İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELASTİK ZEMİNE OTURAN DAİRE EKSENLİ KİRİŞLERİN TAŞIMA MATRİSLERİNİN BULUNMASI İÇİN BİR SAYISAL YÖNTEM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnş.Müh.Mustafa SÖNMEZATEŞ

Anabilim Dalı: İnşaat Mühendisliği
Programı: Yapı Mühendisliği

Tez Danışmanı: Prof.Dr.Reha ARTAN

ŞUBAT 2007

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELASTİK ZEMİNE OTURAN DAİRE EKSENLİ KİRİŞLERİN TAŞIMA MATRİSLERİNİN BULUNMASI İÇİN BİR SAYISAL YÖNTEM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnş. Müh. Mustafa SÖNMEZATEŞ
501041084

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 25.Aralık.2006
Tezin Savunulduğu Tarih : 02.Şubat.2007

Tez Danışmanı : **Prof.Dr. Reha ARTAN**
Diğer Jüri Üyeleri **Prof.Dr. Faruk YÜKSELER (Y.T.Ü.)**
Doç.Dr. Ünal ALDEMİR (İ.T.Ü.)

ŞUBAT 2007

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın gerçekleşmesi sırasında karşılaştığım zorluklarda bana yardımcı olan ve her türlü desteği gösteren değerli hocam **Prof.Dr.Reha ARTAN**'a teşekkürlerimi sunarım. Lisans eğitimimde verdiği bilgilerden ve bana yüksek lisans eğitimini almam konusunda öncülük yapan değerli hocam **Fuat KÖKSAL**'a teşekkür ederim. Ders aldığım ve bilgilerinden yararlandığım tüm hocalarıma teşekkür ederim. Eğitim süresi boyunca ve öncesinde her türlü yardımı ve sonsuz desteği veren, sonrasında da vereceğinden hiç şüphem olmayan aileme teşekkür ederim.

Şubat 2007

Mustafa SöNMEZATEŞ

İnşaat Mühendisi

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ . . . . . **ii**
ŞEKİL LİSTESİ . . . . . **iv**
TABLO LİSTESİ . . . . . **v**
SEMBOL LİSTESİ . . . . . **vi**
ÖZET . . . . . **vii**
SUMMARY . . . . . **viii**

1. GİRİŞ **1**
1.1. Problemin Tanımlanması 1
1.2. Problemin Üzerine Yapılmış Çalışmalar 1
1.3. Çalışmanın Amacı 2

2. ELASTİK ZEMİNE OTURAN DAİRESEL ÇUBUKLARIN ANALİZİ . . . **3**
2.1. Tanımlar 3
2.1.1. Serret-Frenet Formülleri 3
2.1.2. Çubukta Statik Analiz 5
2.1.3. Çubuğun Şekil Değiştirmesi 7
2.1.4. Kesit Tesirleri ile Şekil Değiştirme Bağıntıları 9
2.1.5. Aranan Kesit Değerleri ve Kullanılan Denklemler 11
2.2. Doğru Eksenli Çubuklar 12
2.3. Düzlemsel Çubuklar 13
2.3.1. Düzleminde Yüklü Eğri Eksenli Çubuklar 16
2.3.2. Düzlemine Dik Yüklü Eğri Eksenli Çubuklar 17
2.4. Düzlemsel Çubuklar İçin Sınır Koşulları 18
2.4.1. Düzleminde Yüklü Eğri Eksenli Çubuklar İçin Sınır Koşulları 18
2.4.2. Düzlemine Dik Yüklü Eğri Eksenli Çubuklar İçin Sınır Koşulları 20
2.5. Dairesel Çubuklar 23
2.5.1. Düzleminde Eğilen Dairesel Çubuklar 23
2.5.2. Düzlemine Dik Kuvvet Etkisinde Dairesel Çubuklar 25
2.6. Başlangıç Değerleri Metodu ve Taşıma Matrisi 26
2.6.1. Taşıma Matrisinin Hesabı ve Özellikleri 30
2.6.2. Taşıma Matrisinin Hesabına Farklı Bir Yaklaşım 32
2.7. Elastik Zemine Oturan Düzlemine Dik Yüklü Dairesel Çubuklar 34

ÖRNEK **41**

3. SONUÇLAR **64**

KAYNAKLAR **65**

ÖZGEÇMİŞ **67**

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa no

Şekil 2.5 : $\vec{t}$,$\vec{n}$,$\vec{b}$ Eksen Takımı 4
Şekil 2.6 : Çubukta statik denge 6
Şekil 2.7 : Düzleminde yüklü çubuk için serbest uç 19
Şekil 2.8 : Düzleminde yüklü çubuk için kayıcı mesnet 19
Şekil 2.9 : Düzleminde yüklü çubuk için ankastre mesnet 20
Şekil 2.10 : Düzlemine dik yüklü çubuk için serbest uç 21
Şekil 2.11 : Düzlemine dik yüklü çubuk için kayıcı mesnet 21
Şekil 2.12 : Düzlemine dik yüklü çubuk için sabit mesnet 22
Şekil 2.13 : Düzlemine dik yüklü çubuk için ankastre mesnet 22
Şekil 2.14 : Elastik zemine oturan dairesel çubuk 41
Şekil 2.15 : $U_b - \varphi$ noktasal grafik 51
Şekil 2.16 : $\Omega_n - \varphi$ noktasal grafik 52
Şekil 2.11 : $\Omega_t - \varphi$ noktasal grafik 53
Şekil 2.18 : $M_n - \varphi$ noktasal grafik 54
Şekil 2.19 : $M_t - \varphi$ noktasal grafik 55
Şekil 2.20 : $T_b - \varphi$ noktasal grafik 56
Şekil 2.21 : $U_b - \varphi$ fonksiyon, nokta uyumu 58
Şekil 2.22 : $\Omega_n - \varphi$ fonksiyon, nokta uyumu 59
Şekil 2.23 : $\Omega_t - \varphi$ fonksiyon, nokta uyumu 60
Şekil 2.24 : $M_n - \varphi$ fonksiyon, nokta uyumu 61
Şekil 2.25 : $M_t - \varphi$ fonksiyon, nokta uyumu 62
Şekil 2.26 : $T_b - \varphi$ fonksiyon, nokta uyumu 63

TABLO LİSTESİ

Sayfa no

Tablo 2.1 : Zemin Yatak Katsayıları 40
Tablo 2.2 : T_{b0} ve $T_{b\pi/6}$ değerleri 50

SEMBOL LİSTESİ

$\vec{t}$	:	Teğet Birim Vektör
$\vec{n}$	:	Esas Normal Birim Vektör
$\vec{b}$	:	Binomal Birim Vektör
$\vec{r}$	:	Yer Vektörü
s	:	Yay Parçasının Uzunluğu
χ	:	Eğrilik
$\vec{T}$	:	Kesme Kuvveti
T_{tt}, T_{nn}, T_{bb}	:	$\vec{t}$,$\vec{n}$,$\vec{b}$ Eksenleri Kesme Kuvvetleri
$\vec{M}$	:	Moment
M_{tt}	:	$\vec{t}$ Burulma Momenti
M_{nn}	:	$\vec{n}$ Eğilme Momenti
M_{bb}	:	$\vec{b}$ Ekseni Momenti
$\vec{p}$	:	Dış Yük
$\vec{m}$	:	Dış moment
$\vec{U}$	:	Yer Değiştirme
U_{tt}, U_{nn}, U_{bb}	:	$\vec{t}$,$\vec{n}$,$\vec{b}$ Eksenleri Doğrultusundaki Yerdeğiştirmeler
$\vec{\Omega}$	:	(Rölatif Birim) Dönme
Ω_{tt},Ω_{nn},Ω_{bb}	:	$\vec{t}$,$\vec{n}$,$\vec{b}$ Eksenleri Etrafındaki Dönmeler
$\vec{\gamma}$	:	Rölatif Birim Kayma
S_{tt}, S_{nn}	:	Burulma ve Eğilme Rijitlikleri
C_{tt}	:	Eksenel Rijitlik
C^{-1}, S^{-1}	:	Esneklik Matrisleri
ς	:	Burulma Rijitliği / Eğilme Rijitliği
$\vec{\lambda}$	:	Eksen Eğriliği
I_n	:	Atalet Momenti
I_t	:	Atalet Momenti
E	:	Elastisite Modülü
G	:	Kayma Modülü
P	:	Durum Vektörü
I	:	Birim Matris
D	:	Diferansiyel Geçiş Matrisi
F	:	Taşıma Matrisi
β	:	Skaler Kuvvet Serisi
ψ	:	Skaler Kuvvet Serisi
C_i	:	integral Sabiti
k	:	Winkler Zemin Yatak Katsayısı
υ	:	Poisson Oranı
q	:	Zemin Tepki Kuvveti

ÖZET

Bu çalışmada elastik zemine oturan dairesel kirişlerin analizi Başlangıç Değerleri ve Taşıma Matrisi Metodu kullanılarak yapılmıştır.Hesaplarda kesme etkisi çok küçük olduğu için ihmal edilmiştir.Yapılan uygulamalarda düzlemine dik yüklü çubuklar incelenmiştir.

Giriş bölümünde problemin önemi,daha önce yapılan çalışmalar ve bu tezin amaçları anlatılmıştır. Tanımlar bölümünde çubuk mukavemetinin esasları anlatılmıştır. Çubuklar için alan denklemleri elde edilmiştir.Şekil değiştirme ve yer değiştirme bağıntıları bulunmuştur.Hooke yasaları incelenmiştir.Bu bölümün sonunda toplu halde çubuk sistemleri için bilinmeyen değerler kullanılarak denklemler özetlenmiştir.

Doğrusal çubuklar kısaca anlatılmış ve çalışmanın temelini düzlemsel çubuklar oluşturduğu için üzerinde fazla durulmamıştır.Düzlemsel çubukların genel denklemleri ve sınır koşulları iki ana başlık altında incelenmiştir. Bunlar düzleminde yüklü düzlemsel çubuklar ve düzlemine dik yüklü çubuklardır.Eğri eksenli düzlemsel çubuklar için genel denklemler gene iki başlık altında elde edilmiştir. Her iki tür yükleme türü için homojen halde yer değiştirmelerin sağlandığı gerekli diferansiyel denklemler bulunmuştur. Bu difensiyel denklem çözümü için Başlangıç Değerleri ve Taşıma Matrisi Metodu kullanılmıştır.Başlangıç Değerleri yönteminin kullanımı ve önemi anlatılmıştır. Diferansiyel Geçiş Matrisinden Taşıma Matrisine nasıl geçildiği anlatılmıştır.Bu noktada bu çalışmanında çözüm yöntemi olan Picard Açılımı ve Matrisant İntegral serisi yönteminin nasıl uygulandığı teorik esasları ile verilmiştir. Dairesel çubuklar gene iki ana başlık altında incelenmiştir. Düzlemine dik yüklü ve düzleminde yüklü eğri eksenli çubukların eksen eğriliklerinin bir daire gibi sabit olması durumunda ki denklemler verilmiştir. Düzlemine dik yüklü çubuklarda yer değiştirme bileşenin sağlaması gerekli diferansiyel denklem elde edilmiş ve bunun başlangıç değerleri taşıma matrisi metodu ile nasıl çözüleceği incelenmiştir.

Yayılı yük ile yüklü dairesel çubuk matemetika yazılımında yapılan bir program yardımı ile çözülmüş ve kesit tesitleri elde edilmiştir. Winkler elastik zemin hipotezi anlatılmış ve elastik zemine oturan düzlemine dik yüklü dairesel çubuklar için genel denklemler elde edilmiştir. Uygulama olması açısından aynı program ve metodla problem çözülmüş ve kesit tesirleri elde edilmiştir. Tepe açısı $\frac{\pi}{6}$ olan daire eksenli yayılı yüklü çubuk parçası için 15 parçada ayrı ayrı kesit tesirleri bulunmuş ve grafikleri çizilmiştir.Bu grafiklere en uygun polinom fonksiyonları matematika yazılımı ile bulunup kesit tesirleri fonksiyonları belirlenmiştir.Bulunan bu fonksiyonlarında grafikleri çizilerek karşılaştırma yapılmıştır. Sonuçlar bölümünde yapılan çalışma ve nümerik hesap yöntemleriyle ilgili bulunanlar anlatılmıştır. Çalışma LaTeX tabanlı bir editör olan TexnicCenter programı ile yazılmıştır.

