



T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİKLİ k-ARDIL δ-ŞOK MODELİ

Havva ARIGÜN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İstatistik Anabilim Dalı

Ekim-2017
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Havva ARIGÜN tarafından hazırlanan "Kesikli k-Ardıl δ-Şok Modeli" adlı tez çalışması 13/10/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Prof.Dr. Coşkun KUŞ	.....
Danışman Doç.Dr. İsmail KINACI	.....
Üye Yrd.Doç.Dr. Ahmet PEKGÖR	.....

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Mustafa YILMAZ
FBE Müdürü

Bu tez çalışması Selçuk Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü tarafından 16201098 numaralı proje ile desteklenmiştir.

TEZ BİLDİRİMİ

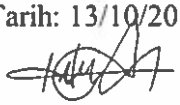
Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Havva ARIGÜN

Tarih: 13/10/2017



ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİKLİ *k*-ARDIL *δ*-ŞOK MODELİ

Havva ARIGÜN

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Doç.Dr. İsmail KINACI

2017, 41 Sayfa

Jüri
Doç.Dr. İsmail KINACI
Prof.Dr. Coşkun KUŞ
Yrd.Doç.Dr. Ahmet PEKGÖR

Bir bileşen yada sistemin n=1,2,…anlarında belirli bir olasılıkla şoka maruz kalabileceği düşünülsün. Herhangi bir anda şoka maruz kalınması 1, kalınmaması ise 0 ile gösterilsin. Böylece herhangi bir sistem için zaman içerisinde 0 ve 1'lerden oluşan bir dizi elde edilecektir. Bu dizinin herhangi bir bölümünde, bir şoktan diğer şoka kadar yapılan denemelerin sayısının δ gibi bir eşik değerinden küçük olması o bölümde bir δ-şok olduğu, büyük olması ise o bölümde herhangi bir δ-şok olmadığı anlamına gelmektedir. Literatürde yer alan çalışmalarda ilk δ-şoka yakalanıncaya kadar yapılan denemelerin sayısının olasılık fonksiyonu incelenmiştir. Bu çalışmada sistemin, ardışık olarak k $(k>0)$ kere δ-şok'a maruz kaldığında bozulacağı varsayılmaktadır. Böyle bir sistem, k-ardıl δ-şok modeli olarak adlandırılabilir. Bu varsayım altında sistemin ömrü, ardışık k-kere δ-şok oluncaya kadar yapılan deneme sayısı şeklinde ifade edilebilir. Burada amaç sistem bozuluncaya kadar yapılan deneme sayısının olasılık dağılımını ve bu dağılımın bazı karakteristik özelliklerini elde etmektir. Bu çalışmada $T_{\delta,k}$ rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu elde edilmiş ve ayrıca $T_{\delta,k}$ rasgele değişkeninin bazı özellikleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: İki sonuç alan denemeler, Kesikli Dağılımlar, Kombinatorik, Olasılık Üreten Fonksiyonu, Tekrar İstatistiği, δ- Şok Model

ABSTRACT

MS THESIS

DISCRETE δ-SHOCK MODEL OF ORDER k

Havva ARIGÜN

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCEOF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN STATISTICS

Advisor:
Assoc.Prof.Dr. İsmail KINACI

Jury
Assoc.Prof.Dr. İsmail KINACI
Prof.Dr. Coşkun KUŞ
Asst.Prof.Dr. Ahmet PEKGÖR

2017, 41 Pages

Let we think that a component or a system can subject to shock with a probability at time n=1,2,… . Let "1" denotes that there is a shock and "0" denotes that there is no shock. Hence for any system, a sequence which consists of "0" and "1" in time will be obtained. In any part of this sequence, if the number of trials from a shock to next shock is smaller or equal to a threshold value δ then there is a δ-shock in this part. In the literature the probability mass function of the number of trials until the first δ-shock is investigated. In this study, it is assumed that a system will fail with consequtieve k $(k>0)$ δ-shock. Such a system can be called "δ-shock model of order k". Under this assumption, lifetime of a system , $\boldsymbol{T_{\delta,k}}$ can be expressed as the number of trials until consequtive k δ-shock is occurred. In this study the probability mass function of randomvariable $T_{\delta,k}$ is obtained and some properties of the $T_{\delta,k}$ is investigated.

Keywords: Binary trials, Combinatorics, Discrete Distributions, Probabity Generating Function, Run Statistic, δ-Shock Model

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının başından sonuna kadar her aşamasında bilgisini, deneyimini benden esirgemeyen ve çalışmama daima olumlu yönde katkıda bulunan çok değerli danışman hocam Doç. Dr. İsmail KINACI'ya içtenlikle teşekkür ederim.

Hayatımın her döneminde olduğu gibi bu tez çalışmasında da desteklerini eksik etmeyen sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Havva ARIGÜN
KONYA-2017

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

1. GİRİŞ **8**

2. KESİKLİ δ-ŞOK MODELİ **12**

2.1. Model Varsayımları 12
2.2. Sistemin Yaşam Zamanı 12
2.3. Olasılık Fonksiyonu 12
2.4. Olasılık Üreten Fonksiyon, Beklenen Değer ve Varyans 14

3. KESİKLİ k-ARDIL δ-ŞOK MODELİ **16**

3.1. Model Varsayımları ve Bazı Örnekler 16
3.2. Olasılık Fonksiyonu 18
3.3. Beklenen Değer 28

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER **31**

EKLER **32**

EK-1: E_4'ün Çözüm Sayısı **32**

EK-2: E_3'ün Çözüm Sayısı **38**

ÖZGEÇMİŞ **40**

KAYNAKLAR **41**

1. GİRİŞ

Şok modelleri güvenirlik teorisi ve olasılık uygulamaların önemli bir miktarını içine alır. Bir sistem yada bileşenin herhangi bir anda şoka maruz kalması 1, kalmaması ise 0 ile gösterilsin. Böylece herhangi bir sistem için zaman içerisinde 0 ve 1'lerden oluşan bir dizi elde edilecektir. Şok modeller, rasgele büyüklükteki bir şokun rasgele bir zamanda meydana geldiği sistemlerdir. Aslında bu modellerin finans ve sigortacılık gibi güvenirlik ve yaşam analizlerini içeren çeşitli alanlarda da uygulanma olanağına sahip olduğunu düşünebiliriz. Sistem güvenilirliğinde, sistemin rasgele zamanlarda meydana gelen şoklara maruz kaldığı ve sistemin bozulma kriterinin ardışık iki şok arasında geçen zamana bağlı olduğu varsayılmıştır. δ-şok modelleri sadece sistem güvenilirliği için değil aynı zamanda finans, sigortacılık gibi diğer alanlarda da uygulanabilir. Şok kavramı, bir sigorta şirketinin belli bir portföy ile ilgili hasar talebi olarak düşünülürse ömür, birbirine yakın iki hasar ile karşılaşılıncaya kadar ki bekleme süresi anlamına gelir. Temel olarak üç farklı tür şok model bulunmaktadır. Bunlar tekrar şok modelleri, aşırı şok modeller ve birikimli şok modellerdir. Şok modeller son yıllarda büyük ilgi çeken konular arasında yer almaktadır.(Sumita ve Shanthikumar, 1985), (Gut, 1990), (Mallor ve Omey, 2001) şok modelle ilgili incelemelerde bulunmuşlardır. Bir dizinin herhangi bir bölümünde, bir şoktan diğer şoka kadar yapılan denemelerin sayısının δ gibi bir eşik değerinden küçük olması o bölümde bir δ-şok olduğu, büyük olması ise o bölümde herhangi bir δ-şok olmadığı anlamına gelmektedir ve böyle sistemlere δ-şok model adı verilmektedir. δ-şok model (Li ve Kong, 2007), (Eryılmaz, 2012) tarafından çalışılmıştır. (Eryilmaz, 2013), δ-şok modelindeki şokların n=1,2,… anlarında binomial süreçlere göre meydana geldiği ve şoklar arasında geçen sürenin $1/p$ ortalamalı geometrik dağılıma sahip olduğu kesikli durum altında δ-şok modellerini incelemiştir. Bu çalışmada kesikli δ-şok modelinde sistemin, ardışık olarak k $(k>0)$ kere δ-şok'a maruz kaldığında bozulacağı varsayılmıştır. Böyle bir sistem, kesikli k-ardıl δ-şok modeli olarak adlandırılabilir. Bu varsayım altında sistemin ömrü, ardışık k-kere δ-şok oluncaya kadar yapılan deneme sayısı şeklinde ifade edilebilir. Burada amaç sistem bozuluncaya kadar yapılan deneme sayısının olasılık dağılımını ve bu dağılımın bazı karakteristik özelliklerini elde etmektir.

İstatistiksel olarak k-ardıl δ-şok modeli şeklinde kurgulanan yapıların gerçek hayatta karşılığı olan pek çok sistem bulunmaktadır. Bu sistemlerin ömürlerinin olasılık dağılımının bulunması kullanılan sistem hakkında bazı sonuçların elde edilebilmesi

adına büyük önem taşımaktadır. Örneğin soğutma cihazı olarak kullanılan sistemin her δ-şoktan sonra ısınması ve ardışık k-tane δ-şoktan sonra bozulması durumunda, bozuluncaya kadar geçen sürenin (sistemin ömrünün) olasılık dağılımının bulunması sistem kullanıcıları için oldukça önemlidir. Sadece cihazları değil canlıları bile bu sisteme rahatça uyarlanabilir. Örneğin bir bakteri türü için geliştirilen bir ilaç düşünülsün. Bu ilaç için iki kullanım arasındaki geçen sürenin δ'dan büyük olması yani bakterilerin δ-şok'a maruz kalmaması durumunda ilacın önceki dozlarının bakteriler üzerindeki etkisinin yok olduğu düşünülebilir. Bu bakterinin k-kere ardışık δ-şoka (ilaca) maruz kaldıktan sonra öldüğü düşünülürse, ölünceye kadar ki denemelerin sayısının olasılık fonksiyonun bulunması bu canlı üzerinde incelenen bazı durumlar açısından önemlidir. Yukarıda verilen iki örnekte de görüldüğü gibi gerçek hayattaki bazı durumlar kesikli k-ardıl δ-şok modeli ile modellenebilmektedir. Bu açıdan bu modellere ilişkin elde edilecek bulgular büyük öneme sahiptir.

Başarılı-başarısız, sağlam-bozuk, var-yok gibi iki tür sonuç alan denemelere ilişkin Bernoulli, Binom, Geometrik, Negatif Binom gibi çok iyi bilinen olasılık modellerinin yanında daha birçok model önerilmiştir. Bu çalışmalardan bazıları aşağıda sıralanmıştır.

(Aki ve Hirano, 1988): Bu çalışmada Aki ve Hirano, ilk k ardıl başarı elde edilinceye kadar yapılan denemelerin sayısının dağılımını elde etmişlerdir. Ayrıca ilk k ardıl başarı elde edilinceye kadar yapılan denemelerde ki başarıların ve başarısızlıkların dağılımını da elde etmişlerdir.

