T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ TÜREVİ İÇİN LEIBNIZ KURALI

SEVİLAY ARSLAN

TEMMUZ 2017

Matematik Anabilim Dalında SEVİLAY ARSLAN tarafından hazırlanan RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ TÜREVİ İÇİN LEIBNIZ KURALI adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Ana Bilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Doç. Dr. Recep ŞAHİN
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan : _____
Üye (Danışman) : _____
Üye : _____

……/…../…….

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Mustafa YİĞİTOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ TÜREVİ İÇİN LEIBNIZ KURALI

ARSLAN, Sevilay
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. RECEP ŞAHİN
Temmuz 2017, 86 sayfa

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde yapılan çalışmalar ve tezin genel amacı hakkında bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde ise Gamma fonksiyonu, Beta fonksiyonu gibi temel kavramlar açıklanmıştır. Üçüncü bölümde Grünwald-Letnikov ve Riemann-Liouville kesirli türevi ele alınmıştır. Dördüncü bölümde ise Riemann-Liouville kesirli türevi yardımıyla Leibniz formülünün var olup olmadığı araştırılmıştır. Beşinci bölüm ise tartışma ve sonuç kısmına ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Gamma fonksiyonu, Grünwald-Letnikov kesirli türevi, Riemann-Liouville kesirli türevi, Leibniz Kuralı

ABSTRACT

LEIBNIZ RULE FOR RIEMANN-LIOUVILLE FRACTIONAL DERIVATIVE

ARSLAN, Sevilay
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, M. Sc. Thesis
Supervisor: Assoc. Doç. Dr. RECEP ŞAHİN
July 2017, 86 pages

This thesis consists of five parts. In the first part, the works done and the general purpose of the thesis were given. In the second part, basic concepts such as Gamma function and Beta function are explained. In the third part, Grünwald-Letnikov and Riemann-Liouville have been discuss in the fractional derivation. In the fourth part, it has investigated the existence of Leibniz formula with Riemann-Liouville fractional derivation. The fifth part, it is divided into discussion and conclusion part.

Key words: Gamma functions, Grünwald-Letnikov fractional derivative, Riemann-Liouville fractional derivative, Leibniz rule.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca; bilgi, ilgi ve desteğini esirgemeyen, tecrübe ve katkıları ile beni yönlendiren değerli hocam Sayın Doç. Dr. Recep ŞAHİN' e, çalışmalarım esnasında beni destekleyen Kırıkkale Üniversitesi Matematik Bölümündeki değerli hocalarıma ve eğitim hayatım boyunca da maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen değerli aileme teşekkürlerimi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET..... i
ABSTRACT..... ii
TEŞEKKÜR iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ ……... iv
ŞEKİLLER DİZİNİ…….…...v
SİMGELER DİZİNİ……....vi
1. GİRİŞ ……. 1
1.1. Kaynak Özetleri…….. 1
1.2. Çalışmanın Amacı …….. 2
2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER……...3
2.1. Gamma Fonksiyonu……..……. 3
2.2. Beta Fonksiyonu..…….……..……...……...… 11
2.3. Çevre İntegrali……..……..……..16
3. KEYFİ BASAMAKTAN TÜREV VE ·INTEGRALLER……...20
3.1 Giriş……..…… 20
3.2. Grünwald-Letnikov Kesirli Türevi…….… 21
3.3. Riemann-Liouville Kesirli Türevi…….. 48
4. RIEMANN-LIOVILLE KESİRLİ TÜREVİ İÇİN LEIBNIZ FORMÜLÜ...68
4.1. Giriş…….……..68
4.2. Riemann-Liouville Kesirli Türevi İçin Leibniz Formülü…….……72
5. TARTIŞMA VE SONUÇ ……....76
KAYNAKLAR ……...77

ŞEKİLLER DİZİNİ

ŞEKİL Sayfa

1.1. C Çevresi……..14
1.2. C Çevresi……..…….……..…...17

SİMGELER DİZİNİ

Γ	Gama Fonksiyonu
$\sum$	Toplam Sembolü
$\prod$	Çarpım Sembolü
Δ	Fark Operatörü
I	Birim Operatörü
${}_aD_t^{\alpha} f(t)$	Kesirli Türev
$\lceil x \rceil$	x in tam değer

1.GİRİŞ

Uygulamalı matematiğin birçok alanında kesirli türev konusu önemli bir yer tutmaktadır. Bu konu birçok matematikçi tarafından çalışılmış ve günümüzde de çalışılmaya devam etmektedir.

Matematiğin en temel kavramlarından birisi türevdir. Bilindiği üzere bir $y = f(x)$ fonksiyonu bir $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli ise ve her noktasından yalnızca bir tek teğet bulunuyorsa bu fonksiyon o noktada türevlenebilirdir denir. Bu ise $y = f'(x)$ ile gösterilir. Burada türevin kuvveti 1 dir ve tüm pozitif tamsayılar için türev elde edilebilir. Burada şu soru akla gelmektedir. Bu türevin kuvveti her zaman pozitif tamsayı mı olmalıdır? Yani kesirli basamaktan türev var mıdır? Gamma fonksiyonu yardımıyla bu sorunun cevabı araştırılmıştır. Grünwald-Letnikov ve Riemann-Liouville verdikleri tanımlarla bu soruya cevap aramışlardır.

f , g fonksiyonları türevlenebilir fonksiyonlar olsunlar. Bilinmektedir ki türev operatörü temel bazı özellikleri sağlamaktadır. Bunlardan birkaçı lineerlik özelliği, toplanabilme özelliği, türevde zincir kuralı ve Leibniz formülüdür.

Bu çalışmada Riemann-Liouville kesirli türev operatörünün Leibniz formülünü sağlayıp sağlamadığı araştırılmıştır.

1.1. Kaynak özetleri

Bu tez çalışmamızda temel kavramlar için Igor Podlubny nin “Fractional Differential Equations” ve Kai Dielthelm in ’’The analiysis of Fractional Differential equations‘’ adlı kitapları referanslarımız olmuştur [1,3]. Ayrıca bu alanda çıkmış pek çok kaynaktan faydalanılmıştır. [1-14]

1.2. Çalışmanın Amacı

Bu tez çalışmasında Riemann-Liouville kesirli türev operatörünün Leibniz kuralını sağlayıp sağlamadığı detaylı bir şekilde incelenmiş olup ileriki çalışmalara iyi bir taban oluşturması amaçlanmıştır.

2. TEMEL TANIMLAR VE KAVRAMLAR

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar verilecektir.

2.1.Gamma Fonksiyonu

Gamma fonksiyonunun integral tanımı

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt \tag{2.1}$$

dır. Gamma fonksiyonu $Re(z) > 0$ için yakınsaktır. Gerçekten,

$$\Gamma(x+iy) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x+iy-1}\, dt = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1} t^{iy} dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1} e^{iy\, log(t)} \mathrm{dt}$$

$$= \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \left[cos(y\, log(t))) + i\, sin(y\, log(t))\right] dt \tag{2.2}$$

olup köşeli parantezin içindeki ifade her t için sınırlıdır. e^{-t} fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında sınırlıdır. Ayrıca t^{x-1} tanımından dolayı her ne kadar $x = Re(z) > 1$ olması gerektiği görünse de $Re(z) > 0$ içinde bu integral yakınsaktır.

2.1.1. Gamma Fonksiyonunun Bazı Özellikleri

Gamma fonksiyonunun en temel özelliklerinden birisi

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{2.3}$$

dir. Bu ifade kısmi integrasyon yöntemi ile kolayca ispatlanabilir. Gerçekten

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1} dt$$

ifadesinde z yerine $z+1$ alınırsa

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z+1-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} t^z dt$$

dir. Yukarıdaki son integralde $u = t^z$, $dv = e^{-t}dt$ alınarak kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

elde edilir. Buradan açıkça görülmektedir ki $\Gamma(1) = 1$ dir. (2.3) ü kullanarak $z = 1,2,3,$ ... için

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1.1! = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2.1! = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3.2! = 3!$$

$$\vdots$$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!$$

dir.

Gamma fonksiyonunun bir diğer önemli özelliği ise Gamma fonksiyonu

$$z = -n\,, (n = 0,1,2, \dots)$$

noktalarında basit kutba sahip olmasıdır. Bunu göstermek için (2.1) ifadesini

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1} dt$$

$$= \int_0^1 e^{-t}\, t^{z-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt \qquad (2.4)$$

formunda yazalım. (2.4) daki ilk integral, üstel fonksiyonun seri açılımı kullanılarak hesaplanabilir. Eğer $Re(z) = x > 0$ ise $Re(z+k) = x + k > 0$ için $t^{z+k}|_{t=0}$ =0 dır. Böylece

$$\int_0^1 e^{-t} t^{z-1}\, dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^\infty \frac{(-t)^k}{k!} t^{z-1} dt$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 t^{k+z-1}\, dt$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!\,(k+z)}$$

olur.

İkinci integral, z kompleks değişkeninin bir tam fonksiyonu olarak tanımlanabilir. Gerçekten,

$$\varphi(z) = \int_1^{\infty} e^{-t}\, t^{z-1} = \int_1^{\infty} e^{(z-1)\log(t)} e^{-t}\, dt = \int_1^{\infty} e^{(z-1)\log(t)-t}\, dt \qquad (2.5)$$

dir. $e^{(z-1)\log(t)-t}$ fonksiyonu keyfi z ve $t \geq 1$ için z ve t nin sürekli bir fonksiyonudur. Üstelik, $t \geq 1$ için $\log(t) \geq 0$ olduğundan dolayı $e^{(z-1)log(t)-t}$ ifadesi z nin bir tam fonksiyonudur.

Kompleks düzlemde keyfi, sınırlı ve kapalı bir D bölgesini ele alalım.
$x_0 = \max_{z \epsilon D} Re(z)$ olsun. O halde,

$$|e^{-t}t^{z-1}| = \left|e^{(z-1)\log(t)-t}\right| = \left|e^{(x+iy-1)\log(t)-t}\right|$$

$$= \left|e^{(x-1)\log(t)-t}\right|\left|e^{iylog(t)}\right|$$

$$= \left|e^{(x-1)\log(t)-t}\right| \leq e^{(x_0-1)\log(t)-t} = e^{-t}t^{x_0-1}$$

dir.

Bu demektir ki sınırlandırma z den bağımsız olduğu için (2.5) integrali D de düzgün yakınsaktır. Böylece $\varphi(z)$, D de düzgündür ve (2.5) deki integral altında türevlenebilmeye izin verir. D bölgesi keyfi seçildiği için $\varphi(z)$ fonksiyonunu tüm kompleks düzlemde yukarıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyon olarak seçebiliriz. Dolayısıyla $\varphi(z)$ integral işareti altında türevlenebilmeye izin veren bir tam fonksiyondur. Yukarıdaki hususları göz önüne alarak

$$\Gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+z)} + \int_1^{\infty} e^{-t}t^{z-1}\, dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+z)} + tam\ fonksiyon \qquad (2.6)$$

olduğu görülebilir. Gerçekten de $\Gamma(z)$ fonksiyonu $z = -k\ (k = 0,1,2, \dots)$ de basit kutup noktalarına sahiptir.

2.1.2. Gamma Fonksiyonunun Limit Gösterimi

Gamma fonksiyonu ayrıca

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\dots(z+n)} \tag{2.7}$$

limiti ile de gösterilebilir. Burada başlangıçta $Re(z) > 0$ kabul edilecektir. (2.7) yi ispatlamak için ilk olarak

$$f_n(z) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt \tag{2.8}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. (2.8) deki integrale $\frac{t}{n} = \tau$ dönüşümü uygulanırsa,

$$f_n(z) = \int_0^1 (1-\tau)^n\, (\tau n)^{z-1} n d\tau$$

$$= \int_0^1 (1-\tau)^n \tau^{z-1} n^{z-1} n d\tau$$

$$= n^z \int_0^1 (1-\tau)^n \tau^{z-1} d\,\tau$$

olur. Bu integrale bir kez kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$f_n(z) = n^z \left[(1-\tau)^n \frac{\tau^z}{z} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\tau^z}{z} n(1-\tau)^{n-1} d\tau \right]$$

$$= \frac{n^z}{z} n \int_0^1 (1-\tau)^{n-1} \tau^z d\tau$$

elde edilir. Bu işlem *n* kez tekrarlanırsa

$$\int_0^1 (1-\tau)^{n-1} \tau^z d\tau = \frac{(n-1)(n-2)\dots 2.1}{(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)} \int_0^1 \tau^{z+n-1} d\tau$$

$$= \frac{(n-1)!}{(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)(z+n)}$$

olup

$$f_n(z) = \frac{n^z n!}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)(z+n)} \tag{2.9}$$

dir. Diğer taraftan

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}$$

olduğu dikkate alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt$$

yazılabilir. Eğer yukarıdaki ifadede limitle integral yer değiştirebiliyorsa (2.7) deki Gamma fonksiyonunun limit gösterimi ispatlanmış olur. Yani

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt = \Gamma(z) \tag{2.10}$$

dir. Bunu göstermek için Δ farkını hesaplayalım.

$$\Delta = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt - f_n(z)$$

$$= \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt - \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt$$

$$= \int_0^n e^{-t}\,t^{z-1}dt + \int_n^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt - \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt$$

$$= \int_0^n \left[e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right] t^{z-1}dt + \int_n^\infty e^{-t}\,t^{z-1}dt \tag{2.11}$$

Şimdi keyfi bir $\varepsilon > 0$ sayısını alalım. (2.1) deki integral $Re(z) > 0$ için yakınsak olduğundan dolayı $n \geq N$ olduğunda

$$\left|\int_n^\infty e^{-t}t^{z-1}dt\right| \leq \int_n^\infty |e^{-t}t^{z-1}|dt \leq \int_n^\infty e^{-t}t^{x-1}dt < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left(x = Re(z)\right) \tag{2.12}$$

olacak şekilde bir N sayısı vardır. $n > N$ göz önüne alınırsa Δ üç integralin toplamı şeklinde yazılabilir. Yani

$$\Delta = \left(\int_0^N + \int_N^n\right)\left[e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right] t^{z-1}dt + \int_n^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt \tag{2.13}$$

dir. Son integralin mutlak değeri $\frac{\varepsilon}{3}$ den küçük olup, ikinci integralde $x = Re(z)$ için

$$\left|\int_N^n \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] t^{z-1}\right| dt \leq \int_N^n \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] t^{x-1} dt$$

$$< \int_N^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (2.14)$$

elde edilebilir.

