İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

UZAY-ZAMAN KODLARDA HIZLI YÖNTEMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Müh. Sinan KAHRAMAN

Anabilim Dalı : ELEKTRONİK ve HABERLEŞME MÜHENDİSLİĞİ

Programı : TELEKOMÜNİKASYON MÜHENDİSLİĞİ

OCAK 2007

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

UZAY-ZAMAN KODLARDA HIZLI YÖNTEMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Müh. Sinan KAHRAMAN

(504031330)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 25 Aralık 2006

Tezin Savunulduğu Tarih: 25 Ocak 2007

Tez Danışmanı: Doç.Dr. M.Ertuğrul ÇELEBİ

Diğer Jüri Üyeleri: Prof.Dr. Ümit AYGÖLÜ

Prof.Dr. Serhat ŞEKER

OCAK 2007

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim boyunca bana yol gösteren, içten ve sabırlı desteğini benden hiç esirgemeyen hocam Sayın Doç. Dr. Ertuğrul ÇELEBİ'ye teşekkürü borç bilirim.

Aralık 2006 **Sinan KAHRAMAN**

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR vi

TABLO LİSTESİ vii

ŞEKİL LİSTESİ viii

SEMBOL LİSTESİ x

ÖZET xi

SUMMARY xii

1. GİRİŞ 1

2. ÇOK YOLLU SÖNÜMLEMELİ KANAL VE ÇEŞİTLEME YÖNTEMİ 6

2.1. Gezgin İletişim Kanalının Parametreleri 6

2.1.1. Gecikme yayılımı 7
2.1.2. Uyumluluk band genişliği 7
2.1.3. Doppler yayılması 8
2.1.4. Uyumluluk süresi 8

2.2. Sönümlemeli Kanalların Sınıflandırılması 9

2.2.1. Düzgün sönümleme 9
2.2.2. Frekans seçici sönümleme 9
2.2.3. Hızlı sönümleme 10
2.2.4. Yavaş sönümleme 10

2.3. Sönümlemeli Kanalın Modellenmesi 11

2.3.1. Sönümleme katsayısının istatistiksel ifadesi 11
2.3.2. Sönümleme ve AWGN bozucu etkilerinin incelenmesi 15

2.4. Gezgin Sistemlerde Çeşitleme Tekniği 18

2.4.1. Çeşitleme 18
2.4.2. MIMO sistem modeli 18
2.4.3. Anten çeşitlemesinin band verimliliği üzerindeki etkisi 21
2.4.4. BLAST ve ortogonal uzay-zaman kodları için sığa hesabı 22
2.4.4.1. N=1, M=T=2 Ortogonal sistem için sığa hesabı 22
2.4.4.2. N=M=T=2 Ortogonal sistem için sığa hesabı 23
2.4.4.3. N=1,2,3, M=3, T=4 Ortogonal sistem için sığa hesabı 25
2.4.5. Çeşitleme / kodlama kazancı 29
2.4.5.1. Çeşitleme kazancı 29
2.4.5.2. Kodlama kazancı 29
2.4.6. Çeşitlemeli yüksek hızlı gezgin iletişim sistemleri 30

3. YÜKSEK HIZLI GEZGİN İLETİŞİM SİSTEMLERİ 31

3.1. Uzay-Zaman Blok Kodlarda (R) İletim Oranı 31

3.2. İletim Oranını Arttırma Yöntemlerinin İncelenmesi 32

3.2.1. (Q) Simge altdizisinin uzunluğunu arttırarak iletim oranını arttırmak 32
3.2.2. İşaret kümesini genişleterek iletim oranını arttırmak 33

3.3. Çeşitleme Çoğullama İlişkisi 33

3.3.1. $\mathbf{1} \times \mathbf{1}$ Rayleigh kanalda çeşitleme-çoğullma ilişkisi 35
3.3.2. Minimum bedel 37
3.3.3. $\mathbf{M} \times \mathbf{N}$ MIMO kanal için minimum bedel 37

3.4. Kodçözücü için Optimum Karar Kuralı 38

3.5. Kodçözme Karmaşıklığı 39

4. UZAY-ZAMAN KODLAR İÇİN HIZLI KODÇÖZME ALGORİTMALARI 41

4.1. Kodçözme Probleminin Tanımı 42

4.1.1. Ayrık değerli en küçük kareler probleminin geometrik yorumu 43
4.1.2. Ayrık değerli en küçük kareler probleminin çözüm yöntemleri 43
4.1.2.1. En küçük kareler probleminde Babai kestirimi 44
4.1.2.2. Geribeslemeli karar kestirimi (N/C) 44
4.1.2.3. Optimal sıralamalı geri beslemeli karar kestirimi (N/C) 44
4.1.3. Optimum çözüm (ML) 44

4.2. Küresel Kodçözme Yöntemi 46

4.2.1. Hiper küre için yarıçap **d**'nin seçimi 48
4.2.2. Hiper küre için çok büyük yarıçap kullanımı 49
4.2.3. Küresel kodçözme algoritması 50
4.2.4. Optimum çalışan geliştirilmiş küresel kodçözücü 53
4.2.5. Optimum küresel kodçözücü için blok diyagramı 54

5. DOĞRUSAL DAĞILIMLI KODLAR 56

5.1. DD Kodlar için Sistem Modeli 56

5.2. Sığayı En Büyükleyen DD Kodlar için Verici Karmaşıklığı 58

5.3. DD Kodu Tanımlayan A_q ve B_q Matrislerinin Önemi 59

5.4. DD Kodlar için Yeni Yaklaşım 60

5.4.1. Yaklaşık hata oranı ifadesini en küçükleme problemi 60
5.4.2. Bir çözüm olarak ortogonal kod analizi ve tasarım kısıtası 63
5.4.3. Farklı Φ değerlerine sahip DD kodların karşılaştırılması 66

5.5. DD Tasarım Kısıtaslarının Karşılaştırılması 67

5.5.1. M=4, N=2, R=8 bit/kanal kullanımı için farklı kısıtaslar ile üretilmiş DD kodların karşılaştırılması 68
5.5.2. M=3, N=1, R=6 bit/kanal kullanımı için farklı kısıtaslar ile üretilmiş DD kodların karşılaştırılması 69
5.5.3. M=8, N=4, R=16 bit/kanal kullanımı için farklı kısıtaslar ile üretilmiş DD kodların karşılaştırılması 70

6. SONUÇLAR 72

KAYNAKLAR 73

EKLER 76

ÖZGEÇMİŞ 80

KISALTMALAR

AWGN	: Toplamsal Beyaz Gauss Gürültüsü
V-BLAST	: Dik-Bell Lab. Uzay Zaman Kodu
MIMO	: Çok Giriş-Çok Çıkış
QAM	: Dördün Genlik Modülasyonu
PSK	: Faz Kaydırmalı Anahtarlama
LD-STBC	: Doğrusal Dağılımlı Uzay Zaman Kodu
BPSK	: İkili Faz Kaydırmalı Anahtarlama
MISO	: Çoklu Giriş-Tek Çıkış
PAM	: Darbe Genlik Modülasyonu
BHO	: Bit Hata Oranı
ML	: En Büyük Olabilirlik
DD	: Doğrusal dağılımlı

TABLO LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 1.1. QAM İşaret Kümesi 3
Tablo 4.1. Uzay-Zaman Kodçözme Yöntemleri 41

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 2.1: Rician dağılımı için olasılık yoğunluk fonksiyonunun değişimi ... 12
Şekil 2.2: Rayleigh dağılımı için olasılık yoğunluk fonksiyonunun değişimi . 12
Şekil 2.3: Rayleigh dağılımlı sönümleme katsayısı için genlik değerlerinin benzetimi ... 14
Şekil 2.4: Sönümleme ve AWGN bozucu etkilerinin işaret kümesi üzerindeki etkileri ... 15
Şekil 2.5: AWGN ve Rayleigh kanalda BPSK sisteminin başarımı ... 17
Şekil 2.6: (n,n) çoklu antenli kanal sığasının ρ =0,6,12,18,24 dB için n'ye bağlı değişimi ... 21
Şekil 2.7: 2x2 sistem için ortogonallik sığada kayıplara neden olmaktadır . 24
Şekil 2.8: $N = 1$ ve 4×3 ortogonal uzay-zaman kodlu sistemin sığası ile $M = 3$,$N = 1, 2, 3$ sisteminin sığası ... 28
Şekil 2.9: Yavaş sönümlemeli kanalda, BPSK işaret kümesi ile çeşitlemeli ve çeşitlemesiz sistemler için bit hata oranı eğrileri ... 29
Şekil 3.1: Yavaş sönümlemeli Rayleigh kanalda 1×1 sistem için çeşitleme-çoğullama ilişkisi ... 36
Şekil 3.2: Yavaş sönümlemeli Rayleigh kanalda $M \times N$ sistem için çeşitleme-çoğullama ilişkisi ... 38
Şekil 3.3: Alıcı ve verici birime 1 anten eklendiğinde çeşitleme-çoğullama ilişkisinin değişimi ... 39
Şekil 4.1: Ayrık değerli enküçük kareler yönteminin geometrik yorumu ... 43
Şekil 4.2: 2x2 Ortogonal uzay-zaman kodu için başarım eğrileri. İletim oranı R=6,8,10 bit/kanal kullanımı. İşaret kümesi 64,256,1024-QAM . 45
Şekil 4.3: Küresel kodçözme yöntemi ... 46
Şekil 4.4: 4 boyutlu hiperküre içindeki kafes noktalarının belirlenmesi, örnek ağaç yapısı ... 47
Şekil 4.5: **d** nin değişimi ile Hiper küre içinde bulunan kafes noktası sayısının değişimi. ... 48
Şekil 4.6: **d** nin büyük değerleri için küre içinde bulunan kafes noktası sayısı. 49
Şekil 4.7: Geliştirilmiş optimum küresel kodçözücü blok diyagramı ... 55

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 5.1: M=3, N=1, T=Q=4 sistem için R=6 olan Optimum ve Rastgele DD kodlar için *Ber* eğrileri 59
Şekil 5.2: M=2, N=2 için DD kod ile Ortogonal kodun R=8 iletim oranında başarımlarının karşılaştırması 63
Şekil 5.3 $\Phi = 24, 32, 40$ için farklı DD kodların başarımları. M=4, N=2, Q=4, T=2, R=8 bit/kanal kullanımı. 67
Şekil 5.4 M=4, N=2, R=8 bit/kanal kullanımı için iki farklı kıstas ile üretilmiş DD kodları. 68
Şekil 5.5 M=3, N=1, R=6 bit/kanal kullanımı için iki farklı kıstas ile üretilmiş DD kodları. 69
Şekil 5.6 M=8, N=4, R=16 bit/kanal kullanımı için iki farklı kıstas ile üretilmiş DD kodları. 70

SEMBOL LİSTESİ

$\boldsymbol{C}$	: Kanal sığası
$\boldsymbol{R}$	: İletim oranı
$\boldsymbol{\rho}$	: İşaret/gürültü oranı
$\boldsymbol{M}$	: Verici anten sayısı
$\boldsymbol{N}$	: Alıcı anten sayısı
$\boldsymbol{T}$	: Zaman çeşitlemesi
$\boldsymbol{B_C}$	: Uyumluluk band genişliği
$\boldsymbol{B_D}$	: Doppler yayılması
$\boldsymbol{f_m}$	: Maksimum frekans kayması miktarı
$\boldsymbol{\sigma_\tau}$	: Ek gecikme standart sapması
$\boldsymbol{T_C}$	: Uyumluluk süresi
$\boldsymbol{B_S}$	: İşaret band genişliği
$\boldsymbol{T_S}$	: Simge süresi
$\frac{\boldsymbol{E_b}}{\boldsymbol{N_0}}$	: Dördün Genlik Modülasyonu
$\boldsymbol{P_b(e)}$	: Bit hata olasılığı
$\boldsymbol{r_{ij}}$	: j. simge periyodunda, i. alıcı anteninden alınan gürültülü işaret
$\boldsymbol{h_{ij}}$	: j. verici anteni ve i. alıcı anteni arasındaki kanal kazancı
$\boldsymbol{s_{ij}}$	: i. verici anteninden j. simge periyodunda iletilen işaret
$\boldsymbol{v_{ij}}$	: j. simge periyodunda i. alıcı antenden alınan işareti etkileyen AWGN
$\boldsymbol{Q}$	: Simge altdizisi uzunluğu
$\boldsymbol{d}$	: Küre yarıçapı

UZAY-ZAMAN KODLARDA HIZLI YÖNTEMLER
ÖZET

Gezgin iletişim sistemlerinde başarımı etkileyen en önemli etkilerden biri olarak sönümleme etkisi gösterilebilir. Sönümlemeli gezgin iletişim kanalında, uzay-zaman kodlu yapılar ile yüksek hızlara çıkabilmek için bu bozucu etki ile etkin bir şekilde mücadele edilmesi gerekir. Sönümlemeye karşı bilinen en önemli yöntemlerden biri çeşitleme dir. Uzay, zaman ve frekans boyutunda olmak üzere farklı çeşitleme yöntemleri uygulanabilir. Yüksek iletim hızlarında çalışacak olan çeşitlemeli gezgin iletişim sistemleri ilk olarak ilgili iletim kanalını verimli kullanmalıdırlar. Ayrıca önerilen çeşitlemeli sistemler pratikte gerçeklenebilecek karmaşıklıkta verici/alıcı yapılarına sahip olmalıdırlar. Gezgin iletişim sistemlerinde yüksek hızlara çıkıldıkça bilinen kodçözme yöntemleri için kodçözme karmaşıklığı da ciddi bir şekilde artmaktadır. Bu nedenle yüksek hızlı gezgin iletişim sistemleri basit kodçözme yapılarına gereksinim duyarlar. Küresel kodçözme yöntemi yüksek hızlarda kabul edilebilir karmaşıklıkla çalışabilen basit bir yapıya sahiptir. Bunun nedeni, gönderilmiş işarete karar verirken olası her bir simge için tek tek karşılaştırma işlemine ihtiyaç duymamasıdır. Bu yöntem Fincke ve Phost'un Matematik alanında geliştirdiği, kafes içindeki kısa vektörler çalışmasının Telekomünikasyon dalındaki uygulamasıdır. Bilinen kodçözücüler yüksek iletim hızlarinda, pratikte gerçeklenemeyecek karmaşıklıkta işlem karmaşıklığı gerektirirler. Bu nedenle, yüksek iletim hızlarinda çalışacak sistemlerde küresel kodçözme kabul edilebilir karmaşıklıkla kullanılabilirler. Bunun dışında, yüksek hızlarda çalışacak uzay-zaman kodlar kullandıkları sığayı en büyükleyecek şekilde tasarlanabilir. Hassibi ve Hochwald önerdikleri doğrusal dağılımılı kodlar ile böyle kodların tasarlanabileceğini göstermişlerdir. Ancak önerilen bu kodlarla karmaşık verici yapılarına ihtiyaç duyulmaktadır. Gösterilebilir ki; sığayı en büyükleyecek şekilde tasarlanmış doğrusal dağılımlı kodlar üretmek, bit hata oranını en küçükleyecek kodlar üretmek anlamına gelmemektedir. Bu çalışmada önerdiğimiz kod tasarım kıstası ile yaklaşık olarak ifade ettiğimiz ikili bit hata olasılığı ifadesini en küçükleyen, yüksek iletim oranına sahip doğrusal dağılımlı kodlar üretmek mümkündür. Önerdiğimiz bu doğrusal dağılımlı kodlar daha önce önerilmiş, sığayı en büyükleyen doğrusal dağılımlı kodlardan farklı olarak verici antenlerinden yalnızca işaret kümesine ait işaretleri gönderebilen basit yapılı vericiler ile çalışabilen kodlardır. Bu yeni kodlar küresel kodçözücüler ile yüksek hızlarda kabul edilebilir karmaşıklıkla etkin çalışırlar.

HIGH RATE SPACE-TIME TECHNIQUES
SUMMARY

In the mobile communication system, fading effect can be seen as one of the important factor in performance of the system. It is desired to achieve high transmission rate with space-time codes. In this case, mobile systems have to struggle to decrease fading effect in the mobile communication channel. One of the well known ways is diversity against fading effect. Different diversity techniques such as space, time and frequency can be used to improve performance. High-rate mobile communication systems should effectively use the full channel. Additionally, proposed high-rate systems should have practically realizable transmitter and receiver units. As the transmission rate increases, so does the complexity of the optimum decoding techniques. For this case, high-rate systems need simple decoders. Sphere decoding technique has acceptable complexity in high-rate systems, because, every probable vectors related to the symbol sequences don't need to be compared to achieve maximum likelihood detection. This technique is an application in telecommunication of the method of finding the shortest vector in a lattice by Fincke and Phost in mathematics. Well known optimum decoders are not practicable to use in real time communication for high-rate transmission. In high-rate systems, sphere decoders can be used with low computational load. High-rate codes could be designed to maximize the capacity of the system. Hassibi and Hochwald show that this kind of codes could be found and they present the high-rate linear dispersive codes that are designed for maximization of the capacity. However, The linear dispersive codes are not designed for minimization of the bit-error-rate. In this work, we propose a code design criteria to minimize approximation of the pairwise bit error probability. These codes are also linear dispersive codes and differ from early proposed linear dispersive codes with some constrains on the transmitter. In our case, new proposed systems send only constellation signals from transmitter antennas. This way, cheaper transmitters are possible for high-rate systems. At the same time, new proposed systems could use sphere decoding to achieve high-rate with low complexity, as well.

1. GİRİŞ

Günümüzde yaygın olan genel kanıya göre; gezgin iletişim sistemleri için yüksek hızlı data ve kaliteli konuşma iletimi, geleceğin iletişim sistemlerinin en önemli bölümünü oluşturacaktır. Öngörülen bu yüksek hızlı veri iletimini gerçekleştiren sistemler, basit yapılı kodçözücüler ile kodçözme işlemlerini gerçek zamanlı iletişime olanak sağlayacak biçimde gecikmesiz gerçekleştirmelidirler. Bu nedenle, kodçözücü yapılarda lineer işlemler kullanılmalı ve işlem sayısı olabildiğince azaltılmalıdır [1].

Gezgin iletişim sistemlerinde, başarımı ciddi biçimde düşüren birçok farklı bozucu etki bulunmaktadır. Sözü edilen etkilerin en önemlileri; kanaldaki toplamsal beyaz Gauss gürültüsü (AWGN) ve özellikle çok yollu iletimden kaynaklanan sönümleme etkileridir. Çeşitli nedenlerle karşılaşılan sönümlemenin bozucu etkisi, sistem başarımını çok ciddi bir şekilde kötüleştirmektedir. Sistem başarımını derinden etkileyen sönümlemenin bozucu etkisine karşın, gönderilen işaretin sönümleme etkisiyle bozulduğu, yani kanaldaki derin sönümleme anında iletilen işaretin gücünü arttırmak iyi bir yöntem olarak önerilebilir. Ancak gezgin iletişim sistemlerinde daha fazla kullanıcıya hizmet sunabilmek için frekans tekrarlama tekniği yaygın olarak kullanıldığından, iletilen işaret gücünü arttırmak aynı ve/veya çok yakın frekansları kullanan kullanıcıların işaretleri arasında girişime neden olur. Hem girişime neden olmamak, hem de gezgin birimde güç kaynağının kısıtlı olmasından dolayı, iletilen güç sınırlandırılmalıdır [2]. Çok değerli olan sabit genişlikli frekans bandı üzerinden, olabildiğince çok sayıda kullanıcıya hizmet verebilmek için kullanıcı başına düşen band genişliğinin de sınırlandırılması gerekmektedir.

Sözü edilen bütün bu kısıtlamalar altında, gezgin iletişim sistemlerinde ciddi bozucu etkilere karşı, başarımı iyileştirmenin en etkin yolu, verici ve/veya alıcı anten sayılarını arttırmaktan geçer. [3,4]'de teorik ve deneysel sonuçlara göre kanalın sığasının, anten sayısı ile doğrusal arttığı gösterilmiştir. Vericide çoklu anten yapısı ile gerçekleştirilen verici çeşitlemesi yöntemi, gönderilen işaretin kopyalarının da farklı yollar üzerinden alıcı birime iletilmesi şeklinde gerçekleştirilir. Beklenti; bütün bozucu etkilere karşın vericiden alıcıya en azından bir sağlam yolun bulunabilmesi şeklindedir [1,5]. Çeşitleme yönteminin yardımı ile oluşturulan yüksek başarımlı sistemler, bulundukları iletişim bandını verimli kullanan uzay-zaman kodlara ihtiyaç duyarlar [4]. [6,7]'de anlatılan ve band verimli bir kod olan V-BLAST (Vertical Bell Labs Layered Space-Time) basit kodlama ve kodçözme özelliğine sahiptir. Kısaca sözü edilen V-BLAST mimarisinde gönderilecek bilgi dizisi alt dizilere ayrılır ve herbir alt dizi farklı bir verici antenden gönderilir. Örnek olarak, işaret/gürültü oranı $20dB$ seviyesinde, V-BLAST için kanal sığası $C = 35$ bit/kanal kullanımı değerine $M = 8$ verici ve $N = 12$ alıcı antenli yapısı ile erişebilmektedir.

Söz edilmesi gereken daha birçok farklı uzay-zaman iletim yöntemi vardır; uzay-zaman trellis kodlar [8], uzay-zaman blok kodlar [2]. Blok kodlardan kanal bilgisinin alıcı tarafından bilindiği ortogonal kodlar [9] ve kanal bilgisinin bilinmediği ayrımsal kodlar [10]. Uzay-zaman turbo kodlar gibi birçok farklı avantaja sahip yöntemler sayılabilir. Sistemdeki anten sayısını çok arttırarak, başarımı arttırmak istediğimizde birçok uzay-zaman kodu ya, çok karmaşık kodçözme yapılarına ihtiyaç duyar yada ortogonal kodlarda olduğu gibi MIMO yapısı ile elde edilen sığa değerinin altında verimsiz çalışırlar.

Yüksek hızlara çıkabilmek için verici anten sayısının artması veya işaret uzayının genişletilmesi; trellis kodundaki durum sayısını üstel şekilde arttırmaktadır [8]. [2,9]'daki blok kodlar (Ortogonal uzay-zaman ve Alamouti'nin verici çeşitlemeli sistemi) için verici anten sayısının artması, V-BLAST'a göre hızda ve başarımda kayıplara neden olmaktadır. Ayrımsal ve yüksek iletim oranlı sistemlerde, yüksek

hızlar için kodçözme karmaşıklığı aşırı artmaktadır [11,12]. Oysa V-BLAST kabul edilebilir bir karmaşıklıkla [7]'de anlatılan kodçözücü yapısı ile yüksek hızlara ulaşabilir. Ancak kodçözme yapısından dolayı verici anten sayısından daha az sayıdaki alıcı anten ile çalışamaz. Bu kısıtlama pratikte gezgin sistemler için önemli bir sorundur. Gezgin iletişim sistemlerinde bir vericinin binlerce alıcı birime hizmet verdiği düşünüldüğünde, alıcının olabildiğince basit yapılı olması tercih edilmektedir. Alıcı birimin V-BLAST'da olduğu gibi verici birime göre daha karmaşık olması ekonomik açıdan gerçeklenmesi zor bir sistem olarak kabul edilir.

Kolayca görülebilir ki yüksek hızlı sistemler için kullanılan işaret kümesi olabildiğince büyük seçilmelidir. r-QAM işaret kümesini kullanan sistemler için, işaret kümesi büyüdükçe; işaretler arası minimum uzaklığın sabit kalması durumunda, iletilen işaretlerin ortalama gücü artar. Yada iletilen ortalama güç sabit kalırken, büyük işaret kümesi için işaretler birbirine yaklaşır. Aynı durum PSK işaret kümesi için de geçerlidir. Büyük işaret kümesi kullanan yüksek hızlı sistemlerde bu durum göz önünde bulundurulmalıdır. Tablo 1.1'de r-QAM işaret kümesi için ortalama işaret gücü değerleri gösterilmiştir.

Tablo 1.1: QAM İşaret Kümesi

İşaret Kümesi	Ort. İşaret Gücü [dB]
4	3
8	6.7
16	10.0
32	13.2
64	16.2
128	19.2
256	22.3
512	25.3
1024	28.3

Yüksek hızlara çıkmak için kodlayıcı birim, büyük işaret kümesi kullanırken, kodçözücü birim ise olası işaretler arasından gönderilmiş işareti kestirmeye çalışır. Kodçözme yapısı basitleştirilirken, sistemin ileyim oranını olabildiğince kanal sığası seviyesine yaklaştırmak yüksek hızlı sistemler için gözetilmesi gereken en önemli unsurdurlardan biridir.

[13]'de anlatılan doğrusal dağılımlı (DD) kodlar daha önceden tasarlanmış birçok kodun farklı avantajlarını içinde barındırırken ayni zamanda küresel kodçözücüyü kullanan basit kodçözme yapılarına sahiptir. Bu küresel kodçözme yöntemi gerekli işlem sayısını önemli ölçüde azaltır. Böylece herhangi bir MIMO yapısıyla farklı kodlama türleri kullanılarak pratikte çıkılamayacak hızlara ulaşmak mümkün olur.

Bunu bir örnekle gösterecek olursak; verici anten sayısı $M = 4$, alıcı anten sayısı $N = 2$ ve işaret/gürültü oranı $\rho = 20$dB durumunda, gönderilen blok uzunluğu $T = 4$ olsun. Kanalın T adet periyot süresince değişmediği ve $\mathcal{CN}(0, 1)$ istatistiksel modeline uyduğu durumda kanal sığası; $C > 12$bit/kanal kullanımı dır. $R = 12$ için $2^{RT} = 2^{48} \approx 10^{14}$ farklı olası matris için karşılaştırma işlemi yapılması gerekmektedir. Bu işlemi alıcının gerçek-zamanlı kodçözmeye uygun bir biçimde gerçekleştirmesi mümkün değildir. DD kodlarda ise küresel kodçözme ile karşılaştırma sayısını azaltarak gerçek-zamanlı etkin kodçözmeye olanak sağlar. Ayrıca DD kod, V-BLAST mimarisinden farklı olarak verici anten sayısının, alıcı anten sayısından fazla olduğu $M > N$ sistemlerde de uygulanabilmektedir. V-BLAST'ın basit kodçözme yöntemlerini kullanabilmesinin yanında en büyük olabilirlik (maximum likelihood) karar kuralına küresel kodçözme kullanan, daha az karmaşıklık gerektiren kodçözücülerle de ulaşabilmektedir.