(Charalambides, 1986): Bu çalışmada Charalambides, k ardıl kesikli dağılımların, kesikli dağılımların genellenmiş hali olduğunu ifade etmiştir. "k ardıl dağılımlar k başarı elde edildikten sonra kesikli dağılımların sağdan budanmış halleridir". Bu dağılımların olasılık fonksiyonu ve faktöriyel momentlerini Sağdan Budanmış Bell Polinomları ile açıklamıştır.

(Charalambides, 2010): Bu çalışmada Charalambides, q-Bernstein polinomlarını q-Binom dağılımının olasılık fonksiyonunun tanımlanmasında kullanmıştır. Bu dağılım, önceki bozulma sayısına göre geometrik olarak artan bozulma olasılığına sahip 0 ve 1 değerini alan Bernoulli denemeleri üzerine kurgulanmıştır.

(Cirillo ve Hüsler, 2009): Urn süreçlerini kullanan genelleştirilen uç şok modellerine yeni bir sezgisel bir yaklaşım ortaya koymuşlardır. Genelleştirilen uç şok modellerinin eşik değerinin her seferinde değiştiğinden bahsetmektedirler.

(Cirillo ve Hüsler, 2011): Gut ve Hüsler rasgele büyüklükte bir şoka rasgele bir zamanda maruz kalan sistemleri uç şok modelleri ile olarak ortaya koymuşlardır. Ortaya konulan bu yapıdaki sistemler dayanıklılık seviyeleri üstünde meydana gelen şoklarda bozulmaktadırlar. Cirillo, Hüsler bu çalışmayı uç şok modelleri yaklaşımına alternatif olarak önermişlerdir.

(Eryılmaz, 2012): Bu çalışmada Eryılmaz ardışık iki şok arasındaki zaman belirlenen bir δ eşik seviyesinden daha az ise sistemin bozulduğundan bahsetmiştir. Bu model çeşitli alanlarda uygulanabilirliğinden söz etmiştir. k ardışık zaman arası δ eşik seviyesinden daha az olduğundan bozulan sistemlerin yaşam fonksiyonları ve sistemlerin ortalama ömürleri zaman aralıkları üstel dağıldığı durumda elde edilmiştir.

(Eryilmaz, 2013): Bu çalışmada Eryılmaz kesikli zaman modellerin için ardışık iki şok arasındaki zamanın kritik bir seviyeden daha az ise sistemin bozulacağını düşünmüş ve sistemlerin ömrünün olasılık fonksiyonunu, olasılık üreten fonksiyonunu elde etmiştir.

(Eryilmaz, 2014): Bu çalışmada Eryılmaz, ödüllü ardıl k Geometrik dağılımını incelemiştir. İkili denemelerin dizisinde, başarı olduğunda rasgele bir ödül verilmektedir. Ardışık ödüllerin toplamı k oluncaya kadar veya k'yı geçene kadar yapılan denemelerin sayısının dağılımı ödüllü ardıl k geometrik dağılım olarak adlandırılmıştır. Bu dağılımın olasılık fonksiyonu bu çalışmada elde edilmiştir.

(Eryilmaz ve Demir, 2007): Bu çalışmada Eryılmaz ve Demir, tekrar istatistiğinin (run) "0" (bozulma) "1" (başarı) değerini alan $\xi_1,\xi_2,\ldots, \xi_n$ dizisinin simetrik elemanı olduğu düşünülmüştür. Çeşitli tekrar istatistiklerinin dağılımları her bir tekrar istatistiğinin koşullu dağılımı kullanılarak elde edilmiştir.

(Eryılmaz ve Yalçın, 2011): Bu çalışmada Eryılmaz ve Yalçın, iki sonuç alabilen bağımsız Markov elementlerinin, iki ardışık bozulma arasındaki maksimum uzaklık, minimum uzaklık ve ortalama uzaklıklarından bahsetmişlerdir. Bu rasgele değişen stokastik süreçlerde meydana gelen birtakım problemleri çözmede kullanılabilir. Bu rasgele değişkenin dağılımı kombinatorik tekniği yardımıyla elde edilmiş ve nümerik sonuçlar sunulmuştur.

(Gut ve Hüsler, 2005): Bu çalışmada Gut ve Hüsler bir şokun sisteme kısmı hasar verebileceğini ve kritik sınırın altındaki bu şokların toplamının sistemi öldürebileceğini düşünmüşler. Sistemi öldüren şokların toplamının durumunu birikimli model olarak ele almışlardır.

(Koutras, 1996): Bu çalışmada Koutras bağımsız ve aynı dağılıma sahip Bernoulli denemelerini kullanarak örtüşmeyen ardışık k başarı elde edilinceye kadar yapılan denemelerin sayısının dağılımını incelemiştir. Ancak bu çalışmadaki farklılık başarı çiftleri arasına en fazla k-2 tane başarısızlık girse de tekrarın sağlanabildiği durumlar olmasıdır. Bu dağılıma ilişkin olasılık fonksiyonu, olasılık üreten fonksiyonu ve momentlerde elde edilmiştir.

(Mohanty, 1994): Bu çalışmada Mohanty, iki sonuçlu Markov denemelerinde k uzunluğundaki başarı elde edilinceye kadar beklenen zaman Geometrik ve Polya-Eggenberge dağılımları olasılık üreten ve kombinatorik yöntem ile elde edilmiştir. Geometrik dağılım için ilk iki moment bulunmuştur.

(Yalcin, 2014): İki sonuçlu n denemelik bir dizide $M_{n,k}$ (n denemede k uzunluğunda örtüşen denemelerin sayısı) rasgele değişkenin dağılımı Ling's Binom dağılımı ya da Tip II Binom dağılımı olarak adlandırılmaktadır. Bu çalışmada Yalçın, Ling's Binom dağılımı olarak genellemiştir. Bu genelleme yapılırken başarı olasılığı geometrik olarak değişen Bernoulli denemeleri kullanılmıştır. Bu yeni dağılımda q=1 verildiğinde, Ling's Binom dağılımı elde edilecektir.

Bu tez çalışmasının ikinci bölümünde δ-şok modeller hakkında bilgi verilecek, üçüncü bölümünde ise önerilen kesikli k-ardıl δ-şok modeli ve bazı özellikleri incelenecektir. Dördüncü bölümde ise elde edilen sonuçlar tartışılacaktır.

2. KESİKLİ δ-ŞOK MODELİ

Bu modelde, sistemin maruz kaldığı ardışık iki şok arasında geçen zamanın δ gibi bir eşik seviyesinin altında olması durumunda sistemin bozulacağı varsayılmaktadır. Sistemin ömrünün, bahsedilen bu olay gerçekleşinceye kadar geçen zaman olarak ifade edilebileceği düşünülürse, bir birleşik rasgele değişken olduğu söylenebilir. δ-şok modellerinin sürekli versiyonu yani şoklar arasında geçen sürenin olasılık dağılımının sürekli olması durumunda sistemin ömrünün davranış özellikleri (Wang* ve Zhang, 2005), (Bai ve ark., 2006), (Li ve Kong, 2007) ve (Li ve Zhao, 2007) tarafından çalışılmıştır. (Eryilmaz, 2013) ise şokların n=1,2,… anlarında binomial süreçlere göre meydana geldiğini ve şoklar arasında geçen sürenin $1/p$ ortalamalı geometrik dağılıma sahip olduğunu varsaymıştır. Burada bu varsayım altında sistemin ömrünün davranış özellikleri verilecektir.

2.1. Model Varsayımları

Bir sistemin birbiri ardına meydana gelen dış şoklara maruz kaldığı varsayılsın ve şokların n=1,2,… anlarında binomial süreçlere göre meydana geldiği düşünülsün. Yani n=1,2,… zaman dilimi içinde şokun meydana gelme olasılığı p meydana gelmeme olasılığı 1-p olsun. İlk şok meydana gelene kadar geçen süre X_0 ve $i=1,2,...$ için $i.$ ve $(i+1).$ şoklar arasındaki zaman X_i ile gösterilsin. Burada X_0, X_1,… bağımsız ve

$$P\{X_i = x\} = p(1-p)^{x-1},\ x = 1,2,...$$

şeklindeki aynı olasılık fonksiyonuna sahip rasgele değişkenlerdir.

2.2. Sistemin Yaşam Zamanı

Yukarıdaki varsayımlar altında kesikli δ-şok modelleri ile tanımlanan sistemlerin ömrü

$$T_\delta = \sum_{i=0}^{M} X_i \tag{1}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada durdurma rasgele değişkeni olarak adlandırılan M rasgele değişkeni

$$\delta \geq 1 \text{ ve } m=1,2,\ldots \text{ için } \{X_1 > \delta,...,X_{m-1} > \delta, X_m \leq \delta\} \text{ ise } \{M = m\}$$

olarak tanımlanabilir.

2.3. Olasılık Fonksiyonu

M rasgele değişkeni $X_1, X_2,...$lere bağlı olduğu için (1) eşitliği ile verilen ifade kullanılarak T_δ rasgele değişkeninin dağılımını bulmak oldukça zordur. Aşağıda T_δ rasgele değişkeninin dağılımı, (1) ile verilen sistemin ömrüne denk yeni bir rasgele değişken tanımlanarak ve kombinatorik işlemleri kullanarak elde edilmiştir. Bu yöntem iki sonuçlu dizilerin analizini oldukça kolaylaştıran bir yöntemdir. bkz.(Eryılmaz ve

Yalçın, 2011). (Eryilmaz, 2013), sistemin ömrü olarak tanımlanan T_δ rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonunu Teorem 1'deki gibi elde etmiştir.

Teorem 1. Meydana gelen şoklar bağımsız ve aynı dağılıma sahip olmak üzere

$$P\{T_\delta = n\} = \sum_{i=2}^{\left[\frac{n+2\delta}{\delta+1}\right]} \left(\binom{n-(i-2)\delta-1}{i-1} - \binom{n-(i-1)\delta-1}{i-1} \right) p^i (1-p)^{n-i}$$

şeklindedir. Burada [.] tam değer fonksiyonu, $n = 2,3,...$ için

$$I_n = \begin{cases} 1, & n \text{ anında şok oldu} \\ 0, & n \text{ anında şok olmadı} \end{cases} \tag{2}$$

ve

$$P\{I_n = 1\} = p, P\{I_n = 0\} = 1-p$$

olarak tanımlanmaktadır.

İspat. $I_1, I_2, ...$'lerdeki en fazla 'δ-1' kadar 0 (şoksuz dönem) ile ayrılmış iki 1 (şoklu dönem) elde edilinceye kadar bekleme zamanı şeklinde bir rasgele değişken tanımlansın ve W_δ ile gösterilsin. Bu durumda $\delta \geq 1$ için T_δ ve W_δ rasgele değişkenleri dağılımda birbirlerine eşit olacaktır.