SUMMARY

study we try to find out a section effects for a circular bar on a Elastic Soil.Bar is so simple and effective structure element.it has two dimensions.According to the this fact bar is a one dimension element.A bar occur with two main parametres.One of them is the parpendicular-section and the other bar axis.ın the next step decribed three vectors show fig1. where $\vec{t}$ is Tangent Unit Vector,

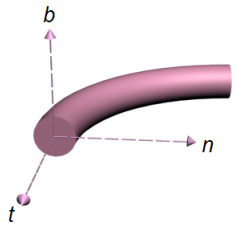


Figure 1: $\vec{t}$,$\vec{n}$,$\vec{b}$ Axes

$\vec{t}$ = Tangent Unit Vector

$\vec{b}$ = Binomal Unit Vector

$\vec{u}$ = Principal Normal Unit Vector

There are some different relationship between these three unit vectors Serrent-Frenet formulation gives like that

$$\frac{\vec{t}}{s} = \chi.\vec{n} \tag{1}$$

$$\frac{\vec{n}}{s} = \tau.\vec{b} - \chi.\vec{t} \tag{2}$$

$$\frac{\vec{b}}{s} = -\tau.\vec{n} \tag{3}$$

$$\chi = \frac{x^1 y^{11} - y^1 x^{11}}{((x^1)^2 + (y^1)^2)^{3/2}} \tag{4}$$

Acting on a bar external forces and moments can show with $\vec{p}(s)$ and $\vec{m}(s)$.Result of all external effects are shown with two fuction depends on s.Internal forces can be show that $\vec{T}$ and $\vec{M}$.Internal forces discrete to their components in $\vec{t}$,$\vec{n}$,$\vec{b}$ coordinate system;

$\vec{T}.\vec{t} = T_t$, Axial Normal Force

$\vec{T}.\vec{n} = T_n$, Shear Force on $\vec{n}$ axis

$\vec{T}.\vec{b} = T_b$, Shear Force on $\vec{b}$ axis

$\vec{M}.\vec{t} = M_t$, Torsional Moment

$\vec{M}.\vec{n} = M_n$, Bending Moment around $\vec{n}$ axis

$\vec{M}.\vec{b} = M_b$, Bending Moment around $\vec{n}$ axis

Search for differantial relationships between Internal and External forces draw a bar which statically in equilibrium like show in fig 2.

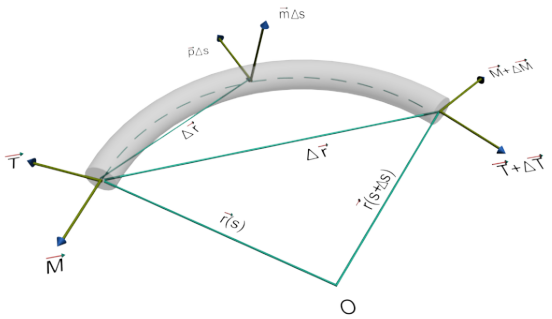


Figure 2: A Bar in Statically Equilibrium

$$\frac{d\vec{T}}{ds} + \vec{p} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{d\vec{M}}{ds} + \vec{t}x\vec{T} + \vec{m} = 0 \tag{6}$$

gives so important equations called are *Field equations or Differantial Equilibrium Equations*.

Next step try to answer for question how is a bar strain-deformation relationship under external effects. The vector of $\vec{U}$(s) describe of motion of gravity center of perpendicular section. $\vec{\Omega}$(s) show that the rotation around axis which pass the gravity center. There are some differantial relation with these two vectors because there are describe same perpendicular section motion.Addition to this it has to two unit vector.$\vec{\gamma}$:Relative unit sway and $\vec{\omega}$:Relative unit rotation as a result of this;

$$\frac{d\vec{\Omega}}{ds} - \vec{\omega} = 0 \tag{7}$$

$$\frac{d\vec{U}}{ds} = \vec{\gamma} + \vec{t}x\vec{\Omega} \tag{8}$$

find out to *Compatibility Equations*.

Another physical relation exist for $\vec{T}$,$\vec{M}$ section effects and $\vec{\gamma}$,$\vec{\omega}$ strain vectors. Material assumed that isotrop and elastic, behaviour of bar is linear and Hooke's Law satisfy. If thinking about the behaviour,establish a function among rotations with moments andsways with shear.

$\vec{T} = f'\vec{\gamma}$

$\vec{M} = f''\vec{\omega}$

If there are show that indis form ;

$T_i = C_{ik}\gamma_k$

$M_i = D_{ik}\omega_k$

C_{ik} called is Shear Rigidity Matrix because its cooefficients relation with shear force and shear strain,S_{ik} called is Bending Rigidity Matrix because its cooefficients relation with bending moments and rotations. If use diadical expression;

$\vec{T} = \mathbf{C}.\vec{\gamma}$, $\vec{M} = \mathrm{S}.\vec{\omega}$

For some privitive coordinate systems these matrices will be so simple and useful. For example in $\vec{t}$,$\vec{n}$,$\vec{b}$ coordinate systems;and also assume that symetry axis of section overlapping with $\vec{n}$,$\vec{b}$ plane C,S matrices will be

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{tt} & 0 & 0 \\ 0 & C_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & C_{bb} \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{tt} & 0 & 0 \\ 0 & S_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & S_{bb} \end{bmatrix}$$

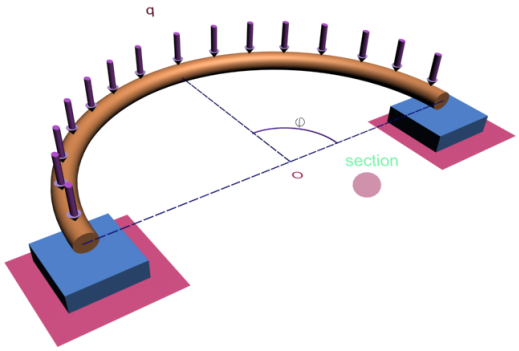


Figure 3: Uniformly Distributed load acting on Circular Bar

General equation of loaded perpendicular to plane bars with curve axis like show in fig 3

$$\begin{aligned} \frac{dU_b}{d\varphi} + \lambda\Omega_n &= 0 \\ \frac{d\Omega_n}{d\varphi} + \Omega_t - \lambda\frac{M_n}{S_{nn}} &= 0 \\ \frac{d\Omega_t}{d\varphi} - \Omega_n - \lambda\frac{M_t}{S_{tt}} &= 0 \\ \frac{dM_n}{d\varphi} + M_t - \Omega_t - \lambda T_b + \lambda m_n &= 0 \\ \frac{dM_t}{d\varphi} - M_n - \lambda T_b + \lambda m_t &= 0 \\ \frac{dT_b}{d\varphi} + \lambda p_b &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

In the case of λ = R and homogenous state , differential equation which U_b have to satisfy ;

$$\frac{d^6U_b}{d^6\varphi} + 2\frac{d^4U_b}{d^4\varphi} + \frac{d^2U_b}{d^2\varphi} = 0 \tag{10}$$

This study based on solution of this differantial equations with Initial Values and Carry-Over Matrix Method. If shortly given meaning of this method , will be ;

$$\begin{aligned} F[t,0] &= I+\int_t^0 D(\tau)d\tau+\int_0^t D(\alpha)\int_0^\alpha D(\tau)d\tau d\alpha \\ &+ \int_0^t D(\zeta)\int_0^\zeta D(\alpha)\int_0^\alpha D(\tau)d\tau d\alpha d\zeta+... \end{aligned} \tag{11}$$

$F(t,0)=F(t,t_n).F(t_n,t_{n-1}).F(t_{n-1},t_{n-2}).....F(t_2,t_1)F(t_1,0)$

$F[t]=F[t,0].F[0]$

This equation gives solution of Initial Values Problem. If circular and loaded perpendicular plane bar settlement on elastic soil which Winkler Elastic Soil , simulated by linear spring , general equations will be ;

$$\begin{aligned} \frac{dU_b}{d\varphi}+\lambda\Omega_n &= 0 \\ \frac{d\Omega_n}{d\varphi}+\Omega_t-\lambda\frac{M_n}{S_{nn}} &= 0 \\ \frac{d\Omega_t}{d\varphi}-\Omega_n-\lambda\frac{M_t}{S_{tt}} &= 0 \\ \frac{dM_n}{d\varphi}+M_t-\Omega_t-\lambda T_b+\lambda m_n &= 0 \\ \frac{dM_t}{d\varphi}+M_n-\lambda T_b+\lambda m_t &= 0 \\ \frac{dT_b}{d\varphi}-\lambda p_b &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

like that . Differantial equation which U_b have to satisfy ;

$$\frac{d^6U_b}{d^6\varphi}+2\frac{d^4U_b}{d^4\varphi}+\frac{d^2U_b}{d^2\varphi}=0 \tag{13}$$

In this study above differantial equation solve by The Initial Values and Carry-Over Matrix Method.

Differantial Matrix for this case ;

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & -R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & R/S_{nn} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & R/S_{tt} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & R \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ k.R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dU_b}{d\varphi} \\ \frac{d\Omega_n}{d\varphi} \\ \frac{d\Omega_t}{d\varphi} \\ \frac{dM_n}{d\varphi} \\ \frac{dM_t}{d\varphi} \\ \frac{dT_b}{d\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & R/S_{nn} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & R/S_{tt} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & R \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ k.R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} U_b \\ \Omega_n \\ \Omega_t \\ M_n \\ M_t \\ T_b \end{bmatrix}$$

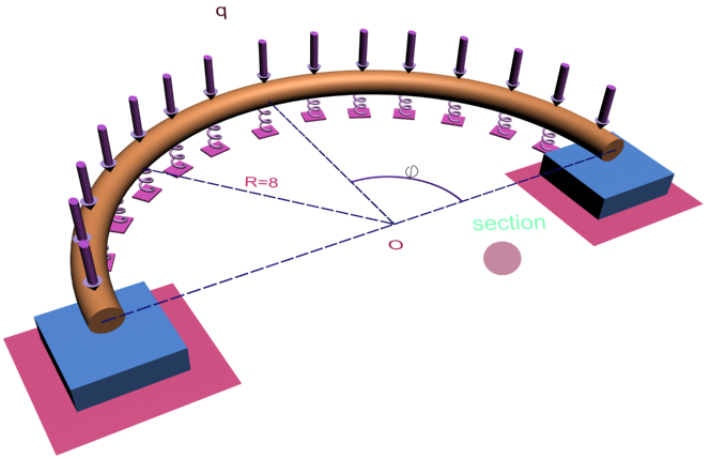


Figure 4: Circular bar in Elastic Soil

1. GİRİŞ

1.1. Problemin Tanımlanması

Çubuk en basit taşıyıcı elemandır. İki boyutu, diğer bir boyutu yanında ihmal edilerek sadece tek bir boyut üzerinde hesaplamalar yapılır. Fakat daha kompleks taşıyıcı sistemlerin[1] temelini oluşturduğu için üzerinde yapılan hesaplamalar ve elde edilen sonuçlar her zaman için önemli olmuştur. Uygulamada en çok karşılaşılan çubuk türleri ; *Doğru ve Daire Eksenli* çubuklardır. Bunun nedeni ; bu özellikte ki çubuk sistemlerde hesaplamaların daha da kolaylaşması uygulamaya yönelik oldukça verimli sonuçlar elde edilmesidir. Bu çalışmada incelenen dairesel eksenli çubuklar uygulamada , silo, su tankı gibi mühendislik yapıların temel sistemlerini oluşturmada kullanılmaktadır.

Çalışmada incelenen problem yukarıda tarif edilen daire eksenli bir çubuğun bir zemin sistemiyle etkileşiminde, çubuktaki şekil tesirlerinin ne şekilde ortaya çıkacağıdır. Yapı-zemin etkileşmesi mühendislikte her zaman önemli bir konu olmuştur. Farklı özellikli zeminlerde yapılan yapı temel sistemlerinin davranış özellikleri günümüzde de önemini korumaktadır. Burda problemin çözümünü önemli ölçüde zemin özelliğinin nasıl şeçildiğidir. Bu çalışmada, uygulamada çok geniş bir uygulama alanı olan teorisindeki basitliğe rağmen pratikte çok iyi sonuçlar vermesi sebebi ile *Winkler Elastik Zemin Hipotezi* kullanılmıştır.

Anahatlarıyla tanımlanan problem için bir çok çözüm metodu bulunmaktadır. Bu mekanik problem bir diferansiyel probleme indirgenmiş ve denklemin çözümü için hem analitik hemde numerik bir çok çözüm tarzı vardır. Bu çalışmada diferansiyel denklemin kapalı çözümündeki zorluk nümerik bir hesapla aşılmaya çalışılarak sonuçların kapalı çözüme yakınsandığı irdelenmiştir.

Günümüzde elektronik hesap makinalarının ve bilgisayarların gelişmesi mühendislerin ve bilim adamlarının nümerik ve sayısal çözümlemelere olan ilgisini artırmıştır. Güçlü bilgisayar programları saniyeler içinde çok sayıda işlem yapan işlemciler eskiden hesaplaması çok uzun zaman alan işlemleri saniyeler içinde gerçekleştirir oldu. Fakat nümerik hesaplamalar her zaman için beklenen sonuçları vermediği bilinen bir gerçektir.

1.2. Problem Üzerinde Yapılmış Çalışmalar

Hetenyi [5] 1946'da Winkler zemini üzerine oturan taşıyıcı sistemler için kesin çözümleri bulmaya uğraşmıştır. Daha önceden de belirtildiği gibi bu problemin kesin çözümünde bir çok zorlukla karşılaşılmaktadır. Buda bilim adamlarını mühendisleri nümerik hesaplar yapmaya yönelten bir etkendir. Diğer etken ise de

[1] *Plak, Kabuk vb. gibi sistemler.*

bir önceki başlık altında belirtildiği gibi günümüzde sayısal hesap yapan makinalar ve bilgisayarların olmasıdır. Buna bir örnek vermek gerekirse Chudnovsky Kardeşler 1996'da kendi evlerinde yaptıkları bir süper bilgisayarla π sayısının 8 milyarı aşkın basamağını hesaplamayı başarmışlardır. Bunlar gelişen mikro işlemci, nano teknoloji ve güçlü algoritmalar kullanan bilgisayarlar sayesinde olmaktadır.

