İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ BİR PLAĞIN ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Müh. Ozan ÖZARSLAN

(511041039)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 25 Aralık 2006
Tezin Savunulduğu Tarih: 31 Ocak 2007

Tez Danışmanı : Yrd.Doç.Dr. Vedat Ziya DOĞAN

Diğer Jüri Üyeleri : Prof.Dr. Zahit MECİTOĞLU

Doç.Dr. Ata MUĞAN

OCAK 2007

ÖNSÖZ

Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeden yapılmış bir plağın basit mesnet sınır koşulları altında analizi yapılarak, farklı malzeme dağılım oranlarına sahip plağların statik ve dinamik analizleri yapılmıştır.

Çalışmanın yürütülmesinde ve sonuçlandırılmasında yardımlarından ve anlayışından dolayı tez danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Vedat Ziya DOĞAN başta olmak üzere, Bnb.Nurullah YÜKSEL'e, Serhat YILMAZ'a, Utku TÜRKYILMAZ'a ve verdiği sonsuz desteklerden dolayı kardeşim Yasin ÖZARSLAN'a ve aileme teşekkürü bir borç bilirim.

ARALIK 2006 Ozan ÖZARSLAN

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ **ii**
İÇİNDEKİLER **iii**
KISALTMALAR **v**
TABLO LİSTESİ **vi**
ŞEKİL LİSTESİ **vii**
SEMBOL LİSTESİ **viii**
ÖZET **ix**
SUMMARY **x**

1. GİRİŞ **1**
1.1. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemelerin Genel Tanımı 1
1.2. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemelerin Kullanım Alanları 2
1.3. FDM' nin Çıkış Sebepleri 4
1.4. FDM' den Yararlanılan Alanlar 7
1.4.1. Uzay Taşıtları 7
1.4.2. Endüstriyel Malzemeler 7
1.5. FDM Ürünlerine Örnekler 7
1.5.1. Uzay Sistemleri 7
1.5.2. Güç İletim ve Dağıtım Sistemleri 7
1.5.3 İzotop İçerikli Derecelendirilmiş Teller 8
1.6. FDM' lerde Karşılaşılan Sorunlar 8
1.7. Konuyla İlgili Çalışmalar 9

2. TEORİK FORMÜLASYON **11**
2.1. Kabuller 11
2.2. Yer Değiştirme Alanı 11
2.3. Hareket Denklemi 14

3. FDM BİR PLAĞIN KPT KULLANILARAK ANALİZİ 24
3.1. Malzeme Özellikleri 25
3.2. Basit Mesnet Bir Plağın Titreşimi 31
3.3. Poisson Oranı Değişiminin Analize Etkisi 37
3.4. Basit Mesnetli Bir Plağın Statik Analizi 41
3.5. Basit Mesnetli Bir Plağın Dinamik Analizi 46

4. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME 51
KAYNAKLAR 53
ÖZGEÇMİŞ 56

KISALTMALAR

FDM	: Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme
FDP	: Fonksiyonel Derecelendirilmiş Plak
KPT	: Klasik Plak Teorisi
FSDT	: Birinci Derece Kayma Şekil Değiştirme Teorisi (First-order Shear Deformation Theory)
TSDT	: Üçüncü Derece Kayma Şekil Değiştirme Teorisi (Third-order Shear Deformation Theory)

TABLO LİSTESİ

Tablo 1.1: Oda sıcaklığında homojen SiC FDM' inde porosite derecelendirmesi…6
Tablo 3.1: Seramik ve metal malzeme özellikleri…….…….....25
Tablo 3.2: Değişik "n" değerleri ve kalınlıklar için boyutsuz doğal frekanslar… 33
Tablo 3.3: Değişik "n" değerleri ve kalınlıklar için doğal frekanslar…….34
Tablo 3.4: Değişik "n" değerleri ve boyutlar için çıkartılan doğal frekanslar…...35
Tablo 3.5: Değişik "n" değerleri ve boyutlar için boyutsuz doğal frekanslar…….36
Tablo 3.6: Poisson Oranı'nın sabit kabul edilmesinin doğal frekanslara etkisi….37
Tablo 3.7: Young Sabiti'nin sabit kabul edilmesinin doğal frekanslara etkisi…..38
Tablo 3.8: "z"yönündeki deplasmanlara plağın değişik boyutlarının etkisi……..42
Tablo 3.9: n=1 değerinde doğal frekanslar.....48

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 1.1 : Homojen seramik kaplamanın şematik gösterimi…….....4
Şekil 1.2 : Kaplamanın üst yüzeyindeki yatay gerilimler…….....5
Şekil 1.3 : ZrO2/ NiCoCrAlY sıl bariyer kaplaması ve tabaka bileşim yüzdeleri..6
Şekil 1.4 : FDM' lerde alt tabakanın oksitlenmesi……..……9
Şekil 2.1 : Dikdörtgen bir plak için basit mesnet sınır koşulları…… 22
Şekil 3.1 : Kalınlık boyunca malzeme oranlarının değişimi…… 26
Şekil 3.2 : Young Modülü değişimi (ZrO_2-Alüminyum)……. 27
Şekil 3.3 : Young Modülü değişimi (Al2O3- SUS304)…….. 27
Şekil 3.4 : Young Modülü değişimi (Si_3N_4 -Ti-6Al-4V)……. 28
Şekil 3.5 : Yoğunluğunun değişimi (ZrO_2-Alüminyum)……..28
Şekil 3.6 : Yoğunluğunun değişimi (Al_2O_3- SUS304)…… …… 29
Şekil 3.7 : Yoğunluğunun değişimi (Si_3N_4 -Ti-6Al-4V)……..29
Şekil 3.8 : Poisson oranının kalınlık boyunca değişimi(ZrO_2-Alüminyum)…… 30
Şekil 3.9 : Poisson oranının kalınlık boyunca değişimi(Al_2O_3- SUS304)……30
Şekil 3.10 : Poisson oranının kalınlık boyunca değişimi(Si_3N_4 -Ti-6Al-4V)…….31
Şekil 3.11 : "n" üstelleriyle temel doğal frekansının değişimi……...39
Şekil 3.12 : "n" üstelleriyle doğal frekansının değişimi…….40
Şekil 3.13 : "z" yönündeki deplasmanın plağın "x" ekseni boyunca değişimi…...43
Şekil 3.14 : "z" yönündeki deplasmanın "n"e bağlı değişimi……44
Şekil 3.15 : "z" yönündeki deplasmanların kalınlıkla değişimi……..... 44
Şekil 3.16 : "z" yönündeki deplasmanların uygulanan yükle değişimi……. 45
Şekil 3.17 : Deplasmanın plağın "x" ekseni boyunca değişimi (3 Tip)……. 45
Şekil 3.18 : "z" yönündeki deplasmanın "n" üsteliyle değişimi…… 48
Şekil 3.19 : "z" yönündeki deplasmanın "q" yüküyle değişimi…… 49
Şekil 3.20 : "z" yönündeki deplasmanın "a/b" ile değişimi…….. 49

SEMBOL LİSTESİ

a, b	:Plağın x ve y eksenlerindeki boyutları
h	:Plağın kalınlığı
I_0, I_1, I_2	:Atalet momentleri
E	:Young (Elastisite) Modülü
δK	:Sanal kinetik enerji
M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}	:Bileşke mometler
N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}	:Bileşke kuvvetler
q	:Uygulanan üniform kuvvet
δU	:Sanal birim uzama enerjisi
δV	:Dış yüklerin yaptığı sanal iş
u_0	:Orta yüzeyin x ekseninde yaptığı yer değiştirme
v_0	:Orta yüzeyin y ekseninde yaptığı yer değiştirme
w_0	:Orta yüzeyin z ekseninde yaptığı yer değiştirme
P_A	:Tabakanın alt yüzeyinin malzeme özellikleri
$P_Ü$	:Tabakanın üst yüzeyinin malzeme özellikleri
n	:Kalınlık boyunca malzeme değişim profili
Q_{ij}	:Düzlem gerilmede indirilmiş katılık matrisi katsayıları
A_{ij}	:Uzama katılığı
D_{ij}	:Eğilme katılığı
B_{ij}	:Uzama-Eğilme katılığı

ÖZET

Isıl bariyer kaplamaları, malzemenin çalışma sıcaklığını yükselterek sistemin verimini arttırmak amacı ile kullanılır. Genelde metal alt tabakanın üzerine homojen seramik kaplama şeklinde uygulanmaktadır. Bu tür kaplamalarda çalışma esnasında görülen en önemli problem, metal alt tabaka ile seramik kaplamanın ısıl genleşme sabitlerinin farklı olması nedeniyle ortaya çıkan büyük ısıl gerilmelerdir.

Gerilmeler sonucunda sistemde çatlaklar ve metal/seramik ara yüzünde ayrılmalar görülmektedir. Söz konusu çatlakları ve ayrılmaları önlemek için fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerden yapılmış kaplamalar geliştirilmiştir. Bu tür kaplamalarda malzeme özellikleri kaplama kalınlığı boyunca fonksiyonel olarak değiştirilmekte ve bu sayede kaplama ile alt tabaka arasındaki uyumsuzluk ve ısıl gerilmeler en düşük dereceye indirilebilmektedir.

Bu çalışmada Zirkon ve Alüminyum malzemelerinden oluşan Fonksiyonel Derecelenmiş bir plağın Navier çözümleri Klasik Plak Teorisine göre yapılarak hareket denklemleri çıkartılmış, değişik birleşim oranlarında ve değişik boyutlarında serbest titreşim analizi yapılarak doğal frekansları bulunmuş. Bu plağın belirli bir "q" yükünde verdiği cevaplar bulunmuş. Daha sonra; plak, zamanla değişen yüke maruz kaldığında ortaya çıkan yer değiştirmeler Runge-Kutta iterasyon yöntemi kullanılarak bulunmuştur. Alınan cevaplar arasındaki bağlantılar incelenmiştir.

ANALYSIS OF FUNCTIONALLY GRADED PLATES

SUMMARY

Thermal barrier coatings are used for increasing the operating temperature of the material hence the thermal efficiency of the system. Usually, homogeneous ceramic coatings on metal substrates are used for this purpose. The most important problem faced in the systems with these types of coatings is thermal stresses which develop during operation due to high mismatch in the thermal expansion coefficients of metal substrate and ceramic coating.

As a result of thermal stresses, edge cracking and debonding occur along metal/ceramic interface in the system. To prevent cracking and debonding, coatings made from functionally gradient materials (FGMs) were introduced. In these types of coatings, material properties are functionally changed along the thickness of the coating, thus the mismatch between substrate and coating and thermal stresses in the system are minimized.

In this study an equation of motion in terms of displacement of a functionally graded rectangular plate-shaped made of Aluminum and Zirconia (ceramic) is calculated by using Navier's solution of rectangular plates by Classical Plate Theory. Then the rectangular plate's top surface is ceramic-rich whereas the bottom surface is aluminum rich, is taken to calculate the natural frequencies and the static analysis of plate in various dimensions has completed. Then, this plate is applied to time dependent load and the displacement response is calculated by using Runge-Kutta iteration method.

1. GİRİŞ

Pratik uygulamalarda kaplama teknolojisi, mühendislik malzemelerinin performansının arttırılabildiği bir alan olarak görülmektedir. Seramik ısıl bariyer kaplamaları türbinlerde verimi artırmak ve yakıt ekonomisi sağlamak amacı ile kullanılır [1]. Kesme takımları daha uzun kullanım süresi ve yüksek bir kesme performansı için aşınmaya dayanıklı seramik filmler ile kaplanır [2]. Genelde bu tür kaplamalar alt tabakanın üzerine tek katmanlı homojen kaplama olarak uygulanır. Bu tür kaplamalar düşük toklukları ve ısıl genleşme katsayılarındaki uyumsuzluklar sebebiyle çatlamaya maruz kalmaktadır. Bu sorunları gidermek amacı ile fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler geliştirilmiştir. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden (Functionally Graded Materials=FGM) yapılmış bir kaplamaya önceden belirlenmiş bir malzeme profili verilebilmekte ve malzeme özellikleri, kaplamanın kalınlığı yönünde sürekli değiştirilebilmektedir. Yani kaplamanın malzeme özellikleri kalınlık koordinatının bir fonksiyonu olarak değişmektedir. Kaplamanın en altında alt tabakanın malzeme özelliklerini taşır, kaplamanın üst tarafına doğru gidildikçe malzeme özellikleri fonksiyonel olarak değişmektedir. Böylece alt tabaka ile kaplama arasındaki uyumsuzluklar engellenmektedir.

1.1 Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemelerin Genel Tanımı

Doğada çoğu zaman bir halden diğer bir hale direkt geçişler sorun çıkarmaktadır. Bunun yerine, durumlar arası geçişler kademeli yapılarak olumsuzluklar azaltılmaya çalışılmaktadır. Fırtına öncesi esen rüzgar veya sel öncesi çiseleyen yağmur, doğada olumlu kazanımları olan kademeli geçişlere örnek verilebilir. Benzer olarak, teknolojinin gelişimiyle birlikte yeni tür bazı ihtiyaçların karşılanabilmesi için malzemelerde de homojen olmayan kademeli veya devamlı değişen bir yapıya ihtiyaç duyulmuştur.

FDM' lerde (Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler) buna benzer olarak birbirleri ile birleştirilmiş, fiziksel ve kimyasal olarak birbirlerinden farklı özellikler

taşıyan iki madde arasında farklı ısıl genleşme katsayılarından dolayı oluşan ısıl gerilmeleri derecelendirilmiş yapılarıyla azaltır, iki madde arasındaki fiziksel ve kimyasal özelliklerdeki ani değişimlerden dolayı meydana gelebilecek diğer olumsuzlukları da minimuma indirirler.

FDM iki veya daha fazla malzemenin istenen özellikleri sağlayabilmesi için sürekli değişen oranlarda bir araya gelmesinden oluşur [3].

1.2 Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemelerin Kullanım Alanları

Özellikle mikro elektronik alanı olmak üzere havacılık ve yüksek sıcaklık uygulamalarındaki, yeni teknoloji ihtiyaçlarının karşılanabilmesi amacıyla malzeme bilimi ve ortak mühendislikler sürekli olarak yeni malzemeler geliştirmek için araştırmalar yapmaktadırlar. Geçmişte bu geliştirme çalışmalarının çoğu kompozitler, alaşımlar, yarı iletkenler, kaplamalar ve ince film kaplamalar gibi malzemelerin imal edilmesi üzerine yoğunlaşmıştır. Bu malzemelerde mikro yapılar kontrol edilerek homojen bir kütle elde edilebilmekte ve bu sayede termo mekanik özelliklerin kontrol edilebildiği malzemeler üretilmektedir. Diğer taraftan uygun bir dizayn için, bileşenlerde ve yapılarda homojen olmayan malzemelerin kullanılması gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Değişken özelliklere sahip malzeme veya malzeme sistemleri kullanılarak sağlamlık, tokluk, korozyon dayanımını arttırmak mümkün olacaktır. Doğadaki biyolojik sistemlerde de optimum performans için homojen olmayan malzeme kullanımı görülmektedir. Kemikler, deniz kabukları ve bambu kamışları gibi bileşimler hepsi önemli homojen olmayan malzemelere örnek olarak gösterilebilir.

Pratik uygulamalarda kaplama teknolojisi, mühendislik malzemelerinin performansının arttırılabildiği bir alan olarak görülmektedir. Isıl bariyer kaplamaları, sistemin ısıl verimliliğinin arttırılarak çalışma sıcaklığını yükseltmek amacıyla kullanılır. Bu sayede kaplamalar, korozyon, oksidasyon veya aşınmayı önlerler. Özellikle bu dar alanda metal alt katmanları üzerine seramik kaplamalar doğal bir seçenek olarak görülebilir. Ancak metal alt katmanları üstüne homojen seramik kaplama uygulamaları, ısıl genleşme katsayılarındaki yüksek uyumsuzluklar sebebiyle, bağlanmış yapıda oldukça yüksek ısıl gerilmeleri ortaya çıkarır. Bunun

sonucu olarak da yarı kompozit malzemede kırılmalar ve ara yüz çatlakları oluşmaktadır.

FDM kaplamaları istenen iki ana yapıya sahiptir. İlki, seramiğin kısmi hacmi, alt yüzeyde %0 dan, üst yüzeyde %100' e kadar değiştiğinden, kaplama ile kaplanan arasındaki bağlanma, malzeme uyumluluğu sebebiyle daha iyi olacaktır. İkinci olarak, malzeme özellikleri dağılımlarının düzgün olması sebebiyle FDM kaplı ara katmanda gerilme konsantrasyonları çok tabakalı homojen kaplamalara göre daha düşük olacaktır.

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler kullanılarak metallerin korozyona karşı dayanımından, seramiklerin ise ısı ve mekanik dayanımından yararlanılmaktadır. Aynı zamanda artık ısıl gerilmeleri azalmakta, en alt katmanda ara yüz boyunca bağlanma dayanımını arttırmaktadır [4].

FDM malzemeleri metal/seramik kompozitlerin bir sentezidir ve bu yolla önceden belirlenmiş bir kompozit profilini verebilmesi için hacimsel bölümlerin malzeme özellikleri, kalınlık yönünde sürekli değişir. Teknik olarak kompozit profili, termomekanik özelliklerin istenildiği gibi ortaya çıktığı yarı homojen bir yapı şeklinde oluşturulabilir [5].

Özellikle yüksek sıcaklık uygulamaları, uzay araçları, mikro elektronik ve endüstriyel uygulamalar FDM kullanımının yaygınlaşmaya başladığı alanlardır. Geçmişte bu ihtiyaçların karşılanabilmesi için çalışmaların çoğu kompozitler, alaşımlar, yarı iletkenler, kaplamalar ve ince film kaplamalar gibi malzemelerin imal edilmesi üzerine yoğunlaşmıştır. Diğer yandan uygun bir dizayn için, bileşenlerde ve yapılarda homojen olmayan malzemelerin kullanılmasının kaçınılmaz olmasıyla birlikte, değişken özelliklere sahip malzeme veya malzeme sistemleri kullanılarak sistemin çalışma sıcaklığı yükseltilmiş, malzemenin sağlamlık, tokluk, korozyon dayanımı gibi özelliklerinin arttırılması sağlanmıştır .

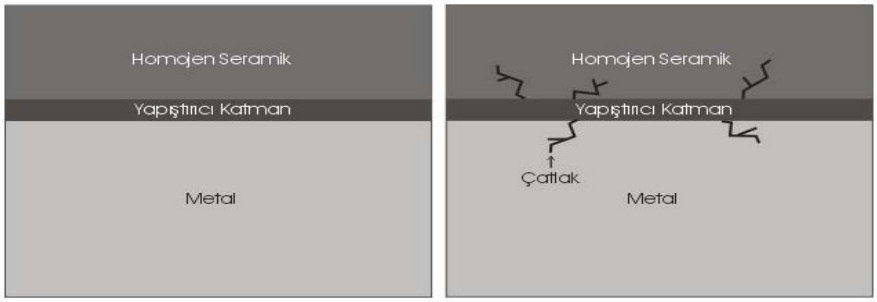
Örneğin ısıl bariyer yapıları yüksek sıcaklıktaki uygulamalarda seramik ve metalin karışımı olarak yapılandırılabilir. Bu yapı, zengin seramik yüzeyle zengin metal yüzey arasında isteğe bağlı şekilde değişen bir karışım olabilir. Bu malzeme seramik bileşeninin düşük ısı iletimi sayesinde yüksek sıcaklık rezistansı sağlar. Malzeme

özelliklerindeki kademeli değişim farklı uygulamalar ve çalışma ortamları için ayarlanabilir. Bu özellik FDM' nin çoğu uygulamada tercih edilme sebebidir.

Buna benzer malzemelere doğadan yumuşak dokusu olan bitki ve hayvanlar, kendi vücudumuzda ise iskelet ve dişler örnek verilebilir. Bambu, kabuk ve hindistan cevizi yaprağı basit örneklerdir. Bambu ve kabuk dış yüzeyinde yüksek mukavemet, iç yüzeyinde ise yumuşak ve dayanıklı yapıya sahiptirler. Ayrıca bambuda merkezden boşluğa kadarki basamaklı yapı sayesinde bu bitkide mukavemet ve elastikiyet özellikleri bir arada görülür. Hindistan cevizi yaprağı rüzgara kapıldığı zaman %30'u rüzgarın estiği doğrultuda serbest hareket eder, %70'i ise çok serttir ve asla hareket etmez [6].

1.3 FDM' nin Çıkış Sebepleri Nelerdir

Isıl işlemlerde dikkat edilmesi gereken önemli noktalardan biri, işlemin gerçekleştiği ortamı çevreleyen maddenin yüksek ısıdan olumsuz etkilenmesini önlemektir. Bu amaçla yüksek sıcaklığa maruz kalan malzeme, yüksek sıcaklığa karşı direnç gösterebilen bir malzeme olan seramikle kaplanmaktadır. Isıl bariyer olarak adlandırılan bu sistem, beraberinde bazı sorunları da getirmektedir. Homojen seramik kaplamanın şematik gösterimi ve kaplamada kırılmaların oluşumu Şekil 1.1'de gösterilmiştir.