$\{W_\delta = n\}$ olayının meydana gelmesi yani sistemin *n*. denemede bozulması olayı için, *n* denemeden oluşan ve içerisinde tam *i* tane 1 içeren $(i \geq 2)$ yani $\{W_\delta = n, Q_n = i\}$ olayının gerçekleşmesi için bir diziliş

$$\underbrace{0...0}_{y_1 \geq 0}1\underbrace{0...0}_{y_2 \geq \delta}1\underbrace{0...0}_{y_3 \geq \delta}1...1\underbrace{0...0}_{y_{i-1} \geq \delta}1\underbrace{0...0}_{0 \leq y_i < \delta}1. \tag{3}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece *n* denemedeki 1'lerin sayıları (Q_n) üzerinden koşullandırma yapılarak $\{W_\delta = n\}$ olayının olasılığı

$$\begin{aligned} P\{W_\delta = n\} &= \sum_{i \geq 2} P\{W_\delta = n, Q_n = i\} \\ &= \sum_{i \geq 2} P\{W_\delta = n, Q_n = i\} \\ &= \sum_{i \geq 2} C(n, \delta, i) p^i (1-p)^{n-i} \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Burada $C(n, \delta, i)$, iki sonuçlu bir dizinin (3) formuna sahip tüm mümkün dizilişlerinin sayısını yada buna denk olarak $y_1 + y_2 + ... + y_i = n - i$ denkleminin $y_1 \geq 0, y_2 \geq \delta, \ldots, y_{i-1} \geq \delta, 0 \leq y_i < \delta$ kısıtları altında tamsayılı

çözümlerinin sayısını göstermektedir. $z_1 = y_1$, $j = 2,3,,..i-1$ için $z_j = y_j - \delta$ ve $z_i = y_i$ şeklinde tanımlansın. O zaman $C(n,\delta,i)$ sayısı, $z_1 \geq 0, z_2 \geq 0, \ldots, z_{i-1} \geq 0$, $0 \leq z_i \leq \delta$ koşulları altında $z_1 + ... + z_i = n - i - (i-2)\delta$ denkleminin tamsayılı çözümlerinin sayısına eşittir ve

$$C(n,\delta,i) = C_1(n,\delta,i) - C_2(n,\delta,i),$$

şeklindedir. Burada $C_1(n,\delta,i)$ ve $C_2(n,\delta,i)$ sırasıyla $\{z_j \geq 0, j = 1,...,i\}$ ve $\{z_j \geq 0, j = 1,...,i-1, z_i \geq \delta\}$ kısıtları altında $z_1 + ... + z_i = n - i - (i-2)\delta$ denkleminin tamsayılı çözümlerinin sayısını göstermektedir.

$z_1 + ... + z_r = n$ denkleminin $z_j \geq 0, j = 1,...,r$ kısıtları altında tamsayılı çözümlerinin sayısı $\binom{n+r-1}{r-1}$'dir (Öztürk, 1995). Böylece $C_1(n,\delta,i)$ ve $C_2(n,\delta,i)$ sayıları

$$C_1(n,\delta,i) = \binom{n-(i-2)\delta-1}{i-1} \text{ ve } C_2(n,\delta,i) = \binom{n-(i-1)\delta-1}{i-1}$$

olarak elde edilebilir.

2.4. Olasılık Üreten Fonksiyon, Beklenen Değer ve Varyans

(Eryilmaz, 2013), T_δ'nin olasılık üreten fonksiyonunu $P\{I_n = 1\} = p = 1-q$ olmak üzere

$$\Psi(z) = \frac{(pz)^2\left(1-(qz)^\delta\right)}{(1-qz)\left(1-qz-pz(qz)^\delta\right)}$$

şeklinde ve bu olasılık üreten fonksiyona bağlı olarak T_δ'nin ortalaması ve varyansını

$$E(T_\delta) = \Psi'(1)$$
$$= \frac{2-(1-p)^\delta}{p\left(1-(1-p)^\delta\right)}$$

$$Var\left(T_\delta\right)=\Psi''(1)+\Psi'(1)-\left(\Psi'(1)\right)^2$$

$$=\frac{2(1-p)^{2\delta+1}+(1-p)^{\delta}\left(p(2\delta+6)-6\right)+6-4\delta}{p^2(1-p)^{2\delta}-2p^2(1-p)^{\delta}+p^2}+\frac{2-(1-p)^{\delta}}{p\left(1-(1-p)^{\delta}\right)}$$

$$-\left(\frac{2-(1-p)^{\delta}}{p\left(1-(1-p)^{\delta}\right)}\right)^2$$

olarak elde etmiştir.

3. KESİKLİ k-ARDIL δ-ŞOK MODELİ

3.1. Model Varsayımları ve Bazı Örnekler

Kesikli zamanlarda şoka maruz kalabilen bir sistem düşünelim. Herhangi bir t anında sistemin şoka maruz kalma olasılığı p ve kalmama olasılığı $q = 1 - p$ olsun. Sistemin herhangi bir anda şoka maruz kalması 1, kalmaması ise 0 ile ifade edilsin. Ayrıca bu sistemin, $\delta \in \mathrm{N}$ olmak üzere maruz kaldığı ardışık iki şok arası sürenin δ'dan küçük ya da eşit olduğu durum arka arkaya k kere gerçekleştiğinde öldüğünü ya da bozulduğunu varsayalım. $T_{\delta,k}$ rasgele değişkeni ise bu sistem ölünceye kadar geçen süreyi göstersin. Aşağıda $T_{\delta,k}$ rasgele değişkeninin değerine ilişkin bazı örnekler verilmiştir.

Durum 1: $\delta = 2, \quad k = 1$

Örnek	**Örnek diziliş**	**Rasgele değişken** $\left(T_{\delta,k}\right)$
1	$\underbrace{1001}_{\substack{3>\delta \\ k=0}}\underbrace{000}_{\substack{4>\delta \\ k=0}}\underbrace{100}_{\substack{3>\delta \\ k=0}}\underbrace{101}_{\substack{2\le\delta \\ k=1}}$	13
2	$\underbrace{0100}_{\substack{3>\delta \\ k=0}}\underbrace{101}_{\substack{2\le\delta \\ k=1}}$	7
3	$001\underbrace{1}_{\substack{1\le\delta \\ k=1}}$	4
4	$\underbrace{1\,1}_{\substack{1\le\delta \\ k=1}}$	2

Durum 2: $\delta = 2,\ k = 2$

Örnek	**Örnek diziliş**	**Rasgele değişken** $\left(T_{\delta,k}\right)$
1	$00\underbrace{100}_{3>\delta\ k=0}\underbrace{10}_{2\le\delta\ k=1}\underbrace{100}_{3>\delta\ k=0}\underbrace{100}_{3>\delta\ k=0}\underbrace{10}_{2\le\delta\ k=1}\underbrace{10}_{2\le\delta\ k=2}$	18
2	$00\underbrace{100}_{3>\delta\ k=0}\underbrace{10}_{2\le\delta\ k=1}\underbrace{100}_{3>\delta\ k=0}\underbrace{1}_{1\le\delta\ k=1}\ \underbrace{01}_{2\le\delta\ k=2}$	14
3	$\underbrace{100}_{3>\delta\ k=0}\underbrace{10}_{2\le\delta\ k=1}\underbrace{10}_{2\le\delta\ k=2}$	8
4	$\underbrace{1001}_{3>\delta\ k=0}\ \underbrace{1}_{1\le\delta\ k=1}\ \underbrace{01}_{2\le\delta\ k=2}$	7
5	$1\,\underbrace{1}_{1\le\delta\ k=1}\ \underbrace{1}_{1\le\delta\ k=2}$	3

Durum 3: $\delta = 3,\ k = 2$

Örnek	**Örnek diziliş**	**Rasgele değişken** $\left(T_{\delta,k}\right)$
1	$0\underbrace{1001}_{3\le\delta\ k=1}\underbrace{0001}_{4>\delta\ k=0}\underbrace{001}_{3\le\delta\ k=1}\underbrace{001}_{3\le\delta\ k=2}$	15
2	$00\underbrace{1001}_{3\le\delta\ k=1}\underbrace{0001}_{4>\delta\ k=0}\underbrace{001}_{3\le\delta\ k=1}\underbrace{01}_{2\le\delta\ k=2}$	15
3	$00\underbrace{1001}_{3\le\delta\ k=1}\underbrace{001}_{3\le\delta\ k=2}$	9
4	$0\underbrace{10}_{2\le\delta\ k=1}\underbrace{10}_{2\le\delta\ k=2}$	6
5	$1\,\underbrace{1}_{1\le\delta\ k=1}\ \underbrace{1}_{1\le\delta\ k=2}$	3

Durum 4: $\delta = 3,\ k = 3$

Örnek	Örnek diziliş	Rasgele değişken $(T_{\delta,k})$
1	$\underbrace{000}_{\substack{5>\delta\\k=0}}\underbrace{1}_{\substack{5>\delta\\k=0}}\underbrace{0000}_{\substack{4>\delta\\k=0}}\underbrace{1}_{\substack{3\le\delta\\k=1}}\underbrace{0}_{\substack{3\le\delta\\k=2}}\underbrace{1}_{\substack{4>\delta\\k=0}}\underbrace{0}_{\substack{3\le\delta\\k=1}}\underbrace{0}_{\substack{3\le\delta\\k=2}}\underbrace{1}_{\substack{3\le\delta\\k=3}}$	37
2	$\underbrace{0010}_{\substack{4>\delta\\k=0}}\underbrace{0}_{\substack{3\le\delta\\k=1}}\underbrace{1}_{\substack{4>\delta\\k=0}}\underbrace{0}_{\substack{2\le\delta\\k=1}}\underbrace{0}_{\substack{4>\delta\\k=0}}\underbrace{1}_{\substack{3\le\delta\\k=1}}\underbrace{0}_{\substack{3\le\delta\\k=2}}\underbrace{1}_{\substack{3\le\delta\\k=3}}$	29
3	$\underbrace{0010}_{\substack{3\le\delta\\k=1}}\underbrace{0}_{\substack{4>\delta\\k=0}}\underbrace{1}_{\substack{3\le\delta\\k=1}}\underbrace{0}_{\substack{3\le\delta\\k=2}}\underbrace{1}_{\substack{3\le\delta\\k=3}}$	19
4	$\underbrace{0010}_{\substack{3\le\delta\\k=1}}\underbrace{1}_{\substack{2\le\delta\\k=2}}\underbrace{0}_{\substack{2\le\delta\\k=3}}1$	10
5	$\underbrace{0010}_{\substack{3\le\delta\\k=1}}\underbrace{1}_{\substack{2\le\delta\\k=2}}\underbrace{0}_{\substack{1\le\delta\\k=3}}1$	9
6	$\underbrace{0011}_{\substack{1\le\delta\\k=1}}\underbrace{1}_{\substack{1\le\delta\\k=2}}\underbrace{1}_{\substack{1\le\delta\\k=3}}$	6