Elastik zemine oturan dairesel eksenli çubuklar ise 1952'de *Volterra* [6] tarafında yapılmıştır. Volterra eğriliği sabit bir yarıçapa eşit olan daire eksenli çubuklar için çesitli yükleme tipleri altında çeşitli yükleme tipleri elde etmiştir ve bunları parametrik olarak tablolar halinde verniştir.

İnan [1-4] 1964'de başlangıç değerleri metodu ile daire eksenli çubuklar için taşıma matrisini elde etmiştir. Fakat elastik zemine oturan daire eksenli çubuk olması halinde 6. dereceden bir diferansiyel denklemin karakteristik denkleminin köklerini kapalı olarak bulamadığı için bu durumun taşıma matrisine ulaşamamıştır. Ama elastik zemine oturan doğru eksenli çubuklar için 1996'da kapalı bir taşıma matrisi vermiştir.

Artan [9] 1999'da düzlemine dik yüklü eğri eksenli çubuklar için taşıma matrisini kapalı olarak vermiştir.

Kıral ve Ertepınar [10] elastik zemine oturan daire eksenli çubuklara ait genel denklemleri kanonik bir hale indirgeyerek kapalı bir çözüme ulaşmışlardır.

Aköz,Kadıoğlu [13] elastik zemine oturan doğru ve daire eksenli çubukların çeşitli yüklemeler altında davranışlarını sonlu elemanlar metodu ile incelemiştir.

1.3. Çalışmanın Amacı

Bu çalışmanın amacı elastik bir zemin üzerine oturan daire eksenli yayılı yüklü çubuk için kesit tesirlerini başlangıç değerleri metodunu kullanılarak elde etmektir. Öncelikle elastik zemine oturan daire eksenli çubuk için taşıma matrisi elde edilirken çok yakınsak bir seri olan Picard Açılımı kullanılmıştır. Ama bu açılımdan fazla terim alınması artan hesap yoğunluğu ve zorluğu nedeniyle kullanışsızdır. Bu çalışmada Matrisant İntegral Serisi kullanılarak Picard Açılımından çok az terim alınsa dahi oldukça yaklaşık taşıma matrisleri elde etmek mümkün olmuştur. Elastik zemine oturan daire eksenli yayılı yüklü çubuk için yaklaşık kesit tesirleri fonksiyonları elde edilmiş ve bunlar grafikler üzerinde yorumlanmıştır.

2. ELASTİK ZEMİNE OTURAN DAİRESEL ÇUBUKLARIN ANALİZİ

2.1. Tanımlar

Bir çubuk eksen ve dik kesit adı verilen iki ana elemandan meydana gelir. Çubuk eksenini herhangi bir uzay eğrisi teşkil edebilir. Bu eğriyi ;

$$\vec{r} = \vec{r}(\mathrm{s})$$

şeklinde bir yer vektörüyle tanımlayalım. Bu uzay eğrisi üzerinde ki herhangi bir B_p ve E_p arası mesafeyi gösteren yay parçasının uzunluğu s kadar olsun. Bu bir eğri boyunca tanımlanacak olursa ;

$$s = \int_c |d\zeta| \tag{14}$$

burada $d\zeta$ ile gösterilen eğri boyunca olan diferansiyel yer değiştirme vektörüdür.

Örneğin açıları radyan cinsinden α_1 α_2 şeklinde olan r yarıçaplı bir çemberde iki nokta arasında ki yay parçasının uzunluğu

$$s = r\,|\alpha_2 - \alpha_1|$$

şeklinde olur. Bir sonraki adım olarak eksene bağımlı üç birim vektör tarif edilirse; her üç birim vektör ile $\vec{r} = \vec{r}(\mathrm{s})$ ifadesiyle betimlenen yer vektörü arasında diferansiyel geometrik bağlar söz konusudur. Bu vektörler doğrultuları itibariyle aşağıdaki gibi isimlendirilirler ;

$\vec{t}$ = Teğet Birim Vektör
$\vec{b}$ = Binomal Birim Vektör
$\vec{n}$ = Esas Normal Birim Vektör

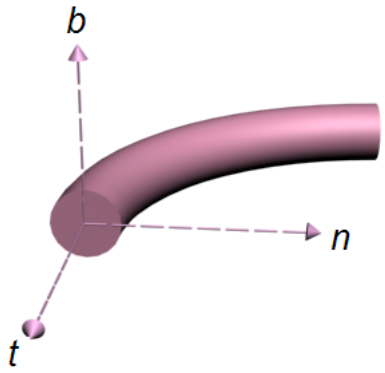
2.1.1. Serret-Frenet Formülleri

Frenet formülleri teğet, esas normal ve binormal vektörleri aralarındaki ilişkileri vermektedir. Bunları şu şekilde yazabiliriz;

$$\frac{\vec{t}}{s} = \chi.\vec{n} \tag{15}$$

$\vec{t} = \frac{dr}{ds}, \left|\vec{t}\right| = 1$ bağıntıları teğet birim vektör için eğrilik denilen ve sürekli pozitif değer alan bir skalerdir.

$$\chi = \frac{d\phi}{ds}$$



Şekil 5: $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ Eksen Takımı

ϕ tanjant açısını , s ise yay parçası uzunluğunu sembolize eder.

$$\chi = \frac{d\phi}{ds} = \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}} ,$$

burada $\chi = \frac{d\phi}{ds}$ terimini bulmak için bir takım trigonometri ve türev işleminden faydalanılarak ;

$$tn\phi = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'}{x'}\frac{d}{dt}(tn\phi) = sec^2\phi\frac{d\phi}{dt} = \frac{(x')(y'')-(y'')(x'')}{(x')^2}\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{sec^2\phi}\frac{d}{dt}(tn\phi)$$

$$= \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{1+tan^2\phi} = \frac{(x')(y'')-(y'')(x'')}{(x')^2}$$

Buradan gerekli işlemler yapılırsa

$$\chi = \frac{(x')(y'')-(y'')(x'')}{((x')^2+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$\frac{\vec{n}}{s} = \tau.\vec{b} - \chi.\vec{t}$

$\vec{n}$ vektörü teğet vektöre dik olup doğrultusu eğrilik merkezi yönündedir. τ eğrinin tabii torsiyonu adı verilen ikinci tür bir eğriliği sembolize eder. Bütün düzlem eğriler için sıfır olmasına karşın uzay eğrileri için sıfırdan farklıdır. Pozitif yada negatif değerler alabilir.

$\frac{\vec{b}}{s} = -\tau.\vec{n}$

$\vec{b} = \vec{t}x\vec{n}$ şeklinde bir kartezyen çarpımdan ibarettir. Frenet formülleri şu şekilde de yazılabilir ;

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \vec{t} \\ \ddot{r} &= \chi.\vec{n} \\ \dddot{r} &= \dot{\chi}.\vec{n} + \chi(\tau\vec{b} - \chi\vec{t}) \end{aligned}$$

χ ve τ değeri sabit olan eğrilere helezon adı verilir. Her iki eğriliğede sıfır olanlara ise doğru adı verilir. Çubuktan normal düzlemle bir kesit alınırsa kesen düzlemin her iki tarafında kalmak üzere çubukta iki ayrı yüz oluşur. Bir işaret kabulu yapmak istenirse ; pozitif kesiti dış normali $\vec{t}$ ile aynı yönde olan kesit, diğerine ise negatif kesit olarak düşünülebilir.

2.1.2. Çubukta Statik Analiz

Doğrultuları çubuk ekseninden geçen ve yayılı olan dış kuvvetleri $\vec{p}$ ile gösterilsin. Eğer bu dış kuvvetler çubuk ekseninden geçmez iseler bir kuvvet çifti tarif ederek çubuk eksenine taşınabilirler. Bu kuvvet çifti $\vec{m}$ ile gösterilsin. Sonuç olarak çubuğa etkiyen bütün dış kuvvetler $\vec{p}$(s) ve $\vec{m}$(s) şeklinde iki adet fonksiyonla belirlenmiş olur. İç kuvvetlere gelinirse $\vec{T}$ ile kesite etki eden iç kuvvetlerin vektörel toplamı, $\vec{M}$ ile de bunların ağırlık merkezine taşındığı zaman ortaya çıkan kuvvet çifti tarif edilsin. Bunlara kesit tesirleri adı verilmektedir. Aslında bütün yapılmak istenen s ile değişkenlik gösteren $\vec{T}(s)$ ve $\vec{M}(s)$ fonksiyonlarını hesaplayabilmektedir. Bu bahsi geçen kesit tesirlerinin daha önceden belirtilen ($\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$) eksen takımındaki koordinatları farklı anlamlar ifade eder.

Kesit tesirleri bu eksen takımına indirgendiğinde cisimlerin mukavemetinin de konusu olan basit mukavemet halleri ile karşılaşmak mümkündür. Örnek verilirse ; eksenel normal kuvvet hali, burulma hali, basit eğilme v.b gibi mukavemet hallerinde çubuk elemana kesit tesirlerinin yanlız bir bileşenin etkidiği düşünülerek problem basitleştirilir ve olayın mühendislik doğası hakkında fikir vermesi beklenir. Bunun yapılmasındaki amaç çok kompleks hesaplamalar gerektiren şekil değiştiren cisimler teorisini basitleştirerek uygulamalı mekaniğe yönelik sonuçlar elde etmektir.

$\vec{T}.\vec{t} = T_t$, Eksenel Normal Kuvvet

$\vec{T}.\vec{n} = T_n$,$\vec{n}$ Ekseni Kesme Kuvveti

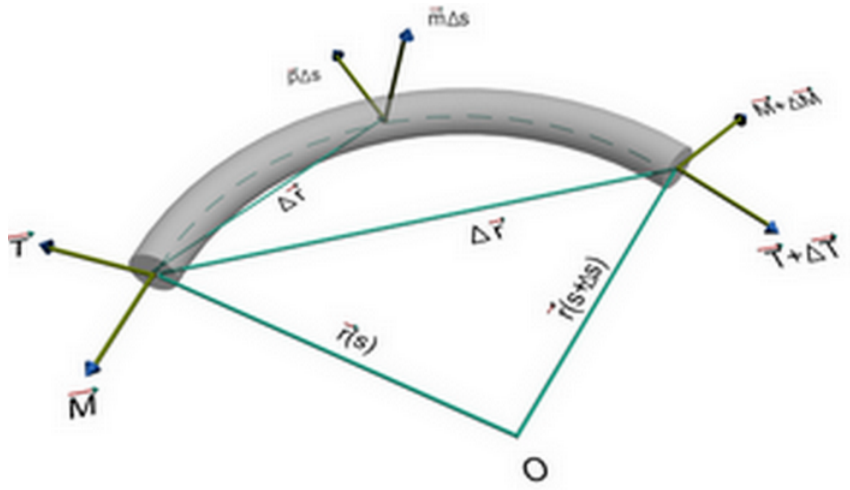
$\vec{T}.\vec{b} = T_b$,$\vec{b}$ Ekseni Kesme Kuvveti

$\vec{M}.\vec{t} = M_t$, Burulma Momenti

$\vec{M}.\vec{n} = M_n$,$\vec{n}$ Ekseni Etrafında Eğilme Momenti

$\vec{M}.\vec{b} = M_b$,$\vec{n}$ Ekseni Etrafındaki Eğilme Momenti

Bağıntıları sonucu kesitteki kuvvet ve moment bileşenleri; T_t, T_n, T_b, M_t^2, M_n, M_b şeklinde toplam 6 tanedir.
Şimdi ise bu $\vec{T}(s)$ ve $\vec{M}(s)$ fonksiyonlarının dış kuvvetlerle olan diferansiyel bağlantıları araştırılsın. Bunu elde etmek için Δs uzunluğunda ve dengede olan bir çubuk elemanı oluşturulur ve bunun denge denklemi ile B_p noktasına göre moment denklemi yazılırsa;



Şekil 6: Çubukta Statik Denge

$-\ \vec{T} + \vec{T} + \Delta\vec{T} + p\Delta s = 0$, Denge Denklemi

$-\ \vec{M} - \vec{M} + \Delta\vec{M} + m\Delta s + \Delta\vec{r}x(\vec{T} + \Delta\vec{T}) = 0, B_p$ye göre moment

$+\ \Delta\vec{T} + p\Delta s = 0$

$+\ \Delta\vec{M} + m\Delta s + \Delta\vec{r}x(\vec{T} + \Delta\vec{T}) = 0$

[2] *Not:Burulma Momenti;M'nin kesitinin ağırlık merkezine etkidiği durum için geçerlidir.*

Limit teoremi kullanılarak ;

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{T}}{\Delta \vec{s}} + \frac{p \Delta s}{\Delta s} = \tag{16}$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} + \vec{p} = 0 \tag{17}$$

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{M}}{\Delta \vec{s}} + \frac{\vec{m} \Delta s}{\Delta s} + \frac{\Delta r}{\Delta s} x(\vec{T} + \Delta \vec{T}) = \tag{18}$$

$\frac{d\vec{M}}{ds} + \vec{T} x\vec{t} + \vec{m} = 0$

$\frac{d\vec{T}}{ds} + \vec{p} = 0$

$\frac{d\vec{M}}{ds} + \vec{T} x\vec{t} + \vec{m} = 0$

Diferansiyel denge denklemleri yada Alan denklemleri adı verilen çok önemli iki denklemi elde edilmiştir. Bu denklemler kurulurken çubuğun şekil değiştirmiş hali göz önüne alınmamıştır. I. Mertebe teorisi esasına göre şekil değiştirmeler ve yer değiştirmeler çok küçüktür.