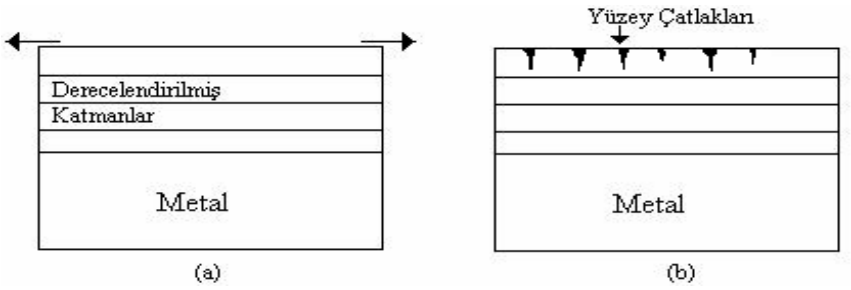


Şekil 1.1: Homojen seramik kaplamanın şematik gösterimi ve kaplamada kırılmaların oluşumu

Isıl bariyer uygulamalarında yüksek sıcaklığa maruz kalan homojen seramik ve metalin ısıl genleşme katsayılarındaki yüksek uyumsuzluk nedeniyle bağlanma bölgesinde ısıl gerilmeler ortaya çıkar, sonuçta ara yüz çatlakları ve kırılmalar meydana gelir. Ayrıca yüksek sıcaklığa ilk maruz kalan kaplamanın en üst yüzeyinde

de yüzeye dik kenar çatlakları görülmektedir. Bu çatlakların oluşmasında rol oynayan gerilim kaplamanın en üst yüzeyindeki yarıçap yönündeki yatay gerilimdir.

Fiber matris kompozitler iki farklı malzemenin bir araya gelmesi ve bu iki farklı malzeme arasındaki geçişin ani olmasından dolayı yüksek sıcaklıkta çalışma ortamlarında ayrılmaya veya kırılmaya eğilimlidir. Kaplamanın üst yüzeyinde oluşan yatay gerilimler ve yatay gerilimlerden kaynaklanan ve kaplamanın üst yüzeyine dik olarak oluşan kenar çatlakları Şekil 1.2'de gösterilmiştir. Bu çatlaklar ara yüzeyde başlayarak zayıf bileşen tarafına doğru büyümektedir. Ayrıca kompozit malzemelerdeki fiber ve matrisin farklı ısıl genleşme katsayılarından dolayı artık gerilmelerde ek bir problem gözükür. Bu problemler FDM' lerde bileşenlerin derecelendirilmiş şekilde bir araya gelmesinden dolayı görülmez.

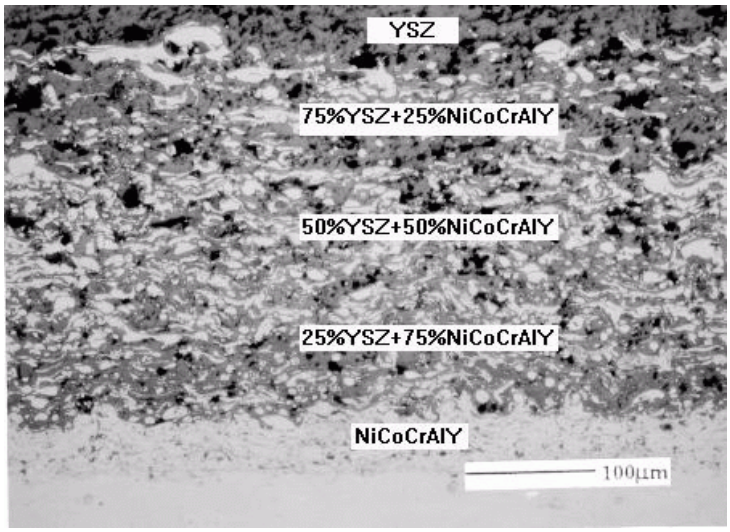


Şekil 1.2: (a) Kaplamanın üst yüzeyindeki yatay gerilimler **(b)** Yatay gerilmelerden kaynaklanan ve kaplamanın üst yüzeyine dik olarak oluşan yüzey çatlakları

Bu uyumsuzlukları minimuma indirmek, dolayısıyla ısıl gerilmeleri azaltmak amacıyla fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler kullanılmaktadır. Bu malzemelerdeki dereceli yapı metali korozyon, oksidasyon veya aşınmaya karşı korumanın yanında, homojen seramik kaplamada oluşan kırılmaları, ara yüz ve yüzey çatlaklarını da minimuma indirmektedir. İhtiyaca ve seçilen üretim tekniğine bağlı olarak FDM' lerde dereceli yapı tabakalı veya devamlı derecelendirilmiş olabilmektedir. Tabakalı derecelendirilmiş kaplamalar teknik olarak yarı kompozit, sürekli olmayan termomekanik özelliklere sahip birbirinden farklı malzemeler içerir. Tablo 1.1'de oda sıcaklığında bulunan homojen SiC FDM' inde gözenek derecelendirmesiyle diğer özellikler de derecelendirilebileceği gösterilmiştir [7].

Ayrıca FDM' den oluşturulan plaklarda gözenek, gözenek büyüklüğü, kimyasal kompozisyon, hacimsel, parçacık yüzdesi ve parçacık büyüklüğü derecelendirilmeleri gibi pek çok derecelendirme çeşitleri elde edilebilmektedir. Bu

çeşitteki derecelendirmelerin pek çok fiziksel ve kimyasal özellik derecelendirilmesi elde edilmesine de yol açacağı açıktır. Plazma sprey tekniği ile Tabakalı derecelendirilmiş ZrO_2/NiCoCrAlY ısıl bariyer kaplaması ve tabaka bileşim yüzdeleri Şekil 1.3'te örnek olarak verilmiştir.



Şekil 1.3: Plazma sprey tekniği ile tabakalı derecelendirilmiş ZrO_2/NiCoCrAlY ısıl bariyer kaplaması ve tabaka bileşim yüzdeleri.

Tablo 1.1: Oda sıcaklığında bulunan SiC FDM' inde gözenek derecelendirmesiyle diğer özellikler de derecelendirilebilir [8].

Gözeneklilik, %	0	10	20	30	40	50
Özkütle, gr/cm³	3,21	2,89	2,57	2,25	1,93	1,61
Young modülü, GPa	455	345	262	199	151	114
Poisson oranı, 1	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16
Dayanım, MPa	428	282	186	123	81	53
Isıl genleşme katsayısı, 10-6 1/K	3,59	3,59	3,59	3,59	3,59	3,59
Isıl iletkenlik, W/mK	118	99	80	62	46	32
Özgül ısı, J/gK	0,68	0,68	0,68	0,68	0,68	0,68

1.4 FDM’ den Yararlanılan Alanlar

1.4.1 Uzay Taşıtları

FDM' ler ilk bu alan için tasarlanmıştır. İyi ısıl iletkenlik ve iyi ısıl direnç gibi iki zıt özelliğin bir malzemede bulunabilmesi amacıyla FDM' ler geliştirilmiştir. Bu özellikler sayesinde hafiflik, güçlülük ve sağlamlık mümkün olmaktadır. Böylece FDM yapısal malzeme ve enerji değişme malzemesi olarak özellikle roket yapımında ve motorların dış duvarlarında halen uygulanmaktadır.

1.4.2 Endüstriyel Malzemeler

Örnek olarak derecelendirilmiş kesici kalemlerin geliştirilmesinin nedeni mukavemet ve ısıl direnç bakımından daha iyi malzemelere ihtiyaç duyulmasıdır. Bu alanda umulan aşınma direnci ve sertlik elde edilmiştir. Kendi kendini yağlama fonksiyonu ve yüksek ısıl dirençlerin kesici kalemlerde elde edilmesinin yanında, bazı derecelendirilmiş kalemler sayesinde yağ kullanılmadan uygulanan kuru kesimler de gerçekleştirilmiştir [6].

1.5 FDM Ürünlerine Örnekler

1.5.1 Uzay Sistemleri

Japonya' da bir uzay istasyonu olan Kiba'da test olarak FDM, bir fişek ve geri kullanılabilir bir roket motoru olarak kullanılmıştır. Roketlerin çoğunun kullanıldıktan sonra atılması ve bununda ülkelere pahalıya mal olması, ülkeleri maliyeti azaltmaya yani geri kullanımlı roketler üzerinde çalışmaya yönlendirmiştir. Yapılan çalışmalar gelecekte uzay mekiklerinin geri kullanımlı roketler şeklinde üretilebileceklerini göstermektedir. Şu anda yalnızca, Japonlara ait Obita mekiği geri kullanımlıdır [6].

1.5.2 Güç İletim ve Dağıtım Sistemleri

Bu sistemlerde, FDM teknolojisi devir frenleyici, bağlantı kesici ve yıldırım durdurucu içeren kompleks bir anahtar olan Gaz Yalıtım Anahtarı (GIS-Gas Insulated Switchgear) olarak kullanılmaktadır.

Güç ve Endüstriyel Sistem Araştırma ve Geliştirme Merkezi, Toshiba Carp, kristal yapıya sahip dereceli bir elementten yıldırım durdurucu üretmiştir. Bu elementte dışarıdan içeriye ısıl gerilme kontrolü ve enerji emme kabiliyetinde önemli gelişmeler kaydedilmiştir.

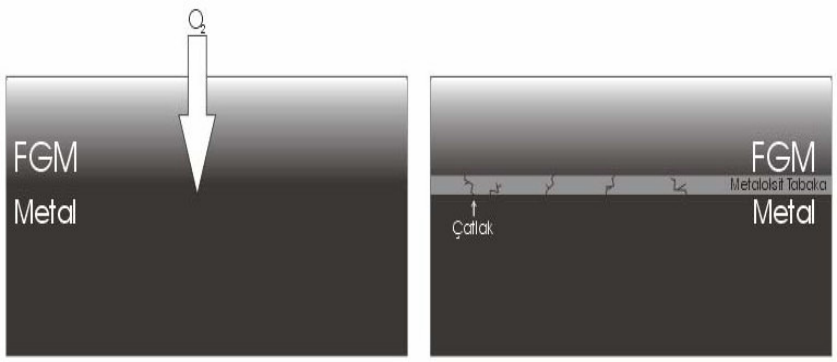
1.5.3 İzotop İçerikli Derecelendirilmiş Optik Teller

Japonya'da Asahi Cam Firması, Haziran 2000'den beri izotop içerikli derecelendirilmiş optik telleri kullanmaktadır. Plastik optik teller, esnekliğini kaybetmeyecek şekilde kolaylıkla telin boyutu büyütülebilecek şekilde plastikten imal edilirler. Böylelikle üretim maliyeti önemli ölçüde azaltılabilir. Bu tip malzeme kullanımı ile yüksek hızla bilgi aktarımı mümkündür. Şimdilerde Lucina TM adındaki derecelendirilmiş optik teller ile 10 Gbps' i aşan yüksek hızda bilgi iletimi mümkün olmaktadır. Bu boyut 200000 telefon bağlantısına ve birkaç yüz metre iletim uzaklığına eşittir [6].

1.6 FDM' lerde Karşılaşılan Sorunlar

FDM kaplamaların homojen seramik kaplamalara oranla daha dayanıklı olmasına rağmen yüksek sıcaklığa maruz kalan ortamdaki (örneğin türbinlerin iç kısımları) oksijen, kaplamayı geçip alt tabakaya yaklaştıkça (türbinlerde ısıya dayanıklılığı bakımından alüminyum üzerine FDM kaplama yapılır) alüminyum ile reaksiyona girmektedir. Sonuç olarak Al_2O_3 yani alüminyum oksit denen çok sert ve gevrek bir tabaka oluşturmaktadır. Bu tabaka özellikle alt tabaka (homojen metal) ile FDM arasında oluşur. Bu tabaka FDM avantajlarını kötü etkilemektedir. Çünkü alt tabaka ile kaplama arasındaki devamlılık ortadan kalkmıştır. Bunun sonucunda Şekil 1.4'te gösterildiği gibi oluşan tabakada çatlaklar oluşur ve kaplamanın dökülmesi kaçınılmaz olur.

Ayrıca birçok üretim tekniğinde oluşturulan kaplamaların kolonlar (columnunar) şeklinde olmasından dolayı kaplamanın isotropikliği bozulur ve kaplama ortotropik olur. Çoğu durumda istenmeyen bu durum uyumsuzluklara yol açmaktadır. Fakat tank zırhlarında da olduğu gibi ortotropik FDM' lerin kullanıldığı alanlar da mevcuttur.



Şekil 1.4: FDM' lerde karşılaşılan sorunlardan biri olan alt tabakanın oksitlenmesi

FDM' lerde karşılaşılan diğer bir sorun ise üretim tekniklerinden kaynaklanan parça büyüklüğünün kısıtlanmasıdır. Yapılan çalışmalarda üretilen FDM parçaları 200 cm^2'den küçük parçalardır. Seçilen üretim tekniğine ve derecelendirme boyut sayısına göre maksimum FDM parça boyutları değişiklikler göstermektedir [9].

1.7 Konuyla İlgili Çalışmalar

FDM' nin ana kullanım alanı ani sıcaklık değişimlerinin olduğu yüksek sıcaklık ortamlarıdır. Bu konuda daha önce, Noda termoelastik ve termoinelastik problemleri içeren bir çalışma yapmıştır [10]. Noda daha verimli analizlerin yapılabilmesi için malzemenin sıcaklığa bağlı özelliklerinin de göz önünde bulundurulmasını önermiştir. Tanigawa FDM' nin termoelastik davranışlarının analitik modellemesiyle ilgili geniş içerikli bir liste hazırlamıştır [11]. Fukui ve Yamanaka kalın duvarlı FDM tüplerinin iç basınç altında ki deformasyonunu ve derecelendirilmiş bileşenlerin malzemenin sağlamlığına etkisini incelemiştir. Fukui önceki çalışmasına ek olarak kalın duvarlı FDM tüpünün düzgün ısıl yükleme altında çalışmasını gözlemlemiştir [12]. Böylece iç yüzeydeki sıkıştırıcı dairesel gerilmeyi minimize ederek optimum FDM bileşenini oluşturmuştur. Fuchiyama sekiz düğümlü dörtgen simetrik olmayan eleman kullanarak çatlakları olan bir FDM' nin kısa süreli ısıl gerilmeyi ve gerilme yoğunluk faktörü üzerine çalışmıştır [13]. Takeuti ısıl şok altındaki plağı incelemiştir. Yarı statik bağımlı termo mekanik problemle dinamik termo elastik bağımsız problemi aynı başlangıç koşulları ve sınır şartları altında incelemiştir. Sonuçta termo mekanik bağımlı terimlerin sıcaklık ve gerilme dağılımında atalet katsayısında daha önemli bir rol oynadığını görmüştür [14]. Son zamanlarda Takeuti

ve Tanigawa, sıcaklığın radyal ve eksenel olarak değiştiği sonsuz büyüklükte ki katı silindirin simetrik olmayan ısıl gerilme problemini çözmüştür. Sonuçta termomekanik terimlerin sıcaklık ve gerilme dağılımında büyük etkilerinin olduğu görülmüştür [15]. Son olarak, Reddy birinci derece kayma şekil değiştirme plak teorisini sonlu elemanlar yöntemiyle göstermiştir [16, 17].

2. TEORİK FORMÜLASYON

Birinci Derece Kayma Şekil Değiştirme Teorisi kayma şekil değiştirmelerini hesaba katan en kolay plak teorisidir. İkinci Derece Kayma Şekil Değiştirme Teorisi, kayma şekil değiştirmeleri kalınlık boyunca sabit almıştır ve kayma kuvvetini elde etmek için kayma düzeltme faktörüne ihtiyaç vardır. Üçüncü Derece Kayma Şekil Değiştirme Teorisine göre kayma gerilmesi kalınlık boyunca ikinci dereceden kabul edilmiştir ve kayma düzeltme faktörüne ihtiyaç yoktur.

Bizim bu çalışmada kullandığımız Klasik Plak Teorisi (KPT) ye göre düzlem içi yer değiştirmeler kalınlık boyunca lineer değiştiği ve enine yer değiştirmelerin kalınlık boyunca sabit olduğu kabul edilir. Böylece enlemesine normal gerilmeler (transverse normal stress) sıfır kabul edilir.

2.1. Kabuller

- Malzeme kalınlık oranı $\left(\frac{a}{h}\right) \rangle\ 20$
- Kalınlık boyunca fonksiyonel derecelendirilmiş plak
- Ω_0 deformasyona uğramayan tarafsız eksen
- Orta kesimden yukarısı pozitif
- Doğrusal elastik malzeme
- Plağımız küçük yer değiştirmelere maruz kalıyor.

2.2. Yer Değiştirme Alanı

KPT için yapılan kabuller şu şekildedir:

- Şekil değiştirmeden önce tarafsız eksene dik ve düz olan çizgiler deformasyondan sonrada tarafsız eksene dik ve düz kalır.

– Tarafsız eksen uzamaz veya kısalmaz.

– Enlemesine normaller şekil değiştirmeden sonra tarafsız eksene dik kalacak şekilde döner.

Yapılan ilk iki kabule göre $\varepsilon_{zz} = 0$ ve $\sigma_{zz} = 0$ olur. Son kabule göre ise $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$ ve $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ olur. u_0, v_0, w_0 tarafsız eksenin yer değiştirmeleri (x, y, z) olmak üzere yer değiştirme alanlarını aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z\frac{\partial w_0}{\partial x}$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z\frac{\partial w_0}{\partial y} \qquad \textbf{(2.2.1)}$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t)$$

$-\frac{\partial w_0}{\partial x}$: enine normalin y ekseninde yaptığı dönme

$-\frac{\partial w_0}{\partial y}$: enine normalin x ekseninde yaptığı dönme

Orta kalınlıkta bir plak $(\frac{h}{a}, \frac{h}{b} \geq 0{,}1)$ çalışmalarında, $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz}$ enlemesine kayma birim uzamalarının ihmal edilmesi büyük hatalara sebep olur. Fakat literatür üzerinde yapılan çalışmalar göstermiştir ki kalınlığının boyuna oranı 0,1 den daha az olan ince plaklar için KPT uygulanabilir [17]. Bu çalışmada da FDM plağımızın $\frac{1}{20}, \frac{1}{50}$ kalınlık/boy oranına sahip olduğunu düşünüyoruz. Bu yüzden enlemesine kayma birim uzamaları ihmal edebiliriz.

Lineer-elastik, orta incelikte dikdörtgen, FDM plağın düzgün bir "h" kalınlığı vardır ve yaklaşık olarak $\frac{1}{20}, \frac{1}{50}$ kalınlık/boy oranına (span) sahiptir. Yaptığımız kabuller genel olarak, deformasyon öncesi plağın orta yüzeye dik olan normaller, deformasyon sonrası da orta yüzeye normal ve uzamamış olarak kalmalıdır. FDM plağın yer değiştirmesi kalınlık ile karşılaştırıldığında çok küçüktür. Bu yüzden doğrusal birim uzama-yer değiştirme bağıntıları geçerlidir. Kalınlık yönünde olan

normal gerilmeler ihmal edilebilir. FDM plağın Poisson Oranı, Young Modülü kalınlık boyunca değişir. Yani plak homojen değildir. Tabakalı kompozit malzemeler için kalınlık boyunca birim uzama bileşenleri katmanların kalınlığı boyunca doğrusal olarak değişir ve malzeme özelliklerinin katman boyunca değişiminden bağımsız olur [18].

Birim uzamaları matris olarak aşağıdaki gösteriminden de anlaşıldığı üzere birim uzamalar kalınlık boyunca lineer olarak artmaktadır.

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^{(0)} + z\varepsilon_i^{(1)}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(2.2.2)}$$

Burada $\varepsilon_{xx}^{(0)}$, $\varepsilon_{yy}^{(0)}$, $\gamma_{xy}^{(0)}$ membran (zar) birim uzamaları; $\varepsilon_{xx}^{(1)}$, $\varepsilon_{yy}^{(1)}$, $\gamma_{xy}^{(1)}$ eğilmeden dolayı oluşan birim uzamalarıdır.