Bu çalışmada literatürde adı geçen DD kodlardan farklı olarak, daha basit vericilerle çalışan ve yaklaşık hata olasılığını en küçükleyen kodlar için bir çeşit DD kod tasarım kıstası geliştirilmiştir. Bu kıstasa uygun kodlar üretilmiş ve diğer DD kodları ile başarımları karşılaştırılmıştır. Üretilen bu DD kodların basit vericilerle çalışmalarından kaynaklanan avantajlarının yanında kodçözme

işlemleri de daha hızlıdır.

Çalışmanın diğer bölümlerinden bahsedecek olursak; 2. bölüm'de: Sönümlemeli kanal ve çeşitleme tekniği üzerinde durulacaktır. Gezgin iletişim kanalı parametreler yardımıyla tanıtılacak, farklı sönümleme türleri anlatılacaktır. Sönümlemeli kanalın modellenmesi altbaşlığı altında kanal katsayısının istatistiksel ifadesi, bilgisayar benzetimi ve sönümlemenin bozucu etkisine değinilecektir. Bu bölümdeki bir diğer altbaşlık ile çeşitleme tekniği üzerinde durulacak, kanal sığasının anten sayısı ile değişimi gösterilecektir.

3.bölüm'de uzay zaman kodları için iletim hızı üzerinde durularak arttırma yöntemleri incelenecektir. Çeşitleme-çoğullama ilişkisi tanıtıldıktan sonra Uzay zaman blok kodlar için optimum karar kuralı ile kodçözme karmaşıklığı üzerinde durulacaktır.

4.bölüm'de uzay zaman blok kodlar için hızlı kodçözme algoritmaları ele alınacak ve küresel kodçözme yöntemi incelenecektir. En büyük olabilirlikli karar kuralını garantileyen geliştirilmiş küresel kodçözücü tanıtılacaktır.

5.bölüm'de yüksek iletim oranlarında çalışabilen DD kodlar anlatılacaktır. Literatürde bilinen DD kodlardan farklı olarak yaklaşık ikili bit hata olasılığını en küçükleyen ve çok basit verici yapılarıyla çalışabilen yeni yüksek oranlı DD kodları belirlemeyı amaçlayan bir çeşit DD kod tasarım kıstası oluşturulacaktır. Bu kıstasa uygun üretilen farklı DD kodlar karşılaştırmalı tanıtılacaktır.

2. ÇOK YOLLU SÖNÜMLEMELİ KANAL VE ÇEŞİTLEME YÖNTEMİ

Bu bölümde gezgin iletişim kanalının parametreler yardımı ile tanımı yapılacak ve farklı sönümlemeli kanal modelleri incelenecektir. Sönümlemenin bozucu etkilerine karşı önerilmiş çeşitleme yöntemleri üzerinde durulacaktır. Uzay-zaman kodlar için sistem modeli tanımlanarak farklı uzay-zaman kodları tanıtılacaktır.

2.1 Gezgin İletişim Kanalının Parametreleri

Gezgin iletişim kanallarında, vericiden gönderilen işaretler yansıma, saçılma ve kırılma gibi çevresel etkiler nedeniyle alıcıya farklı yollar üzerinden ulaşır. İletilen işaretler kendi dalga boylarından çok daha büyük coğrafi veya insan yapımı engellerden yansıyarak, boyutları dalga boyu mertebesinde olan engellerde kırılarak veya sivri çatılardan, engellerdeki köşelerden saçılarak alıcı birime ulaşabilmektedir. Farklı yollar üzerinden alıcı antenine ulaşan bileşke işaretin genliği ve fazı sönümleme etkisiyle ciddi bir şekilde bozulmuş olabilmektedir. Bazı durumlarda verici ile alıcı arasında doğrudan bir yol bulunabilmektedir. Bu durumda alıcıya ulaşan işaretler arasında en baskın işaret doğrudan görüşlü bu yol üzerinden alıcıya ulaşan işarettir. Alıcıya ulaşan çok yollu işaretlerin genliği ve fazı çok farklı değerler almaktadır. Bunun nedenleri, yol farkından kaynaklanan gecikme ve/veya yansımalardan kaynaklanan zayıflama olarak kabul edilmektedir. İletilen işareti ciddi bir şekilde etkileyen yansıma, kırılma, saçılma ve zayıflama gibi bozucu etkiler sönümleme olayının temel nedenleri olarak kabul edilmektedir [14]. Yayılım ortamında bulunan bitki örtüsü de gölgelenme etkisi göstererek sönümlemeye neden olabilmektedir. Gezgin iletişim sistemlerinde ortaya çıkan bir diğer bozucu etki Doppler frekans yayılmasıdır. Doppler frekans yayılması işaretin band genişliğinin yayılmasına neden olur. İşaretin taşıyıcı

frekansını gezgin birimin hızına bağlı olarak azaltıcı yada arttırıcı bir etki gösterir. Bu bölümde anlatılan sönümleme etkileri, (AWGN) etkisiyle karşılaştırıldığında sönümlemenin çok daha ciddi bozucu etkiler içerdiği görülmektedir Şekil 2.9. Bu etkiler sistemin başarımını derinden etkiler. Bu nedenle, sistem başarımı arttırılmak isteniyor ise sönümlemenin bozucu etkilerine karşı mücadele edilmesi gerekmektedir. Sönümlemeli çok yollu kanallar; gecikme yayılımı, uyumluluk band genişliği, Doppler yayılması ve uyumluluk süresi gibi çeşitli parametreler ile belirlenmektedir [15].

2.1.1 Gecikme yayılımı

Gezgin iletişim sistemlerinde, çok yollu kanal içerisinden gönderilen bir işaret alıcıya farklı gecikmelere uğrayan bileşenler şeklinde ulaşır. Bu farklı gecikmelerin nedeni alıcıya ulaşan bileşenlerin izledikleri yolların farklı olmasıdır. Alıcıya ulaşan ilk bileşenin gecikme süresi ile diğer bileşenlerin gecikme süreleri arasındaki fark ek gecikme olarak adlandırılır. Alıcıya ulaşan $i.$ bileşen için ek gecikme τ_i ile gösterilir. Alıcıya ulaşan bütün bileşenlerin ek gecikmelerinin ortalaması ise $\overline{\tau_i}$ ile gösterilir ve ortalama ek gecikme diye adlandırılır. Benzer şekilde bileşenlere ilişkin ek gecikmenin standart sapması σ_τ ile gösterilir. Ek gecikmenin varyası ise σ_τ^2 ile standart sapmasının karesi şeklinde tanımlanır. Alınan bir bileşenin gücünün en güçlü bileşenin gücünden S dB aşağısına düştüğü durumdaki en büyük zaman gecikmesi, ek gecikme yayılımı (S dB) ile adlandırılır. Yayılım ortamının dış alan olduğu durumda σ_τ değeri birkaç mikrosaniye büyüklüğündeyken kapalı alanda nanosaniyeler seviyesinde olduğu kabul edilir [14].

2.1.2 Uyumluluk band genişliği

Uyumluluk band genişliği B_c ile gösterilir. İletilen işaretleri sabit kazanç ve doğrusal faz ile geçiren kanalın band genişliğine denir. Öyle ki; aralarında B_c'den daha büyük frekans farkı bulunan iki sinüzoidal işaret, kanal tarafından farklı

biçimlerde etkilenirler. Öncelikle gezgin çok yollu sistemlerde iletilen işaretlerin alıcıya τ gecikme ile ulaşma olasılığını:

$$p(\tau) = \frac{1}{2\pi\sigma_\tau} exp\left(\frac{-\tau}{\sigma_\tau}\right) \tag{2.1}$$

şeklinde gösterilebildiği varsayımı altında uyumluluk band genişliği B_c, farklı frekans ilişkisi değerleri için hesaplanabilir. Frekans ilişkisi 0.5 için:

$$B_c = \frac{1}{2\pi\sigma_\tau} \tag{2.2}$$

ifadesi hesaplanırken, frekans ilişkisi 0.9 için aşağıdaki şekilde elde edilir [14].

$$B_c = \frac{1}{6\pi\sigma_\tau} \tag{2.3}$$

2.1.3 Doppler yayılması

Doppler yayılması B_D, gezgin birimin baz istasyonuna göre bağıl hızından kaynaklanan frekans kayması miktarının en büyük değeridir. Alınan işaretin band genişliği, temel band işaretin band genişliği ve Doppler kayması miktarı ile verilir. Gezgin birimin hızına bağlı olarak Doppler kayması miktarı, temel band işaretin band genişliği yanında yeterince küçük ise ihmal edilir. Doppler kayması ile gezgin birimin hızı arasındaki ilişki (**2.4**)'de gösterildiği gibi verilebilir. Burada v gezgin birimin baz istasyonu doğrultusundaki hızı, c ışık hızını göstermektedir.

$$B_D = f_m = \frac{v}{c} \tag{2.4}$$

2.1.4 Uyumluluk süresi

Uyumluluk süresi T_C, sönümlemenin bozucu etkisinin farkedilebileceği en küçük zaman aralığı olarak tanımlanabir. Zarfları arasında 0.5 ilişki katsayısına sahip, aynı frekanslı iki işaret arasındaki zaman farkına eşittir. Yaygın olarak kabul

edilen uyumluluk süresi (**2.5**) ile belirlenir.

$$T_C = \sqrt{\frac{9}{16\pi B_D^2}} = \frac{0.423}{B_D} \tag{2.5}$$

2.2 Sönümlemeli Kanalların Sınıflandırılması

Bölüm 2.1'de tanıtılan kanal parametreleri yardımıyla, sönümlemeli kanalları dört farklı sınıfta incelemek mümkündür.

2.2.1 Düzgün sönümleme

Düzgün sönümlemenin bir diğer adı frekans seçici olmayan sönümlemedir. Gezgin iletişim kanalının band genişliği, işaret band genişliğinden büyük olduğu durumda kanal sabit kazançlı ve doğrusal faza sahip ise düzgün sönümleme ortaya çıkar. Bu tür sönümlemeye uğramış işaretlerin spektral özellikleri değişmez.
Düzgün sönümlemeli kanal parametreler yardımı ile aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$B_C \gg B_S \tag{2.6}$$

$$\sigma_\tau \ll T_S \tag{2.7}$$

Burada B_S işaretin band genişliğini gösterirken, T_S ile simge süresi belirtilmiştir. Kanalın uyumluluk band genişliği, işaret band genişliğinden büyük ise, veya ek gecikme yayılımının standart sapması işaret süresinden küçük ise düzgün sönümleme ile karşılaşılır.

2.2.2 Frekans seçici sönümleme

Sabit kazanç ve doğrusal faz cevabına sahip kanalın band genişliği, işaretin band genişliğinden küçük olduğu durumda yada eşdeğer olarak, ek gecikme yayılımının standart sapması, işaret süresinden büyük olduğu durumlarda, frekans seçici sönümleme meydana gelir. İletilen işaretin bu tür sönümlemeye uğraması sonucunda alıcıya ulaşan işaretler, iletilen işaretin zayıflamış ve farklı

gecikmelere uğramış yankıları olur. Benzer şekilde frekans seçici sönümleme kanal parametreleri yardımıyla aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$B_C < B_S \tag{2.8}$$

$$\sigma_\tau > T_S \tag{2.9}$$

Pratikte kanal $\sigma_\tau > \frac{T_S}{10}$ ise, frekans seçici sönümlemeli olarak kabul edilir.

2.2.3 Hızlı sönümleme

Kanalın darbe yanıtı, işaret süresi boyunca sabit kalmayıp, zamanla değişiyor ise hızlı sönümleme etkisi görülür. Bu etki Doppler yayılması ile oluşur. Hızlı sönümlemeli kanalın parametrik tanımı aşağıdaki gibi yapılır.

$$T_S > T_C \tag{2.10}$$

$$B_S < B_D \tag{2.11}$$

Kanalın frekans seçici olup olmamasının hızlı sönümleme karakteristiği üzerinde etkisi yoktur. Bir kanal hızlı sönümleme etkileri gösterirken frekans seçici veya frekans seçici olmayan karakteristiğe sahip olabilir.

2.2.4 Yavaş sönümleme

Kanalın darbe yanıtının işaret süresi boyunca değişmediği koşulu ile oluşan sönümleme karakteristiğidir. Kanal parametreleri ile yavaş sönümlemenin tanımı:

$$T_S \ll T_C \tag{2.12}$$

$$B_S \gg B_D \tag{2.13}$$

şeklinde kabul edilir. Benzer şekilde kanalın hızlı sönümlemeli olması frekans seçiciliğin olup olmamasından bağımsızdır.

2.3 Sönümlemeli Kanalın Modellenmesi

Çok yollu kanal içinde iletilen işaretin genlik ve fazı kanalın karakteristiğine bağlı olarak bozulur. Bu nedenle kanal katsayısı kompleks bir değer olup işareti çarpımsal bir şekilde etkiler. Alıcı tarafından alınan gürültülü işaret modeli aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$x = hs + v \tag{2.14}$$

Burada h kanal katsayısı, s iletilen işaret ve v ise (AWGN) değerini göstermektedir.

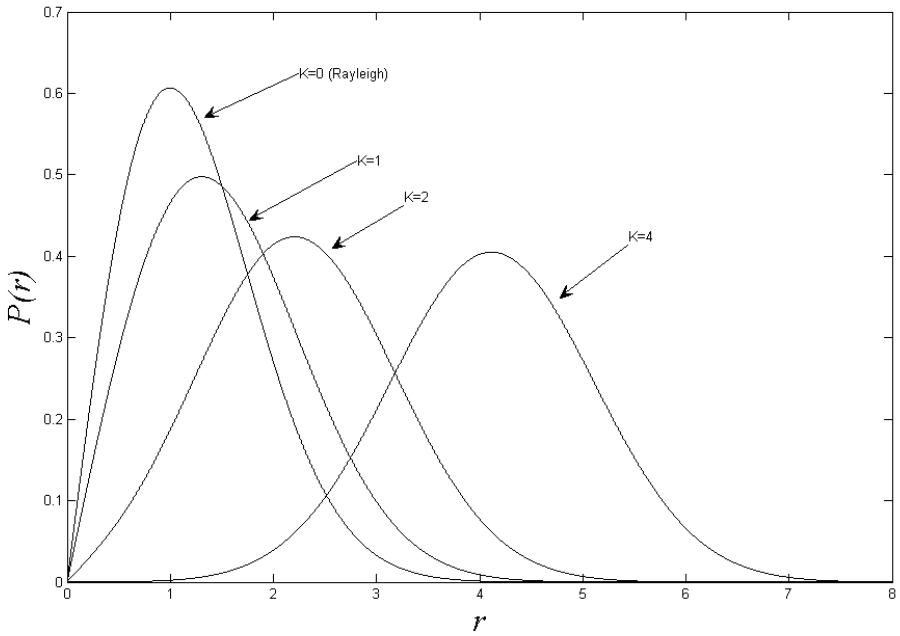
2.3.1 Sönümleme katsayısının istatistiksel ifadesi

$$h = h_I + jh_Q \tag{2.15}$$

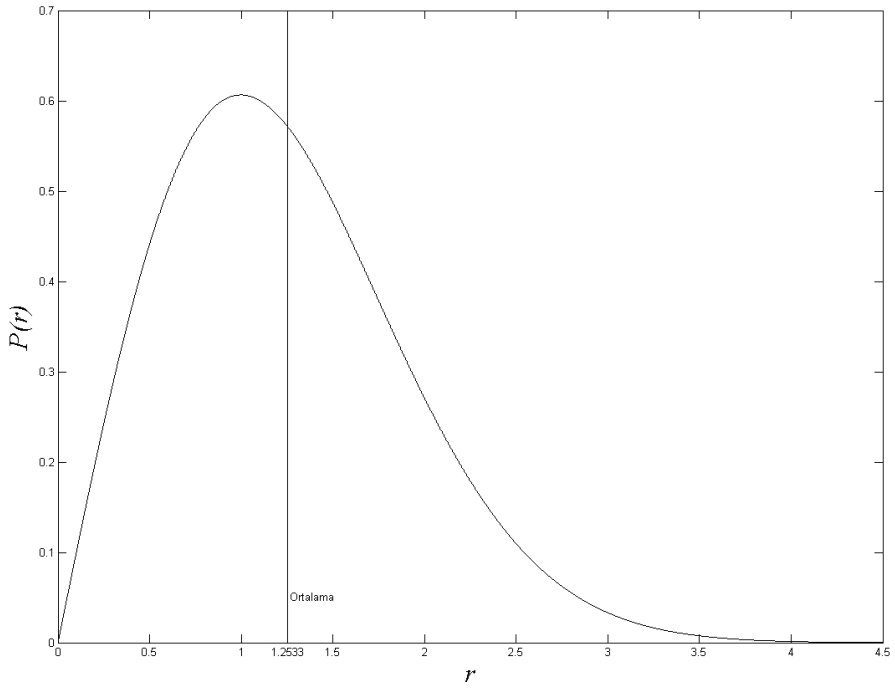
Eğer çok yollu kanalda hiçbir yol diğerlerine göre baskın değilse, (**2.15**)'ile gösterdiğimiz kanal katsayısının bileşenleri h_I ve h_Q sıfır ortalamalı ve σ^2 varyanslı Gauss dağılımı gösterir. Bu durumda kanal katsayısının fazı [0,2π) aralığında düzgün dağılımlı, zarfı ise Rayleigh dağılımına uyacak şekilde değişir. Alıcı verici arasında herhangi bir engelin bulunmadığı durumda, doğrudan görüşlü yolun en baskın yol olacağı açıktır. Böyle durumlarda ise kanalın sönümleme katsayısının genliği Rician dağılımına uyar. Rician ve Rayleigh dağılımlarının olasılık yoğunluk fonksiyonlarının değişimi Şekil 2.1 ve Şekil 2.2'de gösterilmiştir.Rayleigh dağılımının olasılık yoğunluk işlevi

$$p(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \ , \quad r \geq 0 \tag{2.16}$$

şeklinde verilebilir. Burada, $r < 0$ için $p(r) = 0$'dır. Telsiz iletişimde kanal katsayısının genlik değeri için yaygın olarak kabul edilen dağılım modeli Rayleigh dir.



Şekil 2.1: Rician dağılımı için olasılık yoğunluk fonksiyonunun değişimi



Şekil 2.2: Rayleigh dağılımı için olasılık yoğunluk fonksiyonunun değişimi

Rayleigh dağılımlı sönümleme katsayısının beklenen genlik değeri:

$$E\{r\} = \int_{-\infty}^{\infty} r.p(r)\,dr, \tag{2.17}$$

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{r^2}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) dr$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sigma} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{r^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) dr}_{\sigma^2} \tag{2.18}$$

$$E\{r\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma \ = 1,2533\sigma \tag{2.19}$$

şeklinde bulunur. Bu genlik değerinin karesel beklenen değeri $E\{r^2\}$ (**2.20**)'ile hesaplanır.

$$E\{r^2\} = \int_{0}^{\infty} r^2.p(r)\,dr = 2\sigma^2 \tag{2.20}$$

Buradan Rayleigh dağılımlı kanal katsayısının genlik değerinin varyansı (**2.21**)'ile elde edilir.

$$\sigma_r^2 = E\{r^2\} - E^2\{r\}, \tag{2.21}$$

$$= 2\sigma^2 - (1,2533\sigma)^2$$

$$\sigma_r^2 = 0,4292\sigma^2. \tag{2.22}$$

Rician dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$$p(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2+s^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{sr}{\sigma^2}\right) \ , \quad z \geq 0 \tag{2.23}$$

şeklinde yazılır. Buradaki I_0, sıfırıncı derece, birinci mertebe Bessel fonksiyonudur, s ise baskın bileşenin en büyük tepe değerini gösterir. Dağılımın genel parametresi K ile gösterilir.

$$K = s/\sigma \tag{2.24}$$

Rayleigh sönümlemeli kanal katsayısının istatistiksel özellikleri Şekil 2.2'de olasılık yoğunluk fonksiyonu yardımıyla gösterilmiştir. Kanal katsayısının bilgisayar benzetimi yardımıyla elde edilen örnekleri Şekil 2.3'de gösterilmektedir. Rastlantı değişkeninin istatistiksel parametreleri aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

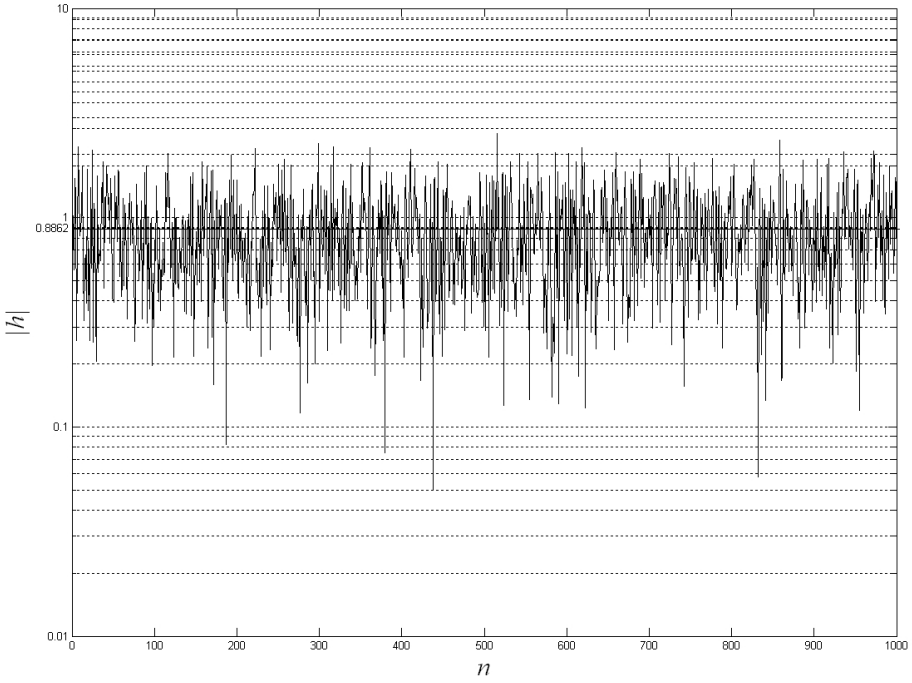
$$E\{|h|\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma = 0.8862$$

$$E\{|h|^2\} = 2\sigma^2 = 1.$$

$$\sigma_r^2 = E\{|h|^2\} - (E\{|h|\})^2$$

$$\sigma_r^2 = 0.4292\sigma^2 = 0.2146$$

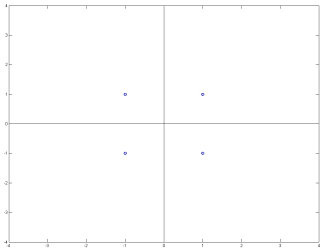
Bunlardan farklı olarak, pratik uygulamalardaki ölçüm sonuçlarına daha sıkı biçimde uyan Nakagami dağılımı da literatürde sıkça kullanılmaktadır.



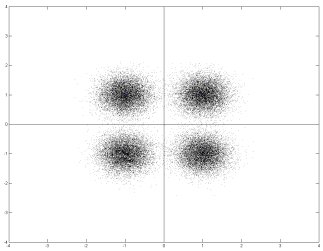
Şekil 2.3: Rayleigh dağılımlı sönümleme katsayısı için genlik değerlerinin benzetimi.

2.3.2 Sönümleme ve AWGN bozucu etkilerinin incelenmesi

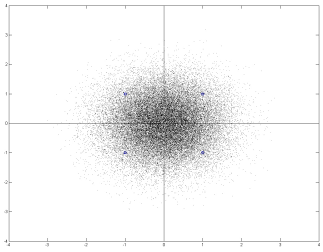
Sönümleme etkisi işareti çarpımsal etkilemesinin yanında, derin sönümleme ile iletilen işaretin gürültü içinde yutulmasına neden olur ve başarımda ciddi kötüleşmeler gerçekleşir. Şekil 2.4'te bu iki bozucu etkinin iletilen işaret üzerindeki etkileri gösterimiştir.



a) İletilen işaret kümesi.



b) AWGN ile bozulmuş işaret.



c) Sönümleme etkisi altındaki işaret.

Şekil 2.4: Sönümleme ve AWGN bozucu etkilerinin işaret kümesi üzerindeki etkileri.

Örnek olarak Şekil 2.5'de görüldüğü gibi (AWGN) toplamsal beyaz Gauss gürültülü kanalda BPSK işaret kümesi kullanıldığı durumda işaret gücünü $1 - 2dB$ yükseltmek, hata başarımını 10^{-2}'den 10^{-3} seviyesine çıkartmak için yeterliyken, çok yollu sönümlemeli kanal için bu iyileştirme ancak işaret gücünü

$10dB$ arttırarak sağlanabilmektedir [2]. Etkin çeşitleme yöntemleriyle bu bozucu etkinin üstesinden gelinmeye çalışılmaktadır.

BPSK işaretler için AWGN etkisine sahip kanallarda bit hata olasılığını $P_b(e)$ ile gösterelim. s_1 ve s_2 eşit olasılıkla üretilen BPSK işaretler olsun. Bu durumda alıcı birim tarafından alınan işaret $r = s_i + n$ olur ve bit hata olasılığı aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$p_b(e) = \frac{1}{2}p_b(e|s_1) + \frac{1}{2}p_b(e|s_2) \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}
p_b(e|s_1) &= 1 - \int_{R_1} p(r|s_1)\, dr \\
&= 1 - \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-(r-\sqrt{E_b})^2/N_0} dr \\
\text{değişken dönüşümü ile} \quad & \gamma = \sqrt{\frac{2}{N_0}}\left(r - \sqrt{E_b}\right), \quad d\gamma = \sqrt{\frac{2}{N_0}} dr \\
&= 1 - \int_{-\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\gamma^2/2} d\gamma \\
p_b(e|s_1) &= Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \\
p_b(e) &= Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)
\end{aligned} \tag{2.26}$$

burada $\frac{E_b}{N_0}$ bit enerjisinin gürültünün güç spektral yoğunluğuna oranıdır.

Rayleigh sönümlemeli kanal için bit hata olasılığını ifade edecek olursak benzer şekilde alınan işaret $r = \rho.e^{j\phi}.s_i + n$ şeklinde yazılabilir. $e^{j\phi}$ faz değişiminin alıcı birimde düzeltildiği varsayımı altında alınan işaretin ifadesi $r = \rho.s_i + n$ olur.

BPSK işaret kümesine sahip sistemin Rayleigh sönümlemeli kanalda bit hata olasılığı $P_b(e)$ aşağıdaki şekilde ifade edilir.

