukların düzlem içi ve düzlem dışı statik problemlerine ait 11 örneğin çözümü, analitik çözümden elde edilen sonlu eleman formülasyonu ile yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar, literatürdeki sonuçlarla, analitik çözümle ve sonlu eleman paket programından elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Sabit kesitli ve çember eksenli çubukların problemlerinde, bölge sayısı kadar elemanın kesin çözümle aynı değerleri elde etmek için yeterli olduğu görülmüştür. Değişken kesit veya değişken eğrilik olması durumunda, geleneksel sonlu eleman formülasyonlarına göre yakınsamanın daha az eleman ile sağlanabildiği ve daha doğru sonuçların elde edildiği görülmüştür. Sonlu eleman paket programlarında, sadece çubuğun geometrisine yaklaşmak için dahi fazla sayıda eleman kullanılması gerekirken, bu yöntemle az sayıda elemanla kesin çözüme oldukça yakın sonuçlar elde edilmiştir. Formülasyonda kesin çözümden hareket edildiği için, kesit tesirlerinin nodlarda süreksiz olması sorunu görülmemektedir.

Dinamik analiz için ihtiyaç duyulan kütle matrisi, eğilme ve burulmadan kaynaklanan dönme eylemsizliklerinin de dahil edildiği kinetik enerji ifadesinden faydalanarak elde edilmiştir. Enerji ifadesinde yer alan yer değiştirme ve dönme bileşenleri için, kesin çözümden elde edilen ifadeler kullanılmıştır. Böylece eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini içeren yeni bir kütle matrisi elde edilmiştir.

Geleneksel sonlu eleman yöntemlerinde yer değiştirme ve dönme bileşenlerinin yerine yaklaşık ifadeler kullanıldığı için yakınsama ancak çok fazla sayıda elemanla sağlanabilmektedir. Burada önerilen rijitlik ve kütle matrisleri ile yapılan titreşim analizinde ise, yakınsamanın daha çabuk olduğu görülmüştür. Fazla sayıda eleman kullanılması halinde, düzlemsel eğri eksenli çubukların serbest titreşim hareketine ait doğal frekansların oldukça hassas bir şekilde belirlenebildiği, çözülen fazla sayıdaki örnekte açıkça görülmektedir.

KAYNAKLAR

[1] **Love, A.E.H.,** 1994. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Dover Publication, New York.

[2] **Timoshenko, S., Goodier, J.N.,** 1951. Theory of Elasticity, McGraw-Hill Book Co., New York.

[3] **Den Hartog, J.P.,** 1952. Advanced Strength of Materials, McGraw-Hill Book Co., New York.

[4] **İnan, M.,** 1966. Elastik Çubukların Genel Teorisi, İTÜ Yayını, İstanbul

[5] **İnan, M.,** 1967. Cisimlerin Mukavemeti, İTÜ Yayını, İstanbul

[6] **Pilkey, W., D.,** 2002. Analysis and Design of Elastic Beams Computational Methods, John Willey and Sons.

[7] **Martin, H. C.,** 1966 Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis, McGraw-Hill

[8] **Kikuchi, F.,** 1975. On the Validity of the Finite Element Analysis of Circular Arches Represented by an Assemblage of Beam Elements, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 5, 253-276.

[9] **Kikuchi, F., Tanizawa, K.,** 1984. Accuarcy and Locking-Free Property of the Beam Element Approximation for Arch Problems, Computers and Structures, 19, 103-110.

[10] **Cinemre, V.,** 1982. Çubuk Teorisinde Yer ve Şekil Değiştirme İlişkileri, İTÜ Dergisi, Cilt 40, No:3-6.

[11] **Balasubramanian, T.S., Prathap, G.,** 1988. A Field consistent Higher Order Curved Beam Element for Static and Dynamic Analysis of stepped Arches, Computers and structures, 33, 281-288.

[12] **Rajasekaran, S. and Padmanabhan, S.**, 1989. Equations of Curved Beams, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, **115**, 1094.

[13] **Naganarayana, B. P., Prathap, G.,** 1990. Consistency Aspects of Out-of-Plane Bending, Torsion and Shear in a Quadratic Curved Beam Element, *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* **30,** 431-443.

[14] **Pantazopoulou, S.J.,** 1992. Low Order Interpolation Functions for Curved Beams, *Journal of Engineering Mechanics,* **118,** 329-350.

[15] **Tüfekçi, E.,** 1994. Eğri Eksenli Düzlemsel Çubukların Statik ve Dinamik Problemlerinin Analitik Çözümü, Doktora tezi, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

[16] **Tüfekçi, E., Arpacı, A.,** 2006. Analytical Solutions of In-Plane Static Problems for Non-Uniform Curved Beams Including Axial and Shear Deformations, Structural Engineering and Mechanics, 22 (2), 131-150.