Von Karman varsayımına göre lineer olmayan (nonlineer) birim uzama-yer değiştirme ilişkileri şu formdadır:

$$\varepsilon_1^{(0)} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \quad \varepsilon_2^{(0)} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \quad , \varepsilon_6^{(0)} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\varepsilon_1^{(1)} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad , \qquad \varepsilon_2^{(1)} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad , \qquad \varepsilon_6^{(1)} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \qquad \textbf{(2.2.3)}$$

Sonuçta elde ettiğimiz birim uzama-yer değiştirme ilişkileri aşağıdaki gibidir:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 - z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 - z\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \qquad \textbf{(2.2.4)}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right) - z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}$$

$\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2$, $\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2$ ve $\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y}$ ifadeler lineer olmayan (nonlinear) terimlerdir ve küçük yer değiştirmelerde diğer değerlerden çok küçük oldukları için göz ardı edilebilir. Birim uzama-yer değiştirme ifadelerini bu ihmalleri de göz önünde bulundurarak tekrar yazarsak aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \qquad \textbf{(2.2.5)}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) - z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}$$

2.3 Hareket Denklemi

Sanal iş prensibinin dinamik (Hamilton) versiyonunu (2.3.1) numaralı denklemdeki gibi gösterebiliriz [19]. Daha sonra bu denklemde belirtilen ifadelerin açılımlarını eşitliğin içine koyarak integralini alabiliriz.

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K)dt \qquad \textbf{(2.3.1)}$$

U : şekil değiştirme enerjisi

V : dış kuvvetlerin yaptığı iş

K : kinetik enerji

δ : varyasyon operatörü

Denklem (2.3.1)' deki ifadeleri ayrı ayrı hesaplayıp, integral içerisine koyarak denklemimizi çözebiliriz. Sanal şekil değiştirme enerjisini aşağıdaki şekilde yazabiliriz [20].

$$\delta U = \int_{\Omega_0}\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\delta\varepsilon_{yy} + 2\sigma_{xy}\delta\varepsilon_{yx})dzdxdy \qquad \textbf{(2.3.2)}$$

Birim uzama-yer değiştirme bağıntıları aşağıdaki gibidir [21].

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{xx}^{(0)} + z\varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{yy}^{(0)} + z\varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^{(0)} + z\gamma_{xy}^{(1)}\end{aligned} \qquad \textbf{(2.3.3)}$$

(2.3.3) denklemini (2.3.2) denkleminin içerisine koyarsak şu denklemi elde ederiz.

$$\delta U = \int_{\Omega_0} \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} \left[\sigma_{xx}(\delta\varepsilon_{xx}^{(0)} + z\delta\varepsilon_{xx}^{(1)}) + \sigma_{yy}(\delta\varepsilon_{yy}^{(0)} + z\delta\varepsilon_{yy}^{(1)}) + \sigma_{yy}(\delta\gamma_{xy}^{(0)} + z\delta\gamma_{xy}^{(1)}) \right] dz \right\} dxdy$$

(2.3.4)

Dış kuvvetlerin yaptığı sanal işi ise aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz [20].

$$\delta V = -\int_{\Omega_0} \left[q_A(x,y)\,\delta w(x,y,\frac{h}{2}) + q_{\ddot{U}}(x,y)\,\delta w(x,y,-\frac{h}{2}) \right] dxdy - \int_{\Gamma_0} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\hat{\sigma}_{nn}\,\delta u_n + \hat{\sigma}_{ns}\,\delta u_s + \hat{\sigma}_{nz}\,\delta w \right] dzds$$

(2.3.5a)

Denklem 2.3.5a' da belirtilen q_A ve $q_{\ddot{U}}$ sırasıyla plağın alt ve üst yüzeyindeki yayılı yükü temsil eder. Denklem (2.2.1)' i, denklem (2.3.5a)' ya yerleştirdiğimizde aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\delta V = -\int_{\Omega_0} \{[q_A(x,y) + q_{\ddot{U}}(x,y)]\delta w_0(x,y)\} dxdy - \int_{\Gamma_0} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\hat{\sigma}_{nn}\left(\delta u_{0n} - z\frac{\partial \delta w_0}{\delta n} \right) + \hat{\sigma}_{ns}\left(\delta u_{0s} - z\frac{\partial \delta w_0}{\delta s} \right) + \hat{\sigma}_{nz}\,\delta w_0 \right] dzds$$

(2.3.5b)

Sanal kinetik enerjiyi aşağıdaki şekilde ifade ederiz [20]:

$$\delta K = \int_{\Omega_0} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho_0 \left[\left(\dot{u}_0 - z\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \right) \left(\partial \dot{u}_0 - z\frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) + \left(\dot{v}_0 - z\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \right) \left(\partial \dot{v}_0 - z\frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) + \dot{w}_0\,\delta \dot{w}_0 \right] dz\,dx\,dy$$

(2.3.6)

δU, δV, δK' yı denklem (2.3.1)' de belirttiğimiz sanal iş prensibi eşitliğine koyup, tabakanın kalınlığı boyunca integre edersek (2.3.7) denklemini elde ederiz.

$$0=\int_0^T\Big\{\int_{\Pi_0}\Big((N_{xx}\delta\varepsilon_{xx}^{(0)}+M_{xx}\delta\varepsilon_{xx}^{(1)}+N_{yy}\delta\varepsilon_{yy}^{(0)}+M_{yy}\delta\varepsilon_{yy}^{(1)}+N_{xy}\delta\gamma_{xy}^{(0)}+M_{xy}\delta\gamma_{xy}^{(1)}-q\delta w_0\Big)$$

$$-I_0(\ddot{u}_0\,\delta u_0+\ddot{v}_0\delta v_0+\ddot{w}_0\delta w_0)+I_1\Big(\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial x}\ddot{u}_0+\frac{\delta\dot{w}_0}{\partial x}\delta\ddot{u}_0+\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial y}\ddot{v}_0+\frac{\delta\dot{w}_0}{\partial y}\delta\ddot{v}_0\Big) \qquad \textbf{(2.3.7)}$$

$$-I_2\Big(\frac{\delta\dot{w}_0}{\partial x}\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial x}+\frac{\delta\dot{w}_0}{\partial y}\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial y}\Big)\Big)dxdy-\int_{\Gamma_0}(\hat{N}_{nn}\,\delta u_{0n}+\hat{N}_{ns}\,\delta u_{0s}-\hat{M}_{nn}\frac{\partial\delta w_0}{\delta n}$$

$$-\hat{M}_{ns}\frac{\partial\delta w_0}{\delta s}+\hat{Q}_n\delta w_0)ds\Big\}dt$$

Denklem (2.3.7)' de ifade edilen bileşke kuvvetler ve momentlerin eşitliği aşağıda verildiği gibidir.

$$N_{xx}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{xx}dz \qquad N_{yy}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{yy}dz \qquad N_{xy}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{xy}dz$$

$$M_{xx}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{xx}zdz \qquad M_{yy}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{yy}zdz \qquad M_{xy}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{xy}zdz \qquad \textbf{(2.3.8)}$$

$$I_0=\int_{-h/2}^{h/2}\rho_0dz \qquad I_1=\int_{-h/2}^{h/2}z\rho_0dz \qquad I_2=\int_{-h/2}^{h/2}z^2\rho_0dz$$

N_{xx}, N_{yy}, N_{xy} : düzlemdeki bileşke kuvvetler

M_{xx}, M_{yy}, M_{xy} : düzlemdeki bileşke momentler

I_0, I_1, I_2 : atalet momentleri

Daha önce çıkarttığımız birim uzama-yer değiştirme bağıntılarını şu şekilde ifade edebiliriz.

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u_0}{\partial x}-z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_{yy}=\frac{\partial v_0}{\partial y}-z\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \qquad \textbf{(2.3.9)}$$

$$\varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)-z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}$$

(2.3.9) denklemindeki eşitlikleri (2.3.7) denklemine yerleştirdiğimizde aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$
\begin{aligned}
0=\int_0^T\Big\{\iint_{\Pi_0}\Big(&-N_{xx,x}\delta u_0+\left(N_{xx}\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)_{,x}\delta w_0-M_{xx,xx}\delta w_0-N_{yy,y}\delta v_0-\left(N_{yy}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)_{,y}\delta w_0-M_{yy,yy}\delta w_0\\
&-N_{xy,y}\delta u_0-N_{xy,x}\delta v_0-\left(N_{xy}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)_{,x}\delta w_0-\left(N_{xy}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)_{,y}\delta w_0-2M_{xy,xy}\delta w_0-q\delta w_0\\
&+I_0(\ddot{u}_0\,\delta u_0+\ddot{v}_0\,\delta v_0+\ddot{w}_0\,\delta w_0)+I_1(\frac{\partial\ddot{u}_0}{\partial x}\delta v_0-\frac{\partial\ddot{w}_0}{\partial x}\delta u_0+\frac{\partial\ddot{v}_0}{\partial y}\delta w_0-\frac{\partial\ddot{w}_0}{\partial y}\delta v_0)\\
&-I_2(\frac{\partial^2\ddot{w}_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\ddot{w}_0}{\partial y^2})\delta w_0\Big)\delta x\delta y+\int_\Gamma N_{xx,x}n_x\delta u_0+\left(N_{xx}\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)n_x\delta w_0-M_{xx}n_x\frac{\partial w_0}{\partial x}\\
&+M_{xx,x}n_x\delta w_0-N_{yy}n_y\delta v_0+\left(N_{yy}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)n_y\delta w_0-M_{yy}n_y\frac{\partial w_0}{\partial y}+M_{yy,y}n_y\delta w_0\\
&-M_{xy}n_x\frac{\partial w_0}{\partial y}+M_{xy,x}n_y\delta w_0-M_{xy}n_y\frac{\partial w_0}{\partial x}+M_{xy,y}n_x\delta w_0+N_{xy}n_y\delta u_0+N_{xy}n_x\delta v_0\\
&+N_{xy}\frac{\partial w_0}{\partial y}n_x\delta w_0+N_{xy}\frac{\partial w_0}{\partial x}n_y\delta w_0)ds--\int_{\Gamma_0}(\hat{N}_{nn}\delta u_{0n}+\hat{N}_{ns}\delta u_{0s}-\hat{M}_{nn}\frac{\partial\delta w_0}{\partial n}\\
&-\hat{M}_{ns}\frac{\partial\delta w_0}{\partial s}+Q_n\delta\hat{w}_0)ds+\oint_\Gamma\Big(-I_1(\ddot{u}_0\,n_x+\ddot{v}_0\,n_y)+I_2(\frac{\partial\ddot{w}_0}{\partial x}n_x+\frac{\partial\ddot{w}_0}{\partial y}n_y)\Big)\delta w_0 ds\Big\}dt
\end{aligned}
\qquad \textbf{(2.3.10)}
$$

Denklem (2.3.10)' u düzenlersek aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$
\begin{aligned}
0=\int_0^T\Big\{\iint_{\Pi_0}\Big(&-\Big(N_{xx,x}+N_{xy,y}-I_0\ddot{u}_0+I_1\frac{\partial\ddot{w}_0}{\partial x}\Big)\delta u_0-\Big(N_{xy,x}+N_{yy,y}-I_0\ddot{v}_0+I_1\frac{\partial\ddot{w}_0}{\partial y}\Big)\delta v_0\\
&-\Big(M_{xx,xx}+2M_{xy,xy}+M_{yy,yy}+\mathrm{N}(w_0)+q-I_0\ddot{w}_0-I_1\frac{\partial\ddot{u}_0}{\partial x}-I_1\frac{\partial\ddot{v}_0}{\partial y}+I_2\frac{\partial^2\ddot{w}_0}{\partial x^2}\\
&+I_2\frac{\partial^2\ddot{w}_0}{\partial y^2}\Big)\delta w_0\Big)dxdy+\int_{\Gamma_\sigma}\Big(\big(N_{xx,x}n_x+N_{xy}n_y\big)\delta u_0+\big(N_{xy}n_x+N_{yy}n_y\big)\delta v_0\\
&+\big(M_{xx,x}n_x+M_{xy,y}n_x+M_{yy,y}n_y+M_{xy,x}n_y+\mathrm{P}(w_0)-I_1\ddot{u}_0n_x-I_1\ddot{v}_0n_y+I_2\frac{\partial\ddot{w}_0}{\partial x}n_x\\
&+I_2\frac{\partial\ddot{w}_0}{\partial y}n_y\big)\delta w_0-\big(M_{xx,x}n_x+M_{xy}n_y\big)\frac{\partial\delta w_0}{\partial x}-\big(M_{xy,x}n_x+M_{yy}n_y\big)\frac{\partial\delta w_0}{\partial y}\Big)ds\\
&-\int_{\Gamma_0}\Big(\hat{N}_{nn}\delta u_{0n}+\hat{N}_{ns}\delta u_{0s}-\hat{M}_{nn}\frac{\partial\delta w_0}{\partial n}-\hat{M}_{ns}\frac{\partial\delta w_0}{\partial s}+Q_n\hat{\delta w}_0\Big)ds\Big\}dt
\end{aligned}
\qquad \textbf{(2.3.11)}
$$

Sonuçta δu_0, δv_0, δw_0' lı terimleri bir araya getirdiğimizde hareket denklemlerini aşağıda belirttiğimiz gibi bileşke kuvvetler ve bileşke momentler cinsinden elde edebiliriz [22].

$$\delta u_0: \quad \frac{\partial N_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=I_0\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}-I_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)$$

$$\delta v_0: \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial N_{yy}}{\partial y}=I_0\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}-I_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right) \qquad \textbf{(2.3.12)}$$

$$\delta w_0: \quad \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2}+\mathrm{N}(w_0)+q=I_0\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}-I_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)+I_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)$$

Bu üç denklemde kullanılan ve (2.3.8) numaralı denklemde tanımladığımız N_{ij} ve M_{ij} bileşke kuvvet ve momentleri, (2.3.13) numaralı denklemi kullanarak birim uzamanlar cinsinden ifade edebiliriz [23].

$$\begin{bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{11}Q_{12}0\\ Q_{12}Q_{22}0\\ 0\ 0\ Q_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ 2\varepsilon_{xy}\end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.3.13)}$$

(2.3.13) eşitliğini (2.3.8) eşitliklerine koyup N_{ij} ve M_{ij} bileşke kuvvet ve momentleri $\varepsilon_i^{(0)}$ ve $\varepsilon_i^{(1)}$ birim uzamalar cinsinden yazarak (2.3.13) numaralı denklem içerisinde kullanabileceğimiz hale getiririz.

$$\begin{Bmatrix}N_{xx}\\ N_{yy}\\ N_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}A_{12}A_{16}\\ A_{12}A_{22}A_{26}\\ A_{16}A_{26}A_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_1^{(0)}\\ \varepsilon_2^{(0)}\\ \varepsilon_6^{(0)}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}B_{11}B_{12}B_{16}\\ B_{12}B_{22}B_{26}\\ B_{16}B_{26}B_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_1^{(1)}\\ \varepsilon_2^{(1)}\\ \varepsilon_6^{(1)}\end{Bmatrix} \qquad \textbf{(2.3.14)}$$

$$\begin{Bmatrix}M_{xx}\\ M_{yy}\\ M_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}B_{11}B_{12}B_{16}\\ B_{12}B_{22}B_{26}\\ B_{16}B_{26}B_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_1^{(0)}\\ \varepsilon_2^{(0)}\\ \varepsilon_6^{(0)}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}D_{11}D_{12}D_{16}\\ D_{12}D_{22}D_{26}\\ D_{16}D_{26}D_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_1^{(1)}\\ \varepsilon_2^{(1)}\\ \varepsilon_6^{(1)}\end{Bmatrix} \qquad \textbf{(2.3.15)}$$

(2.3.15) numaralı denklemde kullanılan A_{ij} , B_{ij} ve D_{ij} ifadelerini aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz [24].

$$\left(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}\right) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, z^2)dz \qquad \textbf{(2.3.16)}$$

A_{ij} : Malzemenin uzama katılığı

D_{ij} : Malzemenin eğilme katılığı

B_{ij} : Malzemenin uzama-eğilme katılığı

Q_{ij} : düzlem gerilmede indirilmiş katılık matrisi katsayıları.

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1 - \nu(z)^2}$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu(z)E(z)}{1 - \nu(z)^2} \qquad \textbf{(2.3.17)}$$

$$Q_{16} = Q_{61} = Q_{26} = Q_{62} = 0$$

$$Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1 + \nu(z))}$$

Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemelerin Young Modülü (E), Poisson oranı (ν), yoğunluğu (ρ) gibi kimi malzeme özellikleri "h" kalınlığı boyunca değişim gösterir. Bu değişimler aşağıdaki fonksiyon şeklinde olur.

$$P = P_{Ü} \times V_{Ü} + P_A \times V_A \qquad \textbf{(2.3.18)}$$

P : FDM' nin kalınlık boyunca değişen malzeme özelliklerinden herhangi biri.

$P_{Ü}$: Malzemenin üst yüzeydeki özellikleri

P_A : Malzemenin alt yüzeydeki özellikleri

$V_{Ü}$: Üst yüzeydeki malzemelerin hacimlerinin birbirine oranı

V_A : Alt yüzeydeki malzemelerin hacimlerinin birbirine oranı

$V_{Ü}$ ve V_A arasında "$V_{Ü} + V_A = 1$" şeklinde bağ vardır.

Malzemenin üst yüzeyindeki hacim oranı,

$$V_{Ü} = \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{n} \tag{2.3.19}$$

Şeklinde ifade edilebilir. Burada geçen ifadelerin açıklaması şu şekildedir.

n : kalınlık boyunca malzeme değişim profilini belirleyen üs.

h : plağın kalınlığı.

z : kalınlık yönünde koordinatlar.

Hacim oranları göz önünde bulundurularak malzemenin herhangi bir noktasındaki (kalınlık boyunca) malzeme özellikleri (2.3.20) numaralı denklemde belirtildiği şekilde olur [20].

$$E(z) = (E_{Ü} - E_{A}) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{n} + E_{A}$$

$$v(z) = (v_{Ü} - v_{A}) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{n} + v_{A} \tag{2.3.20}$$

$$\rho(z) = (\rho_{Ü} - \rho_{A}) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{n} + \rho_{A}$$

(2.2.3)' teki eşitlikleri (2.3.14) ve (2.3.15) numaralı denklemlerin içerisine koyarsak (2.3.21) ve (2.3.22) numaralı denklemlerdeki şekliyle bileşke kuvvet ve bileşke momentleri yer değiştirmeler cinsinden ifade edebiliriz.

$$N_{xx} = A_{11}\frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{12}\frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{16}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + B_{11}\left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + B_{12}\left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + B_{16}\left(-2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)$$

$$N_{yy} = A_{12}\frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{22}\frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{26}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + B_{12}\left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + B_{22}\left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + B_{26}\left(-2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)$$

$$N_{xy} = A_{16}\frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{26}\frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{66}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + B_{16}\left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + B_{26}\left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + B_{66}\left(-2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)$$

(2.3.21)

$$M_{xx} = B_{11}\frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{12}\frac{\partial v_0}{\partial y} + B_{16}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) + D_{11}\left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) + D_{12}\left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) + D_{16}\left(-2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right)$$

$$M_{yy} = B_{12}\frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{22}\frac{\partial v_0}{\partial y} + B_{26}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) + D_{12}\left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) + D_{22}\left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) + D_{26}\left(-2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right)$$

$$M_{xy} = B_{16}\frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{26}\frac{\partial v_0}{\partial y} + B_{66}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) + D_{16}\left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) + D_{26}\left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) + D_{66}\left(-2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right)$$

(2.3.22)

(2.3.21) ve (2.3.22) eşitliklerini (2.3.12) numaralı bileşke kuvvet ve momentler cinsinden yazdığımız hareket denklemlerinin içerisine koyarsak aşağıdaki üç denklemi elde ederiz;

δu_0:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[A_{11}\frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{12}\frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{16}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) + B_{11}\left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) + B_{12}\left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) + B_{16}\left(-2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right)\right] +$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[A_{16}\frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{26}\frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{66}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) + B_{16}\left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) + B_{26}\left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) + B_{66}\left(-2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right)\right] = I_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_1\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}$$

(2.3.23)

δv_0:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[A_{16}\frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{26}\frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{66}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) + B_{16}\left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) + B_{26}\left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) + B_{66}\left(-2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right)\right] +$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[A_{12}\frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{22}\frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{26}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) + B_{12}\left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) + B_{22}\left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) + B_{26}\left(-2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right)\right] = I_0\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_1\frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2}$$

(2.3.24)

δw_0:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[B_{11}\frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{12}\frac{\partial v_0}{\partial y} + B_{16}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) + D_{11}\left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) + D_{12}\left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) + D_{16}\left(-2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right)\right] +$$

$$2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[B_{16}\frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{26}\frac{\partial v_0}{\partial y} + B_{66}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) + D_{16}\left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) + D_{26}\left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) + D_{66}\left(-2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right)\right] +$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[B_{12}\frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{22}\frac{\partial v_0}{\partial y} + B_{26}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) + D_{12}\left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) + D_{22}\left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) + D_{26}\left(-2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right)\right] +$$

$$\mathrm{N}(w_0) + q = I_0\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + I_1\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2}\right) - I_2\left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial t^2}\right)$$

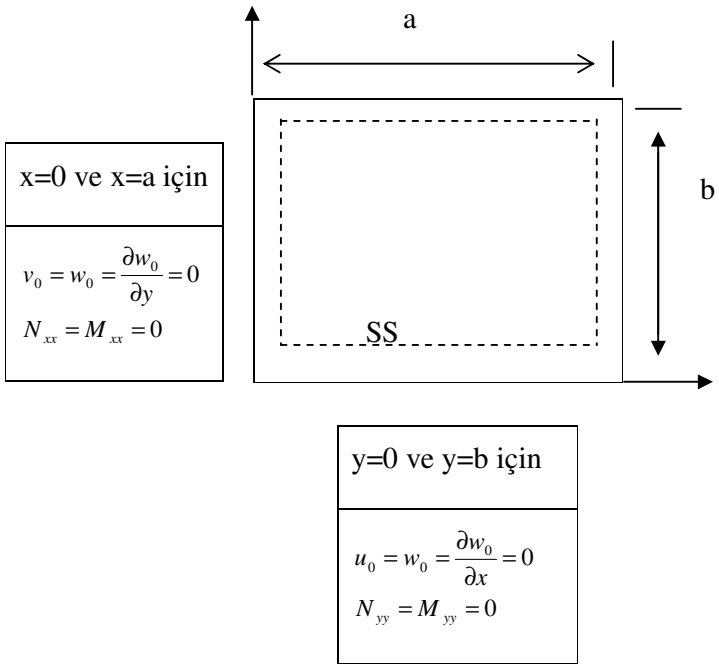
(2.3.25)

Deplasmanlar için farz edilen seri açılımlar aşağıda gösterildiği şekilde alınmıştır. Bu açılımlar basit mesnet sınır koşullarını sağlar.

$$u_0(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}U_{mn}(t)\cos\alpha x\sin\beta y$$

$$v_0(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}V_{mn}(t)\sin\alpha x\cos\beta y \qquad \textbf{(2.3.26)}$$

$$w_0(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}W_{mn}(t)\sin\alpha x\sin\beta y \qquad \alpha=\frac{m\pi}{a} \text{ ve } \beta=\frac{n\pi}{b}$$



Şekil 2.1: Dikdörtgen bir plak için basit mesnet sınır koşulları.