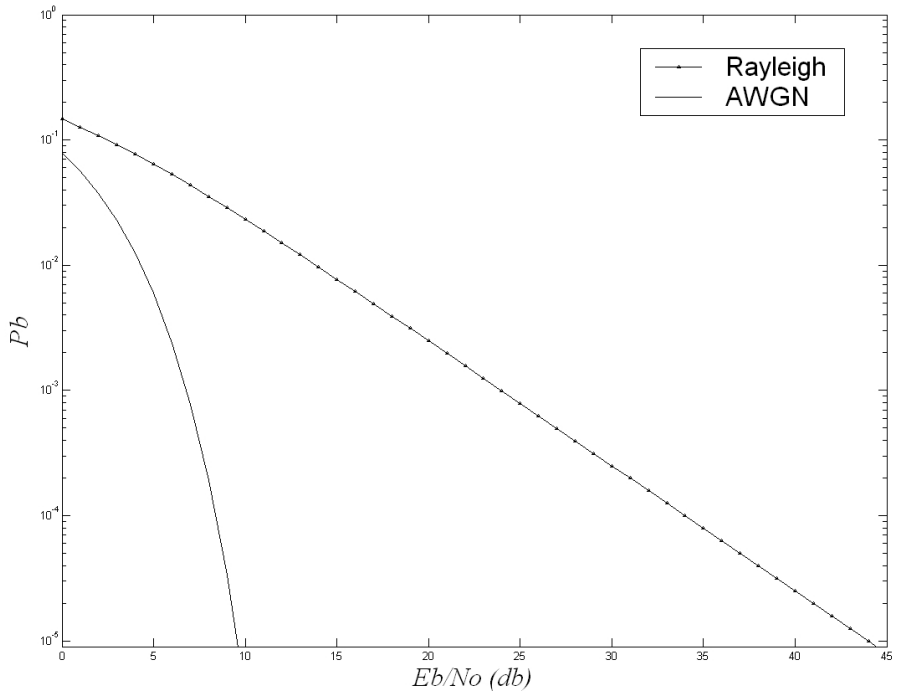
$$\begin{aligned} p_b(e) &= \int_0^\infty p(\rho)p(e|\rho)\,dr \\ &= \int_0^\infty 2\rho e^{-\rho^2} Q\left(\rho\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) d\rho \end{aligned}$$

kısmi integrasyon ile $\quad u = Q\left(\rho\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right),\ \ dv = 2\rho e^{-\rho^2} d\rho$

$$p_b(e) = -e^{-\rho^2} Q\left(\rho\sqrt{2E_b/N_0}\right)|_0^\infty - \sqrt{E_b/\pi N_0} \int_0^\infty e^{-\rho^2}\left(1+\frac{E_b}{N_0}\right) d\rho$$

$$p_b(e) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{E_b/N_0}{1+E_b/N_0}}\right) \qquad (\mathbf{2.27})$$

Yukarıda bit hata olasılıklarını ifade ettiğimiz AWGN ve Rayleigh sönümlemeli sistemlerin başarımları karşılaştırmalı olarak Şekil 2.4 ile gösterilmektedir.



Şekil 2.5: AWGN ve Rayleigh kanalda
BPSK sisteminin başarımı

2.4 Gezgin Sistemlerde Çeşitleme Tekniği

1.Bölüm'de, gezgin iletişim sistemleri için uyulması gereken kısıtlamalara değinilmiştir. Yüksek iletişim oranlarında çalışacak yeni nesil gezgin iletişim sistemlerinde de iletim band genişliği ve iletim gücü gibi kısıtlamaların gözetileceği öngörülmektedir. Bu durumda, çeşitleme tekniği bugün olduğu gibi gelecekte de önemini koruyacağı düşünülmektedir.

2.4.1 Çeşitleme

İletişimin gerçekleştiği iki nokta arasında iletilen işaretlerin uzay, frekans ve zaman gibi farklı boyutlar içerisinden birbirine paralel birçok farklı yol üzerinden iletimi tekniğine çeşitleme denir. Gezgin iletişim sistemleri için alıcı ve/veya verici anten çeşitlemesinin yanında, iletilecek işaretin kopyalarının da farklı zaman dilimlerinde tekrar gönderilmesine zaman çeşitlemesi denilmektedir. Belirli bir anda, belirli bir yol üzerinde iletilen işaret, sönümleme etkisiyle ciddi bir şekilde bozulmuş olabilmektedir. Bozulan bu işaret uzay-zaman çeşitlemesi yardımıyla farklı bir zamanda, farklı bir yol üzerinden alıcıya bozulmadan ulaşabilmektedir. Bu nedenle çok yollu sönümlemenin ciddi bozucu etkilerine karşı, sistem başarımını iyileştiren en etkin yöntem olarak çeşitleme tekniği gösterilebilir.

2.4.2 MIMO sistem modeli

MIMO için alıcı birime ulaşan gürültülü işaret vektörü r aşağıdaki gibi gösterilir.

$$r = \sqrt{\frac{\rho}{M}} H s + v \tag{2.28}$$

Burada, M verici anten sayısı, N alıcı anten sayısı olmak üzere; alınan işaret $r : [\ \ ]_{N\times T}$, kanal kazancı $H : [\ \ ]_{N\times M}$, iletilen işaret $s : [\ \ ]_{M\times T}$ ve toplamsal gürültü bileşeni (AWGN) $v : [\ \ ]_{N\times T}$ ile gösterilen kompleks bileşenli değişkenlerdir. $\sqrt{\frac{\rho}{M}}$ çarpan faktörü, tek bir alıcı anten için M'den bağımsız, ρ işaret/gürültü oranını

normalize etmektedir. s ile gösterdiğimiz, gönderilecek işaret vektörü T adet simge süresi boyunca verici antenlerinden alıcı antenlerine iletilmektedir. İletim sırasında H kanal kazancının T adet simge süresi boyunca sabit kaldığı kabul edilmektedir. (**2.28**) ile gösterilen alıcı birim tarafından alınmış işaretler (**2.29**) ile açık bir şekilde ifade edilebilir.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{r_1} \\ \underline{r_2} \\ \vdots \\ \underline{r_N} \end{bmatrix}}_{r} = \underbrace{\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1M} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N1} & h_{N2} & \cdots & h_{NM} \end{bmatrix}}_{H} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{s_1} \\ \underline{s_2} \\ \vdots \\ \underline{s_M} \end{bmatrix}}_{s} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{v_1} \\ \underline{v_2} \\ \vdots \\ \underline{v_N} \end{bmatrix}}_{v} \tag{2.29}$$

Uzay-zaman çeşitlemeli sistemler için verdiğimiz (**2.29**) açık modelinde bileşenler aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

$$\begin{aligned} \underline{r_i} &= \begin{bmatrix} r_{i1} & r_{i2} & \cdots & r_{iT} \end{bmatrix} \\ \underline{s_i} &= \begin{bmatrix} s_{i1} & s_{i2} & \cdots & s_{iT} \end{bmatrix} \\ \underline{v_i} &= \begin{bmatrix} v_{i1} & v_{i2} & \cdots & v_{iT} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.30}$$

Sistem modelini tanımlayan matrislerin elemanları fiziksel ortamda aşağıdaki ifadelere karşılık gelmektedir.

- r_{ij}: j. simge periyodunda, i. alıcı antenine ulaşan sönümlemeli ve gürültülü işaretlerin bileşkesi,
- h_{ij}: j. verici anteni ve i. alıcı anteni arasındaki kanal kazancı,
- s_{ij}: i. verici anteninden, j. simge periyodunda iletilen işaret,
- v_{ij}: j. simge periyodunda, i. alıcı antenden alınan bileşke işareti etkileyen toplamsal beyaz Gauss gürültüsü (AWGN).

i. alıcı antenine, t. simge periyodunda ulaşan gürültülü işaret (**2.31**), (**2.32**) ile gösterilebilir.

$$r_{i,t} = \begin{bmatrix} h_{i,1} & h_{i,2} & \cdots & h_{i,M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{1,t} \\ s_{2,t} \\ \vdots \\ s_{M,t} \end{bmatrix} + v_{i,t} \tag{2.31}$$

$$r_{i,t} = \sum_{j=1}^{M} (h_{i,j}.s_{j,t}) + v_{i,t}. \tag{2.32}$$

Kanal bilgisinin alıcı tarafından bilindiği, verici tarafından bilinmediği varsayımı altında kodçözücünün en büyük olabilirlikli kodçözme algoritmasını kullandığı kabul edilsin. Budurumda kodçözücünün karar kuralı, gönderilebilecek her $s[:,t]$ kod sözcüğüne ilişkin alınabilecek işaretler ile alınan gürültülü işaret vektörü arasındaki uzaklığın karşılaştırılmasına dayanır.

$$\left\| \underbrace{\begin{bmatrix} r_{1t} \\ r_{2t} \\ \vdots \\ r_{Nt} \end{bmatrix}}_{r_t} - \underbrace{\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1M} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N1} & h_{N2} & \cdots & h_{NM} \end{bmatrix}}_{H} \underbrace{\begin{bmatrix} s_{1t} \\ s_{2t} \\ \vdots \\ s_{Mt} \end{bmatrix}}_{s_t} \right\|^2 \tag{2.33}$$

$$\|r_t - Hs_t\|^2 \tag{2.34}$$

Kodçözücü birim olası tüm kod sözcükleri arasından, alınan gürültülü işarete en yakın olanına karar verir.

$$\widehat{s_t} = \min_{s_t} \left(\|r_t - Hs_t\|^2 \right) \tag{2.35}$$

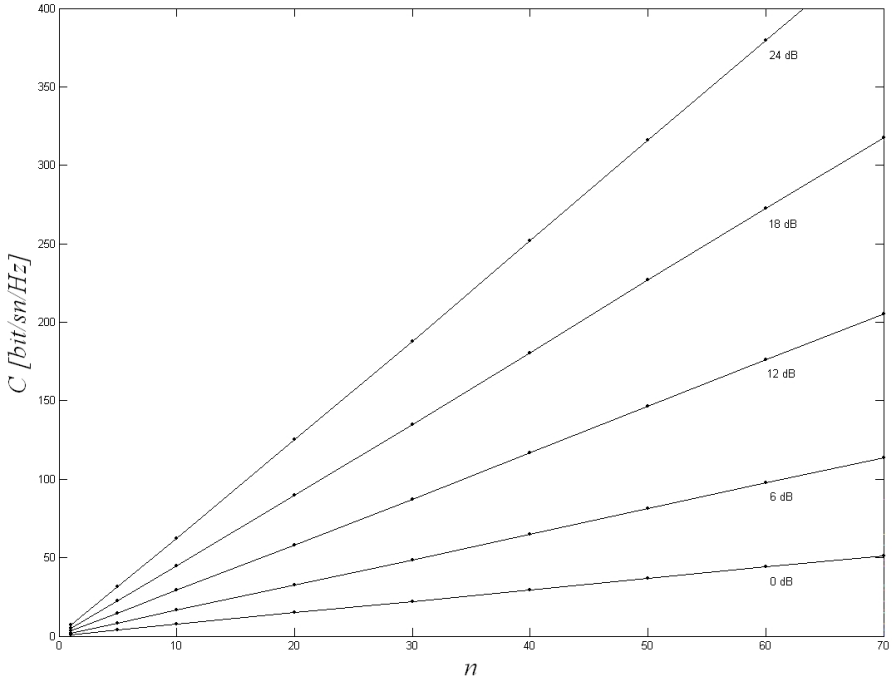
2.4.3 Anten çeşitlemesinin band verimliliği üzerindeki etkisi

Band genişliğinin sınırlı olduğu bir iletişim sisteminde, güvenilir iletişim için kanal başına iletim hızının sistem parametrelerine ve çevre şartlarına bağlı olan belli bir sığa sınırını geçmemesi gerekmektedir [16]. Öyleki bu sınır aşıldığında, kodçözücü ciddi hatalar üretmektedir. İkili iletişim sistemi için Shannon tarafından bulunan kanal başına maksimum iletim hızı (**2.36**) ile hesaplanır [16]. (M, N) MIMO sistemler için kanal sığası (**2.37**) ile hesaplanır [3,4].

$$C = B_T \log_2 \left(1 + \frac{S_T}{N_T}\right) \quad bit/kanal \;\; kullanımı \tag{**2.36**}$$

$$C = \mathbf{E} \log_2 \det \left[I_N + (\rho/M)\, HH^{\dagger}\right] \quad bit/kanal \;\; kullanımı \tag{**2.37**}$$

Alıcı ve verici anten sayısının eşit olduğu (n,n) MIMO yapılı, uzay-zaman kodlu sistem için kanal sığasının n sayısına bağlı, farklı ρ işaret/gürültü oranı değerleri için değişimi (Şekil 2.6) ile gösterilmiştir. n sayısının artışı ile sığa değerinin doğrusal arttığı görülmektedir.



Şekil 2.6: (n,n) çoklu antenli kanal sığasının ρ =0, 6, 12,18, 24 dB için n'ye bağlı değişimi

2.4.4 BLAST ve ortogonal uzay-zaman kodları için sığa hesabı

$$r = \sqrt{\frac{\rho}{M}} Hs + v$$

ile ifade edilen çok yollu sönümlemeli gezgin iletişim kanalında, yüksek hızlı sistemler oluşturabilmek için alıcı ve/veya verici anten sayısı arttırmak en temel yöntemdir. Deneysel ve analitik sonuçlar göstermiştir ki; çoklu kanal sığası verici ve alıcı anten sayısı ile doğrusal artmaktadır (Şekil 2.6). Kanal bilgisinin alıcı tarafından bilindiği durumda, N alıcı anten sayısını, M verici anten sayısını göstersin, burada sığayı temin eden sıfır ortalamalı, kompleks Gauss dağılımlı s işaret vektörü için kovaryans matrisi $E[ss^*] = R_s$ ile gösterelim. Çoklu kanal sığası (**2.38**) ile hesaplanmaktadır.

$$C(\rho, M, N) = \max E \log\det\left(I_N + \frac{\rho}{M} H R_s H^\dagger\right) \quad bit/kanal\ \ kullanımı \quad (\mathbf{2.38})$$

H bağımsız, kompleks gauss bileşenli olduğu durumda ifadeyi maksimum yapan R_s kovaryans matrisi birim matrise eşittir. Bu durumda kanal sığası aşağıdaki gibi yazılabilir [13].

$$C(\rho, M, N) = \max E \log\det\left(I_N + \frac{\rho}{M} H H^\dagger\right).$$

2.4.4.1 N=1, M=T=2 Ortogonal sistem için sığa hesabı

Alamouti'nin 2 verici antenli ortagonal sisteminin yapısı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{\rho}{2}} \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ -s_2^* & s_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\equiv$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2^* \end{bmatrix}}_{=x} = \sqrt{\frac{\rho}{2}} \underbrace{\begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2^* & -h_1^* \end{bmatrix}}_{=H} \underbrace{\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}}_{=s} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2^* \end{bmatrix} \quad (\mathbf{2.39})$$

Buradan,

$$HH^* = H^*H = (|h_1|^2 + |h_2|^2)I_2$$

sonucu ile $M = 2$,$N = 1$ ortogonal sistem için sığayı (**2.40**) ile yazabiliriz.

$$\begin{aligned} C_{orto}(\rho) &= E\log\left(1 + \frac{\rho}{2}(|h_1|^2 + |h_2|^2)\right) \\ &= C(\rho, M = 2, N = 1). \end{aligned} \quad (\mathbf{2.40})$$

Görüldüğü gibi ortogonal $M = 2$ verici antenli, $N = 1$ alıcı antenli sistem $C(\rho, 2, 1)$ sığa sınırına ulaşmıştır. Ancak $N \geqslant 2$ koşulu altında ortogonal sistemler, MIMO sistemler için tanımlanan $C(\rho, M, N \geqslant 2)$ sığa değerinin altında kalmaktadır.

2.4.4.2 N=M=T=2 Ortogonal sistem için sığa hesabı

$M = 2$, $N = 2$, $T = 2$ ortogonal sistemi (**2.41**) ile iki özdeş biçimde ifade edebiliriz. Buradan sığa değeri (**2.43**) ile hesaplanmaktadır.

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{\rho}{2}} \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ -s_2^* & s_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21}^* \\ x_{12} \\ x_{22}^* \end{bmatrix}}_{=x} = \sqrt{\frac{\rho}{2}} \underbrace{\begin{bmatrix} h_{11} & h_{21} \\ h_{21}^* & -h_{11}^* \\ h_{12} & h_{22} \\ h_{22}^* & -h_{12}^* \end{bmatrix}}_{=H} \underbrace{\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}}_{=s} + \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21}^* \\ v_{12} \\ v_{22}^* \end{bmatrix} \quad (\mathbf{2.41})$$

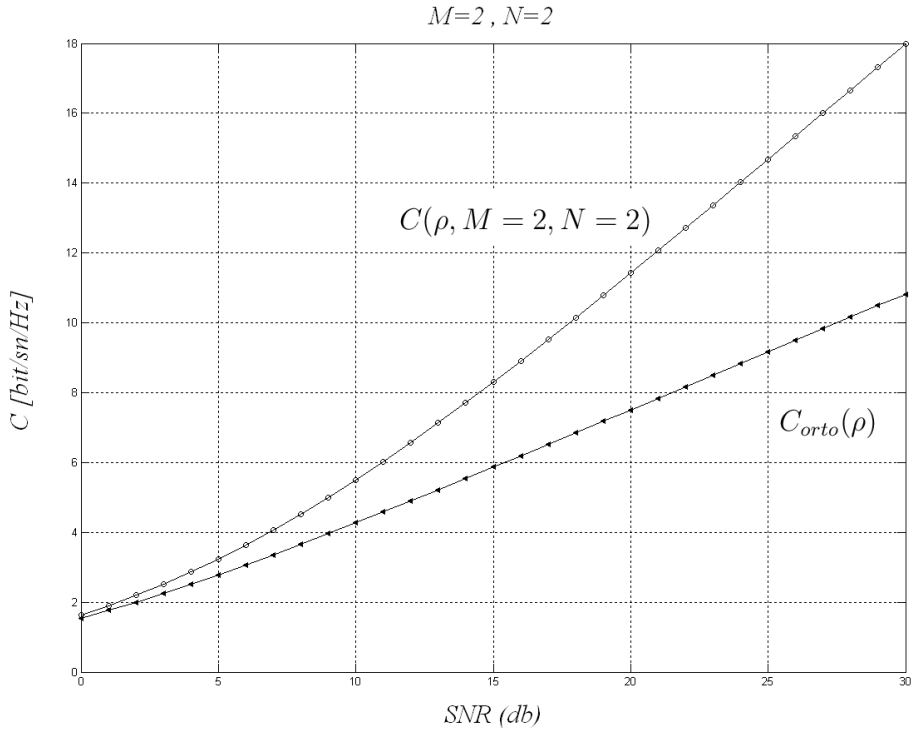
$$\begin{aligned} C_{orto}(\rho) &= E\log\left(1 + \frac{\rho}{2}(|h_{11}|^2 + |h_{21}|^2 + |h_{12}|^2 + |h_{22}|^2)\right) \\ &= C(2\rho, M = 4, N = 1) < C(\rho, M = 2, N = 2). \end{aligned} \quad (\mathbf{2.42})$$

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{\rho}{2}} \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix}}_{=x} = \sqrt{\frac{\rho}{2}} \underbrace{\begin{bmatrix} h_{11} & h_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{12} & h_{21} \\ h_{12} & h_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{12} & h_{22} \end{bmatrix}}_{=H} \underbrace{\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix}}_{=s} + \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} C_{orto}(\rho, M=2, N=2) &= E \log \left(1 + \frac{\rho}{2}(|h_{11}|^2 + |h_{21}|^2 + |h_{12}|^2 + |h_{22}|^2)\right) \\ = C(2\rho, M=4, N=1) &< C(\rho, M=2, N=2). \end{aligned} \quad (\mathbf{2.43})$$

Ortagonal 2×2 sistemin sığası, 4×1 sistem için işaret/gürültü oranı $= 2\rho$ durumundaki sığa değerine eşit olup, en büyük sığanın altında kaldığı görülmektedir (Şekil 2.7).



Şekil 2.7: 2x2 sistem için ortogonallik sığada kayıplara neden olmaktadır.

$M = 2$, $N \geq 2$ koşulunu sağlayan $T = 2$ olan 2×2 ortogonal sistemler için sığa değeri $C(N\rho, M = 2N, N = 1)$ dir. Oysa MIMO sistemler için sığa değeri $C(\rho, M = 2, N) > C(N\rho, M = 2N, N = 1)$. Bunun nedeni, ayni sayıda kanal kullanan MIMO sistemlere göre, ortogonal sistemlerin ortogonallik özelliğini sağlayabilmek için daha az sayıda simge iletilmesidir.

2.4.4.3 N=1,2,3, M=3, T=4 Ortogonal sistem için sığa hesabı

Anten sayıları $M = 3$, $N = 1$ olan ve 4 simge periyodunda 3 farklı işaret ileten ortagonal uzay-zaman kodlu gezgin iletişim sistemini aşağıdaki gibi, yine iki eşdeğer şekilde ifade edebiliriz.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{\rho}{2}}\sqrt{\frac{4}{3}} \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ -s_2^* & s_1^* & 0 \\ -s_3^* & 0 & s_1^* \\ 0 & -s_3^* & s_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{\rho}{2}}\sqrt{\frac{4}{3}} \underbrace{\begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_2^* & -h_1^* & 0 \\ h_3^* & 0 & -h_1^* \\ 0 & h_3^* & -h_2^* \end{bmatrix}}_{=H} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2^* \\ v_3^* \\ v_4^* \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{2.44})$$

(**2.44**) ile ifade ettiğimiz ortogonal sistem için sığa (**2.47**) ile hesaplanır.

$$\begin{aligned} C &= \frac{3}{4}\frac{1}{3} E \log\det\left(I_3 + \frac{\rho}{3} H^* H\right) \\ H^* H &= \left(|h_1|^2 + |h_2|^2 + |h_3|^2\right) I_3 \\ C &= \frac{3}{4}\log\left(1 + \frac{\rho}{3}\left(|h_1|^2 + |h_2|^2 + |h_3|^2\right)\right) \qquad (\mathbf{2.45}) \end{aligned}$$

Benzer şekilde $M = 3$, $N = 2$ ve $M = 3$, $N = 3$ ortagonal uzay-zaman kodlu sistemler için eşdeğer sistem modelleri (**2.46**), (**2.47**) ile gösterilmiştir. sistemlerin eşdeğer gösterilimleri yardımıyla elde edilen H kanal matrisleri yardımıyla sistem sığaları hesaplanabilir.

$M = 3$ ve $N = 1, 2, 3$ ortogonal sistemler için sığa değerleri, ρ işaret/gürültü oranının değişimine göre çizilmiştir. $M = 3$, $N = 2$ ve $T = 4$ ortogonal uzay-zaman kodu için sistem modeli:

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \\ x_{41} & x_{42} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{\rho}{2}}\sqrt{\frac{4}{3}} \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ -s_2^* & s_1^* & 0 \\ -s_3^* & 0 & s_1^* \\ 0 & -s_3^* & s_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \\ h_{31} & h_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \\ v_{31} & v_{32} \\ v_{41} & v_{42} \end{bmatrix}$$

$M = 3$, $N = 2$ ortagonal uzay-zaman kodu için eşdeğer sistem modeli:

$$\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21}^* \\ x_{31}^* \\ x_{41}^* \\ x_{12} \\ x_{22}^* \\ x_{32}^* \\ x_{42}^* \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{\rho}{2}}\sqrt{\frac{4}{3}} \underbrace{\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{12}^* & -h_{11}^* & 0 \\ h_{13}^* & 0 & -h_{11}^* \\ 0 & h_{13}^* & -h_{12}^* \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{22}^* & -h_{21}^* & 0 \\ h_{23}^* & 0 & -h_{21}^* \\ 0 & h_{23}^* & -h_{22}^* \end{bmatrix}}_{=H} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21}^* \\ v_{31}^* \\ v_{41}^* \\ v_{12} \\ v_{22}^* \\ v_{32}^* \\ v_{42}^* \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{2.46})$$

$$C = \tfrac{3}{4}\tfrac{1}{3} E \log\det\left(I_3 + \tfrac{\rho}{3} H^* H\right)$$

$$H^* H = \left(|h_{11}|^2 + |h_{12}|^2 + |h_{13}|^2 + |h_{21}|^2 + |h_{22}|^2 + |h_{23}|^2\right) I_3$$

$$C = \tfrac{3}{4} \log\left(1 + \tfrac{\rho}{3}\left(|h_{11}|^2 + |h_{12}|^2 + |h_{13}|^2 + |h_{21}|^2 + |h_{22}|^2 + |h_{23}|^2\right)\right)$$

$M = 3$, $N = 3$ ortagonal uzay-zaman kodu için sistem modeli:

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{\rho}{2}}\sqrt{\frac{4}{3}} \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ -s_2^* & s_1^* & 0 \\ -s_3^* & 0 & s_1^* \\ 0 & -s_3^* & s_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} \end{bmatrix}$$

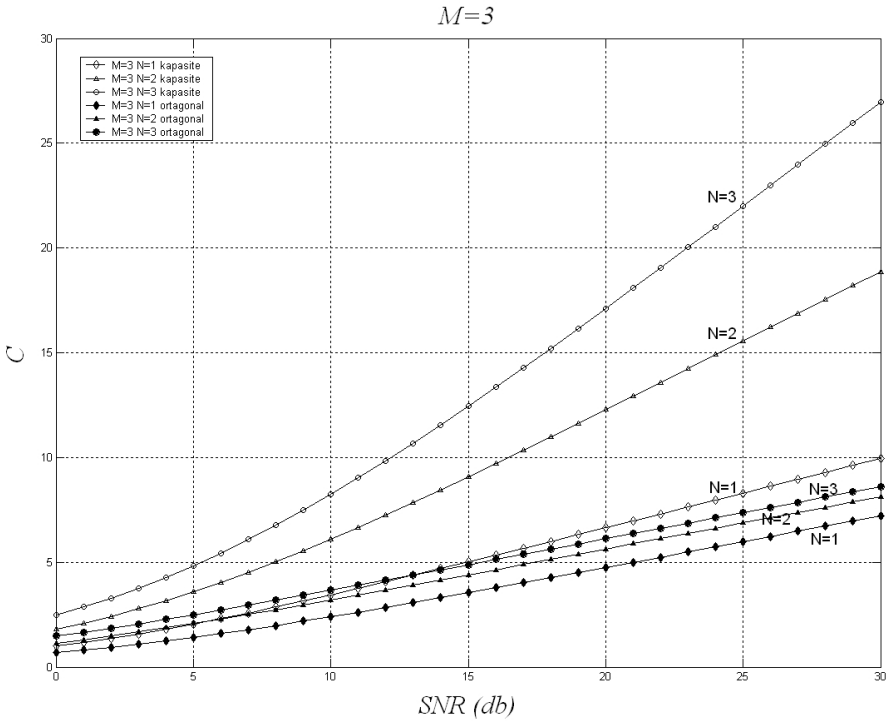
$M = 3$, $N = 3$ ortagonal uzay-zaman kodu için eşdeğer sistem modeli:

$$\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21}^* \\ x_{31}^* \\ x_{41}^* \\ x_{12} \\ x_{22}^* \\ x_{32}^* \\ x_{42}^* \\ x_{13} \\ x_{23}^* \\ x_{33}^* \\ x_{43}^* \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{\rho}{2}}\sqrt{\frac{4}{3}} \underbrace{\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{12}^* & -h_{11}^* & 0 \\ h_{13}^* & 0 & -h_{11}^* \\ 0 & h_{13}^* & -h_{12}^* \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{22}^* & -h_{21}^* & 0 \\ h_{23}^* & 0 & -h_{21}^* \\ 0 & h_{23}^* & -h_{22}^* \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \\ h_{32}^* & -h_{31}^* & 0 \\ h_{33}^* & 0 & -h_{31}^* \\ 0 & h_{33}^* & -h_{32}^* \end{bmatrix}}_{=H} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21}^* \\ v_{31}^* \\ v_{41}^* \\ v_{12} \\ v_{22}^* \\ v_{32}^* \\ v_{42}^* \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.47)}$$

$$C = \tfrac{3}{4}\tfrac{1}{3} E \log\det\left(I_3 + \tfrac{\rho}{3} H^* H\right)$$

$$H^* H = \left(|h_{11}|^2 + |h_{12}|^2 + |h_{13}|^2 + |h_{21}|^2 + |h_{22}|^2 + |h_{23}|^2 + |h_{31}|^2 + |h_{32}|^2 + |h_{33}|^2\right) I_3$$

$$C = \tfrac{3}{4} \log\left(1 + \tfrac{\rho}{3}\left(|h_{11}|^2 + |h_{12}|^2 + |h_{13}|^2 + |h_{21}|^2 + |h_{22}|^2 + |h_{23}|^2 + |h_{31}|^2 + |h_{32}|^2 + |h_{33}|^2\right)\right)$$



Şekil 2.8: $N = 1$ ve 4×3 ortogonal uzay-zaman kodlu sistemin sığası ile $M = 3$,$N = 1, 2, 3$ sisteminin sığası.