[17] **Choi, J.K., Lim, J.K.,** 1995. General Curved Beam Elements Based on the Assumed Strain Fields, Computers and Structures, 55(3), 379-386

[18] **Kang, K., Bert, C. W., Striz, A. G.,** 1996. Static Analysis of a Curved Shaft Subjected to end Torques, International Journal of Solids and Structures, 33(11), 1587-1596.

[19] **Litewka, P., Rakowski, J.,** 1997. An Efficient Curved Beam Finite Element, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 40, 2629-2652.

[20] **Sengupta, D., Dasgupta, S.,** 1997. Static and Dynamic Applications of a Five Noded Horizontally Curved Beam Element with Shear Deformation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering.* **40,** 1801-1819.

[21] **Friedman, Z., Kosmatka, J. B.,** 1998. An Accurate Two-Node Finite Element for Shear Deformable Curved Beams. *International Journal for Numerical Methods in Engineering.* **41,** 473-498.

[22] **Krishnan, A., Suresh, Y. J.,** 1998. A Simple Cubic Linear Element for Static and Free Vibration Analyses of Curved Beams. *Computers and Structures.* **68,** 473-489.

[23] **Litewka, P., Rakowski, J.,** 1998. The Exact Arch Finite Element. *Computers and Structures.* **68,** 369-379.

[24] **Raveendranath, P., Singh, G., Pradhan, B.,** 1999. A Two-Noded Locking-Free Shear Flexible Curved Beam Element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering.* **44,** 265-280.

[25] **Raveendranath, P., Singh, G., Venkateswara, R.** 2001. A Three-Noded Shear Flexible Curved Beam Element Based on Coupled Displacement Field Interpolations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering.* **51,** 85-101.

[26] **Sheikh, A. H.,** 2002. A New Concept to Include Shear Deformation in a Curved Beam Element. *Journal of Structural Engineering.* **3,** 406-410.

[27] **Malekzadeh, P., Karami, G.,** 2003. Out-of-Plane Static Analysis of Circular Arches by DQM. *International Journal of Solids and Structures.* **40,** 6527-6545.

[28] **Molari, L., Ubertini, F.,** 2006. A Flexibility-Based Finite Element for Linear Analysis of Arbitrarily Curved Arches. *International Journal for Numerical Methods in Engineering.* **65,** 1333-1353.

[29] **Tufekci, E., Dogruer, O. Y.,** 2006. Exact Solution of Out-of-Plane Problems of an Arch with Varying Curvature and Cross Section. *Journal of Engineering Mechanics.* **132,** 600-609.

[30] **Saffari, H., Tabatabaei, R.,** 2007. A Finite Circular Arch Element Based on Trigonometric Shape Functions. *Mathematical Problems in Engineering.* ID: 78507.

[31] **Gimena, F.N., Gonzaga, P., Gimena, L.,** 2008. Stiffness and Transfer Matrices of a Non-Naturally Curved 3D-Beam Element, *Engineering Structures*, 30, 1770-1781.

[32] **Gimena, L., Gimena, F.N., Gonzaga, P.,** 2008. Structural Analysis of a Curved Beam Element Defined in Global Coordinates, *Engineering Structures*, 30, 3355-3364.

[33] **Atternejad, R.,** 2010. Basic Displacement Functions in Analysis of nonprismatic Beams, *Engineering Computations*, 27, 733-745.

[34] **Atternejad, R., Semnani, S. J., Shahba, A.,** 2010. Basic Displacement Functions for Free Vibration Analysis of non-Prismatic Timoshenko Beams, *Finite Elemenet in Analysis and Design*, 46, 916-929.

[35] **Atternejad, R., Shahba, A., Eslaminia, M.,** 2011. Dynamic Basic Displacement Functions for Free Vibration Analysis of Tapered Beams, *Journal of Vibration and Control*, 17, 2222-2238.

[36] **Shahba, A., Atternejad, R., Eslaminia, M.,** 2012. Derivation of an Efficient non-Prismatic Thin Curved Beam Element Using Basic Displacement Functions, *Shock and Vibration*, 19, 187-204.

[37] **Shahba, A., Atternejad, R., Semnani, S. J.,** 2013. New Shape Functions for non-Uniform Curved Timoshenko Beams with Arbitrarily Varying Curvature Using Displacement Functions, *Meccanica*, 48, 159-174.

[38] **Volterra, E., Morel, J. D.,** 1961. Lowest Natural Frequency of Elastic Arc for Vibrations Outside the Plane of Inıtial Curvature, *Journal of Applied Mechanics,* 624-627.