Basit mesnetli bir plak için yer değiştirme sınır koşulları Şekil 2.1'de de belirtildiği gibi şu şekildedir.

$$u(x,0,0,t)=0,\ u(x,b,0,t)=0,\ v(0,y,0,t)=0,\ v(a,y,0,t)=0$$

$$w(x,0,0,t)=0,\ w(x,b,0,t)=0,\ w(0,y,0,t)=0,\ w(a,y,0,t)=0 \qquad \textbf{(2.3.27)}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(x,0,0,t)}=0,\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(x,b,0,t)}=0,\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{(o,y,0,t)}=0,\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{(a,y,0,t)}=0$$

Basit mesnet bir plak için gerilme sınır koşulları aşağıdaki gibidir.

$$\int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{xx}(0,y,z,t)dz = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{xx}(a,y,z,t)dz = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{yy}(x,0,z,t)dz = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{yy}(x,b,z,t)dz = 0$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}(0,y,z,t)dz = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}(a,y,z,t)dz = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy}(x,0,z,t)dz = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy}(x,b,z,t)dz = 0 \qquad \textbf{(2.3.28)}$$

Daha önce belirlediğimiz ve (2.3.26) da belirttiğimiz sınır koşullarını (2.3.23), (2.3.24) ve (2.3.25) numaralı hareket denklemlerine uyguladığımızda,

$$S_{11}U_{mn} + S_{12}V_{mn} + S_{13}W_{mn} = I_0\ddot{U}_{mn} - I_1\alpha\ddot{W}_{mn}$$

$$S_{21}U_{mn} + S_{22}V_{mn} + S_{23}W_{mn} = I_0\ddot{V}_{mn} - I_1\beta\ddot{W}_{mn} \qquad \textbf{(2.3.29)}$$

$$S_{31}U_{mn} + S_{32}V_{mn} + S_{33}W_{mn} + Q_{mn} = I_0\ddot{W}_{mn} + I_1\left(\alpha\ddot{U}_{mn} + \beta\ddot{V}_{mn}\right) - I_2\left(\alpha^2\ddot{W}_{mn} + \beta^2\ddot{W}_{mn}\right)$$

denklemlerini elde ederiz. Burada ifade ettiğimiz S_{ij}'li ifadeleri şu şekildedir [25].

$$S_{11} = A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2 \qquad S_{12} = (A_{12} + A_{66})\alpha\beta \qquad S_{13} = -\left(B_{11}\alpha^3 + B_{12}\alpha\beta^2 + 2B_{66}\alpha\beta^2\right)$$

$$S_{21} = (A_{21} + A_{66})\alpha\beta \qquad S_{22} = A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2 \qquad S_{23} = -\left(B_{22}\beta^3 + B_{21}\alpha^2\beta + 2B_{66}\alpha^2\beta\right)$$

$$S_{31} = -\left(B_{11}\alpha^3 + B_{12}\alpha\beta^2 + 2B_{66}\alpha\beta^2\right) \qquad S_{32} = -\left(B_{22}\beta^3 + B_{21}\alpha^2\beta + 2B_{66}\alpha^2\beta\right)$$

$$S_{33} = D_{11}\alpha^4 + D_{12}\alpha^2\beta^2 + 4D_{66}\alpha^2\beta^2 + D_{21}\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4 \qquad \textbf{(2.3.30)}$$

Bu eşitlikleri düzenlersek aşağıdaki matrisi elde ederiz.

$$\begin{bmatrix} S_{11}S_{12}S_{13} \\ S_{21}S_{22}S_{23} \\ S_{31}S_{32}S_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{11}0\ m_{13} \\ 0\ m_{22}m_{23} \\ m_{31}m_{32}m_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_{mn} \\ \ddot{V}_{mn} \\ \ddot{W}_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_{mn} \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(2.3.31)}$$

$$m_{11} = I_0 \qquad m_{12} = 0 \qquad m_{13} = -I_1\alpha$$

$$m_{21} = 0 \qquad m_{22} = I_0 \qquad m_{23} = -I_1\beta$$

$$m_{31} = I_1\alpha \qquad m_{32} = I_1\beta \qquad m_{33} = I_0 - I_2\left(\alpha^2 + \beta^2\right)$$

3. FDM BİR PLAĞIN KPT KULLANILARAK ANALİZİ

FDM bir plağın KPT' ye göre hareket denklemleri Teorik Formülasyon başlığı altında çıkartıldı. Bu bölümde ise önceki bölümde çıkartılan denklemler kullanılarak KPT' ye göre plağın serbest titreşim analizi, statik ve dinamik analizi yapılacaktır. Yapılan analiz sonucunda ortaya çıkan veriler değerlendirilecek, karşılaştırmalar yapılacaktır.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[B_{11}\frac{\partial u_0}{\partial x}+B_{12}\frac{\partial v_0}{\partial y}+B_{16}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)+D_{11}\left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)+D_{12}\left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)+D_{16}\left(-2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\right)\right]+$$
$$2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[B_{16}\frac{\partial u_0}{\partial x}+B_{26}\frac{\partial v_0}{\partial y}+B_{66}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)+D_{16}\left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)+D_{26}\left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)+D_{66}\left(-2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\right)\right]+$$
$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[B_{12}\frac{\partial u_0}{\partial x}+B_{22}\frac{\partial v_0}{\partial y}+B_{26}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)+D_{12}\left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)+D_{22}\left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)+D_{26}\left(-2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\right)\right]+$$
$$\mathrm{N}(w_0)+q=I_0\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}+I_1\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x\partial t^2}+\frac{\partial^3 v_0}{\partial y\partial t^2}\right)-I_2\left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2\partial t^2}\right)$$

KPT' ye göre uzama-eğilme katsayıları B_{ij} ve eğilme-bükülme (bending-twisting) katsayıları (D_{16}, D_{26}) sıfıra eşit oluyor [22]. Plağımızı dört kenarında basit mesnet sınır koşullarında kabul ediyoruz ve çözümlerimizde Navier yöntemlerini kullanıyoruz. Yukarıda verilen ve (2.3.25) numaralı denklem olarak da çıkartmış olduğumuz w_0 için ifade ettiğimiz hareket denkleminde eğilme-uzama ve eğilme-bükülme katsayılarını ihmal ettiğimizde (3.1) numaralı denklemi elde ederek FDM bir plak için yer değiştirmeleri bulabiliriz.

$$D_{11}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4}+q+I_0\ddot{w}_0-I_2\left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y_2}\right)=0 \qquad \textbf{(3.1)}$$

3.1 Malzeme Özellikleri

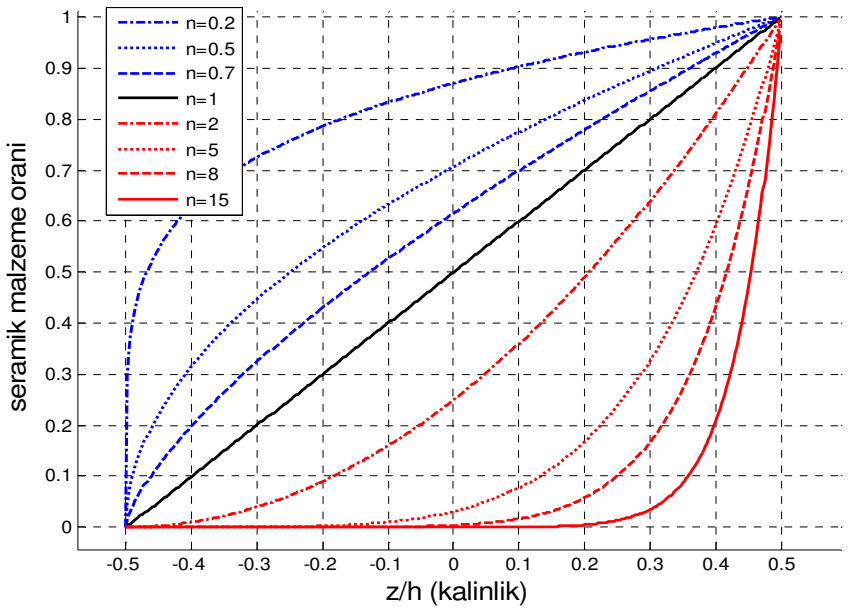
Yapacağımız analiz çalışmalarında asıl olarak seramik malzeme zirkon, metal malzeme alüminyum kullanıyoruz. Karşılaştırma amaçlı kullanacağımız zirkon, alüminyum oksit, silikon nidrit, alüminyum, çelik ve nikelin malzeme özellikleri Tablo 3.1'de verildiği gibidir. Bu tablodan da anlaşılacağı üzere seramik malzemelerin Young Modülü metal malzemeninkinden daha fazladır. Yoğunluk ve Poisson oranı ise isteğe göre metalinki veya seramiğinki yüksek seçilebilir.

Tablo 3.1: Seramik ve Metal Malzeme Özellikleri

		E (Young Modülü)	ν (Poisson oranı)	ρ (yoğunluk)
Seramik	Zirkon(ZrO_2)	151 GPa	0,29	3000 kg/m^3
	Alüminyum Oksit (Al_2O_3)	320,24 GPa	0,26	3750 kg/m^3
	Silikon Nidrit (Si_3N_4)	322,27 GPa	0,24	2370 kg/m^3
Metal	Alüminyum	70 GPa	0,26	2707 kg/m^3
	Çelik (SUS304)	207 GPa	0,31	8166 kg/m^3
	Nikel (Ti-6Al-4V)	105,70 GPa	0,29	4429 kg/m^3

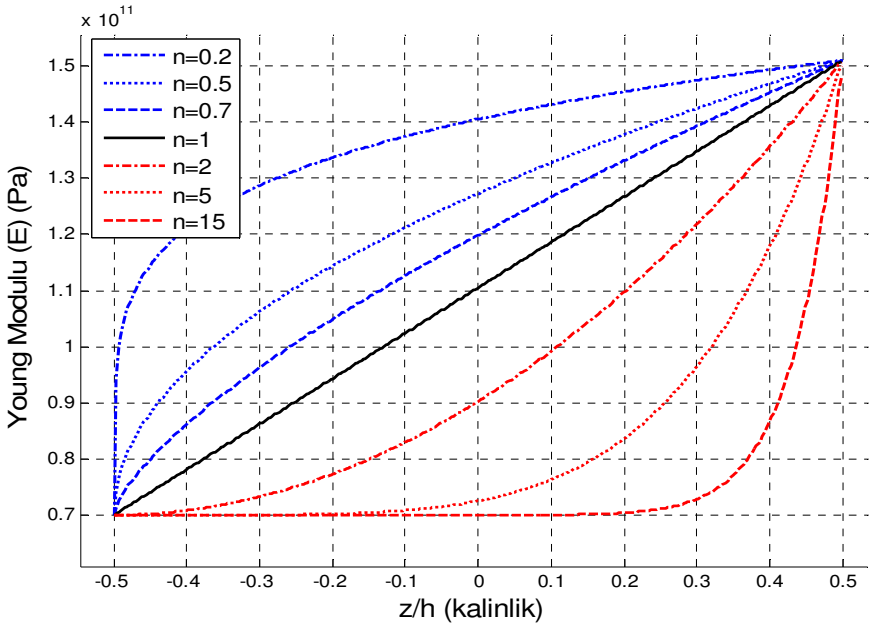
Yukarıda belirtilen malzeme özellikleri denklem (2.3.20)'de belirtildiği gibi malzeme kalınlığı boyunca değişmektedir. Seramik-metal bileşimi genelde Zirkon-Alüminyum (Tip I), Alüminyum oksit-çelik (Tip II) ve Silikon Nidrit-Nikel (Tip III) şeklinde olmaktadır. Bu değişim kalınlık boyunca malzeme değişim profilini gösteren "n" katsayısına bağlı olarak değişmektedir. Plak kalınlığı boyunca malzeme

oranlarının değişimi Şekil 3.1 de gösterilmiştir. Kalınlık boyunca malzeme değişim profilini gösteren "n" değeri sıfıra eşit olduğunda malzeme seramik malzeme özelliklerini gösterir. "n" değeri sıfır ile bir arasında iken malzeme seramik yoğunlukta olacağından FDM' den oluşan plak seramik malzemeye daha yakın davranır. "n" değeri bire eşit olduğunda kalınlık boyunca malzeme değişimi doğrusal (lineer) olacaktır. Yani üst bölüm seramik yoğunluklu olan malzemenin alt bölümü metal yoğunluklu olacaktır. "n" değeri arttıkça ve yüksek değerlere ulaştıkça malzeme özellikleri metalin malzeme özelliklerine yakın olacaktır. Örneğin Şekil 3.1'de n=15 iken tam orta noktada (z/h=0) seramik malzeme oranı sıfıra çok yakındır, yani malzemenin alt bölümünden orta bölümüne kadar neredeyse tamamen metal olduğu anlaşılır.

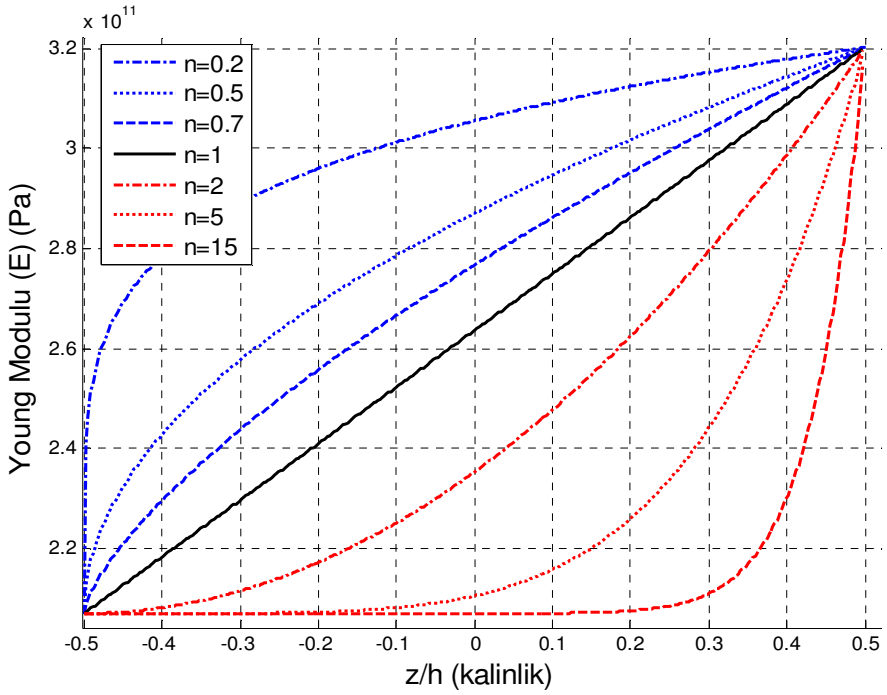


Şekil 3.1: Zirkon ve alüminyum, seramik ve metal malzemelerinden oluşan Fonksiyonel Derecelendirilmiş bir plağın boyutsuz kalınlığı boyunca seramik malzeme oranlarının değişimi.

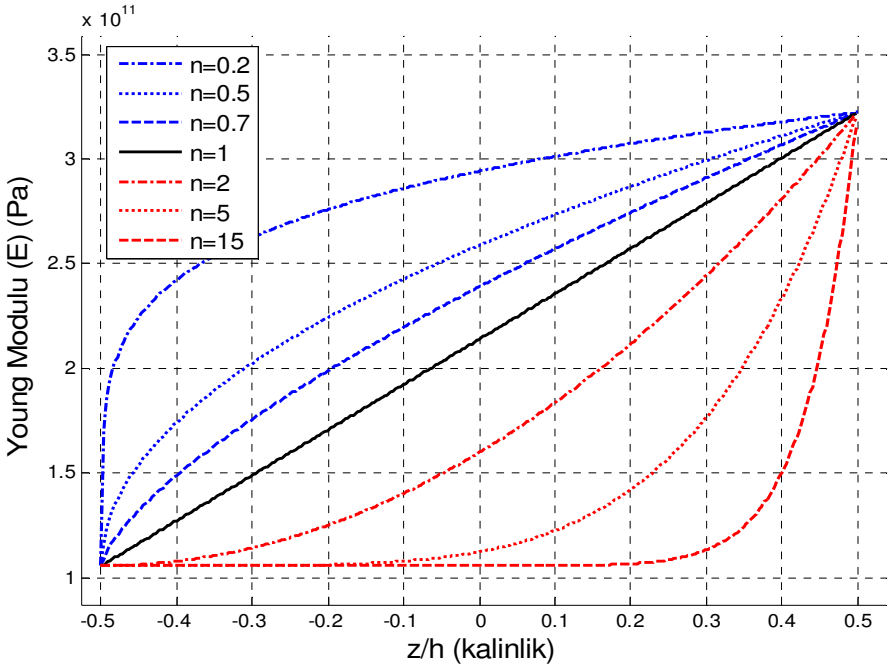
Yukarıda belirtilen 3 tip Fonksiyonel Derecelendirilmiş Plağın malzeme dağılımı kalınlık boyunca Şekil 3.1 de gösterildiği gibi değişeceğinden malzeme özellikleri de Denklem 2.3.20'de belirtilen şekilde değişecektir ve bu değişimler Şekil 3.2-10'da verilmiştir.



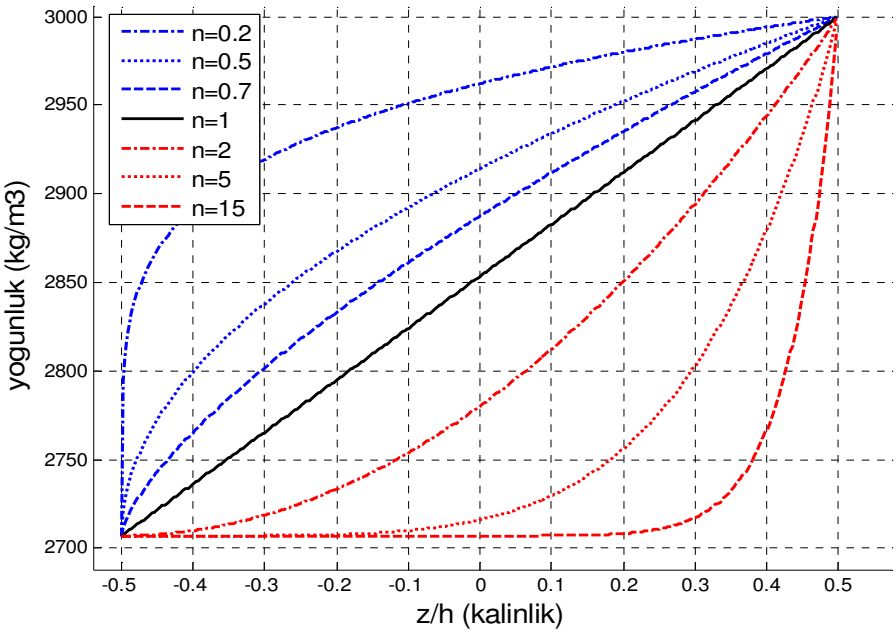
Şekil 3.2: Zirkon ve alüminyum malzemelerinden oluşan Fonksiyonel Derecelendirilmiş bir plağın boyutsuz kalınlık boyunca Young Modülü değişimi.



