



T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONVEKS FONKSİYONLAR VE MATRİS EŞİTSİZLİKLERİ

Vildan BACAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz-2012
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KONVEKS FONKSİYONLAR VE MATRİS EŞİTSİZLİKLERİ

Vildan BACAK

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN

2012, 106 Sayfa

Jüri
Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN
Prof. Dr. Hasan ŞENAY
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

Bu tezde öncelikle konveks, konkav, matris konveks, matris monoton fonksiyonlar ve majorizasyon için temel tanım ve teoremler verildi. Daha sonra majorizasyon ve konveks fonksiyonlarla ilgili bilinen sonuçlardan bahsedildi ve bilinen bazı Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler ele alındı. Son olarak, operatör (matris) konveks fonksiyonlar için elde edilen Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler ve integral eşitsizlikleri verildi.

Anahtar Kelimeler: Hermite-Hadamard eşitsizliği, Hermityen matris, konkav fonksiyonlar, konveks fonksiyonlar, majorizasyon, matris konveks fonksiyonlar, matris monoton fonksiyonlar, öz değer.

ABSTRACT

MS THESIS

CONVEX FUNCTIONS AND MATRIX INEQUALITIES

Vildan BACAK

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN MATHEMATICS

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Ramazan TÜRKMEN

2012, 106 Pages

Jury
Assoc. Prof. Dr. Ramazan TÜRKMEN
Prof. Dr. Hasan ŞENAY
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

In this thesis firstly, the definitions and theorems for convex, concave, matrix convex, matrix concave functions and majorization were given. Later, we mentioned about the well known results of majorization and convex functions and we examined known Hermite-Hadamard inequalities for convex functions. Finally, Hermite-Hadamard's type inequalities and integral inequalities for operator (matrix) convex functions were given.

Keywords: Concave functions, convex functions, eigenvalue, Hermite - Hadamard inequality, Hermitian matrix, majorization, matrix convex functions, matrix monoton functions.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması, Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Doç. Dr. Ramazan Türkmen danışmanlığında hazırlanarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne yüksek lisans tezi olarak sunulmuştur.

Bu çalışma 8 bölümden oluşmaktadır. Tezin 1. bölümü Giriş ve Kaynak Araştırması'na ayrılmıştır. 2. bölümde tez içerisinde kullanılacak genel bilgilere yer verilmiştir. 3. bölümde konveks fonksiyonlar ve konveks kümeler tanıtılmıştır. 4. bölümde majorizasyon kavramı üzerinde durulmuştur. Majorizasyon ve konveks fonksiyonlar arasındaki ilişki ele alınmıştır. 5. bölümde matris monoton ve matris konveks fonksiyonların genel tanım ve teoremlerine ve bazı örneklere yer verilmiştir. 6. bölümde konveks fonksiyonlar için bilinen Hermite-Hadamard ve integral eşitsizlikleri verilmiştir. 7. bölümde araştırma sonuçlarına yer verilmiştir. Bu bölümde operatör konveks fonksiyonlar için elde edilen Hermite-Hadamard eşitsizlikleri ve integral eşitsizlikleri verilmiştir. Daha önceki çalışmalarla aralarındaki fark açıklanmıştır. 8. bölüm sonuçlar ve önerilerden oluşmaktadır.

Yüksek lisans eğitimim boyunca bilgileriyle ve tecrübesiyle bana yol gösteren danışmanım Sayın Doç. Dr. Ramazan Türkmen'e, Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nün saygıdeğer öğretim elemanlarına ve benden desteğini hiç esirgemeyen, her zaman iyi niyetiyle yanımda olan sevgili arkadaşım Ayşegül Özcan'a ve aileme teşekkürlerimi sunarım.

Vildan BACAK
KONYA-2012

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

SİMGELER VE KISALTMALAR ..... **viii**

1. GİRİŞ VE KAYNAK ARAŞTIRMASI **1**

2. GENEL KAVRAMLAR **3**

3. KONVEKS FONKSİYONLAR VE KONVEKS KÜMELER **9**

3.1. Konveks Kümeler 9
3.2. Konveks Fonksiyonlar 10

4. MAJORİZASYON VE KONVEKS FONKSİYONLAR **22**

4.1.Temel Gösterimler 22
4.2. Konveks ve Monoton Fonksiyonlar İçin Majorizasyon 27
4.4. Log-Konveks Fonksiyonlar İçin Eşitsizlikler 34

5. MATRİS MONOTON VE MATRİS KONVEKS FONKSİYONLAR **39**

5.1.Tanımlar ve Basit Örnekler 39
5.2.Temel Teoremler 43

6. HERMİTE-HADAMARD TİPİ EŞİTSİZLİKLER **48**

7. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA **65**

7.1. Operatör Konveks Fonksiyonlar İçin Eşitsizlikler 65
7.2. Tartışma 102

8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER **103**

8.1. Sonuçlar 103
8.2. Öneriler 103

KAYNAKLAR **104**

ÖZGEÇMİŞ **106**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$A \geq 0$: A pozitif yarı tanımlı
$A > 0$: A pozitif tanımlı
$A \geq B$: $A - B$ pozitif yarı tanımlı
$|A|$: $|A| = \left(A^* A\right)^{1/2}$
$\mathbb{C}$: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{C}^n$: Kompleks sayılar üzerinde n bileşenli vektörlerin kümesi
$\sigma(A)$: A matrisinin spektrumu
H : Hilbert uzay
I : Reel sayılar kümesinin bir aralığı
I^0 : Reel sayılar kümesinin 0 içermeyen bir aralığı
$\mathcal{H}_n$: Hermityen matrisler kümesi
M_n : $n \times n$ kompleks matrislerin kümesi
$\mathcal{P}_n$: $n \times n$ pozitif tanımlı matrislerin kümesi
$\mathbb{R}$: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$: Reel sayılar kümesi üzerinde n bileşenli vektörlerin kümesi
$\mathbb{R}_+$: Negatif olmayan reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_+^n$: Reel sayılar kümesi üzerinde bileşenleri negatif olmayan n bileşenli vektörlerin kümesi
$\mathbb{R}_{++}^n$: Reel sayılar kümesi üzerinde bileşenleri pozitif olan n bileşenli vektörlerin kümesi
$\mathbb{R}^{m \times n}$: Elemanları reel sayılar olan $m \times n$ matrislerin kümesi
$\mathcal{S}_n$: $n \times n$ pozitif yarı tanımlı matrislerin kümesi
x^+ : Negatif koordinatların 0 ile yer değiştirmesiyle x'ten elde edilen vektör
$|x|$: Tüm koordinatların mutlak değeri alınarak elde edilen vektör
$x \prec y$: x, y tarafından majorize edilmiştir
$x \prec_w y$: x, y tarafından zayıf majorize edilmiştir
$x \prec^w y$: x, y tarafından süper majorize edilmiştir
$x \circ y$: $x \circ y = (x_1 y_1, ..., x_n y_n)$

Kısaltmalar

det : Determinant
exp : Eksponansiyel (üstel) fonksiyon
köş : Köşegen matris
log : Logaritma fonksiyonu

1. GİRİŞ VE KAYNAK ARAŞTIRMASI

Konvekslik; kökeni π'nin değerini tahmin etmesi dolayısıyla, Arşimed'e dayanan basit ve doğal bir kavramdır. Arşimed, konveks bir şeklin çevre uzunluğunun onu çevreleyen diğer bir konveks şeklin çevre uzunluğundan daha küçük olduğunu fark etmiştir.

Konvekslik, hayatımızın birçok evresinde karşımıza çıkmaktadır. Bunun en basit örneği ayakta dik duruş pozisyonumuzdur. Ayaklarımızın kapladığı konveks alanın içinde, ağırlık merkezimizin dik izdüşümü boyunca dengemizi korumaktayız. Konveks fonksiyonlar teorisi, matematiğin hemen hemen tüm dallarında önemlidir. Ayrıca endüstri, ticaret, tıp ve sanat gibi dalların nümerik uygulamalarında ve şans oyunlarının dengesinin sağlanmasında da kullanılmaktadır.

Konveks fonksiyonların başlangıcı, Johan Ludwig William Valdemar Jensen'e (1859-1925) dayanmaktadır. Fakat konveks fonksiyonlarla ilk uğraşan kişi Jensen değildir. Jensen' den önce çalışanlar arasında Ch. Hermite, O. Hölder ve O. Stolz vardır. 20. yüzyıl boyunca geometrik fonksiyonel analizde, matematiksel ekonomide, konveks analizde ve lineer olmayan optimizasyonda yoğun araştırma faaliyetleri ve önemli sonuçlar gerçekleştirilmiştir. G.H. Hardy, J.E. Littlewood ve G. Polya'nın 1934 yılında basılan "Inequalities, *Cambridge University Press*, Great Britain" adlı kitabı konveks fonksiyonlar konusunun popüler olmasında önemli rol oynamıştır.

Eşitsizlikler, matematiğin tüm dallarında geniş çalışma alanına sahip, sürekli gelişmekte olan bir konudur. Bu konu, son yıllarda çok sayıda araştırmacının dikkatini çekmektedir. Jensen, Hadamard, Hilbert, Hardy, Opial, Poincaré, Sobolev, Levin ve Lyapunov isimleriyle özdeşleşmiş birçok eşitsizlik tipi arasında derin kökler vardır ve bu eşitsizlik tipleri matematiğin farklı dallarında kullanılmaktadır. Eşitsizlikler teorisinin gelişmesinde yukarıda bahsettiğimiz isimleriyle özdeşleşmiş eşitsizlikler üzerine çalışmalar yapan araştırmacıların artmasıyla; çalışma alanlarının yenilenmesi ve mevcut çalışma alanlarının genişlemesi bu teorinin cazibesini de arttırmaktadır.

Son yıllarda Hermite-Hadamard tipi eşitsizliklere ve integral eşitsizliklerine ilgi artmıştır. S.S. Dragomir, B.G. Pachpatte, G. Zabandan gibi araştırmacıların bu alanda yapılmış çalışmaları mevcuttur. B.G. Pachpatte 2003'te "On some inequalities for convex functions, *RGMIA Res. Rep. Coll.*, 6(E)" makalesinde elemanter işlemler kullanarak konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler vermiştir. M. Tunç 2011'de "On some new inequalities for convex functions, *Turk J Math*, 35,1-7" makalesinde Pachpatte'nin sonuçlarına benzer eşitsizlikler vermiştir. S.S. Dragomir 2011'de

"Hermite–Hadamard's type inequalities for operator convex functions, *Applied Mathematics and Computation*, 218, 766-772" makalesinde konveks fonksiyonlar için var olan bir eşitsizliğin operatör konveks fonksiyonlar için de sağlandığı göstermiştir. G. Zabandan 2009'da "A new refinement of the Hermite-Hadamard inequality for convex functions, *JIPAM*, vol. 10, iss. 2, art.45" makalesinde Dragomir'in konveks fonksiyonlar için kullandığı eşitsizliğin bir genellemesini yapmıştır. Bu tezde yukarıda belirtilen araştırmacıların eşitsizliklerinden daha genel eşitsizlikler elde edilmiştir.

Matris monoton fonksiyonlar, ilk olarak K. Löwner (C. Loewner) tarafından 1934 yılında "Über monotone Matrixfunktionen, *Math. Z.* 38, 177-216" makalesinde incelenmiştir. Daha sonra 1951'de Heinz, "Beitrage zur Strörungstheorie der Spektralzerlegung, *Math. Ann.,* 123, 415-438" makalesinde matris monotonluğu kullanmıştır.

Matris konveks fonksiyonlar, ilk olarak F. Kraus tarafından 1936'da "Über konvexe Matrixfunktionen, *Math. Z.,*41, 18-42" makalesinde incelenmiştir.

J.Bendat ve S.Sherman 1955'te *"*Monotone and convex operator functions*, Trans. Amer. Math. Soc.,* 79, 58-71*"* makalesinde Löwner ve Kraus'un teoremleri üzerine yeni bir perspektif sağlamışlardır.

F. Zhang 2011'de "Matrix theory: Basic results and techniques, second ed., *Springer*, New York" kitabında matris teori üzerine bir çok tanım ve teorem vermiştir. Ayrıca majorizasyon ve konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler vermiştir.

J.S. Aujla ve F.C. Silva2003'te "Weak majorization inequalities and convex functions, *Linear Algebra and its Appl.,* 369, 217-233" makalelerinde konveks fonksiyonlar için majorizasyon eşitsizlikleri vermişlerdir.

R.Bhatia 1997'de "Matrix analysis, *Springer-Verlag,* New York" kitabında matris teori üzerine tanımlar, teoremler, problemler vermiştir. Ayrıca, operatör konveks fonksiyonlar kavramına yer vermiş, tanım ve teoremler vermiştir.

Pecaric ve arkadaşları 1992'de "Convex functions, partial orderings and statistichal applications, Mathematics in Science and Engineering, vol 187*, Academic Press Inc*, USA" kitabında konveks fonksiyonlara, konveks fonksiyonlarla ilişkili birçok tanım ve teoremlere yer vermiştir.

2. GENEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1. $A \in M_n$ olmak üzere A'nın *karakteristik polinomu* $P(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ ile verilir. $\det(\lambda I - A) = 0$ denklemine A'nın *karakteristik denklemi* ve karakteristik denklemin köklerine de A'nın *öz değerleri* denir. $(\lambda I - A)x = 0$ denkleminde λ_i $(1 \le i \le n)$ için karşılık gelen x_i vektörüne A'nın *öz vektörü* denir.

Tanım 2.2. A'nın tüm öz değerlerinin kümesine A'nın *spektrumu* denir ve $\sigma(A)$ ile gösterilir.

Tanım 2.3. $A = \left[a_{ij}\right] \in M_n$ olmak üzere A'nın köşegen elemanlarının toplamına A'nın *izi* denir ve $iz(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ ile gösterilir.

Teorem 2.4. $A, B \in M_n$, $\alpha \in \mathbb{C}$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler vardır:

i) $iz(\alpha A) = \alpha iz(A)$

ii) $iz(A+B) = iz(A) + iz(B)$

iii) $iz(AB) = iz(BA)$

iv) S, M_n'de tersinir matris olmak üzere $iz(S^{-1}AS) = iz(A)$'dır.

v) $iz(0) = 0,\ iz(I) = n$

vi) $iz(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, $\sigma(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$

Tanım 2.5. $A = \left[a_{ij}\right] \in M_n$ olmak üzere A'nın *transpozu* $A^T = \left[a_{ji}\right]$ ve A'nın *adjointi* $A^* = \left[\overline{a_{ji}}\right]$'dir. Adjoint aşağıdaki özelliklere sahiptir:

Teorem 2.6. $A, B \in M_n, \alpha \in \mathbb{C}$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler vardır:

i) $\left(A^*\right)^* = A$

ii) $\left(A+B\right)^* = A^* + B^*$

iii) $\left(\alpha A\right)^* = \overline{\alpha} A^*$

iv) $\left(AB\right)^* = B^* A^*$

v) $\det\left(A^*\right) = \overline{\det(A)}$

vi) $izA^* = \overline{izA}$

vii) λ'nın A'nın bir öz değeri olması için gerek ve yeter şart $\overline{\lambda}$'nın A^*'ın bir öz değeri olmasıdır. Yani, $\sigma\left(A^*\right)=\overline{\sigma\left(A\right)}=\left\{\overline{\lambda}:\lambda\in\sigma(A)\right\}$'dır.

viii) A'nın tersinir olması için gerek ve yeter şart A^*'ın tersinir olmasıdır. Yani, $\left(A^*\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^*$ dır.

Tanım 2.7. $|A|=\left(A^*A\right)^{1/2}$ matrisinin öz değerlerine A'nın *singüler değerleri* denir ve singüler değerler, $s(A)=\left(s_1(A),s_2(A),...,s_n(A)\right)$ ile gösterilir ve azalan sırada sıralanırlar: $s_1(A)\geq s_2(A)\geq...\geq s_n(A)\geq 0$.

Tanım 2.8. $A=\left[a_{ij}\right]\in M_n$ olmak üzere

i) $i\neq j$ olmak üzere $a_{ij}=0$ ise A *köşegen matris*,

ii) $i>j$ olmak üzere $a_{ij}=0$ ise A *üst üçgen matris*,

iii) $A^T=A$ ise A *simetrik matris*,

iv) $A^*=A$ ise A *Hermityen matris*,

v) $A^*A=AA^*$ ise A *normal matris*,

vi) $A^*A=AA^*=I$ ise A *üniter matris*,

vii) $A^TA=AA^T=I$ ise A *ortogonal matristir.*

Not 2.9.

i) $A=\left[a_{ij}\right]\in M_n$ olmak üzere A'nın Hermityen olması için gerek ve yeter şart $i,j=1,2,...,n$ için $a_{ij}=\overline{a_{ji}}$ olmasıdır. Eğer A Hermityen ise A'nın köşegen elemanları reeldir.

ii) Hermityen iki matrisin toplamı Hermityendir.

iii) Hermityen iki matrisin çarpımının Hermityen olması için gerek ve yeter şart matrislerin değişmeli olmasıdır.

iv) $A\in M_n$ Hermityen ise $AA^*, A^*A, A+A^*$ Hermityendir.

v) A Hermityen ise $k=1,2,...$ için A^k Hermityendir. Eğer A tersinir ise A^{-1} Hermityendir.

vi) Hermityen bir matrisin bütün öz değerleri reeldir.

Teorem 2.10 (Weyl Monotonluk Teoremi). $A,B\in\mathcal{H}_n$ olmak üzere $\lambda_i(A),\lambda_i(B)$ ve $\lambda_i(A+B)$ öz değerleri azalan sırada dizilsinler. Yani, $\lambda_1(A)\geq\lambda_2(A)\geq\cdots\geq\lambda_n(A)$, $\lambda_1(B)\geq\lambda_2(B)\geq\cdots\geq\lambda_n(B)$ ve $\lambda_1(A+B)\geq\lambda_2(A+B)\geq\cdots\geq\lambda_n(A+B)$'dir. Bu durumda her bir $k=1,2,...,n$ için

$$\lambda_k(A)+\lambda_1(B)\geq\lambda_k(A+B)\geq\lambda_k(A)+\lambda_n(B) \tag{2.1}$$

eşitsizliği vardır. (Bhatia,1997)

Tanım 2.11. Her satır ve sütununda bir tane 1 elemanı içeren ve diğer elemanları 0 olan matrise *permütasyon matris* denir.

Tanım 2.12. $A\in M_n$ matrisinin determinantı sıfırdan farklı ise matrise *düzgün (regüler) matris*, determinantı sıfır ise matrise *tekil (singüler) matris* denir.

Tanım 2.13. V, K cismi üzerinde bir vektör uzayı ve

$$f:V\times V\to K$$
$$(u,v)\to f(u,v)=\langle u,v\rangle$$

fonksiyonu;

i) $a,b\in K$ ve $u,v,w\in V$ için $\langle au+bv,w\rangle=a\langle u,w\rangle+b\langle v,w\rangle$,

ii) $\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}$,

iii) $\langle u,u\rangle\geq 0$ $(\langle u,u\rangle=0\Leftrightarrow u=0)$

özelliklerini sağlıyorsa f fonksiyonuna, V vektör uzayı üzerinde bir *iç çarpım* ve V uzayına da *iç çarpım uzayı* denir. V üzerinde tanımlanan bir iç çarpım, V üzerinde

$$\|u\|=\sqrt{\langle u,u\rangle} \tag{2.2}$$

ile verilen bir norm ve

$$d(u,v)=\|u-v\|=\sqrt{\langle u-v,u-v\rangle} \tag{2.3}$$

ile verilen bir metrik tanımlar.

Tanım 2.14. Üzerindeki iç çarpımla tanımlı metriğe göre tam olan iç çarpım uzayına *Hilbert uzayı* denir.

Tanım 2.15. A Hermityen bir matris olmak üzere her $x \in \mathbb{C}^n$ için $\langle Ax, x \rangle = x^T Ax \geq 0$ ise A matrisine *pozitif yarı tanımlı matris* denir. Her $x \in \mathbb{C}^n$ için $\langle Ax, x \rangle > 0$ ise A matrisine *pozitif tanımlı matris* denir.

A ve B Hermityen matrisler olmak üzere $A - B$ pozitif yarı tanımlı ise $A \geq B$ ve pozitif tanımlı ise $A > B$ yazılır. Burada "$\geq$", Hermityen matrisler kümesi üzerinde kısmi bir sıralamadır ve *kısmi Löwner sıralaması* olarak bilinir ve aşağıdaki özellikleri sağlar:

i) $\forall A \in \mathcal{H}_n$ için $A \geq A$'dır.

ii) $A \geq B$ ve $B \geq A$ ise $A = B$'dir.

iii) $A \geq B$ ve $B \geq C$ ise $A \geq C$'dir.

Pozitif tanımlı ve pozitif yarı tanımlı matrisleri karakterize eden birçok durum vardır. Bunlardan birkaçı aşağıda listelenmiştir:

i) A'nın pozitif yarı tanımlı olması için gerek ve yeter şart A'nın Hermityen olması ve tüm öz değerlerinin negatif olmamasıdır. A'nın pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter şart A'nın Hermityen olması ve tüm öz değerlerinin pozitif olmasıdır.

ii) A'nın pozitif yarı tanımlı olması için gerek ve yeter şart Hermityen olması ve tüm esas minörlerinin negatif olmamasıdır. A'nın pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter şart A'nın Hermityen olması ve tüm esas minörlerinin pozitif olmasıdır.

iii) A'nın pozitif yarı tanımlı olması için gerek ve yeter şart bazı B matrisleri için $A = B^* B$ olmasıdır. A'nın pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter şart A'nın Hermityen olması ve B'nin regüler olmasıdır.

iv) A'nın pozitif yarı tanımlı olması için gerek ve yeter şart üst üçgen T matrisleri için $A = T^* T$ olmasıdır.

v) A'nın pozitif yarı tanımlı olması için gerek ve yeter şart bazı B matrisleri için $A = B^2$ olmasıdır. Burada B bir tanedir. $B = A^{1/2}$ yazılır ve A'nın pozitif kare kökü denir. A'nın pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter şart B'nin pozitif tanımlı olmasıdır. (Bhatia,2007)

Teorem 2.16. $A \in M_n$ olsun. Bu takdirde $U,V \in M_n$ üniter matrisleri ve $D = köş(s_1(A),...,s_n(A))$ için $A = UDV^*$ yazılabilir ki, bu ifadeye *singüler değer ayrışımı* denir.

Teorem 2.17 (Spektral Ayrışım). $A \in M_n$ ve A'nın öz değerleri $\lambda_1,...,\lambda_n$ olsun. Bu takdirde A'nın normal olması için gerek ve yeter şart A'nın üniter olarak köşegenleştirilmesi, yani

$$U^* AU = köş\left(\lambda_1,...,\lambda_n\right) \tag{2.4}$$

olacak şekilde bir U üniter matrisinin olmasıdır. f, $I \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f(A) = U^* \left(köş(f(\lambda_1), f(\lambda_2),..., f(\lambda_n))\right)U$$

şeklinde tanımlanır. Özel olarak A'nın Hermityen olması için gerek ve yeter şart λ_i öz değerlerinin reel olması ve A'nın pozitif yarı tanımlı olması için gerek ve yeter şart λ_i öz değerlerinin negatif olmamasıdır.

Tanım 2.18. $\forall A,B \in M_n$ için $\|\cdot\| : M_n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa *matris norm* denir:

i) $\|A\| \geq 0$ ve $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

ii) Kompleks c skalerleri için $\|cA\| = |c|\|A\|$ dır.

iii) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

iv) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

Tanım 2.19. $\forall U,V$ üniter matrisleri için

$$|||\, A \,|||=|||\, UAV \,||| \tag{2.5}$$

ise $|||\,.\,|||$ normuna *üniter invaryant norm* denir.

Not 2.20. $|||.|||$ üniter invaryant bir norm için $|||A|||$ değeri A'nın singüler değerlerinin bir fonksiyonudur: $\forall U,V$ üniter matrisleri ve $\forall A$ matrisi için $s(UAV)=s(A)$'dır. Singüler değer eşitsizlikleri, kısmi Löwner sıralama eşitsizliklerinden daha zayıf ve üniter invaryant norm eşitsizliklerinden daha güçlüdür. Yani,

$$|A|\le|B|\Rightarrow s_j(A)\le s_j(B)\Rightarrow|||A|||\le|||B||| \tag{2.6}$$

dır.

Bazı özel matris norm türleri aşağıdadır:

i) Frobenius norm (veya Hilbert- Schmidt norm) :

$$||A||_F=\|A\|_2=\left(\sum_{j=1}^{n}s_j^2(A)\right)^{1/2}=\left\{iz\left(|A|^2\right)\right\}^{1/2} \tag{2.7}$$

ii) Spektral norm (veya operatör norm):

$$\|A\|=s_1(A) \tag{2.8}$$

iii) $1\le p<\infty$ için Schatten $p-$norm :

$$||A||_p=\left\{\sum_{j=1}^{n}s_j^p(A)\right\}^{1/p}=\left\{iz\left(|A|^p\right)\right\}^{1/p} \tag{2.9}$$

iv) $k=1,2,...,n$ için Ky- Fan $k-$norm :

$$||A||_{(k)}=\sum_{j=1}^{k}s_j(A) \tag{2.10}$$

3. KONVEKS FONKSİYONLAR VE KONVEKS KÜMELER

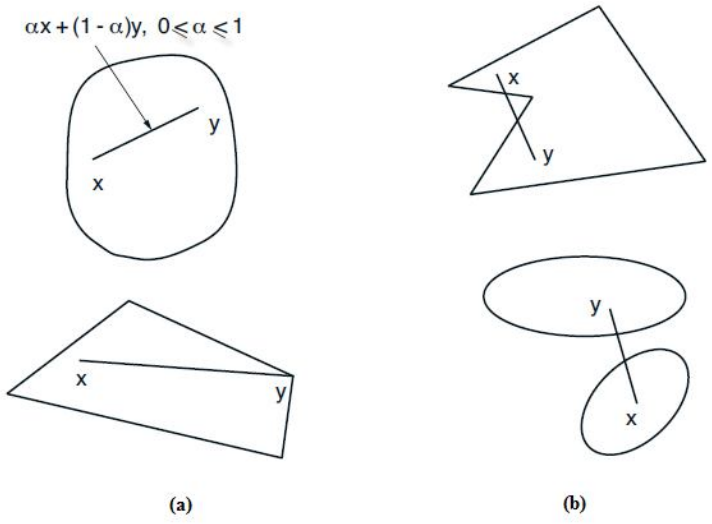
3.1. Konveks Kümeler

Tanım 3.1.1. $C \subset \mathbb{R}^n$ kümesi üzerindeki herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçası üzerindeki noktalar, aynı kümede kalıyorsa C'ye *konveks küme* ya da *afin* denir. Yani, $0 \le \alpha \le 1$ olmak üzere $\forall x_1, x_2 \in C$ için

$$\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 \in C \tag{3.1}$$

ise $C \subset \mathbb{R}^n$ kümesi konveks bir kümedir.