2.1.3. Çubuğun Şekil Değiştirmesi

Çubuk dış yüklerin etkisiyle şekil değiştirdiği zaman ekseni üzerindeki bir P noktası konusundan uzaklaşarak yeni bir $P^{'}$ noktasına gelir. Bu iki nokta birbirine bağlayan çizgi bir vektör gibi düşünülürse $\vec{PP'}$ gibi bir yer değiştirme vektörü elde edilir. Buda s'ye bağlı bir $\vec{U}$ vektörü ile gösterilirse;

$\vec{PP'} = \vec{U}(s)$

gibi bir eşitlik yazılabilir. Bu fonksiyon belirlendiği zaman eksenin şekil değiştirmeden sonraki konumu tamamen belli olur. Eğer dik kesitin şekil değiştirmeden sonraki konumuna bakılacak olunursa oldukça karmaşık bir geometrik hal aldığı gözlenir. Bu noktada Bernoulli prensibi ve I. Mertebe teorisi uyarınca şekil değiştirmeden önce düzleme dik olan kesit şekil değiştirdikten sonra düzlem kalır. Dik kesitin düzlemsel bir şekilden olan sapmaları ihmal edilecektir. Hatta kesitin bazı noktalardaki bir ötelenme ve dönmeden oluşan rijit levhanın hareketine benzetilebilir. $\vec{U}$(s) vektörü dik kesitin ağırlık merkezine ait ötelenmesini Ω(s) ise ağırlık merkezinden geçen eksen etrafındaki dönmeyi gösterir. Şiddetleri çok

küçük olarak kabul edilen bu iki vektör aynı cisme ait dik kesitin hareketini tanımladığı için aralarında bir diferansiyel bağıntı vardır. Birim uzunlukta bir çubul elemanı için öncekilerden farklı iki yeni vektör daha tanımlamak gerekir. $\vec{\gamma}$: relatif birim kayma , $\vec{\omega}$: relatif birim dönme. Bu son gösterilen iki vektörle öncekiler arasında birtakım diferansiyel bağıntılar vardır;

$$\vec{\gamma} = (\frac{d\vec{U}}{ds})_{\vec{\Omega}} \to 0 \tag{19}$$

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\Omega}}{ds} \tag{20}$$

$\vec{U}$(s) ile $\vec{\Omega}$(s) arasındaki bağıntı; çubuk ekseni üzerinde alınan iki noktanın yer değiştirmelerinin farkı $\Delta\vec{U}$ ile gösterilsin. Burada bu iki nokta $\vec{\gamma}\Delta s$ kadar relatif bir farkla hareket eder. İlk noktadan geçen kesit $\vec{\Omega}$ kadar dönünce diğer nokta $\vec{\Omega} x \Delta r$ kadar döner.

$$\Delta\vec{U} = \vec{\gamma}\Delta s + \vec{\Omega} x \Delta\vec{r} \tag{21}$$

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\vec{U}}{\Delta s} = \vec{\gamma}.\frac{\Delta s}{\Delta s} + \vec{\Omega} x \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} \tag{22}$$

$$Not : \frac{\Delta s}{\Delta s} = \vec{t} \tag{23}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta s} = \vec{\gamma} + \vec{\Omega} x \vec{t} \tag{24}$$

ifadesi aranılan bağıntıyı verir. Bu bağıntıya uygunluk şartı denilmektedir. Kesit tesirleri bulunurken yapılan kabuller burada da geçerlidir. Sonuç olarak $\vec{U}, \vec{\Omega}, \vec{\gamma}, \vec{\omega}$ vektör fonksiyonları arasında aşağıdaki bağıntılar söz konusudur.

$$\frac{d\vec{\Omega}}{ds} - \vec{\omega} = 0 \tag{25}$$

$$\frac{d\vec{U}}{ds} = \vec{t} x \vec{\Omega} + \vec{\gamma} = 0 \tag{26}$$

γ_t: Birim Uzama. γ_t, γ_b: Farklı iki doğrultudaki kaymalar. ω_t: Burulmada ki birim dönme. ω_t, ω_b: n, b eksenleri etrafında eğilmeler. Yer değiştirme hesaplarında ω'nın rolü γ'dan önemli olduğu için; $\gamma \cong 0$ kabul edilir. Yapılan bu kabul ile kayma uzamaları ihmal edilmiş olur.

2.1.4. Kesit Tesirleri ile Şekil Değiştirme Bağıntıları

Bu başlık altında incelene; $\vec{T}$, $\vec{M}$ kesit tesitleri ile $\vec{\gamma}$, $\vec{\omega}$ şekil değiştirme vektörleri arasındaki fiziksel ilişkiyi betimleyen bağıntılardır. Malzeme homojen, izotrop ve elastik kabul edilir, davranış linerdir ve Hooke kanunu geçerlidir. Tanımlarından da anlaşıldığı gibi kesme kuvvetleri ile uzama ve kaymalar, momentlerle de dönmeler ilgilidir. Bu işişki bir fonksiyonla gösterilirse;

$$\vec{T} = f^{'}(\vec{\gamma}) \tag{27}$$

$$\vec{M} = f^{''}(\vec{\omega}) \tag{28}$$

bu $f^{'} ve f^{''}$ fonksiyonu birer liner vektör fonksiyonudur. Buradan vektörlerin koordinatlarının liner bağımlı olduğu anlaşılır. Seçilen herhangi bir a, b ve c koordinat sistemi için yukarıda bahsi geçen vektörlerin bu koordinat sistemindeki halleri;

$T_a = C_{aa}\gamma_a + C_{ab}\gamma_b + C_{ac}\gamma_c$

$T_b = C_{ba}\gamma_a + C_{bb}\gamma_b + C_{bc}\gamma_c$

$T_c = C_{ca}\gamma_a + C_{cb}\gamma_b + C_{ac}\gamma_c$

olur. İndissel gösterim kullanılar bu uzun ifadeyi kısaltılırsa;

$T_i = C_{ik}\gamma_k$

Benzer şekilde

$M_a = S_{aa}\omega_a + S_{ab}\omega_b + S_{ac}\omega_c$

$M_b = S_{ba}\omega_a + S_{bb}\omega_b + S_{bc}\omega_c$

$M_c = S_{ca}\omega_a + S_{cb}\omega_b + S_{ac}\omega_c$

$M_i = D_{ik}\omega_k$

C_{ik} katsayıları kesme kuvvetleri ve kaymalarla ilişkili olduğundan buna çubuğun kaymaya karşı rijitliği, S_{ik} katsayılarına ise çubuğun dönmeye karşı rijitliği olan eğilme rijitliği denilebilir. Eğer diyadik gösterim kullanılırsa;

$\vec{T} = \mathbf{C}.\vec{\gamma}\,, \vec{M} = \mathrm{S}.\vec{\omega}$

Bu C ve S tansörleri simetriktir. Yani 9 elemandan oluşan bu tansörlerin belirli olabilmesi için simetriden dolayı 6 büyüklük yeterli olacaktır. Eksen takımının değişimine göre transformasyona uğrarlar. Bazı özel eksen takımlarında oldukça sade ve kullanışlı bir hale gelirler. Örneğin bu çalışmada kabul edilen $\vec{t},\vec{n},\vec{b}$ takımı için bunlar;

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{tt} & 0 & 0 \\ 0 & C_{nn} & C_{nb} \\ 0 & C_{bn} & C_{bb} \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{tt} & 0 & 0 \\ 0 & S_{nn} & S_{nb} \\ 0 & S_{bn} & S_{bb} \end{bmatrix}$$

şeklinde olmaktadır. Ortaya çıkan bu sadeleşmenin nedeni; γ_t eksenel birim uzamasını yanlız T_t eksenel normal kuvvetine, ω_t birim burulma açısınında yanlız M_t burulma momentine bağlı olmasıdır. İşi daha ileri götürüp $\vec{n},\vec{b}$ takımının kesitin simetri ekseniyle çakıştığı varsayılırsa;

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{tt} & 0 & 0 \\ 0 & C_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & C_{bb} \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{tt} & 0 & 0 \\ 0 & S_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & S_{bb} \end{bmatrix}$$

şekline gelir.Fakat S matrisinin diagonal hale gelmesi için kesitte çift simetri olmasına ihtiyaç yoktur. Bir eksen $\vec{t}$ diğerleride $\vec{\zeta},\vec{\xi}$ asal eksenleri olduğu zaman;

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{tt} & 0 & 0 \\ 0 & S_{\zeta\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & S_{\xi\xi} \end{bmatrix}$$

olur. Burada S_{tt}: Burulma rijitliği, $\vec{\zeta},\vec{\xi}$ asal eğilme rijitlikleridir. C ve S tansörlerinin determinantları sıfırdan farklı olduğu için tersleri vardır denilebilir.

$\vec{\gamma} = C^{-1}.\vec{T}, \vec{\omega} = S^{-1}.\vec{M}$

Burada C^{-1}, S^{-1} esneklik tansörleri olarak adlandırılır.

2.1.5. Aranan Kesit Değerleri ve Kullanılan Denklemler

BİLİNMEYENLER;

Kesit Tesirleri

$\vec{T}$ (Kuvvet Tesirleri), $\vec{M}$ (Moment Tesiri)

Yer değiştirme vektörleri

$\vec{U}$ (Ötelenme Bileşenleri), $\vec{\Omega}$ (Dönme Bileşenleri)

Şekil Değişirme Vektörleri

$\vec{\gamma}$ (Birim Kaymalar), $\vec{\omega}$ (Birim Dönmeler)

DENKLEMLER;

Denge Denklemleri

$$\frac{d\vec{T}}{ds} + \vec{p} = 0, (KuvvetDengeDenklemi) \tag{29}$$

$$\frac{d\vec{M}}{ds} + \vec{t}x\vec{T} + \vec{m} = 0, (MomentDengeDenklemi) \tag{30}$$

Uygunluk Denklemleri

$$\frac{d\vec{\Omega}}{ds} - \vec{\omega} = 0 \tag{31}$$

$$\frac{d\vec{U}}{ds} = \vec{t}x\vec{\Omega} - \vec{\gamma} \tag{32}$$

Hooke Kanunları

$\vec{\gamma} = C^{-1}.\vec{T}, \vec{\omega} = S^{-1}.\vec{M}$

2.2. Doğru Eksenli Çubuklar

Bir doğrunun yada doğru parçasının eğriliği ($\vec{\chi}$) ve tabii torsiyonu (τ) sıfırdır. Böylelikle [1] denkleminden, teğet birim vektör ($\vec{t}$) sabit bir vektör olur.$\vec{n}$ ve $\vec{b}$ vektörleri ise Serret-Frenet bağıntılarından kolayca görüleceği gibi [2], [3] anlamını yitirir. Bu sebepten ötürü doğru eksenli çubuklar hareketli $\vec{t},\vec{n},\vec{b}$ takımı yerine sabit bir koordinat eksenine yerleştirilir. Örneğin, çubuk eksenini gösteren bir z ekseni ve düzlem üzerinde seçilen x ve y eksenleri sabit bir koordinat üçlüsüdür. Çubuk en kesiti yani düzlemi sabit olduğunda bahsi geçen x, y eksenleri asal eksen takımı olarak seçilmez iseler; dik kesitin asal eksen takımı ζ,ξ ve bunlarla herhangi bir x, y eksen takımı arasında açı $\varphi = \varphi(s)$ şeklinde bir fonksiyonla, dik kesitin eksene göre tarifi yapılması gerekir. Formüllerle kolaylık sağlaması açısından x, y eksenlerinin asal eksen takımı olarak seçilmelerinde fayda vardır. Daha önceden çıkarılan denge denklemlerinde s yerine z, $\vec{t}$ yerinede $\vec{k}$ olarak z ekseni doğrultusundaki birim vektörü tanımlanırsa doğru eksenli çubuklar için alan denklemleri bulunmuş olur.

Alan Denklemleri

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{T}}{dz} + \vec{p} &= 0 \\ \frac{d\vec{M}}{dz} + \vec{k}x\vec{T} + \vec{m} &= 0 \end{aligned} \tag{33}$$

Uygunluk Denklemleri

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\Omega}}{dz} - \vec{\omega} &= 0 \\ \frac{d\vec{U}}{dz} &= \vec{k}x\vec{\Omega} - \vec{\gamma} \end{aligned} \tag{34}$$

Hooke Kanunları

$$\begin{aligned} \vec{T} &= C.\vec{\gamma} \\ \vec{M} &= S.\vec{\omega} \end{aligned} \tag{35}$$

haline gelir. Eğer istenilirse bu vektörel denklemlerin skaler halleride yazılabilinir ve çubukların eksenel normal kuvvet altında eğilmelerinden bağımsız olarak burulma, kesme etkisi olmadan eğilme, kesmeli eğilme, eksenel normal kuvvetin eğilmeye etkisi, eğilmeyi etkileyen bütün tesirleri içine alan elastik zemine oturan çubuk gibi mukavemet konuları incelenebilir.