(2.13) daki ilk integralin hesabı için

$$0 < e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n < \frac{t^2}{2n}, \quad (0 < t < n) \qquad (2.15)$$

şeklinde yardımcı bir eşitsizlik kullanılmaktadır. Buradan

$$1 - e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \int_0^t e^\tau \left(1 - \frac{\tau}{n}\right)^n \frac{\tau}{n} d\tau \qquad (2.16)$$

ve

$$0 < \int_0^t e^\tau \left(1 - \frac{\tau}{n}\right)^n \frac{\tau}{n} d\tau < \int_0^t e^\tau \frac{\tau}{n} d\tau = e^t \frac{t^2}{2n} \qquad (2.17)$$

dir. (2.15) eşitsizliğini kullanarak yeterince büyük n ler ve sabit N ler için

$$\left|\int_0^N \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] t^{z-1} dt\right| < \frac{1}{2n} \int_0^N t^{x+1} dt < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (2.18)$$

yazılabilir. $(2.12), (2.14)$ ve (2.18) eşitsizlikleri göz önüne alınırsa keyfi ε için (2.10) daki limit ve integral yer değiştirebilir. Bu da $Re(z) > 0$ için Gamma fonksiyonunun limit gösterimi olan (2.7) deki formülünün ispatını tamamlar.

(2.3) yardımı ile $Re(z) > 0$ koşulu yerine $z \neq 0, -1, -2, \ldots$ alınabilir. Gerçekten de m pozitif bir tamsayı olmak üzere $-m < Re(z) < -m + 1$ ise

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+m)}{z(z+1)\ldots(z+m-1)}$$

(2.7) eşitliğinde

$$\Gamma(z+m) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{z+m}}{(z+m)(z+m+1)\ldots(z+m+n)}$$

nin yerine yazılmasıyla

$$\Gamma(z) = \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{z+m}}{(z+m)(z+m+1)\ldots(z+m+n)}}{z(z+1)\ldots(z+m-1)}$$

$$= \frac{1}{z(z+1)\ldots(z+m-1)} \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{z+m}}{(z+m)(z+m+1)\ldots(z+m+n)}$$

$$= \frac{1}{z(z+1)\ldots(z+m-1)} \lim_{n\to\infty} \frac{(n-m)^{z+m}(n-m)!}{(z+m)(z+m+1)\ldots(z+n)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\ldots(z+n)}$$

elde edilir.

2.2. Beta Fonksiyonu

Bazı durumlarda Gamma fonksiyonunun belirli kombinasyonları yerine Beta fonksiyonu olarak adlandırılan bir bağıntı kullanmak daha uygun olur. Beta fonksiyonu genellikle,

$$B(z,w)=\int_0^1 \tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1}d\tau \tag{2.19}$$

$$(Re(z)>0\,,Re(w)>0)$$

şeklinde tanımlanır.

(2.1) ile verilen Gamma fonksiyonu ile (2.19) daki Beta fonksiyonu arasında bir ilişki kurabilmek için Laplace dönüşümü kullanılabilir. Şimdi aşağıdaki

$$h_{z,w}(t)=\int_0^t \tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1}d\tau \tag{2.20}$$

integralini göz önüne alalım. Açıktır ki $h_{z,w}(t)$, t^{z-1} ve t^{w-1} fonksiyonunun konvolüsyonudur ve $h_{z,w}(1)=B(z,w)$ dır.

İki fonksiyonun konvolüsyonunun Laplace dönüşümü, onların Laplace dönüşümünün çarpımına eşit olduğundan,

$$H_{z,w}(s)=\frac{\Gamma(z)}{s^z}\frac{\Gamma(w)}{s^w}=\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{s^{z+w}} \tag{2.21}$$

olur. Burada $H_{z,w}(s)$, $h_{z,w}(t)$ nin Laplace dönüşümüdür.

Diğer taraftan, $\Gamma(z)\Gamma(w)$ çarpımı sabit olduğundan (2.21) nin sağ tarafının Ters Laplace dönüşümü alınarak $h_{z,w}(t)$ orijinal fonksiyonu tekrar elde edilebilir. Laplace dönüşümünün tekliğinden

$$h_{z,w}(t) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} t^{z+w-1} \tag{2.22}$$

olup, $t = 1$ alınırsa Beta fonksiyonunun en bilinen özelliklerinden birisi olan

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \tag{2.23}$$

elde edilir. Ayrıca, buradan

$$B(z,w) = B(w,z) \tag{2.24}$$

olduğu görülebilir.

Beta fonksiyonu yardımıyla Gamma fonksiyonu için aşağıdaki iki önemli eşitlik verilebilir. Bunlardan birincisi

$$B(z,1-z) = \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \tag{2.25}$$

dir. Bu formül $0 < Re(z) < 1$ ve $z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ koşulları altında geçerlidir. Şimdi bunu gösterelim. (2.23) ve (2.19) eşitliklerini kullanarak

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = B(z,1-z) = \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^{z-1} \frac{dt}{1-t} \tag{2.26}$$

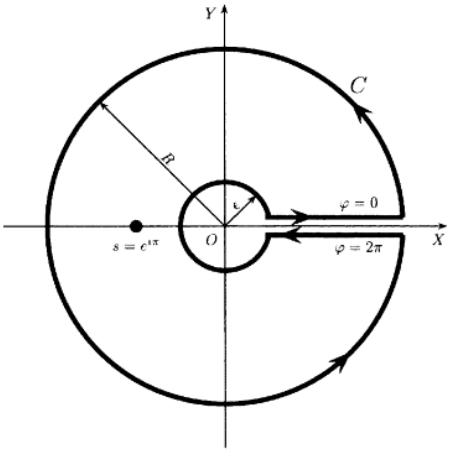
yazabiliriz. Bu integral $0 < Re(z) < 1$ için yakınsaktır. (2.26) deki integralde $\tau = \frac{t}{1-t}$ değişken değişimi yapılırsa

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^\infty \frac{\tau^{z-1}}{1+\tau} d\tau \tag{2.27}$$

elde edilir. Şimdi

$$\int_L f(s)ds\,,\;\; f(s) = \frac{s^{z-1}}{1+s} \tag{2.28}$$

integralini göz önüne alalım.



Şekil 1.1. C Çevresi

$f(s)$ fonksiyonunun $s = e^{\pi i}$ de bir basit kutbu vardır. Bu nedenle şekildeki $R > 1$ için

$$\int_C f(s)ds = 2\pi i[Resf(s)]_{s=e^{\pi i}} = -2\pi i e^{\pi iz} \tag{2.29}$$

dir. Öte yandan C çevresi boyunca eğrisel integral alınır ve Rezidü teoremi göz önünde bulundurulursa $\varepsilon \to 0$ ve $R \to \infty$ için

$$\int_C f(s)ds = 2\pi i[Resf(s)]_{s=e^{\pi i}} = -2\pi i e^{i\pi z} = \Gamma(z)\Gamma(1-z)\left(1-e^{2\pi iz}\right) \tag{2.30}$$

olup, buradan

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{2\pi i e^{i\pi z}}{e^{2\pi i z} - 1} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad (0 < Re(z) < 1) \tag{2.31}$$

bulunur.

Eğer $m < Re(z) < m + 1$ ise $z = \alpha + m$ de alınabilir. Burada $\alpha,\ 0 < Re(\alpha) < 1$ özelliğini sağlayan bir reel sayıdır. (2.3) kullanılırsa

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = (-1)^m \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$$

$$= \frac{(-1)^m \pi}{\sin(\pi\alpha)} = \frac{\pi}{\sin(\pi(\alpha+m))} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \tag{2.32}$$

elde edilir ki bu bize (2.25) in $z \neq 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$ için de geçerli olduğunu gösterir. (2.25) de $z = \frac{1}{2}$ alınarak Gamma fonksiyonunun iyi bilinen bir diğer özelliği olan

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{2.33}$$

elde edilir.

Gamma fonksiyonu için ikinci önemli eşitlik, Beta fonksiyonu yardımıyla kolayca elde edilebilen

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) \tag{2.34}$$

$$(2z \neq 0, -1, -2, \ldots.)$$

Legendre formülüdür. (2.34) ı ispatlamak için

$$B(z,z)=\int_0^1[\tau(1-\tau)]^{z-1}d\tau \tag{2.35}$$

eşitliğini göz önüne alalım. $y(\tau)=\tau(1-\tau)$ fonksiyonunun simetrik olduğu göz önüne alınır ve $s=4\tau(1-\tau)$ değişken değişimi yapılırsa

$$B(z,z)=2\int_0^{\frac{1}{2}}[\tau(1-\tau)]^{z-1}d\tau=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{s}{4}\right)^{z-1}\frac{ds}{4(1-s)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{1}{2^{2z-1}}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{s^{z-1}}{2^{2z-2}}\frac{ds}{2^2(1-s)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2^{2z-1}}\int_0^1 s^{z-1}(1-s)^{-\frac{1}{2}}ds$$

$$=2^{1-2z}B\left(z,\frac{1}{2}\right) \tag{2.36}$$

dir. (2.36) da (2.23) kullanılırsa (2.34) Legenre formülü elde edilir.

(2.34) da $z=n+\frac{1}{2}$ alınarak Gamma fonksiyonunun

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(2\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)}{2^{2\left(n+\frac{1}{2}\right)-1}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2n+1)}{2^{2n}\Gamma(n+1)}=\frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{2^{2n}n!} \tag{2.37}$$

değeri elde edilir.

2.3. Çevre İntegrali

Gamma fonksiyonunun (2.7) tanımındaki t değişkeni reeldir. Eğer t kompleks değişken ise $e^{(z-1)\log(t)-t}$ fonksiyonu için $t=0$ noktası bir dallanma noktası olur. Kompleks t düzleminin reel yarı ekseni $t=0$ dan $t=+\infty$ a kadar olan kısmı kompleks düzlemden çıkarılırsa fonksiyon geri kalan yerde tek değerli olur. Bu nedenle Cauchy teoremine göre

$$\int_C e^{-t}t^{z-1}dt = \int_C e^{(z-1)\ln(t)-t}dt$$

integrali herhangi bir C çevresi boyunca iki ucuda $t=0$ ile $t=+\infty$ boyunca her iki uçta aynı değere sahiptir. Şimdi C çevresini Şekil 1.2 deki gibi alalım. Şekildeki kesitin üst kısmında yani $(\varepsilon, +\infty)$ aralığında $\ln t$ reel olarak alınırsa

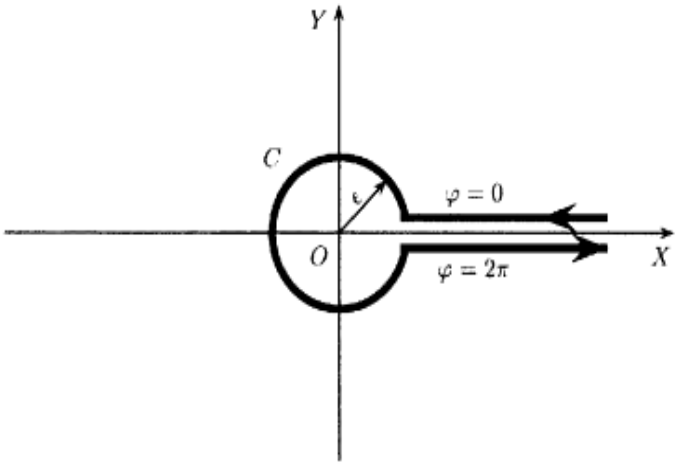
$$t^{z-1} = e^{(z-1)\ln(t)}$$

olur. Alt kısımda ise $\ln(t)$ yerine $\ln t + 2\pi i$ alınarak

$$t^{z-1} = e^{(z-1)[\ln(t)+2\pi i]} = e^{(z-1)\ln(t)}e^{(z-1)2\pi i}$$

$$= t^{z-1}e^{2(z-1)\pi i}$$

bulunur.



Şekil 1.2. C Çevresi

Böylece

$$\int_C e^{-t}t^{z-1}dt = \int_{+\infty}^{\varepsilon} e^{-t}t^{z-1}dt + \int_{C_\varepsilon} e^{-t}t^{z-1}dt + e^{2(z-1)\pi i}\int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-t}\,t^{z-1}dt \quad (2.38)$$

dır.

Şimdi $\varepsilon \to 0$ için C_ε boyunca integralin sıfıra gittiğini gösterelim. Aslında, C_ε da $|t| = \varepsilon$ ve

$$M = \max_{t\epsilon C_\varepsilon} \left|e^{-yarg(t)-t}\right|, \qquad (y = Im(z))$$

dersek M, t den bağımsız olur. $(z = x + iy)$

$$\left|\int_{C_\varepsilon} e^{-t}t^{z-1}dt\right| \le \int_{C_\varepsilon} |e^{-t}t^{z-1}|\,dt = \int_{C_\varepsilon} |t^{x-1}|\,\left|e^{-yarg(t)-t}\right|dt$$

$$\le M\varepsilon^{x-1}\int_{C_\varepsilon} dt = M\varepsilon^{x-1}\,2\pi\varepsilon = 2\pi M\varepsilon^{x}$$

elde edilir ve buradan

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{C_\varepsilon} e^{-t} t^{z-1} dt = 0 \tag{2.39}$$

ve

$$\int_C e^{-t} t^{z-1} dt = \int_{+\infty}^{0} e^{-t} t^{z-1} dt + e^{2(z-1)\pi i} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \tag{2.40}$$

dır. (2.1) kullanılırsa

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{2\pi i z} - 1} \int_C e^{-t}\, t^{z-1} dt \tag{2.47}$$

bulunur. $e^{2z\pi i} - 1$ fonksiyonunun $z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ noktalarında sıfır yeri vardır. $z = 1,2, \ldots$ noktalarında $\Gamma(z)$ nin kutupları yoktur. Çünkü bu durumda $e^{-t} t^{z-1}$ analitik fonksiyonu tek değerlidir ve Cauchy teoremine göre

$$\int_C e^{-t} t^{z-1} dt = 0$$

dır.

Eğer $z = 0, -1, -2, \ldots$ ise $e^{-t} t^{z-1}$ fonksiyonu t nin bir tam fonksiyonu değildir ve C çevresi boyunca integrali 0'a eşit olmayabilir. Bu yüzden, $z = 0, -1, -2, \ldots$ noktaları $\Gamma(z)$ nin kutup noktalarıdır.

3. KEYFİ BASAMAKTAN TÜREV VE ·İNTEGRALLER

Bu bölümde diferansiyel ve integral kavramlarının genelleştirilmiş halleri göz önüne alınacaktır.