Şekil 3.3: Alüminyum oksit ve çelik malzemelerinden oluşan Fonksiyonel Derecelendirilmiş bir plağın boyutsuz kalınlık boyunca Young Modülü değişimi.

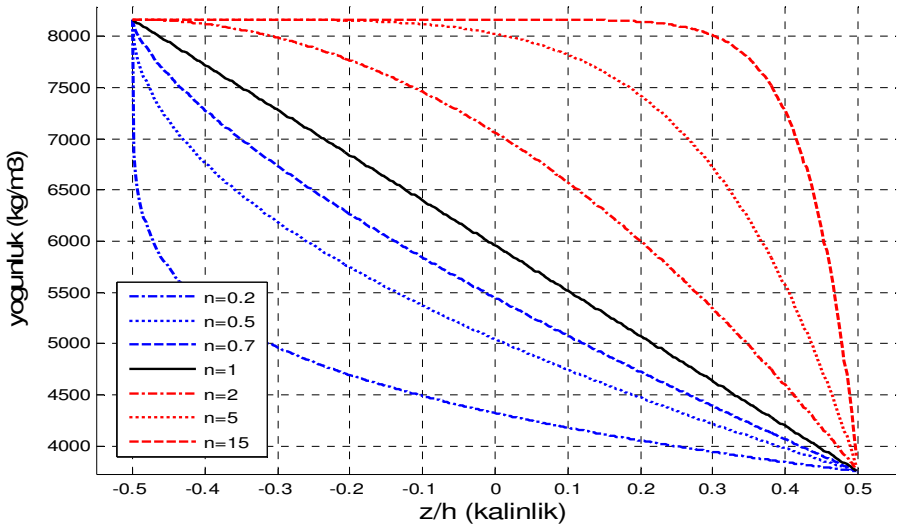


Şekil 3.4: Silikon Nidrit ve Nikel malzemelerinden oluşan Fonksiyonel Derecelendirilmiş bir plağın boyutsuz kalınlık boyunca Young Modülü değişimi.

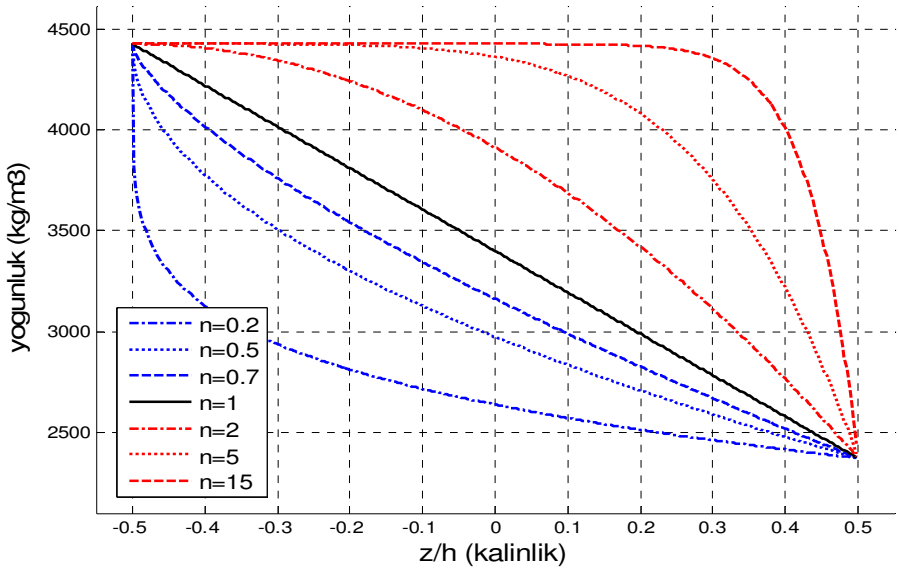


Şekil 3.5: Zirkon ve alüminyum malzemelerinden oluşan Fonksiyonel Derecelendirilmiş bir plağın boyutsuz kalınlık boyunca yoğunluğunun değişimi.

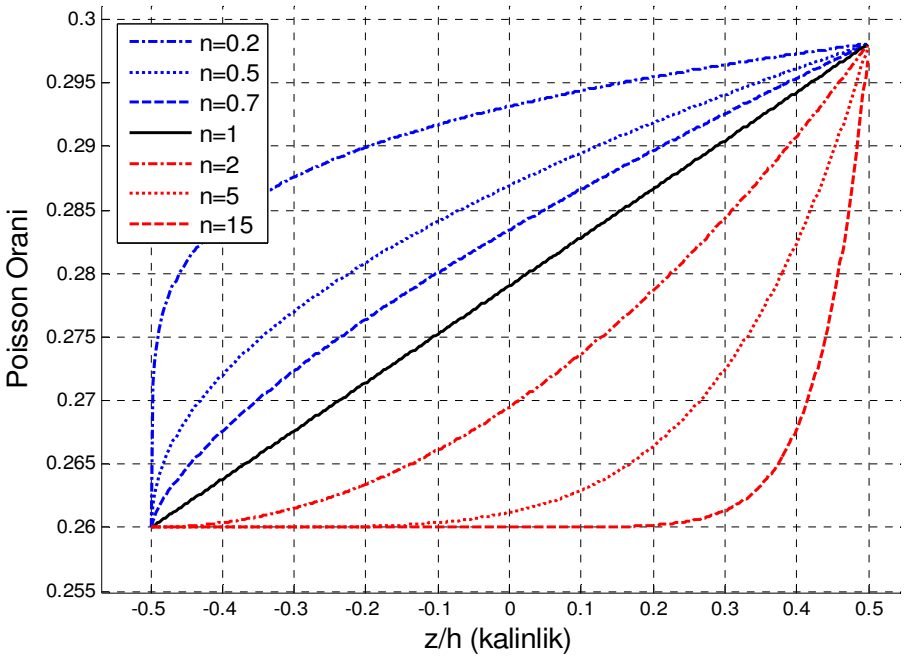
Şekil 3.2-4' te görüldüğü gibi Young Modülü plağın üst bölümlerine doğru artmaktadır. Bunun nedeni üst bölümde seramiğin plak içine daha fazla nüfuz etmesidir.



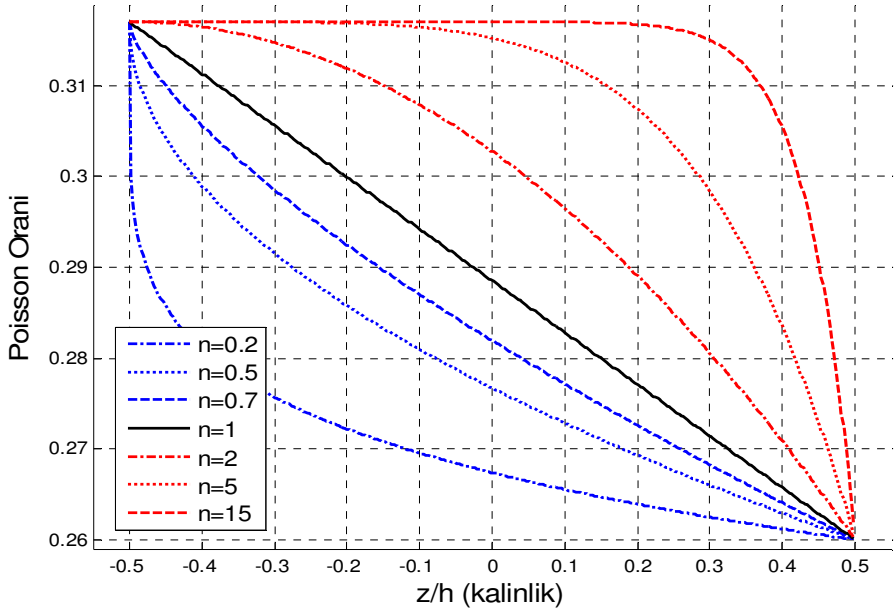
Şekil 3.6: Alüminyum oksit ve çelik malzemelerinden oluşan Fonksiyonel Derecelendirilmiş bir plağın boyutsuz kalınlık boyunca yoğunluk değişimi.



Şekil 3.7: Silikon Nidrit ve Nikel malzemelerinden oluşan Fonksiyonel Derecelendirilmiş bir plağın boyutsuz kalınlık boyunca yoğunluk değişimi.

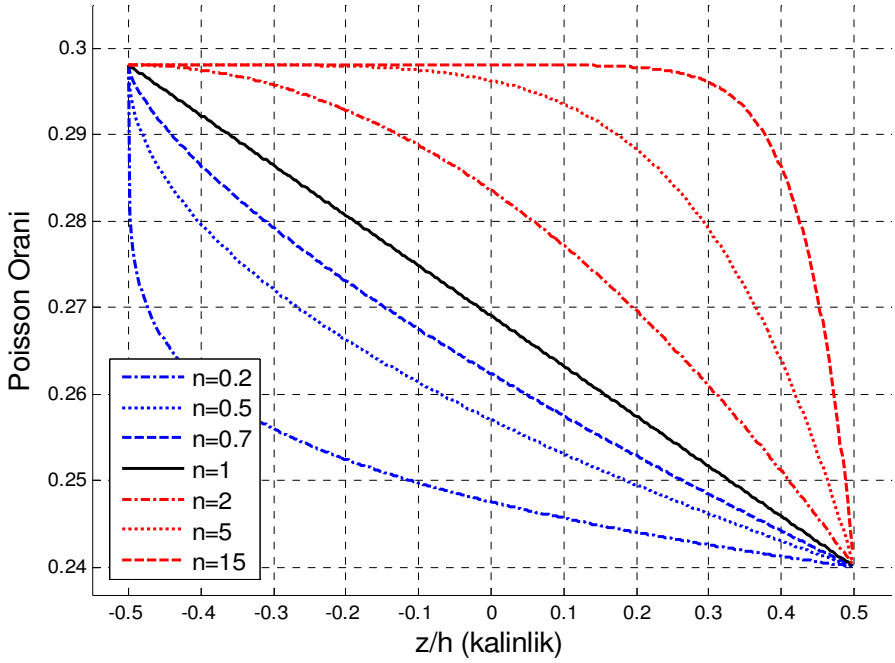


Şekil 3.8: Zirkon ve alüminyum malzemelerinden oluşan Fonksiyonel Derecelendirilmiş bir plağın boyutsuz kalınlık boyunca Poisson oranının değişimi.



Şekil 3.9: Alüminyum oksit ve çelik malzemelerinden oluşan Fonksiyonel Derecelendirilmiş bir plağın boyutsuz kalınlık boyunca Poisson oranı değişimi.

Şekil 3.8' de Poisson oranının değişimi incelendiğinde Young Modülü değişimine benzer şekilde plağın üstlerine doğru Poisson oranının arttığını görürüz. Şekil 3.9'da Poisson oranının plağın üst bölümlerine doğru azaldığı görülür. Bunun sebebi bu tip plakta seramiğin Poisson oranının metalinkinden düşük olmasıdır.



Şekil 3.10: Silikon Nidrit ve Nikel malzemelerinden oluşan Fonksiyonel Derecelendirilmiş bir plağın boyutsuz kalınlık boyunca Poisson oranı değişimi.

3.2 Basit Mesnet Bir Plağın Titreşimi

Doğal titreşim frekansları için (3.1) denkleminde belirttiğimiz yükleri sıfıra eşitlersek 3.2.1 numaralı denklemi elde ederiz.

$$D_{11}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4}+I_0\ddot{w}_0-I_2(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y_2})=0 \qquad \textbf{(3.2.1)}$$

$w_0(t)=W_{mn}e^{i\omega t}$ olarak alalım. $\qquad W_{mn}=W_{mn}^{(0)}\sin\alpha_m x\sin\beta_n y \qquad$ **(3.2.2)**

$i=\sqrt{-1}$ $\qquad\qquad$ ω : doğal titreşim frekansı

(3.2.1) denklemini (3.2.2) içerisine koyarsak (3.2.3) denklemini elde ederiz.

$$\left\{D_{11}\alpha_m{}^4 + 2(D_{12}+2D_{66})\alpha_m{}^2\beta_n{}^2 + D_{22}\beta_n{}^4 - \omega_{mn}{}^2\left[I_0 + \left(I\alpha_m{}^2 + \beta_n{}^2\right)I_2\right]\right\} x W_{mn}{}^{(0)} \sin\alpha_m x \sin\beta_n y = 0$$

(3.2.3)

Bu eşitlik 0<x<a ve 0<y<b arasında tüm m ve n değerleri için geçerli olması gerekiyor. Parantezin içerisindeki ifadenin sıfıra eşit olması gerekiyor. Sonuçta ω_{mn} doğal frekansını eşitliğin öbür tarafına alırsak.

$$\omega_{mn}{}^2 = \frac{\pi^4}{\bar{I}_0 b^4}\left[D_{11}m^4\left(\frac{b}{a}\right)^4 + 2(D_{12}+2D_{66})m^2n^2\left(\frac{b}{a}\right)^2 + D_{22}n^4\right] \qquad \textbf{(3.2.4)}$$

$$\bar{I} = I_0 + I_2\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right] \qquad \textbf{(3.2.5)}$$

Dönme eylemsizliği I_2 sıfıra eşit olmadığında en düşük doğal frekansı, yani temel doğal frekansı bulmak zordur. Bizim çalışmamızda küçük deformasyonlar olduğundan ve plağımız ince olduğundan dönme eylemsizliği I_2' yi ihmal edebiliriz. Böylece (3.2.4) numaralı denklemimiz şu hali alır:

$$\omega^2{}_{mn} = \frac{\pi^4}{I_0 b^4}\left[D_{11}m^4\left(\frac{b}{a}\right)^4 + 2(D_{12}+2D_{66})m^2n^2\left(\frac{b}{a}\right)^2 + D_{22}n^4\right] \qquad \textbf{(3.2.6)}$$

Temel doğal frekans m=n=1 de iken olur.

$$\omega_{11}^2 = \frac{\pi^4}{I_0 b^4}\left[D_{11}\left(\frac{b}{a}\right)^4 + 2(D_{12}+2D_{66})\left(\frac{b}{a}\right)^2 + D_{22}\right] \qquad \textbf{(3.2.7)}$$

İzotrop bir plak için doğal frekansımız (3.2.8) numaralı denklemde belirtildiği gibi olur.

$$\omega^2{}_{mn} = \frac{D\pi^4}{I_0 b^4}\left[m^4\left(\frac{b}{a}\right)^4 + 2m^2n^2\left(\frac{b}{a}\right)^2 + n^4\right] = \frac{D\pi^4}{I_0 b^4}\left[m^2\left(\frac{b}{a}\right)^2 + n^2\right]^2 \qquad \textbf{(3.2.8)}$$

İzotrop bir plak için temel frekansımız denklem (3.2.9)' da, boyutsuz frekansımız ise denklem (3.2.10)' da verilmiştir.

$$\omega_{11} = \frac{\pi^2}{b^2}\sqrt{\frac{D}{I_0}\left[\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1\right]} \text{ olur.} \qquad \textbf{(3.2.9)}$$

$$\overline{\omega}_{mn} = \omega_{mn}\left(\frac{b^2}{\pi^2}\right)\sqrt{\frac{\rho h}{D_{22}}} \qquad \textbf{(3.2.10)}$$

Fonksiyonel Derecelendirilmiş bir plak için çıkartılan bu formülleri Teorik Formülasyon bölümünde bulduğumuz ifadeler ile birleştirip MATLAB programında çözdüğümüzde bu plağın değişik boyutlar ve değişik kalınlıklar boyunca malzeme değişim profilini gösteren "n" değerlerine bağlı doğal frekanslarını bulabiliriz.

Tablo 3.2: Kalınlık boyunca malzeme değişim profilini gösteren değişik "n" değerleri ve değişik kalınlık oranları için boyutsuz doğal frekanslar (a=b), ($\overline{\omega}_{mn} = \omega_{mn}\left(\frac{b^2}{\pi^2}\right)\sqrt{\frac{\rho h}{D_{22}}}$).

boyutsuz mod (m,n)	1 (1,1)	2 (1,2)	3 (2,1)	4 (2,2)	5 (1,3)	6 (3,1)	7 (2,3)	8 (3,2)	9 (3,3)
n=0.2	0,003226	0,008066	0,008066	0,012906	0,016132	0,016132	0,020971	0,020971	0,029037
n=0.5	0,003253	0,008134	0,008134	0,013014	0,016267	0,016267	0,021147	0,021147	0,029281
n=1	0,003281	0,008203	0,008203	0,013124	0,016406	0,016406	0,021327	0,021327	0,02953
n=2	0,00331	0,008274	0,008274	0,013238	0,016548	0,016548	0,021512	0,021512	0,029786
n=5	0,003339	0,008347	0,008347	0,013355	0,016694	0,016694	0,021702	0,021702	0,030049
n=8	0,003349	0,008372	0,008372	0,013395	0,016743	0,016743	0,021766	0,021766	0,030138
n=10	0,003352	0,008381	0,008381	0,013409	0,016761	0,016761	0,02179	0,02179	0,030171

Tablo 3.3: Kalınlık boyunca malzeme değişim profilini gösteren değişik "n" değerleri ve değişik kalınlık oranları için çıkartılan doğal frekanslar (a=b).

mod(m,n)	1 (1,1)	2 (1,2)	3 (2,1)	4 (2,2)	5 (1,3)	6 (3,1)	7 (2,3)	8 (3,2)	9 (3,3)
	n=0.2								
h=a/10	32,162	80,405	80,405	128,65	160,81	160,81	209,05	209,05	289,46
h=a/20	16,081	40,203	40,203	64,324	80,405	80,405	104,53	104,53	144,73
h=a/50	6,4324	16,081	16,081	25,73	32,162	32,162	41,811	41,811	57,892
	n=0.5								
h=a/10	30,715	76,788	76,788	122,86	153,58	153,58	199,65	199,65	276,44
h=a/20	15,358	38,394	38,394	61,43	76,788	76,788	99,824	99,824	138,22
h=a/50	6,143	15,358	15,358	24,572	30,715	30,715	39,93	39,93	55,287
	n=1								
h=a/10	29,583	73,958	73,958	118,33	147,92	147,92	192,29	192,29	266,25
h=a/20	14,792	36,979	36,979	59,166	73,958	73,958	96,145	96,145	133,12
h=a/50	5,9166	14,792	14,792	23,666	29,583	29,583	38,458	38,458	53,25
	n=2								
h=a/10	28,696	71,74	71,74	114,78	143,48	143,48	186,52	186,52	258,26
h=a/20	14,348	35,87	35,87	57,392	71,74	71,74	93,262	93,262	129,13
h=a/50	5,7392	14,348	14,348	22,957	28,696	28,696	37,305	37,305	51,653
	n=5								
h=a/10	27,566	68,914	68,914	110,26	137,83	137,83	179,18	179,18	248,09
h=a/20	13,783	34,457	34,457	55,131	68,914	68,914	89,588	89,588	124,05
h=a/50	5,5131	13,783	13,783	22,053	27,566	27,566	35,835	35,835	49,618
	n=8								
h=a/10	26,875	67,186	67,186	107,5	134,37	134,37	174,68	174,68	241,87
h=a/20	13,437	33,593	33,593	53,749	67,186	67,186	87,342	87,342	120,94
h=a/50	5,3749	13,437	13,437	21,5	26,875	26,875	34,937	34,937	48,374
	n=10								
h=a/10	26,539	66,347	66,347	106,16	132,69	132,69	172,5	172,5	238,85
h=a/20	13,269	33,174	33,174	53,078	66,347	66,347	86,252	86,252	119,43
h=a/50	5,3078	13,269	13,269	21,231	26,539	26,539	34,501	34,501	47,77

Tablo 3.4: Kalınlık boyunca malzeme değişim profilini gösteren değişik "n" değerleri ve değişik boyutlar için çıkartılan doğal frekanslar.