3.2. Olasılık Fonksiyonu

Burada öncelikli amacımız verilen δ ve k değerine bağlı olarak bu $T_{\delta,k}$ rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonunu belirlemektir. Yukarıdaki örneklerden de kolayca anlaşılabileceği gibi $T_{\delta,k}$, $k+1, k+2,...$ değerlerini alabilen bir rasgele değişkendir. $T_{\delta,k}$ rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonunu belirlemek için

$$S_{i,j} = \{\text{dizilişte tam } i \text{ tane } \delta\text{-şoksuz ve tam } j \text{ tane } \delta\text{-şoklu dönem olması}\}$$

şeklinde bir $S_{i,j}$ olayı tanımlansın. Bu durumda $T_{\delta,k}$ rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu

$$P(T_{\delta,k} = n) = \sum_i \sum_j P(T_{\delta,k} = n, S_{i,j}),\ n = k+1, k+2, \ldots \tag{4}$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki $\{T = n, S_{i,j}\}$ olayı sistemin ömrünün n olması ve n anına kadar tam i tane δ şoksuz ve tam j tane δ şoklu dönem yaşanması olayıdır. Bu olaya karşılık gelen örnek bir diziliş şekil 1'de verilmiştir. Bu dizilişe ilişkin olasılık

$$P(T_{\delta,k} = n, S_{i,j}) = \sum_{\substack{x_1+x_2+\ldots+x_i=j-k\\ x_1<k, x_2<k,\ldots,x_i<k}} \cdots \sum \sum_{\substack{n_0+n_1+\ldots+n_{w_i}+m_1+\ldots+m_i=n\\ n_0>0, 0<n_1\le\delta,\ldots,0<n_{w_i}\le\delta\\ m_1>\delta, m_2>\delta,\ldots,m_i>\delta}} \cdots \sum \left(\prod_{s=0}^{w_i} q^{n_s-1}p\right)\left(\prod_{t=1}^{i} q^{m_t-1}p\right) \tag{5}$$

olarak yazılabilir. Elde edilen (5) eşitliği (4)'de yerine yazılarak $T_{\delta,k}$ rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu

$$P(T_{\delta,k}=n)=\underbrace{\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{\delta+1}\right]}}_{E_1}\ \underbrace{\sum_{j=k}^{\min\left\{\substack{n-(i(\delta+1)+1),\\(i+1)k-i}\right\}}}_{E_2}\ \underbrace{\overbrace{\sum\cdots\sum}^{+,-'lerin\ dizilişi}}_{\substack{x_1+x_2+...+x_i=j-k\\x_1<k,x_2<k,...,x_i<k}}_{E_3}\ \underbrace{\overbrace{\sum\cdots\sum}^{0,1'lerin\quad dizilişi}}_{\substack{n_0+n_1+...+n_{w_i}+m_1+...+m_i=n\\n_0>0,0<n_1\le\delta,...,0<n_{w_i}\le\delta\\m_1>\delta,m_2>\delta,...,m_i>\delta}}_{E_4}\left(\prod_{s=0}^{w_i}q^{n_s-1}p\right)\left(\prod_{t=1}^{i}q^{m_t-1}p\right) \quad (6)$$

şeklinde elde edilir.

Yukarıdaki olasılık fonksiyonun içinde yer alan E_1, E_2, E_3, E_4 ifadelerinin açıklaması aşağıda olduğu gibidir.

E_1: Dizilişteki δ-şoksuz dönemlerin toplamı

E_2: Dizilişteki δ-şoklu dönemlerin toplamı

E_3: j tane δ-şoklu dönem var. Bunların k tanesi dizilişin en sonunda, diğer $x_1+x_2+...+x_i$ tanesi ise daha önde bir yerlerde, bu durumda $x_1+x_2+...+x_i=j-k$ yazılabilir. Burada x_i'ler son k tane "+"dan önceki "+"ların sayısıdır. E_3 ifadesi de kısıtlar altında, "+" ve "-" lerin mümkün tüm dizilişleri üzerinden toplamı ifade etmektedir.

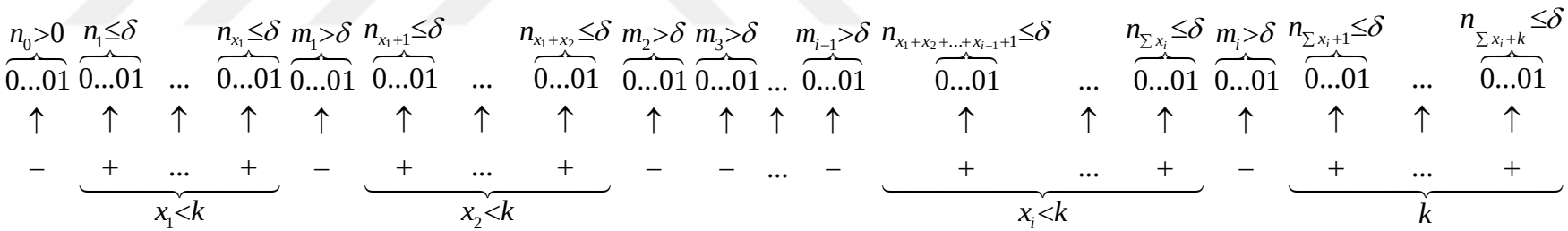
E_4: Esas dizilişler içindir. n_0 ilk "1" e kadar yani ilk şoklu döneme kadar yapılan denemelerin sayısı, $n_1,n_2,...,n_{w_i}$ j tane δ-şoklu dönemdeki deneme sayılarını göstermektedir. $m_1,m_2,...,m_i$ ise i tane δ-şoksuz dönemdeki deneme sayılarını göstermektedir. Bu durumda E_4 ifadesi de kısıtlar altında "0" ve "1" lerin mümkün tüm dizilişleri üzerinden toplamı ifade etmektedir. Burada $w_i=x_1+x_2+...+x_i+k$ yani esasında $w_i=j$'dir.

$0 \rightarrow$ *şoksuz dönem*

$1 \rightarrow$ *şoklu dönem*

$- \rightarrow$ δ *– şoksuz dönem*

$+ \rightarrow$ δ *– şoklu dönem*



$$x_1 + x_2 + \ldots + x_i + k = j$$

Şekil 1. İçerisinde ilk şoka kadarki dönemler haricinde tam *i* tane δ-şoksuz dönem ve tam *j* tane δ-şoklu dönem barındıran diziliş. (bileşen ölünceye kadar)

$$P(T_{\delta,\mathrm{k}}=n)=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{\delta+1}\right]}\sum_{j=k}^{\min\left\{\begin{matrix}n-(i(\delta+1)+1),\\(i+1)k-i\end{matrix}\right\}}\sum\cdots\sum_{\substack{x_1+x_2+\ldots+x_i=j-k\\x_1<k,x_2<k,\ldots,x_i<k}}\sum\cdots\sum_{\substack{n_0+n_1+\ldots+n_j+m_1+\ldots+m_i=n\\n_0>0,0<n_1\le\delta,\ldots,0<n_j\le\delta\\m_1>\delta,m_2>\delta,\ldots,m_i>\delta}}\left(\prod_{s=0}^{j}q^{n_s-1}p\right)\left(\prod_{t=1}^{i}q^{m_t-1}p\right)$$

eşitliğindeki toplamların içerisinde yer alan

$$\left(\prod_{s=0}^{j}q^{n_s-1}p\right)\left(\prod_{t=1}^{i}q^{m_t-1}p\right)$$

ifadesi

$$\left(\prod_{s=0}^{j}q^{n_s-1}p\right)\left(\prod_{t=1}^{i}q^{m_t-1}p\right)=\left(q^{n_0-1}pq^{n_1-1}p\ldots q^{n_j-1}p\right)\left(q^{m_1-1}pq^{m_2-1}p\ldots q^{m_i-1}p\right)$$

$$=\left(q^{\sum_{s=0}^{j}n_s-(j+1)}p^{(j+1)}\right)\left(q^{\sum_{t=1}^{i}m_t-i}p^{i}\right)$$

$$=q^{\sum_{s=0}^{j}n_s+\sum_{t=1}^{i}m_t-j-i-1}p^{j+i+1}$$

$$=q^{n-(j+i+1)}p^{j+i+1}$$

şeklinde yazılabilir. Elde edilen bu ifadeyi (6) eşitliğinde yerine yazarak

$$P(T_{\delta,k}=n)=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{\delta+1}\right]}\sum_{j=k}^{\min\left\{\begin{matrix}n-(i(\delta+1)+1),\\(i+1)k-i\end{matrix}\right\}}\sum\cdots\sum_{\substack{x_1+x_2+\ldots+x_i=j-k\\x_1<k,x_2<k,\ldots,x_i<k}}\sum\cdots\sum_{\substack{n_0+n_1+\ldots+n_j+m_1+\ldots+m_i=n\\n_0>0,0<n_1\le\delta,\ldots,0<n_j\le\delta\\m_1>\delta,m_2>\delta,\ldots,m_i>\delta}}q^{n-(j+i+1)}p^{j+i+1}\qquad(7)$$

eşitliği elde edilir.

(7) eşitliğinde yer alan $q^{n-(j+i+1)}p^{j+i+1}$ ifadesi $n_0,n_1,\ldots,n_j,m_1,\ldots,m_i,x_1,\ldots,x_i$'lerden bağımsızdır.