[39] **Takahashi, S.,** 1962. Vibration of a Circular Arch (Perpendicular to its Plane), *Bulletin of the JSME,* **6(24),** 674-681.

[40] **Takahashi, S., Suzuki, K.,** 1977. Vibrations of Elliptic Arch Bar Perpendicular to its Plane, *Bulletin of the JSME,* **20(129),** 1409-1416.

[41] **Suzuki, K., Aida, H., Takahashi, S.,** 1978. Vibrations of Curved Bars Perpendicular to Their Planes, *Bulletin of the JSME,* **21(162),** 1685-1695.

[42] **Endo, M., Taniguchi, O.,** 1969. Flexural Vibration of a Ring of Rectangular Cross Section, *Bulletin of the JSME*, **12(52),** 747-755.

[43] **Suzuki, K., Aida, H., Takahashi, S.,** 1978. Vibrations of Curved Bars Perpendicular to Their Planes, *Bulletin of the JSME,* **21(162),** 1685-1695.

[44] **Bickford, L., Maganty, S. P.,** 1986. On the Out-of-Plane Vibrations of Thick Rings, *Journal of Sound and Vibration*, **108,** 503-507.

[45] **Verniere De Irassar, P. L., Laura, P. A. A.,** 1986. A Note on the Analysis of the First Symmetric Mode of Vibration of Circular Arches of Non-Uniform Cross-Section, *Journal of Sound and Vibration*, **116,** 580-584.

[46] **E Silva, J. M. M., Urgueria, A. P. V.,** 1988. Out-of-Plane Dynamic Response of Curved Beams – An Analytical Model, *International Journal of Solids and Structures*, **24,** 271-284.

[47] **Laura, P. A. A., Verniere De Irassar, P. L., Carnicer, R., Berteo, R.,** 1988. A note on Vibrations of Circumferential Arch with Thickness Varying in a Dsicontinuous Fashion, *Journal of Sound and Vibration*, **120**, 95-105.

[48] **Gutierrez, R. H., Laura, P. A. A., Rossi, R. R., Berteo, R., Villagi, A.,** 1989. In-Plane Vibrations of Non-Circular Archs of Non-Uniform Cross-Section, *Journal of Sound and Vibration,* **129(2)**, 181-200.

[49] **Auciello, N.M., Rosa, M.A.,** 1994. Free Vibrations of Circular Arches: A Review, *Journal of Sound and Vibration,* **176(4)**, 433-458.

[50] **Rossi, R.E., Laura, P.A.A.,** 1995. Numerical Experiments on Dynamic Stiffening of a Circular Arch Executing In-Plane Vibrations, *Journal of Sound and Vibration,* **187(5)**, 897,909.

[51] **Yang, S.Y., Sin, H.C.,** 1995. Curvature-Based Beam Elements for the Analysis of Timoshenko and Shear-Deformable Curved Beams, *Journal of Sound and Vibration,* **187(4)**, 569-584.

[52] **Howson, W.P., Jemah, A.K.,** 1995. Exact Natural Frequencies for Out-of-Plane Motion of Plane Structures Composed of Curved Beam Members, *Computers and Structures,* **55,** 989-995.

[53] **Benedetti, A., Deseri, L., Tralli, A.,** 1996. Simple and Effective Equilibrium Models for Vibration Analysis of Curved Rods, *Journal of Engineering Mechanics,* **122(4)**, 291-299

[54] **Tüfekçi, E., Arpacı, A.,** 1998. Exact Solution of In-Plane Vibrations of Circular Arches with Account Taken of Axial Extension, Transverse Shear and Rotatory Inertia Effects, *Journal of Sound and Vibration,* **209(5)**, 845-856.

[55] **Tüfekçi, E.,** 1999. Exact Solution of in-Plane Vibrations of Stepped Circular Arches, *Asia Pacific Vibration Conference '99,* V.2, 1158,1163, Singapore.

[56] **Tüfekçi, E.** 2001. In-Plane Vibrations of a Circular Arch of Discontinuously Varying Cross-Section, Proceedings of IMAC XIX, *A Conference on Structural Dynamics,* V.2, 1688-1694, Florida, A.B.D.

[57] **Tüfekçi, E.** 2001. Exact Solution of Free in-Plane Vibration of Shallow Circular Arches, *International Journal of Structural Stability and Dynamics,* V.1, No:3, 409-428.

[58] **Tüfekçi, E., Özdemirci, Ö.** 2006. Exact Solution of Free In-Plane Vibration of a Stepped Circular Arch, *Journal of Sound and Vibration,* **295**, 725-738.