3.1. Giriş

Keyfi basamaktan türevler ve integraller teorisinin ismi olan kesirli analiz $n-$kez integrallenme ve tamsayı basamaktan diferansiyellenme notasyonlarının genelleştirilmesi ve birleştirilmesidir. Şimdi sırasıyla

$$\dots, \int_a^t d\tau_2 \int_a^{\tau_2} f(\tau_1) d\tau_1 \,, \quad \int_a^t f(\tau_1) d\tau_1 \,, \quad f(t) \,, \frac{df(t)}{dt} \,, \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \,, \dots$$

$n-$ kez integrallenme ve $n-$kez türevlenme ifadelerini göz önüne alalım. Keyfi α reel basamaktan türev almak yukarıdaki operatörlerin bir interpolasyonu olarak düşünülebilir. Biz bunu

$$ {}_aD_t^{\alpha} f(t) $$

notasyonu ile göstereceğiz.

Keyfi basamaktan türeve kısaca kesirli türev denilir. Kesirli integral ise kesirli türevde α nın negatif değerlerine karşılık gelecektir. Böylece $\beta > 0$ basamaktan bir kesirli integral ${}_aD_t^{-\beta} f(t)$ ile gösterilir. Kesirli denklem kesirli türevleri içeren denklemdir. Kesirli integral ise kesirli integralleri içeren integral denklemdir. Kesirli basamaktan sistemler, kesirli diferansiyel denklem, kesirli integral denklem veya bu denklemlerin bir birleşimi olarak ifade edilen sistemdir.

3.2. Grünwald-Letnikov Kesirli Türevi

3.2.1. Tamsayı Basamaktan Türevlerin ve İntegrallerin Birleştirilmesi

Bu bölümde klasik analizde farklı olarak verilen iki notasyonun ortak ifadesine yaklaşımlar ele alınacaktır. Bunlar n yinci basamaktan türev ve n katlı integrallerdir. Aşağıda göstereceğimiz gibi bu notasyonlar zannedilenin aksine birbirlerine daha yakındır.

Şimdi sürekli bir $y = f(t)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bilindiği gibi $f(t)$ fonksiyonunun birinci basamaktan türevi

$$ f'(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \tag{3.1} $$

şeklinde tanımlanır. (3.1) in bir kez daha türevi alınırsa

$$ f''(t) = \frac{d^2 f}{dt^2} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} $$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left\{\frac{f(t)-f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h)-f(t-2h)}{h}\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(t)-2f(t-h)+f(t-2h)}{h^2} \tag{3.2}$$

dir. (3.1) ve (3.2) kullanılarak

$$f'''(t) = \frac{d^3 f}{dt^3} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t)-3f(t-h)+3f(t-2h)-f(t-3h)}{h^3} \tag{3.3}$$

bulunur. Bu işlem n kez tekrarlanırsa

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} f(t-rh) \tag{3.4}$$

elde edilir. Burada

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} \tag{3.5}$$

dir. Şimdi (3.1) - (3.4) deki ifadelerin

$$f_h^{(p)}(t) = \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh) \tag{3.6}$$

şeklindeki genellemesini göz önüne alalım. Burada p keyfi bir tamsayı ve n de (3.4) deki gibi bir tamsayıdır.

Açık olarak (3.5) den $\binom{p}{p}$ den sonraki tüm katsayıların sıfıra eşit olmasından dolayı, $p \leq n$ için

$$\lim_{h\to 0} f_h^{(p)}(t) = f^{(p)}(t) = \frac{d^p f}{dt^p} \tag{3.7}$$

dir. Şimdi p nin negatif değerlerini alalım. Uygunluk için

$$\begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} = \frac{p(p+1)(p+2)\dots(p+r-1)}{r!} \tag{3.8}$$

şeklinde tanımlanırsa

$$\binom{-p}{r} = \frac{-p(-p-1)\dots(-p-r+1)}{r!} = (-1)^r \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

bulunur. (3.6) da p yerine $-p$ alınırsa

$$f_h^{(-p)}(t) = \frac{1}{h^{-p}} \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) \tag{3.10}$$

yazılabilir. Burada p pozitif bir tam sayıdır.

Eğer n sabit tutulursa, $f_h^{(-p)}(t)$ ifadesi $h \to 0$ için sıfır olur. Sıfırdan farklı bir limite ulaşmak için $h \to 0$ iken $n \to \infty$ kabul etmemiz gerekir. Böylece a reel sabit olmak üzere $h = \frac{t-a}{n}$ alınabilir ve $f_h^{(-p)}(t)$ nın sonlu ya da sonsuz olan limit değerleri göz önüne alınırsa bu ifade

$$\lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(-p)}(t) = {}_aD_t^{(-p)} f(t) \tag{3.11}$$

ile gösterilebilir.

Şimdi aşağıdaki birkaç özel durumu düşünelim: İlk olarak $p = 1$ için

$$f_h^{(-1)}(t) = h \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} 1 \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) \tag{3.12}$$

dir. $t-nh=a$ olduğu dikkate alınır ve $f(t)$ fonksiyonunun sürekli olduğu göz önüne alınırsa

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} f_h^{(-1)}(t) = {}_aD_t^{-1}f(t) = \int_0^{t-a} f(t-z)dz = \int_a^t f(\tau)d\tau \qquad (3.13)$$

elde edilir.

Şimdi $p=2$ alalım. Bu durumda

$$\begin{bmatrix}2\\ r\end{bmatrix} = \frac{2.3\ldots(2+r-1)}{r!} = r+1$$

olup

$$f_h^{(-2)}(t) = h\sum_{r=0}^{n}(r+1)hf(t-rh) \qquad (3.14)$$

elde edilir. $t+h=y$ alınırsa

$$f_h^{(-2)}(t) = h\sum_{r=1}^{n+1} rhf(y-rh) \qquad (3.15)$$

yazılabilir ve $h\to 0$ için

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} f_h^{(-2)}(t) = {}_aD_t^{-2}f(t) = \int_0^{t-a} zf(t-z)dz = \int_a^t (t-\tau)f(\tau)d\tau \qquad (3.16)$$

elde edilir. Burada $h\to 0$ için $y\to t$ dir.

$p=3$ durumu bize ${}_aD_t^{-p}$ için genel ifadeyi gösterecektir.

$$\begin{bmatrix}3\\r\end{bmatrix} = \frac{3.4 \dots (3+r-1)}{r!} = \frac{(r+1)(r+2)}{1.2}$$

olduğundan

$$f_h^{(-3)}(t) = \frac{h}{1.2}\sum_{r=0}^{n}(r+1)(r+2)h^2 f(t-rh) \tag{3.17}$$

dir. Yukarıdaki gibi $t+h=y$ dersek

$$f_h^{(-3)}(t) = \frac{h}{1.2}\sum_{r=1}^{n+1} r(r+1)h^2 f(y-rh) \tag{3.18}$$

bulunur. Bu ifade

$$f_h^{(-3)}(t) = \frac{h}{1.2}\sum_{r=1}^{n+1}(rh)^2 f(y-rh) + \frac{h^2}{1.2}\sum_{r=1}^{n+1} rhf(y-rh) \tag{3.19}$$

şeklinde de yazılabilir. Böylece, $h \to 0$ için

$${}_aD_t^{-3}f(t) = \frac{1}{2!}\int_0^{t-a} z^2 f(t-z)dz = \frac{1}{2!}\int_a^t (t-\tau)^2 f(\tau)d\tau \tag{3.20}$$

dir. $h \to 0$ için $y \to t$ olduğundan

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} \frac{h^2}{1.2}\sum_{r=1}^{n+1} rhf(y-rh) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h\int_a^t (t-\tau)f(\tau)d\tau = 0$$

dır.

$(3.13)-(3.20)$ den genel gösterim

$$ {}_aD_t^{-p} f(t) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^{n} \binom{p}{r} f(t-rh) = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \quad (3.21) $$

şeklinde elde edilebilir.

(3.21) formülü tümevarımla ispatlanabilir. p için doğruluğunu kabul edip $p+1$ için doğruluğunu gösterelim. Açıktır ki

$$ f_1(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau \quad (3.22) $$

fonksiyonu $f_1(a) = 0$ özelliğine sahiptir.

$$ {}_aD_t^{-p-1} f(t) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} h^{p+1} \sum_{r=0}^{n} \binom{p+1}{r} f(t-rh) $$

$$ = \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^{n} \binom{p+1}{r} f_1(t-rh) - \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^{n} \binom{p+1}{r} f_1(t-(r+1)h) \quad (3.23) $$

eşitliğini göz önüne alalım. (3.8) i kullanarak

$$ \binom{p+1}{r} = \binom{p}{r} + \binom{p+1}{r-1} $$

yazılabilir. Burada

$$ \binom{p+1}{-1} = 0 $$

dır. (3.24) deki ilişki (3.23) deki ilk toplama uygulanırsa ve ikinci toplamda r yerine $(r-1)$ yazılırsa

$$ {}_aD_t^{-p-1} = \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^{n} \binom{p}{r} f_1(t-rh) + \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^{n} \binom{p+1}{r-1} f_1(t-rh) $$

$$ - \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=1}^{n+1} \binom{p+1}{r-1} f_1(t-rh) $$

$$ = {}_aD_t^{-p} f_1(t) - \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} h^p \binom{p+1}{n} f_1(t-(n+1)h) $$

$$ = {}_aD_t^{-p} f_1(t) - (t-a)^p \lim_{n\to\infty} \binom{p+1}{n} \frac{1}{n^p} f_1\left(a - \frac{t-a}{n}\right) $$

elde edilir ve (3.22) deki $f_1(t)$ fonksiyonunun tanımından

$$ \lim_{n\to\infty} f_1\left(a - \frac{t-a}{n}\right) = 0 $$

bulunur. (2.13) deki Gamma fonksiyonunun tanımından

$$ \lim_{n\to\infty} \binom{p+1}{n} \frac{1}{n^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{(p+1)(p+2)\dots(p+1+n-1)}{n!} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{\Gamma(p+1)} $$

olduğu kullanılırsa

$$ {}_aD_t^{-p-1} f(t) = {}_aD_t^{-p} f_1(t) = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f_1(\tau) d\tau $$

$$ = \frac{-(t-\tau)^p f_1(\tau)}{p!} \Big|_{\tau=a}^{\tau=t} + \frac{1}{p!} \int_a^t (t-\tau)^p f(\tau) d\tau $$

$$ = \frac{1}{p!} \int_a^t (t-\tau)^p f(\tau) d\tau \qquad (3.25) $$

bulunur. Böylece (3.21) formülü ispatlanmış olur.

Şimdi (3.21) deki formülün p −katlı integrali temsil ettiğini gösterelim.

$$\frac{d}{dt}\left({}_aD_t^{-p}f(t)\right)=\frac{1}{(p-2)!}\int_a^t(t-\tau)^{p-2}f(\tau)d\tau={}_aD_t^{-p+1}f(t)$$

ifadesinin a dan t ye integre edilmesiyle

$${}_aD_t^{-p}f(t)=\int_a^t\left({}_aD_t^{-p+1}f(t)\right)dt$$

$${}_aD_t^{-p+1}f(t)=\int_a^t\left({}_aD_t^{-p+2}f(t)\right)dt$$

elde edilir. Böylece

$${}_aD_t^{-p}f(t)=\int_a^t dt\int_a^t\left({}_aD_t^{-p+2}f(t)\right)dt$$

$$=\int_a^t dt\int_a^t dt\int_a^t\left({}_aD_t^{-p+3}f(t)\right)dt$$

$$=\underbrace{\int_a^t dt\int_a^t dt\int_a^t dt\ldots\int_a^t f(t)dt}_{p-kere} \tag{3.26}$$

olur.

$f(t)$ sürekli fonksiyonunun n tamsayı basamaktan (3.4) türevinin ve p −katlı (3.21) integralinin

$$ {}_aD_t^p f(t) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh) \tag{3.27} $$

genel ifadesinin birer özel durumları olduğu görülebilir. Eğer $p = m$ alınırsa $m.$ basamaktan türevi ve $p = -m$ alırsak m −katlı integrali elde edilir.

Bu gözlem doğal olarak (3.27) deki p nin keyfi reel veya kompleks sayı olması durumunda diferensiyel ve integral gösteriminin genel düşüncesi hakkında yol göstermektedir. Biz dikkatimizi p nin reel olması durumuna kısıtlayacağız.

3.2.2. Keyfi Basamaktan İntegraller

$p < 0$ olma durumunu göz önüne alalım. Uygunluk için (3.27) de p yerine $-p$ yazarsak

$$ {}_aD_t^{-p} f(t) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} h^{p} \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) \tag{3.28} $$

sonucuna ulaşırız. Burada, yukarıdaki gibi h ve n değerleri $nh = t - a$ ifadesi ile birbirine bağlıdır. (3.28) deki limitin varlığını ispatlamak ve bu limit değerini hesaplayabilmek için aşağıdaki teoreme ihtiyaç vardır:

Teorem 3.1. $(3.29) - (3.32)$ özelliklerine sahip β_k, $(k = 1,2, \dots)$ serisini göz önüne alalım.

$$ \lim_{k\to\infty} \beta_k = 1 \tag{3.29} $$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_{n,k} = 0\,, \qquad her\ k\ için \tag{3.30}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n,k} = A\,, \qquad her\ k\ için \tag{3.31}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left|\alpha_{n,k}\right| < K\,, \qquad her\ n\ için \tag{3.32}$$

Bu durumda,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n,k}\beta_k = A \tag{3.33}$$

dır.

İspat. (3.29) dan

$$\beta_k = 1 - \delta_k\,, \qquad \lim_{k\to\infty} \delta_k = 0 \tag{3.34}$$

dır. (3.30) dan her sabit r için $(1 < r < n)$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{r-1} \alpha_{n,k}\beta_k = 0 \tag{3.35}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{r-1} \alpha_{n,k} = 0 \tag{3.36}$$

yazılabilir. (3.35), (3.34), (3.31) ve (3.36) yı kullanarak

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{n,k}\,\beta_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=r}^{n}\alpha_{n,k}\beta_k \qquad \left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{r-1}\alpha_{n,k}\beta_k=0\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=r}^{n}\alpha_{n,k}-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=r}^{n}\alpha_{n,k}\delta_k \qquad (\beta_k=1-\delta_k)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_{n,k}-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=r}^{n}a_{n,k}\,\sigma_k \qquad \left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{r-1}\alpha_{n,k}=0\right)$$

$$=A-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=r}^{n}\alpha_{n,k}\,\sigma_k$$

elde edilir. Şimdi (3.36) ve (3.32) yi kullanarak,

$$\left|A-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{n,k}\beta_k\right|=\left|\lim_{n\to\infty}\sum_{k=r}^{n}\alpha_{n,k}\sigma_k\right|<\lim_{n\to\infty}\sum_{k=r}^{n}|\alpha_{n,k}||\sigma_k|$$

$$<\sigma^*\lim_{n\to\infty}\sum_{k=r}^{n}|\alpha_{n,k}|=\sigma^*\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|\alpha_{n,k}|<\sigma^*K$$

elde ederiz. Olur ki burada, $\sigma^*=max|\sigma_k|$ dır.