Bu nedenle (7) eşitliği

$$P(T_{\delta,k}=n)=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{\delta+1}\right]}\sum_{j=k}^{\min\left\{\begin{matrix}n-(i(\delta+1)+1),\\(i+1)k-i\end{matrix}\right\}} q^{n-(j+i+1)}p^{j+i+1}\sum_{\substack{x_1+x_2+\ldots+x_i=j-k\\x_1<k,x_2<k,\ldots,x_i<k}}\ \sum_{\substack{n_0+n_1+\ldots+n_j+m_1+\ldots+m_i=n\\n_0>0,0<n_1\le\delta,\ldots,0<n_j\le\delta\\m_1>\delta,m_2>\delta,\ldots,m_i>\delta}} 1 \qquad (8)$$

olarak yazılabilir. Burada $\sum_{\substack{n_0+n_1+\ldots+n_j+m_1+\ldots+m_i=n\\n_0>0,0<n_1\le\delta,\ldots,0<n_j\le\delta\\m_1>\delta,m_2>\delta,\ldots,m_i>\delta}}\cdots\sum 1$ ifadesi, $y_1+y_2+\ldots+y_{j+1}+\ldots+y_{j+i+1}=n$ denkleminin

$$0<y_1<n, 0<y_2\le\delta,\ldots,0<y_{j+1}\le\delta,\delta+1\le y_{j+2}<n,\ldots,\delta+1\le y_{j+i+1}<n$$

kısıtları altında pozitif tam sayılı çözümlerinin sayısına eşittir ve bu çözümlerin sayısı

$$\begin{aligned}G_1=&\sum_{\substack{n_0+n_1+\ldots+n_j+m_1+\ldots+m_i=n\\n_0>0,0<n_1\le\delta,\ldots,0<n_j\le\delta\\m_1>\delta,m_2>\delta,\ldots,m_i>\delta}}\cdots\sum 1\\&=s\left(j+i+1,\quad n-\left(j+1+i(\delta+1)\right)\right)\\&-\sum_{m=1}^{j}(-1)^{m+1}\binom{j}{m}s\left(j+i+1,\quad n-\left(j+1+i(\delta+1)\right)-m\delta\right)\\&-\sum_{t=1}^{i}(-1)^{t+1}\binom{i}{t}s\left(j+i+1,\quad n-\left(j+1+i(\delta+1)\right)-t(n-\delta-1)\right)\end{aligned} \qquad (9)$$

olarak elde edilmiştir. Burada $s(n,k)=\binom{n-1+k}{k}$ şeklindedir. Çözüme ilişkin detaylar EK-1'de verilmiştir. Elde edilen bu ifade (8)'de yerine yazılırsa

$$P(T_{\delta,k}=n)=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{\delta+1}\right]}\sum_{j=k}^{\min\left\{\begin{matrix}n-(i(\delta+1)+1),\\(i+1)k-i\end{matrix}\right\}} q^{n-(j+i+1)}p^{j+i+1}\sum_{\substack{x_1+x_2+\ldots+x_i=j-k\\x_1<k,x_2<k,\ldots,x_i<k}} G_1 \qquad (10)$$

eşitliği elde edilir. Burada dikkat edilirse G_1 ifadesi $x_1,x_2,\ldots,x_i$ ifadesinden bağımsızdır. Dolayısıyla (10) eşitliği

$$P(T_{\delta,k}=n)=\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{n-k}{\delta+1}\right\rfloor}\sum_{j=k}^{\min\left\{\begin{matrix}n-(i(\delta+1)+1),\\(i+1)k-i\end{matrix}\right\}} q^{n-(j+i+1)}p^{j+i+1}G_1\sum_{\substack{x_1+x_2+\ldots+x_i=j-k\\x_1<k,x_2<k,\ldots,x_i<k}}\cdots\sum 1 \tag{11}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\sum_{\substack{x_1+x_2+\ldots+x_i=j-k\\x_1<k,x_2<k,\ldots,x_i<k}}\cdots\sum 1$ ifadesi $x_1+x_2+\ldots+x_i=j-k$ denkleminin

$x_1<k,\quad x_2<k,\quad \ldots,\quad x_i<k$ kısıtları altında pozitif tam sayılı çözümlerinin sayısına eşittir ve bu çözümlerin sayısı

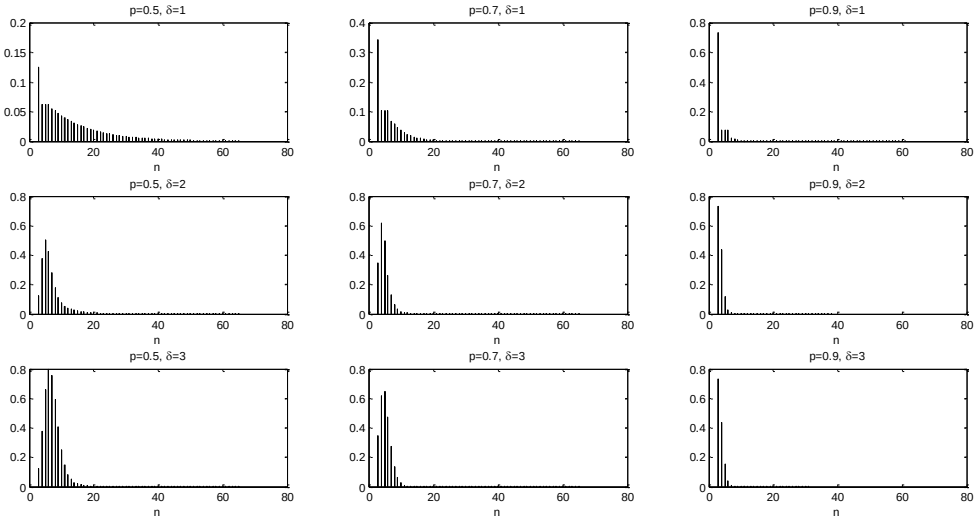
$$\begin{aligned}G_2 &= \sum_{\substack{x_1+x_2+\ldots+x_i=j-k\\x_1<k,x_2<k,\ldots,x_i<k}}\cdots\sum 1\\ &= s(i,j-k)-\left(\sum_{n=1}^{i}(-1)^{n+1}\binom{i}{n}s\left(i,j-(n+1)k\right)\right)\end{aligned} \tag{12}$$

olarak elde edilmiştir. Çözüme ilişkin detaylar EK-2'de verilmiştir.

Son olarak elde edilen (12) ifadesi (11) eşitliğinde yerine yazılırsa $T_{\delta,k}$ rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu $n=k+1,k+2,\ldots$ için

$$P(T_{\delta,k}=n)=\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{n-k}{\delta+1}\right\rfloor}\sum_{j=k}^{\min\left\{\begin{matrix}n-(i(\delta+1)+1),\\(i+1)k-i\end{matrix}\right\}} q^{n-(j+i+1)}p^{j+i+1}G_1G_2 \tag{13}$$

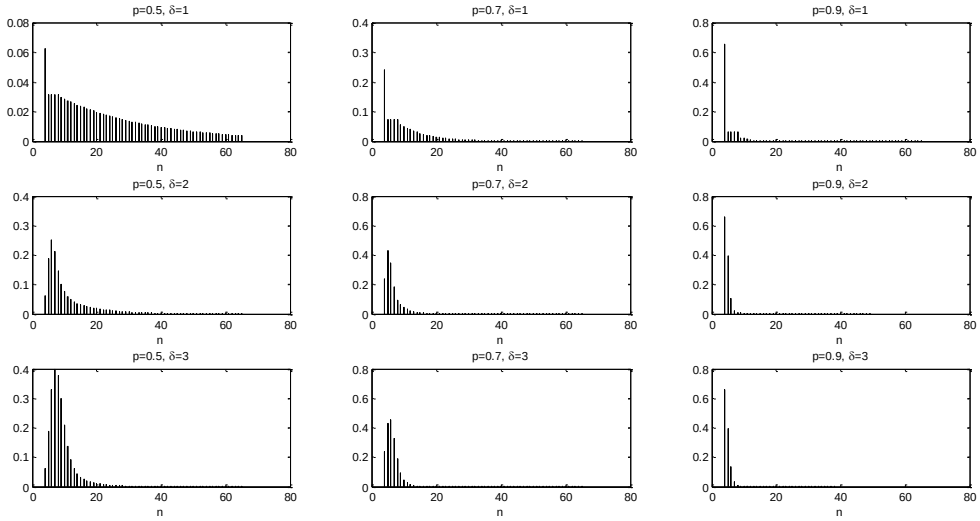
şeklinde elde edilir. Burada G_1 ve G_2 (9) ve (12)'de verildiği gibidir. Aşağıda $T_{\delta,k}$ rasgele değişkeninin (13) eşitliği ile verilen olasılık fonksiyonunun çeşitli parametre değerleri için grafikleri Şekil 2-5'de ve değerleri Çizelge 1-4'de verilmiştir.



Şekil 2. *k*=2 için $P(T_{\delta,k} = n)$ olasılık fonksiyonunun grafikleri

Çizelge 1. *k*=2 için $P(T_{\delta,k} = n)$ değerleri

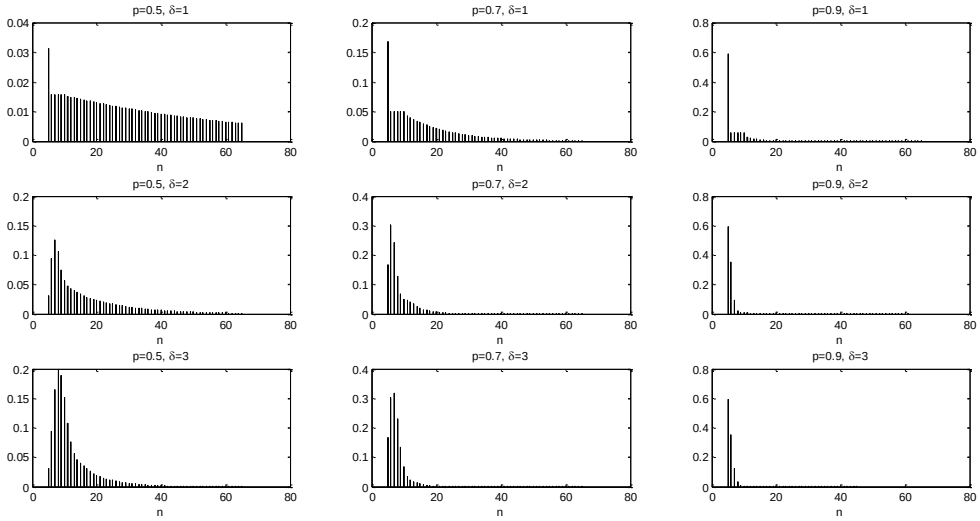
n	***δ*=1 *p*=0.5**	***δ*=1 *p*=0.7**	***δ*=1 *p*= 0.9**	***δ*=2 *p*= 0.5**	***δ*=2 *p*=0.7**	***δ*=2 *p*= 0.9**	***δ*=3 *p*= 0.5**	***δ*=3 *p*= 0.7**	***δ*=3 *p*= 0.9**
3	0,1250	0,3430	0,7290	0,1250	0,3430	0,7290	0,1250	0,3430	0,7290
4	0,0625	0,1029	0,0729	0,3750	0,6174	0,4374	0,3750	0,6174	0,4374
5	0,0625	0,1029	0,0729	0,5000	0,4939	0,1166	0,6563	0,6483	0,1531
6	0,0625	0,1029	0,0729	0,4219	0,2624	0,0255	0,7969	0,4723	0,0372
7	0,0547	0,0676	0,0198	0,2813	0,1272	0,0108	0,7578	0,2732	0,0077
8	0,0508	0,0570	0,0144	0,1758	0,0649	0,0037	0,5938	0,1348	0,0019
9	0,0469	0,0464	0,0091	0,1113	0,0327	0,0009	0,4043	0,0607	0,0005
10	0,0430	0,0358	0,0038	0,0732	0,0173	0,0003	0,2490	0,0259	0,0001
11	0,0396	0,0289	0,0024	0,0518	0,0109	0,0001	0,1450	0,0108	0,0000
12	0,0364	0,0230	0,0013	0,0393	0,0074	0,0001	0,0830	0,0046	0,0000
13	0,0334	0,0182	0,0007	0,0310	0,0049	0,0000	0,0485	0,0021	0,0000
14	0,0308	0,0146	0,0004	0,0249	0,0031	0,0000	0,0297	0,0011	0,0000
15	0,0283	0,0116	0,0002	0,0203	0,0020	0,0000	0,0194	0,0007	0,0000
16	0,0260	0,0092	0,0001	0,0168	0,0014	0,0000	0,0134	0,0004	0,0000
17	0,0239	0,0073	0,0001	0,0141	0,0009	0,0000	0,0096	0,0002	0,0000