Aşağıda konveks kümelere ve konveks olmayan kümelere örnekler verilmiştir:



Şekil 3.1. (a) Konveks kümeler, (b) Konveks olmayan kümeler

Teorem 3.1.2. $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^n$ konveks iki küme olsun. Bu durumda

i) $C_1 + C_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\} \subset \mathbb{R}^n$ konveks kümedir.

ii) $\lambda \in \mathbb{R}$ için λC_1 konvekstir.

iii) $C_1 - C_2$ konvekstir.

iv) Boş küme, konveks küme olarak düşünülür.

v) Herhangi sayıda (sonlu, sayılabilir ya da sayılamaz) konveks kümelerin kesişimi yine konveks bir kümedir. (Rockafellar,1970)

3.2. Konveks Fonksiyonlar

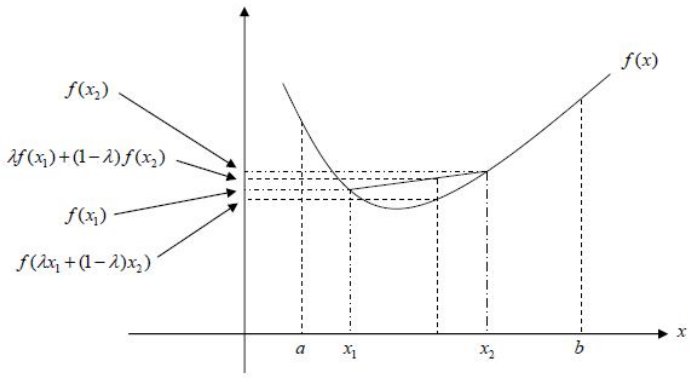
Tanım 3.2.1. $\forall x, y \in I \subset \mathbb{R}$ ve $0 \le \alpha \le 1$ için

$$f\left(\alpha x + (1-\alpha) y\right) \le \alpha f\left(x\right) + (1-\alpha) f(y) \tag{3.2}$$

ise $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna *konveks fonksiyon* denir. $\alpha = \frac{1}{2}$ durumunda

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2} \tag{3.3}$$

olur.



Şekil 3.2. Konveks fonksiyon

Örnek 3.2.2 ($\mathbb{R}$ Üzerindeki Konveks Fonksiyon Örnekleri).

- **Afin:** Herhangi $a, b \in \mathbb{R}$ için $f\left(x\right) = ax + b$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde konveks bir fonksiyondur.
- **Eksponansiyel:** Herhangi $a \in \mathbb{R}$ için $f\left(x\right) = \mathrm{e}^{ax}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde konveks bir fonksiyondur.
- **Kuvvet:** $t \ge 1$ veya $t \le 0$ için $f\left(x\right) = x^t$ fonksiyonu pozitif reel sayılar kümesi $\mathbb{R}_{++} = (0, \infty)$ üzerinde konveks bir fonksiyondur.

- **Mutlak değer kuvveti:** $p \geq 1$ için $|x|^p$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde konveks bir fonksiyondur.
- **Negatif entropi:** $f(x) = x \log x$ fonksiyonu $\mathbb{R}_{++}$ üzerinde konveks bir fonksiyondur.

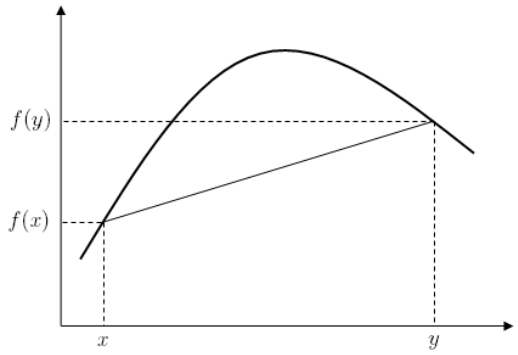
Tanım 3.2.3. $\forall x, y \in I$ ve $0 \leq \alpha \leq 1$ için

$$f\left(\alpha x + (1-\alpha) y\right) < \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \tag{3.4}$$

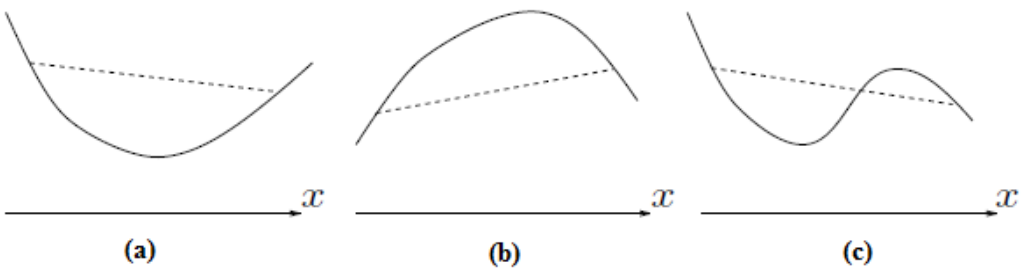
ise $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna *kesin konveks fonksiyon* denir.

Tanım 3.2.4. $-f$ fonksiyonu konveks ise $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna *konkav fonksiyon* denir.

Tanım 3.2.5. $-f$ fonksiyonu kesin konveks ise $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna *kesin konkav fonksiyon* denir.



Şekil 3.3. Konkav Fonksiyon



Şekil 3.4. (a) grafiği konveks bir fonkiyon, (b) grafiği konkav bir fonksiyon ve (c) grafiği ne konveks ne de konkav bir fonksiyondur

Örnek 3.2.6. ($\mathbb{R}$ Üzerindeki Konkav Fonksiyon Örnekleri)

- **Afin:** Herhangi $a,b\in\mathbb{R}$ için $\mathbb{R}$ üzerinde $f(x)=ax+b$ konkav bir fonksiyondur.
- **Kuvvet:** $0\le t\le 1$ için pozitif reel sayılar kümesi $\mathbb{R}_{++}$ üzerinde $f(x)=x^t$ konkav bir fonksiyondur.
- **Logaritma:** $\mathbb{R}_{++}$ üzerinde $logx$ konkav bir fonksiyondur.

Teorem 3.2.7.

i) $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ve $g:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonları konveks ve $\alpha\ge 0$ ise $f+g$ ve αf fonksiyonları da I aralığında konvekstir.

ii) $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ve $g:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonları konveks ve g artan ise $g\circ f$ bileşkesi konvekstir.

iii) $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ve $g:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonları konveks, negatif olmayan, azalan (veya artan) ise $h(x)=f(x)g(x)$ fonksiyonu da bu özellikleri sağlar.

iv) Eğer $f_n:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, sonlu bir f limit fonksiyonuna yakınsayan konveks fonksiyonların bir dizisi ise f de konvekstir.(Roberts ve Varberg, 1973)

İspat:

i) Konveks fonksiyon tanımından kolayca görülebilir.

ii) $x,y\in I$ ve $\alpha\in[0,1]$ olsun.

$$\begin{aligned} g\left[f\left(\alpha x+(1-\alpha)y\right)\right] &\le g\left[\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)\right] \\ &\le \alpha\left[g\left(f(x)\right)\right]+(1-\alpha)\left[g\left(f(y)\right)\right] \\ &= \alpha\left[(g\circ f)(x)\right]+(1-\alpha)\left[(g\circ f)(y)\right] \end{aligned} \tag{3.5}$$

dir.

iii) $x,y\in I$ ve $\alpha\in[0,1]$ olsun.

$$x<y\Rightarrow\left[f(x)-f(y)\right]\left[g(y)-g(x)\right]\le 0 \tag{3.6}$$

dır ve (3.6)'dan

$$f(x)g(y)+f(y)g(x)\le f(x)g(x)+f(y)g(y) \tag{3.7}$$

elde edilir. Eğer $\alpha>0$ ise

$$\begin{aligned}
&f\left(\alpha x+(1-\alpha)y\right)g\left(\alpha x+(1-\alpha)y\right)\\
&\le\left(\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)\right)\left(\alpha g(x)+(1-\alpha)g(y)\right)\\
&=\alpha^2 f(x)g(x)+\alpha(1-\alpha)\left[f(x)g(y)+f(y)g(x)\right]+(1-\alpha)^2 f(y)g(y)\\
&\le\alpha^2 f(x)g(x)+\alpha(1-\alpha)\left[f(x)g(x)+f(y)g(y)\right]+(1-\alpha)^2 f(y)g(y)\\
&=f(x)g(x)\left[\alpha^2+\alpha(1-\alpha)\right]+f(y)g(y)\left[\alpha(1-\alpha)+(1-\alpha)^2\right]\\
&=\alpha f(x)g(x)+(1-\alpha)f(y)g(y)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

eşitsizliği elde edilir.

iv) $x,y\in I$ ve $\alpha\in[0,1]$ olsun.

$$\begin{aligned}
f\left(\alpha x+(1-\alpha)y\right)&=\lim_{n\to\infty} f_n\left(\alpha x+(1-\alpha)y\right)\\
&\le\lim_{n\to\infty}\left(\alpha f_n(x)+(1-\alpha)f_n(y)\right)\\
&=\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

dir.

Örnek 3.2.8 ($\mathbb{R}^n$ Üzerindeki Örnekler). Afin fonksiyonlar, $\mathbb{R}^n$ üzerinde hem konveks hem de konkav fonksiyonlardır. Tüm normlar $\mathbb{R}^n$ üzerinde konvekstir.

- **Afin:** Herhangi $a,b,x\in\mathbb{R}^n$ için $f(x)=a^Tx+b$ fonksiyonu, hem konveks hem konkav bir fonksiyondur.
- **Normlar:** l_p norm: $p\ge1$ için $\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{p}|x_i|^p\right)^{1/p}$, l_∞ norm: $\|x\|_\infty=\max_i|x_i|$ gibi normlar konveks fonksiyonlardır.

Örnek 3.2.9 ($\mathbb{R}^{m\times n}$ Üzerindeki Örnekler). Afin fonksiyonlar, $\mathbb{R}^{m\times n}$ üzerinde hem konveks hem de konkav fonksiyonlardır. Normlar, $\mathbb{R}^{m\times n}$ üzerinde konveks fonksiyonlardır.

- **Afin:** $A, X \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ve $b \in \mathbb{R}$ için $f(X) = iz(A^T X) + b = \sum_{i=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_{ij} + b$ fonksiyonu hem konveks hem de konkav fonksiyondur.
- **Spektral (en büyük singüler değer) norm:** $\lambda_{\max}$, $n\times n$ bir matrisin en büyük öz değerini belirtsin. Bu takdirde $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$ olmak üzere $f(X) = \|X\|_2 = (\lambda_{\max}(X^T X))^{1/2}$ fonksiyonu konveks fonksiyondur.

Tanım 3.2.10. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere f 'nin *grafiği*

$$\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}^n\} \tag{3.10}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.2.11.

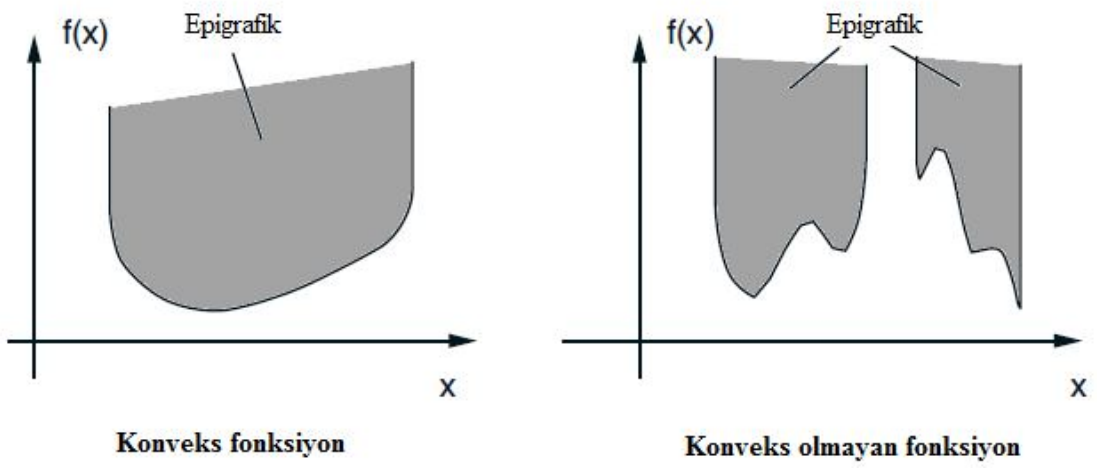
i) $dom\, f = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < +\infty\}$ kümesine f 'nin *tanım kümesi* denir.

ii) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere f 'nin *epigrafiği (kesin epigrafiği)*

$$epi(f) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid f(x) \le t\},\ \left(epi_s(f) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid f(x) < t\}\right) \tag{3.11}$$

şeklindedir.

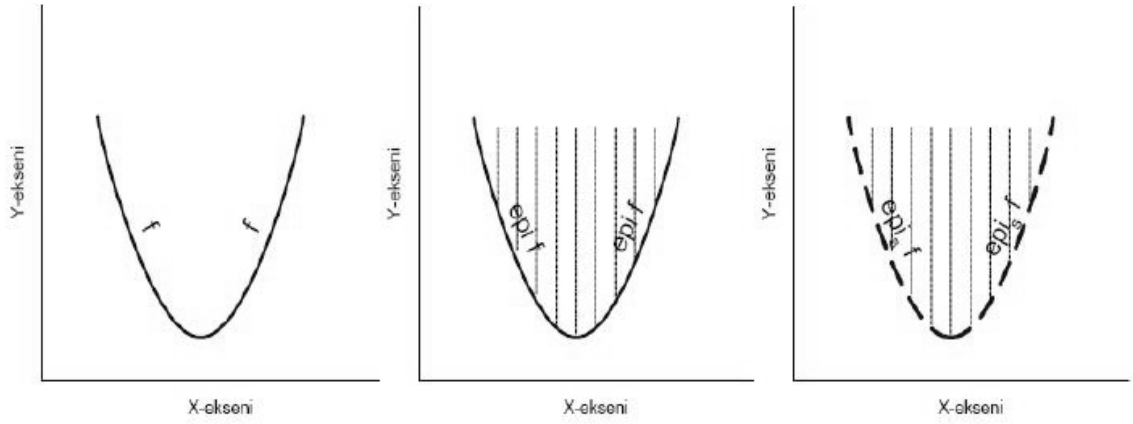
f bir konveks fonksiyondur $\Leftrightarrow$ $epi(f)$ bir konveks kümedir.



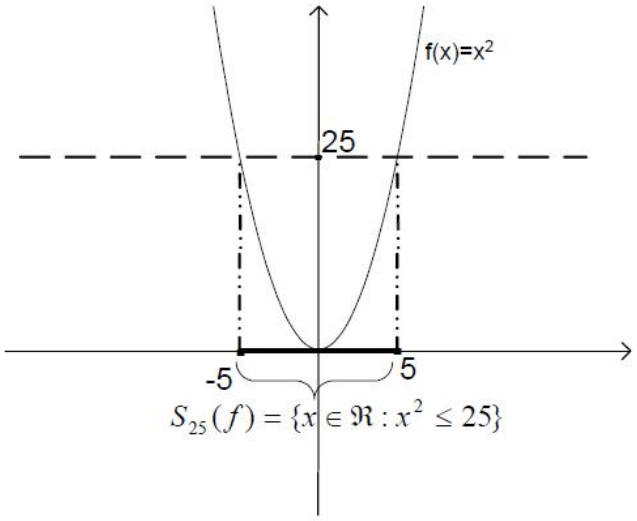
Şekil 3.5. Konveks ve konveks olmayan fonksiyonlarda epigrafik

iii) $S_t(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \le t\}$ ile tanımlanan kümeye f nin bir *alt düzey kümesi* denir.

$(x,t) \in epi\, f \Leftrightarrow x \in S_t(f)$ olduğu açıktır.



Şekil 3.6. Bir fonksiyonun epigrafiği ve kesin epigrafiği



Şekil 3.7. $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $S_{25}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : x^2 \le 25\}$ alt düzey kümesi

Not 3.2.12.

i) $x, y \in I \subset \mathbb{R}, p, q \ge 0, p+q > 0$ için (3.2) ifadesi

$$f\left(\frac{px+qy}{p+q}\right) \le \frac{pf(x)+qf(y)}{p+q} \tag{3.12}$$

ifadesine denktir.

ii) (3.2)'nin basit geometrik yorumu, $\left(x, f\left(x\right)\right)$ ve $\left(y, f\left(y\right)\right)$ noktaları arasındaki doğrunun grafiğin üzerinde olmasıdır. $\left(x, f\left(x\right)\right)$ ve $\left(y, f\left(y\right)\right)$ noktalarını birleştiren doğrunun denklemi

$$\begin{aligned} &\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \frac{f(s)-f(x)}{s-x} \\ &\Rightarrow f(s) = f(x) + \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(s-x) \end{aligned} \tag{3.13}$$

şeklinde belirtilir. $s = ty + (1-t)x$ noktasında hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} f(ty+(1-t)x) &= f(x) + \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\left(t(y-x)\right) = f(x) + t\left(f(y)-f(x)\right) \\ &= tf(y) + (1-t)f(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

iii) $x_1 < x_2 < x_3$ olacak şekilde $x_1, x_2, x_3 \ I \subset \mathbb{R}$ 'de üç nokta ise (3.2) ifadesi

$$\begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) & 1 \\ x_2 & f(x_2) & 1 \\ x_3 & f(x_3) & 1 \end{vmatrix} = (x_3-x_2)f(x_1) + (x_1-x_3)f(x_2) + (x_2-x_1)f(x_3) \ge 0 \tag{3.14}$$

ifadesine denktir. Bu da

$$f(x_2) \le \frac{x_2-x_3}{x_1-x_3} f(x_1) + \frac{x_1-x_2}{x_1-x_3} f(x_3) \tag{3.15}$$

ifadesine veya daha simetrik olarak ve x_1, x_2, x_3 üzerinde monotonluk şartı olmaksızın

$$\frac{f(x_1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}+\frac{f(x_3)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\geq 0 \tag{3.16}$$

ifadesine denktir.

iv) Köşeleri $(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2)),(x_3,f(x_3))$ olan üçgenin alanı

$$P=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) & 1\\ x_2 & f(x_2) & 1\\ x_3 & f(x_3) & 1 \end{vmatrix} \tag{3.17}$$

ile verilir.

v) (3.15)'in diğer bir yazılışı

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\leq\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3},(x_1<x_3\ ve\ x_1,x_3\neq x_2) \tag{3.18}$$

şeklindedir. Böylece aşağıdaki sonuç geçerlidir:

Her $c\in I\subset\mathbb{R}$ noktası için $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ fonksiyonu I aralığında artan ise f fonksiyonu konvekstir. $(x\neq c)$

vi) (3.18)'i kullanarak aşağıdaki sonucu kolayca ispatalayabiliriz: f, $I\subset\mathbb{R}$ aralığında konveks bir fonksiyon ve $x_1\leq y_1,\ x_2\leq y_2,\ x_1\neq x_2,\ y_1\neq y_2$ ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq\frac{f(y_2)-f(y_1)}{y_2-y_1}. \tag{3.19}$$

(Pecaric ve ark.1992)

Tanım 3.2.13. Her $x,y\in[a,b]$ noktaları için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{f(x)+f(y)}{2} \tag{3.20}$$

eşitsizliği geçerliyse $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ foksiyonuna $[a,b]$ üzerinde *Jensen anlamda konveks* veya J*-konveks* denir. J-konveks bir f fonksiyonuna her $(x,y),\ x\neq y$ nokta çiftleri için (3.20)'de daha sıkı eşitsizlik sağlanırsa *kesin* J*-konveks* denir.

Konveks fonksiyonlar için Jensen eşitsizliği, matematik ve istatistikte çok önemli eşitsizliklerden biridir. Diğer birçok eşitsizlik bu eşitsizlikten elde edilebilir.

Teorem 3.2.14 (Jensen Eşitsizliği). $I,\ \mathbb{R}$'de bir aralık , $f:I\to\mathbb{R}$ konveks fonksiyon, $x_1,...,x_n\in I$ ve $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n=1$ olmak üzere $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\geq 0$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{i=1}^{n}f\left(\alpha_i x_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i) \tag{3.21}$$

eşitsizliği geçerlidir. Eğer f kesin konveks ise (3.21) ifadesi $x_1=...=x_n$ olmaksızın kesindir. (Roberts ve Varberg, 1973)

İspat: (3.21)'in ispatı tümevarımdan yapılır. $n=1$ için eşitsizlik doğrudur. Farz edelim ki $n=k$ için doğru olsun. Bu durumda $n=k+1$ için doğruluğunu göstermemiz gerekir. $x_1,...,x_k,x_{k+1}\in I$ ve $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k+\alpha_{k+1}=1$ olmak üzere $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k,\alpha_{k+1}\geq 0$ olsun. $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{k+1}$'in en az bir tanesi 1'den küçük olmalıdır. Aksi halde eşitsizlik aşikardır. $\alpha_{k+1}<1$ ve

$$u=\frac{\alpha_1}{1-\alpha_{k+1}}x_1+\frac{\alpha_2}{1-\alpha_{k+1}}x_2+...+\frac{\alpha_k}{1-\alpha_{k+1}}x_k \tag{3.22}$$

olsun.

$$\frac{\alpha_1}{1-\alpha_{k+1}}+...+\frac{\alpha_k}{1-\alpha_{k+1}}=1 \tag{3.23}$$

ve

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k + \alpha_{k+1} x_{k+1} = (1-\alpha_{k+1})u + \alpha_{k+1} x_{k+1} \tag{3.24}$$

olur. f konveks fonkiyon olduğundan,

$$f\left((1-\alpha_{k+1})u + \alpha_{k+1} x_{k+1}\right) \le (1-\alpha_{k+1}) f(u) + \alpha_{k+1} f(x_{k+1}) \tag{3.25}$$

bulunur ve tümevarım hipotezinden

$$f(u) = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_{k+1}} f(x_1) + \frac{\alpha_2}{1-\alpha_{k+1}} f(x_2) + \ldots + \frac{\alpha_k}{1-\alpha_{k+1}} f(x_k) \tag{3.26}$$

eşitsizliği vardır. (3.25) ve (3.26) eşitsizliklerinden

$$f\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_{k+1} x_{k+1}\right) \le \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_{k+1} f(x_{k+1}) \tag{3.27}$$

elde edilir. Böylece eşitsizlik $n = k+1$ için kurulmuştur ve böylelikle eşitsizlik herhangi pozitif n tamsayısı için geçerlidir.

Teorem 3.2.15 (Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliği). Eğer $x_i \ge 0,\ \alpha_i > 0$ ve $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ ise

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} \le \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n \tag{3.28}$$

dir. (Roberts ve Varberg, 1973)

İspat: $x_i > 0$ için ispatlamak yeterlidir. $y_i = \log x_i$ olsun. Bu durumda

$$x_i^{\alpha_i} = \mathrm{e}^{\alpha_i \log x_i} = \mathrm{e}^{\alpha_i y_i} \tag{3.29}$$

dir. $f(t) = e^t$ fonksiyonu $(-\infty, \infty)$ aralığında konveks olduğundan Jensen eşitsizliği kullanılarak,

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} = \mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i} = f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(y_i) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \mathrm{e}^{y_i} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i \tag{3.30}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.16. $I \subset \mathbb{R}$ açık bir aralık olmak üzere reel değerli bir f fonksiyonunun I 'da konveks olması için gerek ve yeter şart, f 'nin sürekli ve $f''(x) \geq 0$ olmasıdır. (Niculescu ve Persson, 2006)

Tanım 3.2.17. $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık olmak üzere eğer $\log f$ konveks ise veya her $x, y \in I, \alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq f(x)^{\alpha} f(y)^{1-\alpha} \tag{3.31}$$

ise $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna *log-konveks* denir. $I = (0,\infty)$ ve f pozitif iken $\forall x, y \in I$ ve $0 \leq \alpha \leq 1$ için

$$f(x^{\alpha} y^{1-\alpha}) \leq f(x)^{\alpha} f(y)^{1-\alpha} \tag{3.32}$$

ise *çarpımsal konveks* denir.

Eğer f çarpımsal konveks ise $x \to f(e^x)$ dönüşümü $(-\infty,\infty)$ aralığında log-konvekstir. Bunu görmek için $\alpha = \frac{1}{2}$ alınırsa

$$\begin{aligned} & f(x^{\alpha} y^{1-\alpha}) \leq f(x)^{\alpha} f(y)^{1-\alpha} \Rightarrow e^{x^{\alpha} y^{1-\alpha}} \leq (e^x)^{\alpha} (e^y)^{1-\alpha} \\ & \Rightarrow e^{\sqrt{xy}} \leq (e^x)^{1/2} (e^y)^{1/2} \Rightarrow e^{\sqrt{xy}} \leq \sqrt{e^x e^y} \\ & \Rightarrow \left(e^{\sqrt{xy}}\right)^2 \leq \left(\sqrt{e^x e^y}\right)^2 \Rightarrow e^{2\sqrt{xy}} \leq e^{x+y} \\ & \Rightarrow \ln\left(e^{2\sqrt{xy}}\right) \leq \ln\left(e^{x+y}\right) \Rightarrow 2\sqrt{xy} \leq x+y \Rightarrow \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \end{aligned} \tag{3.33}$$

olur ki, elde edilen son eşitsizlik aritmetik geometrik ortalama eşitsizliğidir ve böylece $x \to f(e^x)$ dönüşümünün $(-\infty, \infty)$ aralığında log-konveks olduğu görülür. exp, sinh, cosh fonksiyonları çarpımsal konvekstir.

(3.31)'in tersi durumuna da *log–konkav* denir.

Not 3.2.18. f ve g konveks ve g artan ise $g \circ f$ konveks olduğu için $f = \exp \log f$ olarak yazılabileceğinden log-konveks bir fonksiyon konvekstir. Tersi her zaman doğru değildir. Bu doğrudan (3.28)'den ve (3.31)'den

$$f(x)^{\alpha} f(y)^{1-\alpha} \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \tag{3.34}$$

elde edilir. Böylece,

$$f\left(\alpha x + (1-\alpha) y\right) \leq f(x)^{\alpha} f(y)^{1-\alpha} \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \tag{3.35}$$

eşitsizliği yazılabilir.

4. MAJORİZASYON VE KONVEKS FONKSİYONLAR

Majorizasyon; öz değer, singüler değer ve matris normlarının matris eşitsizliklerini oluşturmada önemli bir araçtır.

$x=(x_1,x_2)$ ve $y=(y_1,y_2)$ negatif olmayan reel vektörler olsun. Genelliği bozmaksızın, vektörlerin bileşenleri azalan sırada sıralansın. Eğer $x_1 \geq y_1$ ise x vektörü y'den büyüktür. Örneğin, $(0.8,0.2) \succ (0.6,0.4)$'tür. Fakat bu yaklaşım 3 ya da daha çok bileşen durumuna genişletilemez. Bu bölümde bileşen sayısı ikiden fazla olan vektörler üzerindeki kısmi sıralama ele alınacaktır.

4.1.Temel Gösterimler

$x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$ olsun. $x^{\downarrow}$ ve $x^{\uparrow}$, sırasıyla azalan ve artan sırada x'in koordinatlarının düzenlenmesiyle elde edilen vektörler olsun. Böylece, eğer $x^{\downarrow}=(x_1^{\downarrow},...,x_n^{\downarrow})$ ise $x_1^{\downarrow}\geq ...\geq x_n^{\downarrow}$'dir. Benzer şekilde eğer $x^{\uparrow}=(x_1^{\uparrow},...,x_n^{\uparrow})$ ise $x_1^{\uparrow}\leq ...\leq x_n^{\uparrow}$ dir. Not edelim ki,

$$x_i^{\uparrow}=x_{n-i+1}^{\downarrow},\quad 1\leq i\leq n \tag{4.1}$$

dir.

Tanım 4.1.1. $x,y\in\mathbb{R}^n$ olsun. Eğer

$$\sum_{i=1}^{k}x_i^{\downarrow}\leq\sum_{i=1}^{k}y_i^{\downarrow},\quad k=1,2,...,n-1 \tag{4.2}$$

ve

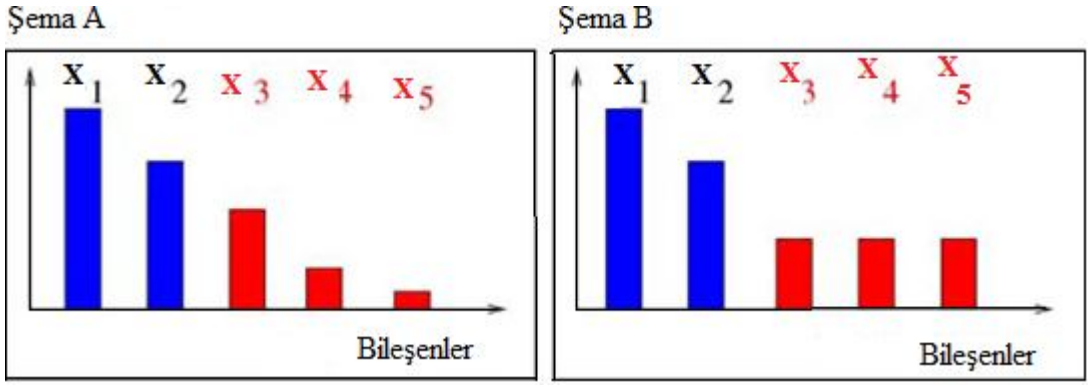
$$\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_i \tag{4.3}$$

ise x,y *tarafından majorize edilmiştir* denir ve $x\prec y$ şeklinde gösterilir.