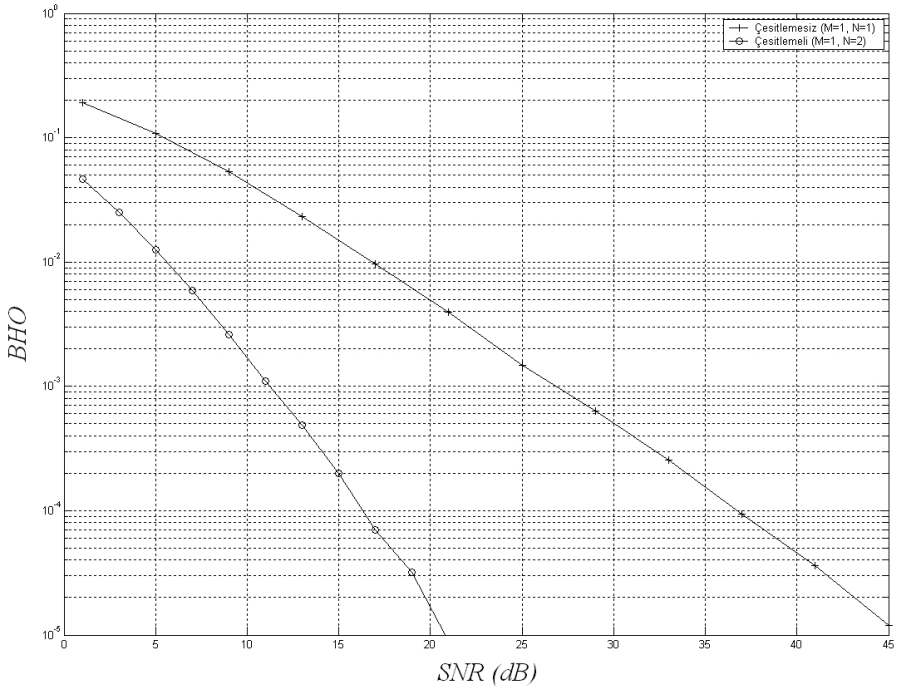
(**2.40**)'da görüldüğü gibi, alıcı anten sayısı $N = 1$ olan ortogonal uzay-zaman kodlu sistemler bandı etkin kullanarak sistem kapasitesinde çalışabilmektedirler. Ancak alıcı anten sayısı $N \geq 2$ olan ortogonal uzay-zaman kodlu sistemler için ayni durum geçerli değildir. (**2.41**),(**2.44**) ve (**2.47**)'de sistem modeli görülen ortogonal uzay-zaman kodlu sistemler, iletilecek olan işareti gerekenden fazla kanal kullanarak gönderdiklerinden, iletim band genişliğini verimsiz kullanırlar Şekil 2.7, Şekil 2.8. Bu bize açıkça göstermektedir ki yüksek iletim oranlarında çalışacak çok sayıda alıcı antenine sahip sitemler için ortogonal tasarımın kullanılması uygun değildir. Ortogonal kodların kodçözme avantajlarından vazgeçtikten sonra iletişim kanalını verimli kullanan kodları aramamız gerekmektedir.

2.4.5 Çeşitleme / kodlama kazancı

Gezgin iletişim kanaldaki sönümleme ve işaretler arası girişim gibi sistem başarımını ciddi bir şekilde düşüren bozucu etkilerin üstesinden gelebilmek için çoklu alıcı ve/veya verici antenli sistemlerde kodlama ve çeşitleme kazancı ile hata oranı eğrileri daha başarımlı bir hale getirilirler.

2.4.5.1 Çeşitleme kazancı

Aynı hata olasılığına sahip, uzay çeşitlemeli sistemin çeşitlemesiz sisteme göre sahip olduğu güç kazancına çeşitleme kazancı denir. ρ işaret/gürültü oranına göre çizilmiş bit/hata oranı eğrisinin eğimini belirler.



Şekil 2.9: Yavaş sönümlemeli kanalda, BPSK işaret kümesi ile çeşitlemeli ve çeşitlemesiz sistemler için bit hata oranı eğrileri.

2.4.5.2 Kodlama kazancı

Aynı hata olasılığında aynı çeşitleme kazancına sahip kodlamalı ve kodlamasız iki sistem arasındaki güç kazancıdır. Kodlama kazancı, eşit çeşitleme seviyesine sahip sistemler arasında hata eğrisinin yatay eksende öteleme miktarını belirler.

Eşit çeşitleme yeteneğine sahip iletişim sistemleri için (örnek: 2 verici, 1 alıcı antenli uzay-zaman blok kodlu sistemler için) farklı kodlama yöntemleri kullanılarak elde edilen bit hata oranı eğrileri, ρ işaret/gürültü oranı ekseninde belli bir ötelemeye neden olur. Başarım eğrilerinin eğimlerini değiştirilmeden kodlama kazancı ile hata eğrilerinde iyileşme sağlanmaktadır.

2.4.6 Çeşitlemeli yüksek hızlı gezgin iletişim sistemleri

Gezgin iletişim sistemlerinde yüksek hızlara erişebilmek için çok yollu sönümlemenin yanında diğer kullanıcılardan kaynaklanan girişimle de mücadele edilmesi gerekmektedir. Bu bozucu etkilere karşı geliştirilmiş en etkin yöntem çeşitleme tekniğidir. Uzay, zaman ve frekans gibi farklı çeşitleme teknikleri bulunmaktadır. Çok sayıda alıcı ve verici antene sahip sistemler için farklı kodlama teknikleri ile farklı çeşitleme teknikleri birarada kullanılabilmektedir. Burada yapılması gereken, kabul edilebilir karmaşıklıkta verimli kodlama ve çeşitleme teknikleri kullanılarak veri iletim oranı sığa değerine oldukça yaklaştırılırken bit hata oranını da düşürmektedir. Pratikte gerçekleştirilebilecek karmaşıklıktaki yapılarla çalışabilecek, yüksek oranlı ve yüksek başarımlı uzay-zaman kodları arasında düşük bit hata oranına sahip olan kodların belirlenmesi amaçlanmalıdır.

3. YÜKSEK HIZLI GEZGİN İLETİŞİM SİSTEMLERİ

Bu bölümde gezgin iletişim sistemlerindeki iletim hızını arttırma yöntemleri incelenecek ve bu yöntemlerin kodçözme karmaşıklığına etkileri ele alınacaktır.

3.1 Uzay-Zaman Blok Kodlarda (R) İletim Oranı

Gezgin iletişim sistemlerinde kullanılan uzay-zaman blok kodlar için sözü edilen sistem modelinde tanımlanmış kanal parametrelerini içeren H matrisinin T adet simge periyodu boyunca sabit kaldığını varsaymıştık. Şimdi bu kanal bilgisi alıcı birim tarafından tamamen bilinebildiğini varsayalım. Ayrıca, kodlayıcı tarafından kullanılan işaret kümesi r-PSK veya r-QAM olsun ve iletilecek simge dizisi Q uzunluklu simge altdizileriyle $s_1, \ldots, s_Q$ şeklinde iletilsin. Bütün bu varsayımlar altında sözünü ettiğimiz sistemin sahip olduğu iletim oranı:

$$R = (Q/T) \log_2 r. \qquad (\mathbf{3.1})$$

Örnek olarak 256-QAM işaret kümesini kullanan M=N=T=2, Q=2 ortogonal uzay-zaman kodlu sistem için iletim oranı R=8 bit/kanal dır. 16-QAM işaret kümesini kullanan ve M=N=T=2, Q=4 olan V-BLAST yapısına sahip sistemin iletim oranı da yine R=8 bit/kanal kullanımı dır. Ayni iletim oranına sahip iki farklı sistemden biri, alınan simgelere 256-QAM işaret kümesi içinden karar verirken, diğeri 16-QAM işaret kümesi içinden karar verir. Bunun nedeni ortogonal sistem için Q=2, V-BLAST için Q=4 olmasından kaynaklanır.

3.2 İletim Oranını Arttırma Yöntemlerinin İncelenmesi

(**3.1**) ile tanımladığımız iletim oranını arttırmak için aşağıdaki iki farklı yöntem önerilebilir. Bunlardan birincisi, T adet simge periyodu süresinde verici antenlerinden gönderilen simge altdizisi uzunluğu Q değerinin arttırılmasıdır. İkincisi, kullanılan işaret kümesini genişleterek simge başına iletilen bit sayısının arttırılmasıdır.

3.2.1 (Q) Simge altdizisinin uzunluğunu arttırarak iletim oranını arttırmak

M verici antenli, N alıcı antenli sistem için, T farklı simge periyodu içinde verimli olarak günderilebilecek simge altdizisinin uzunluğu $Q \leq T.\min(M,N)$ kadardır. Çünkü böylece sistemde bilinmeyen sayısı kadar denklem bulunmaktadır. Oldukça verimli çalışan V-BLAST mimarisinde herbir verici antenden bağımsız simge dizileri gönderildiğinden $Q = T.M$ dir. Çünkü $N \geq M$ dir. Ortogonal tasarımda ise $N > 1$ koşulunda $Q < T.\min(M,N)$ dir. Yüksek iletim oranında çalışacak sistemler oluşturmak için iletilen simge alt dizisi uzunluğu $Q = T.\min(M,N)$ olan uzay-zaman kodları üretilmelidir. V-BLAST bu özelliği barındırır fakat verici anten sayısının alıcı anten sayısından fazla olan ($M > N$) sistemler için uygulanamaz olduğu göz önünde bulundurulmalıdır. Aşağıda V-BLAST ve ortogonal tasarıma ilişkin iletim oranlarını karşılaştıran bir örnek görülmektedir. M=2 verici, N=2 alıcı antenli sistemler için T=2 olduğu durumda iletilen simge alt dizilerinin uzunlukları V-BLAST için $Q = T.min(M,N) = 4$ iken ortogonal tasarım için $Q = 2 < T.min(M,N)$ dir.

$$S_{V-BLAST} = \underbrace{\begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{bmatrix}}_{Q=4} \qquad S_{Orto} = \underbrace{\begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ -s_2^* & s_1^* \end{bmatrix}}_{Q=2}$$

Bu durumda açıkça görülebilir ki $N > 1$ olan ortogonal tasarım iletim oranı bakımından verimsiz çalışırken V-BLAST verimli bir şekilde çalışmaktadır.

3.2.2 İşaret kümesini genişleterek iletim oranını arttırmak

Kodlayıcıda kullanılan işaret kümesinin genişliği r'nin arttırılmasıyla simge başına iletilecek bit sayısı artacağından iletim oranı artar. Bununla birlikte kodçözücüde olası simgeler için yapılan karşılaştırma sayısı artar. İşaretler arası uzaklığın sabit kalması koşulu altında işaret kümesini genişletmek, iletilen işaretlerin ortalama gücünü arttırır. Oysa gezgin sistemlerde güç tüketimi olabildiğince kısıtlanması gerektiğinden iletilen işaretler için ortalama gücün artması istenen bir durum değildir. QAM işaret kümesi için işaret sayısını iki katına çıkartmak, ortalama işaret gücünü yaklaşık 3dB arttırır. $r - QAM$ işaret kümesi için ortalama güç (**3.2**) ile hesaplanır [15].

$$10\ log_{10}\ (2(r-1)/3) \quad [dB] \tag{3.2}$$

İletilen işaretlerin ortalama gücü sabit kalması koşulu ile işaret kümesi genişletilirse işaretler birbirine yaklaşır ve daha kolay hatalı kararların verilmesine neden olur.

3.3 Çeşitleme Çoğullama İlişkisi

Yavaş sönümlemeli MIMO kanallarda çalışan gezgin iletişim sistemlerinin başarımı çeşitleme kazancına bağlılık gösterir. Çeşitleme kazancı (diversity gain) simge hata oranı eğrisinin eğimini belirler. M verici ve N alıcı antenli Rayleigh yavaş sönümlemeli MIMO kanal için en büyük çeşitleme kazancı: $M.N$ dir. İstenilen belli bir R iletim oranında yüksek ρ işaret/gürültü oranı için hatanın kaçınılmaz olduğu $p_{out}(R)$ olasılığı yaklaşık olarak (**3.3**) ile gösterilebilir [17].

$$\begin{aligned} p_{out}(R) &= P(C < R) \\ p_{out}(R) &= P\left(\log\det(I_N + \frac{\rho}{M}HH^*) < R\right) \\ p_{out}(R) &\approx \frac{1}{\rho^{MN}} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Hızlı sönümlemeli MIMO kanalda ise sistem başarımı çoğullama kazancına (multiplexing gain) bağlılık gösterir. Kanalın uzaysal bağımsızlık derecesi $k = n_{min} = min(M, N)$ çoğullama kazancını belirler. Rayleigh sönümlemeli kanalın sığası $n_{min} \log \rho$ ile belirlenir [17]. Yavaş sönümlemeli kanalda sabit bir R iletim oranı için çeşitleme kazancı tek başına geniş bir anlam içermez. Örneğin $M \times N$ MIMO kanal ile $M.N \times 1$ MISO kanalının maksimum çeşitleme kazançları eşit ve $M.N$ dir. Oysa MIMO kanal için $k = min(M, N)$ iken MISO kanal için $k = 1$ dir. Bu durum gösteriyor ki çeşitleme kazancını en büyüklemek tek başına yeterli değildir.

Çeşitleme ve çoğullama kazancı ilişkisinde görülebilir ki; bunlardan birini arttırmak istediğimizde diğerinden fedakarlık etmemiz gerekir. Çoğullama kazancının k olduğu durumda, çeşitleme kazancı $d^*(k)$ aşağıdaki şekilde ifade edilir [17].

$$\begin{aligned} R &= k \log \rho \\ p_{out}(R) &\approx \rho^{-d^*(k)}, \\ \lim_{\rho \to \infty} \frac{\log p_{out}(k \log \rho)}{\log \rho} &= -d^*(k). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Kanalın yavaş sönümlemeli durumdaki başarımı üzerinde çeşitleme ve çoğullama ilişkisi (**3.4**)'de elde edilir. Benzer şekilde çeşitleme ve çoğullama ilişkisini uzay-zaman kodlar için p_{out} yerine p_e hata olasılığı ile (**3.5**)'de elde edebiliriz.

$$\begin{aligned} R &= k \log \rho \\ p_{out}(R) &\approx \rho^{-d}, \\ \lim_{\rho \to \infty} \frac{\log p_e}{\log \rho} &= -d. \end{aligned} \tag{3.5}$$

3.3.1 1×1 Rayleigh kanalda çeşitleme-çoğullma ilişkisi

Yavaş sönümlemeli Rayleigh kanalda,

$$y = hx + v \tag{3.6}$$

İşaret/gürültü oranı ρ, iletim oranı R bit/kanal kullanımı olan PAM işaret kümasi kullanılsın. PAM işaret kümesinde 2^R adet işaret yaklaşık olarak $-\sqrt{\rho}$ ve $\sqrt{\rho}$ sınırları arasında bulunur. Bu durumda işaretler arası en küçük uzaklık D_{min} yaklaşık olarak (**3.7**) ile belirlenir.

$$D_{min} \approx \frac{\sqrt{\rho}}{2^R} \tag{3.7}$$

Hata olasılığı p_e yüksek ρ işaret/gürültü oranı değerleri için yaklaşık olarak (**3.8**) ile belirlenebilir.

$$p_e \approx \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{D_{min}^2}{4 + D_{min}^2}}\right) \approx \frac{1}{D_{min}^2} \approx \frac{2^{2R}}{\rho} \tag{3.8}$$

İletim oranı $R = k \log \rho$ için hata olasılığı yaklaşık olarak (**3.9**) ile bulunur.

$$p_e \approx \frac{2^{2k \log \rho}}{\rho} = \frac{1}{\rho^{1-2k}} \tag{3.9}$$

Buradan çeşitleme ve çoğullama ilişkisi (**3.10**) ile kolayca elde edilebilir.

$$-d_{pam}(k) = \lim_{\rho \to \infty} \frac{\log\left(1/\rho^{1-2k}\right)}{\log \rho} \tag{3.10}$$

$$d_{pam}(k) = 1 - 2r, \quad r\epsilon \left[0, \frac{1}{2}\right]. \tag{3.11}$$

Bu analizleri R iletim hızında, QAM işaret kümesinin kullanıldığı durum için tekrarladığımızda; her işaret iki bit taşıdığından $2^{R/2}$ adet işaret bulunur, işaretler arası en küçük uzaklık D_{min} yaklaşık olarak (**3.12**) ile bulunur.

$$D_{min} \approx \frac{\sqrt{\rho}}{2^{R/2}} \tag{3.12}$$

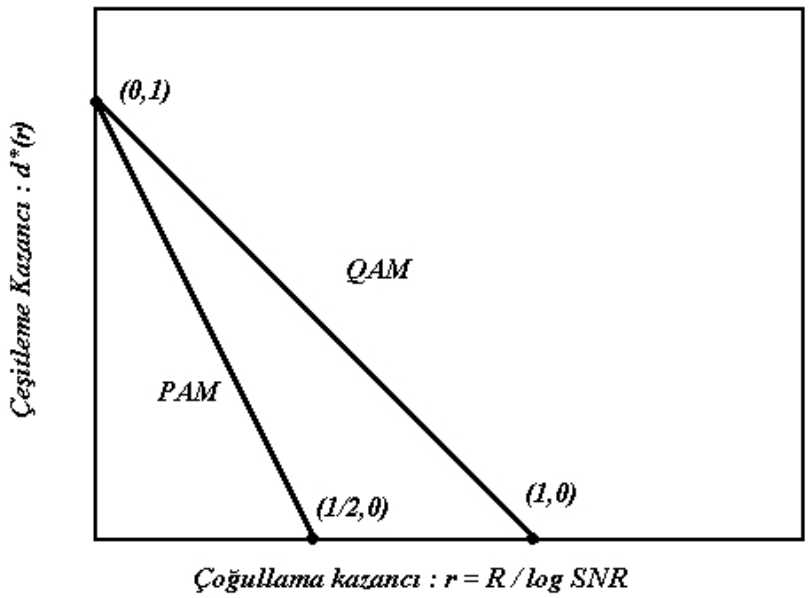
Yüksek ρ işaret/gürültü oranında hata olasılığı p_e yaklaşık olarak (**3.13**) ile gösterilir.

$$p_e \approx \frac{2^R}{\rho} \tag{3.13}$$

Buradan çeşitleme ve çoğullama ilişkisi (**3.14**) ile kolayca elde edilebilir. PAM ve QAM için kazançlar arasındaki ilişki Şekil 3.1'de çizilmiştir.

$$-d_{qam}(k) = \lim_{\rho \to \infty} \frac{\log\left(2^R/\rho\right)}{\log \rho} \tag{3.14}$$

$$d_{qam}(k) = 1 - k, \quad k\epsilon\,[0,1]\,. \tag{3.15}$$



Şekil 3.1: Yavaş sönümlemeli Rayleigh kanalda
1×1 sistem için çeşitleme-çoğullama ilişkisi

QAM ve PAM için Şekil 3.1 ile gösterilen çeşitleme-çoğullama ilişkisindeki iki uç nokta, bize ρ işaret/gürültü oranının arttırılmasının etkisini iki farklı durum için inceleme imkanı vermektedir. Bu durumlardan birincisi; sabit R iletim

oranı için, güvenilirliğin (işaretler arası minimum uzaklığın) değişimi dir. İkinci durum ise; güvenilirlik sabit olduğunda, iletim hızı R'nin değişimi dir. Genel anlamda, R iletim oranı veya güvenilirliği D_{min} arttırabiliriz, ancak bunun sonunda ödeyeceğimiz bedeli çeşitleme çoğullama ilişkisiyle görebiliriz. Dikkat edilirse klasik anlamda çeşitleme kazancı, yalnızca sabit R iletim oranı için hata eğrisinin eğimini belirler. Örnek olarak; PAM ve QAM klasik anlamda eşit çeşitleme kazancına sahipken, belli bir işaret/gürültü oranı artışına QAM sabit D_{min} için, R iletim oranını daha fazla arttırır. QAM'nin PAM'ye göre daha iyi olduğu Şekil 3.1 de ilişki egrilerinde görülebilir.

3.3.2 Minimum bedel

Çeşitleme-çoğullama ilişkisi içinde tanımlanan minimum bedeli 1×1 sistem için (**3.16**) ile bulunur.

$$\begin{aligned} R &= k \log \rho \\ p_{out}(k) &= P\left\{\log\left(1+|h|^2\rho\right) < k\log\rho\right\} \\ &= P\left\{|h|^2 < \frac{\rho^r - 1}{\rho}\right\} \\ &\approx \frac{1}{\rho^{1-k}} \end{aligned}$$

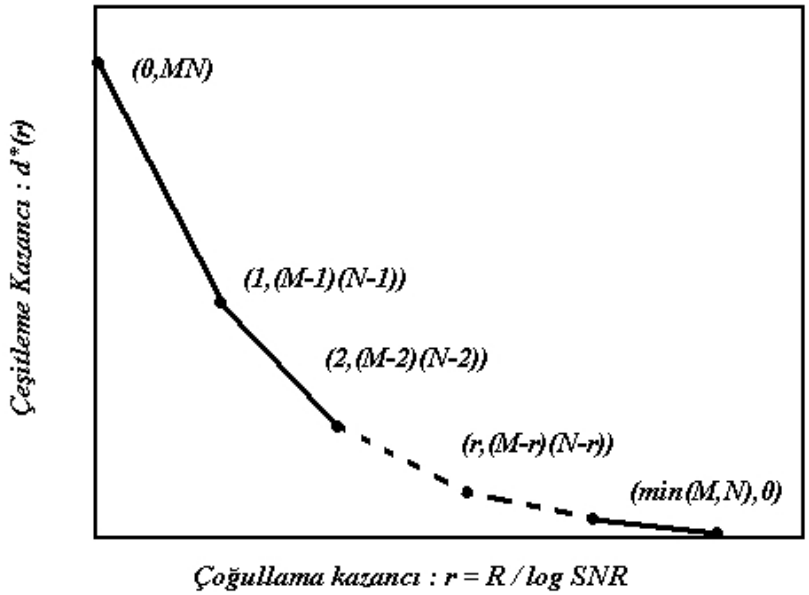
$$d^*_{min}(k) = 1 - k \quad k\epsilon\,[0,1]\,. \tag{3.16}$$

3.3.3 M × N MIMO kanal için minimum bedel

Rayleigh sönümlemeli $M \times N$ kanalın $R = k\log\rho$ iletim oranında $p_{out}(k)$ hata olasılığı (**3.17**) ile gösterilir.

$$p_{out}(r) = P\left\{\log\det\left(I_N + \frac{\rho}{M}HH^*\right) < k\log\rho\right\}. \tag{3.17}$$

Şekil 3.2 yavaş sönümlemeli MIMO kanal için çeşitleme-çoğullama ilişkisi ile başarım yeteneğini özetler. Eğride $k \rightarrow 0$ için $M.N$ en büyük çeşitleme kazancına sahiptir, ancak bedel çoğullama kazancının düşük olmasıyla



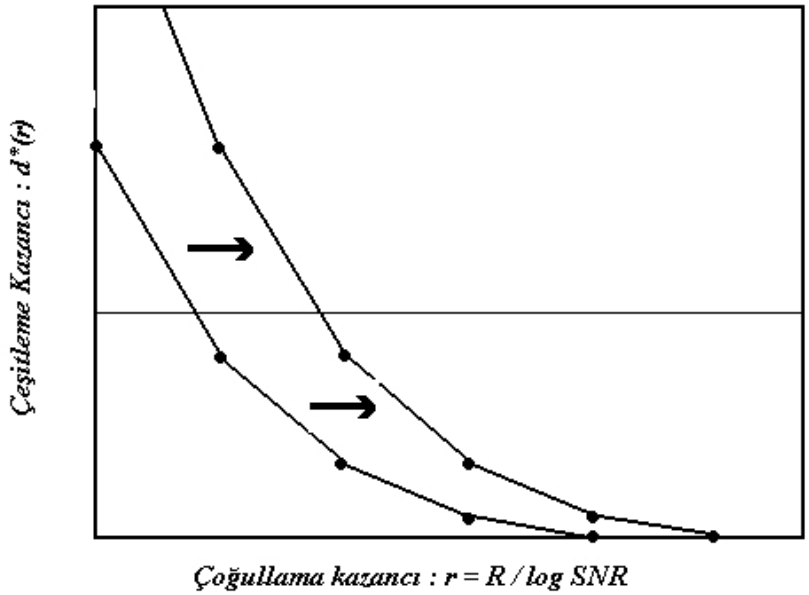
Şekil 3.2: Yavaş sönümlemeli Rayleigh kanalda
$M \times N$ sistem için çeşitleme-çoğullama ilişkisi

ödenir. Eğride gösterilen diğer bir durum $k \rightarrow min(M, N)$ için sistem hızlı sönümleme kapasitesinde çalışır, çeşitleme kazancı 0 değerine yakınsar $d \rightarrow 0$. Çeşitleme-çoğullama ilişki eğrisi bu iki uç durum arasındaki yavaş sönümlemeli durum için başarım yeteneğini, ödenmesi gereken bedeli ifade eder. Alıcı ve verici birime birer anten eklendiğinde çeşitleme kazancı $k = min(M+1, N+1)$ 1 artar. Ayrıca çeşitleme kazancındaki artış incelenebilir. Çünkü ilişki eğrisi bu durumda bir birim sağa ötelenir.