Şekil 3. *k*=3 için $P(T_{\delta,k} = n)$ olasılık fonksiyonunun grafikleri

Çizelge 2. *k*=3 için $P(T_{\delta,k} = n)$ değerleri

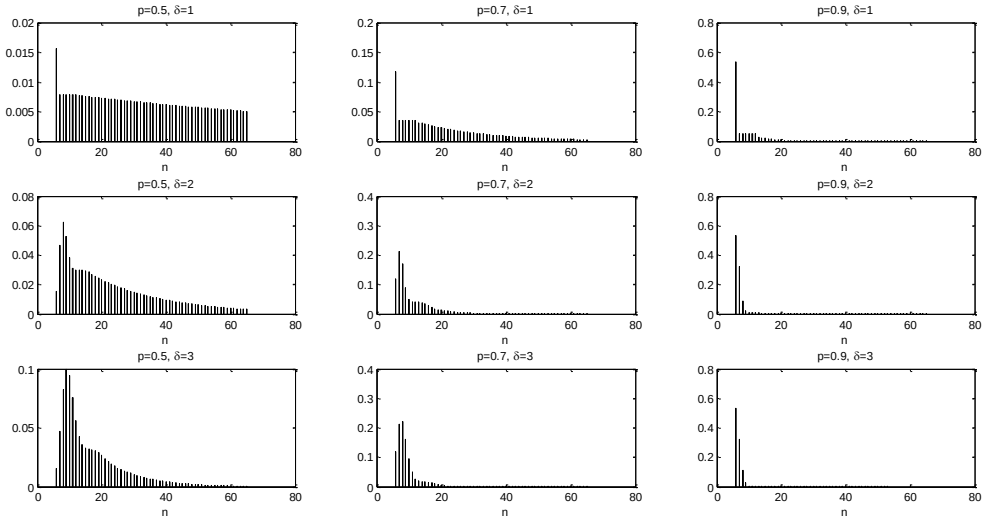
n	***δ*=1 *p*=0.5**	***δ*=1 *p*=0.7**	***δ*=1 *p*= 0.9**	***δ*=2 *p*= 0.5**	***δ*=2 *p*=0.7**	***δ*=2 *p*= 0.9**	***δ*=3 *p*= 0.5**	***δ*=3 *p*= 0.7**	***δ*=3 *p*= 0.9**
4	0,0625	0,2401	0,6561	0,0625	0,2401	0,6561	0,0625	0,2401	0,6561
5	0,0313	0,0720	0,0656	0,1875	0,4322	0,3937	0,1875	0,4322	0,3937
6	0,0313	0,0720	0,0656	0,2500	0,3457	0,1050	0,3281	0,4538	0,1378
7	0,0313	0,0720	0,0656	0,2109	0,1837	0,0230	0,3984	0,3306	0,0335
8	0,0313	0,0720	0,0656	0,1445	0,0936	0,0103	0,3789	0,1912	0,0069
9	0,0293	0,0547	0,0226	0,0996	0,0615	0,0089	0,2988	0,0957	0,0018
10	0,0283	0,0495	0,0183	0,0752	0,0465	0,0044	0,2090	0,0477	0,0010
11	0,0273	0,0444	0,0140	0,0601	0,0327	0,0014	0,1377	0,0263	0,0005
12	0,0264	0,0392	0,0096	0,0488	0,0215	0,0005	0,0911	0,0159	0,0002
13	0,0254	0,0340	0,0053	0,0406	0,0150	0,0002	0,0625	0,0097	0,0000
14	0,0245	0,0300	0,0039	0,0352	0,0115	0,0002	0,0447	0,0057	0,0000
15	0,0236	0,0265	0,0027	0,0313	0,0091	0,0001	0,0329	0,0033	0,0000
16	0,0227	0,0233	0,0018	0,0281	0,0069	0,0000	0,0250	0,0021	0,0000
17	0,0219	0,0205	0,0011	0,0252	0,0051	0,0000	0,0197	0,0014	0,0000
18	0,0211	0,0180	0,0008	0,0226	0,0037	0,0000	0,0161	0,0010	0,0000



Şekil 4. *k*=4 için $P(T_{\delta,k} = n)$ olasılık fonksiyonunun grafikleri

Çizelge 3. *k*=4 için $P(T_{\delta,k} = n)$ değerleri

n	***δ*=1 *p*=0.5**	***δ*=1 *p*=0.7**	***δ*=1 *p*= 0.9**	***δ*=2 *p*= 0.5**	***δ*=2 *p*=0.7**	***δ*=2 *p*= 0.9**	***δ*=3 *p*= 0.5**	***δ*=3 *p*= 0.7**	***δ*=3 *p*= 0.9**
5	0,0313	0,1681	0,5905	0,0313	0,1681	0,5905	0,0313	0,1681	0,5905
6	0,0156	0,0504	0,0590	0,0938	0,3025	0,3543	0,0938	0,3025	0,3543
7	0,0156	0,0504	0,0590	0,1250	0,2420	0,0945	0,1641	0,3177	0,1240
8	0,0156	0,0504	0,0590	0,1055	0,1286	0,0207	0,1992	0,2314	0,0301
9	0,0156	0,0504	0,0590	0,0742	0,0687	0,0098	0,1895	0,1339	0,0062
10	0,0156	0,0504	0,0590	0,0557	0,0500	0,0087	0,1504	0,0680	0,0017
11	0,0151	0,0419	0,0242	0,0474	0,0452	0,0087	0,1079	0,0358	0,0010
12	0,0149	0,0394	0,0207	0,0432	0,0412	0,0052	0,0759	0,0230	0,0009
13	0,0146	0,0369	0,0172	0,0402	0,0340	0,0020	0,0566	0,0180	0,0005
14	0,0144	0,0343	0,0137	0,0369	0,0254	0,0007	0,0460	0,0147	0,0002
15	0,0142	0,0318	0,0102	0,0336	0,0188	0,0004	0,0396	0,0112	0,0001
16	0,0139	0,0292	0,0067	0,0307	0,0148	0,0003	0,0347	0,0078	0,0000
17	0,0137	0,0271	0,0053	0,0284	0,0124	0,0002	0,0302	0,0052	0,0000
18	0,0134	0,0251	0,0041	0,0266	0,0104	0,0001	0,0260	0,0034	0,0000
19	0,0132	0,0233	0,0031	0,0250	0,0085	0,0001	0,0223	0,0023	0,0000



Şekil 5. *k*=5 için $P(T_{\delta,k} = n)$ olasılık fonksiyonunun grafikleri

Çizelge 4. *k*=5 için $P(T_{\delta,k} = n)$ değerleri

n	***δ*=1 *p*=0.5**	***δ*=1 *p*=0.7**	***δ*=1 *p*= 0.9**	***δ*=2 *p*= 0.5**	***δ*=2 *p*=0.7**	***δ*=2 p= 0.9**	***δ*=3 *p*= 0.5**	***δ*=3 *p*= 0.7**	***δ*=3 *p*= 0.9**
6	0,0156	0,1176	0,5314	0,0156	0,1176	0,5314	0,0156	0,1176	0,5314
7	0,0078	0,0353	0,0531	0,0469	0,2118	0,3189	0,0469	0,2118	0,3189
8	0,0078	0,0353	0,0531	0,0625	0,1694	0,0850	0,0820	0,2224	0,1116
9	0,0078	0,0353	0,0531	0,0527	0,0900	0,0186	0,0996	0,1620	0,0271
10	0,0078	0,0353	0,0531	0,0381	0,0503	0,0093	0,0947	0,0937	0,0056
11	0,0078	0,0353	0,0531	0,0313	0,0406	0,0086	0,0757	0,0483	0,0015
12	0,0078	0,0353	0,0531	0,0298	0,0394	0,0086	0,0559	0,0269	0,0010
13	0,0077	0,0311	0,0249	0,0297	0,0393	0,0086	0,0424	0,0192	0,0009
14	0,0076	0,0299	0,0221	0,0296	0,0381	0,0057	0,0356	0,0170	0,0009
15	0,0076	0,0287	0,0193	0,0293	0,0340	0,0026	0,0330	0,0162	0,0006
16	0,0075	0,0274	0,0164	0,0284	0,0277	0,0010	0,0320	0,0149	0,0003
17	0,0074	0,0262	0,0136	0,0271	0,0217	0,0005	0,0314	0,0127	0,0001
18	0,0074	0,0249	0,0108	0,0255	0,0174	0,0004	0,0303	0,0099	0,0000
19	0,0073	0,0237	0,0080	0,0242	0,0148	0,0003	0,0286	0,0072	0,0000
20	0,0073	0,0226	0,0066	0,0230	0,0129	0,0002	0,0264	0,0050	0,0000

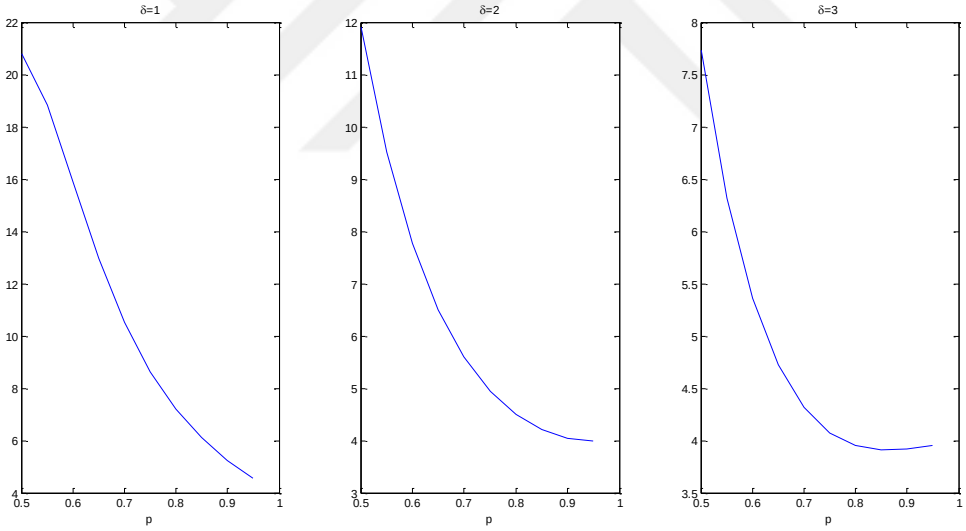
3.3. Beklenen Değer

$T_{\delta,k}$ rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu $P(T_{\delta,k}=n)$ olmak üzere $T_{\delta,k}$ rasgele değişkeninin beklenen değeri