(3.34) den her bir keyfi $\varepsilon>0$ için $\sigma^*=\frac{\varepsilon}{K}$ olacak şekilde bir ε mevcuttur ve böylece

$$\left|A-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{n,k}\,\beta_k\right|<\varepsilon$$

olur. Buradan görülmektedir ki (3.33) sağlanmaktadır.

Teorem 3.1. basit bir sonuca sahiptir. Şöyle ki, eğer

$$\lim_{k\to\infty} \beta_k = B$$

alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n,k}\beta_k = AB \tag{3.37}$$

dir. Gerçekten

$$\widetilde{\beta_k} = \frac{\beta_k}{B} \text{ , } \lim_{k\to\infty} \widetilde{\beta_k} = 1$$

özelliklerine sahip $\widetilde{\beta_k}$ serisini göz önüne alalım. Son ifadeye Teorem 3.1. uygulanırsa

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n,k}\, \widetilde{\beta_k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n,k}\, \frac{\beta_k}{B} = A$$

olur. Bu da bize (3.37) ifadesini verir.

(3.28) deki limiti hesaplamak için Teorem 3.1. uygulanırsa

$${}_aD_t^{-p} f(t) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh)$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r^{p-1}} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} h(rh)^{p-1} f(t-rh)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(p)} \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} \sum_{r=0}^{n} \frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} h(rh)^{p-1} f(t-rh)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(p)} \lim_{n\to\infty} \sum_{r=0}^{n} \frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} \frac{t-a}{n} \left(r \frac{t-a}{n} \right)^{p-1} f\left(t - r\frac{t-a}{n} \right)$$

olur. Şimdi yukarıdaki seride

$$\beta_r = \frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix}$$

$$\alpha_{n,r} = \frac{t-a}{n} \left(r \frac{t-a}{n} \right)^{p-1} f\left(t - r\frac{t-a}{n} \right)$$

diyelim. Açıktır ki (2.13) den

$$\lim_{r\to\infty} \beta_r = \lim_{r\to\infty} \frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} = 1 \tag{3.38}$$

elde edilir.

Diğer taraftan, eğer $f(t)$ fonksiyonu $[a,t]$ kapalı aralığında sürekli ise

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=0}^{n} \alpha_{n,r} = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=0}^{n} \frac{t-a}{n} \left(r \frac{t-a}{n} \right)^{p-1} f\left(t - r\frac{t-a}{n} \right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \sum_{r=0}^{n} h(rh)^{p-1} f(t-rh)$$

$$= \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \tag{3.39}$$

olur. (3.38) ve (3.39) dikkate alınır ve Teorem 3.1. uygulanırsa

$$ {}_aD_t^{-p} f(t) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^{n} \left[{p \atop r} \right] f(t-rh) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \quad (3.40) $$

elde edilir. Eğer $f'(t)$ türevi $[a,b]$ de sürekli ise (3.40) ifadesi

$$ {}_aD_t^{-p} f(t) = \frac{f(a)(t-a)^p}{\Gamma(p+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^p f'(\tau) d\tau \quad (3.41) $$

şeklinde de yazılabilir. Eğer $f(t)$ fonksiyonunun $(m+1)$. basamaktan türevi sürekli ise

$$ {}_aD_t^{-p} f(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \quad (3.42) $$

formülü elde edilebilir.

3.2.3. Keyfi Basamaktan Türevler

$p > 0$ durumunu göz önüne alalım. Buradaki amacımız yukarıdaki gibi

$$ {}_aD_t^{p} f(t) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(p)}(t) \quad (3.43) $$

limitini hesaplamaktır. Burada

$$ f_h^{(p)}(t) = h^{-p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh) \quad (3.44) $$

şeklindedir. (3.43) deki limiti hesaplamak için ilk olarak $f_h^{(p)}(t)$ nin ifadesi ve

$$\binom{p}{r} = \binom{p-1}{r} + \binom{p-1}{r-1} \tag{3.45}$$

özelliği kullanılarak

$$f_h^{(p)}(t) = h^{-p}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{p-1}{r}f(t-rh) + h^{-p}\sum_{r=1}^{n}(-1)^r\binom{p-1}{r-1}f(t-rh)$$

$$= h^{-p}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{p-1}{r}f(t-rh) + h^{-p}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{r+1}\binom{p-1}{r}f(t-(r+1)h)$$

$$= (-1)^n h^{-p}\binom{p-1}{n}f(a) + h^{-p}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\binom{p-1}{r}[f(t-rh) - f(t-(r+1)h)]$$

$$= (-1)^n\binom{p-1}{n}h^{-p}f(a) + h^{-p}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\binom{p-1}{r}\Delta f(t-rh) \tag{3.46}$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\Delta f(t-rh) = f(t-rh) - f(t-(r+1)h)$$

dir. Açıktır ki $\Delta f(t-rh)$ farkı $\tau = t-rh$ noktasında $f(\tau)$ fonksiyonunun birinci basamaktan geri farkıdır. Binom katsayılarının (3.45) teki özelliği $m-$kez tekrarlanırsa (3.46) dan

$$f_h^{(p)}(t) = (-1)^n\binom{p-1}{n}h^{-p}f(a) + (-1)^{n-1}\binom{p-2}{n-1}h^{-p}\Delta f(a+h)$$

$$+h^{-p}\sum_{r=0}^{n-2}(-1)^r\binom{p-2}{r}\Delta^2 f(t-rh)$$

$$= (-1)^n \binom{p-1}{n} h^{-p} f(a) + (-1)^{n-1} \binom{p-2}{n-1} h^{-p} \Delta f(a+h)$$

$$+(-1)^{n-2} \binom{p-3}{n-2} h^{-p} \Delta^2 f(a+2h) + h^{-p} \sum_{r=0}^{n-3} (-1)^r \binom{p-3}{r} \Delta^3 f(t-rh)$$

$$\vdots$$

$$= \sum_{k=0}^{m} (-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} h^{-p} \Delta^k f(a+kh)$$

$$+h^{-p} \sum_{r=0}^{n-m-1} (-1)^r \binom{p-m-1}{r} \Delta^{m+1} f(t-rh) \qquad (3.48)$$

elde edilir. (3.48) deki ilk toplamın k. terimin limitini hesaplayacak olursak

$$\lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} (-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} h^{-p} \Delta^k f(a+kh)$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} (-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} (n-k)^{p-k} \left(\frac{n}{n-k}\right)^{p-k} (nh)^{-p+k} \frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k}$$

$$= (t-a)^{-p+k} \lim_{n\to\infty} (-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} (n-k)^{p-k}$$

$$\times \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n-k}\right)^{p-k} \lim_{h\to 0} \frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k}$$

$$= \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} \qquad (3.49)$$

olur. Burada (2.13) ifadesinden

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-k}\binom{p-k-1}{n-k}(n-k)^{p-k}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(-p+k+1)(-p+k+2)\dots(-p+n)}{(n-k)^{-p+k}(n-k)!}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(-p+k+1)}$$

elde edileceği ve

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-k}\right)^{p-k}=1$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k}=f^{(k)}(a)$$

özellikleri kullanılmıştır. (3.49) daki limitin bilinmesiyle (3.48) deki ilk toplamın limitini kolayca yazılabilir. (3.48) deki ikinci toplamın limitini hesaplamak için bu toplam

$$\frac{1}{\Gamma(-p+m+1)}\sum_{r=0}^{n-m-1}(-1)^r\Gamma(-p+m+1)\binom{p-m-1}{r}$$

$$\times r^{-m+p}h(rh)^{m-p}\frac{\Delta^{m+1}f(t-rh)}{h^{m+1}} \qquad (3.50)$$

şeklinde yazılır. Teorem 3.1. i uygulayabilmek için

$$\beta_r=(-1)^r\Gamma(-p+m+1)\binom{p-m-1}{r}r^{-m+p}$$

$$\alpha_{n,r}=h(rh)^{m-p}\frac{\Delta^{m+1}f(t-rh)}{h^{m+1}} \qquad \left(h=\frac{t-a}{n}\right)$$

olarak seçilir. (1.13) den

$$\lim_{r\to\infty}\beta_r=\lim_{r\to\infty}(-1)^r\Gamma(-p+m+1)\binom{p-m-1}{r}r^{-m+p}=1 \tag{3.51}$$

dir. Buna ek olarak eğer $m-p>-1$ ise

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=0}^{n-m-1}\alpha_{n,r}=\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}}\sum_{r=0}^{n-m-1}h(rh)^{m-p}\frac{\Delta^{m+1}f(t-rh)}{h^{m+1}}$$

$$=\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}}\sum_{r=0}^{n-m-1}\frac{hr^{m-p}h^{m-p}}{h^m h}\Delta^{m+1}f(t-rh)$$

$$=\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}}\sum_{r=0}^{n-m-1}(t-\tau)^{m-p}\frac{\Delta^{m+1}f(t-rh)}{h^m}$$

$$\begin{pmatrix} t-rh=\tau \\ t-\tau=rh \\ (t-\tau)^{m-p}=(rh)^{m-p}\end{pmatrix}$$

$$=\int_a^t(t-\tau)^{m-p}f^{(m+1)}(\tau)d\tau \tag{3.52}$$

dir. (3.51) ve (3.52) yi göz önüne alır ve Teorem 3.1. uygulanırsa

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}}h^{-p}\sum_{r=0}^{n-m-1}(-1)^r\binom{p-m-1}{r}\Delta^{m+1}f(t-rh)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(-p+m+1)}\int_a^t(t-\tau)^{m-p}f^{(m+1)}(\tau)d\tau \tag{3.53}$$

elde edilir. Sonuç olarak (3.49) ve (3.53) eşitlikleri kullanılırsa (3.43) limiti

$$ {}_aD_t^p f(t) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(p)}(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} $$

$$ + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \qquad (3.54) $$

dir. (3.54) formülü $f^{(k)}(t)$, $(k = 1,2,\dots,m+1)$ türevlerinin kapalı $[a,t]$ aralığında sürekli olması varsayımı altında ve m lerin $m > p-1$ i sağlayan tamsayı olması koşulunda elde edilir. m ler için en küçük olası değer $m < p < m+1$ eşitsizliği ile belirlenir.

3.2.4. $(t-a)^{\beta}$ nin Kesirli Türevi

Şimdi v reel sayı olmak üzere

$$ f(t) = (t-a)^v $$

kuvvet fonksiyonunun Grünwald-Letnikov kesirli türevini, yani ${}_aD_t^p f(t)$ yi hesaplayalım.

İlk olarak p nin negatif değerlerini ele alalım. Bu $-p$ yinci basamaktan kesirli integralin hesaplanması anlamına gelir. (3.39) daki formül kullanılarak

$$ {}_aD_t^p (t-a)^v = \frac{1}{\Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p-1} (\tau-a)^v d\tau \qquad (3.55) $$

elde edilir. İntegralin yakınsaklığı için $v > -1$ dir. (3.55) te

$$\tau = a + \xi(t-a)$$

dönüşümü yapılır ve Beta fonksiyonunun (2.25) deki ifadesi kullanılırsa

$${}_aD_t^p (t-a)^v = \frac{1}{\Gamma(-p)} (t-a)^{v-p} \int_0^1 \xi^v \, (1-\xi)^{-p-1} d\xi$$

$$= \frac{1}{\Gamma(-p)} B(-p, v+1)(t-a)^{v-p}$$

$$= \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-p+1)} (t-a)^{v-p} \quad (p < 0\,, v > -1) \qquad (3.56)$$

elde edilir.

Şimdi $0 \leq m \leq p < m+1$ olma durumunu ele alalım. (3.54) deki integralin yakınsaklığı için $v > m$ olması gerekir. (3.54) den

$${}_aD_t^p (t-a)^v = \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} \frac{d^{m+1}(\tau-a)^v}{d\tau^{m+1}} d\tau \qquad (3.57)$$

yazılabilir. $v > m$ olduğundan (3.54) deki toplam sıfıra eşittir.

$$\frac{d^{m+1}(\tau-a)^v}{d\tau^{m+1}} = v(v-1)(v-2) \ldots (v-m)(\tau-a)^{v-m-1}$$

$$= \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-m)} (\tau-a)^{v-m-1}$$

olduğu göz önüne alınır ve $\tau = a + \xi(t-a)$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$
{}_aD_t^p(t-a)^v = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-m)\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p}\,(\tau-a)^{v-m-1} d\tau
$$

$$
= \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-m)\Gamma(-p+m+1)}
$$

$$
\times (t-a)^{m-p+v-m-1+1} \int_0^1 (1-\xi)^{m-p} \xi^{v-m-1}\, d\xi
$$

$$
= \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-m)\Gamma(-p+m+1)} (t-a)^{v-p} \int_0^1 (1-\xi)^{m-p} \xi^{v-m-1} d\xi
$$

$$
= \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-m)\Gamma(-p+m+1)} B(-p+m+1, v-m)(t-a)^{v-p}
$$

$$
= \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-m)\Gamma(-p+m+1)} \frac{\Gamma(-p+m+1)\Gamma(v-m)}{\Gamma(-p+m+1+v-m)} (t-a)^{v-p}
$$

$$
= \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-p+1)} (t-a)^{v-p} \tag{3.58}
$$

elde edilir. (3.58) deki ifade ile (3.56) daki ifade aynıdır. Böylece $f(t) = (t-a)^v$ kuvvet fonksiyonunun Grünwald-Letnikov kesirli türevi

$$
{}_aD_t^p(t-a)^v = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-p+1)} (t-a)^{v-p} \tag{3.59}
$$

formülü ile verilebilir. Burada $p < 0\,, v > -1$ veya $0 \le m \le p < m+1\,, v > m$ dir.

(3.56) ve (3.58) formülleri aynı olmasına rağmen p ve v nün sağlayacağı şartlar birbirinden farklıdır. Teorik açıdan, fonksiyonların kesirli türevinin Grünwald-Letnikov tanımı göz önüne alınarak sınıflandırılması çok kısıtlıdır. Çünkü $(m+1)$-kez sürekli türevlenebilen fonksiyonlar gereklidir. Ancak uygulama problemlerinde

fiziksel, kimyasal ve diğer yöntemleri tanımlamada bu tür düzgün fonksiyonlarla her zaman karşılaşılmamaktadır.