3.4 Kodçözücü için Optimum Karar Kuralı

Kodçözücü birim alıcıya ulaşan $Y = HS + V$ gürültülü vektöre bakarak gönderilmesi en yüksek olasılığa sahip S işaret vektörüne karar verir. Kanal katsayılarını içeren H matrisi T simge periyodu boyunca sabit ve alıcı birim tarafından tamamen bilindiği varsayımı altında, kodçözücü olası tüm S vektörleri için (**3.19**) karesel uzaklığını hesaplar.

$$\|Y - HS\|^2 \qquad (\mathbf{3.18})$$



Şekil 3.3: Alıcı ve verici birime 1 anten eklendiğinde çeşitleme-çoğullama ilişkisinin değişimi

Kodçözücü olası tüm S vektörleri için elde edilen karesel uzaklık değerleri arasında minimum karesel uzaklığa ilişkin S vektörüne karar verir. Gönderilen simgeye optimum olarak karar veren karar kuralına en büyük olabilirlik karar kuralı denir.

$$\hat{S} = \min_{S} \left\{ \|Y - HS\|^2 \right\} \qquad (\mathbf{3.19})$$

3.5 Kodçözme Karmaşıklığı

Yüksek hızlı sistemlerde uygulanabilecek iletim hızının kanal kapasitesiyle üstten sınırlandırıldığını 2.Bölüm'de belirtmiştik. Bu durumda kodlayıcı birimde kullanılan işaret kümesini genişletmeyle kapasite değerine yaklaştırmanın mümkün olabileceği bir önceki bölümde açıklanmıştır. Ancak işaret kümesini genişletmekle en büyük olabilirlik karar kuralını kullanan kodçözücünün işlem karmaşıklığı ciddi oranda artar. M=4, N=2 olan sisteminde işaret/gürültü oranı $\rho = 20$dB seviyesi için kanal kapasitesi R=12 bit/kanal kullanımı'ndan büyüktür. Bu sistem için R=12 ve T=4 seçildiğinde TxM boyutlu $2^{RT} = 2^{48} \approx 10^{14}$ farklı S matrisi için karşılaştırma yapılmalıdır. Pratikte böyle bir kodçözücüyü

gerçek-zamanlı iletişim için gerçekleştirmek olanaksızdır. Bu durumda tüm olası vektörler ile gerçekleştirilen yoğun karşılaştırma işlemleri yerine en yakın vektörü bileşen bileşen belirleyen küresel kodçözme yöntemi etkin bir şekilde kullanılabilir.

4. UZAY-ZAMAN KODLAR İÇİN HIZLI KODÇÖZME ALGORİTMALARI

Uzay-zaman blok kodlu sistemlerde kullanılan kodçözme algoritmalarının sistem başarımı üzerinde önemli etkileri vardır. Bunlardan en büyük olabilirlikli (ML, maximum likelihood) karar kuralı olası sonuçlar içerisinden en küçük hata oranına ilişkin olanına karar vermeye dayandığından optimum şekilde çalışır. BLAST gibi iteratif yada sıralamalı iteratif (optimal-ordering BLAST gibi) kodçözücülerden daha başarımlıdır. Olası her simge vektörü için karşılaştırma işlemine ihtiyaç duyan, ML karar kuralı kullanan kodçözücünün yüksek hızlara çıkıldığında en önemli sorunu kodçözme karmaşıklığının ciddi ölçüde artmasıdır. Bu nedenle yüksek hızlı sistemlerde, optimum ML başarımlı ve düşük kodçözme karmaşıklığına sahip kodçözme algoritmalarına ihtiyaç duyulur. Lineer işlemlere dayanan farklı kodçözme yöntemleri Tablo 4.1 de sıralanmıştır.

Tablo 4.1: Uzay-zaman kodçözme Yöntemleri

A- Optimum altı kodçözücüler
⋆ Enküçük kareler çözümü
⋆ NC (nulling and cancelling) kestirimi
⋆ Optimal sıralamalı NC kestirimi
B- Optimum kodçözücüler (ML karar kuralı)
⋆ Ayrıntılı arama (exhaustive search)
⋆ Optimum küresel kodçözme

Çoğunlukla optimum olmayan kodçözme yöntemlerinde başarımdaki kötüleşmenin nedeni kodçözme işlemindeki varsayımlardan kaynaklanan hata yayılımının görülmesidir.

4.1 Kodçözme Probleminin Tanımı

$$A\ x = b \tag{4.1}$$

(**4.1**) ile gösterdiğimiz denklem sistemi için A tersi alınamayan bir matris olduğunda bilinmeyen x vektörü enküçük kareler (least-squares) çözümü ile kestirilebilir (**4.2**).

$$\begin{aligned} A^T A\ x &= A^T b \\ x &= (A^T A)^{-1} A^T b \end{aligned} \tag{4.2}$$

Ancak (**4.2**) ile önerilen çözüm olan x vektörünün elemanları reel değerler alır. Oysa haberleşme sistemlerinde, bulunmak istenen vektörün elemanları ayrık değerler almaktadır ve işaret kümesi içindeki olası işaret kümesi elemanları (constellation points) içinden karar verilmelidir. Alıcı tarafından alınan gürültülü işaret $r = Hs+v$ olsun, bu durumda bilinmeyen vektörü bulmaya yönelik önerilen bir diğer çözüm r'ye en yakın Hs kafes noktasını belirlemeye dayanır. Bu çözüm açıkça (**4.3**) ile ifade edilebilir.

$$\min_{s \in \mathcal{Z}^m} \parallel r - Hs \parallel^2 \tag{4.3}$$

Ayrık değerli en küçük kareler yöntemi (**4.3**) ile ifade edilir. Burada $r \in \mathcal{R}^n$, $H \in \mathcal{R}^{n \times m}$ reel değerli matrisleri, $\mathcal{Z}^m$ ise m-boyutlu tamsayılı bileşenlerden oluşan kafesi ifade eder. Benzer şekilde s m-boyutlu ve elemanları tamsayı değerli vektör ile ifade edilir. Çözümü aradığımız uzay, sonsuz $\mathcal{Z}^m$ kafesinin sonlu bir alt kümesidir $\mathcal{D} \subset \mathcal{Z}^m$.

$$\min_{s \in \mathcal{D} \subset \mathcal{Z}^m} \parallel r - Hs \parallel^2 \tag{4.4}$$

4.1.1 Ayrık değerli en küçük kareler probleminin geometrik yorumu

Bu yöntem basit bir geometrik gösterime sahiptir. s vektörü m-boyutlu kafes içinde bileşenleri ayrık değerler alsada, Hs n-boyutlu eğrilmiş kafeste reel değerli bileşenlere sahiptir. Bu durumda Hs eğrilmiş kafesi içerisinden, alınan gürültülü $r \in \mathcal{R}^n$ vektörüne Euclid uzaklığınca en yakın olan kafes noktası kestirilir. Standart enküçük kareler probleminde bilinmeyen $s \in \mathcal{R}^m$ vektörü sözde tersalma



Şekil 4.1: Ayrık değerli enküçük kareler yönteminin geometrik yorumu.

(pseudo-inverse) ile (**4.2**)'de gösterildiği gibi kolayca bulunabilir. Oysa ayrık değerli enküçük kareler probleminin çözümünü bulmak çok daha zordur. Arama uzayının sonlu yada sonsuz olmasından bağımsız olarak bu zorluğun asıl nedeni arama uzayının ayrık olmasıdır.

4.1.2 Ayrık değerli en küçük kareler probleminin çözüm yöntemleri

Birçok farklı uygulamada karşılaşılan Ayrık değerli en küçük-kareler probleminin çözümü için bazı yaklaşımlar, deneme yanılma veya kombinasyonlar kullanılır. Haberleşmedeki uygulamalarda bu yaklaşımlar üç grupta sınıflandırılabilir. Bu yaklaşımlar; Babai kestirimi, geri beslemeli karar kestirimi ve optimal sıralamalı geri beslemeli karar kesitirmi dir. Bu yöntemlerdeki kestirimlerde yapılan kabuller nedeniyle hata yayılımı görülmektedir, bu nedenle optimum altı çalışan çözüm yöntemleridir. Bunun yanında kodçözme karmaşıklıkları düşüktür.

4.1.2.1 En küçük kareler probleminde Babai kestirimi

$$\hat{s}_B = \left[\left(H^T H \right)^{-1} H^T r \right]_{\mathcal{Z}}. \tag{4.5}$$

Babai kestirimi ile standart en küçük-kareler probleminin reel bileşenli çözümüne en yakın, tamsayı bileşenli $\hat{s}_B$ vektörü elde edilir. Bu işlem sıfıra zorlayıcı (zero-forcing equalization) diye adlandırılır.

4.1.2.2 Geribeslemeli karar kestirimi (N/C)

Bu yöntem genel olarak Babai kestiriminin s vektörünün herbir elemanı için ayrı ayrı uygulanmasına dayanır. Babai kestirimi ile s vektörünün önce s_1 bileşeni kestirilir. Sonra s_1'in doğru bulunduğu varsayımıyla s_1'in etkisi çıkartılarak tamsayılı enaz-kareler probleminin mertebesi azaltılır. Sonraki kestirimler s_2, s_3, $\cdots$ ve son olarak s_m için problemin mertebesi azaltılarak tekrarlanır.

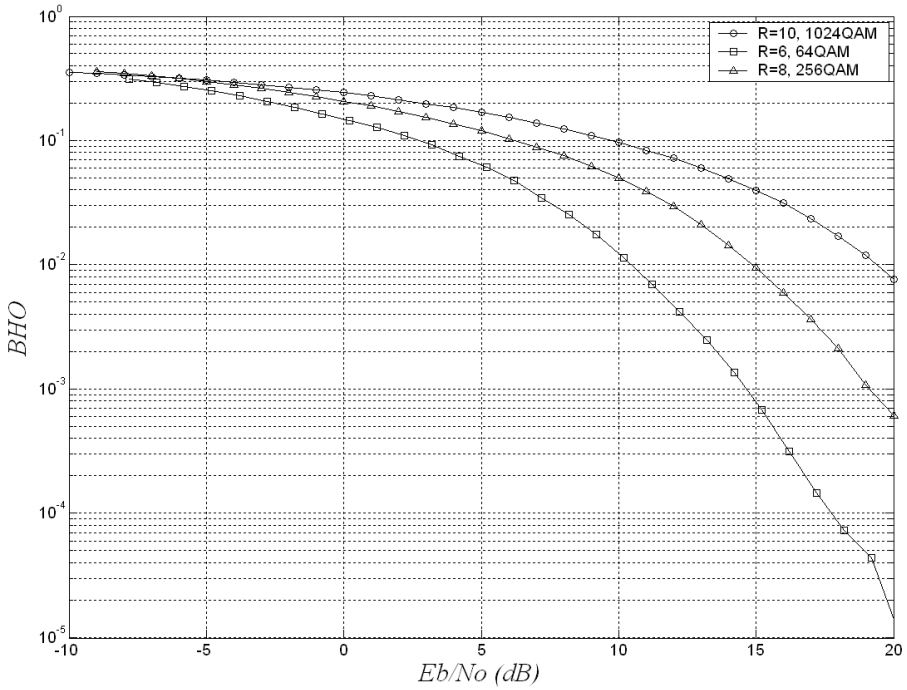
4.1.2.3 Optimal sıralamalı geri beslemeli karar kestirimi (N/C)

Geribeslemeli karar kestirimindeki hata yayılımını azaltmak için Babai kestirimini s_1'den s_m bileşenine doğru gerçekleştirmek yerine alıcıya ulaşan en güçlü bileşenden en zayıf bileşene doğru gerçekleştirilmesine dayanır. Bu işleme optimal sıralama denir. Böylece hatalı kestirimden kaynaklanan hata yaılımı minimize edilmiş olur. Geri beslemeli karar kestirimi ile optimal sıralamalı geri beslemeli karar kestirimi yöntemleri V-BLAST için önerilmiş olup [6,28], verici anten sayısının alıcı anten sayısından büyük olmadığı ($M \leq N$) durumda çalışmaktadır.

4.1.3 Optimum çözüm (ML)

Kodçözücü birim tarafından karar verilebilecek olası tüm işaret vektörleri arasından gönderilmesi en yüksek olasılıklı (ML) olan s vektörüne karar veren en büyük olabilirlikli karar kuralı optimum karar kuralıdır. Şekil 4.2'de Ortogonal 2×2 uzay zaman kodlu sistemin bit hata oranı (BHO) eğrileri gösterilmiştir.

R=6,8,10 bit/kanal kullanımı için 64,256,1024-QAM işaret kümeleri kullanılmıştır. Kodçözücüde enbüyük olabilirlik karar kuralını uygulayan kodçözme yöntemi kullanılmıştır. Ortogonal kodlar için sembol başına tek tek kestirim yöntemi uygulanabilse de biz burada tam arama (exhaustive search) yöntemiyle R=6 için $2^{RT} = 2^{12} = 4096$ olası işaret vektörü içinden, R=8 için $2^{RT} = 2^{16} = 65536$ olası işaret vektörü içinden ve R=10 için $2^{RT} = 2^{20} = 1048576$ olası işaret vektörü içinden kodçözücü birim optimum şekilde gönderilmesi en olası simgeye karar vermektedir.

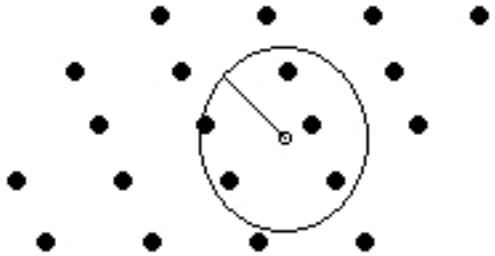


Şekil 4.2: 2x2 Ortogonal uzay-zaman kodu için başarım eğrileri.
İletim oranı R=6,8,10 bit/kanal kullanımı.
İşaret kümesi 64,256,1024-QAM.

Yüksek iletim oranlarında çalışacak sistemler için kodçözme işleminin optimum gerçekleştirilmesi oldukça zor fakat gerekli bir özelliktir. Literatürde yaygın olarak bilinen bir optimum kodçözücü olan tam arama (exhaustive search) yöntemi yüksek oranda gerçekleştirilemeyecek ölçüde işlem karmaşıklığı getirir. Bu nedenle yüksek oranlı uzay-zaman kodlar için optimum ML karar kuralı ile çalışan ve pratik olarak gerçekleştirilebilecek karmaşıklıktaki küresel kodçözücüleri kullanmak uygundur.

4.2 Küresel Kodçözme Yöntemi

Küresel kodçözme yöntemi, m boyutlu vektör uzayında merkezi alınan gürültülü işaret vektörü olan $r \in \mathcal{R}^m$ ve yarıçapı $\mathbf{d}$ ile tanımlanmış hiperkürenin içinde bulunan $s \in \mathcal{Z}^m$ kafes noktasının belirlenmesi şeklinde tanımlanmaktadır. Küre içerisinde sadece bir kafes noktası bulunduğu varsayımından yola çıkarak bu kafes noktasını belirlemeye dayanır.[34]



Şekil 4.3: Küresel kodçözme yöntemi

Küresel kodçözme yönteminde üzerinde durulması gereken iki önemli nokta bulunmaktadır.

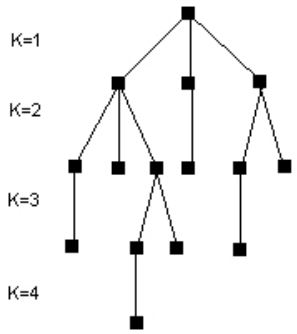
1. Hiperkürenin yarıçapı olan **d**'nin nasıl seçileceği;

   Hiperkürenin yarıçapı olan **d**, kodçözücü için önemli bir parametredir. **d** değeri çok büyük olduğunda, küre içinde çok fazla sayıda kafes noktası bulunur. Yada **d** değeri çok küçük olduğunda, küre içinde hiçbir kafes noktası bulunamayabilir. Bu durumda seçilebilecek optimum **d** değeri; alınan $r \in \mathcal{R}^m$ gürültülü işareti ile buna en yakın $s \in \mathcal{Z}^m$ işaret vektörüne ilişkin kafes noktası arasındaki uzaklıktır. Böylece içinde kafes noktası bulunan enküçük küre tanımlanır. **d** değerinin seçimi ilerideki bölümlerde detaylı incelenecektir.

2. Hiperküre içinde bulunan kafes noktalarının nasıl belirleneceği;

   Küresel kodçözme ile hiperküre içinde bulunan kafes noktalarını belirlemek üzere herbir kafes noktası için karşılaştırma işlemi yapılmayacaktır. Aksi halde çok fazla sayıda karşılaştırma işlemine gerek duyulur. Bunun yerine,

iteratif bir şekilde, küre içeriside bulunabilecek kafes noktalarının ilk bileşenlerinin neler olabileceğine karar verilir. İlk bileşeni, belirlenen bu bileşenler içinde bulunmayan kafes noktaları elenir. Belirlenmiş olan bu ilk bileşenlere ilişkin hiperküre içinde bulunabilmeleri için ikinci bileşenlerin neler olabileceği belirlenir. İterasyon ilk iki bileşeni belirlenmiş bileşen kümeleri içinde olan kafes noktaları için devam ederken diğerleri yine elenir. Böylece son bileşene kadar elenmeyen kafes noktalarının hipeküre içinde bulunduğu belirlenmiş olur.

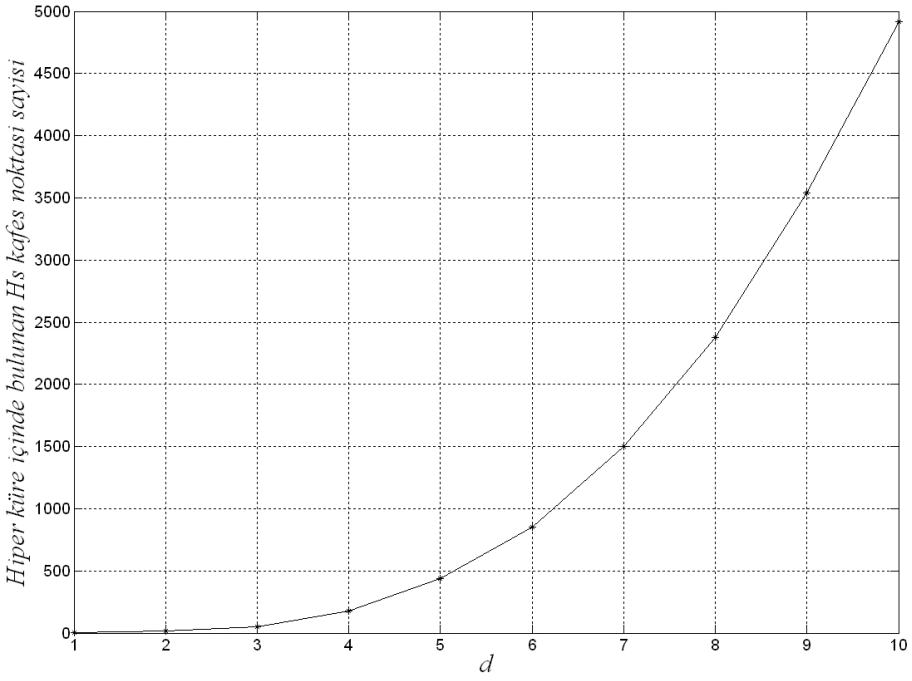


Şekil 4.4: 4 boyutlu hiperküre içindeki kafes noktalarının belirlenmesi, örnek ağaç yapısı.

K=4 bileşenli kafes sistemi için Şekil 4.4 ile verilen ağaç yapısında, ilk iterasyon için 3 farklı bileşen bulunmuştur. İkinci iterasyonda ilk bileşenlerle bağlantılı 6 farklı olası bileşen bulunmuştur. Üçüncü iterasyonda 3. bileşen için 6 olası ikinci bileşenden 3'ü elenmiş, 4 tane olası 3. bileşen bulunmuştur. 4. iterasyonda tek bir kafes noktası bulunmuş diğerleri elenmiştir. Eğer iterasyonun herhangi bir adımında, elenmemiş bir kafes noktası kalmaz ise hiper küre içerisinde hiçbir kafes noktasının bulunmadığı anlaşılır. İterasyon sonlandırılır ve hiper kürenin yarıçapı **d** arttırılarak iterasyona en baştan yeniden başlanır. Son bileşeniyle beraber küre içerisinde olduğu belilenen ilk r vektörüne karar verilir [34].

4.2.1 Hiper küre için yarıçap d'nin seçimi

Hiper kürenin yarıçapını tanımlayan **d**'nin seçimi, küresel kodçözme algoritmasının karmaşıklığını önemli ölçüde belirler. Eğer **d** çok büyük seçilirse küre içerisinde çok sayıda Hs kafes noktası bulunur. Eğer **d** gereğinden küçük seçilirse, küre içerisinde hiçbir kafes notası bulunmayabilir. Kolayca görülebilir ki, hiper küre için optimum **d** yarıçap uzunluğu; içinde sadece bir kafes noktasını bulunduran en küçük kürenin yarıçap uzunluğudur. $\hat{s}_B$ Babai kestirimi olmak üzere, $d = \|r - H\hat{s}_B\|$ ile gösterilen yarıçapa sahip küre içerisinde en az bir kafes noktası bulunur. Ancak bu küre içinde çok fazla sayıda kafes noktası bulunabilir.

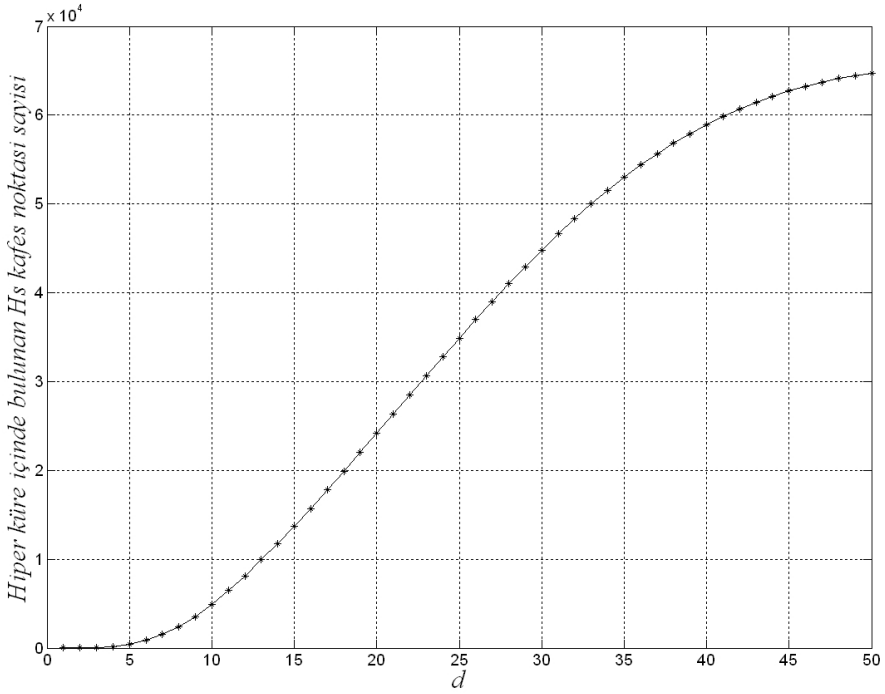


Şekil 4.5: **d**'nin değişimi ile Hiper küre içinde bulunan kafes noktası sayısının değişimi.

Küre yarıçapının artışı, küre içerisinde bulunan Hs kafes noktası sayısını üstel şekilde arttırır. Bölüm 4.1.4'de ele aldığımız sistem için Şekil 4.5'de görüldüğü gibi, **d**=1 için küre içinde hiçbir kafes noktası bulunmazken, **d**=10 için yaklaşık 5000 kafes noktası bulunur.

4.2.2 Hiper küre için çok büyük yarıçap kullanımı

Yarıçapın yeterince büyük seçildiği durumda, olası tüm Hs kafes noktaları küre içerisinde bulunmaktadır. Bu durumda küre içinde olduğu belirlenen ilk kafes noktası ML çözümüne ait olmayabilir. Bundan sonra yapılması gereken işlem, küre içindeki tüm kafes noktaları arasında ayrıntılı karşılaştırma işlemi ile ML çözümünün bulunması gerekir.



Şekil 4.6: **d**'nin büyük değerleri için küre içinde bulunan kafes noktası sayısı.

Şekil 4.6'de gösterildiği gibi **d**=50 için verilen bir örnekte hiper küre içerisinde olası 65532 farklı Hs kafes noktalasının hepsi bulunmaktadır. Bu durumda gönderilmiş işarete karar verirken, kürenin içinde bulunan tüm kafes noktaları için ML karar kuralı uygulanmalıdır. Görülebilir ki, **d**'nin seçimi küresel kodçözme algoritmasını çok önemli bir şekilde etkilemektedir. Bu nedenle, iterasyona küçük bir **d** değeri ile başlanılmalı, ve küre içerisinde enaz bir kafes noktası bulunana kadar **d** arttırılarak iterasyon yeniden başlatılmalıdır. Bu yöntem küre içerisindeki olası işaretleri bileşen bileşen bulmaya dayandığından olurlu işaret yada işaretlere ilişkin son bileşen belirlendiğinde bu işaret yada işaretlerin küre

içerisinde olduğu kesin olarak belirlenmiş olur. Eğer son bileşeni belirleyene kadar olası işaretler tükeniyorsa küre içerisinde hiçbir işaretin bulunmadığı belirlenmiş olur. Bu durumda göz önünde bulundurulması gereken nokta, **d**'nin artım hızıdır. Hızlı arttırılırsa küre içerisinde çok sayıda Hs kafes noktası bulunabilir. **d** yavaş arttırılırsa, küre içerisinde kafes noktası bulunana kadar iterasyonun birçok sefer baştan başlatılması gerekir.