2.3. Düzlemsel Çubuklar

Daha önceden tanımlanan çubuk ekseni eğer bir düzlem içinde yer alıyorsa böyle çubuklara düzlemsel çubuklar denir. Frenet formülleri, düzlemsel çubuklarda tabi torsiyon $\tau = 0$ ve binormal vektör $\vec{b}$ = sabit olmaktadır.

$$\frac{d\vec{T}}{ds} + \vec{p} = 0 \tag{36}$$

Denge denkleminde ds = $\lambda d\varphi$ olarak alınsın. Bu vektörler Denge denklemi $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ takımında skaler olarak yazılırsa;

$$\frac{d\vec{T}_t}{d\varphi} - \vec{T}_n + \lambda p_t = 0$$

$$\frac{d\vec{T}_n}{d\varphi} + \vec{T}_t + \lambda p_n = 0$$

$$\frac{d\vec{T}_b}{d\varphi} + \lambda p_b = 0 \tag{37}$$

$$\frac{d\vec{M}}{ds} + \vec{t}x\vec{T} + \vec{m} = 0...$$

Vektörel moment denkleminden

$$\frac{d\vec{M}_t}{d\varphi} - M_n + \lambda m_t = 0$$

$$\frac{d\vec{M}_n}{d\varphi} - M_t + \lambda T_b + \lambda m_n = 0$$

$$\frac{d\vec{M}_b}{d\varphi} + \lambda T_n + \lambda m_b = 0 \tag{38}$$

şeklinde 6 adet skaler denklem elde edilir. Uygunluk denklemlerinde ise

$$\frac{d\vec{\Omega}}{ds} - \vec{\omega} = 0...$$

vektörel dönme denkleminden

$$\frac{d\Omega_t}{d\varphi} - \Omega_n + \lambda\omega_t = 0$$

$$\frac{d\Omega_n}{d\varphi} + \Omega_t + \lambda\omega_n = 0$$

$$\frac{d\Omega_b}{d\varphi} - \lambda\omega_b = 0 \tag{39}$$

$$\frac{d\vec{U}}{ds} + \vec{t}x\vec{\Omega} - \vec{\gamma}...$$

vektörel şekil değiştirme denkleminden

$$\frac{d\vec{U}_t}{d\varphi} - U_n - \lambda\gamma_t = 0$$

$$\frac{d\vec{U}_n}{d\varphi} - U_t - \lambda\Omega_b - \lambda\gamma_n = 0$$

$$\frac{d\vec{U}_b}{d\varphi} + \lambda\Omega_n - \lambda\gamma_b = 0 \tag{40}$$

Böylelikle aranan dört $\vec{T},\vec{M},\vec{U},\vec{\Omega}$ vektörünün $\vec{t},\vec{n},\vec{b}$ eksen takımındaki koordinatları elde edilmiş olur.

$\vec{\gamma} = C^{-1}.\vec{T}, \vec{\omega} = S^{-1}.\vec{M}$

Hooke kanunları bu 12 denklemde yerine konulursa bilinmeyen sayısı 18'den 12'ye düşer($\vec{M}_t, \vec{M}_n, \vec{M}_b, \vec{T}_t, \vec{T}_n, \vec{T}_b, \vec{U}_t, \vec{U}_n, \vec{U}_b, \vec{\Omega}_t, \vec{\Omega}_n, \vec{\Omega}_b$). Yapılacak bir takım kabullerle bu denklem sisteminde sadeleştirmeler ve sistemi 2 farklı problemin çözümü haline getirmek mümkündür. Çubuk ekseninin içinde yer aldığı düzlemin iki tane simetri ekseni olduğu ve dik kesit adı verilen düzlemi tarif eden $\vec{n}, \vec{b}$ takımı ile her kesitte çakıştığı kabul edilsin. Bu kabul S rijitlik tansörünü sadece diagonal elemanlardan oluşan bir hale getirir. Şekil değiştirmelerle ilgili olarak ise Kesme ve Normal kuvvetlerin etkisini momentler yanında çok küçük kabul edilir ve

$\vec{\gamma} = 0$

olarak alınırsa

$$\omega_t = \frac{M_t}{S_{tt}}, \omega_n = \frac{M_n}{S_{nn}}, \omega_b = \frac{M_b}{S_{bb}} \tag{41}$$

elde edilir. Bunlar Uygunluk Denklemlerinde yerine konulursa;

$$\begin{aligned}
\frac{d\Omega_t}{d\varphi} - \Omega_n - \lambda\frac{M_t}{S_{tt}} &= 0 \\
\frac{d\Omega_n}{d\varphi} + \Omega_t - \frac{M_n}{S_{nn}} &= 0 \\
\frac{d\Omega_b}{d\varphi} - \lambda\frac{M_b}{S_{bb}} &= 0 \\
\frac{dU_t}{d\varphi} - U_n &= 0 \\
\frac{dU_n}{d\varphi} + U_t - \lambda\Omega_b &= 0 \\
\frac{dU_b}{d\varphi} + \lambda\Omega_n &= 0
\end{aligned} \tag{42}$$

bağıntıları elde edilir. $\vec{U}_t, \vec{U}_n, \vec{\Omega}_b, \vec{T}_t, \vec{T}_n, \vec{M}_b$ fonksiyonlarını diğer bir grup olan;

$\vec{U}_b, \vec{\Omega}_t, \vec{\Omega}_n, \vec{T}_b, \vec{M}_t, \vec{M}_n$ kesit fonksiyonlarından ayırmak ve [37], [38], [39], [40], [42] bağıntılarından görüldüğü gibi her iki fonksiyon grubunu farklı iki denklem takımının çözümüne indirgemek olasıdır. ilk gruptaki $\vec{T}_t, \vec{T}_n, \vec{M}_b$ kuvvet ve kuvvet çifti büyüklüklerinin hepsi çubuk eksenin bulunduğu düzlemde $\vec{U}_t, \vec{U}_n, \vec{\Omega}_n$ ise aynı düzlem içinde şekil değiştirmelerdir. Dış kuvvet bileşenleri olan p_t, p_n, m_b bu düzleme etkir. Sonuç olarak birinci grupta dış ve iç kuvvetler çubuk düzlemi içindedir. Diğer gruptaki $\vec{T}_b, \vec{M}_t, \vec{M}_n$ kuvvet ve kuvvet çifti büyüklükleri çubuğa

dik olarak ortaya çıkarlar. $\vec{U}_b, \vec{\Omega}_t, \vec{\Omega}_n$ yer değiştirme ve şekil değiştirme büyüklükleri aynı düzleme dik olurlar. Dış etkiler olan p_b, m_t, m_n büyüklükleri de çubuğa dik olarak etki etmektedir. İlk gruba benzer olarak ikinci gruptaki etki ve sonuçlarda çubuk düzlemine dik olmaktadır. Sıradaki bölümde Eğri Eksenli Çubuklar iki ana katagoriye ayrılarak incelenmiştir.

2.3.1. Düzleminde Yüklü Eğri Eksenli Çubuklar

Bu tip çubuklar için aranan kesit tesirleri; T_t, T_n, M_b yerdeğiştirme ve dönmeler ise; U_t, U_n, Ω_b olmak üzere 6 adet bilinmeyen fonksiyon olarak ortaya çıkar. Bu bilinmeyen fonksiyonlardan birisi seçilip diğerini bunun cinsinden yazılarak çözüm aranırsa[3]; İlk adımda esas değişken olarak U_t seçilir ve diğer bilinmeyenler bunun cinsinden yazılmaya çalışılır;

$$\begin{aligned}
U_n &= \frac{dU_t}{d\varphi} \\
\Omega_b &= \frac{1}{\lambda\cos\varphi}\frac{d}{d\varphi}[\cos^2\varphi\frac{d}{d\varphi}(\frac{U_t}{\cos\varphi})] \\
M_b &= \frac{D_{bb}}{\lambda}\frac{d}{d\varphi}(\frac{1}{\lambda\cos\varphi}\frac{d}{d\varphi}[\cos^2\varphi\frac{d}{d\varphi}(\frac{U_t}{\cos\varphi})]) \\
T_n &= -\frac{1}{\lambda}\frac{d}{d\varphi}[\frac{D_{bb}}{\lambda}\frac{d}{d\varphi}(\frac{1}{\lambda\cos\varphi}\frac{d}{d\varphi}[\cos^2\varphi\frac{d}{d\varphi}(\frac{U_t}{\cos\varphi})])] \\
T_t &= \frac{d}{d\varphi}[\frac{1}{\lambda}\frac{d}{d\varphi}(\frac{D_{bb}}{\lambda}\frac{d}{d\varphi}(\frac{1}{\lambda\cos\varphi}\frac{d}{d\varphi}[\cos^2\varphi\frac{d}{d\varphi}(\frac{U_t}{\cos\varphi})]))] \\
+\frac{dm_b}{d\varphi} &- \lambda p_n
\end{aligned} \tag{43}$$

Buradan yok etme metodu kullanılarak; U_t'nin sağlamak zorunda olduğu diferansiyel denklem,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\cos\lambda}\frac{d}{d\varphi}[\cos^2\varphi\frac{d}{d\varphi}[\frac{1}{\lambda\cos\varphi}\frac{d}{d\varphi}[\frac{D_{bb}}{\lambda}\frac{d}{d\varphi}(\frac{1}{\lambda\cos\varphi}\frac{d}{d\varphi}[\cos^2\varphi\frac{d}{d\varphi}(\frac{U_t}{\cos\varphi})])]]] \\
&\qquad = \frac{d}{d\varphi}\lambda p_n - \lambda p_t - \frac{d^2 m_b}{d\varphi^2} - m_b
\end{aligned} \tag{44}$$

olarak elde edilir. Not:Eşitsizlikler değişken değiştirme işlemi yapılarak elde edilmiştir. Bu diferansiyel denklemin sağ tarafındaki terimleridir. Bu diferansiyel denklemin sağ tarafındaki terimler yük terimleridir. Sol tarafı ise 6.Mertebeden

[3] *Bu çözüm [1] nolu kaynak, sy. 119'da bulunabilir.*

değişken katsayılı bir diferansiyel denklemlerdir. Çubuk üzerinde yayılı yük ve yayılı moment olmadığı durumda genel denklemlerde geçen yük ve moment terimlerini sıfır yapılır ve homojen hal için bu diferansiyel denklem 6 defa integre edilirse;

$$U_t = \cos\varphi(C_1 + C_2 tan\lambda + C_3 tan^2\lambda + C_4 tan^3\lambda + C_5 tan^4\lambda + C_6 tan^5\lambda) \qquad (45)$$

denklemine ulaşılır. Diğer bilinmeyen kesit tesirlerinin yukarıda elde edilen integrasyon sabitlerine bağlı U_t cinsinden ifadeleri yazılırsa, integrasyon sabitlerine bağlı formülasyonları elde edilmiş olur. İncelenen problemin sınır şartları kullanılarak bu integrasyon sabitleri ve bilinmeyen değerler elde edilinebilir.

2.3.2. Düzlemine Dik Yüklü Eğri Eksenli Çubuklar

Bu tip bir yükleme altında çubukta oluşan iç kuvvetler; T_b, M_n, M_t yerdeğiştirme ve dönmeler ise U_b, Ω_n, Ω_t şeklinde olmaktadır. İç kuvvet sembollerinden de anlaşıldığı gibi kesit içerisinde 2 tür moment oluşmaktadır. Bunlar M_n eğilme momenti ve M_t burulma momentidir. Yani çubuk eleman için bir burulmalı eğilme hali söz konusudur. Çözüm[4] için; İlk adımda [35] denklemlerinden T_b ifadesi integre edilir;

$$T_b = C_1 - \int_0^{\varphi} \lambda p_b d\varphi \qquad (46)$$

2. adımda, [38] denklemlerinden M_n, M_t'den herhangi biri yok edilerek, örneğin burada M_n yok edilmiştir.

$$\frac{d^2 M_t}{d\varphi^2} + M_t = \lambda T_b - \lambda m_n - \frac{d}{d\varphi}(\lambda m_t) \qquad (47)$$

bağıntısına ulaşılır. Burda da 2 ardışık integrasyon yapılırsa M_t fonksiyonu φ ve üç adet integral sabitine bağlı olarak bulunur.

$$M_n = \frac{dM_t}{d\varphi} - \lambda m_t \qquad (48)$$

[42] denkleminden Ω_n, Ω_t den herhangi biri yok edilerek, burada Ω_n yok edilmiştir;

$$\frac{d^2\Omega_t}{d\phi^2} + \Omega_t = \lambda \frac{M_n}{S_{nn}} + T_b - \frac{d}{d\varphi}(\lambda \frac{M_t}{S_{tt}}) \qquad (49)$$

[4] *Detaylı çözüm [1] nolu kaynak sy. 126'da bulunabilir.*

bağıntısı bulunur. Bu bağıntı 2 kere integre edilir ve;
$\Omega_t = \Omega_t(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, \varphi)$
çözüme ulaşılır. Buradaki C_1, C_2, C_3 katsayıları daha önce M_t integrasyonundan gelen sabitlerdir. C_4, C_5 ise yani sabitlerdir. Bu çözüm [47] denkleminde yerine konursa;

$$\Omega_n = \frac{d\Omega_t}{d\varphi} - \lambda \frac{M_t}{S_{tt}} \tag{50}$$

elde edilir. Son olarak [50] denklemi [42] bağıntılarındaki U_b ifadesinde yerine konulursa;

$$U_b = C_6 - \int_{\varphi}^{0} \lambda \Omega_n d\phi \tag{51}$$

U_b için bu bağıntı elde edilir. C_6 son integrasyon sabitidir. Burada uygulanan metod kendi düzleminde yüklere maruz çubukların çözümündekine benzemekle beraber farklı bir yöntemdir. Orada U_t esas bilinmeyen fonksiyon olarak seçilmekte ve bunun sağlanması gereken 6. dereceden diferansiyel denklem araştırılırken diğer bilinmeyenlerin hepsi U_t'den ardaşık türev yoluyla elde edilmektedir. Burada ise esas bilinmeyen olarak T_b fonksiyonu seçilmekte ve bir sabit farkla birinci dereceden bir denklem bulunmaktadır. Diğer bilinmeyen fonksiyonların hesabında, T_b'den ardaşık integrasyon uygulanmaktadır. Fakat bu bahsi geçen düzlemsel çubuğun özel bir hal olarak dairesel bir düzleme sahip olması durumunda U_b'nin sağlaması gereken gene aynı 6. derecede bir diferansiyel denklem elde etme yoluyla çözüme gidilebilir. İntegrasyon sabitleri daha önce olduğu gibi yine sınır koşulları yardımıyla belirlenebilir.