Benzer şekilde $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0$ ve $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n \geq 0$ azalan sıralı bileşenli $x, y \in \mathbb{R}^n$ vektörleri için x vektörü y vektörünü majorize eder denir ve eğer $\sum_{i=1}^{k} x_i^{\downarrow} \geq \sum_{i=1}^{k} y_i^{\downarrow}$, $k = 1,2,...,n-1$ ve $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$ ise $x \succ y$ yazılır.

Eğer $\sum_{i=1}^{k} x_i^{\downarrow} \leq \sum_{i=1}^{k} y_i^{\downarrow}$, $k = 1,2,...,n-1$ $\left(\sum_{i=1}^{k} x_i^{\uparrow} \leq \sum_{i=1}^{k} y_i^{\uparrow}, \quad k = 1,2,...,n-1\right)$ ve $\sum_{i=1}^{n} x_i^{\downarrow} \leq \sum_{i=1}^{n} y_i^{\downarrow}$ $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\uparrow} \leq \sum_{i=1}^{n} y_i^{\uparrow}\right)$ eşitsizlikleri varsa x, y tarafından *zayıf majorize (süper majorize)* edilir denir. Sembolle $x \prec_w y$ $\left(x \prec^w y\right)$ şeklinde gösterilir. Açıktır ki, $x \prec y \Rightarrow x \prec_w y$ 'dir.

Örnek 4.1.2. Şekil 4.1.'deki durum göz önüne alınsın. İki farklı vektör görülmektedir. A ve B şemalarında en büyük iki bileşen eşittir ($x_1^A = x_1^B$ ve $x_2^A = x_2^B$). B şemasındaki en küçük üç bileşen eşittir ($x_3^B = x_4^B = x_5^B$), fakat A şemasındaki en küçük üç bileşen eşit değildir.($x_3^A > x_4^A > x_5^A$). Buna ek olarak, A ve B şemalarındaki tüm bileşenlerin toplamı eşittir. Tanım 4.1.1.'de verilen sıralama uygulanarak A şemasındaki vektör, B şemasındaki vektörü majorize eder($x^A \succ x^B$).(Jorswieck ve Boche,2006)



Şekil 4.1.Örnek vektörler: $x^A \succ x^B$

Örnek 4.1.3. Aşağıdaki vektörler majorizasyon kullanılarak karşılaştırılabilir:

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}\right) \prec \left(\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-1}, ..., \frac{1}{n-1}, 0\right) \prec ... \prec \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, ..., 0\right) \prec (1, 0, ..., 0)$$

Teorem 4.1.4. $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ olsun.

i) $x \prec_w y \Leftrightarrow x_1^{\downarrow} \le y_1^{\downarrow}$ ve $x \prec y \Rightarrow y_n^{\downarrow} \le x_i \le y_1^{\downarrow}$'dir.

ii) Aşağıdaki ifadeler majorizasyon ve zayıf majorizasyonun geçişli olduğunu gösterir:

$x \prec y,\ y \prec z \Rightarrow x \prec z;$

$x \prec_w y,\ y \prec_w z \Rightarrow x \prec_w z$

iii) $x \prec z,\ y \prec z \Rightarrow px + qy \prec z;\ \ p,q \ge 0,\ p+q = 1.$

iv) $x \prec_w z,\ y \prec_w z \Rightarrow px + qy \prec_w z;\ \ p,q \ge 0,\ p+q = 1.$

v) $x \prec y \Leftrightarrow x \prec_w y$ ve $-x \prec_w -y$'dir.

vi) P permütasyon matris olmak üzere $x \prec y,\ y \prec x \Leftrightarrow x = yP$'dir.

vii) P permütasyon matris olmak üzere $x \prec_w y,\ y \prec_w x \Leftrightarrow x = yP$'dir. (Zhang,2011)

Teorem 4.1.5. Aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

i) $x, y \in \mathbb{R}^n$ iken $x \prec_w y$'dir.

ii) $z \in \mathbb{R}^n$ için $x \le z$ ve $z \prec y$'dir.

iii) $u \in \mathbb{R}^n$ için $x \prec u$ ve $u \le y$'dir. (Zhang,2011)

$x, y \in \mathbb{R}^n$ için $x + y$, bileşen toplamını ve $x \circ y$, x ve y'nin Hadamard çarpımını belirtir. x^+, negatif koordinatların sıfır ile yer değiştirilmesiyle x'ten elde edilen bir vektör ve $|x|$, tüm koordinatların mutlak değeri alınarak elde edilen bir vektördür.

Teorem 4.1.6. $x, y \in \mathbb{R}^n$ olsun. Bu durumda

i) $x \prec_w y \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}$ için

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - t)^+ \le \sum_{i=1}^{n} (y_i - t)^+ \tag{4.4}$$

dır.

ii) $x \prec^w y \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}$ için

$$\sum_{i=1}^{n} (t - x_i)^+ \le \sum_{i=1}^{n} (t - y_i)^+ \tag{4.5}$$

dır.

iii) $x \prec y \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}$ için

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - t| \leq \sum_{i=1}^{n} |y_i - t| \tag{4.6}$$

dir. (Bhatia,1997)

Teorem 4.1.7. $x = (x_1,...,x_n)$, $y = (y_1,...,y_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

i) $x \prec_w |x|$

ii) $|x+y| \prec_w |x|^{\downarrow} + |y|^{\downarrow}$

iii) $x^{\downarrow} + y^{\uparrow} \prec_w x + y \prec x^{\downarrow} + y^{\downarrow}$

iv) $\sum_{i=1}^{n} x_i^{\downarrow} y_i^{\uparrow} \leq \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^{\downarrow} y_i^{\downarrow}$

dir. (Zhang,2011)

Bileşenleri negatif olmayan $\mathbb{R}^n$ üzerindeki tüm vektörlerin kümesi $\mathbb{R}_+^n$ ile gösterilir. Yani, $\forall u_i \geq 0$ için $u = (u_1,...,u_n) \in \mathbb{R}_+^n$ 'dir.

Teorem 4.1.8. $x = (x_1,...,x_n)$, $y = (y_1,...,y_n) \in \mathbb{R}^n$ olsun. Bu durumda $\forall u = (u_1,...,u_n) \in \mathbb{R}^n$ için $x \prec y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^{\downarrow} u_i^{\downarrow} \leq \sum_{i=1}^{n} y_i^{\downarrow} u_i^{\downarrow}$ ve $\forall u = (u_1,...,u_n) \in \mathbb{R}_+^n$ için $x \prec_w y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^{\downarrow} u_i^{\downarrow} \leq \sum_{i=1}^{n} y_i^{\downarrow} u_i^{\downarrow}$ dir. (Zhang,2011)

Teorem 4.1.9. $x, y, u, v \in \mathbb{R}_+^n$ olmak üzere

i) $x \prec_w y \Rightarrow x \circ u \prec_w y^{\downarrow} \circ u^{\downarrow}$

ii) $x \prec_w u,\ y \prec_w v \Rightarrow x \circ y \prec_w u^{\downarrow} \circ v^{\downarrow}$

dir. (Zhang,2011)

Tanım 4.1.10. Satırları ve sütunları toplamı 1 olan, negatif olmayan bir kare matrise *ikili stokastik matris* denir. Yani eğer,

$$\forall i, j \text{ için } a_{ij} \geq 0 \tag{4.7}$$

$$\forall j \text{ için } \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \tag{4.8}$$

$$\forall i \text{ için } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \tag{4.9}$$

ise $n \times n$ bir $A = \left(a_{ij}\right)$ matrisine *ikili stokastik matris* denir.

Teorem 4.1.11. $x \prec y$ olması için gerek ve yeter şart $x = Py$ olacak şekilde ikili stokastik bir P matrisinin olmasıdır. (Bhatia,1997)

Örnek 4.1.12. $x = (0.6, 0.4) \prec (0.8, 0.2) = y$ olsun. İlgili stokastik matris

$$\begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

ile verilir.

Teorem 4.1.13. Bir A matrisinin ikili stokastik olması için gerek ve yeter şart her x vektörü için $Ax \prec x$ olmasıdır. (Bhatia,1997)

Tanım 4.1.14. $x_k \geq 0$ ve $y_k \geq 0$ olmak üzere $x = (x_1, ..., x_n)$ ve $y = (y_1, ..., y_n)$ vektörleri düşünülsün. Eğer $k = 1, ..., n-1$ için $\prod_{i=1}^{k} x_i^{\downarrow} \leq \prod_{i=1}^{k} y_i^{\downarrow}$ ve $\prod_{i=1}^{n} x_i = \prod_{i=1}^{n} y_i$ ise x, y tarafından *log-majorize edilmiştir* denir. Yani, $x \prec_{\log} y$ 'dir. Eğer $k = 1, ..., n$ için $\prod_{i=1}^{k} x_i^{\downarrow} \leq \prod_{i=1}^{k} y_i^{\downarrow}$ ise x, y tarafından *zayıf log-majorize edilmiştir* denir ve $x \prec_{w\log} y$ ile gösterilir.

Teorem 4.1.15. $x, y \in \mathbb{R}_+^n$ olsun. Bu durumda

$$x \prec_{w\log} y \Rightarrow x \prec_w y \tag{4.10}$$

dir. Yani,

$$\prod_{i=1}^{k} x_i^{\downarrow} \leq \prod_{i=1}^{k} y_i^{\downarrow},\ k = 1, 2, ..., n \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} y_i,\ k = 1, 2, ..., n \tag{4.11}$$

dir. (Zhang, 2011)

4.2. Konveks ve Monoton Fonksiyonlar İçin Majorizasyon

Tanım 4.2.1. $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı reel değerli bir ϕ fonksiyonuna

$$x \prec y \Rightarrow \phi(x) \leq \phi(y) \tag{4.12}$$

ise *Schur- konveks* veya *s-konveks* denir.

Örneğin, $x = (x_1, ..., x_n)$ olmak üzere $\phi(x) = |x_1| + ... + |x_n|$ fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ üzerinde Schur-konvekstir. Eğer $x \prec y$ ise $A = (a_{ij})$, $n \times n$ ikili stokastik bir matris olmak üzere $x = Ay$ olarak yazılabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ji} y_j \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ji} |y_j| = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} \right)}_{1} |y_j| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |y_j| = \phi(y) \end{aligned} \tag{4.13}$$

dir.

Dikkat edelim ki, $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $f(x)$ yazıldığı zaman, f fonksiyonunun x'in tüm bileşenlerini içeren bir aralıkta tanımlı olduğu ve f fonksiyonunun x'in tüm bileşenlerine uygulanabileceği anlaşılmalıdır. Yani, $x = (x_1, ..., x_n)$ ise $f(x) = (f(x_1), ..., f(x_n))$'dir.

Teorem 4.2.2. $x, y \in \mathbb{R}^n$ olsun. Bu takdirde

i) f konveks ise

$$x \prec y \Rightarrow f(x) \prec_w f(y), \tag{4.14}$$

ii) f artan ve konveks ise

$$x \prec_w y \Rightarrow f(x) \prec_w f(y) \tag{4.15}$$

dir. (Zhang,2011)

Sonuç 4.2.3. $x, y \in \mathbb{R}^n$ olsun. Bu durumda

i) $x \prec y \Rightarrow |x| \prec_w |y|$, yani $(|x_1|,...,|x_n|) \prec_w (|y_1|,...,|y_n|)$'dir.

ii) $x \prec y \Rightarrow x^2 \prec_w y^2$, yani $\left(x_1^2,...,x_n^2\right) \prec_w \left(y_1^2,...,y_n^2\right)$'dir.

iii) $\forall x_i, y_i$ pozitif olmak üzere $\ln x \prec_w \ln y \Rightarrow x \prec_w y$'dir. (Zhang,2011)

İspat: $|t|$ ve t^2 konveks olduklarından (i) ve (ii) açıktır. e^t artan ve konveks olduğundan $e^{\ln x} \prec_w e^{\ln y} \Rightarrow x \prec_w y$ bulunur ki, (iii) elde edilmiş olur.

Teorem 4.2.4. $x, y \in \mathbb{R}^n$ olsun. Bu durumda

i) $x \prec y \Leftrightarrow$ tüm f konveks fonksiyonları için $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \le \sum_{i=1}^{n} f(y_i)$'dir.

ii) $x \prec_w y \Leftrightarrow$ tüm f artan ve konveks fonksiyonları için $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \le \sum_{i=1}^{n} f(y_i)$'dir.

iii) Eğer y, x'in bir permütasyonu değilse x ve y'nin tüm bileşenlerini içeren herhangi kesin artan ve kesin konveks f fonksiyonu için $x \prec_w y \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f(x_i) < \sum_{i=1}^{n} f(y_i)$'dir. (Zhang,2011)

Teorem 4.2.5. $x, y \in \mathbb{R}^n$ olsun. Bu durumda

$$x^{\downarrow} \circ y^{\uparrow} \prec_w x \circ y \prec x^{\downarrow} \circ y^{\downarrow} \tag{4.16}$$

ve

$$\prod_{i=1}^{n} \left(x_i^{\downarrow} + y_i^{\uparrow}\right) \ge \prod_{i=1}^{n} (x_i + y_i) \ge \prod_{i=1}^{n} \left(x_i^{\downarrow} + y_i^{\downarrow}\right) \tag{4.17}$$

dir. (Zhang,2011)

Teorem 4.2.6 (Weyl Majorant Teoremi). A, singüler değerleri $s_1 \ge ... \ge s_n$ ve öz değerleri $|\lambda_1| \ge ... \ge |\lambda_n|$ şeklinde dizilmiş $n \times n$ bir matris olsun. Bu durumda her t

değeri için $\phi(e^t)$ fonksiyonu konveks ve monoton artan olacak şekildeki her $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu için

$$\left(\phi\left(|\lambda_1|\right) \geq \ldots \geq \phi\left(|\lambda_n|\right)\right) \prec_w \left(\phi(s_1), \ldots, \phi(s_n)\right) \tag{4.18}$$

dir. Özel olarak her $p \geq 0$ için

$$\left(|\lambda_1|^p, \ldots, |\lambda_n|^p\right) \prec_w \left(s_1^p, \ldots, s_n^p\right) \tag{4.19}$$

dir. (Bhatia,1997)

Teorem 4.2.7. $x, y \in \mathbb{R}^n$ olsun. Aşağıdaki iki ifade eşdeğerdir:

i) $x \prec y$

ii) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyonları için $iz\varphi(x) \leq iz\varphi(y)$ 'dir. (Bhatia,1997)

Teorem 4.2.8. $x, y \in \mathbb{R}^n$ olsun. Aşağıdaki iki ifade eşdeğerdir:

i) $x \prec_w y$

ii) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton artan, konveks fonksiyonları için $iz\varphi(x) \leq iz\varphi(y)$ 'dir. (Bhatia,1997)

4.3. Konveks Fonksiyonlar ve Zayıf Majorizasyon Eşitsizlikleri

$A, B \in \mathcal{H}_n$ için aşağıdaki 3 sıralama tipi düşünülebilir:

i) $B \leq A \Leftrightarrow A - B$ pozitif yarı tanımlıdır.

ii) (Öz değer eşitsizlikleri)

$$\lambda(B) \leq \lambda(A) \Leftrightarrow \lambda_j(B) \leq \lambda_j(A) \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.20}$$

iii) (Zayıf majorizasyon)

$$\lambda(B) \prec_w \lambda(A) \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(B) \leq \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(A) \qquad (k = 1,2,...,n) \tag{4.21}$$

Buradan $B \leq A \Rightarrow \lambda(B) \leq \lambda(A) \Rightarrow \lambda(B) \prec_w \lambda(A)$ olduğu görülebilir.

Spektrumları $I \subset \mathbb{R}$ aralığında bulunan $\mathcal{M}_n$ üzerindeki tüm Hermityen matrislerin kümesi $\mathcal{H}_n(I)$ ile belirtilsin. $I \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı, artan bir f fonksiyonu için $A, B \in \mathcal{H}_n(I)$ olmak üzere

$$\lambda(B) \leq \lambda(A) \Rightarrow \lambda\big(f(B)\big) \leq \lambda\big(f(A)\big) \tag{4.22}$$

dır. I üzerinde tanımlı, artan, konveks bir f fonksiyonu için $A, B \in \mathcal{H}_n(I)$ olmak üzere

$$\lambda(B) \prec_w \lambda(A) \Rightarrow \lambda\big(f(B)\big) \prec_w \lambda\big(f(A)\big) \tag{4.23}$$

dır.

Lemma 4.3.1. $A \in \mathcal{H}_n(I)$ ve f, I üzerinde konveks bir fonksiyon olsun. $\forall x$ birim vektörü için

$$f\big(\langle Ax, x\rangle\big) \leq \langle f(A)x, x\rangle \tag{4.24}$$

dir.(Bhatia,1997)

Lemma 4.3.2. $A \in \mathcal{H}_n(I)$ olsun. Maksimum, $u_1, u_2, ..., u_k$ ortonormal vektörlerinin tüm seçimlerinde geçerli olmak üzere

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j(A) = \max \sum_{j=1}^{k} \langle Au_j, u_j \rangle \qquad (k = 1,2,...,n) \tag{4.25}$$

dir. Bu ifade "*Ky Fan Maksimum Prensibi*" olarak bilinir. (Bhatia,1997)

Tanım 4.3.3. $\|A\| \leq 1$ ise $A \in \mathcal{M}_n$ matrisine *kontraksiyon* denir.

Teorem 4.3.4. $f, I \subset \mathbb{R}$ üzerinde konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\forall A, B \in \mathcal{H}_n(I)$ ve $0 \le \alpha \le 1$ için

$$\lambda\left(f\left(\alpha A+(1-\alpha)B\right)\right) \prec_w \lambda\left(\alpha f(A)+(1-\alpha)f(B)\right) \tag{4.26}$$

dir. Eğer $0 \in I$ ve $f(0) \le 0$ ise $X \in \mathcal{M}_n$ kontraksiyonları ve $\forall A \in \mathcal{H}_n(I)$ için

$$\lambda\left(f(X^* AX)\right) \prec_w \lambda\left(X^* f(A) X\right) \tag{4.27}$$

dir. (Aujla ve Silva,2003)

İspat: $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, $\alpha A+(1-\alpha)B$'nin öz değerleri ve $u_1, u_2, ..., u_n$, $f(\lambda_1) \ge f(\lambda_2) \ge ... \ge f(\lambda_n)$ olacak şekilde sıralanmış ilgili ortonormal öz vektörler olsun. $k = 1, 2, ..., n$ olmak üzere sırasıyla f'nin konveksliği, Lemma 4.3.1 ve Lemma 4.3.2 kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} \lambda_j\left(f\left(\alpha A+(1-\alpha)B\right)\right) &= \sum_{j=1}^{k} f\left(\left\langle \alpha A+(1-\alpha)Bu_j, u_j\right\rangle\right) \\
&= \sum_{j=1}^{k} f\left(\alpha\left\langle Au_j, u_j\right\rangle+(1-\alpha)\left\langle Bu_j, u_j\right\rangle\right) \\
&\le \sum_{j=1}^{k}\left[\alpha f\left(\left\langle Au_j, u_j\right\rangle\right)+(1-\alpha) f\left(\left\langle Bu_j, u_j\right\rangle\right)\right] \\
&\le \sum_{j=1}^{k}\left[\alpha\left\langle f(A)u_j, u_j\right\rangle+(1-\alpha)\left\langle f(B)u_j, u_j\right\rangle\right] \\
&= \sum_{j=1}^{k}\left\langle\left(\alpha f(A)+(1-\alpha)f(B)\right)u_j, u_j\right\rangle \\
&\le \sum_{j=1}^{k} \lambda_j\left(\alpha f(A)+(1-\alpha)f(B)\right)
\end{aligned} \tag{4.28}$$

elde edilir. Böylece ilk gösterim ispatlanmış olur. İkinci gösterimi ispatlamak için $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, $X^* AX$'in öz değerleri ve $u_1, u_2, ..., u_n$, $f(\lambda_1) \ge f(\lambda_2) \ge ... \ge f(\lambda_n)$ olacak şekilde sıralanmış ilgili ortonormal öz vektörler olsun. $f(0) \le 0$ olduğundan istenen eşitsizliği ispatlamak için $|||Xu_j||| \ne 0$, $j = 1, 2, ..., n$ olduğu düşünülsün. Bu durumda

sırasıyla $f(0) \le 0$ koşuluyla f'nin konveksliği, Lemma 4.3.1 ve Lemma 4.3.2 kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \left(f(X^* AX) \right) = \sum_{j=1}^{k} f\left(\left\langle X^* AXu_j, u_j \right\rangle \right) \\
&= \sum_{j=1}^{k} f\left(|||\, Xu_j \,|||^2 \left\langle A \frac{Xu_j}{|||\, Xu_j \,|||}, \frac{Xu_j}{|||\, Xu_j \,|||} \right\rangle + \left(1 - |||\, Xu_j \,|||^2\right).0 \right) \\
&\le \sum_{j=1}^{k} \left(|||\, Xu_j \,|||^2 \; f\left(\left\langle A \frac{Xu_j}{|||\, Xu_j \,|||}, \frac{Xu_j}{|||\, Xu_j \,|||} \right\rangle \right) + \left(1 - |||\, Xu_j \,|||^2\right) f(0) \right) \qquad (4.29) \\
&\le \sum_{j=1}^{k} \left(|||\, Xu_j \,|||^2 \left\langle f(A) \frac{Xu_j}{|||\, Xu_j \,|||}, \frac{Xu_j}{|||\, Xu_j \,|||} \right\rangle \right) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \left\langle X^* f(A) Xu_j, u_j \right\rangle \le \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \left(X^* f(A) X \right)
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.4'te $r \le 0$ ve $I = (0, \infty)$ iken $f(t) = t^r$ alınarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.5. $A, B \in \mathcal{P}_n$ olsun. Bu durumda $\forall r \le 0$ için

$$\lambda\left(2^{1-r} (A+B)^r \right) \prec_w \lambda(A^r + B^r) \qquad (4.30)$$

dir.(Aujla,2000)

$[0, \infty)$ aralığındaki negatif olmayan, azalan her f fonksiyonu $t \in [0, \infty)$ olmak üzere $f(2t) \le 2f(t)$ eşitsizliğini sağlar. Aşağıdaki sonuç, operatör monoton fonksiyonlar için Ando ve Zhan (1999) tarafından ispatlanan eşitsizliklere benzer bir eşitsizliktir.

Sonuç 4.3.6. f, $\forall t \in [0, \infty)$ için $f(2t) \le 2f(t)$ olacak şekilde $[0, \infty)$ aralığında bir konveks fonksiyon olsun. $A, B \in \mathcal{S}_n$ için

$$\lambda\left(f(A+B) \right) \prec_w \lambda\left(f(A) + f(B) \right) \qquad (4.31)$$

dir. (Aujla ve Silva,2003)

İspat: Teorem 4.3.4.'ten

$$\lambda\left(f\left(\frac{A+B}{2}\right)\right)\prec_w \lambda\left(\frac{f(A)+f(B)}{2}\right) \tag{4.32}$$

elde edilir. A yerine $2A$ ve B yerine $2B$ koyulursa

$$\lambda\big(f(A+B)\big)\prec_w \lambda\left(\frac{f(2A)+f(2B)}{2}\right) \tag{4.33}$$

bulunur. $f(2t)\le 2f(t)$ olduğundan $f(2A)\le 2f(A)$ ve $f(2B)\le 2f(B)$ dir. Böylece

$$\lambda\left(\frac{f(2A)+f(2B)}{2}\right)\prec_w \lambda\big(f(A)+f(B)\big) \tag{4.34}$$

dir. (4.33) ve (4.34)'ten istenen sonuç elde edilir.

Teorem 4.3.7 (Fan Baskınlık Teoremi). A ve B $n\times n$ matrisler olsun. Eğer $k=1,2,...,n$ için

$$\|A\|_{(k)}\le\|B\|_{(k)} \tag{4.35}$$

ise tüm üniter invaryant normlar için

$$|||A|||\le|||B||| \tag{4.36}$$

dir.

Aşağıdaki sonuç Fan Baskınlık Teoreminden elde edilir.

Sonuç 4.3.8. f, I üzerinde negatif olmayan, konveks bir fonksiyon olsun. $\forall A,B\in\mathcal{H}_n(I)$ ve $0\le\alpha\le 1$ için

$$|||f\big(\alpha A+(1-\alpha)B\big)|||\le|||\alpha f(A)+(1-\alpha)f(B)||| \tag{4.37}$$

dir. Eğer $0 \in I$ ve $f(0) = 0$ ise $X \in \mathcal{M}_n$ kontraksiyonları ve $\forall A \in \mathcal{H}_n(I)$ için

$$|||f\left(X^*AX\right)||| \leq ||| X^* f(A) X ||| \tag{4.38}$$

dir. (Aujla ve Silva,2003)

Teorem 4.3.4'e ek olarak f artan (veya azalan) hipotezi yüklenirse aşağıdaki daha güçlü sonuç elde edilir.

Teorem 4.3.9. f, I üzerinde artan (veya azalan), konveks bir fonksiyon olsun. $\forall A, B \in \mathcal{H}_n(I)$ ve $0 \leq \alpha \leq 1$ için

$$\lambda\left(f\left(\alpha A + (1-\alpha)B\right)\right) \leq \lambda\left(\alpha f(A) + (1-\alpha) f(B)\right) \tag{4.39}$$

dir. Eğer $0 \in I$ ve $f(0) \leq 0$ ise $X \in \mathcal{M}_n$ kontraksiyonları ve $\forall A \in \mathcal{H}_n(I)$ için

$$\lambda\left(f(X^*AX)\right) \leq \lambda\left(X^* f(A) X\right) \tag{4.40}$$

dir. (Aujla ve Silva,2003)

4.4. Log-Konveks Fonksiyonlar İçin Eşitsizlikler

Lemma 4.4.1. $A, B \in \mathcal{P}_n$ ve $0 < r < 1$ olsun. Bu durumda

$$\lambda\left(\frac{1}{r}\log\left(A^{r/2} B^r A^{r/2}\right)\right) \prec_w \lambda\left(\log\left(A^{1/2} B A^{1/2}\right)\right) \tag{4.41}$$

dir.(Ando,1998)

Lemma 4.4.2. $A, B \in \mathcal{P}_n$ olmak üzere

$$\lim_{r \to 0^+}\left(\frac{1}{r}\log\left(A^{r/2} B^r A^{r/2}\right)\right) = \log A + \log B \tag{4.42}$$

dir. (Ando,1998)

Lemma 4.4.1 ve Lemma 4.4.2'den aşağıdaki lemma elde edilir.

Lemma 4.4.3. $A, B \in \mathcal{P}_n$ olmak üzere

$$\lambda\left(\log A + \log B\right) \prec_w \lambda\left(\log\left(A^{1/2} B A^{1/2}\right)\right) \tag{4.43}$$

dir.