mod(m,n)	1 (1,1)	2 (1,2)	3 (2,1)	4 (2,2)	5 (1,3)	6 (3,1)	7 (2,3)	8 (3,2)	9 (3,3)
	n=0.2								
a=b	16,081	40,203	40,203	64,324	80,405	80,405	104,53	104,53	144,73
a=2b/3	58,796	113,07	180,91	235,19	203,53	384,44	438,71	325,64	529,17
a=b/2	160,81	257,3	546,76	643,24	418,11	1190	1286,5	804,05	1447,3
a=b/4	2187	2573	8362,2	8748,1	3216,2	18654	19040	9391,3	19683
	n=0.5								
a=b	15,358	38,394	38,394	61,43	76,788	76,788	99,824	99,824	138,22
a=2b/3	56,151	107,98	172,77	224,6	194,37	367,14	418,97	310,99	505,36
a=b/2	153,58	245,72	522,16	614,3	399,3	1136,5	1228,6	767,88	1382,2
a=b/4	2088,6	2457,2	7985,9	8354,5	3071,5	17815	18183	8968,8	18798
	n=1								
a=b	14,792	36,979	36,979	59,166	73,958	73,958	96,145	96,145	133,12
a=2b/3	54,082	104	166,4	216,33	187,21	353,61	403,53	299,53	486,73
a=b/2	147,92	236,66	502,91	591,66	384,58	1094,6	1183,3	739,58	1331,2
a=b/4	2011,7	2366,6	7691,6	8046,6	2958,3	17158	17513	8638,3	18105
	n=2								
a=b	14,348	35,87	35,87	57,392	71,74	71,74	93,262	93,262	129,13
a=2b/3	52,46	100,88	161,41	209,84	181,59	343,01	391,43	290,55	472,14
a=b/2	143,48	229,57	487,83	573,92	373,05	1061,8	1147,8	717,4	1291,3
a=b/4	1951,3	2295,7	7461	7805,3	2869,6	16644	16988	8379,2	17562
	n=4								
a=b	13,934	34,835	34,835	55,736	69,671	69,671	90,572	90,572	125,41
a=2b/3	50,947	97,974	156,76	203,79	176,35	333,11	380,14	282,17	458,52
a=b/2	139,34	222,95	473,76	557,36	362,29	1031,1	1114,7	696,71	1254,1
a=b/4	1895	2229,5	7245,7	7580,2	2786,8	16164	16498	8137,5	17055
	n=5								
a=b	13,783	34,457	34,457	55,131	68,914	68,914	89,588	89,588	124,05
a=2b/3	50,393	96,911	155,06	201,57	174,44	329,5	376,01	279,1	453,54
a=b/2	137,83	220,53	468,62	551,31	358,35	1019,9	1102,6	689,14	1240,5
a=b/4	1874,5	2205,3	7167,1	7497,9	2756,6	15988	16319	8049,2	16870
	n=8								
a=b	13,437	33,593	33,593	53,749	67,186	67,186	87,342	87,342	120,94
a=2b/3	49,13	94,481	151,17	196,52	170,07	321,23	366,59	272,1	442,17
a=b/2	134,37	215	456,87	537,49	349,37	994,36	1075	671,86	1209,4
a=b/4	1827,5	2150	6987,4	7309,9	2687,5	15587	15910	7847,4	16447

Kalınlık boyunca değişen malzeme özellikleri olan Fonksiyonel Derecelendirilmiş bir plak için bulduğumuz doğal frekans değerlerinin; malzeme değişim oranını belirleyen faktör "n", kalınlık ve malzeme boyutları ile değişimlerinin hangi ölçüde olduğunu gösteren değerler Tablo 3.2-5'te verilmiştir (Tablo 3.2 ve 3.3 için (a=b=0,2 m.); Tablo 3.4 ve 3.5 için h=0.01 m. ve a=0,2 m. ve sabit, b değişken olmak üzere). Tablo 3.3 ve 3.4 de ki değerlerden de görüldüğü gibi kalınlık boyunca malzeme değişim profilini belirleyen "n" faktörünün artmasıyla doğal frekans azalmaktadır.

Bunun sebebi de metalin malzeme yapısına daha çok nüfuz etmesinden dolayı malzeme katılığını azaltmasıdır. Aynı şekilde kalınlık azaldıkça doğal frekanslar hızla azalmaktadır. Kalınlığın sabit kalması koşuluyla malzeme özelliklerinin değişim profilini gösteren katsayının değişimi ile boyutsuz doğal frekansın değişimine baktığımızda değerlerin birbirine çok yakın olduğunu ve neredeyse "n" katsayısının artmasından hiç etkilenmediği görülmektedir.

Tablo 3.5:Kalınlık boyunca malzeme değişim profilini gösteren değişik "n" değerleri ve değişik boyutlar için boyutsuz doğal frekanslar ($\overline{\omega}_{mn} = \omega_{mn}\left(\frac{b^2}{\pi^2}\right)\sqrt{\frac{\rho h}{D_{22}}}$).

boyutsuz mod(m,n)	1 (1,1)	2 (1,2)	3 (2,1)	4 (2,2)	5 (1,3)	6 (3,1)	7 (2,3)	8 (3,2)	9 (3,3)
	n=0.2								
a=b	0,003226	0,008066	0,008066	0,012905	0,016132	0,016132	0,020971	0,020971	0,029037
a=2b/3	0,026542	0,051042	0,081668	0,10617	0,091876	0,17354	0,147	0,19804	0,23888
a=b/2	0,12905	0,20649	0,43879	0,51622	0,33554	0,95501	0,64527	1,0324	1,1615
a=b/4	7,0206	8,2595	26,843	28,082	10,324	59,881	30,147	61,12	63,185
	n=0.5								
a=b	0,003253	0,008134	0,008134	0,013014	0,016267	0,016267	0,021147	0,021147	0,029281
a=2b/3	0,026764	0,05147	0,082352	0,10706	0,092646	0,175	0,14823	0,1997	0,24088
a=b/2	0,13014	0,20822	0,44246	0,52054	0,33835	0,96301	0,65068	1,0411	1,1712
a=b/4	7,0794	8,3287	27,068	28,318	10,411	60,383	30,4	61,632	63,715
	n=1								
a=b	0,003281	0,008203	0,008203	0,013124	0,016406	0,016406	0,021327	0,021327	0,02953
a=2b/3	0,026992	0,051908	0,083053	0,10797	0,093435	0,17649	0,1495	0,2014	0,24293
a=b/2	0,13124	0,20999	0,44623	0,52498	0,34124	0,97121	0,65622	1,05	1,1812
a=b/4	7,1397	8,3997	27,299	28,559	10,5	60,898	30,659	62,157	64,257
	n=2								
a=b	0,00331	0,008274	0,008274	0,013238	0,016548	0,016548	0,021512	0,021512	0,029786
a=2b/3	0,027226	0,052358	0,083773	0,10891	0,094245	0,17802	0,15079	0,20315	0,24504
a=b/2	0,13238	0,21181	0,4501	0,52953	0,34419	0,97963	0,66191	1,0591	1,1914
a=b/4	7,2016	8,4725	27,536	28,806	10,591	61,425	30,925	62,696	64,814
	n=4								
a=b	0,003333	0,008332	0,008332	0,013331	0,016664	0,016664	0,021664	0,021664	0,029996
a=2b/3	0,027418	0,052727	0,084363	0,10967	0,094908	0,17927	0,15185	0,20458	0,24676
a=b/2	0,13331	0,2133	0,45327	0,53326	0,34662	0,98652	0,66657	1,0665	1,1998
a=b/4	7,2523	8,5321	27,729	29,009	10,665	61,858	31,142	63,138	65,271
	n=5								
a=b	0,003339	0,008347	0,008347	0,013355	0,016694	0,016694	0,021702	0,021702	0,030049
a=2b/3	0,027466	0,05282	0,084512	0,10987	0,095076	0,17959	0,15212	0,20494	0,2472
a=b/2	0,13355	0,21368	0,45407	0,5342	0,34723	0,98827	0,66775	1,0684	1,202
a=b/4	7,2651	8,5472	27,778	29,06	10,684	61,967	31,197	63,249	65,386
	n=8								
a=b	0,003349	0,008372	0,008372	0,013395	0,016743	0,016743	0,021766	0,021766	0,030138
a=2b/3	0,027548	0,052977	0,084763	0,11019	0,095358	0,18012	0,15257	0,20555	0,24793
a=b/2	0,13395	0,21431	0,45542	0,53578	0,34826	0,9912	0,66973	1,0716	1,2055
a=b/4	7,2867	8,5726	27,861	29,147	10,716	62,151	31,29	63,437	65,58

3.3 Poisson Oranı Değişiminin Analiz Sonuçlarına Etkisi

Denklem 2.3.20 de belirtildiği gibi, Poisson Oranı (ν), Young Modülü (E) ve yoğunluk (ρ); kalınlık (z) nin birer fonksiyonudur. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeyi oluşturan seramik ve metalin malzeme özellikleri ve birleşim oranları bu değerleri değiştirmektedir. Poisson Oranı ve Young Modülünün FDM bir plağı oluşturan malzemelerin özellikleri ve birleşim oranları göz önünde bulundurularak hesaplanan doğal frekanslar, Poisson Oranı ve Young Modülü; FDM plağı oluşturan malzemelerin değerlerinin ortalaması olarak sabit alındığı durumdaki değerler ve hatalar yüzde olarak aşağıda 3.6-7 da verilmiştir (a=b=0.4 m. ; h=0.01 m.).

Tablo 3.6: Poisson oranı (ν) nın; kalınlık (z) nin fonksiyonu olarak değişmesi ve sabit olması durumunda doğal frekanslardaki değişim.

mod (m,n)	1 (1,1)	2 (1,2)	3 (2,1)	4 (2,2)	5 (1,3)	6 (3,1)	7 (2,3)	8 (3,2)	9 (3,3)
	n=0.2								
Poisson Oranı "z" nin fonksiyonu	64,32	160,81	160,81	257,30	321,62	321,62	418,11	418,11	578,92
Poisson Oranı sabit=0.3	64,10	160,24	160,24	256,39	320,49	320,49	416,63	416,63	576,88
Hata (%)	-0,351	-0,354	-0,354	-0,354	-0,351	-0,351	-0,354	-0,354	-0,352
	n=0.5								
Poisson Oranı "z" nin fonksiyonu	61,43	153,58	153,58	245,72	307,15	307,15	399,30	399,30	552,87
Poisson Oranı sabit=0.3	61,30	153,25	153,25	245,20	306,49	306,49	398,44	398,44	551,69
Hata (%)	-0,213	-0,215	-0,215	-0,212	-0,215	-0,215	-0,215	-0,215	-0,213
	n=1								
Poisson Oranı "z" nin fonksiyonu	59,17	147,92	147,92	236,66	295,83	295,83	384,58	384,58	532,50
Poisson Oranı sabit=0.3	59,10	147,75	147,75	236,40	295,49	295,49	384,14	384,14	531,89
Hata (%)	-0,113	-0,115	-0,115	-0,110	-0,115	-0,115	-0,114	-0,114	-0,115
	n=2								
Poisson Oranı "z" nin fonksiyonu	57,39	143,48	143,48	229,57	286,96	286,96	373,05	373,05	516,53
Poisson Oranı sabit=0.3	57,39	143,46	143,46	229,54	286,92	286,92	373,00	373,00	516,46
Hata (%)	-0,012	-0,014	-0,014	-0,013	-0,014	-0,014	-0,013	-0,013	-0,014
	n=8								
Poisson Oranı "z" nin fonksiyonu	53,75	134,37	134,37	215,00	268,75	268,75	349,37	349,37	483,74
Poisson Oranı sabit=0.3	53,88	134,69	134,69	215,50	269,38	269,38	350,19	350,19	484,88
Hata (%)	0,236	0,238	0,238	0,233	0,234	0,234	0,235	0,235	0,236

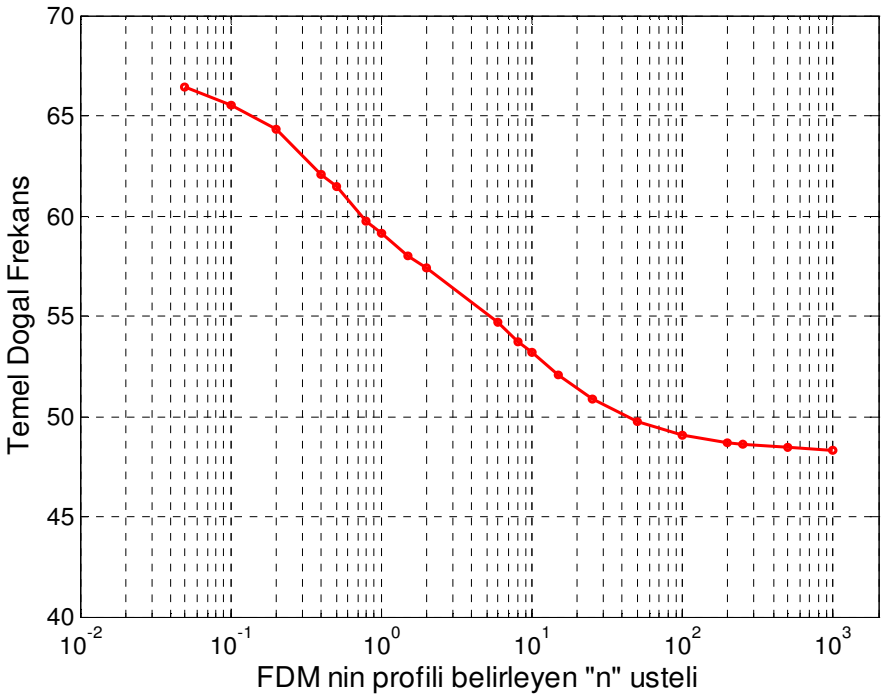
Tablo 3.7: Young Modülü (E) nin; kalınlık (z) nin fonksiyonu olarak değişmesi ve sabit olması durumunda doğal frekanslardaki değişim.

mod (m,n)	1 (1,1)	2 (1,2)	3 (2,1)	4 (2,2)	5 (1,3)	6 (3,1)	7 (2,3)	8 (3,2)	9 (3,3)
	n=0.2								
Young Modülü "z" nin fonksiyonu	64,32	160,81	160,81	257,30	321,62	321,62	418,11	418,11	578,92
Young Modülü sabit	58,30	145,75	145,75	233,21	291,51	291,51	378,96	378,96	524,71
Hata(%)	-9,362	-9,365	-9,365	-9,363	-9,362	-9,362	-9,364	-9,364	-9,364
	n=0.5								
Young Modülü "z" nin fonksiyonu	61,4	153,6	153,6	245,7	307,2	307,2	399,3	399,3	552,9
Young Modülü sabit	58,7	146,7	146,7	234,7	293,4	293,4	381,4	381,4	528,1
Hata(%)	-4,482	-4,486	-4,486	-4,481	-4,480	-4,480	-4,483	-4,483	-4,482
	n=1								
Young Modülü "z" nin fonksiyonu	59,2	147,9	147,9	236,7	295,8	295,8	384,6	384,6	532,5
Young Modülü sabit	59,1	147,7	147,7	236,4	295,5	295,5	384,1	384,1	531,8
Hata(%)	-0,127	-0,128	-0,128	-0,123	-0,125	-0,125	-0,127	-0,127	-0,128
	n=2								
Young Modülü "z" nin fonksiyonu	57,4	143,5	143,5	229,6	287,0	287,0	373,1	373,1	516,5
Young Modülü sabit	59,5	148,8	148,8	238,1	297,7	297,7	387,0	387,0	535,8
Hata(%)	3,736	3,736	3,736	3,733	3,736	3,736	3,734	3,734	3,735
	n=8								
Young Modülü "z" nin fonksiyonu	53,7	134,4	134,4	215,0	268,8	268,8	349,4	349,4	483,7
Young Modülü sabit	60,1	150,3	150,3	240,5	300,6	300,6	390,8	390,8	541,1
Hata (%)	11,848	11,848	11,848	11,847	11,844	11,844	11,847	11,847	11,847

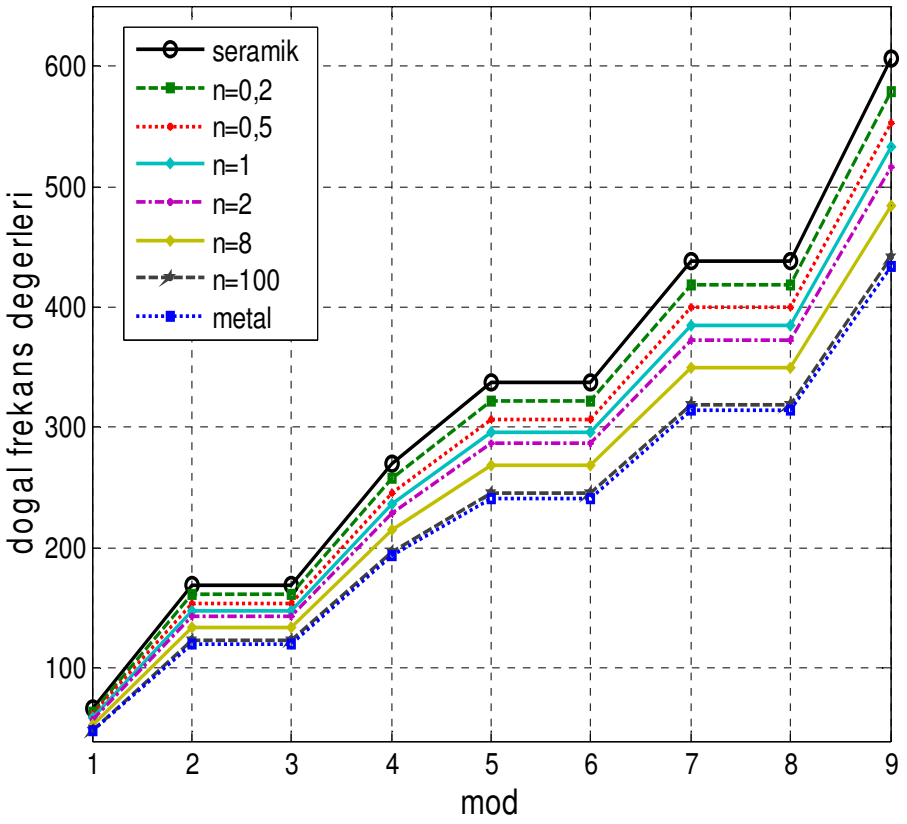
FDM plağın doğal frekanslarını ve yer değiştirmelerini hesaplarken Young Modülü (E) yi ve Poisson Oranı (ν) nı FDM plağı oluşturan malzemelerin özellikleri ve kalınlık boyunca malzeme değişim profilini gösteren "n" değerlerinin fonksiyonu olarak aldığımızda, integral alma işlemi karmaşık bir hal alır. Kalınlık boyunca malzeme değişim profilini gösteren "n" değeri bir değerinden uzaklaştıkça (arttıkça veya azaldıkça) integral işlemlerinin karmaşıklığı artacaktır. O yüzden bu iki değerden uygun olan birini sabit kabul edebilirsek hesaplamalarımız karmaşıklıktan kurtulur. Görüldüğü gibi Tablo 3.6 da Poisson oranı (ν) nin FDM bir plak için malzeme dağılım oranları ve malzeme özellikleri göz önünde bulundurularak değişimi ile Poisson Oranının sabit kabul edilerek hesaplanan doğal frekanslar arasındaki fark ve hata yüzde olarak gözükmektedir. Tablo 3.6' dan da görüldüğü üzere Poisson Oranını sabit kabul edilmesi en fazla % 0,35 oranında bir hata ile

karşılaşmamıza sebep olur. Bu yüzden çalışmalarımızda Young Modülü (E) yi kalınlığın bir fonksiyonu alırken; Poisson Oranı (ν) nı FDM plağı oluşturan üst bölümdeki seramik ve alt bölümdeki metalin Poisson Oranlarının ortalaması olarak sabit kabul edebiliriz [26].

Tablo 3.7 de görüldüğü gibi Young Modülü (E)' nün FDM' den oluşan bir plak için malzeme dağılım oranları ve malzeme özellikleri göz önünde bulundurularak değişimi ile Young Modülünün sabit kabul edilerek hesaplanan doğal frekanslar arasındaki farkın n=1 (FDM plağı oluşturan malzemeler doğrusal olarak değişmekte) olduğu değerde çok küçük olduğu, fakat n=1 değerinden daha küçük ve daha yüksek değerlerde bu hatanın çok arttığı görülmektedir. Bu yüzden Young Modülü'nü kalınlık boyunca FDM plağı oluşturan malzemelerin Young Modüllerini ve kalınlık boyunca malzeme değişim profilini gösteren "n" değerlerinin fonksiyonu olarak hesaplamak gerekir.



Şekil 3.11: Fonksiyonel Derecelendirilmiş bir plağın değişen "n" üstelleriyle temel doğal frekansının değişimi.



Şekil 3.12: Fonksiyonel Derecelendirilmiş bir plağın değişen "n" üstelleriyle doğal frekansının değişimi.

Şekil 3.11 de Fonksiyonel Derecelendirilmiş bir plağın temel doğal frekanslarının; kalınlık boyunca malzeme değişim profilini gösteren "n" değerinin değişimi ile ne kadar ve hangi yönde bir değişim gösterdiği görülmektedir. Şekil 3.12 de ise FDM kare bir plağın frekanslarının; kalınlık boyunca malzeme değişim profilini gösteren "n" değerinin değişimi ile nasıl değiştiği gözükmektedir. Bu iki şekilden de gözüktüğü üzere, kalınlık boyunca malzeme değişim profilini gösteren "n" değerinin artması ile FDM' den oluşan plağın seramik özellikleri azalmakta, metal özellikler ön plana çıkmaktadır. Bu yüzden malzemenin yapısına daha çok metal nüfuz ettiği için malzeme katılığı azalacaktır. Dolayısıyla kalınlık boyunca malzeme değişim profilini gösteren "n" değerinin artmasıyla, FDM' den oluşan plağın doğal frekans değerleri azalır.