4.2.3 Küresel kodçözme algoritması

Küresel kodçözmenin amacı (**4.6**) ile gösterildiği gibi, alınan gürültülü işaretleri içeren r vektörüne ençok **d** uzaklığı kadar mesafede bulunan Hs kafes noktalarını belirlemektir [34].

$$\mathbf{d^2} \geq \| \, r - Hs \, \|^2 \, . \tag{4.6}$$

(**4.6**) ile ilgili aşağıdaki QR algoritması kullanılarak gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra küresel kodçözme için iterasyon bağıntısı (**4.8**) elde edilir. Burada $\begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix}$ ortonormal Q matrisi olduğundan ve R ise üst üçgen matris olduğundan ifade aşağıdaki gibi düzenlenebilir [34].

$$\mathbf{d^2} \geq \left\| r - \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} s \right\|^2 .$$

$$\mathbf{d^2} \geq \left\| \begin{bmatrix} Q_1^* \\ Q_2^* \end{bmatrix} r - \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} s \right\|^2$$

$$\mathbf{d^2} \geq \|Q_1^* r - Rs\|^2 + \|Q_2^* r\|^2$$

$$\underbrace{\mathbf{d^2} - \|Q_2^* r\|^2}_{d_1^2} \geq \left\| \underbrace{Q_1^* r}_{y} - Rs \right\|^2$$

$$d_1^2 \geq \|y - Rs\|^2 \tag{4.7}$$

Burada enson elde ettiğimiz ifadede R üst üçgen matrisinin $i.$ satır ve $j.$ sütunundaki elemanını $r_{i,j}$ ile gösterelim. Bu durumda (**4.7**) ifadesini aşağıdaki toplamlar farkının karesi şeklinde ifade edebiliriz.

$$d_1^2 \geq \sum_{i=1}^{m} \left(y_i - \sum_{j=i}^{m} r_{i,j} s_j \right)^2 \tag{4.8}$$

(**4.8**) ile elde edilen iterasyon denklemini açık yazacak olursak (**4.9**) elde edilir.

$$d_1^2 \geq (y_m - r_{m,m}s_m)^2 + (y_{m-1} - r_{m-1,m-1}s_{m-1} - r_{m-1,m}s_m)^2 + \longrightarrow$$

$$(y_{m-2} - r_{m-2,m-2}s_{m-2} - r_{m-2,m-1}s_{m-1} - r_{m-2,m}s_m)^2 + \longrightarrow$$

$$(y_{m-3} - r_{m-3,m-3}s_{m-3} - r_{m-3,m-2}s_{m-2} - r_{m-3,m-1}s_{m-1} - r_{m-3,m}s_m)^2 + ... \tag{4.9}$$

İterasyonun birinci basamağında (**4.9**) deki sadece ilk terim dikkate alınır. Burada küre içerisinde olabilecek işaret vektörlerinin son bileşenlerine ilişkin olası değerler belirlenir.

$$d_1^2 \geq (y_m - r_{m,m}s_m)^2$$

$$r_{m,m} > 0 \Rightarrow \left\lceil \frac{y_m - d_1}{r_{m,m}} \right\rceil \leq s_m \leq \left\lfloor \frac{y_m + d_1}{r_{m,m}} \right\rfloor$$

$$r_{m,m} < 0 \Rightarrow \left\lfloor \frac{y_m - d_1}{r_{m,m}} \right\rfloor \geq s_m \geq \left\lceil \frac{y_m + d_1}{r_{m,m}} \right\rceil$$

ile hiperkürenin içinde bulunabilecek tüm kafes noktaları için olası s_m bileşenleri belirlenir. 2. iterasyonda yarıçap değeri bir önceki iterasyonda bulunan bileşen dikkate alınarak güncellenir, d_2 tanımlanır ve (**4.9**) deki ikinci terim dikkate alınır. Bu durumda sadece bir önceki iterasyonda belirlenen bileşenlere ilişkin olası bir sonraki bileşenler belirlenir.

$$d_2 = \sqrt{d_1^2 - (y_m - r_{m,m}s_m)^2} \longrightarrow d_2^2 \geq (y_{m-1} - r_{m-1,m-1}s_{m-1} - r_{m-1,m}s_m)^2$$

$$y_{m-1|m} = y_{m-1} - r_{m-1,m}s_m$$

$$r_{m-1,m-1} > 0 \Rightarrow \left\lceil \frac{y_{m-1|m} - d_2}{r_{m-1,m-1}} \right\rceil \leq s_{m-1} \leq \left\lfloor \frac{y_{m-1|m} + d_2}{r_{m-1,m-1}} \right\rfloor$$

$$r_{m-1,m-1} < 0 \Rightarrow \left\lfloor \frac{y_{m-1|m} - d_2}{r_{m-1,m-1}} \right\rfloor \geq s_{m-1} \geq \left\lceil \frac{y_{m-1|m} + d_2}{r_{m-1,m-1}} \right\rceil$$

$$\vdots$$

$$r_{1,1} > 0 \Rightarrow \left\lceil \frac{y_{1|2} - d_m}{r_{1,1}} \right\rceil \leq s_1 \leq \left\lfloor \frac{y_{1|2} + d_m}{r_{1,1}} \right\rfloor$$

$$r_{1,1} < 0 \Rightarrow \left\lfloor \frac{y_{1|2} - d_m}{r_{1,1}} \right\rfloor \geq s_1 \geq \left\lceil \frac{y_{1|2} + d_m}{r_{1,1}} \right\rceil$$

Bu iterasyonlar sonunda sondan başa doğru s vektörüne ait 1. olası bileşen de bulununcaya kadar devam eder [34].

İterasyonun herhangi bir adımında işaret vektörünün bir bileşenine ait olası hiçbir bileşen değeri bulunamadığı zaman, algoritmanın başında belirlenen yarıçapa ilişkin küre içinde hiçbir işaret vektörüne ilişkin kafes noktası bulunmadığı belirlenmiş olur. Bu durumda yarıçap değeri arttırılarak algoritmaya yeni baştan başlanması gerekmektedir.

Son bileşen de bulunduğu anda bu bileşenlere ilişkin s vektörüne karar verilir. Küresel kodçözücüde tanımlanmış hiper küre içerisinde sadece bir kafes nokası bulunuyor ise bulunan bu kafes nokası ML çözümüyle eşdeğerdir. Ancak oluşturulacak hiperküre için seçilen $\mathbf{d}$ yarıçap değerine bağlı olarak küre içerisinde sadece bir kafes noktasının bulunacağı garanti edilemediğinden bulunan çözümün herzaman optimum ML çözüm ile eşdeğer olamayacağı ve optimum altı çalışabileceği söylenebilir. Ancak küresel kodçözücü için karmaşıklığın cok az arttırılmasıyla küre içerisinde birdençok sayıda kafes bulunsa bile optimum ML çözümü garantileyen kodçözücü üretmek mümkündür.

4.2.4 Optimum çalışan geliştirilmiş küresel kodçözücü

Küre içerisinde sadece bir kafes noktası bulunduğunda bilinen küresel kodçözücü optimum ML çözümü ile eşdeğer olduğunu söylemiştik. Optimum çözüme ilişkin kafes noktası tanımı gereği alınan gürültülü vektöre enyakın kafes noktasıdır. Çözümün bu nedenle küre içerisinde bulunan noktalar arasında bulunacağını garanti edebiliriz. Yani küre içerisinde sadece bir kafes noktası bulunuyor ise bu kafes noktası optimum çözümdür. Bunun yanında, küre içerisinde birden fazla sayıda kafes noktası varsa bunlardan biri mutlaka optimum çözümdür. Ancak optimum çözüm küre içerisinde olduğu belirlenen ilk s işaret vektöründen farklı olabilmektedir. Bu nedenle kodçözücü küre içerisinde birden fazla kafes noktası bulunduğu durumda optimum altı çalışır. Geliştirilmiş küresel kodçözücüde, küre içinde bulunduğu belirlenen ilk s vektöründen sonra kodçözme işlemi sonlandırılmayıp küre içerisinde bulunan tüm s vektörleri belirlenir. Bundan sonra belirlenen vektörler arasından alınan gürültülü r vektöre en yakın olanı belirlenir. Bu durumda belirlenen bu kafes noktaları arasından r vektörüne en yakın olanına ilişkin s vektörünün kesin olarak optimum çözüm olduğunu söyleyebiliriz. Böylece kodçözücüde olası tüm s işaret vektörlerine ilişkin karşılaştırma işlemleri yapılmadan optimum çözüm sözü edilen kodçözücü ile kesin olarak belirlenebilir. Optimum kodçözücüyü aşağıdaki gibi özetleyebiliriz.

1. belirli bir $\mathbf{d}$ için küre içerisinde bulunan tüm kafes noktaları belirlenir.
   - ⋆ Bir kafes noktası bulunamaz ise $\mathbf{d}$ değeri arttırılarak yeni küre tanımlanır.
2. kafes içerisinde sadece bir kafes noktası bulunuyor ise çözüm olarak bu kafese ilişkin s vektörüne karar verilir.
3. belirlenen bu kafes noktaları arasından küre merkezine en yakın olanına ayrıntılı arama ile karşılaştırma yoluyla karar verilir.

Sadece ayrıntılı arama (exhaustive search) yapan kodçözücünün üstel karmaşıklığa sahip olmasından dolayı yüksek hızlı uzay-zaman blok kodları için pratikte gerçekleştirilemeyeceğinden önceki bölümlerde söz etmiştik. Oysa

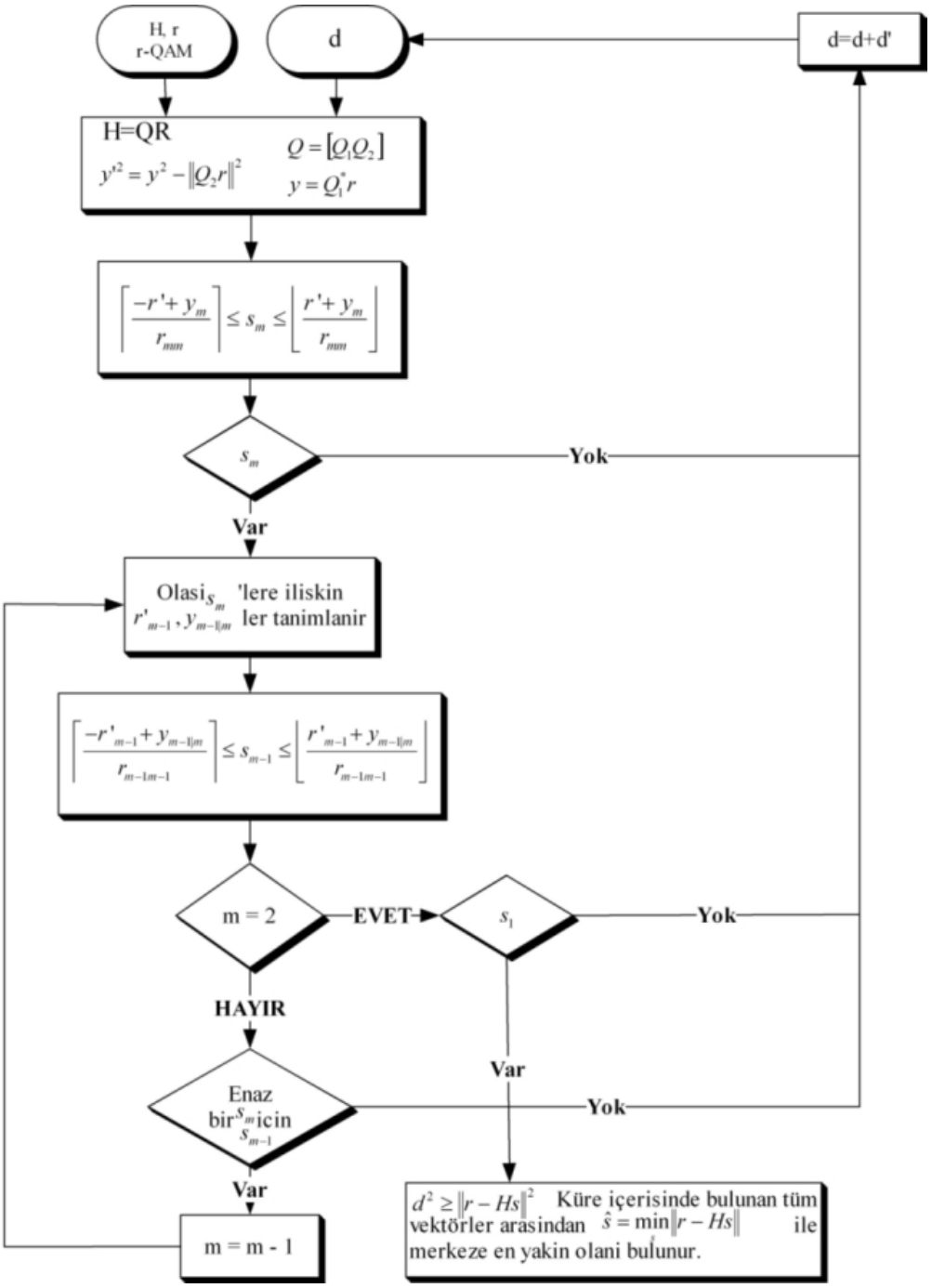
küresel kodçözme yöntemi kübik karmaşıklığa sahiptir [34]. Yüksek hızlı uzay-zaman kodlu sistemlerde kabul edilebilir karmaşıklıkla çalışabilmektedir. Optimum olmayan sıralamalı iteratif kodçözücü ile benzer karmaşıklıta çalışırken geliştirilmiş küresel kodçözme yöntemi hem başarım kazancı sağlar hemde gerçek zamanlı iletimde alıcı-verici anten sayısı kısıtlaması olmaksızın kullanılabilmektedirler.

Özetle hiperküre içinde bulunan kafes noktalarına ilişkin olası tüm s işaretleri bulunur. Bundan sonra küre içerisinde olduğu tespit edilen farklı kafes noktaları arasında, alınan r gürültülü işaretine en yakın olanına karar verilir. Olası tüm işaretler arasında alınan gürültülü vektöre ilişkin gönderilmesi en olası işaret yine küre içinde olacağından, geliştirilmiş küresel kodçözme algoritması optimum ML çözümü elde etmeyi garantiler. Böylece kodçözücünün yarıçap değerine olan bağımlılığı da azaltılmış olur. Ayrıca yoğun karşılaştırma işlemi yapma gereği duymadan, çok büyük işaret kümelerini kullanan sistemler için uygulanabilir bir yöntemdir. Optimum küresel kodçözücü için bir başka yaklaşımı aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

Küre içinde bulunduğu belirlenen her s_i olası vektörü için yarıçap $\mathbf{d} = \|r - Hs_i\|^2$ şeklinde düzeltilebilir ve kodçözme algoritması içerisinde sadece bir kafes noktası bulunan küreyi tanımlayana dek yenibaştan başlatılır.

4.2.5 Optimum küresel kodçözücü için blok diyagramı

Yüksek oranlı iletim için kullanılan uzay-zaman kodlar için ayrıntılı arama (exhaustive search) kullanmadan optimum ML çözümünü elde eden geliştirilmiş küresel kodçözücü için blok diyagramı Şekil 4.7'da verilmiştir. Kodçözücü, vericide kullanılan r-QAM işaret kümesini, sönümlemeli kanal bilgisini ve alınan gürültülü işareti bildiği durumda belirli bir yarıçap değeri ile iterasyona başlar. İterasyonlar sonunda $s_m, ..., s_1$ tamsayı değerli işaret vektörü bileşenlerini teker teker belirler.



Şekil 4.7: Geliştirilmiş optimum küresel kodçözücü blok diyagramı.

5. DOĞRUSAL DAĞILIMLI KODLAR

Daha önceden tanımlanmış olan doğrusal dağılımlı kodlar (**2.38**) ile gösterilen kıstasa uygun bir şekilde, belli bir ρ değeri için sistemin sığa değerini maksimum yapan S matrisleridir [13]. Biz burada basitleştirilmiş bit hata olasılığı ifadesini minimum yapan doğrusal dağılımlı (DD) kodları bulmayı amaçladık. Ayrıca sözünü ettiğimiz bu kodlar, sığayı en büyükleyen diğer DD kodlardan farklı olarak basit verici yapılarıyla çalışabilmektedirler. Öyle ki, önerdiğimiz kodlar ile verici antenlerinden yalnızca r-QAM işaret kümesine ait işaretler gönderilmektedir. Bunun yanında önerdiğimiz kodlar için Q altdizi uzunluğu daha küçük olduğundan kodçözücülerde diğer DD kodlara göre daha hızlı çözülebilmektedirler.

5.1 DD Kodlar için Sistem Modeli

Bu bölümde, DD kodlara ilişkin genel sistem modeli tanıtılmış, (**5.2**) ile verici antenlerinden gönderilen S iletim matrisi A ve B dağılım matrisleri kullanılarak tanımlanmıştır. Alıcı antenleriyle alınan, kodçözme birimi tarafından kullanılan gürültülü X işaret matrisi (**5.3**)'de ifade edilmiştir. Sözünü ettiğimiz bu kompleks bileşenli sistem modelini eşdeğer bir şekilde reel bileşelerle (**5.4**), (**5.5**) ile yeniden yazabiliriz.

Bu DD uzay-zaman kodlu sistem için M verici anten sayısı, N alıcı anten sayısı, Q simge altdizisi uzunluğu ve T kullanılan simge periyotlarının sayısı olsun. Bu durumda, Verici birimde oluşturulan, kompleks bileşenli Q uzunluklu simge altdizisini (**5.1**) ile gösterebiliriz.

$$s_q = \alpha_q + j\beta_q, \qquad q = 1, ...Q \tag{5.1}$$

DD uzay-zaman kodunu tanımlayan A_q, B_q dağılım matrisleri kullanılarak S iletim matrisi aşağıdaki gibi belirlenebilir.

$$S = \sum_{q=1}^{Q} (\alpha_q A_q + j\beta_q B_q) \tag{5.2}$$

Alıcı birime ulaşan gürültülü işaret aşağıdaki gibi yazılabilir. Burada X alınan gürültülü $T \times N$ boyutlu işaret matris olup, H matrisi $M \times N$ boyutlu sönümlemeli kanal matrisidir. Elemanları birbirinden istetistiksel bağımsız, birim varyanslı kompleks Gauss rastlantı değişkenidir. V matrisi $T \times N$ boyutlu toplamsal beyaz Gauss gürültüsünü gösterir. Elemanları birim varyanslı kompleks Gauss rastlantı değişkenleridir. İşaret/gürültü oranı herbir alıcı anten için, verici anten sayısı M'den bağımsız olarak ρ ile gösterilir. Alınan gürültülü işaret;

$$X = \sqrt{\frac{\rho}{M}} \sum_{q=1}^{Q} (\alpha_q A_q + j\beta_q B_q) H + V \tag{5.3}$$

$$X = \sqrt{\frac{\rho}{M}} SH + V$$

(**5.3**) ifadesine eşdeğer, reel terimli sistem modeli aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{x_{R1}} \\ \underline{x_{I2}} \\ \vdots \\ \underline{x_{RN}} \\ \underline{x_{IN}} \end{bmatrix}}_{x} = \mathcal{H} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\alpha_1} \\ \underline{\beta_1} \\ \vdots \\ \underline{\alpha_Q} \\ \underline{\beta_Q} \end{bmatrix}}_{s} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{v_{R1}} \\ \underline{v_{I1}} \\ \vdots \\ \underline{v_{RN}} \\ \underline{v_{IN}} \end{bmatrix}}_{v} \tag{5.4}$$

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_1 h_1 & \mathcal{B}_1 h_1 & \cdots & \mathcal{A}_Q h_1 & \mathcal{B}_Q h_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{A}_1 h_N & \mathcal{B}_1 h_N & \cdots & \mathcal{A}_Q h_N & \mathcal{B}_Q h_N \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

$$\mathcal{A}_q = \begin{bmatrix} A_{R,q} & -A_{I,q} \\ A_{I,q} & A_{R,q} \end{bmatrix} \mathcal{B}_q = \begin{bmatrix} -B_{I,q} & -B_{R,q} \\ B_{R,q} & -B_{I,q} \end{bmatrix}$$

5.2 Sığayı En Büyükleyen DD Kodlar için Verici Karmaşıklığı

Sistem modeli (**5.5**)'de ifade edilen DD kodun sığası aşağıdaki gibi yazabilir. Hassibi ve Hochwald tarafından bu ifadeyi en büyükleyen DD kodlar [13]'de tanıtılmıştır.

$$C_{LD}(\rho, T, M, N) = \frac{1}{2T} E \log\det(I_{2NT} + \frac{\rho}{M}\mathcal{H}\mathcal{H}^t) \qquad (\mathbf{5.6})$$

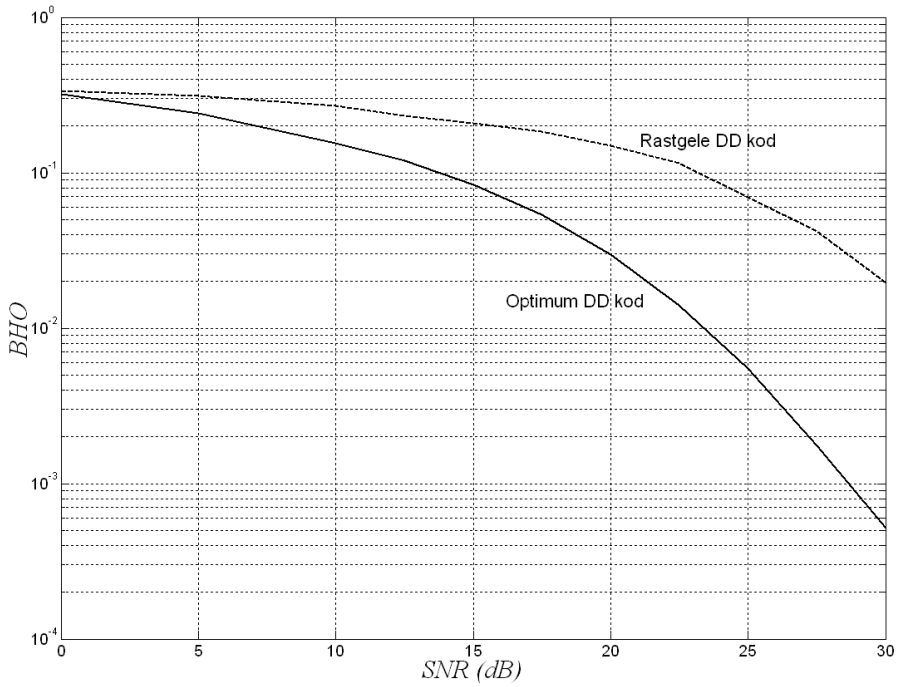
Ancak bu tip DD kodlar için verici antenlerinden A_q ve B_q matrisleri yardımıyla farklı oranlarda ağırlıklandırılmış r-QAM işaretlerin toplamının gönderdilmesi gerekmektedir. Örnek olarak; T=4, M=3 ve Q=4 için sığayı en büyükleme kıstasına göre üretilmiş DD kod (**5.7**) ile gösterilmektedir. Açıkça görülebilir ki, verici antenlerinden r-QAM işaret kümesine ilişkin işaretler yerine bu işaretlerin farklı kombinasyonları ile elde edilmiş yeni işaretler gönderilir. Bu yeni işaretler r-QAM işaret kümesine ait değildir. Bu durum nedeniyle daha pahalı verici yapılarına ihtiyaç duyulmasının yanında, pratik açıdan gerçekleştirilmesi zor bir durum ile karşı karşıya kalınır.

$$S = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_3 + j\left[\frac{\beta_2+\beta_3}{\sqrt{2}} + \beta_4\right] & \frac{\alpha_2-\alpha_4}{\sqrt{2}} + j\left[\frac{\beta_1}{\sqrt{2}} + \frac{\beta_2-\beta_3}{2}\right] & 0 \\ \frac{-\alpha_2+\alpha_4}{\sqrt{2}} - j\left[\frac{\beta_1}{\sqrt{2}} + \frac{\beta_2-\beta_3}{2}\right] & \alpha_1 - j\frac{\beta_2+\beta_3}{\sqrt{2}} & -\frac{\alpha_2+\alpha_4}{\sqrt{2}} + j\left[\frac{\beta_1}{\sqrt{2}} - \frac{\beta_2-\beta_3}{2}\right] \\ 0 & \frac{\alpha_2+\alpha_4}{\sqrt{2}} + j\left[\frac{\beta_1}{\sqrt{2}} - \frac{\beta_2-\beta_3}{2}\right] & \alpha_1 - \alpha_3 + j\left[\frac{\beta_2+\beta_3}{\sqrt{2}} - \beta_4\right] \\ \frac{\alpha_2-\alpha_4}{\sqrt{2}} + j\left[\frac{\beta_1}{\sqrt{2}} + \frac{\beta_2-\beta_3}{2}\right] & -\alpha_3 + j\beta_4 & -\frac{\alpha_2+\alpha_4}{\sqrt{2}} + j\left[\frac{\beta_1}{\sqrt{2}} - \frac{\beta_2-\beta_3}{2}\right] \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{5.7})$$

Bu nedenle bizim bu çalışmada önereceğimiz DD kodlar ile tanımlanan, verici antenlerinden gönderilen işaretlerin yalnızca belirlenen r-QAM işaret kümesine ait olan işaretler olması kısıtı vardır. Böylece çok daha basit yapılı verici birimler ile çalışabilecek DD kodlar üretmek mümkün olabilmektedir.