Teorem 4.4.4. f, I üzerinde log-konveks bir fonksiyon olsun. $\forall A, B \in \mathcal{H}_n(I)$ ve $0 \le \alpha \le 1$ için

$$\lambda\left(f\left(\alpha A + (1-\alpha)B\right)\right) \prec_w \lambda\left(f(A)^{\alpha} f(B)^{1-\alpha}\right) \tag{4.44}$$

dir. (Aujla ve Silva,2003)

İspat: $\log f(t)$ fonksiyonu I üzerinde konveks bir fonksiyon olsun. Böylece Teorem 4.3.4 ve Lemma 4.4.3'ten

$$\begin{aligned} \lambda\left(\log f\left(\alpha A + (1-\alpha)B\right)\right) &\prec_w \lambda\left(\alpha \log f(A) + (1-\alpha)\log f(B)\right) \\ &= \lambda\left(\log f(A)^{\alpha} + \log f(B)^{1-\alpha}\right) \\ &\prec_w \lambda\left(\log\left[f(A)^{\alpha/2} f(B)^{1-\alpha} f(A)^{\alpha/2}\right]\right) \end{aligned} \tag{4.45}$$

elde edilir. $t \to e^t$ fonksiyonu artan ve konveks olduğundan

$$\begin{aligned} \lambda\left(f\left(\alpha A + (1-\alpha)B\right)\right) &\prec_w \lambda\left(f(A)^{\alpha/2} f(B)^{1-\alpha} f(A)^{\alpha/2}\right) \\ &= \lambda\left(f(A)^{\alpha} f(B)^{1-\alpha}\right) \end{aligned} \tag{4.46}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Herhangi $X \in \mathcal{M}_n$ için $\left|\lambda(x)\right| \prec_w \lambda\left(|x|\right)$ olduğundan Fan Baskınlık Teoremi yardımıyla aşağıdaki sonucun bir ispatı elde edilir.

Sonuç 4.4.5. f, I üzerinde bir log-konveks fonksiyon olsun. $\forall A,B\in\mathcal{H}_n(I)$ ve $0\le\alpha\le 1$ için

$$\left|\!\left|\!\left| f\left(\alpha A+(1-\alpha)B\right)\right|\!\right|\!\right| \le \left|\!\left|\!\left| f(A)^{\alpha} f(B)^{1-\alpha}\right|\!\right|\!\right| \tag{4.47}$$

dir. (Aujla ve Silva,2003)

Sonuç 4.4.6. $a>1$ ve $\forall A,B\in\mathcal{H}_n(I)$ olsun.

$$\lambda\left(\alpha^{A+B}\right)\prec_w \lambda\left(\alpha^{A}\alpha^{B}\right) \tag{4.48}$$

dir. (Aujla ve Silva,2003)

İspat: $p=\max\left\{\|A\|,\|B\|\right\}$ olsun. Bu durumda $-pI\le A$, $B\le pI$ 'dır. $f(t)=a^t$ fonksiyonu $[-p,p]$ üzerinde log-konvekstir. Böylece Teorem 4.4.4'ten $0\le\alpha\le 1$ için

$$\lambda\left(a^{\alpha A+(1-\alpha)B}\right)\prec_w \lambda\left(a^{\alpha A}a^{(1-\alpha)B}\right) \tag{4.49}$$

dir. $\alpha=\frac{1}{2}$ alınıp A yerine $2A$ ve B yerine $2B$ yazılarak istenen eşitsizlik elde edilir.

Not 4.4.7. $a=e$ durumunda Sonuç 4.4.6'nın özel bir durumu olarak ünlü Golden-Thompson eşitsizliği olarak bilinen

$$iz\left(e^{A+B}\right)\le iz\left(e^{A}e^{B}\right) \tag{4.50}$$

eşitsizliği elde edilir. Aşağıdaki sonuç Golden-Thompson eşitsizliğinin başka bir genelleştirilmesi olarak düşünülebilir. (Aujla ve Silva,2003)

Sonuç 4.4.8. f, $(0,\infty)$ aralığında çarpımsal konveks bir fonksiyon olsun. $\forall A,B\in\mathcal{H}_n(I)$ ve $0\le\alpha\le 1$ için

$$\lambda\left(f\left(e^{\alpha A+(1-\alpha)B}\right)\right)\prec_w \lambda\left(f\left(e^{A}\right)^{\alpha} f\left(e^{B}\right)^{1-\alpha}\right) \tag{4.51}$$

dir. (Aujla ve Silva,2003)

Teorem 4.4.4'ün diğer bir uygulaması olarak genelleştirilmiş bir harmonik-geometrik ortalama (Young) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.4.9. $A, B \in \mathcal{P}_n$ olsun. $0 \le \alpha \le 1$ olmak üzere $\forall r \ge 0$ için

$$\lambda\left(\left[\alpha A^{-1} + (1-\alpha)B^{-1}\right]^{-r}\right) \prec_w \lambda\left(A^{\alpha r} B^{(1-\alpha)r}\right) \tag{4.52}$$

dir. (Aujla ve Silva,2003)

İspat: $p = \max\left\{\|A\|, \|A^{-1}\|, \|B\|, \|B^{-1}\|\right\}$ olsun. $-pI \le A, A^{-1}, B, B^{-1} \le pI$ ve $t \to t^{-r}$ fonksiyonu $(0, p]$ üzerinde log-konvekstir. Böylece Teorem 4.4.4 yardımıyla

$$\lambda\left(\left[\alpha A + (1-\alpha)B\right]^{-r}\right) \prec_w \lambda\left(A^{-\alpha r} B^{-(1-\alpha)r}\right) \tag{4.53}$$

olur. A, A^{-1} ile ve B, B^{-1} ile yer değiştirirse

$$\lambda\left(\left[\alpha A^{-1} + (1-\alpha)B^{-1}\right]^{-r}\right) \prec_w \lambda\left(A^{\alpha r} B^{(1-\alpha)r}\right) \tag{4.54}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Not 4.4.10. Artan log-konveks bir f fonksiyonu için

$$\lambda\left(f\left(\alpha A + (1-\alpha)B\right)\right) \le \lambda\left(f(A)^{\alpha} f(B)^{(1-\alpha)}\right) \tag{4.55}$$

eşitsizliği geçerli değildir. $A, B \in \mathcal{H}_n$ ve $f(t) = e^t$ olsun. Bhatia (1997)'dan iyi bilinir ki

$$\prod_{j=1}^{k} \lambda_j\left[\mathrm{e}^{\alpha A + (1-\alpha)B}\right] \le \prod_{j=1}^{k} \lambda_j\left[\mathrm{e}^{\alpha A}\, \mathrm{e}^{(1-\alpha)B}\right] \qquad (k = 1, 2, ..., n) \tag{4.56}$$

eşitsizliği vardır. Fakat

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{n}\lambda_j\left[\mathrm{e}^{\alpha A+(1-\alpha)B}\right] &= \det\left[\mathrm{e}^{\alpha A+(1-\alpha)B}\right] \\ &= \det\left[\mathrm{e}^{\alpha A}\,\mathrm{e}^{(1-\alpha)B}\right] \\ &= \prod_{j=1}^{n}\lambda_j\left[\mathrm{e}^{\alpha A}\,\mathrm{e}^{(1-\alpha)B}\right]\end{aligned} \tag{4.57}$$

dir. Böylece $A,B\in\mathcal{H}_n$ ve $1\le i\le n$ olmak üzere

$$\lambda_i\left[\mathrm{e}^{\alpha A+(1-\alpha)B}\right]\ge\lambda_i\left[\mathrm{e}^{\alpha A}\,\mathrm{e}^{(1-\alpha)B}\right] \tag{4.58}$$

olacak şekilde bir i bulunabilir. (Aujla ve Silva,2003)

Not 4.4.11. Teorem 4.3.4'te $\prec_w$ yerine $\prec^w$ kullanıldığında ve Teorem 4.3.9'daki eşitsizlikler tersi sıralamada alındığında "konveks fonksiyon" uygun "konkav fonksiyon" ile yer değiştirilirse Teorem 4.3.4 ve Teorem 4.3.9 sağlanır. Bu durumda I üzerindeki bir log-konkav fonksiyon için $\forall A,B\in\mathcal{H}_n(I)$ ve $0\le\alpha\le 1$ olmak üzere

$$\lambda\left(f\left(\alpha A+(1-\alpha)B\right)\right)\prec^w\lambda\left(\alpha f(A)+(1-\alpha)f(B)\right) \tag{4.59}$$

tahmini yapılabilir. Fakat bu tahmin yanlıştır. Bunu görmek için

$$f(t)=t^6,\ I=(0,\infty),\ \alpha=\frac{1}{2},\ A=\begin{bmatrix}4 & -5\\ -5 & 7\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}9 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \tag{4.60}$$

alınabilir. (Aujla ve Silva,2003)

5. MATRİS MONOTON VE MATRİS KONVEKS FONKSİYONLAR

Bu bölümde matris monoton fonksiyonlar ele alınacaktır. Bu fonksiyonlar sıralama korunarak Hermityen matrislere genişletilebilen reel fonksiyonlardır. Matris monoton fonksiyonlar önemli özelliklere sahiptir. Bunlardan bazıları bu bölümde ele alınmıştır ve matris konveks fonksiyon kavramıyla da ilişkilidir. Bu bölümde bu iki fonksiyon tipi incelenecektir.

5.1.Tanımlar ve Basit Örnekler

f, $I \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlanan reel değerli bir fonksiyon olsun. $D = köş(\lambda_1,...,\lambda_n)$, I aralığında köşegen elemanları λ_j'ler olan köşegen bir matris ise $f(D) = köş(f(\lambda_1),...,f(\lambda_n))$ şeklinde tanımlanır. A, I aralığında öz değerleri λ_j'ler olan Hermityen bir matris ise $A = UDU^*$ olacak şekilde D köşegen matrisi ve U üniter matrisi vardır. Bu durumda $f(A) = Uf(D)U^*$ şeklinde yazılabilir. Bu şekilde öz değerleri I'da olan herhangi mertebeden tüm Hermityen matrisler için $f(A)$ tanımlanabilir.

Matris monotonluk kavramı, ilk olarak 1934 yılında K. T. Löwner tarafından ele alınmıştır. Matrislerin matris değerli fonksiyonlarının monotonluğunu tanımlamak için tüm $n \times n$ pozitif yarı tanımlı matrislerin kümesinde bir kısmi sıralamaya ihtiyaç vardır. $n \times n$ pozitif yarı tanımlı matrislerin kümesi $\mathcal{S}_n$ ile gösterilsin. Buradaki sıralama, Löwner sıralaması olarak bilinen "$A \le B$ ise $B - A$ pozitif yarı tanımlıdır ve $A < B$ ise $B - A$ pozitif tanımlıdır" şeklinde tanımlanan sıralama olarak düşünülebilir.

Tanım 5.1.1 (Matris Monoton). f fonksiyonu Hermityen matrisler kümesi $\mathcal{H}_n$'de Löwner sıralamasına göre monoton, yani $A \le B$ iken $f(A) \le f(B)$ ise f fonksiyonuna *n.mertebeden matris monoton fonksiyon* denir. Fonksiyon tüm n mertebeleri için sağlanırsa fonksiyona *matris monoton* veya *operatör monoton* denir.

Örnek 5.1.2. $\alpha \ge 0$ için $f(t) = \alpha t + \beta$ fonksiyonu matris monotondur. Bunu görmek için $A \le B$ alalım. $\alpha \ge 0$ için $\alpha A \le \alpha B$ ve $\alpha A + \beta I \le \alpha B + \beta I$'dır. Böylece $f(A) \le f(B)$ olur.

Tanım 5.1.3 (Matris Konveks). Matris konvekslik kavramı, ilk olarak F. Kraus tarafından 1936'da ele alınmıştır. $0 \le \alpha \le 1$ ve $A, B \in \mathcal{H}_n$ için

$$f(\alpha A+(1-\alpha)B)\le \alpha f(A)+(1-\alpha)f(B) \tag{5.1}$$

ise f fonksiyonuna *n. mertebeden matris konveks* denir. Fonksiyon tüm n mertebeleri için sağlanırsa fonksiyona *matris konveks* veya *operatör konveks* denir.

f fonksiyonu $\forall\ \alpha\in[0,1]$ ve $A,B\in\mathcal{H}_n$ için

$$f(\alpha A+(1-\alpha)B)< \alpha f(A)+(1-\alpha)f(B) \tag{5.2}$$

ise f fonksiyonuna *n. mertebeden kesin matris konveks* denir.

Not edelim ki A ve B'nin öz değerleri bir I aralığında ise A ve B'nin herhangi kombinasyonlarının öz değerleri de yine I aralığındadır.

Sadece sürekli fonksiyonları düşünelim. Bu durumda, (5.1) ifadesi daha özel olan

$$f\left(\frac{A+B}{2}\right)\le \frac{f(A)+f(B)}{2} \tag{5.3}$$

ifadesiyle yer değiştirilebilir. (5.3) ifadesini sağlayan fonksiyonlara *orta nokta matris konveks* denir ve eğer bu fonksiyonlar sürekli ise konvekstirler.

Not 5.1.4. Matris monoton fonksiyonlar kümesi ve matris konveks fonksiyonlar kümesinin her ikisi de pozitif lineer dönüşümler ve limit işlemleri altında kapalıdır. Diğer bir ifadeyle f ve g matris monoton, α ve β pozitif reel sayılar ise $\alpha f+\beta g$ de matris monotondur. f_n matris monoton ve $f_n(x)\to f(x)$ ise f de matris monotondur. Bu işlemler matris konveks fonksiyonlar için de geçerlidir.

Örnek 5.1.5. $\beta,\gamma\in\mathbb{R},\ \alpha\ge 0$ için $f(t)=\alpha t^2+\beta t+\gamma$ fonksiyonu matris konvekstir. Bunu görmek için A,B Hermityen matrislerini ele alalım. Bu takdirde,

$$\begin{aligned}
&\frac{f(A)+f(B)}{2}-f\left(\frac{A+B}{2}\right)\\
&=\frac{\left(\alpha A^2+\beta A+\gamma I+\alpha B^2+\beta B+\gamma I\right)}{2}-\left(\alpha\left(\frac{A+B}{2}\right)^2+\left(\beta\left(\frac{A+B}{2}\right)+\gamma I\right)\right.\\
&=\frac{\left(\alpha A^2+\beta A+\gamma I+\alpha B^2+\beta B+\gamma I\right)}{2}-\frac{\alpha}{4}(A^2+AB+BA+B^2)-\frac{\beta}{2}A-\frac{\beta}{2}B-\gamma I\\
&=\frac{\alpha}{4}(A^2+B^2-AB-BA)=\frac{\alpha}{4}(A-B)^2\geq 0
\end{aligned} \tag{5.4}$$

olur. Bu fonksiyon matris konvekstir fakat matris monoton değildir. Diğer bir ifadeyle A,B pozitif matrisler olmak üzere $B-A$ pozitif yarı tanımlı iken B^2-A^2 pozitif yarı tanımlı değildir. Bunu görmek için $\beta=\gamma=0,\ \alpha=1$ ve

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \tag{5.5}$$

matrislerini ele alalım. $A\geq 0,\ B\geq 0$ ve

$$B-A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\geq 0 \tag{5.6}$$

olduğu açıktır. Fakat

$$B^2-A^2=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \tag{5.7}$$

pozitif yarı tanımlı değildir.

Örnek 5.1.6. $(0,\infty)$ aralığında $f(t)=t^{-1}$ fonksiyonu matris konveks fonksiyondur. Herhangi A,B Hermityen matrisleri için

$$\frac{(A^{-1}+B^{-1})}{2}-\left(\frac{A+B}{2}\right)^{-1}=\frac{1}{2}\left((A^{-1}-B^{-1})(A^{-1}+B^{-1})^{-1}(A^{-1}-B^{-1})\right)\geq 0 \tag{5.8}$$

dır.

Örnek 5.1.7. $1 < p < \infty$ iken $f(t) = -t^{1/p}$ fonksiyonu $(0,\infty)$ aralığında matris konvekstir.

Örnek 5.1.8. $(0,\infty)$ aralığında $f(t) = t^3$ fonksiyonu matris konveks değildir. Bunu görmek için

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

olsun.

$$\frac{A^3 + B^3}{2} - \left(\frac{A+B}{2}\right)^3 = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

dır ve bu da pozitif yarı tanımlı değildir.

Not 5.1.9.

i) Her matris monoton fonksiyon monotondur; fakat her monoton fonksiyon, matris monoton değildir. $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun matris monoton olması için gerek ve yeter şart

$$f(t) = \alpha + \beta t + \int_0^\infty \frac{\lambda t}{1+\lambda t} d\mu(\lambda) \tag{5.11}$$

olacak şekilde $\beta \geq 0$ olmak üzere α, β reel sabitlerin ve $[0,\infty)$ üzerinde pozitif sonlu bir μ ölçüsünün var olmasıdır.

ii) Her matris konveks fonksiyon konvekstir; fakat her konveks fonksiyon, matris konveks değildir. Örneğin, $f(x) = \mathrm{e}^x$ konvekstir, fakat matris konveks değildir. $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun matris konveks olması için gerek ve yeter şart

$$f(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \int_0^\infty \frac{\lambda t^2}{1+\lambda t} d\mu(\lambda) \tag{5.12}$$

olacak şekilde $\gamma \geq 0$ olmak üzere α, β, γ reel sabitlerin ve $[0,\infty)$ üzerinde pozitif sonlu bir μ ölçüsünün var olmasıdır.

iii) Her matris konveks fonksiyonun matris monoton olmasına gerek yoktur. Örneğin, $f(A) = A^2$ fonksiyonu matris konvekstir fakat matris monoton değildir.

Tanım 5.1.10 (Matris Konkav). $-f$ fonksiyonu matris konveks ise f fonksiyonu *matris konkav*dır.

5.2.Temel Teoremler

Lemma 5.2.1. $B \geq A$ ise her X matrisi için $X^*BX \geq X^*AX$ elde edilir. (Bhatia,1997)

İspat: Her u vektörü için

$$\langle u, X^*BXu \rangle = \langle Xu, BXu \rangle \geq \langle Xu, AXu \rangle = \langle u, X^*AXu \rangle \tag{5.13}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. Ayrıca C pozitif matrisi, $B - A$'nın pozitif karekökü olmak üzere

$$X^*(B-A)X = X^*CCX = (CX)^*CX \geq 0 \tag{5.14}$$

şeklinde de ispatlanabilir.

Teorem 5.2.2. $f(t) = -\frac{1}{t}$ fonksiyonu $(0,\infty)$ üzerinde matris monotondur. (Bhatia,1997)

İspat: $B \geq A > 0$ olsun. Lemma 5.2.1'den $I \geq B^{-1/2}AB^{-1/2}$'dir. $T \to T^{-1}$ eşlemesi değişen pozitif matrisler üzerinde sırayı koruduğundan $I \leq B^{1/2}A^{-1}B^{1/2}$ elde edilir. Tekrar Lemma 5.2.1 kullanılarak $B^{-1} \leq A^{-1}$ elde edilir.

Lemma 5.2.3. $B \geq A \geq 0$ ve B tersinir ise $\left\| A^{1/2}B^{-1/2} \right\| \leq 1$'dir. (Bhatia,1997)

İspat: $B \geq A \geq 0$ ise $I \geq B^{-1/2}AB^{-1/2} = (A^{1/2}B^{-1/2})^* A^{1/2}B^{-1/2}$'dir ve buradan $\left\| A^{1/2}B^{-1/2} \right\| \leq 1$'dir.

Teorem 5.2.4. $f(t) = t^{1/2}$ fonksiyonu $[0,\infty)$ üzerinde matris monotondur. (Bhatia,1997)

Örnek 5.2.5. $f(t)=|t|$ fonksiyonu 0 içeren herhangi bir aralıkta matris konveks değildir. Bunu görmek için,

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \tag{5.15}$$

matrislerini alalım.

$$|A|=(A^{*}A)^{1/2}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}, |A|+|B|=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} \tag{5.16}$$

dir. Fakat $|A+B|=\sqrt{2}I$ 'dır. Buradan $|A|+|B|-|A+B|$ ifadesi pozitif değildir.

Teorem 5.2.6.(Löwner-Heinz Teoremi)

- $-1\le p\le 0$ için $f(t)=-t^{p}$ fonksiyonu matris monoton ve matris konkavdır.
- $0\le p\le 1$ için $f(t)=t^{p}$ fonksiyonu matris monoton ve matris konkavdır.
- $1\le p\le 2$ için $f(t)=t^{p}$ fonksiyonu matris konvekstir.
- Ayrıca $f(t)=t\log(t)$ matris konveks iken $f(t)=\log(t)$ matris konkav ve matris monotondur. (Carlen, 2009)

Teorem 5.2.7. $f:\mathbb{R}_{+}\to\mathbb{R}_{+}$ sürekli bir fonksiyon olsun. f 'nin matris monoton olması için gerek ve yeter şart f 'nin matris konkav olmasıdır. (Bhatia, 1997)

Teorem 5.2.8. $f:\mathbb{R}_{+}\to\mathbb{R}_{+}$ sürekli bir fonksiyon olsun. f 'nin matris monoton olması için gerek ve yeter şart $g(t)=\dfrac{1}{f(t)}$ fonksiyonunun matris konveks olmasıdır. (Bhatia, 1997)

Teorem 5.2.9. f, $[0,\alpha)$ aralığında sürekli reel bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki iki koşul eşdeğerdir:

i) f matris konvekstir ve $f(0)\le 0$ 'dır.

ii) $g(t)=\dfrac{f(t)}{t}$ fonksiyonu $[0,\alpha)$ üzerinde matris monotondur. (Bhatia, 1997)

Aşağıdaki teorem matris monoton fonksiyonlar için bir matris eşitsizliğini ifade eder:

Teorem 5.2.10. $A, B \geq 0$ ve herhangi f matris monoton fonksiyonu için

$$Af(A)+Bf(B) \geq \left(\frac{A+B}{2}\right)^{1/2} \left(f(A)+f(B)\right)\left(\frac{A+B}{2}\right)^{1/2} \tag{5.17}$$

eşitsizliği vardır. (Audenaert,2007)

İspat: A, B pozitif yarı tanımlı olsun. $t \to t^{-1}$ fonksiyonu matris konvekstir. Böylece

$$\frac{A^{-1}+B^{-1}}{2} \geq \left(\frac{A+B}{2}\right)^{-1} \tag{5.18}$$

dir. A yerine $A+I$ ve B yerine $B+I$ yazılarak

$$(A+I)^{-1}+(B+I)^{-1} \geq 2\left(I+\frac{A+B}{2}\right)^{-1} \tag{5.19}$$

bulunur.

$$C_k = \frac{A^k}{A+I}+\frac{B^k}{B+I} \tag{5.20}$$

ve

$$M = \frac{A+B}{2} \tag{5.21}$$

olsun. Bu gösterimlerle (5.19) eşitsizliği

$$C_0 \geq 2(I+M)^{-1} \tag{5.22}$$

şekline dönüşür. Buradan

$$C_0+\sqrt{M}C_0\sqrt{M} \geq 2(I+M)^{-1}+2\sqrt{M}(I+M)^{-1}\sqrt{M} = 2I \tag{5.23}$$

ifadesinde tüm çarpanlar değişmeli olduğundan son eşitlik kolayca elde edilir. $C_k + C_{k+1} = A^k + B^k$ 'dir ve özel olarak $C_0 + C_1 = 2I$ 'dır. Buradan (5.23) ifadesi

$$\sqrt{M}\,(2I - C_1)\sqrt{M} \geq C_1 \tag{5.24}$$

şekline dönüşür. Dahası $C_1 + C_2 = 2M$ olduğundan

$$C_2 \geq \sqrt{M}\,C_1\sqrt{M} \tag{5.25}$$

veya

$$\frac{A^2}{A+I} + \frac{B^2}{B+I} \geq \left(\frac{A+B}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{A}{A+I} + \frac{B}{B+I}\right)\left(\frac{A+B}{2}\right)^{1/2} \tag{5.26}$$

olur. $\lambda \geq 0$ için A yerine $\lambda^{-1}A$ ve B yerine $\lambda^{-1}B$ yazılırsa ve λ^2 ile her iki taraf çarpılırsa

$$\frac{\lambda A^2}{A+\lambda I} + \frac{\lambda B^2}{B+\lambda I} \geq \left(\frac{A+B}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{\lambda A}{A+\lambda I} + \frac{\lambda B}{B+\lambda I}\right)\left(\frac{A+B}{2}\right)^{1/2} \tag{5.27}$$

bulunur. Bu eşitsizlik pozitif bir $d\mu(\lambda)$ ölçümü kullanılarak $\lambda \in [0,\infty)$ üzerinden integrallenirse

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{\lambda A^2}{A+\lambda I}\,d\mu(\lambda) + \int_0^\infty \frac{\lambda B^2}{B+\lambda I}\,d\mu(\lambda) \\ &\geq \left(\frac{A+B}{2}\right)^{1/2} \left(\int_0^\infty \left(\frac{\lambda A}{A+\lambda I} + \frac{\lambda B}{B+\lambda I}\right) d\mu(\lambda)\right)\left(\frac{A+B}{2}\right)^{1/2} \end{aligned} \tag{5.28}$$

elde edilir. Buradan da

$$A\int_0^\infty \frac{\lambda A}{A+\lambda I}d\mu(\lambda)+B\int_0^\infty \frac{\lambda B}{B+\lambda I}d\mu(\lambda)$$
$$\geq\left(\frac{A+B}{2}\right)^{1/2}\left(\int_0^\infty\left(\frac{\lambda A}{A+\lambda I}+\frac{\lambda B}{B+\lambda I}\right)d\mu(\lambda)\right)\left(\frac{A+B}{2}\right)^{1/2} \tag{5.29}$$

ve

$$A(f(A)-\alpha I-\beta A)+B(f(B)-\alpha I-\beta B)$$
$$\geq\left(\frac{A+B}{2}\right)^{1/2}(f(A)-\alpha I-\beta A+f(B)-\alpha I-\beta B)\left(\frac{A+B}{2}\right)^{1/2} \tag{5.30}$$

bulunur. Kare fonksiyonun matris konveksliğinden $\left(\frac{A+B}{2}\right)^2\leq\frac{A^2+B^2}{2}$ yardımıyla $\beta\geq 0$ için

$$A(\alpha I+\beta A)+B(\alpha I+\beta B)\geq\left(\frac{A+B}{2}\right)^{1/2}\left(2\alpha I+\beta(A+B)\right)\left(\frac{A+B}{2}\right)^{1/2} \tag{5.31}$$

bulunur.(5.30) ve (5.31) ifadeleri toplanarak istenen eşitsizlik elde edilir.

Weyl monotonluk ve $\lambda_j(AB)=\lambda_j(BA)$ eşitliği kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 5.2.11. $A,B\geq 0$ ve herhangi matris monoton f fonksiyonu için

$$\lambda_j\left(Af(A)+Bf(B)\right)\geq\lambda_j\left(\frac{A+B}{2}(f(A)+f(B))\right) \tag{5.32}$$

eşitsizliği vardır. (Audenaert,2007)

6. HERMİTE-HADAMARD TİPİ EŞİTSİZLİKLER

$\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı herhangi bir f konveks fonksiyonu için

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\int_a^b f(x)dx\le(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2},\ a,b\in\mathbb{R} \tag{6.1}$$

eşitsizliği tüm $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ konveks fonksiyonları için literatürde *Hermite-Hadamard eşitsizliği* olarak bilinir. Bu eşitsizlik ilk olarak 1881'de Hermite tarafından bulunmuştur. Fakat bu sonuçtan matematik literatüründe hiçbir yerde bahsedilmemiştir ve Hermite'in sonucu olarak bilinmemiştir. Konveks fonksiyonların tarihi ve teorisi üzerine uzman Beckenbach, bu eşitsizliğin 1893'te Hadamard tarafından ispatlandığını yazmıştır. Böylece (6.1) eşitsizliği Hermite- Hadamard eşitsizliği olarak bilinmektedir.