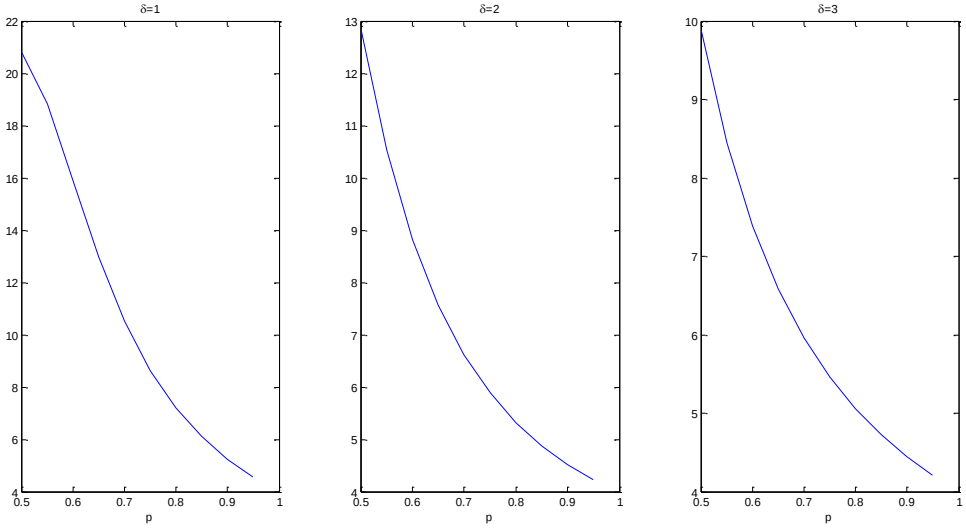
$$E\left(T_{\delta,k}\right)=\sum_{n=k+1}^{\infty} nP(T_{\delta,k}=n)$$

$$=\sum_{n=k+1}^{\infty} n\left(\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{n-k}{\delta+1}\right\rfloor}\sum_{j=k}^{\min\left\{\begin{matrix}n-(i(\delta+1)+1),\\(i+1)k-i\end{matrix}\right\}} q^{n-(j+i+1)}p^{j+i+1}G_1G_2\right)$$

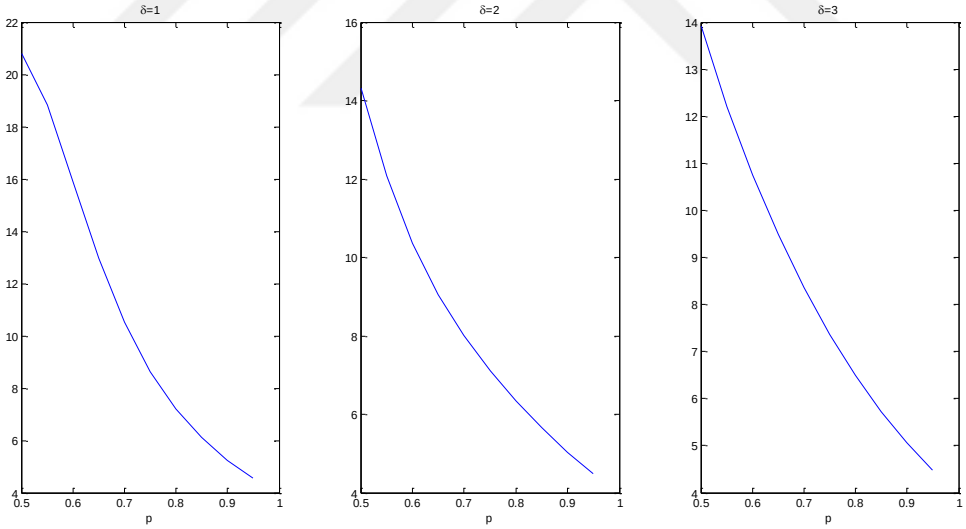
olarak ifade edilir. Ancak bu beklenen değerin daha sade bir ifadesi elde edilememektedir. $T_{\delta,k}$ rasgele değişkeninin beklenen değerinin çeşitli parametre değerleri için grafikleri Şekil 6-9'da verilmiştir.



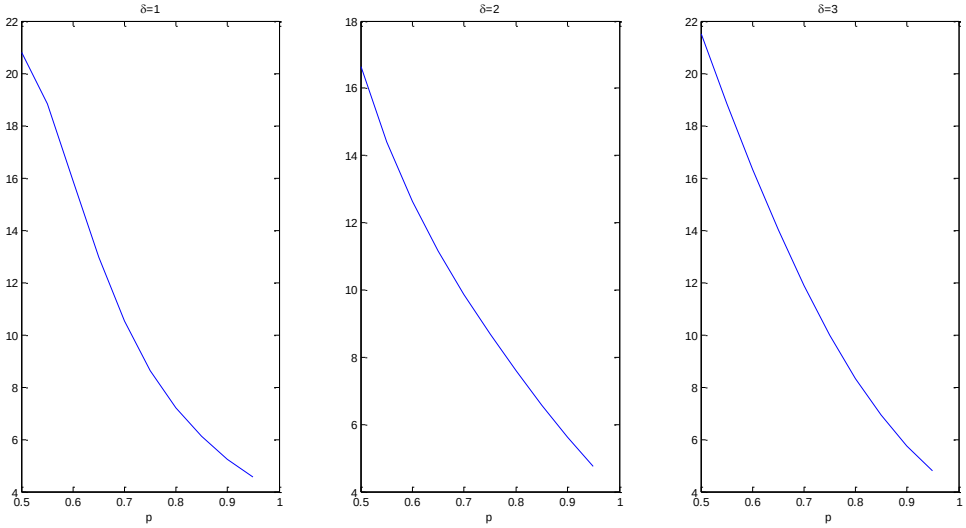
Şekil 6. *k*=2 için $E(T_{\delta,k})$ beklenen değer grafikleri



Şekil 7. *k*=3 için $E(T_{\delta,k})$ beklenen değer grafikleri



Şekil 8. *k*=4 için $E(T_{\delta,k})$ beklenen değer grafikleri



Şekil 9. *k*=5 için $E(T_{\delta,k})$ beklenen değer grafikleri

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışma ile kesikli δ-şok modellerinin daha genel bir hali olan yeni bir model tanımlanmıştır. Bu modelin olasılık dağılımı ve bu dağılımın bazı karakteristik özellikleri bulunarak literatüre kesikli k-ardıl δ-şok modeli isminde yeni bir olasılık dağılımı kazandırılmıştır. Bu yeni olasılık dağılımı kesikli verilerin modellenmesinde bir alternatif model olarak düşünülebilir. İleriki zamanlarda, elde edilen bu olasılık dağılımına ilişkin sonuç çıkarımı çalışmalarına da yer verilebilir.

EKLER

EK-1: E_4**'ün Çözüm Sayısı**

$y_1 + y_2 + ... + y_{j+1} + ... + y_{j+i+1} = n$ denkleminin

$$0 < y_1 < n, 0 < y_2 \le \delta, \ldots, 0 < y_{j+1} \le \delta, \delta + 1 \le y_{j+2} < n, \ldots, \delta + 1 \le y_{j+i+1} < n$$

kısıtları altında uygun çözümlerinin sayısını bulmak için

önce kısıtları,

$$\underbrace{1 \le y_1 < n}_{A} \underbrace{1 \le y_2 < \delta + 1, \quad ..., \quad 1 \le y_{j+1} < \delta + 1}_{B} \underbrace{\delta + 1 \le y_{j+2} < n, \quad ..., \quad \delta + 1 \le y_{j+i+1} < n}_{C}$$

şeklinde yazalım.

$$z_1 = y_1 - 1, z_2 = y_2 - 1, ..., z_{j+1} = y_{j+1} - 1,$$

$$z_{j+2} = y_{j+2} - (\delta + 1), ..., z_{j+i+1} = y_{j+i+1} - (\delta + 1)$$

dönüşümü sonucu denklem,

$$z_1 + z_2 + ... + z_{j+1} + ... + z_{j+i+1} = n - (j + 1 + i(\delta + 1))$$

kısıtlar ise,

$$z_1 < n - 1, z_2 < \delta, ..., z_{j+1} < \delta, z_{j+2} < n - (\delta + 1), ..., z_{j+i+1} < n - (\delta + 1)$$

olmaktadır.

$$z_1 + z_2 + ... + z_{j+1} + ... + z_{j+i+1} = n - (j + 1 + i(\delta + 1))$$

$$z_1 < n - 1, z_2 < \delta, ..., z_{j+1} < \delta, z_{j+2} < n - (\delta + 1), ..., z_{j+i+1} < n - (\delta + 1)$$

olmak üzere çözümleri üstten sınırlı bu denklem için,

$A_1 \rightarrow z_1 \geq n-1$ olan çözümlerin kümesi,

$B_1 \rightarrow z_2 \geq \delta$ olan çözümlerin kümesi,

$B_2 \rightarrow z_3 \geq \delta$ olan çözümlerin kümesi,

.
.
.

$B_{j+1} \rightarrow z_{j+1} \geq \delta$ olan çözümlerin kümesi,

$C_1 \rightarrow z_{j+2} \geq n-(\delta+1)$ olan çözümlerin kümesi,

.
.
.

$C_j \rightarrow z_{j+i+1} \geq n-(\delta+1)$ olan çözümlerin kümesi,

olsun.

$s(n,k) = \binom{n-1+k}{k}$ olduğundan,

A_1 kümesinin çözüm sayısı,

$n(A_1) = s(j+i+1, \quad n-(j+1+i(\delta+1))-(n-1)) = 0$ dır.

(Öztürk, 1995)

$B_1, B_2, ..., B_j$ kümelerinin çözüm sayısını,

$$n(B) = n(B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_j) = \sum_{m=1}^{j} n(B_m) - \sum\sum_{1 \leq m < s \leq j} n(B_m \cap B_s) + ... + (-1)^{j+1} n(B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_j)$$

şeklinde bulunabilir.

$n(B_m) = s(j+i+1, \quad n-(j+1+i(\delta+1))-\delta) \rightarrow$ m'den bağımsız

$n(B_m \cap B_s) = s(j+i+1, \quad n-(j+1+i(\delta+1))-2\delta) \rightarrow$ m'den ve s'den bağımsız

.

.

.