3.2.5. Tamsayı Basamaktan Türevler ile Birleştirme

(3.54) deki formülde m için $m > p-1$ kısıtlaması mevcuttur. Şimdi m yerine s alarak (3.54) ü tekrar yazarsak

$$ {}_aD_t^p f(t) = \sum_{k=0}^{s} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} $$

$$ + \frac{1}{\Gamma(-p+s+1)} \int_a^t (t-\tau)^{s-p} f^{(s+1)}(\tau) d\tau \qquad (3.60) $$

elde ederiz. Burada $m < p < m+1$ olduğunu varsayıyoruz.
(3.60) daki formülde p-yinci kesirli basamaktan türevinin n tamsayı basamaktan türevini hesaplayalım. Burada $s \geq m+n-1$ dir. Sonuç olarak

$$ \frac{d^n}{dt^n}\left({}_aD_t^p f(t)\right) = \sum_{k=0}^{s} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p-n+k}}{\Gamma(-p-n+k+1)} $$

$$ + \frac{1}{\Gamma(-p-n+s+1)} \int_a^t (t-\tau)^{s-p-n} f^{(s+1)}(\tau) d\tau \qquad (3.61) $$

$$ = {}_aD_t^{p+n} f(t) \qquad (3.62) $$

olur. $s \geq m+n-1$ keyfi olduğundan $s = m+n-1$ alınırsa

$$ \frac{d^n}{dt^n}\left({}_aD_t^p f(t)\right) = {}_aD_t^{p+n} f(t) $$

$$= \sum_{k=0}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p-n+k}}{\Gamma(-p-n+k+1)}$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f^{(m+n)}(\tau) d\tau \quad (3.63)$$

elde edilir.

Şimdi tamsayı basamaktan türev $\frac{d^n f(t)}{dt^n}$ nin p −yinci basamaktan kesirli türevini hesaplamak için (3.60) formülü kullanılırsa

$${}_aD_t^p \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = \sum_{k=0}^{s} \frac{f^{(n+k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)}$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(-p+s+1)} \int_a^t (t-\tau)^{s-p} f^{(n+s+1)}(\tau) d\tau \quad (3.64)$$

elde edilir. $s = m - 1$ indis dönüşümü yapılırsa

$${}_aD_t^p \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(n+k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)}$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f^{(m+n)}(\tau) d\tau \quad (3.65)$$

olur. (3.63) ile (3.65) karşılaştırıldığında

$$\frac{d^n}{dt^n} \left({}_aD_t^p f(t) \right) = {}_aD_t^p \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p-n+k}}{\Gamma(-p-n+k+1)} \quad (3.66)$$

sonucuna varılır.

(3.66) daki ilişki bize eğer $t = a$ noktasında $f^{(k)}(a) = 0,\ (k = 0,1,2,\dots,n-1)$ oluyorsa $\frac{d^n}{dt^n}$ ve ${}_aD_t^p$ işlemlerinin yer değiştirebilen işlemler olduğunu gösterir, yani

$$\frac{d^n}{dt^n}\left({}_aD_t^p f(t)\right) = {}_aD_t^p\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = {}_aD_t^{p+n} f(t) \tag{3.67}$$

dir.

3.2.6. Kesirli Türevler İle Birleştirilmesi

Şimdi p-yinci basamaktan kesirli türevin q-yuncu basamaktan

$${}_aD_t^q\left({}_aD_t^p f(t)\right)$$

kesirli türevini göz önüne alalım.
Burada iki durum ayrı ayrı göz önüne alınabilir. Bunlar $p < 0$ ve $p > 0$ olma durumlarıdır.

İlk durum, - q nun işaretine bağlı olarak - $q > 0$ basamaktan diferensiyelin veya $-q > 0$ basamaktan integralin $-p > 0$ basamaktan kesirli integrale uygulanması, ikinci durum, dış operatörün $p > 0$ basamaktan kesirli türeve uygulanmasıdır. Her iki durumda da tamsayı basamaktan diferansiyelin bilinen

$$\frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{d^m f}{dt^m}\right) = \frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = \frac{d^{m+n} f(t)}{dt^{m+n}}$$

özelliğine benzer durum elde edilecektir.

***i*) $p < 0$ olma durumu**.

$q < 0$ olsun. Bu durumda

$$ {}_aD_t^q\left({}_aD_t^p f(t)\right) = \frac{1}{\Gamma(-q)}\int_a^t (t-\tau)^{-q-1}\left({}_aD_t^p f(\tau)\right)d\tau $$

$$ = \frac{1}{\Gamma(-q)\Gamma(-p)}\int_a^t (t-\tau)^{-q-1}d\tau \int_a^\tau (\tau-\xi)^{-p-1} f(\xi)d\xi $$

$$ = \frac{1}{\Gamma(-q)\Gamma(-p)}\int_a^t f(\xi)d\xi \int_\xi^t (t-\tau)^{-q-1}(\tau-\xi)^{-p-1}d\tau $$

$$ = \frac{1}{\Gamma(-p-q)}\int_a^t (t-\xi)^{-p-q-1} f(\xi)d\xi $$

$$ = {}_aD_t^{p+q} f(t) \qquad (3.69) $$

dir. Burada (3.69) da geçen integral aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$ \int_\xi^t (t-\tau)^{-q-1}(\tau-\xi)^{-p-1}d\tau = (t-\xi)^{-p-q-1}\int_0^1 (1-z)^{-q-1}z^{-p-1}dz $$

$$ = \frac{\Gamma(-q)\Gamma(-p)}{\Gamma(-p-q)}(t-\xi)^{-p-q-1} $$

$$ {}_aD_t^q\left({}_aD_t^p f(t)\right) = \frac{1}{\Gamma(-q)\Gamma(-p)}\frac{\Gamma(-q)\Gamma(-p)}{\Gamma(-p-q)}\int_a^t (t-\xi)^{-p-q-1} f(\xi)d\xi $$

$$ = \frac{1}{\Gamma(-p-q)}\int_a^t (t-\xi)^{-p-q-1} f(\xi)d\xi. $$

Şimdi varsayalım ki $0 < n < q < n+1$ olsun. $q-n-1 < 0$ olduğu durumlarda $q = (n+1) + (q-n-1)$ olarak alınır ve (3.62) ile (3.69) formülleri kullanılırsa

$$ {}_aD_t^q\left({}_aD_t^p f(t)\right) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\left\{{}_aD_t^{q-n-1}\left({}_aD_t^p f(t)\right)\right\} $$

$$ = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\left\{{}_aD_t^{p+q-n-1} f(t)\right\} $$

$$ = {}_aD_t^{p+q} f(t) \qquad (3.70) $$

elde edilir.

(3.69) ve (3.70) formülleri gözönüne alındığında $p < 0$ değeri ve her bir reel q sayısı için

$$ {}_aD_t^q\left({}_aD_t^p f(t)\right) = {}_aD_t^{p+q} f(t) $$

sonucuna ulaşılır.

ii) $p > 0$ olma durumu

Şimdi $0 \le m < p < m+1$ olduğunu varsayalım. (3.54) deki formülden

$$ {}_aD_t^p f(t) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(p)}(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} $$

$$ + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \qquad (3.71) $$

elde edilir.

Şimdi $q < 0$ alıp, ${}_aD_t^q\left({}_aD_t^p f(t)\right)$ yi hesaplayalım. (3.71) in sağ tarafı incelenirse görülür ki $(t-a)^{(-p+k)}$ fonksiyonları $k = 0,1,2,\dots,m-1$ için integrallenemeyen singülerliğe sahiptir. Bu yüzden, ${}_aD_t^p f(t)$ nin q reel basamaktan türevi yalnızca

$$f^{(k)}(a) = 0\ , (k = 0,1,2, \dots , m-1) \tag{3.72}$$

durumunda mevcuttur.

(3.71) in sağ tarafındaki integral ${}_aD_t^{p-m-1} f(t)$ ye eşittir ($f(t)$ fonksiyonunun $-p+m+1$ basamaktan kesirli integraline eşit). Böylece (3.72) koşulları altında $f(t)$ nin p −yinci basamaktan türevinin (3.71) deki gösterimi

$${}_aD_t^p f(t) = \frac{f^{(m)}(a)(t-a)^{-p+m}}{\Gamma(-p+m+1)} + {}_aD_t^{p-m-1} f^{(m+1)}(t) \tag{3.73}$$

dır.

Şimdi (3.73) de verilen p −yinci basamaktan türevin $q < 0$ basamaktan türevini (diğer bir deyişle $-q > 0$ basamaktan integralini) bulmalıyız. Yani

$${}_aD_t^q \left({}_aD_t^p f(t) \right) = \frac{f^{(m)}(a)(t-a)^{-p+m}}{\Gamma(-p-q+m+1)}$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(-p-q+m+1)} \int_a^t \frac{f^{(m+1)}(\tau)}{(t-\tau)^{p+q-m}}\, d\tau \tag{3.74}$$

dir. Çünkü

$${}_aD_t^q \left({}_aD_t^{p-m-1} f^{(m+1)}(t) \right) = {}_aD_t^{p+q-m-1} f^{(m+1)}(t)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(-p-q+m+1)} \int_a^t \frac{f^{(m+1)}(\tau)}{(t-\tau)^{p+q-m}}$$

şeklindedir. (3.72) deki koşullar ve (3.71) formülü göz önüne alınırsa

$$ {}_aD_t^q \left({}_aD_t^p f(t) \right) = {}_aD_t^{p+q} f(t) \qquad (3.75) $$

sonucuna varılır.

Şimdi $0 \leq n < q < n+1$ olsun. Varsayalım ki $f(t)$, (3.72) koşullarını sağlasın ve $q - n - 1 < 0$ olma durumunu dikkate alalım. Böylece (3.75) formülü kullanılırsa

$$ {}_aD_t^q \left({}_aD_t^p f(t) \right) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left\{ {}_aD_t^{q-n-1} \left({}_aD_t^p f(t) \right) \right\} $$

$$ = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left\{ {}_aD_t^{p+q-n-1} f(t) \right\} $$

$$ = {}_aD_t^{p+q} f(t) $$

elde edilir ki bu da (3.75) ile aynıdır.

Böylece $p < 0$ ise (3.75) ifadesi tüm keyfi reel q lar için sağlandığı sonucuna varılır. Eğer $0 \leq m < p < m+1$ ise (3.75) deki ilişki tüm keyfi q lar için sağlandığı sonucuna $f(t)$ nin (3.72) deki koşulları sağlaması durumunda varılır.

Bundan başka, eğer

$$ 0 \leq m < p < m+1 \; ve \; 0 \leq n < q < n+1 $$

ve $f(t)$ fonksiyonu,

$$ f^{(k)}(a) = 0 \quad , \qquad (k = 0,1, \dots, r-1) \qquad (3.77) $$

koşulunu $r = max(n, m)$ olmak üzere sağlıyorsa, ${}_aD_t^p$ ve ${}_aD_t^q$ kesirli diferensiyel operatörleri yer değiştirilebilirdir. Yani.

$$ {}_aD_t^q\left({}_aD_t^p f(t)\right) = {}_aD_t^p\left({}_aD_t^q f(t)\right) = {}_aD_t^{p+q} f(t) \qquad (3.78) $$

dir.

3.3. Riemann-Liouville Kesirli Türevi

Kesirli basamaktan geri farkın limiti olarak tanımlanan Grünwald-Letnikov kesirli türevinin uygulanması kullanışlı değildir. Elde edilen (3.54) ifadesi, integralin varlığından dolayı daha iyi görünmektedir. Ancak integral olmayan terim için ne yapmalıyız? sorusunun cevabı basittir. Belli bir integral-diferensiyel ifadesi olarak (3.54) ü göz önüne alırsak

$$ {}_aD_t^p f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{m+1} \int_a^t (t-\tau)^{(m-p)} f(\tau) d\tau \ , \ (m \le p < m+1) \qquad (3.79) $$

olur.

(3.79) daki ifade kesirli türevin en yaygın olarak bilinen tanımıdır ve bu ifadeye Riemann-Liouville tanımı adı verilir.

Açık olarak $f(t)$ nin $m+1$ kere sürekli diferensiyellenebilir fonksiyon olması varsayımı altında Grünwald-Letnikov kesirli türevinden elde edilen (3.54) deki ifade, aynı varsayım altında (3.79) daki ifadeden de elde edilebilir. Bu bize tekrarlanan kısmi integrasyon ve diferansiyelle

$$ {}_aD_t^p f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{m+1} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f(\tau) d\tau $$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)}$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau$$

$$= {}_{a}D_{t}^{P} f(t)\,, \qquad (m \leq p < m+1) \tag{3.80}$$

eşitliğini verir.

Bu nedenle, eğer $f(t)$ fonksiyonunu $(m+1)$-kere sürekli türevlere sahip olacak şekilde göz önüne alırsak, $t \geq 0$ için (3.43) deki Grünwald-Letnikov tanımı (veya (3.54) deki integral formu) (3.79) daki Riemann-Liouville tanımına eşit olur.

Uygulamalı matematik açısından bu tür fonksiyonlar çok kısıtlıdır. Ancak bu tip fonksiyonlar uygulamalar için çok önemlidir. Bu gerçeği anlamak uygulamalarda kesirli analizin metotlarının düzgün kullanımı için önemlidir. Özellikle, (3.79) daki Riemann-Liouville tanımı, $f(t)$ fonksiyonuna zayıf koşullarda önemli fırsat sağladığı için, yani $f(t)$ nin $t > a$ için integralinin varolması ve $(m+1)$-kere diferensiyellenebilmesi için $f(t)$ nin integralini elde etmek yeterlidir. (3.79) daki $f(t)$ fonksiyonunun zayıf koşulları gereklidir. Örneğin; Abel integral denkleminin çözümlerini elde etmek için bu zayıf koşullar kullanılır.
Şimdi (3.79) da ki Riemann-Liouville tanımının nasıl tamsayı basamaktan integral ve diferansiyel kavramlarının birleştirilmesi sonucu elde edildiğini inceleyelim.