[59] **Huanng, C.S., Tseng, Y.P., Chang, S.H., Hung, C.L.,** 2000. Out-of-Plane Dynamic Analysis of Beams with Arbitrarily Varying Curvature and Cross-Section by Dynamic Stiffness Matrix Method, *International Journal of Solids and Structures,* **37,** 495-513

[60] **Raveendranath, P., Singh, G., Pradhan, B.,** 2000. Free Vibration of Arches Using a Curved Beam Element Based on a Coupled Polynomial Displacement Field, *Computers and Structures,* **78,** 583-590.

[61] **Litewka, P., Rakowski, J.,** 2001. Free Vibrations of Shear-Flexible and Compressible Arches by FEM, *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* **52,** 273-286.

[62] **Wu, J.S., Chiang, L.K.,** 2003. Free Vibration Analysis of Arches Using Curved Beam Elements, *Internatonal Journal for Numerical Methods in Engineering,* **58,** 1907-1936.

[63] **Wu, J.S., Chiang, L.K.,** 2004. A New Approach for Free Vibration Analysis of Arches with Effects of Shear Deformation and Rotatory Inertia Considered, *Journal of Sound and Vibration,* **277,** 49-71.

[64] **Wu, J.S., Chiang, L.K.,** 2004. Free Vibration of Circularly Curved Timoshenko Beam Normal to its Initial Plane Using Finite Curved Beam Elements, *Computers and Structures,* **82,** 2525-2540.

[65] **Tufekci, E., Dogruer, O.Y.,** 2006. Out-of-Plane Free Vibration of a Circular Arch with Uniform Cross-Section: Exact Solution, *Journal of Sound and Vibration,* **291,** 525-538.

[66] **Yang, F., Sedaghati, R., Esmailzadeh, E.,** 2008. Free in-Plane Vibration of General Curved Beams Using Finite Element Method, *Journal of Sound and Vibration,* **318,** 850-867.

[67] **Chen, C.N.,** 2008. DQEM Analysis of Out-of-Plane Vibration of Nonprismatic Curved Beam Structures Considering the Effect of Shear Deformation, *Advances in Engineering Software,* **39,** 466-472

[68] **Lee, B.K., Oh, S.J., Mo, J.M., Lee, T.E.,** 2008. Out-of-Plane Free Vibrations of Curved Beams with Variable Curvature, *Journal of Sound and Vibration,* **318,** 227-246.

[69] **Kim, J.G., Lee, J.K.,** 2008. Free Vibration Analysis of Arches Based on the Hybrid-Mixed Formulation with Consistent Quadratic Stress Functions, *Computers and Structures,* **86,** 1672,1681.

[70] **Kim, B.Y., Kim, C.B., Song, S.G., Beom, H.G., Cho, C.,** 2009. A Finite Thin Circular Beam Element for Out-of-Ğlane Vibration Analysis of Curved Beams, *Journal of Mechanical Science and Technology,* **23,** 1396-1405.

[71] **Kim, Y.Y., Kim, Y.,** 2002. A One-Dimensional Theory of Thin-Walled Curved Rectangular Box Beams Under Torsion and Out-of-Plane Bending, *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* **53,** 1675-1693.

[72] **Karami, G., Malekzadeh, P.,** 2004. In-Plane Free Vibration Analysis of Circular Arches with Varying Cross-Sections Using Differential Quadrature Method, *Journal of Sound and Vibration,* **274,** 777-799.

[73] **Liu, G.R., Wu, T.Y.,** 2001. In-Plane Free Vibration Analysis of Circular Arches by the Generilazed Differential Quadrature Method, *International Journal of Mechanical Science,* **43,** 2597-2611.

[74] **Oh, S.J., Lee, B.K., Lee, I.W.,** 1999. Natural Frequencies of non-Circular Arches with Rotatory Inertia and Shear Deformation, *Journal of Sound and Vibration,* **219,** 23-33.

[75] **Howson, W.P., Jemah, A.K.,** 1999. Exact Out-of-Plane Natural Frequencies of Curved Timoshenko Beams, *Journal of Engineering Mechanics*, **125,** 19-25.

[76] **Lee, B.K., Lee, T.E., Carr, A.J., Oh, S.J.,** 2007. Out-of-Plane Free Vibrations of Circular Strips with Variable Breadth, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, **7**, 403,423.

ÖZGEÇMİŞ



Ad Soyad **:** Uğurcan Eroğlu

Doğum Yeri ve Tarihi **:** İstanbul, 1990

E-Posta **:** ueroglu@itu.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** **:** 2012, İstanbul Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makina Mühendisliği Bölümü
- **Yüksek Lisans** **:** 2014, İTÜ, Makina Mühendisliği Anabilim Dalı, Katı Cisimlerin Mekaniği Programı