2.4. Düzlemsel Çubuklar İçin Sınır Koşulları

Sınır koşullarının incelenmesinde daha önceki başlıktaki gibi 2 ana grup 4 alt kısım oluşturulmuştur.

2.4.1. Düzleminde Yüklü Eğri Eksenli Çubuklar İçin Sınır Koşulları

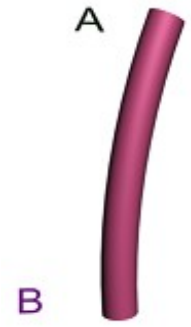
Bahsedeceğimiz 4 ana grubu şu şekilde sıralayabiliriz: Serbest uç, Kayıcı mesnetli uç, Sabit mesnetli uç, Ankastre uç.

- Serbest uç:Buradaki tüm sınır şartları Dinamik Tip sınır şartıdır. Yani sadece kuvvet koşulları mevcuttur.

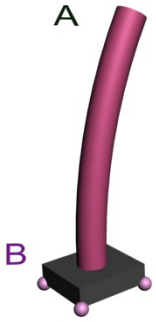
$T_t = T_t(B)$

$T_n = T_n(B)$

$M_b = M_b(B)$



Şekil 7: Serbest Uç



Şekil 8: Kayıcı Mesnetli Uç

- Kayıcı mesnetli uç:Buradaki sınır şartları hem Dinamik hemde Geometrik Tip sınır şartı bulundurur. Buna karışık mesnet koşulları da diyebiliriz.

$T_n = 0$

$M_b = 0$

$U_t = 0$

- Sabit mesnetli uç:Burada da karışık mesnet koşulları ortaya çıkar.

$M_b = 0$

$U_t = 0$

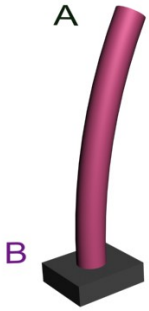
$U_n = 0$

- Ankastre mesnetli uç:Burada da sınır şartlarının hepsi Geometrik Tiptendir.

$U_t = 0$

$U_n = 0$

$\Omega_b = 0$



Şekil 9: Ankastre Mesnetli Uç

2.4.2. Düzlemine Dik Yüklü Eğri Eksenli Çubuklar İçin Sınır Koşulları

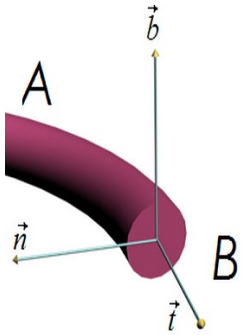
Bu tür çubukların uçlarında yada başlarında U_t, Ω_t, Ω_n olmak üzere 3 tip hareket serbesitesi vardır. Mesnetin düzenlenme şekline göre, çubuğun mesnetli ucuna istenilen hareket serbestliği verilebilir.

- Serbest uç:Dinamik Tip sınır şartı;

$M_t = sabit$

$M_n = sabit$

$T_b = sabit$



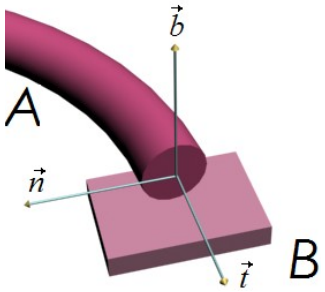
Şekil 10: Serbest Uç

- Sabit mesnetli uç:Burulmaya ve eğilmeye karşı bir mesnetleme türüdür. Dönmeler serbestir.

$U_b = 0$

$M_t = 0$

$M_n = 0$



Şekil 11: Sabit Mesnetli Uç

- Yarı Mafsallı Sabit mesnetli uç:Sabit mesnete Ω_n serbestliği verilerek mesnet yalnız eğilme yönünden çalıştırılabilir.

$U_b = 0$

$\Omega_t = 0$

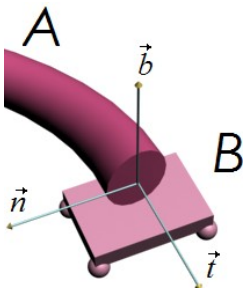
$M_n = 0$

- Yarı Ankastre mesnetli uç:Sabit mesnete Ω_t serbestliği verilerek mesnet yalnız burulma yönünden de çalıştırılabilir.

$U_b = 0$

$M_t = 0$

$\Omega_n = 0$



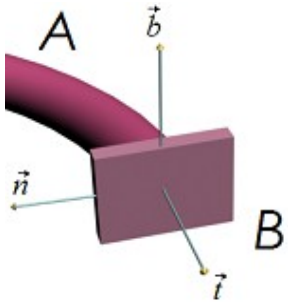
Şekil 12: Kayıcı Mesnetli Uç

- Tam Ankastre mesnetli uç:Sınır şartları Geometrik Tiptendir.

$U_b = 0$

$\Omega_t = 0$

$\Omega_n = 0$



Şekil 13: Tam Ankastre Mesnetli Uç

2.5. Dairesel Çubuklar

2.5.1. Düzleminde Eğilen Dairesel Çubuklar

Öncelikle kendi düzlemi içinde yüklere maruz kalan yani burulmasız eğilme halinde olan dairesel çubuklar incelenmiştir. Seçilen çubuk eksenin daireselliği, onun denklemleri kolaylaştıracak basit karakterli bir eğri olmasından kaynaklanır. Şimdi r yarıçaplı bir daire üzerinde rastgele seçilen bir B noktasından keyfi uzaklıktaki bir kesit, φ açısına bağlı olarak tanımlansın. Yerdeğiştirme, dönme, moment ve kesme kuvveti vektörel olarak gösterilirse; $\vec{U}(\varphi), \vec{\Omega}(\varphi), \vec{M}(\varphi), \vec{T}(\varphi)$ gibi bir hal alir. $\vec{U}_b, \vec{\Omega}_t, \vec{\Omega}_n$ üçlüsündeki bileşenlerine ayrılarak gösterilebilir. Düzlem hal için elde edilen genel denklemler;

$$\begin{aligned}
\frac{dT_t}{d\varphi} - T_n + \lambda p_t &= 0 \\
\frac{dT_n}{d\varphi} + T_t + \lambda p_n &= 0 \\
\frac{dM_b}{d\varphi} + \lambda T_n + \lambda m_t &= 0 \\
\frac{dU_t}{d\varphi} - U_n - \lambda \gamma_t &= 0 \\
\frac{dU_n}{d\varphi} + U_t - \lambda \Omega_b - \lambda \gamma_n &= 0
\end{aligned} \tag{52}$$

olur. Yukarıda bahsedilen r yarıçaplı çember için bunlar düzenlenirse[5] p_t, p_n ve m_b ile teorinin başından $\gamma_t \cong \gamma_t \cong 0$ olarak kabul edilmiş olan terimler denklemlere katılmaz. λ eğriliği çubuklar için sabittir ve burada R değerine eşittir. λ = R;

$$\begin{aligned}
\dot{U}_t &= U_n \\
\dot{U}_n &= -U_t + R\Omega_b \\
\dot{\Omega}_b &= \frac{R}{S_b} M_b \\
\dot{M}_b &= -RT_n \\
\dot{T}_n &= -T_t \\
\dot{T}_t &= T_n
\end{aligned} \tag{53}$$

[5] *Düzenleme homojen hal içindir. Çubuk boyunca yayılı durumda olan bir yük yada moment yoktur.*

Not: $\dot{y} = \frac{dy}{d\varphi}, S_b = E.I_b$(b ekseni etrafındaki eğilme rijitliği)

bu diferansiyel denklem takımının çözümü için[6] altı skaler fonksiyondan biri esas alınıp diğerleri bunun türevleri cinsinden ifade edilirse; Burada seçilen esas bilinmeyen fonksiyon U_t'dir,

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{dU_t}{d\varphi} \\ \Omega_b &= \frac{1}{R}U_t + \frac{d^2U_t}{d\varphi^2} \\ M_b &= \frac{S_b}{R^2}(\frac{dU_t}{d\varphi} + \frac{d^3U_t}{d\varphi^3}) \\ T_n &= -\frac{S_b}{R^3}(\frac{d^2U_t}{d^2\varphi} + \frac{d^4U_t}{d\varphi^4}) \\ T_t &= -\frac{S_b}{R^3}(\frac{d^3U_t}{d^3\varphi} + \frac{d^5U_t}{d\varphi^5}) \end{aligned} \tag{54}$$

elde edilir. Bu şekilde yok etmeye devam edilirse homogen hal için U_t'nin sağlaması gereken diferansiyel denklem;

$$\frac{d^6U_t}{d^6\varphi} + 2\frac{d^4U_t}{d^4\varphi} + \frac{d^2U_t}{d^2\varphi} = 0 \tag{55}$$

olur. Bu yüksek mertebeden liner homojen diferansiyel denklemin çözümü

$$U_t = C_1 + C_2\varphi + C_3\sin\varphi + C_4\cos\varphi + C_5\varphi\sin\varphi + C_6\varphi\cos\varphi \tag{56}$$

şeklindedir. Buradaki C_j integrasyon sabitleri başlangıç değerleri verildiği zaman hesaplanabilir ve Ut bilinmeyeni başlangıç değerlerine bağlı olarak ifade edilebilir. Aynı işlem diğer 5 bilinmeyen içinde yapılırsa, tüm bilinmeyenler başlangıç değerlerine bağlı olarak ifade edilmiş olur. İntegrasyon sabitlerinin başlanğıç değerlerine göre nasıl hesaplanacağı taşıma matrisi konusunda açıklanacaktır.

[6] *[1] nolu kaynak sy. 77'de bulunabilir.*

2.5.2. Düzlemine Dik Kuvvet Etkisinde Dairesel Çubuklar

Öncelikle düzlemine dik yükler etkiyen bir düzlemsel çubuk için genel denklemler belirlenecek olursa; Burada ki dış kuvvetler p_b, m_t ve m_n şeklinde sıralanabilir. Buradan, aranan iç kuvvetler; T_b, M_t, M_n, yerdeğiştirme ve dönmeler; U_b, Ω_t, Ω_n olarak ortaya çıkar. Dış yüklerin mevcut olması ve çubuk eksenin herhangi bir düzlem ile teşkil edilmesi hali için genel denklemler aşağıda verildiği şekildedir;

$$\frac{dU_b}{d\varphi} + \lambda\Omega_n = 0 \tag{57}$$

$$\frac{d\Omega_n}{d\varphi} + \Omega_t - \lambda\frac{M_n}{S_{nn}} = 0 \tag{58}$$

$$\frac{d\Omega_t}{d\varphi} - \Omega_n - \lambda\frac{M_t}{S_{tt}} = 0 \tag{59}$$

$$\frac{dM_n}{d\varphi} + M_t - \lambda T_b + \lambda m_n = 0 \tag{60}$$

$$\frac{dM_t}{d\varphi} - M_n + \lambda m_t = 0 \tag{61}$$

$$\frac{dT_b}{d\varphi} + \lambda p_b = 0 \tag{62}$$

Bu genel denklemler eğriliği R olan ve üzerine yayılı yük ya da moment etkimeyen dairesel çubuk için yeniden düzenlenirse[7];

$$\begin{aligned}
\dot{U}_b &= -R\Omega_n \\
\dot{\Omega}_n &= -\Omega_t + \frac{R}{S_{nn}}M_n \\
\dot{\Omega}_t &= \Omega_n + \frac{R}{S_{tt}}M_t \\
\dot{M}_n &= -M_t + RT_b \\
\dot{M}_t &= M_n \\
\dot{T}_b &= 0
\end{aligned} \tag{63}$$

[7] *Homejen Durum.*

şeklinde altı adet genel denklem elde edilmiştir olur. Şimdi bunun çözümünün nasıl yapılabileneceği araştırılsın. Kendi düzleminde yüklü çubukların analizinde yapıldığı gibi bilinmeyenlerden bir tanesini esas alıp, diğerleri bunun türevleri cinsinden ifade edilirse; Burada bilinmeyen olarak u_b yer değiştirmesi alınmıştır;

$$\begin{aligned}
\Omega_n &= -\frac{1}{R}\frac{dU_b}{d\varphi} \\
\Omega_t &= \frac{1}{R}\left(\frac{\varsigma}{1+\varsigma}\frac{d^4U_b}{d\varphi^4} + \frac{2\varsigma+1}{1+\varsigma}\frac{d^2U_b}{d\varphi^2}\right) \\
M_n &= \frac{S_n}{R^2}\left(\frac{\varsigma}{1+\varsigma}\right)\left(\frac{d^4U_b}{d\varphi^4} + \frac{d^2U_b}{d\varphi^2}\right) \\
M_t &= -\frac{S_2}{R^2}\left(\frac{\varsigma}{1+\varsigma}\frac{d^5U_b}{d\varphi^5}\frac{2\varsigma+1}{1+\varsigma}\frac{d^3U_b}{d\varphi^3}\frac{dU_b}{d\varphi}\right) \\
T_b &= -\frac{S_b}{R^3}\left(\frac{d^5U_b}{d^5\varphi} + 2\frac{d^3U_b}{d\varphi^3} + \frac{dU_b}{d\varphi}\right)
\end{aligned} \tag{64}$$

Not: $\varsigma = \frac{S_{tt}}{S_{nn}}$

yok etme işlemine devam edilirse, sadece U_b'nin sağlanması gereken diferansiyel denklemi şu şekilde elde ederiz;

$$\frac{d^6U_t}{d^6\varphi} + 2\frac{d^4U_t}{d^4\varphi} + \frac{d^2U_t}{d^2\varphi} = 0 \tag{65}$$

2.6. Başlangıç Değerleri Metodu ve Taşıma Matrisi

Başlangıç Değerleri Metodu Tek değişkenli problemlere uygulanan bir metottur. Amacı sınır değer problemleri başlangıç değer problemlere çevirerek ara şartlarda dolayı girebilecek ek sabit değerlerin önüne geçmek ve problemi başta belirlenen sabitlerle çözmektir. Hesapların daha doğru ve düzenli yapılabilmesi bakımından bu metot uygulanırken matris formasyonları kullanmak çok daha iyi sonuç verir. Matris notasyonu kullanıldığı zaman, daha önceden de belirtmiş olduğumuzdeğişkenin farklı değerleri arasında geçişi sağlayan ve Taşıma Matrisi adı verilenmatrisin önemi büyüktür.