5.3 DD Kodu Tanımlayan A_q ve B_q Matrislerinin Önemi

İncelediğimiz DD kodlarda koçözücü birim dışında sistem başarımını önemli ölçüde belirleyen bir diğer etken DD kodu tanımlayan A_q ve B_q matrisleridir. Kodçözücüde enbüyük olabilirlikli (ML) karar kuralını uygulayan optimum küresel kodçözme algoritması kullanıldığı durumda, M=3 verici, N=1 alıcı antenli sistem için A_q ve B_q matrislerinin başarım üzerindeki etkileri Şekil 5.1'de kolayca görülmektedir. T=4 simge periyodu boyunca verici antenlerinden Q=4 adet simge gönderen sistemde R=6 bit/kanal kullanımı iletim oranı için 64-QAM işaretler kullanılmıştır. İşaret/gürültü oranı $\rho = 20$ dB seviyesi için kanalın sığası 6.41 seviyesindeyken, (**5.6**)'de gösterilen sığa ifadesini en büyükleyecek şekilde tasarlanmış olan DD kod 6.25 bit/kanal kullanım oranına erişebilmektedir. Rastgele şekilde üretilmiş olan normalize edilmiş DD kodlar için ortalama bit hata oranı, optimum üretilen DD kodunun başarımına göre oldukça kötüdür. Bu nedenle kodu tanımlayan A_q ve B_q dağılım matrislerinin seçimi çok önemlidir.



Şekil 5.1: M=3, N=1, T=Q=4 sistem için R=6 olan Optimum ve Rastgele DD kodlar için *Ber* eğrileri. (64-QAM işaretler kullanılmıştır) Rastgele DD kod için A_q ve B_q matrisleri normalize kompleks Gauss dağılımlıdır.

5.4 DD Kodlar için Yeni Yaklaşım

(**5.2**) ile gösterdiğimiz, DD kodu tanımlayan S matrisini aşağıdaki gibi eşdeğer bir şekilde tanımlayabiliriz. Burada $C_q = \frac{A_q+B_q}{2}$ ve $D_q = \frac{A_q-B_q}{2}$ dir.

$$S = \sum_{q=1}^{Q} (C_q s_q + D_q s_q^*) \tag{5.8}$$

Verici antenlerinden yalnızca belirli r-QAM kümesi içinden işaret gönderen bu yeni DD kodlar için C_q ve D_q matrisleri belirli kısıtlar altında tanımlanmalıdır. Bu kısıtlara ilişkin önerdiğimiz DD kodu tanımlayan C_q ve D_q matrisleri için aşağıdaki şartları sağlayan kodları kullanan sistemler verici antenlerinden yalnız r-QAM işaret kümesine ilişkin işaretleri gönderirler.

1. C_q ve D_q matrislerinin elemanları yalnız 0,$\pm$1 olabilir.
2. $C_q \bullet C_p = D_q \bullet D_p = [0]_{T\times M},\ \forall q \neq p$
3. $C_q \bullet D_q = [0]_{T\times M},\ \forall q$

Burada dikkat edilmelidir ki $C \bullet D$ ifadesi C ve D matrisinin Hadamard çarpımını ifade etmektedir. Sözünü ettiğimiz bu kısıtlar ile elde ettiğimiz kod uzayının içerisinde bulunan kodlar arasında ileride tanımlayacağımız tasarım kıstasına uygun DD kodları belirleyeceğiz.

5.4.1 Yaklaşık hata oranı ifadesini en küçükleme problemi

Bizim ilgilendiğimiz DD kodlar ön koşul olarak yukarıda belirttiğimiz şartlara uygun bir şekilde, verici antenlerinden sadece r-QAM işret kümesi işaretlerini gönderen kodlardır. Bu bölümde amaçlanan; ilgilendiğimiz kodlar arasında verimli ve yüksek başarımlı DD kodlarını belirlemektir. (**5.8**) ile gösterdiğimiz DD kod için alıcı tarafından alınan gürültülü işaret şu şekilde yazılabilir.

$$X = \sqrt{\frac{\rho}{M}} \underbrace{\left(\sum_{q=1}^{Q} (C_q s_q + D_q s_q^*) \right)}_{S} H + V \tag{5.9}$$

Alıcı tarafında (**5.9**) gürültülü işareti alındığında, H sönümlemeli kanal matrisi alıcı tarafından tamamen biliniyor olsun. Bu durumda alıcı tarafta en büyük olabilirlik kuralı aşağıdaki şekilde verilebilir [38].

$$\min_{S_i} \left\{ \dot{I}z \left\{ \left(X - \sqrt{\frac{\rho}{M}} S_i H \right) \left(X - \sqrt{\frac{\rho}{M}} S_i H \right)^H \right\} \right\} \qquad (\mathbf{5.10})$$

Bu karar kuralı için ortalama simge hatasının analitik ifadesini bulmak oldukça güçtür. Fakat bir kıstas oluşturabilmek için böylesi bir hata ifadesine ihtiyaç vardır. Bu durumda daha kolay ifade edilebilen ikili simge hata olsılığı kullanılıabilmektedir. Bu durumda S_1 yerine S_2 vektörüne karar verilmesi olasılığı, $L = S_2 - S_1$ iki işaret arasındaki farka bağlı olarak aşağıdaki gibi yazılır.

$$P_e = E \left\{ Q \left(\sqrt{\frac{\rho}{2M} \dot{I}z \left(L^H L H H^H \right)} \right) \right\} \qquad (\mathbf{5.11})$$

Burada $Q(x)$ hata fonksiyonu standart Gauss fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$Q(x) = \int_x^\infty \phi(t) dt, \qquad \phi(t) = \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}. \qquad (\mathbf{5.12})$$

Bu ifadeyi daha basitleştirebilmek için $Q(\sqrt{u})$ fonksiyonunun $u = \overline{u}$ civarında Taylor serisine açıp ikinci dereceden sonrasını ihmal edersek aşağıdaki yaklaşık ifadeyi elde ederiz.

$$\begin{aligned} Q(\sqrt{u}) &\cong Q(\sqrt{\overline{u}}) + (u - \overline{u}) Q'(\sqrt{\overline{u}}) + \frac{(u - \overline{u})^2}{2} Q''(\sqrt{\overline{u}}) \\ Q(\sqrt{u}) &\cong Q(\sqrt{\overline{u}}) - (u - \overline{u}) \frac{\phi(\sqrt{\overline{u}})}{2\sqrt{\overline{u}}} + \frac{(u - \overline{u})^2}{2} \left(\frac{1 + \overline{u}}{4\overline{u}\sqrt{\overline{u}}} \right) \phi(\sqrt{\overline{u}}) \end{aligned} \qquad (\mathbf{5.13})$$

Burada u değişkeni otalaması $\overline{u}$ olan ve varyansı σ_u^2 ile gösterilen raslantı değişkeni ise (**5.13**) de gösterilen ifadenin beklenti değeri aşağıdaki gibi alınabilir.

$$E\{Q(\sqrt{u})\} \cong Q(\sqrt{\overline{u}}) + \frac{\sigma_u^2}{2} \left(\frac{1 + \overline{u}}{4\overline{u}\sqrt{\overline{u}}} \right) \phi(\sqrt{\overline{u}}) \qquad (\mathbf{5.14})$$

(**5.14**) ile elde ettiğimiz ifadenin en küçük değeri alabilmesi için $\overline{u}$ olabildiğince büyük, σ_u^2 ise olabildiğince küçük olmalıdır. (**5.11**) ile ifade edilen ikili hata olasılığı için $u = \frac{\rho}{2M}\dot{I}z\left(L^H L H H^H\right)$ ele alınırsa, beklenti değeri ve varyans ifadesi aşağıdaki gibi bulunabilir [39].

$$\begin{aligned} E\{u\} = \overline{u} &= \frac{\rho}{2M}\dot{I}z\left(L^H L E\{HH^H\}\right) \\ &= \frac{N\rho}{2M}\dot{I}z\left(L^H L\right) \\ VAR(u) = \sigma_u^2 &\approx \left(u'\left(E\{W\}\right)\right)^2 \cdot VAR\{W\} \\ &= N\left(\frac{\rho}{2M}\right)^2 \dot{I}z\left(L^H L L^H L\right) \end{aligned} \qquad (\mathbf{5.15})$$

O halde $\dot{I}z\left(L^H L\right)$ ifadesini mümkün olduğu kadar büyütmek ve $\dot{I}z\left(L^H L H H^H\right)$ ifadesini de mümkün olduğu kadar küçültmek gerekmektedir. Fakat bu iki durum birbiri ile çelişmektedir. O halde kod enerjisi ile orantılı olan $\dot{I}z\left(L^H L\right)$ değerini sabit tutup $\dot{I}z\left(L^H L H H^H\right)$ ifadesini küçültmek daha uygun olur.

$$\max_L \left\{\dot{I}z^2\left(L^H L\right) - \mu\dot{I}z\left(L^H L L^H L\right)\right\} \qquad (\mathbf{5.16})$$

Burada kodlar arasındaki fark L yerine uzay-zaman kodunu ifade eden S matrisini kullanacak olursak,

$$\max_S \left\{\dot{I}z^2\left(S^H S\right) - \mu\dot{I}z\left(S^H S S^H S\right)\right\} \qquad (\mathbf{5.17})$$

şeklinde ifade edebiliriz. Buradaki en büyükleme problemine ilişkin bulunabilecek her farklı çözüm için farklı bir tasarım kısıtası üretilebilir. Biz burada elimizdeki ifadenin S'ye göre türevini alıp sıfıra eşitleyerek olası çözümleri arayabiliriz.

$$\underbrace{2\dot{I}z(S^H S)}_{\alpha} S^* - \mu S^*(S^H S)^* = 0 \qquad (\mathbf{5.18})$$

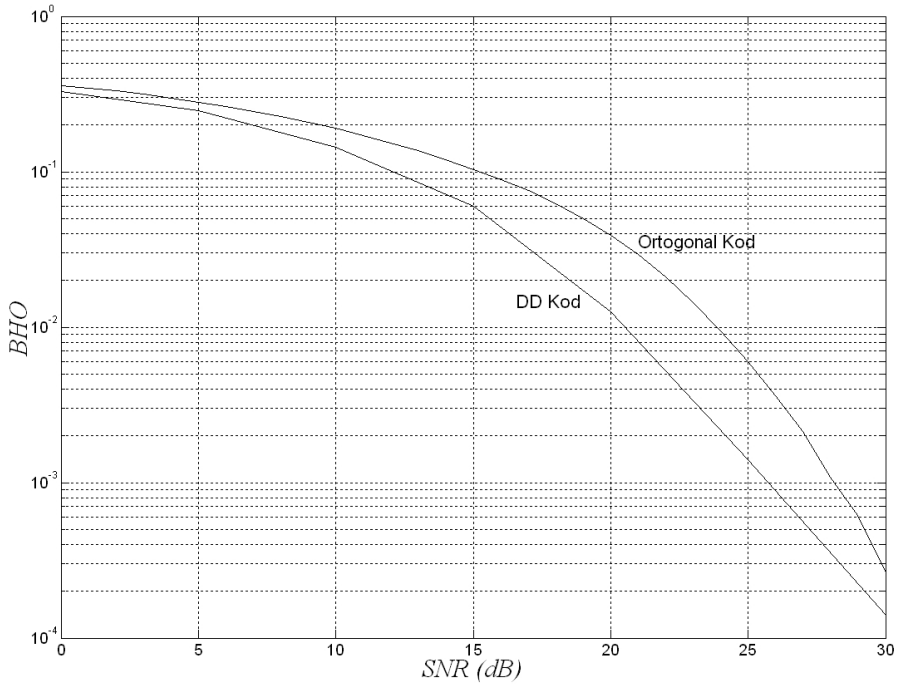
$$S^* = \frac{\mu}{\alpha} S^*(S^H S)^* \qquad (\mathbf{5.19})$$

$$S = \frac{\mu}{\alpha} S(S^H S) \qquad (\mathbf{5.20})$$

5.4.2 Bir çözüm olarak ortogonal kod analizi ve tasarım kıstası

(**5.20**) denkleminin çözümlerinden birisi açıkça görülebilir ki $S^H S = \|s\|^2 I_M$ dır. Bu çözüm doğrudan ortogonal koda karşılık gelmektedir. Ancak ortogonal kodlarda $N > 1$ için bilinmeyen sayısı denklem sayısından az olduğundan verimsiz çalışmaktadırlar. Bu nedenle ortogonalliğe yakın ve denklem sayısının bilinmeyen sayısına eşit olduğu yüksek verimli kodları aramalıyız.

Verimsiz çalışan ortogonal kodlara örnek olararak Şekil 5.2'de görüldüğü gibi birçeşit DD kod olan V-BLAST sisteminin başarımı M=2, N=2 için ortogonal koddan daha yüksektir. Burada T=2 işaret periyodu içerisinde DD kod ile verici antenlerinden toplam Q=4 işaret iletilirken, ortogonal kod ile verici antenlerinden Q=2 işaret iletilir. R=8 bit/kanal kullanımı iletim oranı için DD kod 16-QAM işaret kümesi kullanırken ortogonal kod 256-QAM işaret kümesi kullanması gerekmektedir.



Şekil 5.2: M=2, N=2 için DD kod ile Ortogonal kodun R=8 iletim oranında karşılaştırması. DD kod için M=N=T=2, Q=4 olduğundan 16-QAM işaretler gönderilirken, Ortogonal kod için M=N=T=Q=2 olduğundan 256-QAM işaretler gönderilir. Kodçözücü iki durumda da optimum ML küresel kodçözücüdür.

Şekil 5.2'de görüldüğü gibi iki bilinmeyen için elimizde dört denklem olmasından dolayı ilgilendiğimiz ortogonal kod verimsiz çalışmaktadır. Bu nedenle 3. bölümde de anlatıldığı gibi çeşitleme kazancını bedel olarak ödersek, kanal kullanımı başına elde edilebilecek en büyük bağımsızlık derecesi $k = min(M, N)$ değerine ulaşılır. Bu durumda $Q = min(M, N).T$ adet simge alt dizisi kullanılarak kanal sığası verimli bir şekilde kullanılabilir. Bu durumda önerebileceğimiz kodlar için biryandan hata olasılığını en küçükleyebilmek amacıyla ortogonalliğe yaklaşırken bir yandan da kanalı verimli kullanabilmek için $Q = min(M, N).T$ koşulunu göz önünde bulndurmamız gerekir. Böylece yüksek hızlarda çalışabilecek, ortogonalliğe olabildiğince yakın ve kanalı verimli kullanan DD kodlar bulunabilir. DD kodlar için ortogonallik, C_q ve D_q iletim matrisleri kullanılarak (**5.21**) ile gösterilen işlemler sonunda (**5.22**)'deki gibi tanımlanabilmektedir.

$$
\begin{aligned}
S^H S &= \sum_{i=1}^{Q} \|s_i\|^2 I_M \\
&= \left(\sum_{i=1}^{Q} \left(C_i^H s_i^* + D_i^H s_i \right) \right) \left(\sum_{j=1}^{Q} \left(C_j s_j + D_j s_j^* \right) \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{Q} C_i^H C_j s_i^* s_j + \sum_{i,j=1}^{Q} C_i^H D_j s_i^* s_j^* + \sum_{i,j=1}^{Q} D_i^H C_j s_i s_j + \sum_{i,j=1}^{Q} D_i^H D_j s_i s_j^* \\
&= \sum_{i,j=1}^{Q} \left(C_i^H C_j s_i^* s_j + D_j^H D_i s_j s_i^* \right) + \sum_{i,j=1}^{Q} C_i^H D_j s_i^* s_j^* + \sum_{i,j=1}^{Q} D_i^H C_j s_i s_j \\
&= \underbrace{\sum_{i=j} \left(C_i^H C_j + D_j^H D_i \right) s_j s_i^*}_{= \sum_{i=1}^{Q} \|s_i\|^2 I_M} + \underbrace{\sum_{i \neq j} \left(C_i^H C_j + D_j^H D_i \right) s_j s_i^*}_{=0} + \\
&\qquad \underbrace{\sum_{i,j=1}^{Q} C_i^H D_j s_i^* s_j^*}_{=0} + \underbrace{\sum_{i,j=1}^{Q} D_i^H C_j s_i s_j}_{=0}
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{i,j=1}^{Q} D_i^H C_j s_i s_j = \sum_{i,j=1}^{Q} C_j^H D_i s_i^* s_j^* = 0 \qquad (\mathbf{5.21})
$$

$$S^H S = \underbrace{\sum_{i=1}^{Q} \left(C_i^H C_j + D_j^H D_i\right)}_{I_M} \|s_i\|^2 + \underbrace{\sum_{i \neq j} \left(C_i^H C_j + D_j^H D_i\right) s_j s_i^*}_{=0} + \underbrace{\sum_{i,j=1}^{Q} \left(C_i^H D_j + C_j^H D_i\right) s_i^* s_j^*}_{=0} \quad (\mathbf{5.22})$$

(**5.14**) ile gösterdiğimiz hata olasılığının beklenen değeri ortogonal kodlar için en küçüklendiği (**5.17**) ve (**5.20**) ile gösterildi. Şimdi $S^H S = \|s\|^2 I_M$ çarpımından son olarak elde ettiğimiz (**5.22**) ifadesi yardımıyla ortogonallik özelliğine yakın kodların belirlenebileceği bir bedel fonksiyonunu aşağıdaki gibi yazabiliriz.

Ortogonalliğe ilişkin DD kodlar için bedel fonksiyonu;

$$\Phi(C_1, ..., C_Q, D_1, ..., D_Q) = \left(\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{Q} tr\left[\left(C_i^H C_i + D_i^H D_i - I_M\right)^2\right] + \\ \sum_{i \neq j}^{Q} tr\left[\left(C_i^H C_j + D_j^H D_i\right)\left(C_i^H C_j + D_j^H D_i\right)^H\right] + \\ \sum_{i,j=1}^{Q} tr\left[\left(C_i^H D_j + C_j^H D_i\right)\left(C_i^H D_j + C_j^H D_i\right)^H\right] \end{array} \right) \quad (\mathbf{5.23})$$

Önerdiğimiz kıstas için oluşturan Φ bedel fonksiyonunun ortogonal kodlar için enküçük değerini ($\Phi_{min} = 0$) aldığı kolayca görülebilir. Bu nedenle C_1, $C_2, ..., C_Q$, D_1, $D_2, ..., D_Q$ iletim matrisleri ile tanımlanan ve Bölüm 5.4'de sözünü ettiğimiz kısıtlamalara uygun kodlar arasından düşük Φ değerine sahip kodları $Q = min(M, N).T$ kısıtını da göz önünde bulundurarak belirlemeliyiz. Bu durumda, Bölüm 5.4'deki DD kodlara ilişkin kısıtlarla oluşturulan kod uzayı içerisinden aşağıdaki kıstasa uygun kodlar bulunabilir.

DD kod tasarım kıstası:

1. $Q = min(M, N).T$
2. $\min\limits_{C_1,...,C_Q,D_1,...,D_Q} \Phi(C_1, ..., C_Q, D_1, ..., D_Q)$

Böylece istediğimiz (M, N) MIMO sistemi için yüksek hızlarda çalışabilen, yüksek başarımlı, basit verici yapısına sahip doğrusal dağılımlı kodlar üretebiliriz. Gösterilebilir ki belirli bir (M, N) MIMO sistemi için sabit bir R (bit/kanal kullanımı) iletim oranında çalışan uzay-zaman kodlarından düşük Φ değerine sahip olan kodun başarımı daha yüksektir.

5.4.3 Farklı Φ değerlerine sahip DD kodların karşılaştırılması

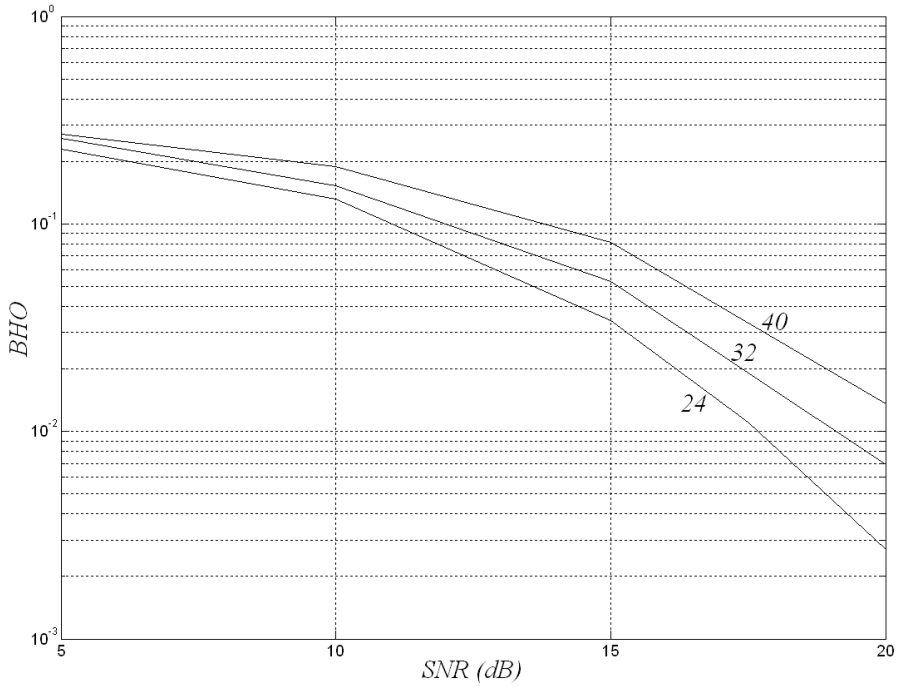
Burada örnek olarak M=4, N=2 MIMO sistemi için üretilmiş Q=4 ve T=2 olan üç farklı DD kodu (**5.23**) ile gösterilen tasarım kıstasına ilişkin bedel fonksiyonunun değerlerine göre karşılaştırdık. R=8 bit/kanal kullanımı iletim oranı için 16-QAM işaret kümesi kullanılmıştır. Bu DD kodlar sözünü ettiğimiz kısıtlamalara uygun şekilde üretildiklerinden verici antenlerinden yalnızca 16-QAM simgeler gönderilir. Böylece düşük maliyetli basit bir verici birimle çalışabilmektedir. $\Phi = 24, 32, 40$ bedel fonksiyonu değerlerine ilişkin üretilen DD kodlar:

$$S_{\Phi=40} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ -s_3^* & s_4^* & -s_1^* & s_2^* \end{bmatrix}$$

$$S_{\Phi=32} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ -s_2^* & s_1^* & -s_3^* & s_4^* \end{bmatrix}$$

$$S_{\Phi=24} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ -s_2^* & s_1^* & -s_4^* & s_3^* \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{5.24})$$

Şekil 5.3'de görüldüğü gibi DD koduna ilişkin Φ bedel fonksiyonunun değeri düştükçe hata oranı azalmaktadır. Sonuçta eşdeğer M,N ve R gibi iletişim parametrelerine sahip MIMO sistemler için başta belirttiğimiz kısıtlamalara uygun tanımlanmış DD kodlar arasında daha küçük Φ değerine sahip kodları belirlemeliyiz. Bu örnekte küresel kodçözücü ile en büyük olabilirlikli kodçözme gerçekleştirilmiştir.

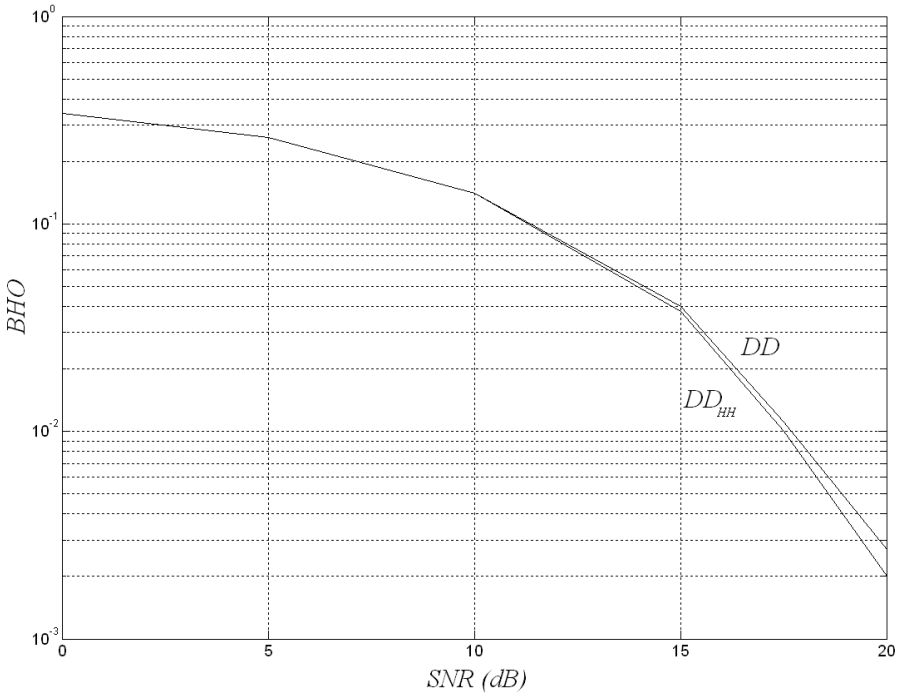


Şekil 5.3: $\Phi = 24, 32, 40$ için farklı DD kodların başarımları. M=4, N=2, Q=4, T=2, R=8 bit/kanal kullanımı. Verici antenleri 16-QAM işaretler gönderir. Kodçözücüde küresel kodçözme ile ML karar kuralı kullanılmıştır.

5.5 DD Tasarım Kıstaslarının Karşılaştırılması

Bu çalışmada DD kodlar için önerdiğimiz tasarım kıstası, Hassibi ve Hochwald tarafından önerilen kıstasa göre çeşitli avantajlara sahiptir. Bunlardan birtanesi, burada önerdiğimiz DD kodlar basit verici birimlerle çalışabilirken daha önceden önerilen DD kodlar pratikte gerçeklenmesi çok zor, hatta mümkün olmayan karmaşıklıkta verici yapılarına ihtiyaç duyarlar. İkinci olarak, önerdiğimiz kodlar yaklaşık bit hata oranını en küçükleyecek şekilde tasarlanırken, diğer DD kodlar sığayı en büyükleyecek şekilde tasarlanmıştır. Oysa gösterilebilir ki; ürettiğimiz kodlar önerilen diğer kodlar ile neredeyse aynı sığa değerlerine erişebilmektedirler. Ayrıca önerdiğimiz DD kodların Q alt dizi uzunluğu daha küçük olduğundan diğer kodlara göre kodçözme yapıları daha hızlıdır.