$n(B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_j) = s(j+i+1, \quad n-(j+1+i(\delta+1))-j\delta)$

(Öztürk, 1995)

$$\begin{aligned} n(B) = n(B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_j) &= \binom{j}{1} s(j+i+1, \quad n-(j+1+i(\delta+1))-\delta) \\ &\quad - \binom{j}{2} s(j+i+1, \quad n-(j+1+i(\delta+1))-2\delta) + ... \\ &\quad + (-1)^{j+1} \binom{j}{j} s(j+i+1, \quad n-(j+1+i(\delta+1))-j\delta) \\ &= \sum_{m=1}^{j} (-1)^{m+1} \binom{j}{m} s(j+i+1, \quad n-(j+1+i(\delta+1))-m\delta) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Benzer düşüncelerle $C_1, C_2, ..., C_i$ kümelerinin çözüm sayısı

$$n(C) = n(C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_i) = \sum_{t=1}^{i} n(C_t) - \sum\sum_{1 \le t < p \le i} (C_t \cap C_p) + ... + (-1)^{i+1} n(C_1 \cap C_2 \cap ... \cap C_i)$$

şeklinde elde edilir.

$$n(C_t) = s(j+i+1,\quad n-(j+1+i(\delta+1))-(n-\delta-1)) \rightarrow \text{t'den bağımsız}$$

$$n(C_t \cap C_p) = s(j+i+1,\quad n-(j+1+i(\delta+1))-2(n-\delta-1)) \rightarrow \text{t'den ve p'den bağımsız}$$

.
.
.

$$n(C_1 \cap C_2 \cap ... \cap C_i) = s(j+i+1,\quad n-(j+1+i(\delta+1))-i(n-\delta-1))$$

(Öztürk, 1995)

$$\begin{aligned} n(C) = n(C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_i) = & \binom{i}{1} s(j+i+1,\quad n-(j+1+i(\delta+1))-(n-\delta-1)) \\ & -\binom{i}{2} s(j+i+1,\quad n-(j+1+i(\delta+1))-2(n-\delta-1)) + ... \\ & +(-1)^{i+1}\binom{i}{i} s(j+i+1,\quad n-(j+1+i(\delta+1))-i(n-\delta-1)) \\ & = \sum_{t=1}^{i}(-1)^{t+1}\binom{i}{t} s(j+i+1,\quad n-(j+1+i(\delta+1))-t(n-\delta-1)) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

A_1 ve $B_1, B_2, ..., B_j$ kümelerinin ikili kesişimlerinin çözüm sayıları,

$$n(A_1 \cap B_1) = s(j+i+1,\quad n-(j+1+i(\delta+1))-n+1-\delta) = 0$$

.
.
.

$$n(A_1 \cap B_j) = s(j+i+1,\quad n-(j+1+i(\delta+1))-n+1-\delta) = 0$$

şeklinde elde edilir.

A_1 ve $C_1, C_2, ..., C_i$ kümelerinin ikili kesişimlerinin çözüm sayıları,

$$n(A_1 \cap C_1) = s(j+i+1, \quad n-(j+1+i(\delta+1))-n+1-(n-\delta-1)) = 0$$

.
.
.

$$n(A_1 \cap C_i) = s(j+i+1, \quad n-(j+1+i(\delta+1))-n+1-(n-\delta-1)) = 0$$

şeklinde elde edilir.

$B_1, B_2, ..., B_j$ ve $C_1, C_2, ..., C_i$ kümelerinin ikili keşişimlerinin çözüm sayıları,

$$n(B_1 \cap C_1) = s(j+i+1, \quad n-(j+1+i(\delta+1))-\delta-(n-\delta-1)) = 0$$

.
.
.

$$n(B_j \cap C_i) = s(j+i+1, \quad n-(j+1+i(\delta+1))-\delta-(n-\delta-1)) = 0$$

şeklinde elde edilir.

A_1, $B_1, B_2, ..., B_j$ ve $C_1, C_2, ..., C_i$ kümelerinin üçlü kesişimlerinin çözüm sayıları,

$$n(A_1 \cap B_1 \cap C_1) = s(j+i+1, \quad n-(j+1+i(\delta+1))-n+1-\delta-(n-\delta-1)) = 0$$

.
.
.

$$n(A_1 \cap B_j \cap C_i) = s(j+i+1, \quad n-(j+1+i(\delta+1))-n+1-\delta-(n-\delta-1)) = 0$$

şeklinde elde edilir.

$y_1 + y_2 + ... + y_{j+1} + ... + y_{j+i+1} = n$ denkleminin

$$0 < y_1 < n, 0 < y_2 \le \delta, \ldots, 0 < y_{j+1} \le \delta, \delta + 1 \le y_{j+2} < n, \ldots, \delta + 1 \le y_{j+i+1} < n$$

kısıtlarına uygun çözümlerinin sayısı,

$$n(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = s\left(j+i+1, \quad n-\left(j+1+i(\delta+1)\right)\right) - n(A \cup B \cup C)$$
$$= s\left(j+i+1, \quad n-\left(j+1+i(\delta+1)\right)\right) - \begin{pmatrix} n(A)+n(B)+n(C)-n(A \cap B)-n(A \cap C) \\ -n(B \cap C)+n(A \cap B \cap C) \end{pmatrix}$$

$$n(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = s\left(j+i+1, \quad n-\left(j+1+i(\delta+1)\right)\right)$$
$$-\sum_{m=1}^{j}(-1)^{m+1}\binom{j}{m} s\left(j+i+1, \quad n-\left(j+1+i(\delta+1)\right)-m\delta\right)$$
$$-\sum_{t=1}^{i}(-1)^{t+1}\binom{i}{t} s\left(j+i+1, \quad n-\left(j+1+i(\delta+1)\right)-t(n-\delta-1)\right)$$

dır.

EK-2: E_3**'ün Çözüm Sayısı**

$x_1 + x_2 + ... + x_i = j - k$ denkleminin $x_1 < k, x_2 < k, ..., x_i < k$ kısıtları altında uygun çözümlerinin sayısı için,

$D_1 \rightarrow x_1 \geq k$ kısıtına uygun çözümlerinin kümesi,

$D_2 \rightarrow x_2 \geq k$ kısıtına uygun çözümlerinin kümesi,

.
.
.

$D_i \rightarrow x_i \geq k$ kısıtına uygun çözümlerinin kümesi

olsun.

$D_1, D_2, ..., D_i$ kümelerinin çözüm sayısı,

$$n(D) = n(D_1 \cup D_2 \cup ... \cup D_i) = \sum_{n=1}^{i} n(D_n) - \sum\sum_{1 \leq n < t \leq i} n(D_n \cap D_t) + ... + (-1)^{i+1} n(D_1 \cap D_2 \cap ... \cap D_i)$$

olarak yazılabilir.

$n(D_n) = s(i,\ j-k-k) \rightarrow$ n'den bağımsız

$n(D_n \cap D_t) = s(j-k-2k) \rightarrow$ n'den ve t'den bağımsız

.
.
.

$n(D_1 \cap D_2 \cap ... \cap D_i) = s(i,\ j-k-ik)$

şeklindedir (Öztürk, 1995).

$$n(D)=n(D_1\cup D_2\cup\ldots\cup D_i)=\binom{i}{1}s(i,j-2k)-\binom{i}{2}s(i,j-3k)+\ldots+(-1)^{i+1}\binom{i}{i}s(i,j-(i+1)k)$$
$$=\sum_{n=1}^{i}(-1)^{n+1}\binom{i}{n}s(i,j-(n+1)k)$$

olarak elde edilir.

$x_1+x_2+\ldots+x_i=j-k$ denkleminin $x_1<k, x_2<k,\ldots, x_i<k$ kısıtlarına uygun çözümlerinin sayısı,

$$n(\overline{D}_1\cap\overline{D}_2\cap\ldots\cap\overline{D}_i)=s(i,j-k)-n(D_1\cup D_2\cup\ldots\cup D_i)$$
$$=s(i,j-k)-\left(\sum_{n=1}^{i}(-1)^{n+1}\binom{i}{n}s(i,j-(n+1)k)\right)$$

dır.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Havva ARIGÜN
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : Bor/NİĞDE-1989
Telefon : 05412819313
e-mail : hawa-89@hotmail.com

EĞİTİM

Derece		Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	:	**Özel Konya Başak Lisesi, Meram, KONYA**	**2006**
Üniversite	:	**S.Ü. Fen Fakültesi İstatistik Bölümü**	**2013**

UZMANLIK ALANI

İstatistik

YABANCI DİLLER

İngilizce

KAYNAKLAR

Aki, S. ve Hirano, K., 1988, Some characteristics of the binomial distribution of order k and related distributions, Statistical Theory and Data Analysis II,(ed. K. Matusita), 11-222, North Holand.

Bai, J.-M., Li, Z.-H. ve Kong, X.-B., 2006, Generalized shock models based on a cluster point process, *IEEE Transactions on Reliability*, 55 (3), 542-550.

Charalambides, C. A., 1986, On discrete distributions of orderk, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 38 (1), 557-568.

Charalambides, C. A., 2010, The q-Bernstein basis as a q-binomial distribution, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 140 (8), 2184-2190.

Cirillo, P. ve Hüsler, J., 2009, An urn approach to generalized extreme shock models, *Statistics & probability letters*, 79 (7), 969-976.

Cirillo, P. ve Hüsler, J., 2011, Extreme shock models: An alternative perspective, *Statistics & probability letters*, 81 (1), 25-30.

Eryilmaz, S. ve Demir, S., 2007, Success runs in a sequence of exchangeable binary trials, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 137 (9), 2954-2963.

Eryilmaz, S., 2013, On the lifetime behavior of a discrete time shock model, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 237 (1), 384-388.

Eryilmaz, S., 2014, Geometric distribution of order k with a reward, *Statistics & probability letters*, 92, 53-58.

Eryılmaz, S. ve Yalçın, F., 2011, On the mean and extreme distances between failures in Markovian binary sequences, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 236 (6), 1502-1510.

Eryılmaz, S., 2012, Generalized δ-shock model via runs, *Statistics & probability letters*, 82 (2), 326-331.

Gut, A., 1990, Cumulative shock models, *Advances in Applied Probability*, 504-507.

Gut, A. ve Hüsler, J., 2005, Realistic variation of shock models, *Statistics & probability letters*, 74 (2), 187-204.

Koutras, M., 1996, On a waiting time distribution in a sequence of Bernoulli trials, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 48 (4), 789-806.

Li, Z. ve Kong, X., 2007, Life behavior of δ-shock model, *Statistics & probability letters*, 77 (6), 577-587.

Li, Z. ve Zhao, P., 2007, Reliability analysis on the δ-shock model of complex systems, *IEEE Transactions on Reliability*, 56 (2), 340-348.

Mallor, F. ve Omey, E., 2001, Shocks, runs and random sums, *Journal of Applied Probability*, 38 (2), 438-448.

Mohanty, S., 1994, Success runs of lengthk in Markov dependent trials, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 46 (4), 777-796.

Öztürk, F., 1995, Kombinatorik. Ankara Üniversitesi, F. F., İstatistik Bölümü**:** 81-89.

Sumita, U. ve Shanthikumar, J. G., 1985, A class of correlated cumulative shock models, *Advances in Applied Probability*, 347-366.

Wang*, G. ve Zhang, Y., 2005, A shock model with two-type failures and optimal replacement policy, *International Journal of Systems Science*, 36 (4), 209-214.

Yalcin, F., 2014, On a generalization of Ling's binomial distribution, *İSTATİSTİK, JOURNAL OF THE TURKISH STATISTICAL ASSOCIATION*, 6 (3), 110-115.