Bir sistemin durumunu belirlemek için, onun koordinatlarına ihtiyacımız olduğu açıktır. Bunların sayısı sistemden sisteme farklılıklar gösterir. Genel bir tarif yapmak açısından bu sayı n olarak kabul edilsin.

$$P_1, P_2, P_3, ..., P_{n-1}, P_n \tag{66}$$

Başlangıç Değerleri Metodu'nun bir değişkenli problemlere uygulandığı belirtilmişti. Şimdi bu sistemin durumunu belirleyen P_i koordinatları bir parametriye bağlı olarak gösterilsin. Örneğin bu parametre t zaman parametresi olabilir.

$$P_1[t], i = 1,2,3,.....,n-1,n \tag{67}$$

Sistemin durumunu belirten n tane tek değişkenli fonksiyon vardır. Bu n değişken fonksiyonlar bir vektörün koordinatları gibi düşünülüp;

$$\mathbf{P[t]} = \begin{bmatrix} P_1[t] \\ P_2[t] \\ P_3[t] \\ . \\ . \\ . \\ P_n[t] \end{bmatrix} \tag{68}$$

olarak yazılabilir. Bu vektöte Durum Vektörü denir.Durum Vektörü'nün koordinatlarını, boyutsuz şekilde oluşturmak gerekir. $P[t]$ vektörünü nasıl belirtmek için Kanonik (düzgün, düzenli) tasvir denilen şekilde tarif oldukça basittir. Buna geçmeden önce yapılması gereken şey Durum Vektörünü'nün bütün $P_i[t]$ koordinatlarının (fonksiyonlarının) 1. türevlerinin bulunduğunu kabul etmek ve Durum Vektörü'nünkine benzer bir matris notasyonuyla göstermektir. Bu gösterim aşağıdaki gibi bir eşitliği ortaya çıkarır.

$$\dot{P}[t] = \begin{bmatrix} \dot{P}_1[t] \\ \dot{P}_2[t] \\ \dot{P}_3[t] \\ . \\ . \\ . \\ \dot{P}_n[t] \end{bmatrix} \tag{69}$$

Kanonik Tasvirle yapılmak istenen P[t] ile $\dot{P}[t]$ vektörleri arasındaki ilişkiyi belirtmektir. Yani parametrenin t anındaki değeriyle, t+dt değeri arasındaki değişimi gösterim şeklidir. Fakat bu bağıntı nasıldır? Liner mi yoksa liner olmayan bir bağıntımı söz konusudur? Bu soruların cevabı çözüm şeklini büyük ölçüde etkiler. Bu çalışmada bağıntı liner olarak kabul edilmiştir. Linerlik kabulu, bu ilişkiyi bir liner denklem sistemiyle tarif edilmesine olanak verir.

$$
\begin{aligned}
\dot{P}_1[t] &= d_{11}xP_1[t] + d_{12}xP_2[t] + ... + d_{1n}P_n[t] \\
\dot{P}_2[t] &= d_{21}xP_1[t] + d_{22}xP_2[t] + ... + d_{2n}P_n[t] \\
\dot{P}_3[t] &= d_{31}xP_1[t] + d_{32}xP_2[t] + ... + d_{3n}P_n[t] \\
..... &= ..... \\
\dot{P}_n[t] &= d_{n1}xP_1[t] + d_{n2}xP_2[t] + ... + d_{nn}P_n[t]
\end{aligned} \tag{70}
$$

Bu n adet liner denklem sisteminde bulunan d_{ij} katsayıları P_i koordinatlarından bağımsızdır. Ama t parametresine bağlı olabilirler. Denklem sistemini daha düzenli bir halde gösterilecek olursa;

$$\dot{P}[t] = D.P[t] \tag{71}$$

Bu formülasyonda geçen D matrisi kare bir matristir ve Diferansiyel Geçiş Matrisi olarak nitelendirilir. Bu matris, sistemin yakın durumları arası geçişte kullanılır.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & . & . & . & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & . & . & . & d_{2n} \\ d_{31} & d_{32} & . & . & . & d_{3n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ d_{n1} & d_{n2} & . & . & . & d_{nn} \end{bmatrix} \tag{72}$$

[71] nolu ifade de türevin tanımından faydalanılarak,

$$P[t+dt] = P[t][D.P(t)]dt \tag{73}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu ifade ile sistemin yakın durumları arasındaki geçişi ifade eden bir denklem kurulmuş olur. Burada t=0 anından herhangi bir t anına sonsuz küçük adımla yani parça parça bir diferansiyel geçişle ulaşmak mümkündür. Aynı zamanda bunun yerine tek bir integral geçiş de yapılabilir. Bu bir defada parametrenin t=0 ait değerden t anına ait değere geçişi sağlayan matrise Taşıma Matrisi denilir.

$$P[t] = F[t].P[0] \tag{74}$$

P[0] durum vektörü,

$$\mathbf{P[0]} = \begin{bmatrix} P_1[0] \\ P_2[0] \\ P_3[0] \\ . \\ . \\ . \\ P_n[0] \end{bmatrix} \tag{75}$$

şeklinde ifade edilir. Bunlar durum vektörünün başlangıç değerleridir. F(t) ile de bir kare matris olan Taşıma Matrisi,

$$\mathbf{F[t]} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & . & . & . & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & . & . & . & f_{2n} \\ f_{31} & f_{32} & . & . & . & f_{3n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ f_{n1} & f_{n2} & . & . & . & f_{nn} \end{bmatrix} \tag{76}$$

şeklinde gösterilir. Buradaki f_{ij} değerleri zaman parametresi yerine φ konum değişkenine bağlı fonksiyonlar olabilir. Bu boyutlu sürekli ortamlar için (Çubuk Mukavemeti Problemleri) bu parametre yeri gösteren bir konum değişkenidir. F(t) Taşıma Matrisi konum değişkenine bağlı olarak ifade edilirse,

$$\mathbf{F[\varphi]} = \begin{bmatrix} f_{11}(\varphi) & f_{12}(\varphi) & . & . & . & f_{1n}(\varphi) \\ f_{21}(\varphi) & f_{22}(\varphi) & . & . & . & f_{2n}(\varphi) \\ f_{31}(\varphi) & f_{32}(\varphi) & . & . & . & f_{3n}(\varphi) \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ f_{n1}(\varphi) & f_{n2}(\varphi) & . & . & . & f_{nn}(\varphi) \end{bmatrix} \tag{77}$$

gösterimini ulaşılır. Şimdi problemin diferansiyel karakterini gösteren D Diferansiyel Geçiş Matrisinden, problemin integral karakterini gösteren F Taşıma Matrisini nasıl doğrudan elde edileceğini inceleyelim.

2.6.1. Taşıma Matrisinin Hesabı ve Özellikleri

Bir öncekibaşlık altında [74] denklemi ile gösterilen durum matrisinin, başlangıç değerleri ve taşıma matrisine bağlı ifadesi hatırlanacak olursa;

$P[t] = F[t].P[0]$

Burada F[t] matrisini bulmak için bunun sağlaması gereken diferansiyel denklem araştırılsın;

$$\frac{P[t]}{dt} = \frac{F[t]}{dt}.\frac{P[0]}{dt}$$

$$P^{'}[t] = F^{'}[t].P[0]$$

[71] denkleminden, $P^{'}[t] = DP[t]$ olduğu hatırlanarak

$DP[t] = F^{'}[t].P[0]$

ifadesinde $P[t]$ yerine [74] denklemi konulursa;

$D.F[t].P[0]$	=	$F^{'}[t].P[0]$
$D.F[t].P[0] - F^{'}[t].P[0]$	=	0
$[D.F[t] - F^{'}[t]].P[0]$	=	0
$P[0]$	$\neq$	0 ise
$[D.F[t] - F^{'}[t]]$	=	0

$$F^{'}[t] = D.F[t] \tag{78}$$

bağıntısı bulunur. Görüldüğü gibi D matrisi sistemin iki farklı konumu arasındaki diferansiyel bağı karakterize etmektedir. Burada D matrisinin bütün elemanlarının sabit olması halinde [78] diferansiyel denkleminin özel çözümü;

$$F[t] = F[0].e^{t.D} \tag{79}$$

olur.Burada [74] no'lu denklem kullanılırsa;
$F[t] = F[0].P[0]$ t=0 için F[t] = F[0].P[0] denklemin sağlanması, F[0] matrisinin bir Birim Matris olmasına bağlıdır.

$P[0] = I.P[0]$

$P[0] = I$

$$\mathbf{F[0]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$e^{t.D}$'ye gelince;

$$\begin{aligned} e^{t} &= 1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+.....+\frac{t^n}{n!}+... \\ e^{A.t} &= 1+t+\frac{t^2}{2!}.A^2+\frac{t^3}{3!}.A^3+\frac{t^4}{4!}.A^4+.....+\frac{t^n}{n!}.A^n+... \\ e^{t.D} &= I+t+\frac{t^2}{2!}.D^2+\frac{t^3}{3!}.D^3+\frac{t^4}{4!}.D^4+.....+\frac{t^n}{n!}.D^n+... \end{aligned} \quad (80)$$

burada A sabit bir sayıdır.

$$F[t] = I+t+\frac{t^2}{2!}.D^2+\frac{t^3}{3!}.D^3+\frac{t^4}{4!}.D^4+.....+\frac{t^n}{n!}.D^n+... \quad (81)$$

şeklinde bir seri haline gelir. Böylelikle F[t] taşıma matris, sonsuz sayıda matris kuvvetlerinin toplamıyla ifade edilmiş oldu. Cayley-Hamilton Denklemi adı verilen denklem yardımıyla;

$$D^n+\beta_{n-1}D^{n-1}+\beta_{n-2}D^{n-2}+\beta_{n-3}D^{n-3}+.....+\beta_1 D+\beta_0 D \quad (82)$$

yazılabilir.[8]
Taşıma Matrisi F[t] sınırlı sayıda matris kuvvetinin toplamına gelir. Bu işlemde matrislerin katsayıları skaler kuvvet serileridir.

$$F[t] = \psi_0(t).I+\psi_1(t).D+\psi_2(t).D^2+\psi_3(t).D^3+.....+\psi_{n-1}(t).D^{n-1} \quad (83)$$

sonunda [81] denklemi,[83] denklemine dönüşür. Yani D matrisinin n kadar kuvvetleri ile, diğer bütün kuvvetlerinin hesaplanabileceği ortaya çıkar. Böylelikle F[t]

[8] β_j *katsayıları* ***D*** *matrisinin öz değerlerini veren karakteristik denklemin katsayılarıdır. Burada* ***D*** *matrisi sabit ve n. dereceden kare bir matristir.*

Taşıma matrisinin, D diferansiyel Geçiş Matrisinden nasıl doğrudan elde edileceği gösterilmiş oldu. Taşıma Matrisinin bir kaç özelliği verilirse;

$$F[m+n] = F[m].F[n] \tag{84}$$

Diğer özellikler bu temel özellikten yola çıkılarak bulunabilir.

$$\begin{aligned} F[m] &= F[m].F[0], n = 0 \\ F[0] &= I \qquad (85) \\ F[0] &= F[-n].F[n], m = -n \\ I &= F[n]^{-1}.F[n] \\ F[n]^{-1} &= F[-n] olur. \qquad (86) \\ F[n].F[m] &= F[n].F[m] \qquad (87) \end{aligned}$$

2.6.2. Taşıma Matrisinin Hesabına Farklı Bir Yaklaşım

Daha önceki hesaplarda özel bir yaklaşımla D matrisini sabit bir matris olarak kabul edip

$F^{'}[t] = D.F[t]$

denklemin çözümü;

$F[t] = e^{t.D}$ şeklinde bulunmuştu.