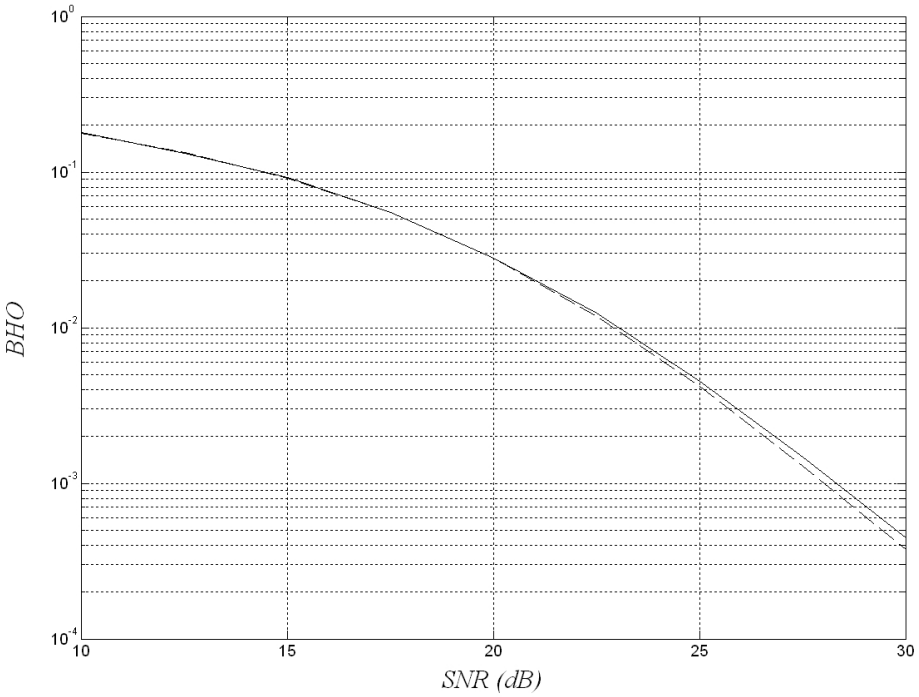
5.5.1 M=4, N=2, R=8 bit/kanal kullanımı için farklı kıstaslar ile üretilmiş DD kodların karşılaştırılması



Şekil 5.4: M=4, N=2, R=8 bit/kanal kullanımı için iki farklı kıstas ile üretilmiş DD kodları. Altta olan Hassibi ve Hochwald tarafından önerilen T=6, Q=12 DD kodu, Üstte olan $\Phi = 24$ ile üretilmiş T=2, Q=4 DD kodu. İşaret kümesi: 16-QAM. Küresel kodçözücü ile enbüyük olabilirlikli kodçözme.

Şekil 5.4'de açıkça görüldüğü gibi önerdiğimiz kıstas ile elde edilen DD kodu [13]'de önerilmiş olan koddan daha hızlı çözülür. Çünkü Q alt dizi sayısı 12'den 4'e düşürülmüştür. Burada kullanılan kod (**5.24**)'de tanımlanmış olan $S_{\Phi=24}$ kodu olup bu kod için snr=20dB seviyesinde sığa $C_{\Phi=24} = 11.82$ dir. Diğer kod için kapasite $C_{HH} = 11.84$ seviyesindedir. Önerdiğimiz kod bit hata oranını en küçükleyecek şekilde tasarlanmış olsa da görülüyor ki neredeyse sığayı optimize eden DD kodun sığası ile aynı seviyededir. Ayrıca tüm bunların yanında önerdiğimiz kod ile verici antenlerinden sadece 16-QAM işaretler gönderilirken diğer DD kodu için çok daha karmaşık ve pahalı verici yapılarına gereksinim duyulmaktadır.

5.5.2 M=3, N=1, R=6 bit/kanal kullanımı için farklı kıstaslar ile üretilmiş DD kodların karşılaştırılması



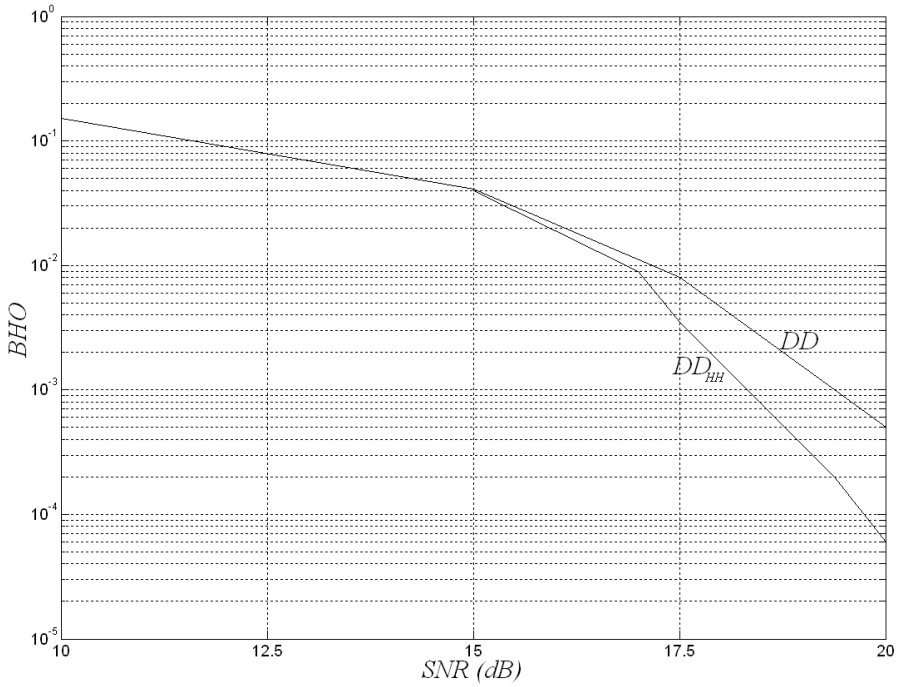
Şekil 5.5: M=3, N=1, R=6 bit/kanal kullanımı için iki farklı kıstaslar ile üretilmiş DD kodları. Kesik çizgili olan Hassibi ve Hochwald tarafından önerilen T=4, Q=4 DD kodu, sürekli çizgi olan $\Phi = 8$ ile üretilmiş T=4, Q=4 DD kodu. İşaret kümesi: 64-QAM. Küresel kodçözücü ile enbüyük olabilirlikli kodçözme.

Şekil 5.5'de görüldüğü gibi önerdiğimiz kıstas ile elde ettiğimiz DD kodu önceden önerilen kod ile neredeyse ayni başarımı göstermiştir.

$$S_{\Phi=8} = \begin{bmatrix} s_1^* & -s_2 & s_4 \\ s_2^* & s_1 & s_3 \\ s_3^* & -s_4 & -s_2 \\ s_4^* & s_3 & -s_1 \end{bmatrix}. \qquad (\mathbf{5.25})$$

DD kodunu tanımlayan S matrisi (**5.25**)'de gösterilmiştir. Ayrıca unutulmaması gerekir ki burada önerdiğimiz kod diğerine oranla çok daha basit bir verici yapısı ile çalışabilmektedir. Bu iki sistemin sığası snr=20 dB seviyesi için birbirine eşit ve $C_{\Phi=8} = C_{HH} = 6.25$ dir.

5.5.3 M=8, N=4, R=16 bit/kanal kullanımı için farklı kıstaslar ile üretilmiş DD kodların karşılaştırılması



Şekil 5.6: M=8, N=4, R=16 bit/kanal kullanımı için iki farklı kıstas ile üretilmiş DD kodları. Alttaki Hassibi ve Hochwald tarafından önerilen T=8, Q=32 dir. Üstteki DD kodu önerdiğimiz kriterle üretilmiş olup T=2, Q=8 dir. İşaret kümesi: 16-QAM. Küresel kodçözücü ile enbüyük olabilirlikli kodçözme.

$$S = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7 & s_8 \\ -s_2^* & s_1^* & -s_4^* & s_3^* & -s_6^* & s_5^* & -s_8^* & s_7^* \end{bmatrix}. \qquad (\mathbf{5.26})$$

(**5.26**)'de gösterdiğimiz DD kodu tanımladığımız kıstas ile üretilmiş olup diğer koddan çok daha basit verici yapısının yanında çok Q=32 yerine Q=8 olduğundan çok daha hızlı bir kodçözücüyle çalışmaktadır. Hassibi ve Hochwald tarafından önerilen kod 32 bileşenli vektörü belirlemeye dayanırken bizim önerdiğimiz DD kod sadece 8 bileşenli vektöre karar vermektedir. Bu iki sistemin bit-hata oranları Şekil 5.6'da gösterilmiştir.

Sonuçta uzay-zaman blok kodlar için önerdiğimiz DD kod tasarım kıstası ile ürettiğimiz kodların iki önemli özelliği vardır. Bu özelliklerden birincisi üretilecek kodların tasarım kıstası gereği kanal sığasını verimli kullanacak şekilde

belirlenmesidir. İkincisi ise üretilecek kodların yaklaşık bit hata olasılığı ifadesini en küçükleyecek şekilde belirlenmesidir. Ayrıca sözü edilen kıstasa uygun bir şekilde üretilen kodlar için gözetilen kısıtlar sonucunda varici antenlerinden sadece r-QAM işaret kümesine ilişkin işaretler gönderilmektedir. Bu nedenle Hochwald ve Hassibi tarafından önerilmiş DD kodlardan farklı olarak çok daha basit verici yapılarına ihtiyaç duyulmaktadır.

6. SONUÇLAR

Bu çalışmada; yüksek hızlı MIMO sistemlerde kullanılabilecek, basit verici yapılarına sahip, yüksek başarımlı uzay-zaman kodlara ilişkin bir kod tasarım kıstası önerilmiştir. Bu kıstas ile önerilen kodlar literatürde doğrusal dağılımlı kodlar olarak bilinen bir çeşit uzay-zaman kodlarıdır. Daha önceden önerilmiş olan DD kodlardan farklı olarak, önerdiğimiz kodlar verici antenlerinden yalnızca r-QAM işaret kümesine ilişkin işaretleri gönderirler. Oysa daha önceden önerilmiş DD kodlar çok sayıda farklı r-QAM işaretin değişik değerlerle ağırlaklandırılmış bileşkelerini verici antenlerinden gönderirler. Bu sistemler pratik olmayan ve oldukça pahalı verici birimlerine ihtiyaç duyarlar. Bunun dışında önerdiğimiz tasarım kıstası diğer kod tasarım kıstasından farklı olarak yaklaşık bit-hata olasılığını en küçükleyecek kodları belirlemeye dayanırken diğeri kodun kullandığı sığayı belli bir işaret/gürültü oranı için en büyüklemeye dayanır. Oysa ürettiğimiz kodların kullandıkları sığa seviyesi de neredeyse bu değere eşittir. Önerdiğimiz DD kodlar için kodçözücü olarak yüksek iletim oranlarında kullanılabilecek optimum ML başarımlı küresel kodçözücüler pratikte gerçek zamanlı iletişim için uygulanabilir karmaşıklıkla kullanılabilirler. Ayrıca önerdiğimiz kodlarda eşdeğer sistemler için işaret altdizi uzunluğu olan Q değerinin diğer önerilmiş DD kodlara göre küçük olamsından dolayı kodçözme işlemi kodçözücü birimde daha kısa vektörleri belirlemeye dayanır. Bu nedenle önerdiğimiz DD kodlar için kodçözme işlemi daha hızlıdır. Sonuçta yüksek iletim oranlarında, basit verici birimleriyle verimli bir şekilde çalışan, yüksek başarımlı DD uzay-zaman kodlarının önerdiğimiz tasarım kıstasıyla belirlenebileceği gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] **Wittneben, A.**, 1991. Basestation modulation diversıty for digital simulcast, *IEEE Vehicular Technology Conf.*, 848-853.

[2] **Alamouti, S. M.**, 1998. A simple transmitter diversity scheme for wireless communications, *IEEE J. Select. Areas Commun.* 1451-1458.

[3] **Foschini, G. J.**, 1996. Layered space-time architecture for wireless communication in a fading environment when using multi-element antennas, *Bell Labs. Tech. J.*, **1**, no 2, 41-59.

[4] **Telatar, I. E.**, 1999. Capacity of multi antenna Gaussian channels, *Europ. Trans. Telecommun.*, **10**, 585-595.

[5] **Wittneben, A.**, 1993. A new bandwidth-efficient transmit antenna modulation diversity scheme for linear digital modulation, *IEEE Int. Communications Conf.*, 1630-1634.

[6] **Golden, G. D., Foschini, G. J., Valenzula, R. A., Wolniansky, P. W.,** 1999. Detection algorithm and initial laboratory results using V-BLAST space-time communication architecture, *Electron. Lett.*, **35**, 14-16.

[7] **Golden, G. D., Foschini, G. J., Valenzula, R. A., Wolniansky, P. W.**, 1999. Simpified processing for high spectral efficiency wireless communication employing multi-element arrays, *J. Select. Areas Commun.*, **17**, 1841-1852.

[8] **Tarokh, V., Seshadri, N., Calderbank, A. R.**, 1998. Space-time codes for high data rate wireless communication: Performance criterion and code construction, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **44**, 744-765.

[9] **Tarokh, V., Seshadri, N., Calderbank, A. R.**, 1999. Space-time block codes from orthogonal designs, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **45**, 1456-1467.

[10] **Tarokh, V., Jafarkhani, H.**, 2000. A differential detection scheme for transmit diversity, *J. Select. areas Commun.*, **18**, 1169-1174.

[11] **Hochwald, B., Sweldens, W.**, 2000. Differential unitary space time modulation, *IEEE Trans. Commun.*, **48**, 2041-2052.

[12] **Hughes, B.**, 2000. Differential space-time modulation, *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2567-2578.

[13] **Hassibi, B., Hochwald, B. M.**, 2002. High-rate codes that are linear in space and time, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **48**, 1804-1824.

[14] **Rappaport, T. S.**, 1996. Wireless Communications, Prentice-Hall, USA

[15] **Proakis, J. G.**, 1989, Digital Communications, 2nd ed., McGraw-Hill,USA

[16] **Shannon, C. E.**, 1948, A mathematical theory of communication, *Bell Syst. Tech. J.*, **27**, 379-423.

[17] **Tse, D. N. C., Viswanath, P., Zheng, L.**, 2004. Diversity-Multiplexing tradeoff ın multiple-access channels. *IEEE Trans on Info. Theory*, **50**, 1859-1874.

[18] **Tse, D. N. C., Viswanath, P.**, 2004. Fundamentals of Wireless Communications, Cambridge University Press.

[19] **Vikalo, H., Hassibi, B., Mitra, U.**, 2003. Sphere-Constrained ML detection for frequency-selective channels. IEEE ICASSP

[20] **Hassibi, B.**, 2000. An Efficient square-root algorithm for BLAST. ,http://mars.bell-labs.com/

[21] **Benesty, J., Huang, Y., Chen, J.**, 2003, A Fast recursive algorithm for optimum sequential signal detection in a in BLAST system, *IEEE Trans on Signal Processing*, **51**, 1722- 1730.

[22] **Hassibi, B., Vikalo, H.**, 2001. On the expected complexity of sphere decoding, *IEEE Signals, Systems and Computers Conf.*, 1051-1055.

[23] **Liang, X., Xia, X.**, 2003. On the nonexistance of rate-one generalized complex orthogonal designs, *IEEE Trans on Info. Theory*, **49**, 2984-2989

[24] **Viterbo, E., Boutros, J.**, 1999. A universal lattice code decoder for fading channels, *IEEE Trans on Info. Theory*, **45**, 1639-1642

[25] **Damen, O., Chkeif, A., Belfiore, JC.**, 2000. Lattice code decoder for space-time codes. *IEEE Commun. Latters*, **4**, 161-163

[26] **Damen, O., Chkeif, A., Belfiore, JC.**, 2000. Sphere decoding of space-time codes, *IEEE ISIT 2000*, Sorrento, Italy

[27] **Yee, M. S.**, 2005. Max-log-map sphere decoder, *IEEE ICASSP 2005*, 1013-1016

[28] **Wübben, D., Böhnke, R., Kühn, V., Kammeyer, KD.**, 2003. MMSE Extension of V-BLAST based on sorted QR decomposition, *IEEE Vehicular Tech. Conf.*, 508-512

[29] **Böhnke, R., Wübben, D., Kühn, V., Kammeyer, KD.**, 2003. Reduced complexity MMSE detection for BLAST architectures, *IEEE GLOBECOM*, 2258-2262

[30] **Wübben, D., Rinas, J., Böhnke, R., Kühn, V., Kammeyer, KD.**, 2002. Efficient algorithm for detecting layered space-time codes, 4th *International ITG Conf. on source and channel coding*, 1-7

[31] **Stojnic, M., Vikalo, H., Hassibi, B.**, 2005. A branch and bound approach to speed up the sphere decoder, *IEEE ICASSP*, 429-432.

[32] **Fincke, U., Phost, M.**, 1985. Improved methods for calculating vectors of short length in a lattice, including a complexity analysis, *Mathematics of Computation*, **44**, 463-471.

[33] **Vikalo, H., Hassibi, B., Kailath, T.**, 2004. Iterative decoding for MIMO channels via modified sphere decoding. *IEEE Trans on Wireless Communications*, **3**, 2299- 2311.

[34] **Hassibi, B., Vikalo, H.**, 2005. On the sphere decoding algorithm I. expected complexity, *IEEE Trans. Signal Processing*, **53**, 2806-2818.

[35] **Vikalo, H., Hassibi, B.**, 2005. On sphere decoding algorithm. II. Generalizations, Second-order statistics, and applications to communications. *IEEE Trans. Signal Processing*, **53**, 2819- 2834.

[36] **Damen, M. O., Abed-Meriam, K., Belfiore, JC.**, 2000. A generalized lattice decoder for asymmetrical space-time communication architecture, *IEEE ICASSP*, **5**, 2581-2584.

[37] **Vikalo, H., Hassibi, B.**, 2002. Modified Fincke-Phost Algorithm for Low-Complexity Iterative decoding over multiple antenna channels, *IEEE ISIT*, Lausanne, Switzerland

[38] **Su, W., Xia, X.**, 2003. On Space-Time Block Codes from Complex Orthogonal Designs, *Wireless Personal Communications*, **25**, 1-26.

[39] **Çelebi, M. E.**, 2003. Lineer dağılım uzay-zaman blok kodlamada yeni bir yaklaşım, *SIU*, Türkiye.

EKLER

Bilgisayar benzetiminde kullanılan örnek kodlar:

```
function REC_SIM=REC_SIM(QAM,snr_db,M_,N_,Q_,T_,Sd)
hata=0;
simge_hata=0;
map=mapper(QAM);
%snr=(10^(snr_db/10))*log2(QAM);
snr=(10^(snr_db/10));%*N_ vardı
for i=1:2*N_*T_
    v(i,1)=gngauss(0,sqrt(1/2));
end
for p=1:Q_
    u(p)=fix(rand*QAM);
    s(2*p-1:2*p,1)=map(u(p)+1,:)';
end
for i=1:M_
    for p=1:N_
        h_im(i,p)=gngauss(0,sqrt(1/2));
        h_re(i,p)=gngauss(0,sqrt(1/2));
    end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%   keeps(2)     S = si.Ci + si*.Di          %%
%%   keeps(1)     S = alfai.Ai + j.betai.Bi   %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
if Sd<7
[keep_A,keep_B]=Hassibi_Hockwald(Sd);
elseif Sd==7
[keep_A,keep_B]=kod_tasarim(Sd);
end
H=H_T(h_im,h_re,keep_A,keep_B,M_,N_,Q_,T_);
rho=snr/(((norm(s))^2)/Q_);
x=sqrt(rho/M_)*H*s+v;
kanal=H*sqrt(rho/M_);
if 2*T_*N_==2*Q_
REC_SIM=[x kanal s];
elseif 2*T_*N_>2*Q_
REC_SIM=[x kanal [s;zeros(size(x,1)-size(s,1),1)] ];
elseif 2*T_*N_<2*Q_
REC_SIM=[[x;zeros(size(s,1)-size(x,1),1)] -->
[kanal;zeros(size(s,1)-size(x,1),size(s,1))] s];
end
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function IDENT_SIM=IDENT_SIM(snr,constl,init_r,slice_r,M,N,Q,T,Sd)

e=0;
d=0;
simge_sayisi=2*Q;
for w=1:1

    receive=REC_SIM(constl,snr,M,N,Q,T,Sd);
    gond=receive(1:2*Q,size(receive,2));
    s=SPHERE_DEC(init_r,receive(1:2*T*N,1),receive(1:2*T*N,2: -->
    size(receive,2)-1),constl,simge_sayisi);
    yc=init_r;
    while s==0,
        yc=yc+slice_r;
        s=SPHERE_DEC(yc,receive(1:2*T*N,1),receive(1:2*T*N,2: -->
        size(receive,2)-1),constl,simge_sayisi);
    end
    yc;
    ind=length(s(:,1));
    for ols=1:ind
        for k=1:2*Q
            p(k,ols)=s(ols,2*Q+1-k);
        end
    end
    aa=[p gond];
    sp=p(:,1);
    if ind > 1
        for d=1:ind
            ww(d)=norm(receive(:,1)-receive(:,2:size(receive,2)-->
            -1)*p(:,d));
        end
        [e1 e2]=min([ww]);
        p(:,1)=p(:,e2);
    end
    MP=mapper(constl);
    olur=1;
end
for i=1:Q
    t1(i,:)=gond(2*i-1:2*i,1)';
    t2(i,:)=p(2*i-1:2*i,1)';
    t3(i,:)=sp(2*i-1:2*i,1)';
end
map=mapper(constl);
for p=1:Q
    for i=1:constl
```

```
        if map(i,:)==t1(p,:)
            tm1(1,p)=i-1;
        end
        if map(i,:)==t2(p,:)
            tt1(1,p)=i-1;
        end
        if map(i,:)==t3(p,:)
            ts1(1,p)=i-1;
        end
    end
end
err1=0;
err2=0;
for i=1:Q
    err1=err1+biterr(dec2bin(tm1(1,i)),dec2bin(tt1(1,i)));
    err2=err2+biterr(dec2bin(tm1(1,i)),dec2bin(ts1(1,i)));
end

IDENT_SIM=[err1 err2];

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [keep_A,keep_B]=kod_tasarim(Sd)

if Sd==7

% C(:,:,1)=[ 1  0; 0  0];
% C(:,:,2)=[ 0  1; 0  0];
% C(:,:,3)=[ 0  0; 1  0];
% C(:,:,4)=[ 0  0; 0  1];
% D(:,:,1)=[ 0  0; 0  0];
% D(:,:,2)=[ 0  0; 0  0];
% D(:,:,3)=[ 0  0; 0  0];
% D(:,:,4)=[ 0  0; 0  0];

C(:,:,1)=[ 1  0; 0  0];
C(:,:,2)=[ 0  1; 0  0];
D(:,:,1)=[ 0  0; 0  1];
D(:,:,2)=[ 0  0;-1  0];

% C(:,:,1)=[ 0  0  0; 0  1  0; 0  0  1; 0  0  0];
% C(:,:,2)=[ 0  1  0; 0  0  0; 0  0  0; 0  0 -1];
% C(:,:,3)=[ 0  0  1; 0  0  0; 0  0  0; 0  1  0];
% C(:,:,4)=[ 0  0  0; 0  0  1; 0 -1  0; 0  0  0];

% D(:,:,1)=[-1  0  0; 0  0  0; 0  0  0; 0  0  0];
% D(:,:,2)=[ 0  0  0; 1  0  0; 0  0  0; 0  0  0];
% D(:,:,3)=[ 0  0  0; 0  0  0; 1  0  0; 0  0  0];
% D(:,:,4)=[ 0  0  0; 0  0  0; 0  0  0; 1  0  0];
```

```
% C(:,:,1)=[ 1  0  0  0  0  0  0  0];
% C(:,:,2)=[ 0  1  0  0  0  0  0  0];
% C(:,:,3)=[ 0  0  1  0  0  0  0  0];
% C(:,:,4)=[ 0  0  0  1  0  0  0  0];
% C(:,:,5)=[ 0  0  0  0  1  0  0  0];
% C(:,:,6)=[ 0  0  0  0  0  1  0  0];
% C(:,:,7)=[ 0  0  0  0  0  0  1  0];
% C(:,:,8)=[ 0  0  0  0  0  0  0  1];

% D(:,:,1)=[ 1  0  0  0  0  0  0  0];
% D(:,:,2)=[ 0  1  0  0  0  0  0  0];
% D(:,:,3)=[ 0  0  1  0  0  0  0  0];
% D(:,:,4)=[ 0  0  0  1  0  0  0  0];
% D(:,:,5)=[ 0  0  0  0  1  0  0  0];
% D(:,:,6)=[ 0  0  0  0  0  1  0  0];
% D(:,:,7)=[ 0  0  0  0  0  0  1  0];
% D(:,:,8)=[ 0  0  0  0  0  0  0  1];

% C(:,:,1)=[ 0  0  0; 0  1  0; 0  0  1; 0  0  0];
% C(:,:,2)=[ 0  1  0; 0  0  0; 0  0  0; 0  0 -1];
% D(:,:,3)=[ 0  0  1; 0  0  0; 0  0  0; 0  1  0];
% D(:,:,4)=[ 0  0  0; 0  0  1; 0 -1  0; 0  0  0];

% D(:,:,1)=[-1  0  0; 0  0  0; 0  0  0; 0  0  0];
% D(:,:,2)=[ 0  0  0; 1  0  0; 0  0  0; 0  0  0];
% C(:,:,3)=[ 0  0  0; 0  0  0; 1  0  0; 0  0  0];
% C(:,:,4)=[ 0  0  0; 0  0  0; 0  0  0; 1  0  0];

% C(:,:,1)=[ 1  0  0  0; 0  0  0  0];
% C(:,:,2)=[ 0  1  0  0; 0  0  0  0];
% C(:,:,3)=[ 0  0  1  0; 0  0  0  0];
% C(:,:,4)=[ 0  0  0  1; 0  0  0  0];

% D(:,:,1)=[ 0  0  0  0; 0  1  0  0];
% D(:,:,2)=[ 0  0  0  0;-1  0  0  0];
% D(:,:,3)=[ 0  0  0  0; 0  0  0 -1];
% D(:,:,4)=[ 0  0  0  0; 0  0  1  0];

        keep_A=(C+D);
        keep_B=(C-D);

end
```

ÖZGEÇMİŞ

7 Şubat 1980 tarihinde Sakarya'da doğdu. Sakarya Ali Dilmen Lisesi'ni bitirdikten sonra 1998 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi, Elektrik-Elektronik Fakültesi, Elektronik ve Haberleşme Mühendisliğine girdi. 2003 yılında lisans öğrenimini bitirerek aynı yıl aynı üniversitede yüksek lisans eğitimine başladı. 2005 yılında başlayarak bir yıl süreyle Sinan Kahraman Nortel Netaş'da Yazılım Geliştime Mühendisi olarak çalışmıştır. 2006 yılından itibaren Tübitak UEKAE'de görev yapmaktadır.