Teorem 6.1. I , $\mathbb{R}$ 'de bir aralık, $a,b\in I$ ve $a<b$ olmak üzere $f:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le\frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{6.2}$$

olur. (Hadamard, 1893)

İspat: f,I üzerinde konveks olduğundan (a,b) aralığında sürekli ve $[a,b]$ aralığında sınırlıdır. Dolayısıyla f bu aralıkta integrallenebilirdir. $\forall t\in[0,1]$ için

$$f(ta+(1-t)b)\le tf(a)+(1-t)f(b) \tag{6.3}$$

dir. Bu eşitsizlik $[0,1]$ aralığında t 'ye göre integrallenirse

$$\begin{aligned}\int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)dt&\le\int_0^1\left(tf(a)+(1-t)f(b)\right)dt\\&=f(a)\int_0^1 tdt+f(b)\int_0^1(1-t)dt\\&=\frac{f(a)+f(b)}{2}\end{aligned} \tag{6.4}$$

elde edilir ki bu da Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafıdır. Diğer yandan, f, I üzerinde konveks olduğundan $t \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\frac{ta+(1-t)b}{2}+\frac{(1-t)a+tb}{2}\right) \\ &\le \frac{1}{2}\left[f\left(ta+(1-t)b\right)+f\left((1-t)a+tb\right)\right] \end{aligned} \tag{6.5}$$

bulunur. Bu ifadenin her iki tarafı $[0,1]$ üzerinden t'ye göre integrallenirse

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\le \frac{1}{2}\int_0^1 \left[f\left(ta+(1-t)b\right)+f\left((1-t)a+tb\right)\right]dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)dt+\int_0^1 f\left((1-t)a+tb\right)dt\right] \end{aligned} \tag{6.6}$$

elde edilir. Bu ifadede sağ taraftaki ikinci integralde $1-t=s$ yazılırsa

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\le \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)dt+\int_0^1 f\left(sa+(1-s)b\right)ds\right] \\ &= \int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)dt \end{aligned} \tag{6.7}$$

elde edilir ki bu da Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafıdır. (6.4) ve (6.7) ifadelerinden

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \int_a^b f\left(ta+(1-t)b\right)dt \le \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{6.8}$$

elde edilir. (6.8) ifadesinde $ta+(1-t)b=x$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$\int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \tag{6.9}$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 6.2. $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için aşağıdaki durumlar denktir:

i) f, g fonksiyonları $[a,b]$ aralığında konvekstir.

ii) $\forall x, y \in [a,b]$ için $f_0(t) = f(tx + (1-t)y)$ veya $f((1-t)x + ty)$, $g_0(t) = g(tx + (1-t)y)$ veya $g((1-t)x + ty)$ şeklinde tanımlanan $f_0, g_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $[0,1]$ üzerinde konvekstir. (Pecaric ve Dragomir,1991)

Konveks fonksiyonlar için Hermite- Hadamard tipi eşitsizlikler birçok yazar tarafından ele alınmıştır. Bu eşitsizliklerden bazıları verilmiştir:

Teorem 6.3. f ve g reel değerli, negatif olmayan ve $[a,b]$ üzerinde konveks fonksiyonlar olsun. $M(a,b) = f(a)g(a) + f(b)g(b)$ ve $N(a,b) = f(a)g(b) + f(b)g(a)$ olmak üzere

(i) $$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \le \frac{1}{3}M(a,b) + \frac{1}{6}N(a,b) \tag{6.10}$$

(ii) $$2f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx + \frac{1}{6}M(a,b) + \frac{1}{3}N(a,b) \tag{6.11}$$

dir. (Pachpatte, 2003)

Not 6.4. $a = 0$ ve $b = 1$ seçilirse c, d pozitif sabitler olmak üzere $f(x) = cx$ ve $g(x) = d(1-x)$ olur. Bu da (6.10) ve (6.11) eşitsizliklerinin geçerli olduğunu gösterir.

İspat: f ve g konveks fonksiyonlar olduğundan $t \in [0,1]$ için

$$f(ta + (1-t)b) \le tf(a) + (1-t)f(b) \tag{6.12}$$

$$g(ta + (1-t)b) \le tg(a) + (1-t)g(b) \tag{6.13}$$

dir.(6.12) ve (6.13)'ten

$$\begin{aligned} &f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b) \\ &\le t^2 f(a)g(a)+(1-t)^2 f(b)g(b)+t(1-t)[f(a)g(b)+f(b)g(a)] \end{aligned} \tag{6.14}$$

elde edilir. Lemma 6.2.'den $f(ta+(1-t)b)$ ve $g(ta+(1-t)b)$, $[0,1]$ üzerinde konveks olduğundan $[0,1]$ aralığında integrallenebilirdir ve sonuç olarak $f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)$ çarpımı da $[0,1]$ aralığında integrallenebilirdir. Benzer şekilde f ve g, $[a,b]$ aralığında konveks olduğundan $[a,b]$ aralığında integrallenebilirdir ve böylece $[a,b]$ aralığında fg de integrallenebilirdir. (6.14) eşitsizliğinin her iki tarafı $[0,1]$ üzerinden integrallenirse

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)dt \le \frac{1}{3}M(a,b)+\frac{1}{6}N(a,b) \tag{6.15}$$

bulunur. $ta+(1-t)b=x$ alınırsa

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \tag{6.16}$$

elde edilir. (6.16) eşitliği (6.15)'te yerine yazılarak (6.10) eşitsizliği elde edilir.

f ve g konveks fonksiyonlar olduğundan $t\in[a,b]$ için

$$
\begin{aligned}
&f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)\\
&=f\left(\frac{ta+(1-t)b}{2}+\frac{(1-t)a+tb}{2}\right)g\left(\frac{ta+(1-t)b}{2}+\frac{(1-t)a+tb}{2}\right)\\
&\le\frac{1}{4}\left[f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)\right]\left[g(ta+(1-t)b)+g((1-t)a+tb)\right]\\
&\le\frac{1}{4}\left[f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)g((1-t)a+tb)\right]\\
&+\frac{1}{4}\left[\left[tf(a)+(1-t)f(b)\right]\left[(1-t)g(a)+tg(b)\right]\right]\\
&+\frac{1}{4}\left[\left[(1-t)f(a)+tf(b)\right]\left[tg(a)+(1-t)g(b)\right]\right]\\
&=\frac{1}{4}\left[f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)g((1-t)a+tb)\right]\\
&+\frac{1}{4}\left[2t(1-t)\left[f(a)g(a)+f(b)g(b)\right]\right]\\
&+\frac{1}{4}\left[\left(t^2+(1-t)^2\right)\left[f(a)g(b)+f(b)g(a)\right]\right]
\end{aligned}
\tag{6.17}
$$

elde edilir. Benzer şekilde (6.10) eşitsizliğinin ispatında olduğu gibi (6.17) eşitsizliğinin her iki tarafı $[0,1]$ üzerinden integrallenirse

$$
\begin{aligned}
&f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)\\
&\le\frac{1}{4}\int_0^1\left[f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)g((1-t)a+tb)\right]dt\\
&+\frac{1}{12}M(a,b)+\frac{1}{6}N(a,b)
\end{aligned}
\tag{6.18}
$$

eşitsizliği oluşur ve (6.18)'den

$$
\begin{aligned}
&f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)\\
&\le\frac{1}{2}\int_0^1\left[f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)\right]dt\\
&+\frac{1}{12}M(a,b)+\frac{1}{6}N(a,b)
\end{aligned}
\tag{6.19}
$$

olduğu görülür. (6.19) eşitsizliğinin her iki tarafı 2 ile çarpılarak ve (6.16) eşitliği kullanılarak (6.11) eşitsizliği elde edilmiş olur.

Teorem 6.5. $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ konveks fonksiyonlar olsun. $M(a,b)=f(a)g(a)+f(b)g(b)$ ve $N(a,b)=f(a)g(b)+f(b)g(a)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}&\frac{f(a)}{(b-a)^2}\int_a^b(b-x)g(x)dx+\frac{f(b)}{(b-a)^2}\int_a^b(x-a)g(x)dx\\&+\frac{g(a)}{(b-a)^2}\int_a^b(b-x)f(x)dx+\frac{g(b)}{(b-a)^2}\int_a^b(x-a)f(x)dx\\&\le\frac{M(a,b)}{3}+\frac{N(a,b)}{6}+\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx\end{aligned}\tag{6.20}$$

eşitsizliği vardır. (Tunç,2011)

İspat: f ve g konveks fonksiyonlar olduğundan $t\in[0,1]$ için

$$f(ta+(1-t)b)\le tf(a)+(1-t)f(b)\tag{6.21}$$

$$g(ta+(1-t)b)\le tg(a)+(1-t)g(b)\tag{6.22}$$

dir. $e,f,p,r\in\mathbb{R}$ için $e\le f$ ve $p\le r$ ise $er+fp\le ep+fr$ eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}&f(ta+(1-t)b)\left[tg(a)+(1-t)g(b)\right]+g(ta+(1-t)b)\left[tf(a)+(1-t)f(b)\right]\\&\le\left[tf(a)+(1-t)f(b)\right]\left[tg(a)+(1-t)g(b)\right]+f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)\end{aligned}\tag{6.23}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}&g(a)tf(ta+(1-t)b)+g(b)(1-t)f(ta+(1-t)b)\\&+f(a)tg(ta+(1-t)b)+f(b)(1-t)g(ta+(1-t)b)\\&\le t^2f(a)g(a)+(1-t)^2f(b)g(b)+t(1-t)f(a)g(b)+t(1-t)f(b)g(a)\\&+f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)\end{aligned}\tag{6.24}$$

eşitsizliği oluşur.

Lemma 6.2.'den $f(ta+(1-t)b)$ ve $g(ta+(1-t)b)$, $[0,1]$ üzerinde konveks olduğundan $[0,1]$ aralığında integrallenebilirdir ve sonuç olarak $f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)$ çarpımı da $[0,1]$ aralığında integrallenebilirdir. Benzer şekilde f ve g, $[a,b]$ aralığında konveks olduğundan $[a,b]$ aralığında integrallenebilirdir ve böylece $[a,b]$ aralığında fg de integrallenebilirdir. (6.24) eşitsizliğinin her iki tarafını $[0,1]$ üzerinden integrallenirse

$$\begin{aligned}
&g(a)\int_0^1 tf(ta+(1-t)b)dt + g(b)\int_0^1 (1-t)f(ta+(1-t)b)dt \\
&+f(a)\int_0^1 tg(ta+(1-t)b)dt + f(b)\int_0^1 (1-t)g(ta+(1-t)b)dt \\
&\le f(a)g(a)\int_0^1 t^2dt + f(b)g(b)\int_0^1 (1-t)^2dt + f(a)g(b)\int_0^1 t(1-t)dt \\
&+f(b)g(a)\int_0^1 t(1-t)dt + \int_0^1 f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)dt
\end{aligned} \tag{6.25}$$

elde edilir. $ta+(1-t)b=x, (a-b)dt=dx$ alınırsa

$$\begin{aligned}
\int_0^1 tg(ta+(1-t)b)dt &= \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{x-b}{a-b}g(x)dx \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b (b-x)g(x)dx
\end{aligned} \tag{6.26}$$

ve

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1-t)g(ta+(1-t)b)dt &= \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{a-x}{a-b}g(x)dx \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b (x-a)g(x)dx
\end{aligned} \tag{6.27}$$

ve benzer şekilde

$$\int_0^1 tf(ta+(1-t)b)dt = \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b (b-x)f(x)dx \tag{6.28}$$

$$\int_0^1 (1-t)f(ta+(1-t)b)dt = \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b (x-a)f(x)dx \tag{6.29}$$

elde edilir.

$$\int_0^1 t^2 dt = \int_0^1 (1-t)^2 dt = \frac{1}{3}, \quad \int_0^1 t(1-t)dt = \frac{1}{6} \tag{6.30}$$

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \tag{6.31}$$

şeklinde hesaplanabildiğinden ispat tamamlanmış olur.

Teorem 6.6. $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ konveks fonksiyonlar olsun. $M(a,b)=f(a)g(a)+f(b)g(b)$ ve $N(a,b)=f(a)g(b)+f(b)g(a)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}&\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-a}\int_a^b g(x)dx+\frac{g\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-a}\int_a^b f(x)dx\\ &\le\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b f(x)g(x)dx\\ &+\frac{1}{12}M(a,b)+\frac{1}{6}N(a,b)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)\end{aligned} \tag{6.32}$$

eşitsizliği elde edilir. (Tunç,2011)

İspat: f ve g konveks fonksiyonlar olduğundan $t\in[0,1]$ için

$$\begin{aligned}f\left(\frac{a+b}{2}\right)&=f\left(\frac{ta+(1-t)b}{2}+\frac{(1-t)a+tb}{2}\right)\\ &\le\frac{f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)}{2}\end{aligned} \tag{6.33}$$

$$
\begin{aligned}
g\left(\frac{a+b}{2}\right) &= g\left(\frac{ta+(1-t)b}{2}+\frac{(1-t)a+tb}{2}\right) \\
&\le \frac{g(ta+(1-t)b)+g((1-t)a+tb)}{2}
\end{aligned}
\tag{6.34}
$$

dir. (6.33) ve (6.34) Teorem 6.5.'in ispatında olduğu gibi çarpılırsa

$$
\begin{aligned}
&f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{ta+(1-t)b}{2}+\frac{(1-t)a+tb}{2}\right) \\
&+g\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)}{2} \\
&\le \frac{f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)}{2}\,\frac{g(ta+(1-t)b)+g((1-t)a+tb)}{2} \\
&+f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)
\end{aligned}
\tag{6.35}
$$

elde edilir. Buradan

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[g(ta+(1-t)b)+g((1-t)a+tb)\right] \\
&+\frac{1}{2}g\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)\right] \\
&\le \frac{1}{4}\left\{f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)g((1-t)a+tb)\right\} \\
&+\frac{1}{4}\left\{f(ta+(1-t)b)g((1-t)a+tb)+f((1-t)a+tb)g((1-t)a+tb)\right\}+f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&\le \frac{1}{4}\left\{f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)g((1-t)a+tb)\right\} \\
&+\frac{1}{4}\left[tf(a)+(1-t)f(b)\right]\left[(1-t)g(a)+tg(b)\right] \\
&+\frac{1}{4}\left[(1-t)f(a)+tf(b)\right]\left[tg(a)+(1-t)g(b)\right]+f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left\{f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)g((1-t)a+tb)\right\} \\
&+\frac{1}{4}\left[2t(1-t)\right]\left[f(a)g(a)+f(b)g(b)\right] \\
&+\frac{1}{4}\left[t^2+(1-t)^2\right]\left[f(a)g(b)+f(b)g(a)\right]+f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)
\end{aligned}
\tag{6.36}
$$

dir. Benzer şekilde Teorem 6.5'in ispatında olduğu gibi (6.36)'nın her iki tarafı $[0,1]$ üzerinden integrallenirse

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^1\left[g(ta+(1-t)b)+g((1-t)a+tb)\right]dt \\
&+\frac{1}{2}g\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^1\left[f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)\right]dt \\
&\le\frac{1}{4}\int_0^1\left\{f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)g((1-t)a+tb)\right\}dt \\
&+\frac{1}{4}\left[f(a)g(a)+f(b)g(b)\right]\int_0^1\left[2t(1-t)\right]dt \\
&+\frac{1}{4}\left[f(a)g(b)+f(b)g(a)\right]\int_0^1\left[t^2+(1-t)^2\right]dt \\
&+f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^1 dt
\end{aligned} \tag{6.37}$$

eşitsizliği elde edilir. $ta+(1-t)b=x,(1-t)a+tb=x$ alınırsa

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)dt=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \tag{6.38}$$

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt=\int_0^1 f((1-t)a+tb)dt=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \tag{6.39}$$

bulunur. (6.38) ve (6.39) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned}
&\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-a}\int_a^b g(x)dx+\frac{g\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-a}\int_a^b f(x)dx \\
&\le\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b f(x)g(x)dx \\
&+\frac{1}{12}M(a,b)+\frac{1}{6}N(a,b)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)
\end{aligned} \tag{6.40}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Not 6.7. Not edelim ki $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonları konkav ise (6.20) ve (6.32) eşitsizliklerinin işaretleri değişir.

Bazı özel ortalamalar aşağıda verilmiştir. Keyfi a,b $(a\neq b)$ reel sayılarını ele alalım.

$$A(a,b)=\frac{a+b}{2},\ a,b\in\mathbb{R}\text{, (aritmetik ortalama)} \tag{6.41}$$

$$K(a,b)=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\ ,\ a,b\in\mathbb{R}\text{, (kuadratik ortalama)} \tag{6.42}$$

$$L(a,b)=\frac{b-a}{\ln|b|-\ln|a|}\ ,\ |a|\neq|b|,\ ab\neq 0\text{, (logaritmik ortalama)} \tag{6.43}$$

$$G(a,b)=\sqrt{ab}\text{, (geometrik ortalama)} \tag{6.44}$$

$$L_n(a,b)=\left[\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{(b-a)(n+1)}\right]^{1/n}\ ,\ n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1,0\},a\neq b\text{, (genelleştirilmiş log-ortalama)} \tag{6.45}$$

Teorem 6.5 ve Teorem 6.6 kullanılarak reel sayıların özel ortalamalarının bazı uygulamaları gösterilmiştir:

Uygulama 6.8. $a,b\in I^0,a<b,0\notin[a,b]$ ve $n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1,0\},\ a\neq b$ olmak üzere

$$\frac{4A(a,b)-2L(a,b)}{L(a,b)G^2(a,b)}\leq\frac{2K^2(a,b)+4G^2(a,b)}{3G^4(a,b)} \tag{6.46}$$

dir. (Tunç,2011)

İspat: Teorem 6.5'teki eşitsizlikte $x\in[a,b]$ olmak üzere $f(x)=g(x)=\frac{1}{x}$ alınırsa (6.46) sonucu elde edilir.

Uygulama 6.9. $a,b\in I^0,a<b,0\notin[a,b]$ ve $n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1,0\},\ a\neq b$ olmak üzere

$$2A^n(a,b)L_n^n(a,b) \le \frac{1}{2}L_{2n}^{2n}(a,b) + \frac{K^2(a^n,b^n)}{6} + \frac{G^{2n}(a,b)}{3} + A^{2n}(a,b) \tag{6.47}$$

dir. (Tunç,2011)

İspat: Teorem 6.6'daki eşitsizlikte $x \in [a,b]$ ve $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1,0\}$, $a \neq b$ olmak üzere $f(x) = g(x) = x^n$ alınırsa (6.47) sonucu elde edilir.

S. S. Dragomir (2011), operatör konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipi bir eşitsizlik vermiştir:

Teorem 6.10. $f : I \to \mathbb{R}$, I aralığında tanımlı operatör konveks bir fonksiyon olsun. Spektrumları I aralığında bulunan herhangi A ve B Hermityen operatörleri için

$$\begin{aligned} &\left(f\left(\frac{A+B}{2}\right) \le \right) \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{3A+B}{4}\right) + f\left(\frac{A+3B}{4}\right)\right] \\ &\le \int_0^1 f\left((1-t)A+tB\right)dt \\ &\le \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{A+B}{2}\right) + \frac{f(A)+f(B)}{2}\right] \left(\le \frac{f(A)+f(B)}{2}\right) \end{aligned} \tag{6.48}$$

eşitsizliği vardır. (Dragomir, 2011)

İspat: Öncelikle f fonksiyonu konveks olduğundan $\int_0^1 f\left((1-t)A+tB\right)dt$ operatör değerli integrali, spektrumları I aralığında bulunan herhangi Hermityen A ve B operatörleri için vardır.

Burada iki ispat verilecektir. İlkinde sadece operatör konveks fonksiyonların tanımı kullanılmıştır. İkincisinde ise reel değerli fonksiyonlar için klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği kullanılmıştır.

1. Operatör konveks fonksiyonların tanımı yardımıyla herhangi $t \in [0,1]$ ve spektrumları I aralığında bulunan herhangi Hermityen C ve D operatörleri için

$$f\left(\frac{C+D}{2}\right) \le \frac{1}{2}\left[f\left((1-t)C+tD\right) + f\left((1-t)D+tC\right)\right] \le \frac{1}{2}\left[f(C)+f(D)\right] \tag{6.49}$$

eşitsizliği vardır. (6.49) eşitsizliği $t \in [0,1]$ üzerinden integrallenirse ve

$$\int_0^1 f\left((1-t)C+tD\right)dt=\int_0^1 f\left((1-t)D+tC\right)dt \tag{6.50}$$

olduğu hesaba alınarak spektrumları I aralığında bulunan herhangi Hermityen C ve D operatörleri için

$$f\left(\frac{C+D}{2}\right)\le\int_0^1 f\left((1-t)C+tD\right)dt\le\frac{1}{2}\left[f(C)+f(D)\right] \tag{6.51}$$

operatör konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

$u=2t$ değişken dönüşümüyle $u=0\to t=0,\ u=1\to t=\frac{1}{2}$ ve $t=\frac{u}{2},\ dt=\frac{du}{2}$

olur ve

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} f\left((1-t)A+tB\right)dt&=\int_0^1 f\left(\left(1-\frac{u}{2}\right)A+\frac{u}{2}B\right)\frac{du}{2}\\&=\frac{1}{2}\int_0^1 f\left(A-\frac{Au}{2}+\frac{Bu}{2}\right)du\\&=\frac{1}{2}\int_0^1 f\left(A-\frac{Au}{2}+\frac{Bu}{2}-\frac{Au}{2}+\frac{Au}{2}\right)du\\&=\frac{1}{2}\int_0^1 f\left((1-u)A+u\left(\frac{A+B}{2}\right)\right)du\end{aligned} \tag{6.52}$$

elde edilir. $u=2t-1$ değişken dönüşümüyle $u=0\to t=\frac{1}{2},\ u=1\to t=1$ ve $t=\frac{u+1}{2},\ dt=\frac{du}{2}$ olur ve

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^{1} f\left((1-t)A+tB\right)dt &= \int_{0}^{1} f\left(\left(1-\frac{u+1}{2}\right)A+\frac{u+1}{2}B\right)\frac{du}{2}\\ &= \frac{1}{2}\int_{0}^{1} f\left(A-\frac{Au}{2}-\frac{A}{2}+\frac{Bu}{2}+\frac{B}{2}\right)du\\ &= \frac{1}{2}\int_{0}^{1} f\left(\frac{A}{2}-\frac{Au}{2}+\frac{Bu}{2}+\frac{B}{2}+\frac{Bu}{2}-\frac{Bu}{2}\right)du\\ &= \frac{1}{2}\int_{0}^{1} f\left((1-u)\left(\frac{A+B}{2}\right)+uB\right)du\end{aligned} \tag{6.53}$$

elde edilir. (6.51) eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}f\left(\frac{A+\frac{A+B}{2}}{2}\right) &= f\left(\frac{3A+B}{4}\right)\\ &\le \int_{0}^{1} f\left((1-u)A+u\frac{A+B}{2}\right)du \le \frac{1}{2}\left[f(A)+f\left(\frac{A+B}{2}\right)\right]\end{aligned} \tag{6.54}$$

ve

$$\begin{aligned}f\left(\frac{\frac{A+B}{2}+B}{2}\right) &= f\left(\frac{A+3B}{4}\right)\\ &\le \int_{0}^{1} f\left((1-u)\frac{A+B}{2}+uB\right)du \le \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{A+B}{2}\right)+f(B)\right]\end{aligned} \tag{6.55}$$

elde edilir. (6.54) ve (6.55) eşitsizlikleri toplanıp $\frac{1}{2}$ ile çarpılırsa (6.48) eşitsizliği elde edilir.

2. $x \in H$ (Hilbert uzay), $\|x\| = 1$ ve A ve B spektrumları I aralığında bulunan herhangi Hermityen operatörler olsun. Reel değerli $\varphi_{x,A,B} : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\varphi_{x,A,B}(t) = \left\langle f\left((1-t)A+tB\right)x, x\right\rangle$ ile verilsin. f operatör konveks bir fonksiyon olduğundan, $t_1, t_2 \in [0,1]$ ve $\alpha, \beta \ge 0$ olmak üzere $\alpha+\beta = 1$ iken

$$\begin{aligned}\varphi_{x,A,B}\left(\alpha t_1+\beta t_2\right)&=\left\langle f\left(\left(1-\left(\alpha t_1+\beta t_2\right)\right)A+\left(\alpha t_1+\beta t_2\right)B\right)x,x\right\rangle\\&=\left\langle f\left(\alpha\left[\left(1-t_1\right)A+t_1B\right]+\beta\left[\left(1-t_2\right)A+t_2B\right]\right)x,x\right\rangle\\&\le\alpha\left\langle f\left(\left[\left(1-t_1\right)A+t_1B\right]\right)x,x\right\rangle+\beta\left\langle f\left(\left[\left(1-t_2\right)A+t_2B\right]\right)x,x\right\rangle\\&=\alpha\varphi_{x,A,B}(t_1)+\beta\varphi_{x,A,B}(t_2)\end{aligned}\tag{6.56}$$

eşitsizliği vardır ve $\varphi_{x,A,B}$ fonksiyonunun $[0,1]$ üzerinde konveks olduğunu gösterir. Reel değerli fonksiyonlar için

$$g\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b g(s)ds\le\frac{g(a)+g(b)}{2}\tag{6.57}$$

Hermite-Hadamard eşitsizliğini kullanarak

$$\varphi_{x,A,B}\left(\frac{0+\frac{1}{2}}{2}\right)=\varphi_{x,A,B}\left(\frac{1}{4}\right)\le\frac{1}{\frac{1}{2}-0}\int_0^{\frac{1}{2}}\varphi_{x,A,B}(t)dt\le\frac{\varphi_{x,A,B}(0)+\varphi_{x,A,B}(1/2)}{2}\tag{6.58}$$

ve

$$\varphi_{x,A,B}\left(\frac{\frac{1}{2}+1}{2}\right)=\varphi_{x,A,B}\left(\frac{3}{4}\right)\le\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\int_{\frac{1}{2}}^1\varphi_{x,A,B}(t)dt\le\frac{\varphi_{x,A,B}(1/2)+\varphi_{x,A,B}(1)}{2}\tag{6.59}$$

elde edilir. (6.58) ve (6.59) eşitsizlikleri toplanıp $\frac{1}{2}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left[\varphi_{x,A,B}\left(\frac{1}{4}\right)+\varphi_{x,A,B}\left(\frac{3}{4}\right)\right]\\&\le\int_0^1\varphi_{x,A,B}(t)dt\\&\le\frac{1}{k}\left[\frac{\varphi_{x,A,B}(0)+\varphi_{x,A,B}(1)}{2}+\varphi_{x,A,B}\left(\frac{1}{2}\right)\right]\end{aligned}\tag{6.60}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\langle\left[f\left(\frac{3A+B}{4}\right)+f\left(\frac{A+3B}{4}\right)\right]x,x\right\rangle \\
&\leq\int_0^1\left\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle dt \\
&\leq\frac{1}{2}\left\langle\left[f\left(\frac{A+B}{2}\right)+\frac{f(A)+f(B)}{2}\right]x,x\right\rangle
\end{aligned} \tag{6.61}$$

bulunur. Son olarak f fonksiyonunun sürekliliğinden herhangi $x\in H$ için, $\|x\|=1$ ve A ve B spektrumları I aralığında bulunan herhangi Hermityen operatörleri için

$$\int_0^1\left\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle dt=\left\langle\int_0^1 f\left((1-t)A+tB\right)dtx,x\right\rangle \tag{6.62}$$

olduğundan (6.61) eşitsizliği (6.48) eşitsizliğini verir.