3.3.1. Tamsayı Basamaktan Türevlerin ve İntegrallerin Birleştirilmesi

Kabul edelim ki $f(\tau)$ fonksiyonu sürekli ve her sonlu (a,t) aralığında integrallenebilir, ayrıca $f(\tau)$ fonksiyonu $\tau = a$ noktasında $r < 1$ basamaktan singülerliğe sahip olsun. Yani

$$\lim_{\tau \to a} (\tau - a)^{r} f(\tau) = sabit\ (\neq 0)$$

olsun. Bu taktirde

$$f^{(-1)}(t) = \int_a^t f(\tau)d\tau \tag{3.81}$$

integrali mevcuttur ve sınırlı değere sahiptir. Ayrıca $t \to a$ için bu ifade sıfıra eşittir. Aslında $\tau = a + y(t-a)$ değişken değiştirmesi yapılırsa ve $\varepsilon = t - a$ olarak gösterilirse

$$\lim_{t\to a} f^{-1}(t) = \lim_{t\to a} \int_a^t f(\tau)d\tau$$

$$= \lim_{t\to a} \int_0^1 f\big(a + y(t-a)\big)(t-a)dy$$

$$= \lim_{t\to a} (t-a) \int_0^1 f\big(a + y(t-a)\big)dy$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{1-r} \int_0^1 (\varepsilon y)^r f(a + y\varepsilon) y^{-r} dy = 0 \tag{3.82}$$

elde edilir. Çünkü $r < 1$ dir. Bundan başka iki katlı integrali göz önüne alınırsa

$$f^{(-2)}(t) = \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} f(\tau)d\tau = \int_a^t f(\tau)d\tau \int_\tau^t d\tau_1$$

$$= \int_a^t (t-\tau) f(\tau)d\tau \tag{3.83}$$

elde edilir ve (3.83) deki birleşme $f(\tau)$ nun aşağıdaki üç katlı integralini verir.

$$f^{(-3)}(t) = \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} d\tau_2 \int_a^{\tau_2} f(\tau_3)\, d\tau_3$$

$$= \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} (\tau_1 - \tau) f(\tau) d\tau$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^t (t-\tau)^2 f(\tau) d\tau \qquad (3.84)$$

Buradan tümevarımla genel olarak

$$f^{(-n)} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)\, d\tau \qquad (3.85)$$

Cauchy formülü elde edilir.

Şimdi $n \geq 1$ sabitlensin ve $k \geq 0$ tamsayı olduğunu kabul edelim. Açık olarak

$$f^{(-k-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} D^{-k} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \qquad (3.86)$$

elde ederiz ve buradaki D^{-k} sembolü $(k \geq 0)$ k-kez tekrarlanan integrasyonu göstermektedir.

Diğer yandan $n \geq 1$ sabitleri için ve $k \geq n$ tamsayısı için $(k-n)$-inci basamaktan $f(t)$ fonksiyonunun türevi

$$f^{(k-n)} = \frac{1}{\Gamma(n)} D^k \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \qquad (3.87)$$

olarak yazılabilir ve buradaki D^k sembolü $(k \geq 0)$ k −kez tekrarlanan diferensiyeli göstermektedir.

Buradan görülüyor ki, (3.86) ve (3.87) formülleri biri diğerinin özel bir durumu olarak göz önüne alınabilir. Öyle ki; (3.87) de n $(n \geq 1)$ sabittir ve D^k sembolü eğer $k \leq 0$ ise k −kez integrasyon ve eğer $k > 0$ ise k −kez diferensiyel anlamına gelmektedir. (3.87) formülü eğer $k = n-1, n-2, n-3, \ldots$ ise $f(t)$ nin tekrarlanan integrallerini, eğer $k = n+1, n+2, n+3, \ldots$ ise $f(t)$ fonksiyonunun $k-n = 1,2,3, \ldots$ inci basamaktan türevlerini, eğer $k = n$ ise $f(t)$ fonksiyonunun kendisini vermektedir.

3.3.2. Keyfi Basamaktan İntegraller

n katlı integrasyon kavramını, n nin tamsayı olmayan değerlerine genişletmek için (3.85) deki Cauchy formülü ile başlanılmalı ve bu formüldeki n tamsayısı yerine reel $p > 0$ yazılmalıdır.

$$ {}_aD_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \tag{3.88} $$

(3.85) deki n tamsayısı, $n \geq 1$ olma durumunda ele alınmalıdır. Yani (3.88) deki integralin varolabilmesi için $p > 0$ olarak alınmalıdır. Ayrıca makul varsayımlar altında

$$ \lim_{p \to 0} {}_aD_t^{-p} f(t) = f(t) \tag{3.89} $$

olur. Böylece

$$ {}_aD_t^{0} f(t) = f(t) \tag{3.90} $$

bulunur.

(3.89) daki ilişkinin ispatı, eğer $f(t), t \geq 0$ için sürekli türevlere sahipse çok kolaydır. Bu durumda kısmi integrasyon ve (2.9) un kullanılmasıyla

$$ {}_aD_t^{-p} f(t) = -\frac{1}{\Gamma(p+1)} (t-\tau)^p f(\tau) \Big|_a^t + \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^p f'(\tau) d\tau $$

$$ {}_aD_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p+1)} (t-a)^p f(a) + \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^p f'(\tau) d\tau $$

elde edilir ve böylece

$$ \lim_{p \to 0} {}_aD_t^{-p} f(t) = f(a) + \int_a^t f'(\tau) d\tau = f(a) + \big(f(t) - f(a)\big) = f(t) $$

bulunur.

Eğer $f(t)$ sadece $t \geq a$ için sürekli ise (3.89) un ispatı biraz daha uzundur. Bu durumda ${}_aD_t^{-p} f(t)$ ifadesi

$$ {}_aD_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} \big(f(\tau) - f(t)\big) d\tau + \frac{f(t)}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} d\tau $$

$$ = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^{t-\tau} (t-\tau)^{p-1} \big(f(\tau) - f(t)\big) d\tau \qquad (3.91) $$

$$ + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_{t-\tau}^t (t-\tau)^{p-1} \big(f(\tau) - f(t)\big) d\tau \qquad (3.92) $$

$$+\frac{f(t)(t-a)^p}{\Gamma(p+1)} \tag{3.93}$$

formunda yazılabilir.

(3.92) deki integrali göz önüne alalım. $f(t)$ sürekli olduğundan her $\delta > 0$ için öyle bir $\varepsilon > 0$ vardır ki

$$|f(\tau) - f(t)| < \varepsilon$$

dur. (3.92) deki integral için yapılacak bir tahmin ile

$$|I_2| < \frac{\varepsilon}{\Gamma(p)} \int_{t-\delta}^{t} (t-\tau)^{p-1}\, d\tau < \frac{\varepsilon \delta^p}{\Gamma(p+1)} \tag{3.94}$$

dir ve $\delta \to 0$ iken $\varepsilon \to 0$ olma durumu göz önüne alınırsa tüm $p \geq 0$ için

$$\lim_{\delta \to 0} |I_2| = 0 \tag{3.95}$$

elde edilir.

Şimdi keyfi bir $\varepsilon > 0$ ve öyle bir δ seçelim ki tüm $p \geq 0$ lar için

$$|I_2| < \varepsilon \tag{3.96}$$

geçerli olsun. Sabit δ lar için (3.91) integralinin bir tahmini

$$|I_1| < \frac{M}{\Gamma(p)} \int_{a}^{t-\delta} (t-\tau)^{p-1} d\tau \leq \frac{M}{\Gamma(p+1)} (\delta^p - (t-a)^p) \tag{3.97}$$

şeklinde olsun. $\delta > 0$ sabitleri için

$$\lim_{p \to 0} |I_1| = 0 \tag{3.98}$$

elde edilir. Aşağıdaki eşitsizliği

$$\left|{}_aD_t^{-p}f(t)-f(t)\right| \le |I_1|+|I_2|+|f(t)|\left|\frac{(t-a)^p}{\Gamma(p+1)}-1\right|$$

göz önüne alalım. Ayrıca (3.95) limitini ve (3.96) tahminini hesaba katarsak

$$\lim_{p\to 0} sup\left|{}_aD_t^{-p}f(t)-f(t)\right| \le \varepsilon$$

elde ederiz. Burada ε istenildiği kadar küçük seçilebilir. Dolayısıyla

$$\lim_{p\to 0} sup\left|{}_aD_t^{-p}f(t)-f(t)\right| = 0$$

olur. Böylece $f(t)$, $t \ge a$ lar için sürekli ise (3.89) geçerli olur.

Eğer $f(t)$, $t \ge a$ lar için sürekli ise (3.88) tarafından tanımlanan keyfi reel basamaktan integrasyon

$${}_aD_t^{-p}\left({}_aD_t^{-q}f(t)\right) = {}_aD_t^{-p-q}f(t) \qquad (3.99)$$

şeklinde önemli bir özelliğe sahiptir. Gerçekten

$${}_aD_t^{-p}\left({}_aD_t^{-q}f(t)\right) = \frac{1}{\Gamma(q)}\int_a^t (t-\tau)^{q-1}\,{}_aD_\tau^{-p}f(\tau)d\tau$$

$$= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\int_a^t (t-\tau)^{q-1}\,d\tau \int_a^\tau (\tau-\xi)^{p-1}f(\xi)d\xi$$

$$= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\int_a^t f(\xi)d\xi \int_\xi^t (t-\tau)^{q-1}(\tau-\xi)^{p-1}\,d\tau$$

$$= \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_a^t (t-\xi)^{p+q-1} f(\xi) d\xi$$

$$= {}_aD_t^{-p-q} f(t)$$

dir. (ξ dan t ye olan integralin hesabı için $\tau = \xi + \varsigma(t-\xi)$ değişken değiştirmesini kullanırız. Bu da bizi Beta fonksiyonuna götürür.)

Açık olarak p ve q yer değiştirilebilir. Yani

$${}_aD_t^{-p}\left({}_aD_t^{-q} f(t)\right) = {}_aD_t^{-q}\left({}_aD_t^{-p} f(t)\right) = {}_aD_t^{-p-q} f(t) \qquad (3.100)$$

elde ederiz.

(3.100) deki kural tamsayı basamaktan türevlerin bilinen

$$\frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = \frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{d^m f(t)}{dt^m}\right) = \frac{d^{m+n} f(t)}{dt^{m+n}} \qquad (3.101)$$

özelliği ile benzerdir

3.3.3. Keyfi Basamaktan Türevler

$(k-n)$-yinci tamsayı basamaktan türevler için olan (3.87) gösterimi, bu ifadeyi tamsayı olmayan farklı kavramların genişlemesine olanak sağlar. Öyle ki k ve n yi gerçek tamsayı olan α ile ayırabiliriz. Bu da $k-\alpha > 0$ için

$${}_aD_t^{k-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (0 < \alpha \leq 1) \qquad (3.102)$$

verir. Burada kısıtlama sadece α içindir ve bu $\alpha > 0$ dır. Bu da (3.102) deki integralin yakınsaklığı için gereklidir. Ancak bu kısıtlama yerine genelliği bozmadan daha kısıtlı $0 < \alpha \leq 1$ durumu alınabilir. Bu durum (3.102) deki tanım ve keyfi reel basamaktan integrallerin (3.100) deki özelliği yardımıyla kolayca gösterilebilir. $p = k - \alpha$ ile gösterilirse (3.102) yi

$$ {}_aD_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} f(\tau) d\tau \,, \quad (k-1 \leq p < k) \qquad (3.103) $$

veya

$$ {}_aD_t^p f(t) = \frac{d^k}{dt^k} \left({}_aD_t^{-(k-p)} f(t) \right), \quad (k-1 \leq p < k) \qquad (3.104) $$

şeklinde yazabiliriz.

Eğer $p = k - 1$ ise $(k-1)$ inci basamaktan bilinen tamsayı basamaktan

$$ {}_aD_t^{k-1} f(t) = \frac{d^k}{dt^k} \left({}_aD_t^{-(k-(k-1))} f(t) \right) $$

$$ = \frac{d^k}{dt^k} \left({}_aD_t^{-1} f(t) \right) = f^{(k-1)}(t) $$

türevini elde ederiz.

Ayrıca (3.90) ı kullanınca $p = k \geq 1$ ve $t > a$ için

$$ {}_aD_t^p f(t) = \frac{d^k}{dt^k} \left({}_aD_t^0 f(t) \right) = \frac{d^k f(t)}{dt^k} = f^{(k)}(t) \qquad (3.105) $$

olduğunu görürüz. Bu da $t > a$ için $p = k > 1$ basamaktan Riemann-Liouville kesirli türevi (3.103), bilinen k −yıncı basamaktan türeve denk gelmektedir.

Şimdi Riemann-Liouville kesirli türevinin bazı özelliklerini göz önüne alalım. İlk olarak - belki de en önemlisi olarak- Riemann-Liouville kesirli türevinin $p > 0$ ve $t > a$ için özelliği

$$ {}_aD_t^p\left({}_aD_t^{-p} f(t)\right) = f(t) \tag{3.106} $$

olur ki bu da Riemann-Liouville kesirli diferansiyel operatörün aynı p −yinci basamaktan Riemann-Liouville kesirli integral operatörünün sol tersi anlamına gelmektedir.

(3.106) daki özelliği ispatlamak için, şimdi $p = n \geq 1$ tamsayı olma durumunu göz önüne alalım.

$$ {}_aD_t^n({}_aD_t^{-n} f(t)) = \frac{d^n}{dt^n}\frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)d\tau $$

$$ = \frac{d}{dt}\int_a^t f(\tau)d\tau = f(t) $$

Şimdi $k - 1 \leq p < k$ alalım ve Riemann-Liouville kesirli integrali için (3.100) deki birleşme kuralını kullanalım. Böylece

$$ {}_aD_t^{-k} f(t) = {}_aD_t^{-(k-p)}\left({}_aD_t^{-p} f(t)\right) \tag{3.107} $$

olup buradan

$$ {}_aD_t^p\left({}_aD_t^{-p} f(t)\right) = \frac{d^k}{dt^k}\left({}_aD_t^{-(k-p)}\left({}_aD_t^{-p} f(t)\right)\right) $$

$$ = \frac{d^k}{dt^k}\{{}_aD_t^{-k} f(t)\} = f(t) $$

elde edilir ki bu da (3.106) özelliğinin ispatını tamamlar. Bilinen tamsayı basamaktan diferansiyel ve integrasyon ile kesirli diferansiyel ve integrasyon değiştirilemez.