3.4 Basit Mesnetli Bir Plağın Statik Analizi

(2.3.15) numaralı denklemdeki zamana bağlı ifadeleri sıfıra eşitlersek ve dikdörtgen plak boyunca sabit $Q_{mn} = q$ yükü uyguladığımızı düşünürsek;

$$\begin{bmatrix} S_{11}S_{12}S_{13} \\ S_{21}S_{22}S_{23} \\ S_{31}S_{32}S_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(3.4.1)}$$

$$S_{11} = A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2 \qquad S_{12} = (A_{12} + A_{66})\alpha\beta \qquad S_{13} = -\left(B_{11}\alpha^3 + B_{12}\alpha\beta^2 + 2B_{66}\alpha\beta^2\right)$$

$$S_{21} = (A_{21} + A_{66})\alpha\beta \qquad S_{22} = A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2 \qquad S_{23} = -\left(B_{22}\beta^3 + B_{21}\alpha^2\beta + 2B_{66}\alpha^2\beta\right)$$

$$S_{31} = -\left(B_{11}\alpha^3 + B_{12}\alpha\beta^2 + 2B_{66}\alpha\beta^2\right) \qquad S_{32} = -\left(B_{22}\beta^3 + B_{21}\alpha^2\beta + 2B_{66}\alpha^2\beta\right)$$

$$S_{33} = D_{11}\alpha^4 + D_{12}\alpha^2\beta^2 + 4D_{66}\alpha^2\beta^2 + D_{21}\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4$$

Yukarıdaki denklemi çözdüğümüzde ortaya çıkan U_{mn} , V_{mn} ve W_{mn} değerlerini verecek. Biz bu U_{mn} , V_{mn} ve W_{mn} değerlerini kullanarak basit mesnet sınır şartlarımıza uygun olarak belirlediğimiz seri açılımlar (2.3.26) içine yerleştirdiğimizde, $x = a/2,\ y = b/2$ plağımızın orta noktasındaki yer değiştirmesini, yani w_{maks}' ı bulabiliriz.

$$u_0(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} U_{mn}(t)\cos\alpha x \sin\beta y$$

$$v_0(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} V_{mn}(t)\sin\alpha x \cos\beta y \qquad \textbf{(3.4.2)}$$

$$w_0(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} W_{mn}(t)\sin\alpha x \sin\beta y \qquad \alpha_m = \frac{m\pi}{a} \text{ ve } \beta_n = \frac{n\pi}{b}$$

Dikdörtgen plak ($a = b = 0{,}2\,m$, $h = 0{,}02\,m$) boyunca $Q_{mn} = q = 100.000\,N/m^2$ sabit yükünü plağa uyguladığımızda plağın orta noktasının vereceği cevap değişik boyutlar (a, b); değişik kalınlık değerleri (h) ve kalınlık boyunca malzeme değişim profilini gösteren üs n' ye bağlı olarak değişmektedir. Plağın verdiği cevaplar Tablo 3.6' da gösterilmiştir.

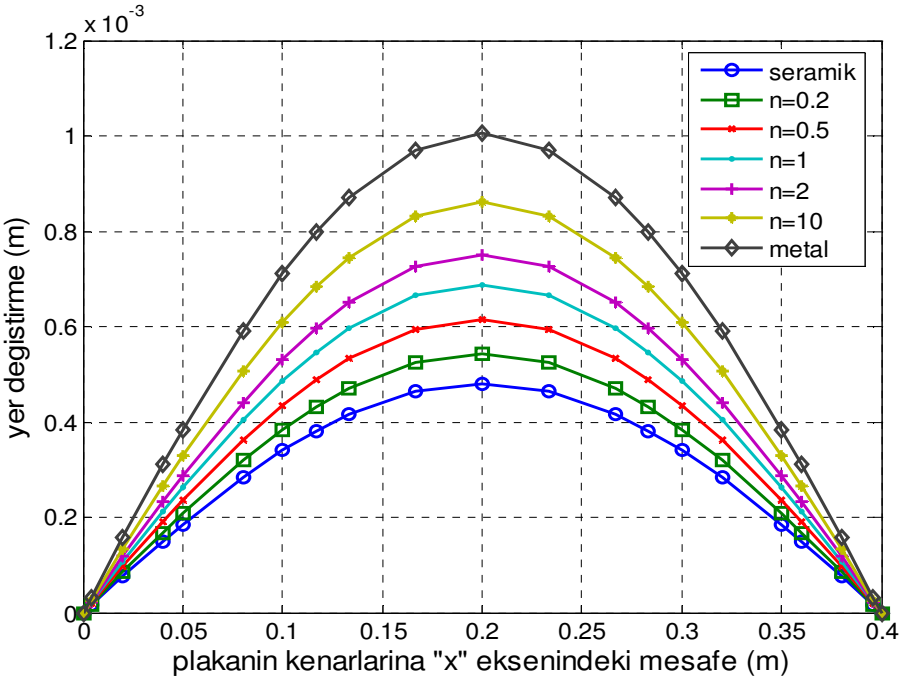
Tablo 3.8: Kalınlık boyunca malzeme değişim profilini gösteren "n" değerleri ve değişik boyutlarda bir plağa sabit bir yük uygulanması durumunda $x = a/2,\ y = b/2$ noktasındaki "z" yönündeki deplasmanlar.

deplasman(z)	n=0.4	n=0.5	n=1	n=2
	h=a/10			
a=b	4,6254E-06	4,7942E-06	5,3810E-06	5,8840E-06
a=2b/3	8,8675E-06	9,1912E-06	1,0316E-05	1,1281E-05
a=b/2	1,1841E-05	1,2273E-05	1,3775E-05	1,5063E-05
a=b/4	1,6389E-05	1,6987E-05	1,9066E-05	2,0849E-05
	h=a/20			
a=b	3,7004E-05	3,8353E-05	4,3048E-05	4,7072E-05
a=2b/3	7,0941E-05	7,3530E-05	8,2530E-05	9,0245E-05
a=b/2	9,4729E-05	9,8185E-05	1,1020E-04	1,2051E-04
a=b/4	1,3111E-04	1,3590E-04	1,5253E-04	1,6679E-04
	h=a/40			
a=b	5,7818E-04	5,9927E-04	6,7262E-04	7,3551E-04
a=2b/3	1,1085E-03	1,1489E-03	1,2895E-03	1,4101E-03
a=b/2	1,4801E-03	1,5341E-03	1,7219E-03	1,7219E-03
a=b/4	2,0487E-03	2,1234E-03	2,3833E-03	2,6061E-03

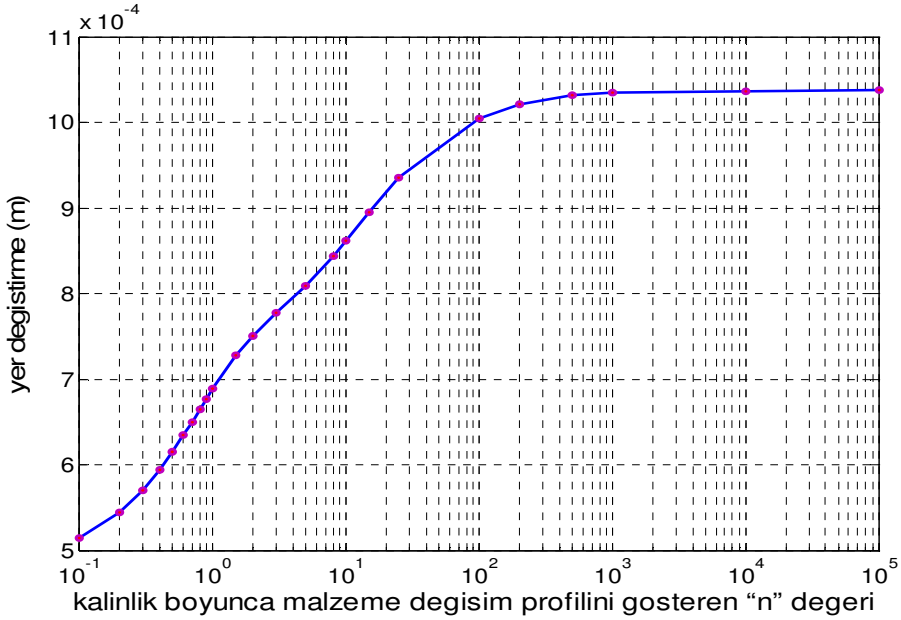
Değişen boyutlarda, değişen kalınlıklarda ve değişen malzeme değişim profilini gösteren "n" katsayısı ile Fonksiyonel Derecelenmiş bir plağın x=a/2, y=b/2 noktasındaki yer değiştirmenin (w_{maks}) hangi oranlarda ve hangi miktarlarda değiştikleri incelendiğinde "n" katsayısı arttıkça malzemedeki metal yoğunluğunun artacağından, malzemenin katılığının azalacağını ve dolayısıyla "z" yönündeki yer değiştirmenin artacağı gözlenmektedir. Aynı şekilde malzeme kalınlığı azaldıkça yer değiştirmenin artması beklediğimiz bir sonuçtur. "x" ve "y" yönündeki yer değiştirmelere baktığımızda "z" yönündeki yer değiştirmelerden çok küçük olduğunu görürüz. Aynı şekilde malzeme değişim profilini gösteren "n" üstelinin artışıyla malzemeye daha çok metalin nüfuz etmesinden kaynaklanan malzemenin katılığının azaldığı ve dolayısıyla "x" ve "y" yönündeki yer değiştirmelerin çok düşük olmasıyla birlikte artan "n" katsayısıyla artacağı görülmektedir.

Düzgün olarak ($q=10^5$ N) yüke maruz kalmış bir FDM plağın basit mesnet sınır koşullarında "x" ekseninde plak kenarlarından olan mesafeye göre yer değiştirmelerin değişimi Şekil 3.13 te verildiği gibidir. Plağın orta noktasında yer değiştirmenin en yüksek düzeyde olduğunu görebiliriz. Ayrıca malzeme değişim profilini gösteren "n" üstelinin artmasıyla; plağın her noktasında "z" yönünde yer değiştirmesinin artacağı görülmüştür. Artan "n" üsteli ile malzemeye daha çok nüfuz eden metal; malzemenin katılığını azaltacağından yer değiştirme artmaktadır. Plağın

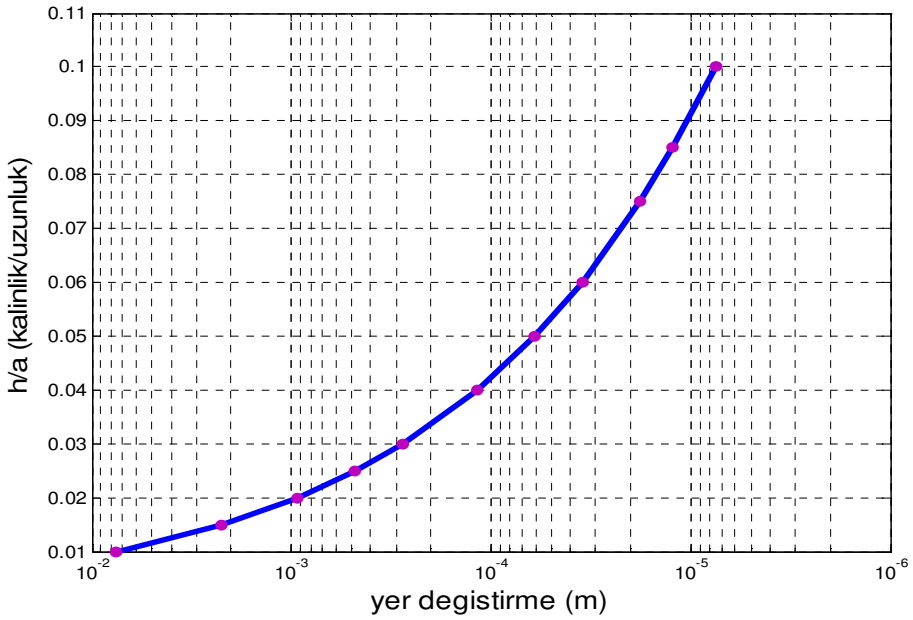
“z” yönündeki deplasmanlarının “n” üsteliyle değişimin Şekil 3.14 te görebiliyoruz. “n” değerinin artmasıyla malzemenin özellikleri metal bileşeninin özelliklerine daha çok benzeyeceğinden “z” yönündeki deplasmanlar “n” üstelinin artmasıyla artar. Şekil 3.15 te FDM bir plağın kalınlığının (h/a) değişimiyle “z” yönündeki deplasmanlarının değişimi logaritmik grafik olarak verilmiştir. Beklenildiği üzere malzeme kalınlığında artış oldukça yer değişme azalacaktır. Plağa uygulanan yükün değişimiyle “z” yönündeki deplasmanlarının değişimi Şekil 3.16 de gösterilmiştir. Bu şekilden de görüldüğü üzere plağa uygulanan yük arttıkça, yer değiştirme de yükle doğru orantılı olarak artar. Tablo 3.1 de belirtmiş olduğumuz üç değişik tipte malzemeye uygulanan eşit yük ve aynı sınır koşulları durumunda bu üç değişik tipte plağın “z” yönündeki yer değiştirmelerinin, “x” ekseninde plak kenarına olan mesafesine göre değişimi Şekil 3.17 de verilmiştir. Bu şekilden de görüleceği üzere malzeme özellikleri değiştikçe plakların aynı yüke vereceği yer değiştirmelerde katılıklarıyla ters orantılı olarak değişmektedir.



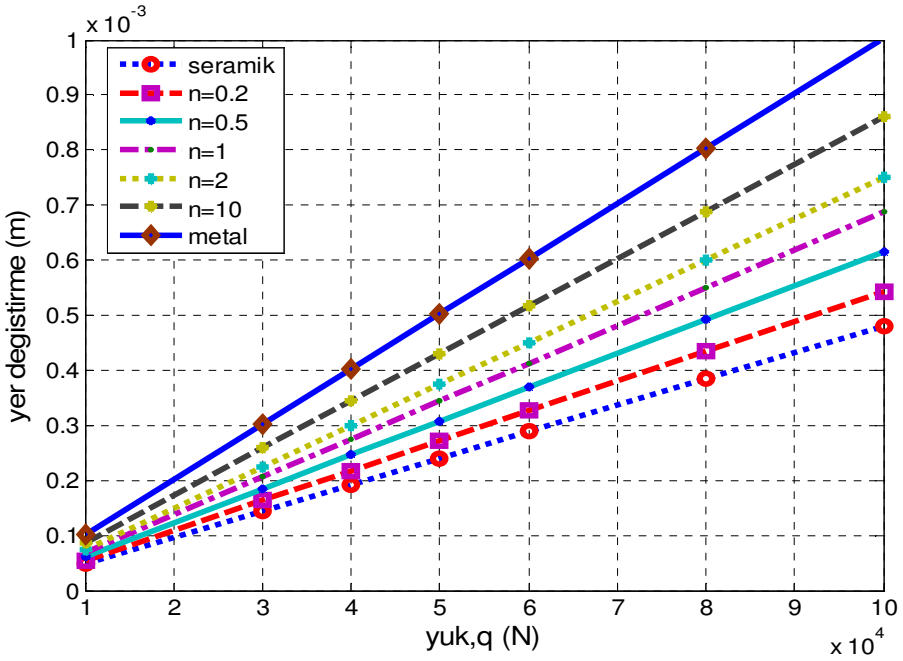
Şekil 3.13: Fonksiyonel Derecelendirilmiş bir plağın “z” yönündeki deplasmanlarının; kalınlık boyunca malzeme değişim profilini gösteren “n” değerine ve “x” ekseninde plak kenarına olan mesafesine göre değişimi.



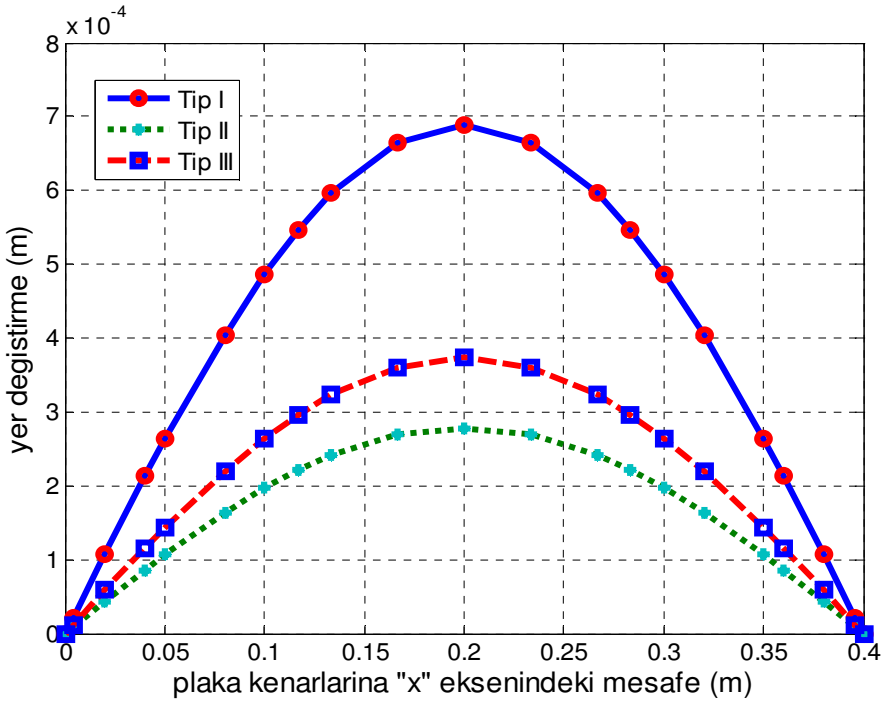
Şekil 3.14: Fonksiyonel Derecelendirilmiş bir plağın "z" yönündeki deplasmanlarının; kalınlık boyunca malzeme değişim profilini gösteren "n" değeriyle değişimi.



Şekil 3.15: Fonksiyonel Derecelendirilmiş bir plağın kalınlığının (h/a) değişimiyle "z" yönündeki deplasmanlarının değişimi (n=1).



Şekil 3.16: Fonksiyonel Derecelendirilmiş bir plağa uygulanan yükün değişimiyle "z" yönündeki deplasmanlarının değişimi.



Şekil 3.17: Fonksiyonel Derecelendirilmiş üç değişik tip plağın "z" yönündeki deplasmanlarının, "x" ekseninde plak kenarına olan mesafesine göre değişimi.

3.5 Basit Mesnetli Bir Plağın Dinamik Analizi:

(2.3.15) numaralı denklemdeki atalet momenti I_0 haricinde ki ataletleri (I_1 ve I_2) ihmal edersek ve dikdörtgen plak gelen yükü zamanla değişen $Q_{mn} = q_0 \sin(\Omega t)$ yükü uyguladığımızı düşünürsek aşağıdaki matrisi elde ederiz.

Ω : zorlanma frekansı

$$\begin{bmatrix} S_{11}S_{12}S_{13} \\ S_{21}S_{22}S_{23} \\ S_{31}S_{32}S_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{11}0\ 0 \\ 0\ m_{22}0 \\ 0\ 0\ m_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_{mn} \\ \ddot{V}_{mn} \\ \ddot{W}_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_0 \sin(\Omega t) \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(3.5.1)}$$

Bu matriste verilen ifadelerin değerleri aşağıdaki gibidir.

$$m_{11} = I_0 \qquad m_{22} = I_0 \qquad m_{33} = I_0$$

$$S_{11} = A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2 \qquad S_{12} = (A_{12} + A_{66})\alpha\beta \qquad S_{13} = -\left(B_{11}\alpha^3 + B_{12}\alpha\beta^2 + 2B_{66}\alpha\beta^2\right)$$

$$S_{21} = (A_{21} + A_{66})\alpha\beta \qquad S_{22} = A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2 \qquad S_{23} = -\left(B_{22}\beta^3 + B_{21}\alpha^2\beta + 2B_{66}\alpha^2\beta\right)$$

$$S_{31} = -\left(B_{11}\alpha^3 + B_{12}\alpha\beta^2 + 2B_{66}\alpha\beta^2\right) \qquad S_{32} = -\left(B_{22}\beta^3 + B_{21}\alpha^2\beta + 2B_{66}\alpha^2\beta\right)$$

$$S_{33} = D_{11}\alpha^4 + D_{12}\alpha^2\beta^2 + 4D_{66}\alpha^2\beta^2 + D_{21}\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4$$

Dikdörtgen plağa gelen ve zamanla değişen $Q_{mn} = q_0 \sin(\Omega t)$ yükünün plakta sebep olduğu yer değiştirmenin zamanın bir fonksiyonu olarak bulunulabilmesi için (3.5.1) denklemini, MATLAB programında çözülebilir forma getirilmesi gerekiyor. Yani üç adet ikinci dereceden diferansiyel denklemleri altı adet birinci dereceden diferansiyel denkleme çevirirsek problemi MATLAB programına aktarma şansı bulabiliriz. Daha sonra elde edilen matris formundaki hareket denklemleri Runge-Kutta iterasyon yöntemlerinden biri kullanılarak ve MATLAB bilgisayar programı yardımıyla plağın uygulanacak yüke vereceği cevap bulunabilir.