Zabandan (2009), Teorem 6.3.10'daki eşitsizliğin reel sayılar için olan ifadesinin bir genelleştirmesini yapmıştır:

Teorem 6.11. f, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon olsun.

$$\begin{aligned}
x_n&=\frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{2^n}f\left(a+i\frac{b-a}{2^n}-\frac{b-a}{2^{n+1}}\right) \\
&=\frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{2^n}f\left(a+\left(i-\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{2^n}\right)
\end{aligned} \tag{6.63}$$

ve

$$\begin{aligned}
y_n&=\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{i=1}^{2^n}\left[f\left(\left(1-\frac{i}{2^n}\right)a+\frac{i}{2^n}b\right)+f\left(\left(1-\frac{i-1}{2^n}\right)a+\frac{i-1}{2^n}b\right)\right] \\
&=\frac{1}{2^{n+1}}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{2^n-1}f\left(\left(1-\frac{i}{2^n}\right)a+\frac{i}{2^n}b\right)\right]
\end{aligned} \tag{6.64}$$

olmak üzere

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le x_n \le \frac{1}{b-a}\int_0^1 f(x)dx \le y_n \le \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{6.65}$$

dir.(Zabandan, 2009)

Sonuç 6.12. f, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon olsun. x_n ve y_n, (6.63) ve (6.64)'teki gibi tanımlansın. Bu durumda,

$$\begin{aligned} &f\left(\frac{a+b}{2}\right)=x_0\le\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right]=x_1\\ &\le\ldots\le x_n\le\ldots\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\\ &\le\ldots\le y_n\le\ldots\le y_1=\frac{1}{4}\left[f(a)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]\\ &\le y_0=\frac{f(a)+f(b)}{2} \end{aligned} \tag{6.66}$$

dır.(Zabandan, 2009)

7. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde operatör (matris) konveks fonksiyonlar için elde edilen Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler ve integral eşitsizlikleri verilmiştir.

7.1. Operatör Konveks Fonksiyonlar İçin Eşitsizlikler

Hermite- Hadamard eşitsizliği kullanılarak elde edilen eşitsizlikler ve integral eşitsizlikleri oldukça elemanter işlemler kullanılarak ispatlanmıştır.

Teorem 7.1.1. $f: I \to \mathbb{R}$, I aralığında tanımlı operatör konveks bir fonksiyon olsun. Spektrumları I aralığında bulunan herhangi A ve B Hermityen operatörler ve $t \in [0,1]$ için, k adım sayısı olmak üzere

$$\begin{aligned} &\left(f\left(\frac{A+B}{2}\right) \le \right) \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} f\left(\frac{(2k-2i-1)A+(2i+1)B}{2k}\right) \\ &\le \int_0^1 f\left((1-t)A+tB\right)dt \\ &\le \frac{1}{k}\left[\sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{(k-i)A+iB}{k}\right)+\frac{f(A)+f(B)}{2}\right]\left(\le \frac{f(A)+f(B)}{2}\right) \end{aligned} \tag{7.1}$$

eşitsizliği vardır.

İspat: f fonksiyonu sürekli olduğundan, spektrumları I aralığında bulunan herhangi A ve B Hermityen operatörleri için $\int_0^1 f\left((1-t)A+tB\right)dt$ operatör değerli integral vardır.

Teorem için iki farklı ispat verebiliriz. İlki operatör konveks fonksiyonların tanımı kullanılarak ve ikincisi de reel değerli fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği kullanılarak verilecektir.

1. Operatör konveks fonksiyon tanımından spektrumları I aralığında bulunan herhangi X ve Y Hermityen operatörleri ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{X+Y}{2}\right)=f\left(\frac{(1-t)X+tY}{2}+\frac{(1-t)Y+tX}{2}\right)$$
$$\leq \frac{f\left((1-t)X+tY\right)+f\left((1-t)Y+tX\right)}{2} \tag{7.2}$$
$$\leq \frac{f(X)+f(Y)}{2}$$

eşitsizliğini elde ederiz. $\int_0^1 f\left((1-t)X+tY\right)dt=\int_0^1 f\left(tX+(1-t)Y\right)dt$ olduğunu hesaba katarak (7.2) eşitsizliğini integrallersek

$$f\left(\frac{X+Y}{2}\right)\leq \int_0^1 f\left((1-t)X+tY\right)dt\leq \frac{f(X)+f(Y)}{2} \tag{7.3}$$

Hermite- Hadamard eşitsizliği elde edilir.

$u=kt$ değişken dönüşümünü kullanırsak, $u=kt\Rightarrow t=\frac{u}{k},\ dt=\frac{1}{k}du$ olur.

$u=0\Rightarrow t=0,\ u=1\Rightarrow t=\frac{1}{k}$ olacağından

$$\int_0^{\frac{1}{k}} f\left((1-t)A+tB\right)dt=\frac{1}{k}\int_0^1 f\left(\left(1-\frac{u}{k}\right)A+\frac{u}{k}B\right)du$$
$$=\frac{1}{k}\int_0^1 f\left(A-\frac{Au}{k}+\frac{Bu}{k}\right)du \tag{7.4}$$
$$=\frac{1}{k}\int_0^1 f\left((1-u)A+u\frac{(k-1)A+B}{k}\right)du$$

elde edilir. $u=kt-1$ değişken dönüşümünü kullanırsak, $u=kt-1\Rightarrow t=\frac{u+1}{k},\ dt=\frac{1}{k}du$ olur.

$u=0\Rightarrow t=\frac{1}{k},\ u=1\Rightarrow t=\frac{2}{k}$ olacağından

$$\int_{\frac{1}{k}}^{\frac{2}{k}} f\left((1-t)A+tB\right)dt = \frac{1}{k}\int_0^1 f\left(\left(1-\frac{u+1}{k}\right)A+\frac{u+1}{k}B\right)du$$

$$= \frac{1}{k}\int_0^1 f\left(A-\frac{Au}{k}-\frac{A}{k}+\frac{Bu}{k}+\frac{B}{k}\right)du \qquad (7.5)$$

$$= \frac{1}{k}\int_0^1 f\left((1-u)\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)+u\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)du$$

elde edilir ve işlemlere bu şekilde devam edilirse $u=kt-(k-1)$ değişken dönüşümünü kullanırsak, $u=kt-(k-1)\Rightarrow t=\frac{u+(k-1)}{k}$, $dt=\frac{1}{k}du$ olur.

$u=0\Rightarrow t=\frac{k-1}{k}$, $u=1\Rightarrow t=1$ olacağından

$$\int_{\frac{k-1}{k}}^{1} f\left((1-t)A+tB\right)dt = \frac{1}{k}\int_0^1 f\left(\left(1-\frac{u+k-1}{k}\right)A+\frac{u+k-1}{k}B\right)du$$

$$= \frac{1}{k}\int_0^1 f\left(A-\frac{Au}{k}-A+\frac{A}{k}+\frac{Bu}{k}+B-\frac{B}{k}\right)du \qquad (7.6)$$

$$= \frac{1}{k}\int_0^1 f\left((1-u)\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)+uB\right)du.$$

elde edilir.

Hermite- Hadamard eşitsizliği kullanılarak

$$f\left(\frac{A+\frac{(k-1)A+B}{k}}{2}\right) = f\left(\frac{(2k-1)A+B}{2k}\right)$$

$$\le \int_0^1 f\left((1-u)A+u\frac{(k-1)A+B}{k}\right)du \qquad (7.7)$$

$$\le \frac{1}{2}\left[f(A)+f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)\right],$$

$$f\left(\frac{\frac{(k-1)A+B}{k}+\frac{(k-2)A+2B}{k}}{2}\right)=f\left(\frac{(2k-3)A+3B}{2k}\right)$$

$$\leq \int_0^1 f\left((1-u)\frac{(k-1)A+B}{k}+u\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)du \qquad (7.8)$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)+f\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)\right],$$

$$f\left(\frac{\frac{(k-2)A+2B}{k}+\frac{(k-3)A+3B}{k}}{2}\right)=f\left(\frac{(2k-5)A+5B}{2k}\right)$$

$$\leq \int_0^1 f\left((1-u)\frac{(k-2)A+2B}{k}+u\frac{(k-3)A+3B}{k}\right)du \qquad (7.9)$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)+f\left(\frac{(k-3)A+3B}{k}\right)\right],$$

.

.

.

$$f\left(\frac{\frac{A+(k-1)B}{k}+B}{2}\right)=f\left(\frac{A+(2k-1)B}{2k}\right)$$

$$\leq \int_0^1 f\left((1-u)\frac{A+(k-1)B}{k}+uB\right)du \qquad (7.10)$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)+f\left(B\right)\right]$$

eşitsizlikleri elde edilir. (7.7), (7.8), (7.9), (7.10) ve aradaki diğer eşitsizlikler toplanarak

$$
\begin{aligned}
&f\left(A+\frac{(k-1)A+B}{k}\right)+f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}+\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)\\
&+f\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}+\frac{(k-3)A+3B}{k}\right)+\cdots+f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}+\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)\\
&\le k\int_0^1 f\left((1-t)A+tB\right)dt\\
&\le\frac{1}{2}\left[f(A)+2f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)+2f\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)+\cdots+2f\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)+f(B)\right]
\end{aligned}
\tag{7.11}
$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliği toplam sembolü altında yazarsak

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} f\left(\frac{\frac{A(k-i)+iB}{k}+\frac{A(k-i-1)+(i+1)B}{k}}{2}\right)\\
&\le\int_0^1 f\left((1-t)A+tB)\right)dt\\
&\le\frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{k} f\left(\frac{A(k-i)+iB}{k}\right)+f\left(\frac{A(k-i-1)+(i+1)B}{k}\right)\\
&=\frac{1}{k}\left[\frac{f(A)+f(B)}{2}+\sum_{i=1}^{k-1} f\left(\frac{(k-i)A+iB}{k}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{7.12}
$$

veya

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} f\left(\frac{\left(2k-2i-1\right)A+(2i+1)B}{2k}\right)\\
&\le\int_0^1 f\left((1-t)A+tB)\right)dt\\
&\le\frac{1}{k}\left[\frac{f(A)+f(B)}{2}+\sum_{i=1}^{k-1} f\left(\frac{(k-i)A+iB}{k}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{7.13}
$$

eşitsizlikleri elde edilir.

(7.1) eşitsizliğinin sol tarafında $k=1$ alınırsa $f\left(\frac{A+B}{2}\right)$ elde edilir ve (7.1) eşitsizliğinin sağ tarafındaki eşitsizlik $k=2$ alınırsa sağlanır.

2. $x \in H$ (Hilbert uzay), $\|x\| = 1$ ve A ve B spektrumları I aralığında bulunan herhangi Hermityen operatörler olsun. Reel değerli $\varphi_{x,A,B} : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\varphi_{x,A,B}(t) = \langle f((1-t)A + tB)x, x \rangle$ ile verilsin. f operatör konveks bir fonksiyon olduğundan, $t_1, t_2 \in [0,1]$ ve $\alpha, \beta \geq 0$ olmak üzere $\alpha + \beta = 1$ iken

$$\begin{aligned} \varphi_{x,A,B}(\alpha t_1 + \beta t_2) &= \langle f((1-(\alpha t_1 + \beta t_2))A + (\alpha t_1 + \beta t_2)B)x, x \rangle \\ &= \langle f(\alpha[(1-t_1)A + t_1 B] + \beta[(1-t_2)A + t_2 B])x, x \rangle \\ &\leq \alpha \langle f([(1-t_1)A + t_1 B])x, x \rangle + \beta \langle f([(1-t_2)A + t_2 B])x, x \rangle \\ &= \alpha \varphi_{x,A,B}(t_1) + \beta \varphi_{x,A,B}(t_2) \end{aligned} \tag{7.14}$$

eşitsizliği vardır ve $\varphi_{x,A,B}$ fonksiyonunun $[0,1]$ üzerinde konveks olduğunu gösterir. Reel değerli fonksiyonlar için

$$g\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g(s)ds \leq \frac{g(a)+g(b)}{2} \tag{7.15}$$

Hermite-Hadamard eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} \varphi_{x,A,B}\left(\frac{1}{2k}\right) &\leq k\int_0^{\frac{1}{k}} \varphi_{x,A,B}(t)dt \leq \frac{\varphi_{x,A,B}(0) + \varphi_{x,A,B}(1/k)}{2} \\ \varphi_{x,A,B}\left(\frac{3}{2k}\right) &\leq k\int_{\frac{1}{k}}^{\frac{2}{k}} \varphi_{x,A,B}(t)dt \leq \frac{\varphi_{x,A,B}(1/k) + \varphi_{x,A,B}(2/k)}{2} \\ &\vdots \\ \varphi_{x,A,B}\left(\frac{2k-1}{2k}\right) &\leq k\int_{\frac{k-1}{k}}^{1} \varphi_{x,A,B}(t)dt \leq \frac{\varphi_{x,A,B}(k-1/k) + \varphi_{x,A,B}(1)}{2} \end{aligned} \tag{7.16}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

(7.16)'daki eşitsizlikleri toplarsak ve $\frac{1}{k}$ ile çarparsak

$$\frac{1}{k}\left[\varphi_{x,A,B}\left(\frac{1}{2k}\right)+\varphi_{x,A,B}\left(\frac{3}{2k}\right)+\cdots+\varphi_{x,A,B}\left(\frac{2k-1}{2k}\right)\right]$$
$$\leq\int_0^1\varphi_{x,A,B}(t)dt \tag{7.17}$$
$$\leq\frac{1}{k}\left[\frac{\varphi_{x,A,B}(0)+\varphi_{x,A,B}(1)}{2}+\varphi_{x,A,B}\left(\frac{1}{k}\right)+\varphi_{x,A,B}\left(\frac{2}{k}\right)+\cdots+\varphi_{x,A,B}\left(\frac{k-1}{k}\right)\right]$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{1}{k}\left\langle\left[\begin{array}{l}f\left(\left(1-\frac{1}{2k}\right)A+\frac{1}{2k}B\right)+f\left(\left(1-\frac{3}{2k}\right)A+\frac{3}{2k}B\right)\\+\cdots+f\left(\left(1-\frac{2k-1}{2k}\right)A+\frac{2k-1}{2k}B\right)\end{array}\right]x,x\right\rangle$$
$$\leq\int_0^1\left\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle dt \tag{7.18}$$
$$\leq\frac{1}{k}\left\langle\left[\begin{array}{l}\frac{f(A)+f(B)}{2}+f\left(\left(1-\frac{1}{k}\right)A+\frac{1}{k}B\right)+f\left(\left(1-\frac{2}{k}\right)A+\frac{2}{k}B\right)\\+\cdots+f\left(\left(1-\frac{k-1}{k}\right)A+\frac{k-1}{k}B\right)\end{array}\right]x,x\right\rangle$$

yazılabilir. (7.18) eşitsizliğini düzenlersek,

$$\frac{1}{k}\left\langle\left[\sum_{i=0}^{k-1}f\left(\frac{(2k-2i-1)A+(2i+1)B}{2k}\right)\right]x,x\right\rangle$$
$$\leq\int_0^1\left\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle dt \tag{7.19}$$
$$\leq\frac{1}{k}\left\langle\left[\frac{f(A)+f(B)}{2}+\sum_{i=0}^{k-1}f\left(\frac{(k-i)A+iB}{k}\right)\right]x,x\right\rangle$$

eşitsizliği elde edilir. Son olarak, f fonksiyonunun sürekliliğinden herhangi A ve B, spektrumları I aralığında bulunan Hermityen operatörler ve $x\in H$ olmak üzere

$$\int_0^1\left\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle dt=\left\langle\int_0^1 f\left((1-t)A+tB\right)dtx,x\right\rangle \tag{7.20}$$

elde edilir. Böylece (7.19) eşitsizliğinden (7.1) eşitsizliği elde edilmiş olur.

Not 7.1.2. Teorem 7.1.1'deki eşitsizlik (6.48) eşitsizliğinden daha geneldir. Teorem 7.1.1'de $k=2$ alırsak, (6.48) eşitsizliği elde edilir.

Not 7.1.3. Teorem 7.1.1'deki eşitsizlik (6.65) eşitsizliğinden daha geneldir. Teorem 7.1.1'de $k=2^n$ alırsak, (6.65) eşitsizliği elde edilir. (6.65) eşitsizliğinde $k=\mathbb{R}-2^n,\ n=0,1,2,...$ durumları yoktur. Fakat Teorem 7.1.1'de bu ifadeler de vardır.

Örnek 7.1.4. A ve B spektrumları I aralığında bulunan Hermityen matrisler olsun. $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ ve $f(x)=x^2$ olarak seçelim. (6.48) eşitsizliği,

$$X=\begin{bmatrix}\frac{21}{16} & \frac{9}{16}\\ \frac{9}{16} & \frac{9}{8}\end{bmatrix}\le\int_0^1 f\left((1-t)A+tB\right)dt\le\begin{bmatrix}\frac{11}{8} & \frac{3}{8}\\ \frac{3}{8} & \frac{7}{4}\end{bmatrix}=Y$$

ve $k=3$ için (7.1) eşitsizliği,

$$Z=\begin{bmatrix}\frac{143}{108} & \frac{19}{36}\\ \frac{19}{36} & \frac{67}{54}\end{bmatrix}\le\int_0^1 f\left((1-t)A+tB\right)dt\le\begin{bmatrix}\frac{73}{54} & \frac{4}{9}\\ \frac{4}{9} & \frac{41}{27}\end{bmatrix}=T$$

eşitsizliklerine dönüşür. $Z-X\ge 0$ ve $Y-T\ge 0$ olduğunu göstermemiz gerekir. Bir matrisin pozitif yarı tanımlı olması için gerek ve yeter şart Hermityen olması ve tüm öz değerlerinin negatif olmaması gerekir.(Bhatia,2007)

$Z-X=\begin{bmatrix}\frac{5}{432} & \frac{-5}{144}\\ \frac{-5}{144} & \frac{25}{216}\end{bmatrix}$'dır ve $Z-X$'in öz değerleri $\frac{55}{864}+\frac{5\sqrt{13}}{288}, \frac{55}{864}-\frac{5\sqrt{13}}{288}$'dir.

Böylece $Z-X$'in öz değerleri negatif olmadığından $Z-X$ pozitiftir. Benzer şekilde

$Y-T=\begin{bmatrix} \frac{5}{16} & \frac{-5}{72} \\ \frac{-5}{72} & \frac{25}{108} \end{bmatrix}$'dir ve $Y-T$'nin öz değerleri $\frac{55}{432}+\frac{5\sqrt{13}}{144},\frac{55}{432}-\frac{5\sqrt{13}}{144}$'dir.

Böylece $Y-T$'in öz değerleri negatif olmadığından $Y-T$ pozitiftir.

Örneği öz değerler bakımından inceleyebiliriz: Tanımlanan A, B matrisleri ve $f(x)=x^2$ fonksiyonu altında (6.48) eşitsizliğinde $\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{3A+B}{4}\right)+f\left(\frac{A+3B}{4}\right)\right]$ ifadesinin öz değerleri $\frac{39}{32}+\frac{3\sqrt{37}}{32},\frac{39}{32}-\frac{3\sqrt{37}}{32}$ ve $\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{A+B}{2}\right)+\frac{f(A)+f(B)}{2}\right]$ ifadesinin öz değerleri $\frac{25}{16}+\frac{3\sqrt{5}}{16},\frac{25}{16}-\frac{3\sqrt{5}}{16}$'dır. Teorem 7.1.1'de $k=3$ alırsak, $\frac{1}{3}\left[f\left(\frac{5A+B}{6}\right)+f\left(\frac{A+B}{2}\right)+f\left(\frac{A+5B}{6}\right)\right]$ ifadesinin öz değerleri $\frac{277}{216}+\frac{\sqrt{1453}}{72},\frac{277}{216}-\frac{\sqrt{1453}}{72}$ ve $\frac{1}{3}\left[f\left(\frac{2A+B}{3}\right)+f\left(\frac{A+2B}{3}\right)+\frac{f(A)+f(B)}{2}\right]$ ifadesinin öz değerleri de $\frac{155}{108}+\frac{\sqrt{265}}{36},\frac{155}{108}-\frac{\sqrt{265}}{36}$ olarak bulunur. Bu şartlar altında (6.48) eşitsizliği,

$$1,789\le\lambda_1\left(\int_0^1 f\left((1-t)A+tB\right)dt\right)\le 1,981$$

$$0,684\le\lambda_n\left(\int_0^1 f\left((1-t)A+tB\right)dt\right)\le 1,143$$

ve Teorem 7.1.1,

$$1,811\le\lambda_1\left(\int_0^1 f\left((1-t)A+tB\right)dt\right)\le 1,887$$

$$0,752\le\lambda_n\left(\int_0^1 f\left((1-t)A+tB\right)dt\right)\le 0,982$$

eşitsizliklerine dönüşür. Burada λ_1 en büyük öz değer ve λ_n en küçük öz değerdir. Yukarıdaki eşitsizliklerden Teorem 7.1.1'in (6.48) eşitsizliğinden daha kuvvetli bir eşitsizlik olduğu görülür. k'yi alabildiğimiz en büyük sayı olarak alırsak $\int_0^1 f\left((1-t)A+tB\right)dt$'nin sonucuna daha kesin olarak ulaşırız.

Teorem 7.1.5. $f,g:I\to\mathbb{R}$, I aralığında tanımlı operatör konveks, negatif olmayan fonksiyonlar olsun. Spektrumları I aralığında bulunan herhangi A ve B Hermityen operatörler ve $t\in[0,1]$ için $M(A,B)=\langle f(A)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle+\langle f(B)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle$, $N(A,B)=\langle f(A)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle+\langle f(B)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle$ olmak üzere

$$\int_0^1\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\rangle\langle g\left((1-t)A+tB\right)x,x\rangle dt\le\frac{1}{3}M(A,B)+\frac{1}{6}N(A,B) \tag{7.21}$$

eşitsizliği vardır.

İspat: $x\in H$, $\|x\|=1$ ve A ve B spektrumları I aralığında bulunan herhangi Hermityen operatörler olsun. Reel değerli $\varphi_{x,A,B}:[0,1]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\varphi_{x,A,B}(t)=\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\rangle$ ve $\psi_{x,A,B}:[0,1]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\psi_{x,A,B}(t)=\langle g\left((1-t)A+tB\right)x,x\rangle$ ile verilsin. f ve g operatör konveks fonksiyonlar olduğundan, her $t\in[0,1]$ için

$$\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\rangle\le(1-t)\langle f(A)x,x\rangle+t\langle f(B)x,x\rangle, \tag{7.22}$$

$$\langle g\left((1-t)A+tB\right)x,x\rangle\le(1-t)\langle g(A)x,x\rangle+t\langle g(B)x,x\rangle \tag{7.23}$$

eşitsizlikleri vardır. (7.22) ve (7.23)'ten

$$\begin{aligned}&\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\rangle\langle g\left((1-t)A+tB\right)x,x\rangle\\&\le(1-t)^2\langle f(A)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle+t^2\langle f(B)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle\\&+t(1-t)\left[\langle f(A)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle+\langle f(B)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle\right]\end{aligned} \tag{7.24}$$

eşitsizliği elde edilir. $\varphi_{x,A,B}(t)$ ve $\psi_{x,A,B}(t)$ fonksiyonları $[0,1]$ üzerinde operatör konveks olduklarından, $[0,1]$ üzerinde integrallenebilirdir ve sonuç olarak $\varphi_{x,A,B}(t)\psi_{x,A,B}(t)$ çarpımı da $[0,1]$ üzerinde integrallenebilirdir. (7.24) eşitsizliğinin her iki tarafı $[0,1]$ üzerinden integrallenirse

$$\int_0^1 \langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\rangle\langle g\left((1-t)A+tB\right)x,x\rangle dt$$
$$\leq \langle f(A)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle\int_0^1 (1-t)^2 dt + \langle f(B)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle\int_0^1 t^2 dt \tag{7.25}$$
$$+\left[\langle f(A)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle + \langle f(B)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle\right]\int_0^1 t(1-t)dt$$

elde edilir.

$$\int_0^1 (1-t)^2 dt = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3},\ \int_0^1 t(1-t)dt = \frac{1}{6}$$

olduğundan (7.25) eşitsizliğinde yerlerine koyulursa istenen eşitsizlik elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Not 7.1.6. (7.21) eşitsizliğinde $x=(1-t)A+tB$, $a=0,\ b=1$ alınırsa (6.10) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 7.1.7. $f,g:I\to\mathbb{R}$, I aralığında tanımlı operatör konveks, negatif olmayan fonksiyonlar olsun. Spektrumları I aralığında bulunan herhangi A ve B Hermityen operatörler ve $t\in[0,1]$ için k adım sayısı ve $\frac{(k-i)A+iB}{k}=Z_1$, $\frac{(k-(i+1))A+(i+1)B}{k}=T_2$ olmak üzere

$$\int_0^1 \langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\rangle\langle g\left((1-t)A+tB\right)x,x\rangle dt$$
$$\leq \frac{1}{3k}\left(\langle f(A)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle + \langle f(B)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle\right)$$
$$+\frac{2}{3k}\sum_{i=1}^{k-1}\langle f\left(Z_1\right)x,x\rangle\langle g\left(Z_1\right)x,x\rangle \tag{7.26}$$
$$+\frac{1}{6k}\sum_{i=0}^{k-1}\left[\langle f\left(Z_1\right)x,x\rangle\langle g\left(T_2\right)x,x\rangle + \langle f\left(T_2\right)x,x\rangle\langle g\left(Z_1\right)x,x\rangle\right]$$

eşitsizliği vardır.