Eğer ${}_aD_t^p f(t)$, $(k-1 \le p < k)$ kesirli türevi $f(t)$ fonksiyonu integrallenebilir ise

$$ {}_aD_t^{-p}\left({}_aD_t^p f(t)\right) = f(t) - \sum_{j=1}^{k} \left[{}_aD_t^{p-j} f(t)\right]\Big|_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(p-j+1)} \qquad (3.108) $$

dir. Gerçekten de

$$ {}_aD_t^{-p}\left({}_aD_t^p f(t)\right) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} {}_aD_\tau^p f(\tau) d\tau $$

$$ = \frac{d}{dt}\left\{ \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^p {}_aD_\tau^p f(\tau) d\tau \right\} \qquad (3.109) $$

dır. Diğer taraftan tekrarlı kısmi integrasyon ve (3.100) kullanılarak

$$ \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^p {}_aD_\tau^p f(\tau) d\tau = \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^p \frac{d^k}{d\tau^k}\left\{ {}_aD_\tau^{-(k-p)} f(\tau)\right\} d\tau $$

$$ = \frac{1}{\Gamma(p-k+1)} \int_a^t (t-\tau)^{p-k} \left\{ {}_aD_\tau^{-(k-p)} f(\tau)\right\} d\tau $$

$$ - \sum_{j=1}^{k} \left[\frac{d^{k-j}}{dt^{k-j}} \left({}_aD_t^{-(k-p)} f(t)\right)\right]\Big|_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j+1}}{\Gamma(2+p-j)} $$

$$ \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^p {}_aD_\tau^p f(\tau) d\tau = \frac{1}{\Gamma(p-k+1)} \int_a^t (t-\tau)^{p-k} \left\{ {}_aD_\tau^{-(k-p)} f(\tau)\right\} d\tau $$

$$-\sum_{j=1}^{k}\left[{}_aD_t^{p-j}f(t)\right]\Big|_{t=a}\frac{(t-a)^{p-j+1}}{\Gamma(2+p-j)} \tag{3.110}$$

$$\frac{1}{\Gamma(p+1)}\int_a^t (t-\tau)^p\,{}_aD_\tau^p f(\tau)d\tau = {}_aD_t^{-(p-k+1)}\left({}_aD_t^{-(k-p)}f(t)\right)$$

$$-\sum_{j=1}^{k}\left[{}_aD_t^{p-j}f(t)\right]\Big|_{t=a}\frac{(t-a)^{p-j+1}}{\Gamma(2+p-j)} \tag{3.111}$$

$$\frac{1}{\Gamma(p+1)}\int_a^t (t-\tau)^p\,{}_aD_\tau^p f(\tau)d\tau$$

$$= {}_aD_t^{-1}f(t) - \sum_{j=1}^{k}\left[{}_aD_t^{p-j}f(t)\right]\Big|_{t=a}\frac{(t-a)^{p-j+1}}{\Gamma(2+p-j)} \tag{3.112}$$

elde edilir. (3.110) daki tüm terimlerin varlığı ${}_aD_t^p f(t)$ nin integralinden elde edilir. Çünkü ${}_aD_t^{p-j}f(t)$, $(j=1,2,\dots,k)$ kesirli türevin koşulu nedeniyle $t=a$ da hepsi sınırlıdır. (3.109) ve (3.112) nin kombinasyonu (3.108) ilişkisinin ispatını sonlandırır.

Burada önemli olan özel bir durumdan da bahsedilmelidir. Eğer $0<p<1$ ise

$${}_aD_t^{-p}\left({}_aD_t^p f(t)\right) = f(t) - \left[{}_aD_t^{p-1}f(t)\right]\Big|_{t=a}\frac{(t-a)^{p-1}}{\Gamma(p)} \tag{3.113}$$

elde edilir.

(3.109) özelliği

$${}_aD_t^p\left({}_aD_t^{-q}f(t)\right) = {}_aD_t^{p-q}f(t) \tag{3.114}$$

genel özelliğinin özel bir durumudur. Bu .ifade $f(t)$ nin sürekli olduğu varsayımı altında geçerlidir ve eğer $p \geq q \geq 0$ ise ${}_aD_t^{p-q} f(t)$ türevi mevcuttur. İki durum göz önüne alınabilir. Bunlar $q \geq p \geq 0$ ve $p > q \geq 0$ olma durumlarıdır.

Eğer $q \geq p \geq 0$ ise (3.100) ve (3.106) özellikleri kullanılarak

$$ {}_aD_t^{p}\left({}_aD_t^{-q} f(t)\right) = {}_aD_t^{p}\left({}_aD_t^{-p}\, {}_aD_t^{-(q-p)}\right) $$

$$ = {}_aD_t^{-(q-p)} = {}_aD_t^{p-q} f(t) $$

elde edilir.

Şimdi $p > q \geq 0$ olma durumunu göz önüne alalım. m ve n sabitlerini $0 \leq m-1 \leq p < m$ ve $0 \leq n \leq p-q < n$ olarak ifade edelim. Açıkçası $n \leq m$ dir. Böylece (3.103) tanımını ve (3.100) özelliğini kullanarak

$$ {}_aD_t^{p}\left({}_aD_t^{-q} f(t)\right) = \frac{d^m}{dt^m}\left\{{}_aD_t^{-(m-p)}\left({}_aD_t^{-q} f(t)\right)\right\} $$

$$ = \frac{d^m}{dt^m}\left\{{}_aD_t^{p-q-m} f(t)\right\} $$

$$ = \frac{d^n}{dt^n}\left\{{}_aD_t^{p-q-n} f(t)\right\} $$

$$ = {}_aD_t^{p-q} f(t) $$

elde edilir.

Sözü edilen yukarıdaki (3.108) deki özellik

$$ {}_aD_t^{-p}\left({}_aD_t^{q} f(t)\right) = {}_aD_t^{q-p} f(t) - \sum_{j=1}^{k}\left[{}_aD_t^{q-j} f(t)\right]\Big|_{t\,=\,a} \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(1+p-j)} \qquad (3.115) $$

$$ (0 \leq k-1 \leq q < k) $$

genel özelliğinin özel bir durumudur. (3.115) formülünü ispatlamak için (eğer $q \leq p$ ise) ilk olarak (3.100) özelliğini veya (eğer $q \geq p$ ise) ilk olarak (3.114) özelliğini ve daha sonra (3.108) özelliğini kullanırız. Bu bize

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^{-p}\left({}_aD_t^q f(t)\right) &= {}_aD_t^{q-p}\left\{{}_aD_t^{-q}\left({}_aD_t^q f(t)\right)\right\} \\
&= {}_aD_t^{q-p}\left\{f(t) - \sum_{j=1}^{k}\left[{}_aD_t^{q-j} f(t)\right]\Big|_{t=a} \frac{(t-a)^{q-j}}{\Gamma(p-j+1)}\right\} \\
&= {}_aD_t^{q-p} f(t) - \sum_{j=1}^{k}\left[{}_aD_t^{q-j} f(t)\right]\Big|_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(1+p-j)}
\end{aligned}
$$

özelliğini verir ki burada (3.117) kuvvet fonksiyonunun

$${}_aD_t^{q-p}\left\{\frac{(t-a)^{q-j}}{\Gamma(1+q-j)}\right\} = \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(1+p-j)}$$

bilinen türevi kullanılmıştır.

3.3.4. $(t-a)^{\beta}$ nın Kesirli Türevi

Şimdi, v reel sayı olmak üzere

$$f(t) = (t-a)^v$$

kuvvet fonksiyonunun ${}_aD_t^p f(t)$ Riemann-Liouville kesirli türevini hesaplayalım. Bu amaçla kabul edelim ki $n-1 \leq p < n$ olsun ve Riemann-Liouville türevinin

$${}_aD_t^p f(t) = \frac{d^n}{dt^n}\left({}_aD_t^{-(n-p)} f(t)\right) \qquad (n-1 \leq p < n) \qquad (3.116)$$

tanımını hatırlayalım.

Bu fonksiyonun (3.56) da $\alpha = n - p$ için hesaplanan kesirli integralini (3.116) formülünde değerlendirirsek

$$ {}_aD_t^{-\alpha}((t-a)^v) = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(1+v+\alpha)}(t-a)^{v+\alpha} $$

olur ve buradan

$$ {}_aD_t^{p}((t-a)^v) = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(1+v-p)}(t-a)^{v-p} \qquad (3.117) $$

elde edilir. Ayrıca, $f(t) = (t-a)^v$ için tek kısıtlama $v > -1$ için $f(t)$ nin integrallenebilir olmasıdır.

3.3.5. Tamsayı Basamaktan Türevlerle Birleştirilmesi

Birçok uygulama probleminde Riemann-Liouville kesirli türevinin tamsayı basamaktan türevlerle birleştirilmesi görülmektedir.

Şimdi p reel basamaktan Riemann-Liouville kesirli türevinin $n-$yinci basamaktan türevini göz önüne alalım. Riemann-Liouville türevinin (3.102) tanımını kullanarak

$$ \frac{d^n}{dt^n}\left({}_aD_t^{k-\alpha}f(t)\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d^{n+k}}{dt^{n+k}}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau $$

$$ = {}_aD_t^{n+k-\alpha}f(t) \qquad (0 < \alpha \leq 1) \qquad (3.118) $$

ve $p = k - \alpha$ ile gösterirsek

$$ \frac{d^n}{dt^n}\left({}_aD_t^{p}f(t)\right) = {}_aD_t^{n+p}f(t) $$

elde ederiz.

$$ {}_aD_t^{-n}(f^{(n)}(t)) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{n-1} f^{(n)}(\tau)d\tau $$

$$ = f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^j}{\Gamma(j+1)} \tag{3.120} $$

ve

$$ {}_aD_t^p g(t) = {}_aD_t^{p+n}({}_aD_t^{-n} g(t)) \tag{3.121} $$

olduğunu dikkate almalıyız. (3.120), (3.121) ve (3.117) kullanılırsa

$$ {}_aD_t^p \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = {}_aD_t^{p+n}\left({}_aD_t^{-n} f^{(n)}(t)\right) $$

$$ = {}_aD_t^{p+n}\left(f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^j}{\Gamma(j+1)}\right) $$

$$ = {}_aD_t^{p+n} f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{j-p-n}}{\Gamma(1+j-p-n)} \tag{3.122} $$

elde edilir ki bu da (3.66) daki ilişkiye benzerdir. Bu nedenle, Grünwald-Letnikov türevinde olduğu gibi Riemann-Liouville kesirli türev operatörü ${}_aD_t^p$, $\frac{d^n}{dt^n}$ türev operatörüyle yer değiştirebilir. Yani

$$ \frac{d^n}{dt^n}\left({}_aD_t^p f(t)\right) = {}_aD_t^p \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = {}_aD_t^{p+n} f(t) \tag{3.123} $$

dir. Ancak yukarıdaki bu durum $f(t)$ fonksiyonunun kesirli diferansiyelini $t = a$ alt uç noktasında

$$f^{(k)}(a) = 0 \quad , \quad (k = 0,1,2, \dots, n-1) \tag{3.124}$$

koşulunu sağlamasıyla geçerli olur.

3.3.6. Kesirli Türevlerle Birleştirilmesi

Şimdi iki kesirli Riemann-Liouville kesirli türev operatörünün birleştirilmesini inceleyelim. ${}_aD_t^p, (m-1 \le p < m)$ ve ${}_aD_t^q, (n-1 \le q < n)$ olsun.

(3.104) deki Riemann-Liouville kesirli türev tanımını, (3.108) formülünü ve (3.119) daki tamsayı basamaktan türevlerle birleştirilmesi özelliği sırasıyla kullanılırsa

$${}_aD_t^p\left({}_aD_t^q f(t)\right) = \frac{d^m}{dt^m}\left\{{}_aD_t^{-(m-p)}\left({}_aD_t^q f(t)\right)\right\}$$

$$= \frac{d^m}{dt^m}\left\{{}_aD_t^{p+q-m} f(t) - \sum_{j=1}^{n}\left[{}_aD_t^{q-j} f(t)\right]\Big|_{t=a} \frac{(t-a)^{m-p-j}}{\Gamma(1+m-p-j)}\right\}$$

$$= {}_aD_t^{p+q} f(t) - \sum_{j=1}^{n}\left[{}_aD_t^{q-j} f(t)\right]\Big|_{t=a} \frac{(t-a)^{-p-j}}{\Gamma(1-p-j)} \tag{3.125}$$

elde edilir.

p ve q nun yerleri değiştirilirse (ve bu nedenle m ve n)

$${}_aD_t^q\left({}_aD_t^p f(t)\right) = {}_aD_t^{p+q} f(t) - \sum_{j=1}^{m}\left[{}_aD_t^{p-j} f(t)\right]\Big|_{t=a} \frac{(t-a)^{-q-j}}{\Gamma(1-q-j)} \tag{3.126}$$

yazılabilir.

(3.125) ve (3.126) daki ilişkinin karşılaştırılması bize genel olarak Riemann-Liouville kesirli türev operatörleri olan ${}_aD_t^p$ ve ${}_aD_t^q$ nun değiştirilmeyeceğini sadece bir özel durum dışında (p = q durumunun dışında) söylemektedir. Şöyle ki p≠ q için (3.125) ve (3.126) nın sağ taraflarındaki toplam sıfır oluyorsa

$$ {}_aD_t^p\left({}_aD_t^q f(t)\right) = {}_aD_t^q\left({}_aD_t^p f(t)\right) = {}_aD_t^{p+q} f(t) \qquad (3.127) $$

olur. Bunun için aynı anda

$$ \left[{}_aD_t^{p-j} f(t)\right]\Big|_{t=a} = 0 \quad , \quad (j = 1,2,\dots,m) \qquad (3.128) $$

$$ \left[{}_aD_t^{q-j} f(t)\right]\Big|_{t=a} = 0 \quad , \quad (j = 1,2,\dots,m) \qquad (3.129) $$

koşullarının gerçeklenmesi gerekir. Eğer $f(t)$ yeterli sayıda sürekli türevlere sahipse, (3.128) koşulu

$$ f^{(j)}(a) = 0 \quad , \quad (j = 0,1,2,\dots,m-1) \qquad (3.130) $$

koşuluna ve (3.129) koşulu

$$ f^{(j)}(a) = 0 \quad , \quad (j = 0,1,2,\dots,n-1) \qquad (3.131) $$

koşuluna eşdeğer olur. Böylece eğer

$$ f^{(j)}(a) = 0 \quad , \quad (j = 0,1,2,\dots,r-1) \qquad (3.132) $$

$$ r = max(n,m) $$

ise (3.127) deki ilişki (p. ve q. basamaktan türevlerin yer değiştirmesi) korunur.

4. RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ TÜREVİ İÇİN LEIBNIZ FORMÜLÜ

4.1. Giriş

Bu bölümde Riemann-Liouille kesirli türevi için Leibniz formülünün var olup olmadığı incelenecektir. "Klasik durumda n −kez türeve sahip f ve g fonksiyonları için geçerli olan Leibniz formülü, Riemann-Liouville kesirli türev operatörüyle nasıl verilir ?'' sorusunun yanıtı aranmaktadır. Bunun için literatürde bu konuyla çalışanların temel kaynak olarak kullandığı Igor Podlubny nin Fractional Differential Equations ve Kai Diethelm ın The analysis of Fractional Differential equations kitapları incelenmiştir.

Şimdi Riemann-Liouville kesirli türev operatörü için Leibniz formülünün ispatında kullanacağımız bazı lemmaları ispatlı olarak verelim.

Lemma 4.1. $f, h > 0$ için $(a-h, a+h)$ aralığında analitik ve $n > 0$ olsun. Bu durumda $a \leq x < a + \frac{h}{2}$ için

$$I_a^n f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x-a)^{k+n}}{k!\,(n+k)\Gamma(n)} D^k f(x) \tag{4.1}$$

ve $a \leq x < a + h$ için

$$I_a^n f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^{k+n}}{\Gamma(k+1+n)} D^k f(a) \tag{4.2}$$

dır. Özellikle $I_a^n f(x), (a, a+h)$ da analitiktir.

İspat. (3.85) den

$$I_a^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x f(t)(x-t)^{n-1} dt$$

operatörü göz önüne alınsın. Burada $f(t)$ fonksiyonu x in komşuluğunda kuvvet serisine açılabilir. $x \in [a, a + \frac{h}{2})$ olduğundan kuvvet serisi integral aralığının tamamında yakınsaktır. Bu yüzden türev ve integral yer değiştirebilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa (4.1) elde edilir.

(4.2) için benzer işlemler yapılabilir. Buradaki farklılık $f(t)$ nin x in komşuluğunda değil a noktası komşuluğunda kuvvet serisine açılmalıdır. Yani

$$I_a^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x f(t)(x-t)^{n-1} dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(h)}(a)(t-a)^k}{k!} (x-t)^{n-1} dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \int_a^x (t-a)^k (x-t)^{n-1} dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^{k+n}}{\Gamma(k+1+n)} D^k f(a)$$

dır. Yukarıdaki integralde $t - a = s(x - a)$ dönüşümü uygulanmıştır.

Lemma 4.2. $f, h > 0$ için $(a - h, a + h)$ aralığında analitik ve $n > 0$, $n \notin \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda $a < x < a + \frac{h}{2}$ için

$$D_a^n f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{(x-a)^{k-n}}{\Gamma(k+1-n)} D^k f(x) \tag{4.3}$$

ve $a < x < a + h$ için

$$D_a^n f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^{k-n}}{\Gamma(k+1-n)} D^k f(a) \tag{4.4}$$

dır. Özel olarak $D_a^n f(x)$, $(a, a + h)$ da analitiktir.

(4.3) de kullanılan $\binom{n}{k}$ binom katsayıları $n \in \mathbb{R}$ ve $k \in \mathbb{N}_0$ için

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k!}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

İspat. Lemma 4.1 den

$$D_a^n f(x) = D^{\lceil n \rceil} I_a^{\lceil n \rceil - n} f(x)$$

dir. Burada $\lceil n \rceil$, n nin tam değerini ifade etmektedir.

$$k!\,\Gamma(n)(n+k)\binom{-n}{k} = (-1)^k \Gamma(k+1+n)$$

olduğu ve (4.1) eşitliği göz önüne alınırsa

$$I_a^{\lceil n \rceil - n} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n - \lceil n \rceil}{k} \frac{(x-a)^{k+\lceil n \rceil - n}}{\Gamma(k+1+\lceil n \rceil - n)} D^k f(x)$$

bulunur. x e göre $\lceil n \rceil$ kez türev alınırsa

$$D_a^n f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n - \lceil n \rceil}{k} \frac{1}{\Gamma(k+1+\lceil n \rceil - n)} D^{\lceil n \rceil} \left[(.-a)^{k+\lceil n \rceil - n} D^k f \right](x)$$

elde edilir. Leibniz kuralı kullanılırsa

$$D_a^n f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n - \lceil n \rceil}{k} \frac{1}{\Gamma(k+1+\lceil n \rceil - n)}$$

$$\times \sum_{j=0}^{\lceil n \rceil} \binom{\lceil n \rceil}{j} D^{\lceil n \rceil - j} \left[(.-a)^{k+\lceil n \rceil - n} \right](x) D^{k+j} f(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n - \lceil n \rceil}{k} \sum_{j=0}^{\lceil n \rceil} \binom{\lceil n \rceil}{j} \frac{(x-a)^{k+j-n}}{\Gamma(k+1+j-n)} D^{k+j} f(x)$$

$\mu \in \mathbb{N}$ ve $\mu < j$ için $\binom{\mu}{j} = 0$ dır. Dolayısıyla içteki toplamın üssü "∞" a genişletilebilir. $j = l - k$ dönüşümü yapılırsa

$$D_a^n f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=k}^{\infty} \binom{n - \lceil n \rceil}{k} \binom{\lceil n \rceil}{l-k} \frac{(x-a)^{l-n}}{\Gamma(l+1-n)} D^l f(x)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{l} \binom{n - \lceil n \rceil}{k} \binom{\lceil n \rceil}{l-k} \frac{(x-a)^{l-n}}{\Gamma(l+1-n)} D^l f(x)$$

olur.

$$\sum_{k=0}^{l} \binom{n - \lceil n \rceil}{k} \binom{\lceil n \rceil}{l-k} = \binom{n}{l}$$

olduğu göz önüne alınırsa istenilen sonuç elde edilir.

4.2. Riemann-Liouville Kesirli Türevi İçin Leibniz Formülü

Bu kısımda $n \in \mathbb{R}^+$ için $D_a^n f(x)$ Riemann-Liouville kesirli türev operatörü için Leibniz formülünü elde edeceğiz. Riemann-Liouville kesirli türev operatörü için Leibniz formülünü vermeden önce bu operatörün lineerliğini ve klasik durumdaki Leibniz formülünü verelim.

Teorem 4.2.1. (Lineerlik Özelliği) : f_1, f_2 , $[a, b]$ aralığında tanımlı ve bu aralık üzerindeki hemen hemen her yerde $D_a^n f_1$ ve $D_a^n f_2$ türevlerine sahip iki fonksiyon ve $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ olsun. Böylece $D_a^n(c_1 f_1 + c_2 f_2)$ vardır ve

$$D_a^n(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 D_a^n f_1 + c_2 D_a^n f_2$$

dir.

İspat. Kesirli türev operatörünün lineerlik özelliği, D_a^n nin (4.3) ve (4.4) tanımının bir sonucu olarak hemen elde edilebilir.

Şimdi Riemann-Liouville kesirli türev operatörü için Leibniz formülünü vermeden önce klasik durumdaki Leibniz formülünü düşünelim. Yani $n \in \mathbb{N}$ için $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının çarpımının $n-$yinci türevini düşünelim. Bu formül aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 4.2.2. (Leibniz Formülü) : $n \in \mathbb{N}$ ve $f, g \in C^n[a,b]$ olsun. Bu durumda

$$D^n[fg] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (D^k f)(D^{n-k} g)$$

dir.

Burada hemen not edelim ki bu sonucun iki önemli özelliği vardır. Birincisi bu formül simetriktir. Yani f ve g nin yerleri değiştirilebilir. İkincisi fg çarpımının $n-$yinci türevini hesaplamak için her iki çarpanın $n-$yinci basamaktan türevine ihtiyacımız vardır. Görülmektedir ki çarpanların hiçbirinin $(n+1)$. basamaktan türevine ihtiyaç yoktur. Aşağıdaki teorem klasik anlamdaki Leibniz formülünü Riemann-Liouville kesirli türev operatörü yardımıyla vermektedir. Ancak burada hemen belirtmek gerekir ki yukarıda bahsedilen iki şart bu formülde yoktur.

Teorem 4.2.3. (Riemann-Liouville operatörü için Leibniz formülü) : $n > 0$ olsun. Kabul edelim ki f ve g fonksiyonları bazı $h > 0$ için $(a-h, a+h)$ aralığında analitik olsun. Böylece $a < x < a + \frac{h}{2}$ için

$$D_a^n(fg)(x) = \sum_{k=0}^{\lceil n \rceil} \binom{n}{k} (D_a^k f)(x)\,(D_a^{n-k} g)(x) + \sum_{k=\lceil n \rceil + 1}^{\infty} \binom{n}{k} (D_a^k f)\,(x)(I_a^{k-n} g)(x) \tag{4.5}$$

dir

Teoremin ispatına başlamadan önce bazı özellikler üzerinde durmanın faydası vardır. Öncelikle belirtelim ki k negatif olmayan bir tamsayıdır. Bu yüzden (4.5) deki eşitliğin sağ yanındaki ifadede $D_a^k f$ yerine $D^k f$ yazılabilir. Dahası k tüm negatif olmayan tam sayıları taradığı için $f \in C^\infty[a,b]$ olmasına ihtiyaç vardır. Bu durum (4.5) eşitliğinin sağ tarafından da görülmektedir. Her ne kadar g fonksiyonu üzerinde daha az sınırlama var gibi görülse de (g nin n-yinci basamaktan türevi gibi) bizim ispatımız için (fg) çarpımının analitikliğine ihtiyacımız vardır ve bu yalnızca g nin analitikliği ile garanti altına alınmaktadır. Bütün bunlar gösteriyor ki yukarıda belirtilen iki özellik bu teorem için geçerli değildir. Son olarak (4.5) eşitliğinin sağ tarafındaki ifadede Riemann-Liouville integral operatörü bulunmaktadır. Klasik durumda bu terim yoktur. Çünkü n tamsayı olduğundan $k > n$ için $\binom{n}{k} = 0$ dır. Bu durumda klasik durum için (4.5) deki ikinci terim yoktur (ki tüm farklılığa sebep olan ifade bu terimdir).

İspat. Lemma 4.2 den

$$D_a^n[fg](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{(x-a)^{k-n}}{\Gamma(k+1-n)} D^k(fg)(x) \tag{4.6}$$

dir. Şimdi yukarıdaki terimde eşitliğin sağ yanındaki $D^k(fg)$ ifadesine Teorem 4.2.2. Leibniz formülü uygulanırsa

$$D_a^n[fg](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{(x-a)^{k-n}}{\Gamma(k+1-n)} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} D^j f(x) D^{k-j} g(x)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{(x-a)^{k-n}}{\Gamma(k+1-n)} \binom{k}{j} D^j f(x) D^{k-j} g(x)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} D^j f(x) \sum_{l=0}^{\infty} \binom{n}{l+j} \frac{(x-a)^{l+j-n}}{\Gamma(l+j+1-n)} \binom{l+j}{j} D^l g(x)$$

elde edilir.

$$\binom{n}{l+j}\binom{l+j}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{l}$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$D_a^n[fg](x) = \sum_{j=0}^{\infty} D^j f(x) \binom{n}{j} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{n-j}{l} \frac{(x-a)^{l+j-n}}{\Gamma(l+j+1-n)} D^l g(x)$$

$$= \sum_{j=0}^{\lceil n \rceil} \binom{n}{j} D^j f(x) \sum_{l=0}^{\infty} \binom{n-j}{l} \frac{(x-a)^{l+j-n}}{\Gamma(l+j+1-n)} D^l g(x)$$

$$+ \sum_{j=\lceil n \rceil+1}^{\infty} \binom{n}{j} D^j f(x) \sum_{l=0}^{\infty} \binom{n-j}{l} \frac{(x-a)^{l+j-n}}{\Gamma(l+j+1-n)} D^l g(x)$$

olur. Yukarıdaki son eşitliğin iç kısmındaki toplamların yerine Lemma 4.1 ve Lemma 4.2 deki değerleri yerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezin başlangıcında kesirli türev konusuna temel olacak özellikler incelendi. Daha sonra bu temel tanım ve özelliklerin Riemann-Liouville kesirli türev operatörüne nasıl uygulandığı ele alındı.

Bu tezde amaçlanan Riemann-Liouville kesirli türev operatörünün sağladığı temel özellikler için bir kaynak oluşturmaktır. Elbette kesirli türev bu tezdeki konularla sınırlı değildir. Ancak incelendiği kısım itibari ile okuyucuya yararlı olacağı kanaatindeyiz.

KAYNAKLAR

[1] Podlubny, I., Fractional Differential Equations , Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, San Diego, Calif, USA, 1999.

[2] Benghorbal, Mhenni M., Corless, Robert M., International Journal of Pure and Applied Mathematics, London, N6A 5B9, CANADA, 192-193, 2004

[3] Dielthelm, K., The analiysis of Fractional Differential equations, Lecture notes in Mathematics, Elsevier, 2010.

[4] Lavoie, J. L., Osler T.J., Tremblay, R., Fractional Derivatives and Special Functions SIAM Rev. ,18(2), 240-268,1976.

[5] Munkhammar, J., Riemann-Liouville Fractional Derivatives and the Taylor-Riemann Series, Uppsala University U.U.D.M. Project Report 2004:7

[6] Starc, Z., Power Product Inequalities For The Gamma Function, ˇZarka Zrenjanina 93, 26300 Vrˇsac, Yugoslavia March 6, 81–84,2002.

[7] Şahin. R., Çok Değişkenli Hipergeometrik Fonksiyonlar, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü 2-5, Ankara 2011.

[8] S.G. Samko, A.A. Kilbas, OI. Marichev, Fractional Integrals and Deribvatives Theory and Applications. Gordon and Breach Science Publishers, USA.

[9] Stoica, E., Stoica, I,. Specıal Functıons Wıth Applıcatıons In Numerıcal Analysıs, 5-8, Babes¸-Bolyaı Unıversıty Cluj-Napoca Faculty Of Mathematıcs And Informatıcs 2010.

[10] Chi, C,. Gao, F,. Simulating Fractional Derivatives using Matlab, Computer Engineering School, Qingdao Technological University, Qingdao, China, 266033, March 2013.

[11] K. S. Miller and B. Ross, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 1993.

[12] K. B. Oldham and J. Spanier, The Fractional Calculus; Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order, Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, New York, NY, USA, 1974.

[13] Osler, Thomas J. "Leibniz rule for fractional derivatives generalized and an application to infinite series." SIAM Journal on Applied Mathematics 18.3 (1970): 658-674.

[14] H.T. Kaptanoğlu, Gama Fonksiyonu, Matematik Dünyası 6 (1996), no. 2, 6–13.