İkinci dereceden diferansiyel denklemi, birinci dereceden bir denkleme çevirmek için Runge-Kutta iterasyon yöntemini uygulayabiliriz. Daha önce elde ettiğimiz ikinci dereceden üç diferansiyel denklemi, birinci dereceden altı diferansiyel denkleme

dönüştürmeliyiz. Bunun için (3.5.2) numaralı denklemde verilen dönüşümleri yapmalıyız.

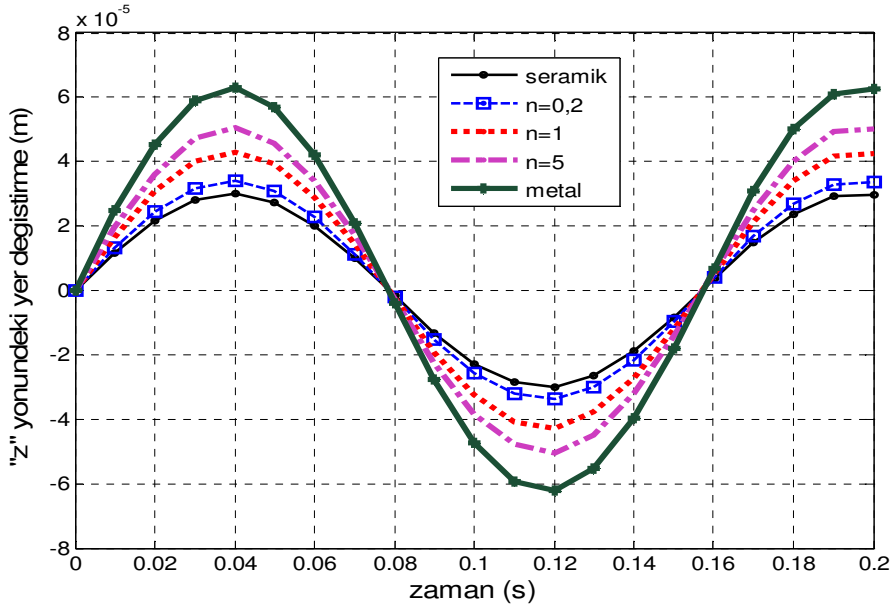
$$\begin{aligned} \dot{U}_{mn} &= A & \dot{A} &= \ddot{U}_{mn} \\ \dot{V}_{mn} &= B & \dot{B} &= \ddot{V}_{mn} \\ \dot{W}_{mn} &= C & \dot{C} &= \ddot{W}_{mn} \end{aligned} \qquad \textbf{(3.5.2)}$$

(3.5.2) denklemini (3.5.1) denkleminin içerisinde kullanırsak, ortaya çıkan (6x6) lık matris Runge-Kutta iterasyon yöntemini uygulayabileceğimiz bir denkleme dönüşebilir.

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{mn} \\ \dot{V}_{mn} \\ \dot{W}_{mn} \\ \dot{A} \\ \dot{B} \\ \dot{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{S_{11}}{m_{11}} & -\frac{S_{12}}{m_{11}} & -\frac{S_{13}}{m_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{S_{21}}{m_{22}} & -\frac{S_{22}}{m_{22}} & -\frac{S_{23}}{m_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{S_{31}}{m_{33}} & -\frac{S_{32}}{m_{33}} & -\frac{S_{33}}{m_{33}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ A \\ B \\ C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_0 \frac{\sin(\omega t)}{m_{11}} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.5.3)}$$

Denklem (3.5.3) ü dördüncü dereceden Runge-Kutta iterasyon yöntemiyle MATLAB bilgisayar programını kullanarak önceden belirlediğimiz t=0 anındaki basit mesnet bir plağın sınır koşullarını kullanarak belirleyebiliriz. t=0 anındaki sınır koşullarını şu şekilde belirleyebiliriz:

$$\begin{aligned} U_{mn\,t=0} &= 0 & \dot{U}_{mn\,t=0} &= A_{t=0} = 0 \\ V_{mn\,t=0} &= 0 & \dot{V}_{mn\,t=0} &= B_{t=0} = 0 \\ W_{mn\,t=0} &= 0 & \dot{W}_{mn\,t=0} &= C_{t=0} = 0 \end{aligned}$$



Şekil 3.18: Fonksiyonel Derecelendirilmiş plağa uygulanan zamana bağlı yük sonucu "z" yönündeki deplasmanların "n" üsteliyle değişimi.

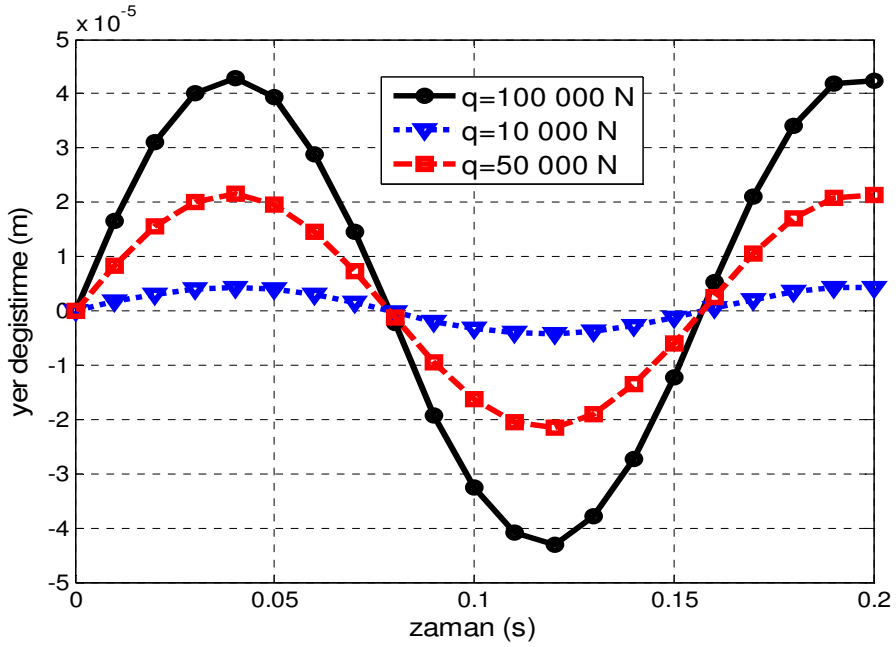
Fonksiyonel Derecelendirilmiş bir plağa zamana bağlı yük uygulandığında plağın verdiği yer değiştirmeler Şekil 3.17' de verilmiştir. 3.18 şeklinde de görüldüğü gibi statik analizde ortaya çıkan yer değiştirmenin "n" üsteline bağlı olarak değişmesi sonucu, burada da çıkmıştır. Bu değişim yine statik analizdeki gibi seramik malzemeden metal malzemeye doğru gidildikçe yer değiştirmenin miktarı artmaktadır.

Tablo 3.4'te verilen a=b=0,2 m. ve h=0,01 m. boyutlarında bir Fonksiyonel Derecelendirilmiş bir plağın basit mesnet sınır şartlarında doğal frekansları aşağıda Tablo 3.9' da kısmi olarak tekrar verilmiştir.

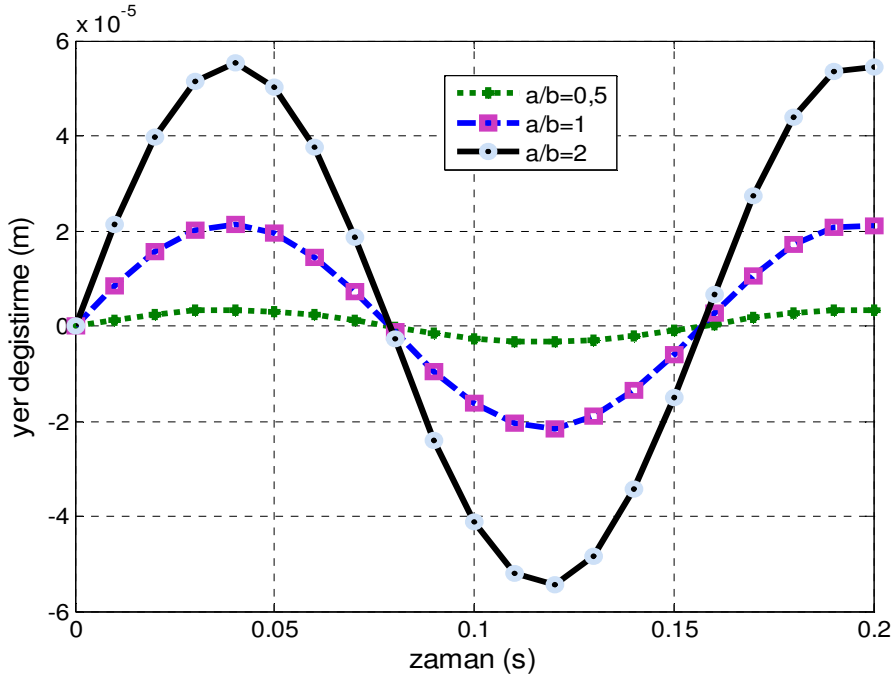
Tablo 3.9: Kalınlık boyunca malzeme değişim profilini gösteren değişik "n=1" değerinde iken doğal frekanslar.

mod(m,n)	1 (1,1)	2 (1,2)	3 (2,1)	4 (2,2)	5 (1,3)	6 (3,1)	7 (2,3)	8 (3,2)	9 (3,3)
doğal frekans	14,792	36,979	36,979	59,166	73,958	73,958	96,145	96,145	133,12

Şekil 3.19' da FDM' den yapılmış bir plağa zamana bağlı yük uygulandığında plakta meydana gelen yer değiştirmelerin uygulanan yükün değişimiyle nasıl değiştiği görülmektedir.



Şekil 3.19: Fonksiyonel Derecelendirilmiş plağa uygulanan zamana bağlı yük sonucu "z" yönündeki deplasmanların "q" yüküyle değişimi.



Şekil 3.20: Fonksiyonel Derecelendirilmiş plağa uygulanan zamana bağlı yük sonucu "z" yönündeki deplasmanların "a/b" (aspect ratio) ile değişimi.

Şekil 3.20’ de FDM’ den yapılmış bir plağa zamana bağlı yük uygulandığında plağın verdiği yer değiştirmeler; plak boyutunun değişimiyle görülmektedir. Runge-Kutta iterasyon yöntemlerinden biri kullanılarak MATLAB programıyla hesaplanan yer değiştirmeler beklenen değerlerdir. Fonksiyonel Derecelendirilmiş bir plağa zamana bağlı yük uygulandığında plağın verdiği yer değiştirmelerden de görüldüğü gibi statik analizde ortaya çıkan yer değiştirmenin “n” üsteline bağlı olarak değişmesi sonucu, burada da çıkmıştır. Bu değişim statik analizdeki gibi seramik malzemeden metal malzemeye doğru gidildikçe yer değiştirmenin miktarı artmaktadır.

4. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler 1980'li yılların başlarında ortaya çıkan bir malzeme olmasına rağmen son yıllarda üzerinde yoğun çalışmaların yapıldığı bir kompozit malzeme türüdür. Fonksiyonel Derecelendirilmiş malzemelerin daha sık kullanıldığı ısıl bariyer kaplamaları, malzemenin çalışma sıcaklığını yükselterek sistemin verimini arttırmak amacı ile kullanılır. Genelde metal alt tabakanın üzerine homojen seramik kaplama şeklinde uygulanmaktadır. Bu tür kaplamalarda çalışma esnasında görülen en önemli problem, metal alt tabaka ile seramik kaplamanın ısıl genleşme sabitlerinin farklı olması nedeniyle ortaya çıkan büyük ısıl gerilmelerdir. Bu gerilmeler sonucunda sistemde çatlaklar ve metal/seramik ara yüzünde ayrılmalar görülmektedir. Söz konusu çatlakları ve ayrılmaları önlemek için fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerden yapılmış kaplamalar geliştirilmiştir. Bu tür kaplamalarda malzeme özellikleri kaplama kalınlığı boyunca fonksiyonel olarak değiştirilmekte ve bu sayede kaplama ile alt tabaka arasındaki uyumsuzluk ve ısıl gerilmeler en düşük dereceye indirilebilmektedir. Bu çalışmada Zirkon ve Alüminyum malzemelerinden oluşan Fonksiyonel Derecelenmiş bir plağın Navier çözümleri Klasik Plak Teorisine göre yapılarak hareket denklemleri çıkartılmış, değişik birleşim oranlarında ve değişik boyutlarında serbest titreşim analizi yapılarak doğal frekansları bulunmuş. Daha sonra belirli bir "q" yükünde verdiği cevaplar bulunmuş. Alınan cevaplar arasındaki bağlantılar incelenmiştir. Kalınlık boyunca malzeme değişim profilini belirleyen üs "n" in artmasıyla temel doğal frekans değerinin düştüğü görülmüştür. Bunun sebebi metalin kalınlık boyunca kullanımının artmasından dolayı malzeme sertliğinin azalmasıdır. Yine "n" üstelinin değişimiyle malzeme özelliklerinin (Yoğunluk, Poisson Oranı ve Young Modülü) değiştiği görülmektedir.

Değişen boyutlarda, değişen kalınlıklarda ve değişen malzeme değişim profilini gösteren "n" katsayısı ile Fonksiyonel Derecelenmiş bir plağın x=a/2, y=b/2

noktasındaki yer değiştirmenin (w_{maks}) hangi oranlarda ve hangi miktarlarda değiştikleri incelendiğinde "n" katsayısı arttıkça malzemedeki metal yoğunluğunun artacağından, malzemenin katılığının azalacağını ve dolayısıyla "z" yönündeki yer değiştirmenin artacağı gözlenmektedir. Aynı şekilde malzeme kalınlığı azaldıkça yer değiştirmenin artması beklediğimiz bir sonuçtur. "x" ve "y" yönündeki yer değiştirmelere baktığımızda "z" yönündeki yer değiştirmelerden çok küçük olduğunu görürüz. Aynı şekilde malzeme değişim profilini gösteren "n" üstelinin artışıyla malzemeye daha çok metalin nüfuz etmesinden kaynaklanan malzemenin katılığının azaldığı ve dolayısıyla "x" ve "y" yönündeki yer değiştirmelerin artan "n" katsayısıyla artacağı görülmektedir.

Dikdörtgen plaka gelen ve zamanla değişen $Q_{mn}=q_0$ Sin (Ωt) yükünün plakta sebep olduğu yer değiştirmenin zamanın bir fonksiyonu olarak bulunulabilmesi için hareket denklemleri Runge-Kutta iterasyon yöntemlerinden biriyle MATLAB bilgisayar programı kullanılmıştır. Fonksiyonel Derecelendirilmiş bir plağa zamana bağlı yük uygulandığında plağın verdiği yer değiştirmelerden de görüldüğü gibi statik analizde ortaya çıkan yer değiştirmenin "n" üsteline bağlı olarak değişmesi sonucu burada da çıkmıştır. Bu değişim yine statik analizdeki gibi seramik malzemeden metal malzemeye doğru gidildikçe yer değiştirmenin miktarı artmaktadır.

Fonksiyonel Derecelendirilmiş malzemenin kalınlık boyunca malzeme profilini belirleyerek istediğimiz özelliklerde plak elde edebiliriz. İhtiyacımız olan malzeme özelliklerine göre "n" üstelini belirleyebiliriz.

KAYNAKLAR

[1] **Petit, F.S. and Goward., G.W.,** 1983**.** Coatings for High Temperature Applications, *Applied Science Publishers*, London.

[2] **Komanduri, R. and Jahanmir, S.,** 1994. Friction and Wear of Ceramics*, Marcel Dekker Inc.*

[3] **Alagöz, H., Gülgeç, M. ve Konez, A.,** 2004. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler ve Kullanım Alanları, Ankara TÜRKİYE.

[4] **Hirano, T. and Yamada, T.,** 1988. Multi-Paradigm Expert System Architecture Based Upon the Inverse Design Concept, *International Workshop on Artificial Intelligence for Industrial Applications*, Hitachi, Japan.

[5] **M, Niino. and S, Maeda.,** 1990. Recent Development Status of Functionally Gradient Materials*, I.S.I.J. International* **30** 699-703.

[6] http://fgmdb.nal.go.jp/e_whatsfgm.html

[7] **Yıldırım, B. ve Dimitoka, K**., 2003. Katmalı ve Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemelerden Yapılmış Termal Bariyer Kaplamalardaki Termal Gerilimlerin Sonlu Elemanlar Metodu ile Hesaplanması, *Mühendis ve Makina*, **525**, s.34-42.

[8] **Dröschel, M., Hoffmann, M.J., Oberacker, R., Both, H., Schaller, W., Yang, Y.Y., and Munz, D.,** 2000. SiC-Ceramics with Tailored Porosity Gradients for Combustion Chambers, *New Perspectives*, **175,** *Switzerland*; pp. 149-162.

[9] **Koizumi, M.,** 1996. FGM Activities in Japan, *Composites Part B*, Hitachi, Japan.

[10] **Noda, N.,** 1991. Thermal stresses in materials with temperature-dependent properties.*Applied Mechanical Review,* **44**, 393-397.

[11] **Tanigawa Y.** 1995. Some basic thermoelastic problems for nonhomogeneous structural materials. *Applied Mechanical Review,* **48,** 377-389.

[12] **Fukui Y., Yamanaka Y., Wakashima K.** 1993. The stress and strains in a thick-walled tube of functionally graded materials under uniform thermal loading. subjected to internal pressure, *International Journal of Japan Society of Mechanical Engineers Series A,* **36,** 156-162.

[13] **Fuchiyama T., Noda N., Tsuji T., Obata Y.,** Analysis of thermal stress and stress intensity factor of functionally gradient materials. *Ceramic Transactions, Functionally Gradient Materials,* **34,** 425-432.

[14] **Takeuti Y., Furukawa T.,** Some consideration on thermal shock problems in a plate. *Journal of Applied Mechanics,* **48,** 113-118.

[15] **Takeuti Y., Tanigawa Y.,** On a new method for axisymmetric coupled thermoelastic problems. *Journal of Thermal Stresses,* **4,** 461-478.

[16] **Reddy JN., Chin CD.,** Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates. *Journal of Thermal Stresses,* **26(1),** 593-626.

[17] **Praveen GN., Reddy JN.,** Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates. *Journal of Solid and Structures,* **35,** 4457-4476.

[18] **Shames, I.H. and Dym, C.L.,** 1985. Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics. McGraw-Hill, New York.

[19] **Heidary, F. and Eslami M.R.,** 2006. Piezo-control of forced vibrations of a thermoelastic composite plate, *Composite Structures* **74**, pp. 99-105

[20] **Haddadpour, H., Navazi, H.M. and Shadmehri, F.**, 2006. Nonlinear oscillations of a fluttering functionally graded plate, *Composite Structures*, Tehran, Iran

[21] **Reddy, J.N.,** 2000. Analysis of functionally graded plates, *International Journal For Numerical Methos in Engineering*, USA, **47**, 663-684

[22] **Reddy, J.N.,** 2004. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis, *CRC Press*, Florida, USA

[23] **Berthelot, J.M.,** Composite Materials Mechanical Behavior and Structural Analysis.

[24] **Yang, J. and Hui-Shen, Shen.,** 2003. Non-linear analysis of functionally graded plates under transverse and in-plane loads. *International Journal of Non-Linear Mechanics,* China, **38,** pp. 437-482

[25] **Reddy, B.A. and Ray, M.C.,** 2004. Optimal Control of Functionally Graded Plate with Piezoelectric Sensor and PRFC Actuator Layers, *Indian Institude of Technology*, Kharagpur.

[26] **Delale, F., Erdoğan, F.,** 1983. The Crack Problem for a Nonhomogeneous Plane, *ASME Journal of Applied Mechanics,* **50**, 609-614

ÖZGEÇMİŞ

Ozan ÖZARSLAN, 1981 yılında Ankara'da doğmuştur. Orta öğretimini Kuleli Askeri Lisesi İstanbul'da tamamlamış, 2004 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi, Uçak ve Uzay Bilimleri Fakültesinden Uçak mühendisi olarak mezun olmuştur. Halen 2. HİBM K.lığında Ulaştırma Uçakları Koordinatörü olarak çalışmaktadır.