İspat: $x \in H$, $\|x\| = 1$ ve A ve B spektrumları I aralığında bulunan herhangi Hermityen operatörler olsun. f ve g 'nin konveksliği ve Teorem 7.1.1'deki gibi $u = kt$ değişken dönüşümü kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\left\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle &= \left\langle f\left(\left(1-\frac{u}{k}\right)A+\frac{u}{k}B\right)x,x\right\rangle \\ &= \left\langle f\left((1-u)A+u\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle \\ &\le (1-u)\left\langle f(A)x,x\right\rangle + u\left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\end{aligned} \tag{7.27}$$

ve

$$\begin{aligned}\left\langle g\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle &= \left\langle g\left(\left(1-\frac{u}{k}\right)A+\frac{u}{k}B\right)x,x\right\rangle \\ &= \left\langle g\left((1-u)A+u\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle \\ &\le (1-u)\left\langle g(A)x,x\right\rangle + u\left\langle g\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\end{aligned} \tag{7.28}$$

elde edilir. (7.27) ve (7.28) taraf tarafa çarpılırsa,

$$\begin{aligned}&\left\langle f\left((1-u)A+u\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left((1-u)A+u\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle \\ &\le (1-u)^2\left\langle f(A)x,x\right\rangle\left\langle g(A)x,x\right\rangle + u^2\left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle \\ &+u(1-u)\left(\left\langle f(A)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle + \left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g(A)x,x\right\rangle\right)\end{aligned} \tag{7.29}$$

elde edilir. f ve g 'nin konveksliği ve $u = kt - 1$ değişken dönüşümü kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\left\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle &= \left\langle f\left(\left(1-\frac{u+1}{k}\right)A+\frac{u+1}{k}B\right)x,x\right\rangle \\ &= \left\langle f\left((1-u)\frac{(k-1)A+B}{k}+u\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle \\ &\le (1-u)\left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle+u\left\langle f\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\end{aligned} \tag{7.30}$$

ve

$$\begin{aligned}\left\langle g\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle &= \left\langle g\left(\left(1-\frac{u+1}{k}\right)A+\frac{u+1}{k}B\right)x,x\right\rangle \\ &= \left\langle g\left((1-u)\frac{(k-1)A+B}{k}+u\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle \\ &\le (1-u)\left\langle g\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle+u\left\langle g\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\end{aligned} \tag{7.31}$$

elde edilir. (7.30) ve (7.31)'den

$$\begin{aligned}&\left\langle f\left((1-u)\tfrac{(k-1)A+B}{k}+u\tfrac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left((1-u)\tfrac{(k-1)A+B}{k}+u\tfrac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle \\ &\le (1-u)^2\left\langle f\left(\tfrac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\tfrac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle+u^2\left\langle f\left(\tfrac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\tfrac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle \\ &+u(1-u)\left(\left\langle f\left(\tfrac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\tfrac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle+\left\langle f\left(\tfrac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\tfrac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\right)\end{aligned} \tag{7.32}$$

elde edilir. İşlemlere bu şekilde $u=kt-(k-1)$ değişkenine kadar devam edilir. f ve g'nin konveksliği ve $u=kt-(k-1)$ değişken dönüşümü kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\left\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle &= \left\langle f\left(\left(1-\frac{u+k-1}{k}\right)A+\frac{u+k-1}{k}B\right)x,x\right\rangle \\ &= \left\langle f\left((1-u)\frac{A+(k-1)B}{k}+uB\right)x,x\right\rangle \\ &\le (1-u)\left\langle f\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle+u\left\langle f\left(B\right)x,x\right\rangle\end{aligned} \tag{7.33}$$

ve

$$\begin{aligned}\left\langle g\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle &= \left\langle g\left(\left(1-\frac{u+k-1}{k}\right)A+\frac{u+k-1}{k}B\right)x,x\right\rangle \\ &= \left\langle g\left((1-u)\frac{A+(k-1)B}{k}+uB\right)x,x\right\rangle \\ &\le (1-u)\left\langle g\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle + u\left\langle g\left(B\right)x,x\right\rangle\end{aligned} \tag{7.34}$$

elde edilir. (7.33) ve (7.34)'ten

$$\begin{aligned}&\left\langle f\left((1-u)\frac{A+(k-1)B}{k}+uB\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left((1-u)\frac{A+(k-1)B}{k}+uB\right)x,x\right\rangle \\ &\le (1-u)^2\left\langle f\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle + u^2\left\langle f(B)x,x\right\rangle\left\langle g(B)x,x\right\rangle \\ &+u(1-u)\left(\left\langle f\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g(B)x,x\right\rangle + \left\langle f(B)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\right)\end{aligned} \tag{7.35}$$

bulunur. (7.29) eşitsizliğinin her iki tarafı integrallenirse

$$\begin{aligned}&\int_0^{1/k}\left\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle dt \\ &= \frac{1}{k}\int_0^1\left\langle f\left((1-u)A+u\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left((1-u)A+u\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle du \\ &\le \frac{1}{k}\left\langle f(A)x,x\right\rangle\left\langle g(A)x,x\right\rangle\int_0^1(1-u)^2\,du \\ &+\frac{1}{k}\left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\int_0^1 u^2\,du \\ &+\frac{1}{k}\left(\left\langle f(A)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle + \left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g(A)x,x\right\rangle\right)\int_0^1 u(1-u)\,du\end{aligned} \tag{7.36}$$

eşitsizliği elde edilir. (7.32) eşitsizliğinin her iki tarafı integrallenirse,

$$
\begin{aligned}
&\int_{1/k}^{2/k} \left\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle \left\langle g\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle dt \\
&= \frac{1}{k}\int_0^1 \left\langle f\left((1-u)\frac{(k-1)A+B}{k}+u\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle \left\langle g\left((1-u)\frac{(k-1)A+B}{k}+u\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle du \\
&\le \frac{1}{k}\left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle \left\langle g\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle \int_0^1 (1-u)^2\,du \\
&+ \frac{1}{k}\left\langle f\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle \left\langle g\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle \int_0^1 u^2\,du \\
&+ \frac{1}{k}\left(\begin{array}{l}\left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle \left\langle g\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle \\ +\left\langle f\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle \left\langle g\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\end{array}\right)\int_0^1 u(1-u)\,du
\end{aligned}
\tag{7.37}
$$

elde edilir. İşlemlere bu şekilde devam edilir. (7.35) eşitsizliğinin her iki tarafı integrallenirse

$$
\begin{aligned}
&\int_{\frac{k-1}{k}}^{1} \left\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle \left\langle g\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle dt \\
&= \frac{1}{k}\int_0^1 \left\langle f\left((1-u)\frac{A+(k-1)B}{k}+uB\right)x,x\right\rangle \left\langle g\left((1-u)\frac{A+(k-1)B}{k}+uB\right)x,x\right\rangle du \\
&\le \frac{1}{k}\left\langle f\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle \left\langle g\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle \int_0^1 (1-u)^2\,du \\
&+ \frac{1}{k}\left\langle f(B)x,x\right\rangle \left\langle g(B)x,x\right\rangle \int_0^1 u^2\,du \\
&+ \frac{1}{k}\left(\left\langle f\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle \left\langle g(B)x,x\right\rangle + \left\langle f(B)x,x\right\rangle \left\langle g\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\right)\int_0^1 u(1-u)\,du
\end{aligned}
\tag{7.38}
$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece aradaki işlemler de hesaba katılınca toplamda k tane eşitsizlik elde edilir. Bu eşitsizlikler sırasıyla $\left[0,\frac{1}{k}\right),\left(\frac{1}{k},\frac{2}{k}\right),\ldots,\left(\frac{k-1}{k},1\right]$ aralıklarında tanımlıdır. Bu k tane eşitsizliğin integral kısımlarının toplamı $\int_0^1 f\left((1-t)A+tB\right)g\left((1-t)A+tB\right)dt$ integralini oluşturur ve diğer eşitsizliğin sol ve sağ kısımlarını da toplam sembolleri altında gösterebiliriz ve böylece (7.26) eşitsizliği elde edilmiş olur.

Not 7.1.8. (7.26) eşitsizliği, (7.21) eşitsizliğinin genel bir formudur. (7.26)'da $k=1$ alınırsa (7.21) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 7.1.9. $f,g:I\to\mathbb{R}$, I aralığında tanımlı operatör konveks, negatif olmayan fonksiyonlar olsun. Spektrumları I aralığında bulunan herhangi A ve B Hermityen operatörler, $t\in[0,1]$ için k adım sayısı ve $\frac{(k-i)A+iB}{k}=Z_1$, $\frac{(i+1)A+(k-(i+1))B}{k}=T_1$, $\frac{iA+(k-i)B}{k}=Z_2$, $\frac{(k-(i+1))A+(i+1)B}{k}=T_2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\\
&\le\frac{1}{2}\int_0^1\left\langle f\left(tA+(1-t)B\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(tA+(1-t)B\right)x,x\right\rangle dt\\
&+\frac{1}{24k}\left[\sum_{i=0}^{k-1}\left\langle f\left(Z_1\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(T_1\right)x,x\right\rangle+\left\langle f\left(Z_2\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(T_2\right)x,x\right\rangle\right.\\
&\left.+\left\langle f\left(T_1\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(Z_1\right)x,x\right\rangle+\left\langle f\left(Z_2\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(T_2\right)x,x\right\rangle\right]\\
&+\frac{1}{12k}\left[\sum_{i=0}^{k-1}\left\langle f\left(Z_1\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(Z_2\right)x,x\right\rangle+\left\langle f\left(T_2\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(T_1\right)x,x\right\rangle\right.\\
&\left.+\left\langle f\left(T_1\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(T_2\right)x,x\right\rangle+\left\langle f\left(Z_2\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(Z_1\right)x,x\right\rangle\right]
\end{aligned}\tag{7.39}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: $x\in H$, $\|x\|=1$ ve A ve B spektrumları I aralığında bulunan herhangi Hermityen operatörler olsun. f ve g 'nin konveksliği ve Teorem 7.1.1'deki gibi $u=kt$ değişken dönüşümü kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\left\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle&=\left\langle f\left(\left(1-\frac{u}{k}\right)A+\frac{u}{k}B\right)x,x\right\rangle\\
&=\left\langle f\left((1-u)A+u\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\\
&\le(1-u)\left\langle f(A)x,x\right\rangle+u\left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle
\end{aligned}\tag{7.40}$$

ve

$$\begin{aligned}\left\langle f\left(tA+(1-t)B\right)x,x\right\rangle &= \left\langle f\left(\frac{u}{k}A+\left(1-\frac{u}{k}\right)B\right)x,x\right\rangle \\ &= \left\langle f\left(u\frac{A+(k-1)B}{k}+(1-u)B\right)x,x\right\rangle \\ &\le u\left\langle f\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle+(1-u)\left\langle f(B)x,x\right\rangle\end{aligned} \tag{7.41}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Benzer şekilde $u=kt-1$ değişken dönüşümü kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\left\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle &= \left\langle f\left(\left(1-\frac{u+1}{k}\right)A+\frac{u+1}{k}B\right)x,x\right\rangle \\ &= \left\langle f\left((1-u)\frac{(k-1)A+B}{k}+u\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle \\ &\le (1-u)\left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle+u\left\langle f\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\end{aligned} \tag{7.42}$$

ve

$$\begin{aligned}\left\langle f\left(tA+(1-t)B\right)x,x\right\rangle &= \left\langle f\left(\frac{u+1}{k}A+\left(1-\frac{u+1}{k}\right)B\right)x,x\right\rangle \\ &= \left\langle f\left(u\frac{2A+(k-2)B}{k}+(1-u)\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle \\ &\le u\left\langle f\left(\frac{2A+(k-2)B}{k}\right)x,x\right\rangle+(1-u)\left\langle f\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\end{aligned} \tag{7.43}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Benzer şekilde $u=kt-2, u=kt-3, ..., u=kt-(k-2)$ değişken dönüşümleri yapılır. $u=kt-(k-1)$ değişken dönüşümüyle,

$$\begin{aligned}\left\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle &= \left\langle f\left(\left(1-\frac{u+k-1}{k}\right)A+\frac{u+k-1}{k}B\right)x,x\right\rangle \\ &= \left\langle f\left((1-u)\frac{A+(k-1)B}{k}+uB\right)x,x\right\rangle \\ &\le (1-u)\left\langle f\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle+u\left\langle f\left(B\right)x,x\right\rangle\end{aligned} \tag{7.44}$$

ve

$$\begin{aligned}\left\langle f\left(tA+(1-t)B\right)x,x\right\rangle &= \left\langle f\left(\frac{u+k-1}{k}A+\left(1-\frac{u+k-1}{k}\right)B\right)x,x\right\rangle \\ &= \left\langle f\left(uA+(1-u)\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle \\ &\le u\left\langle f\left(A\right)x,x\right\rangle+(1-u)\left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\end{aligned} \tag{7.45}$$

eşitsizlikleri elde edilir. f ve g 'nin konveksliğinden

$$\begin{aligned}\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle &= \left\langle f\left(\frac{tA+(1-t)B}{2}+\frac{(1-t)A+tB}{2}\right)x,x\right\rangle \\ &\le \frac{\left\langle f\left(tA+(1-t)B\right)x,x\right\rangle+\left\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle}{2}\end{aligned} \tag{7.46}$$

ve

$$\begin{aligned}\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle &= \left\langle g\left(\frac{tA+(1-t)B}{2}+\frac{(1-t)A+tB}{2}\right)x,x\right\rangle \\ &\le \frac{\left\langle g\left(tA+(1-t)B\right)x,x\right\rangle+\left\langle g\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle}{2}\end{aligned} \tag{7.47}$$

eşitsizlikleri bulunur. İlk olarak $u=kt$ değişken dönüşümünde elde edilen değerler bu eşitsizliklerde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle &\le \frac{\left\langle f\left(tA+(1-t)B\right)x,x\right\rangle+\left\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle}{2} \\ &= \frac{\left\langle f\left(u\frac{A+(k-1)B}{k}+(1-u)B\right)x,x\right\rangle+\left\langle f\left((1-u)A+u\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle}{2}\end{aligned} \tag{7.48}$$

ve

$$\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle \le \frac{\left\langle g\left(tA+(1-t)B\right)x,x\right\rangle+\left\langle g\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle}{2}$$
$$= \frac{\left\langle g\left(u\dfrac{A+(k-1)B}{k}+(1-u)B\right)x,x\right\rangle+\left\langle g\left((1-u)A+u\dfrac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle}{2} \quad (7.49)$$

eşitsizlikleri elde edilir. (7.48) ve (7.49) eşitsizlikleri taraf tarafa çarpılırsa ve $u\frac{A+(k-1)B}{k}+(1-u)B=X_1$, $(1-u)A+u\frac{(k-1)A+B}{k}=Y_1$ alınırsa,

$$\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle$$
$$\le \frac{1}{4}\left(\left\langle f\left(X_1\right)x,x\right\rangle+\left\langle f\left(Y_1\right)x,x\right\rangle\right)\left(\left\langle g\left(X_1\right)x,x\right\rangle+\left\langle g\left(Y_1\right)x,x\right\rangle\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left[\begin{array}{l}\left\langle f\left(X_1\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(X_1\right)x,x\right\rangle+\left\langle f\left(X_1\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(Y_1\right)x,x\right\rangle\\+\left\langle f\left(Y_1\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(X_1\right)x,x\right\rangle+\left\langle f\left(Y_1\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(Y_1\right)x,x\right\rangle\end{array}\right]$$
$$\le \frac{1}{4}\left[\left\langle f\left(X_1\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(X_1\right)x,x\right\rangle+\left\langle f\left(Y_1\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(Y_1\right)x,x\right\rangle\right]$$
$$+\frac{1}{4}\left[u\left\langle f\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle+(1-u)\left\langle f(B)x,x\right\rangle\right]\left[(1-u)\left\langle g(A)x,x\right\rangle+u\left\langle g\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\right]$$
$$+\frac{1}{4}\left[(1-u)\left\langle f(A)x,x\right\rangle+u\left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\right]\left[u\left\langle g\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle+(1-u)\left\langle g(B)x,x\right\rangle\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[\left\langle f\left(X_1\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(X_1\right)x,x\right\rangle+\left\langle f\left(Y_1\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(Y_1\right)x,x\right\rangle\right]$$
$$+\frac{1}{4}\left[\begin{array}{l}u(1-u)\left\langle f\left(\dfrac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g(A)x,x\right\rangle\\+u^2\left\langle f\left(\dfrac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\dfrac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\\+(1-u)^2\left\langle f(B)x,x\right\rangle\left\langle g(A)x,x\right\rangle\\+u(1-u)\left\langle f(B)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\dfrac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\end{array}\right]$$
$$+\frac{1}{4}\left[\begin{array}{l}u(1-u)\left\langle f(A)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\dfrac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\\+(1-u)^2\left\langle f(A)x,x\right\rangle\left\langle g(B)x,x\right\rangle\\+u^2\left\langle f\left(\dfrac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\dfrac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\\+u(1-u)\left\langle f\left(\dfrac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g(B)x,x\right\rangle\end{array}\right] \quad (7.50)$$

eşitsizliği elde edilir. (7.50) eşitsizliğinin her iki tarafı $[0,1]$ aralığında u'ya göre integrallenirse,

$$\begin{aligned}
&\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle \\
&\le\frac{k}{4}\left[\int_0^{1/k}\left\langle f\left(tA+(1-t)B\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(tA+(1-t)B\right)x,x\right\rangle dt\right] \\
&+\frac{k}{4}\left[\int_0^{1/k}\left\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle dt\right] \\
&+\frac{1}{24}\left[\left\langle f\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g(A)x,x\right\rangle+\left\langle f(B)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\right] \\
&+\frac{1}{12}\left[\left\langle f\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle+\left\langle f(B)x,x\right\rangle\left\langle g(A)x,x\right\rangle\right] \\
&+\frac{1}{24}\left[\left\langle f(A)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle+\left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g(B)x,x\right\rangle\right] \\
&+\frac{1}{12}\left[\left\langle f(A)x,x\right\rangle\left\langle g(B)x,x\right\rangle+\left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\right]
\end{aligned} \tag{7.51}$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde $u=kt-1$ değişken dönüşümü kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\le\frac{\left\langle f\left(tA+(1-t)B\right)x,x\right\rangle+\left\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle}{2} \\
&=\frac{\left\langle f\left(u\dfrac{2A+(k-2)B}{k}+(1-u)\dfrac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle+\left\langle f\left((1-u)\dfrac{(k-1)A+B}{k}+u\dfrac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle}{2}
\end{aligned} \tag{7.52}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\le\frac{\left\langle g\left(tA+(1-t)B\right)x,x\right\rangle+\left\langle g\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle}{2} \\
&=\frac{\left\langle g\left(u\dfrac{2A+(k-2)B}{k}+(1-u)\dfrac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle+\left\langle g\left((1-u)\dfrac{(k-1)A+B}{k}+u\dfrac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle}{2}
\end{aligned} \tag{7.53}$$

eşitsizlikleri bulunur. (7.52) ve (7.53) eşitsizlikleri taraf tarafa çarpılırsa ve

$$u\frac{2A+(k-2)B}{k}+(1-u)\frac{A+(k-1)B}{k}=X_2,\qquad (1-u)\frac{(k-1)A+B}{k}+u\frac{(k-2)A+2B}{k}=Y_2$$

denirse,

$$\begin{aligned}
&\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\\
&\le\frac{1}{4}\left(\left\langle f\left(X_2\right)x,x\right\rangle+\left\langle f\left(Y_2\right)x,x\right\rangle\right)\left(\left\langle g\left(X_2\right)x,x\right\rangle+\left\langle g\left(Y_2\right)x,x\right\rangle\right)\\
&=\frac{1}{4}\left[\begin{array}{l}\left\langle f\left(X_2\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(X_2\right)x,x\right\rangle+\left\langle f\left(X_2\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(Y_2\right)x,x\right\rangle\\+\left\langle f\left(Y_2\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(X_2\right)x,x\right\rangle+\left\langle f\left(Y_2\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(Y_2\right)x,x\right\rangle\end{array}\right]\\
&\le\frac{1}{4}\left[\left\langle f\left(X_2\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(X_2\right)x,x\right\rangle+\left\langle f\left(Y_2\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(Y_2\right)x,x\right\rangle\right]\\
&+\frac{1}{4}\left(\begin{array}{l}\left[(1-u)\left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle+u\left\langle f\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\right]\\\left[u\left\langle g\left(\frac{2A+(k-2)B}{k}\right)x,x\right\rangle+(1-u)\left\langle g\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\right]\end{array}\right)\\
&+\frac{1}{4}\left(\begin{array}{l}\left[u\left\langle f\left(\frac{2A+(k-2)B}{k}\right)x,x\right\rangle+(1-u)\left\langle f\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\right]\\\left[(1-u)\left\langle g\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle+u\left\langle g\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\right]\end{array}\right)\\
&=\frac{1}{4}\left[\left\langle f\left(X_2\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(X_2\right)x,x\right\rangle+\left\langle f\left(Y_2\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(Y_2\right)x,x\right\rangle\right]\\
&+\frac{1}{4}\left[\begin{array}{l}u(1-u)\left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{2A+(k-2)B}{k}\right)x,x\right\rangle\\+u^2\left\langle f\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{2A+(k-2)B}{k}\right)x,x\right\rangle\\+(1-u)^2\left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\\+u(1-u)\left\langle f\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\end{array}\right]\\
&+\frac{1}{4}\left[\begin{array}{l}u(1-u)\left\langle f\left(\frac{2A+(k-2)B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\\+(1-u)^2\left\langle f\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\\+u^2\left\langle f\left(\frac{2A+(k-2)B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\\+u(1-u)\left\langle f\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\end{array}\right]
\end{aligned}\tag{7.54}$$

eşitsizliği elde edilir. (7.54) eşitsizliğinin her iki tarafı $[0,1]$ aralığında u'ya göre integrallenirse,

$$
\begin{aligned}
&\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle \\
&\le\frac{k}{4}\int_0^{2/k}\left\langle f\left(tA+(1-t)B\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(tA+(1-t)B\right)x,x\right\rangle dt \\
&+\frac{k}{4}\int_0^{2/k}\left\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle dt \\
&+\frac{1}{24}\left[\begin{array}{l}\left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{2A+(k-2)B}{k}\right)x,x\right\rangle \\ +\left\langle f\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\end{array}\right] \\
&+\frac{1}{12}\left[\begin{array}{l}\left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle \\ +\left\langle f\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{2A+(k-2)B}{k}\right)x,x\right\rangle\end{array}\right] \\
&+\frac{1}{24}\left[\begin{array}{l}\left\langle f\left(\frac{2A+(k-2)B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle \\ +\left\langle f\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\end{array}\right] \\
&+\frac{1}{12}\left[\begin{array}{l}\left\langle f\left(\frac{2A+(k-2)B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle \\ +\left\langle f\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\end{array}\right]
\end{aligned}
\tag{7.55}
$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde $u=kt-2$, $u=kt-3$, … , $u=kt-(k-2)$, $u=kt-(k-1)$ değişken dönüşümleri için eşitsizlikler elde edilir. (7.51), (7.55) ve diğer değişken dönüşümleriyle elde edilen eşitsizlikler toplanınca istenen eşitsizlik elde edilmiş olur.

Not 7.1.10. Teorem 7.1.9'da elde edilen sonuçta $k=1$ seçilirse (6.11) eşitsizliği elde edilir. Teorem 7.1.9, (6.11) eşitsizliğinin genel halidir. Teorem 7.1.9'da k adım sayısı büyüdükçe eşitsizlik daha kuvvetli hale gelmektedir.

Teorem 7.1.11. $f,g:I\to\mathbb{R}$, I aralığında tanımlı operatör konveks, negatif olmayan fonksiyonlar olsun. Spektrumları I aralığında bulunan herhangi A ve B Hermityen operatörler ve $t\in[0,1]$ için $M(A,B)=\langle f(A)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle+\langle f(B)x,x\rangle\langle f(B)x,x\rangle$, $N(A,B)=\langle f(A)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle+\langle f(B)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\langle g(A)x,x\rangle\int_0^1(1-t)\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\rangle dt\\
&+\langle g(B)x,x\rangle\int_0^1 t\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\rangle dt\\
&+\langle f(A)x,x\rangle\int_0^1(1-t)\langle g\left((1-t)A+tB\right)x,x\rangle dt\\
&+\langle f(B)x,x\rangle\int_0^1 t\langle g\left((1-t)A+tB\right)x,x\rangle dt\\
&\le\int_0^1\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\rangle\langle g\left((1-t)A+tB\right)x,x\rangle dt+\frac{M(A,B)}{3}+\frac{N(A,B)}{6}
\end{aligned}\tag{7.56}$$

eşitsizliği vardır.

İspat: $x\in H$, $\|x\|=1$ ve A ve B spektrumları I aralığında bulunan herhangi Hermityen operatörler olsun. Reel değerli $\varphi_{x,A,B}:[0,1]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\varphi_{x,A,B}(t)=\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\rangle$ ve $\psi_{x,A,B}:[0,1]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\psi_{x,A,B}(t)=\langle g\left((1-t)A+tB\right)x,x\rangle$ ile verilsin. f ve g operatör konveks fonksiyonlar olduğundan, her $t\in[0,1]$ için

$$\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\rangle\le(1-t)\langle f(A)x,x\rangle+t\langle f(B)x,x\rangle,\tag{7.57}$$

$$\langle g\left((1-t)A+tB\right)x,x\rangle\le(1-t)\langle g(A)x,x\rangle+t\langle g(B)x,x\rangle\tag{7.58}$$

eşitsizlikleri vardır. $e,f,p,r\in\mathbb{R}$ için $e\le f$ ve $p\le r$ ise $er+fp\le ep+fr$ eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&\left\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle\left((1-t)\left\langle g(A)x,x\right\rangle+t\left\langle g(B)x,x\right\rangle\right)\\
&+\left\langle g\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle\left((1-t)\left\langle f(A)x,x\right\rangle+t\left\langle f(B)x,x\right\rangle\right)\\
&\le\left\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle\\
&+\left((1-t)\left\langle g(A)x,x\right\rangle+t\left\langle g(B)x,x\right\rangle\right)\left((1-t)\left\langle f(A)x,x\right\rangle+t\left\langle f(B)x,x\right\rangle\right)
\end{aligned}\tag{7.59}$$

eşitsizliğine dönüşür. $\varphi_{x,A,B}(t)$ ve $\psi_{x,A,B}(t)$ fonksiyonları $[0,1]$ üzerinde operatör konveks olduklarından, $[0,1]$ üzerinde integrallenebilirdir ve sonuç olarak $\varphi_{x,A,B}(t)\psi_{x,A,B}(t)$ çarpımı da $[0,1]$ üzerinde integrallenebilirdir. (7.59) eşitsizliğinin her iki tarafı $[0,1]$ üzerinden integrallenirse

$$\begin{aligned}
&\left\langle g(A)x,x\right\rangle\int_0^1(1-t)\left\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle dt\\
&+\left\langle g(B)x,x\right\rangle\int_0^1 t\left\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle dt\\
&+\left\langle f(A)x,x\right\rangle\int_0^1(1-t)\left\langle g\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle dt\\
&+\left\langle f(B)x,x\right\rangle\int_0^1 t\left\langle g\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle dt\\
&\le\int_0^1\left\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle dt\\
&+\left\langle f(A)x,x\right\rangle\left\langle g(A)x,x\right\rangle\int_0^1(1-t)^2dt\\
&+\left[\left\langle f(A)x,x\right\rangle\left\langle g(B)x,x\right\rangle+\left\langle f(B)x,x\right\rangle\left\langle g(A)x,x\right\rangle\right]\int_0^1 t(1-t)dt\\
&+\left\langle f(B)x,x\right\rangle\left\langle g(B)x,x\right\rangle\int_0^1 t^2dt
\end{aligned}\tag{7.60}$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\int_0^1(1-t)^2dt=\int_0^1 t^2dt=\frac{1}{3},\ \int_0^1 t(1-t)dt=\frac{1}{6}$$

olduğundan (7.60) eşitsizliğinde yerlerine konulursa istenen eşitsizlik elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Not 7.1.12. (7.56) eşitsizliğinde $x=(1-t)A+tB, a=0, b=1$ alınırsa (6.20) eşitsizliği elde edilir. Teorem 7.1.11'de verilen sonuç daha geneldir.

Teorem 7.1.13. $f,g:I\to\mathbb{R}$, I aralığında tanımlı operatör konveks, negatif olmayan fonksiyonlar olsun. Spektrumları I aralığında bulunan herhangi A ve B Hermityen operatörler ve $t\in[0,1]$ için k adım sayısı ve $\frac{(k-i)A+iB}{k}=Z_1$, $\frac{(k-(i+1))A+(i+1)B}{k}=T_2$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{k-1}\left[\begin{array}{l}
\left\langle g\left(Z_1\right)x,x\right\rangle\int_0^1\left\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle\left(1-(kt-i)\right)dt\\
+\left\langle g\left(T_2\right)x,x\right\rangle\int_0^1\left\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle(kt-i)dt\\
+\left\langle f\left(Z_1\right)x,x\right\rangle\int_0^1\left\langle g\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle\left(1-(kt-i)\right)dt\\
+\left\langle f\left(T_2\right)x,x\right\rangle\int_0^1\left\langle g\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle(kt-i)dt
\end{array}\right]\\
&\le\int_0^1\left\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle dt\\
&\le\frac{1}{3k}\left(\left\langle f(A)x,x\right\rangle\left\langle g(A)x,x\right\rangle+\left\langle f(B)x,x\right\rangle\left\langle g(B)x,x\right\rangle\right) \qquad (7.61)\\
&+\frac{2}{3k}\sum_{i=1}^{k-1}\left[\left\langle f\left(Z_1\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(Z_1\right)x,x\right\rangle\right]\\
&+\frac{1}{6k}\sum_{i=0}^{k-1}\left[\left\langle f\left(Z_1\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(T_2\right)x,x\right\rangle+\left\langle f\left(T_2\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(Z_1\right)x,x\right\rangle\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği vardır.

İspat: $x\in H$, $\|x\|=1$ ve A ve B spektrumları I aralığında bulunan herhangi Hermityen operatörler olsun. f ve g 'nin konveksliği ve Teorem 7.1.1'deki gibi $u=kt$ değişken dönüşümü kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\left\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle &= \left\langle f\left(\left(1-\frac{u}{k}\right)A+\frac{u}{k}B\right)x,x\right\rangle \\ &= \left\langle f\left((1-u)A+u\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle \\ &\le (1-u)\left\langle f(A)x,x\right\rangle + u\left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\end{aligned} \tag{7.62}$$

ve

$$\begin{aligned}\left\langle g\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle &= \left\langle g\left(\left(1-\frac{u}{k}\right)A+\frac{u}{k}B\right)x,x\right\rangle \\ &= \left\langle g\left((1-u)A+u\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle \\ &\le (1-u)\left\langle g(A)x,x\right\rangle + u\left\langle g\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\end{aligned} \tag{7.63}$$

elde edilir. $e,f,p,r\in\mathbb{R}$ için $e\le f$ ve $p\le r$ ise $er+fp\le ep+fr$ eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}&(1-u)\left\langle f\left((1-u)A+u\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g(A)x,x\right\rangle \\ &+u\left\langle f\left((1-u)A+u\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle \\ &+(1-u)\left\langle g\left((1-u)A+u\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle f(A)x,x\right\rangle \\ &+u\left\langle g\left((1-u)A+u\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle \\ &\le\left\langle f\left((1-u)A+u\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left((1-u)A+u\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle \\ &+(1-u)^2\left\langle f(A)x,x\right\rangle\left\langle g(A)x,x\right\rangle+u^2\left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle \\ &+u(1-u)\left(\left\langle f(A)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle+\left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g(A)x,x\right\rangle\right)\end{aligned} \tag{7.64}$$

elde edilir. f ve g 'nin konveksliği ve $u=kt-1$ değişken dönüşümü kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\left\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle &= \left\langle f\left(\left(1-\frac{u+1}{k}\right)A+\frac{u+1}{k}B\right)x,x\right\rangle \\ &= \left\langle f\left((1-u)\frac{(k-1)A+B}{k}+u\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle \\ &\le (1-u)\left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle+u\left\langle f\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\end{aligned} \tag{7.65}$$

ve

$$\begin{aligned}\left\langle g\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle &= \left\langle g\left(\left(1-\frac{u+1}{k}\right)A+\frac{u+1}{k}B\right)x,x\right\rangle \\ &= \left\langle g\left((1-u)\frac{(k-1)A+B}{k}+u\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle \\ &\le (1-u)\left\langle g\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle+u\left\langle g\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\end{aligned} \tag{7.66}$$

elde edilir.(7.65) ve (7.66)'dan

$$
\begin{aligned}
&(1-u)\left\langle f\left(\left(1-u\right)\frac{(k-1)A+B}{k}+u\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\\
&+u\left\langle f\left(\left(1-u\right)\frac{(k-1)A+B}{k}+u\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\\
&+(1-u)\left\langle g\left(\left(1-u\right)\frac{(k-1)A+B}{k}+u\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\\
&+u\left\langle g\left(\left(1-u\right)\frac{(k-1)A+B}{k}+u\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle f\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\\
&\leq\left[\begin{array}{l}\left\langle f\left(\left(1-u\right)\frac{(k-1)A+B}{k}+u\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\\ \left\langle g\left(\left(1-u\right)\frac{(k-1)A+B}{k}+u\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\end{array}\right]\\
&+(1-u)^2\left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\\
&+u^2\left\langle f\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\\
&+u(1-u)\left(\begin{array}{l}\left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\\ +\left\langle f\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\end{array}\right)
\end{aligned}
\tag{7.67}
$$

elde edilir. İşlemlere bu şekilde $u=kt-(k-1)$ değişkenine kadar devam edilir. f ve g 'nin konveksliği ve $u=kt-(k-1)$ değişken dönüşümü kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
\left\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle&=\left\langle f\left(\left(1-\frac{u+k-1}{k}\right)A+\frac{u+k-1}{k}B\right)x,x\right\rangle\\
&=\left\langle f\left((1-u)\frac{A+(k-1)B}{k}+uB\right)x,x\right\rangle\\
&\leq(1-u)\left\langle f\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle+u\left\langle f\left(B\right)x,x\right\rangle
\end{aligned}
\tag{7.68}
$$

ve

$$\begin{aligned}\left\langle g\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle &= \left\langle g\left(\left(1-\frac{u+k-1}{k}\right)A+\frac{u+k-1}{k}B\right)x,x\right\rangle \\ &= \left\langle g\left((1-u)\frac{A+(k-1)B}{k}+uB\right)x,x\right\rangle \\ &\le (1-u)\left\langle g\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle + u\left\langle g\left(B\right)x,x\right\rangle\end{aligned} \tag{7.69}$$

elde edilir. (7.68) ve (7.69)'dan

$$\begin{aligned}&(1-u)\left\langle f\left((1-u)\frac{A+(k-1)B}{k}+uB\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle \\ &+u\left\langle f\left((1-u)\frac{A+(k-1)B}{k}+uB\right)x,x\right\rangle\left\langle g(B)x,x\right\rangle \\ &+(1-u)\left\langle g\left((1-u)\frac{A+(k-1)B}{k}+uB\right)x,x\right\rangle\left\langle f\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle \\ &+u\left\langle g\left((1-u)\frac{A+(k-1)B}{k}+uB\right)x,x\right\rangle\left\langle f(B)x,x\right\rangle \\ &\le \left\langle f\left((1-u)\frac{A+(k-1)B}{k}+uB\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left((1-u)\frac{A+(k-1)B}{k}+uB\right)x,x\right\rangle \\ &+(1-u)^2\left\langle f\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle + u^2\left\langle f(B)x,x\right\rangle\left\langle g(B)x,x\right\rangle \\ &+u(1-u)\left(\left\langle f\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g(B)x,x\right\rangle + \left\langle f(B)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\right)\end{aligned} \tag{7.70}$$

bulunur. (7.64) eşitsizliğinin her iki tarafı integrallenirse

$$
\begin{aligned}
&\langle g(A)x,x\rangle\int_0^1(1-u)\left\langle f\left((1-u)A+u\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle du\\
&+\left\langle g\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\int_0^1 u\left\langle g\left((1-u)A+u\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle du\\
&\langle f(A)x,x\rangle\int_0^1(1-u)\left\langle g\left((1-u)A+u\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle du\\
&+\left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\int_0^1 u\left\langle f\left((1-u)A+u\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle du\\
&\le\int_0^1\left\langle f\left((1-u)A+u\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left((1-u)A+u\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle du\\
&\le\langle f(A)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle\int_0^1(1-u)^2du\\
&+\left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\int_0^1 u^2du\\
&+\left(\langle f(A)x,x\rangle\left\langle g\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle+\left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\langle g(A)x,x\rangle\right)\int_0^1 u(1-u)du
\end{aligned}
\tag{7.71}
$$

eşitsizliği elde edilir. (7.67) eşitsizliğinin her iki tarafı integrallenirse,

$$
\begin{aligned}
&\left\langle g\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\int_0^1(1-u)\left\langle f\left((1-u)\frac{(k-1)A+B}{k}+u\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle du\\
&+\left\langle g\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\int_0^1 u\left\langle f\left((1-u)\frac{(k-1)A+B}{k}+u\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle du\\
&+\left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\int_0^1(1-u)\left\langle g\left((1-u)\frac{(k-1)A+B}{k}+u\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle du\\
&+\left\langle f\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\int_0^1 u\left\langle g\left((1-u)\frac{(k-1)A+B}{k}+u\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle du\\
&\le\int_0^1\left\langle f\left((1-u)\frac{(k-1)A+B}{k}+u\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left((1-u)\frac{(k-1)A+B}{k}+u\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle du\\
&+\left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\int_0^1(1-u)^2du\\
&+\left\langle f\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\int_0^1 u^2du\\
&+\left(\begin{array}{l}\left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\\+\left\langle f\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\end{array}\right)\int_0^1 u(1-u)du
\end{aligned}
\tag{7.72}
$$

elde edilir. İşlemlere bu şekilde devam edilir. (7.70) eşitsizliğinin her iki tarafı integrallenirse

$$\begin{aligned}
&\left\langle g\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\int_0^1(1-u)\left\langle f\left((1-u)A+u\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle du\\
&+\left\langle g(B)x,x\right\rangle\int_0^1 u\left\langle f\left((1-u)A+u\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle du\\
&+\left\langle f\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\int_0^1(1-u)\left\langle g\left((1-u)A+u\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle du\\
&+\left\langle f(B)x,x\right\rangle\int_0^1 u\left\langle g\left((1-u)A+u\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle du\\
&\le\int_0^1\left\langle f\left((1-u)A+u\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left((1-u)A+u\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle du\\
&+\left\langle f\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\int_0^1(1-u)^2du\\
&+\left\langle f(B)x,x\right\rangle\left\langle g(B)x,x\right\rangle\int_0^1 u^2du\\
&+\left(\left\langle f\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g(B)x,x\right\rangle+\left\langle f(B)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\right)\int_0^1 u(1-u)du \quad (7.73)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece aradaki işlemler de hesaba katılınca toplamda k tane eşitsizlik elde edilir. Bu eşitsizlikler sırasıyla $\left[0,\frac{1}{k}\right),\left(\frac{1}{k},\frac{2}{k}\right),...,\left(\frac{k-1}{k},1\right]$ aralıklarında tanımlıdır. Bu k tane eşitsizliğin integral kısımlarının toplamı $\int_0^1 f\left((1-t)A+tB\right)g\left((1-t)A+tB\right)dt$ integralini oluşturur ve diğer eşitsizliğin sol ve sağ kısımlarını da toplam sembolleri altında gösterebiliriz ve böylece (7.61) eşitsizliği elde edilmiş olur.

Not 7.1.14. (7.61) eşitsizliği, (7.56) eşitsizliğinin genel bir formudur. (7.61)'de $k=1$ alınırsa (7.56) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 7.1.15. $f,g:I\to\mathbb{R}$, I aralığında tanımlı operatör konveks, negatif olmayan fonksiyonlar olsun. Spektrumları I aralığında bulunan herhangi A ve B Hermityen operatörler ve $t\in[0,1]$ için k adım sayısı ve $\frac{(k-i)A+iB}{k}=Z_1$,

$\frac{(i+1)A+(k-(i+1))B}{k}=T_1$, $\frac{iA+(k-i)B}{k}=Z_2$, $\frac{(k-(i+1))A+(i+1)B}{k}=T_2$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\int_0^1\left\langle g\left(tA+(1-t)B\right)x,x\right\rangle dt\\
&+\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\int_0^1\left\langle f\left(tA+(1-t)B\right)x,x\right\rangle dt\\
&\le\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\\
&+\frac{1}{2k}\int_0^1\left\langle f\left(tA+(1-t)B\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(tA+(1-t)B\right)x,x\right\rangle dt\\
&+\frac{1}{24k}\left[\sum_{i=0}^{k-1}\left\langle f\left(Z_1\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(T_1\right)x,x\right\rangle+\left\langle f\left(T_2\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(Z_2\right)x,x\right\rangle\right.\\
&\left.+\left\langle f\left(T_1\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(Z_1\right)x,x\right\rangle+\left\langle f\left(Z_2\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(T_2\right)x,x\right\rangle\right]\\
&+\frac{1}{12k}\left[\sum_{i=0}^{k-1}\left\langle f\left(Z_1\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(Z_2\right)x,x\right\rangle+\left\langle f\left(T_2\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(T_1\right)x,x\right\rangle\right.\\
&\left.+\left\langle f\left(T_1\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(T_2\right)x,x\right\rangle+\left\langle f\left(Z_2\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(Z_1\right)x,x\right\rangle\right]
\end{aligned}
\tag{7.74}
$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: $x\in H$, $\|x\|=1$ ve A ve B spektrumları I aralığında bulunan herhangi Hermityen operatörler olsun. Teorem 7.1.9'un ispatında verilen (7.40)-(7.49) eşitsizleri kullanılarak, (7.48) ve (7.49) eşitsizlikleri $e,f,p,r\in\mathbb{R}$ için $e\le f$ ve $p\le r$ ise $er+fp\le ep+fr$ eşitsizliğine uyarlanırsa ve $u\frac{A+(k-1)B}{k}+(1-u)B=X_1$, $(1-u)A+u\frac{(k-1)A+B}{k}=Y_1$ denirse,

$$
\begin{aligned}
&\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle \frac{\langle g(X_1)x,x\rangle+\langle g(Y_1)x,x\rangle}{2}+\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle \frac{\langle f(X_1)x,x\rangle+\langle f(Y_1)x,x\rangle}{2}\\
&\le \left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\\
&+\frac{\langle f(X_1)x,x\rangle+\langle f(Y_1)x,x\rangle}{2}\cdot\frac{\langle g(X_1)x,x\rangle+\langle g(Y_1)x,x\rangle}{2}\\
&=\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\\
&+\frac{1}{4}\left[\begin{array}{l}\langle f(X_1)x,x\rangle\langle g(X_1)x,x\rangle+\langle f(Y_1)x,x\rangle\langle g(Y_1)x,x\rangle\\+\langle f(X_1)x,x\rangle\langle g(Y_1)x,x\rangle+\langle f(Y_1)x,x\rangle\langle g(X_1)x,x\rangle\end{array}\right]\\
&\le \left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\\
&+\frac{1}{4}\left[\langle f(X_1)x,x\rangle\langle g(X_1)x,x\rangle+\langle f(Y_1)x,x\rangle\langle g(Y_1)x,x\rangle\right]\\
&+\frac{1}{4}\left[u\left\langle f\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle+(1-u)\langle f(B)x,x\rangle\right]\left[(1-u)\langle g(A)x,x\rangle+u\left\langle g\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\right]\\
&+\frac{1}{4}\left[(1-u)\langle f(A)x,x\rangle+u\left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\right]\left[u\left\langle g\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle+(1-u)\langle g(B)x,x\rangle\right]\\
&=\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle+\frac{1}{4}\left[\langle f(X_1)x,x\rangle\langle g(X_1)x,x\rangle+\langle f(Y_1)x,x\rangle\langle g(Y_1)x,x\rangle\right]\\
&+\frac{1}{4}\left[\begin{array}{l}u(1-u)\left\langle f\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\langle g(A)x,x\rangle\\+u^2\left\langle f\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\\+(1-u)^2\langle f(B)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle+u(1-u)\langle f(B)x,x\rangle\left\langle g\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\end{array}\right]\\
&+\frac{1}{4}\left[\begin{array}{l}u(1-u)\langle f(A)x,x\rangle\left\langle g\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\\+(1-u)^2\langle f(A)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle\\+u^2\left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\\+u(1-u)\left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\langle g(B)x,x\rangle\end{array}\right]
\end{aligned}
\tag{7.75}
$$

eşitsizliği elde edilir. (7.75) eşitsizliğinin her iki tarafı $[0,1]$ aralığında u'ya göre integrallenirse,

$$
\begin{aligned}
&\frac{k}{2}\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\int_0^{1/k}\left(\left\langle g\left(tA+(1-t)B\right)x,x\right\rangle+\left\langle g\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle\right)dt\\
&+\frac{k}{2}\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\int_0^{1}\left(\left\langle f\left(tA+(1-t)B\right)x,x\right\rangle+\left\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle\right)dt\\
&\le\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\\
&+\frac{k}{4}\int_0^{1/k}\begin{bmatrix}\left\langle f\left(tA+(1-t)B\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(tA+(1-t)B\right)x,x\right\rangle\\+\left\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle\\+\left\langle f\left(tA+(1-t)B\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle\\+\left\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(tA+(1-t)B\right)x,x\right\rangle\end{bmatrix}dt\\
&\le\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\\
&+\frac{k}{4}\int_0^{1/k}\begin{bmatrix}\left\langle f\left(tA+(1-t)B\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(tA+(1-t)B\right)x,x\right\rangle\\+\left\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle\end{bmatrix}dt\\
&+\frac{1}{12}\begin{bmatrix}\left\langle f\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle+\left\langle f(B)x,x\right\rangle\left\langle g(A)x,x\right\rangle\\+\left\langle f(A)x,x\right\rangle\left\langle g(B)x,x\right\rangle+\left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\end{bmatrix}\\
&+\frac{1}{24}\begin{bmatrix}\left\langle f\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g(A)x,x\right\rangle+\left\langle f(B)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\\+\left\langle f(A)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle+\left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g(B)x,x\right\rangle\end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{7.76}
$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde $u=kt-1$ değişken dönüşümü kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
&\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\le\frac{\left\langle f\left(tA+(1-t)B\right)x,x\right\rangle+\left\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle}{2}\\
&=\frac{\left\langle f\left(u\frac{2A+(k-2)B}{k}+(1-u)\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle+\left\langle f\left((1-u)\frac{(k-1)A+B}{k}+u\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle}{2}
\end{aligned}
\tag{7.77}
$$

ve

$$\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle \le \frac{\left\langle g\left(tA+(1-t)B\right)x,x\right\rangle+\left\langle g\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle}{2}$$
$$=\frac{\left\langle g\left(u\frac{2A+(k-2)B}{k}+(1-u)\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle+\left\langle g\left((1-u)\frac{(k-1)A+B}{k}+u\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle}{2} \quad (7.78)$$

eşitsizlikleri bulunur. (7.77) ve (7.78) eşitsizlikleri $e,f,p,r\in\mathbb{R}$ için $e\le f$ ve $p\le r$ ise $er+fp\le ep+fr$ eşitsizliğine uyarlanırsa ve $u\frac{2A+(k-2)B}{k}+(1-u)\frac{A+(k-1)B}{k}=X_2$, $(1-u)\frac{(k-1)A+B}{k}+u\frac{(k-2)A+2B}{k}=Y_2$ denirse,

$$
\begin{aligned}
&\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\frac{(\langle g(X_2)x,x\rangle+\langle g(Y_2)x,x\rangle)}{2}+\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\frac{(\langle f(X_2)x,x\rangle+\langle f(Y_2)x,x\rangle)}{2}\\
&\le\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\\
&+\frac{1}{4}(\langle f(X_2)x,x\rangle+\langle f(Y_2)x,x\rangle)(\langle g(X_2)x,x\rangle+\langle g(Y_2)x,x\rangle)\\
&=\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\\
&+\frac{1}{4}\begin{bmatrix}\langle f(X_2)x,x\rangle\langle g(X_2)x,x\rangle+\langle f(X_2)x,x\rangle\langle g(Y_2)x,x\rangle\\+\langle f(Y_2)x,x\rangle\langle g(X_2)x,x\rangle+\langle f(Y_2)x,x\rangle\langle g(Y_2)x,x\rangle\end{bmatrix}\\
&\le\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\\
&+\frac{1}{4}[\langle f(X_2)x,x\rangle\langle g(X_2)x,x\rangle+\langle f(Y_2)x,x\rangle\langle g(Y_2)x,x\rangle]\\
&+\frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix}(1-u)\left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle+u\left\langle f\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\\.\left(u\left\langle g\left(\frac{2A+(k-2)B}{k}\right)x,x\right\rangle+(1-u)\left\langle g\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\right)\end{pmatrix}\right]\\
&+\frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix}u\left\langle f\left(\frac{2A+(k-2)B}{k}\right)x,x\right\rangle+(1-u)\left\langle f\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\\.\left((1-u)\left\langle g\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle+u\left\langle g\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\right)\end{pmatrix}\right]\\
&=\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\\
&+\frac{1}{4}[\langle f(X_2)x,x\rangle\langle g(X_2)x,x\rangle+\langle f(Y_2)x,x\rangle\langle g(Y_2)x,x\rangle]\\
&+\frac{1}{4}\begin{bmatrix}u(1-u)\left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{2A+(k-2)B}{k}\right)x,x\right\rangle\\+u^2\left\langle f\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{2A+(k-2)B}{k}\right)x,x\right\rangle\\+(1-u)^2\left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\\+u(1-u)\left\langle f\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\end{bmatrix}\\
&+\frac{1}{4}\begin{bmatrix}u(1-u)\left\langle f\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\\+(1-u)^2\left\langle f\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\\+u^2\left\langle f\left(\frac{2A+(k-2)B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\\+u(1-u)\left\langle f\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{7.79}
$$

eşitsizliği elde edilir. (7.79) eşitsizliğinin her iki tarafı $[0,1]$ aralığında u'ya göre integrallenirse,

$$
\begin{aligned}
&\frac{k}{2}\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\int_0^{2/k}\left(\left\langle g\left(tA+(1-t)B\right)x,x\right\rangle+\left\langle g\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle\right)dt\\
&+\frac{k}{2}\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\int_0^{2/k}\left(\left\langle f\left(tA+(1-t)B\right)x,x\right\rangle+\left\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle\right)dt\\
&\le\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\\
&+\frac{k}{4}\int_0^{2/k}\left[\begin{array}{l}\left\langle f\left(tA+(1-t)B\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(tA+(1-t)B\right)x,x\right\rangle\\+\left\langle f\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left((1-t)A+tB\right)x,x\right\rangle\end{array}\right]dt\\
&+\frac{1}{12}\left[\begin{array}{l}\left\langle f\left(\frac{2A+(k-2)B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\\+\left\langle f\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\\+\left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\\+\left\langle f\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{2A+(k-2)B}{k}\right)x,x\right\rangle\end{array}\right]\\
&+\frac{1}{24}\left[\begin{array}{l}\left\langle f\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\\+\left\langle f\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\\+\left\langle f\left(\frac{(k-1)A+B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\\+\left\langle f\left(\frac{(k-2)A+2B}{k}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+(k-1)B}{k}\right)x,x\right\rangle\end{array}\right]
\end{aligned}
\tag{7.80}
$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde $u=kt-2$, $u=kt-3$, … , $u=kt-(k-2)$, $u=kt-(k-1)$ değişken dönüşümleri için eşitsizlikler elde edilir. (7.76), (7.80) ve diğer değişken dönüşümleriyle elde edilen eşitsizlikler toplanınca istenen eşitsizlik elde edilmiş olur.

Not 7.1.16. Teorem 7.1.15'de elde edilen sonuçta $k=1$ seçilirse (6.32) eşitsizliği elde edilir. Teorem 7.1.15, (6.32) eşitsizliğinin genel halidir. Teorem 7.1.15'de k adım sayısı büyüdükçe eşitsizlik daha kuvvetli hale gelmektedir.

7.2. Tartışma

Bu tezde konveks fonksiyonlar, matris konveks fonksiyonlar gibi fonksiyon tiplerinin temel tanım ve teoremlerine yer verilmiştir. Matrisler için örnekleri verilerek daha anlaşılır olması hedeflenmiştir. Konveks fonksiyonlar ve majorizasyon arasındaki ilişki ele alınmıştır. Ayrıca Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler üzerine yapılan çalışmalara yer verilmiş ve son olarak literatürde var olan Hermite-Hadamard tipi eşitsizliklerden bazılarının genel formları elde edilmiştir.

8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

8.1. Sonuçlar

Bu tezde, operatör (matris) konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler ve integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Elde edilen eşitsizlikler daha önce var olan eşitsizliklerin genellemesi niteliğindedir.

8.2. Öneriler

Konveks fonksiyonlar için yapılmış olan eşitsizlikler ve matris eşitsizlikleri dikkate alınarak yeni eşitsizlikler elde edilebilir. Farklı tipteki konveks fonksiyonlar incelenerek yeni eşitsizlik tipleri oluşturulabilir. Farklı tipteki konveks fonksiyonların özellikleri kullanılarak operatör konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler bulunabilir.

KAYNAKLAR

Ando, T, 1998, Operator-theoretic methods for matrix inequalities, *unpublished notes*.

Ando, T., Zhan, X., 1999, Norm inequalities related to operator monotone functions, *SIAM J. Matrix Anal. App.*, 22, 569-573.

Audenaert, K. M. R. , 2007, A singular value inequality for Heinz means, *Linear Algebra and its Applications*, 422, 279-283.

Aujla J. S., 2000, Some norm inequalities for completely monotone functions, *SIAM J. Matrix Anal. App.*, 22, 569-573.

Aujla J. S. , Silva F. C. , 2003, Weak majorization inequalities and convex functions, *Linear Algebra and its Applications*, 369, 217-233.

Bendat J., Sherman S., 1955, Monotone and convex operator functions*, Trans. Amer. Math. Soc.,* 79, 58-71.

Bhatia, R. , 1997, Matrix analysis, *Springer-Verlag,* New York, 112-117.

Bhatia, R. , 2007, Positive definite matrices, Princeton series in applied mathematics, *Princeton University Press*, Priceton, NJ.

Boyd, S. , Vandenberghe, L., 2004, Convex optimization, *Cambridge University Press*, New-York, 15-69.

Carlen E., 2009, Trace inequalities and quantum entropy:An introductory course, *Contemporary Mathematics*, vol 529, 73-140.

Donoghue, W., 1974, Monotone matrix functions and analytic continuation, *Springer*, Berlin, Heidelberg, New York.

Dragomir, S. S., 2011, Hermite–Hadamard's type inequalities for operator convex functions, *Applied Mathematics and Computation*, 218, 766-772.

Dragomir, S. S., 2012, Operator inequalies of the Jensen,Cebysev and Grüss type, *Springer Briefs in Mathematics*, Berlin.

Hadamard, J., 1893, Etude sur les properties des fonctions entieres et en particulier d'une fonction consideree par Riemann, *J.Math. Pures appl.*, 58, 171-215.

Hardy, G.H., Littlewood, J.E., P'olya, G., 1934, Inequalities, *Cambridge University Press*, Great Britain.

Heinz, 1951, Beitrage zur Strörungstheorie der Spektralzerlegung, *Math. Ann.,* 123,415-438.

Horn, A. R. , Johnson, C. R. , 1991, Topics in matrix analysis, *Cambridge University Press*, New-York, 490-520.

Jensen, J.L.W.V.,1905, Om konvexe funktioner og uligheder mellem Middelvaerdier, *Nyt. Tidsskrift for Mathematik* ,16B, 49-69.

Jensen, J.L.W.V.,1906, Sur les fonctions convexes et les inegalites entre les valeurs moyennes, *Acta Math*., 30, 175-193.

Jorswieck, E. , Boche, H. ,2006, Majorization and matrix-monotone functions in wireless communications, *Foundations and Trends in Communations and Information Theory*, vol 3, no 6, 553-701.

Krauss, F., 1936, Über konvexe Matrixfunktionen, *Math.Z*., 41,18-42.

Löwner, K., 1934, Über monotone Matrixfunktionen, *Math. Z*., 38, 177-216.

Mitrinovic, D.S., 1970, Analytic inequalities, *Springer-Verlag*, Berlin and New York.

Niculescu, C. P. , Persson, L. E. , 2006, Convex functions and their applications, A contemporary approach, *Springer,* USA, 11-106.

Pachpatte, B. G., 2003, On some inequalities for convex functions, *RGMIA Res. Rep. Coll.*, 6(E).

Pecaric, J.E. , Proschan F. , Yong, Y.L., 1992, Convex functions, partial orderings and statistichal applications, Mathematics in Science and Engineering, vol 187, *Academic Press Inc*, USA.

Roberts, A. W., Varberg D. E., 1973, Convex functions, *Academic Press Inc.* , London, 15-220.

Rockafellar, R.T., 1970, Convex analysis, *Princeton University Press*, USA.

Tunç, M., 2011, On some new inequalities for convex functions, *Turk J Math*, 35,1-7.

Tunç, M., 2011, Bazı konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler ve uygulamaları, Doktora Tezi, *Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Erzurum, 17-23.

Watkins, W. , 1974, Convex matrix funcions, *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol 44, no 1, 1-4.

Zabandan G.,2009, A new refinement of the Hermite-Hadamard inequality for convex functions, *JIPAM*, vol. 10, iss. 2, art.45.

Zhang F., 2011, Matrix theory: Basic results and techniques, second ed., *Springer*, New York, 325-348.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Vildan BACAK
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : Bucak – 02.08.1987
Telefon : 0506 706 3399 – 0505 933 1722
Faks :
e-mail : vildanbacak@selcuk.edu.tr

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Bucak Anadolu Lisesi, Bucak, Burdur	2006
Üniversite	:	Selçuk Üniversitesi, Konya	2010
Yüksek Lisans	:	Selçuk Üniversitesi , Konya	2012
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
1	S.Ü.Fen Fakültesi	Öğretim Yardımcısı

UZMANLIK ALANI Konveks fonksiyonlar, Matris toeri

YABANCI DİLLER İngilizce

BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

YAYINLAR