Fakat D matrisinin elemanları t'nin fonksiyonları olduğu zaman çözüm bu şekilde olmaz. Bu durum için çeşitli Taşıma Matrisi hesap metodları vardır. Bu başlık altında, tez çalışmasınında temelini oluşturan PICARD İTERASYON ve Matrisant yolunun nasıl kullanıldığı açıklanacaktır. F(t) taşıma matrisinin $F[t]_{n-1}$ gibi bir değeri biliniyorsa onun bir basamak üstü olan $F[t]_n$ değerine geçmek mümkündür.

$F^{'}[t] = D.F[t]$

formülünü rekurans formülü olarak alınırsa,

$F^{'}[t] = D.F[t]_{n-1}$

denklemi elde edilir. t=0 için; F(0)=I olur. Her iki tarafıda integre edilirse,

$$F[t]_n = I + \int_0^t D(\tau)F[t]_{n-1}d\tau \tag{88}$$

denklemine ulaşılır. Burada F[0]=I alınıp n ile ilişkili ve aşağıda görülen bir şekilde bir iterasyon uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
F[0] &= I \\
F[t]_1 &= I + \int_0^t D(\tau) \\
F[t]_2 &= I + \int_0^t D(\alpha)[I + \int_0^\alpha D(\tau)d\tau]d\alpha \\
F[t]_3 &= I + \int_0^t D(\alpha)d\alpha + \int_0^t D(\alpha)\int_0^\alpha D(\tau)d\tau d\alpha \\
.... &= ..... \\
.... &= .....
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F[t,0] &= I + \int_t^0 D(\tau)d\tau + \int_0^t D(\alpha)\int_0^\alpha D(\tau)d\tau d\alpha \\
&+ \int_0^t D(\zeta)\int_0^\zeta D(\alpha)\int_0^\alpha D(\tau)d\tau d\alpha d\zeta + ... \qquad (89)
\end{aligned}
$$

Şeklinde bir integral serisi elde edilir. Bu integral serisine Matrisant adı verilmektedir. Eğer D matrisinin elemanları t nin sürekli fonksiyonu olursa, her D matrisi için bu seri yakınsar. D matrisi sabit olursa bu seri;

$$F[t] = I + t + \frac{t^2}{2!}.D^2 + \frac{t^3}{3!}.D^3 + \frac{t^4}{4!}.D^4 + ... + \frac{t^n}{n!}.D^n + ... = e^{t.D}$$

haline gelir. Şimdi Taşıma Matrisinin farklı bir özelliğini kullanarak 0-t aralığını n eşit parçaya ayrılsın;
$0 \le t_1 \le t_2 \le t_3 \le t_4 \le ..... \le t_n \le t$
Bu durumda;

$$F_0^t = F_{t_n}^t . F_{t_{n-1}}^{t_n} . F_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} .....F_{t_0}^{t_1} olur. \qquad (90)$$

$$F_{t_i}^{t_k} = I + \int_{t_i}^{t_k} D(\tau)d\tau + \int_{t_i}^{t_k} D(\alpha)\int_{t_i}^{\alpha} D(\tau)d\tau d\alpha + ... \qquad (91)$$

Farklı bir indissel gösterim kullanılarak [90] ifadesi

$$F(t,0) = F(t,t_n).F(t_n,t_{n-1}).F(t_{n-1},t_{n-2}).....F(t_2,t_1).F(t_1,t_0) \tag{92}$$

şeklinde yazılabilir.

$$F[t] = F[t,0].F[0] \tag{93}$$

denklemi bize başlangıç değer probleminin çözümünü verir. F[0] = I olduğu bilindiğine göre, Taşıma Matrisiini hesaplamak için [93] ifadesinden F[t,0]'ın hesaplanması gerekli olacaktır. Yukarıdaki ifade de t - 0 aralığı ne kadar fazla parçaya bölünürse, sonuç o kadar yakınsar.

2.7. Elastik Zemine Oturan Düzlemine Dik Yüklü Dairesel Çubuklar

Elastik bir zemine oturan çubuk için mesnetlendirme süreklidir. Bu özellik, problemin daha önceden diferansiyel karakterinde bir takım değişiklikler yaratır. Değişikliğin formülasyonu çubuğun oturduğu ortamın şekil değiştirme karakteristiklerine bağlıdır. Bahsi geçen bir elastik ortam için bu irdelenirse; Çubuk elemanı üzerine etkiyen p yükleri, çubukta Ub çökmeleri oluşturur. Ub çökmeleri elastik olarak şekil değiştiren ortamdan q tepkilerini görür. Kirişe etkiyen toplam kuvvet, $\vec{b}$ ekseni için kuvvet dengesi için yazılırsa;

$$p_b = q - p \tag{94}$$

olarak meydana gelir. Düzlemine dik yükler altında ki elastik zemine oturan eğri eksenli çubuklar için genel denklemler yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\frac{dU_b}{d\varphi} + \lambda\Omega_n &= 0 \\
\frac{d\Omega_n}{d\varphi} + \Omega_t - \lambda\frac{M_n}{S_{nn}} &= 0 \\
\frac{d\Omega_t}{d\varphi} - \Omega_n - \lambda\frac{M_t}{S_{tt}} &= 0 \\
\frac{dM_n}{d\varphi} + M_t - \lambda T_b + \lambda m_n &= 0 \\
\frac{dM_t}{d\varphi} - M_n + \lambda m_t &= 0 \\
\frac{dT_b}{d\varphi} + \lambda(q-p) &= 0
\end{aligned} \tag{95}$$

bağıntıları bulunur. Görüldüğü gibi bu denklemlerin, [57-62] denklemlerinden tek farkı T_b' de ortaya çıkar. λ, [57-62] denklemlerinde R'ye eşittir. Zeminden çubuğa etkiyen bu $q[\varphi]$ kuvvetinin tanımlanmasında bir çok teorik ve deneysel çalışma vardır. Bu çalışmanın sınırları içerisinde $q[\varphi]$ kuvvetinin belirlenmesinde çok basit bir liner bağıntı olan ve yay sabiti yardımıyla icra edilebilen Winkler Elastik Zemin Hipotezi kullanılmıştır. Bu bağıntı pratikte çok iyi ve kabul edilebilir sonuçlar vermektedir. Winklerin ortaya attığı teoriye göre zemin, onu oluşturan bir çok yaydan meydana gelmiştir. bu yaylar için;

$$q = k.U_b \tag{96}$$

bağıntısı yazılabilir.[95] denklemlerindeki T_b ifadesinde bu son bağıntı yerine konulursa;

$$\frac{dT_b}{d\varphi} + \lambda(q-p) = 0 \tag{97}$$

denkleminin elde edilmesiyle, çubuğun elastik bir zemin üzerine oturması formülüze edilerek denklemlere katılmış olur. Şimdi bu denklem sisteminin çözümünün Başlanğıç Değerleri ve Taşıma Matrisi Metodundan faydalanılarak nasıl bulunabilineceğini inceleyelim. Daha önceden de olduğu gibi ilk hedef bu liner diferansiyel denklem takımı için Diferansiyel Geçiş Matrisinin bulunmasıdır. Fakat bunu yapmadan önce işlemlerde kolaylık sağlaması ve işlem yoğunlığu ile uğraşmaktan çok sonuçları irdelemeye fırsat vermesi bakımından bir takım hesap kolaylığı kabulleri yapılacaktır.

Düzlem çubuk, daire gibi basit karakterli bir enkesitten meydana gelsin ($\lambda[\varphi]$=sabit=R=). Çubuk üzerinde yayılı bir yük yada moment olmasın. Bu kabullerden sonra genel denklemlerin;

$$\begin{aligned}
\frac{dU_b}{d\varphi} + R\Omega_n &= 0 \\
\frac{d\Omega_n}{d\varphi} + \Omega_t - R\frac{M_n}{S_{nn}} &= 0 \\
\frac{d\Omega_t}{d\varphi} - \Omega_n - R\frac{M_t}{S_{tt}} &= 0 \\
\frac{dM_n}{d\varphi} + M_t - RT_b + &= 0 \\
\frac{dM_t}{d\varphi} - M_n + &= 0 \\
\frac{dT_b}{d\varphi} + R(k.U_b) &= 0
\end{aligned} \tag{98}$$

haline geldiği görülür. Sistem matrislerinden [φ] ve [$d\varphi+\varphi$] kesitlerindeki değeri yazılırsa;

$$\begin{bmatrix} \frac{dU_b}{d\varphi} \\ \frac{d\Omega_n}{d\varphi} \\ \frac{d\Omega_t}{d\varphi} \\ \frac{dM_n}{d\varphi} \\ \frac{dM_t}{d\varphi} \\ \frac{dT_b}{d\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & R/S_{nn} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & R/S_{tt} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & R \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ k.R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} U_b \\ \Omega_n \\ \Omega_t \\ M_n \\ M_t \\ T_b \end{bmatrix}$$

bağıntısı elde edilir. Artık sistemin diferansiyel karakterini tanımlayan Diferansiyel Geçiş Matrisi (D) oluşturulmuş olur. Bundan Taşıma Matrisi'ne nasıl geçildiği ve bu matris aracılığı ile kesit tesirlerinin nasıl bulunacağı ve bu matris aracılığı ile kesit tesirleriinin nasıl bulunacağı daha önceki başlıklarda ayrıntılı bir şekilde anlatıldı.

çubuk yayılı yüklü olursa;

$$\frac{dT_b}{d\varphi}+\lambda(q-p)=0 \tag{99}$$

denkleminden,

q = k . U_b ve λ = R iken

$$\frac{dT_b}{d\varphi}+R(k.U_b-p)=0 \tag{100}$$

$$\frac{dT_b}{d\varphi}+R.k.U_b-R.p=0 \tag{101}$$

p = çubuğun üzerine gelen yayılı yük. Böylece yukardaki 6 denklem

$$\begin{aligned}
\frac{dU_b}{d\varphi} + \lambda\Omega_n &= 0 \\
\frac{d\Omega_n}{d\varphi} + \Omega_t - \lambda\frac{M_n}{S_{nn}} &= 0 \\
\frac{d\Omega_t}{d\varphi} - \Omega_n - \lambda\frac{M_t}{S_{tt}} &= 0 \\
\frac{dM_n}{d\varphi} + M_t - \lambda T_b + \lambda m_n &= 0 \\
\frac{dM_t}{d\varphi} - M_n + \lambda m_t &= 0 \\
\frac{dT_b}{d\varphi} + R.k.U_b - R.p &= 0
\end{aligned} \tag{102}$$

olur.

Görüldüğü gibi bu denklemlerde, tek fark T_b' de ortaya çıkar. Bu denklem sistemi içinde diferansiyel denklem

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y} + \vec{f} .....\vec{y}(0) = \vec{y_0} \tag{103}$$

Bu şekilde verilen başlangıç değerleri probleminin çözümü;

$$\vec{y}(\varphi) = e^{A\varphi}.\vec{y_0} + \int_0^{\varphi} e^{A(\varphi-\tau)}(\tau).d\tau.\vec{f} \tag{104}$$

$$= e^{A\varphi}.\vec{y_0} + \int_0^{\varphi} e^{A(\varphi)}.e^{-A(\tau)}(\tau).d\tau.\vec{f}$$

$$= e^{A\varphi}.\vec{y_0} + e^{A(\varphi)} \int_0^{\varphi} e^{-A(\tau)}(\tau).d\tau.\vec{f}$$

F(φ)= $e^{A(\varphi)}$

$F^{-1}(\varphi)$= $e^{-A(\varphi)}$

$$\vec{y}(\varphi) = F(\varphi).\vec{y_0} + F(\varphi) \int_0^{\varphi} F^{-1}(\tau).d\tau.\vec{f} \tag{105}$$

Burada F Taşıma matrisi,$\vec{y_0} = (P_0)$,$\vec{y}(\varphi) = (P_{\pi/6})$,$\vec{f}$

$$P_0 = \begin{bmatrix} U_{b0} \\ \Omega_{n0} \\ \Omega_{t0} \\ M_{n0} \\ M_{t0} \\ T_{b0} \end{bmatrix}, \vec{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ p.R \end{bmatrix}, P_{\pi/6} = \begin{bmatrix} U_{b\pi/6} \\ \Omega_{n\pi/6} \\ \Omega_{t\pi/6} \\ M_{n\pi/6} \\ M_{t\pi/6} \\ T_{b\pi/6} \end{bmatrix}$$

[105] denkleminin ikinci kısmında F sabit matris olduğundan integralin dışına çıkarılırsa;

$$\vec{y}(\varphi) = F(\varphi).\vec{y_0} + F(\varphi).\int_0^{\varphi} F^{-1}(\tau).d\tau.\vec{f}$$

$$\int_0^{\varphi} F^{-1}(\tau).d\tau \tag{106}$$

[106]integralin çözümü ;

$$\begin{aligned} \int_0^{\varphi} F^{-1}.(\tau).d\tau &= \frac{\varphi}{n}[F^{-1}.(\frac{\varphi}{n}) + F^{-1}.(\frac{2\varphi}{n}) + F^{-1}(\frac{3\varphi}{n}) + ... + F^{-1}.(\frac{n\varphi}{n})] \\ &= \frac{\varphi}{n}F^{-1}.[(\frac{\varphi}{n}) + (\frac{2\varphi}{n}) + (\frac{3\varphi}{n}) + ... + (\frac{n\varphi}{n})] \end{aligned} \tag{107}$$

şeklindedir.

Böylece integralin birinci ve ikinci kısmı bulunmuş olur. Burdan başlangıç değerleri (φ = 0)'daki ve uç değerleri ($\varphi = \pi/6$)'daki bilinenlerden faydalanıp

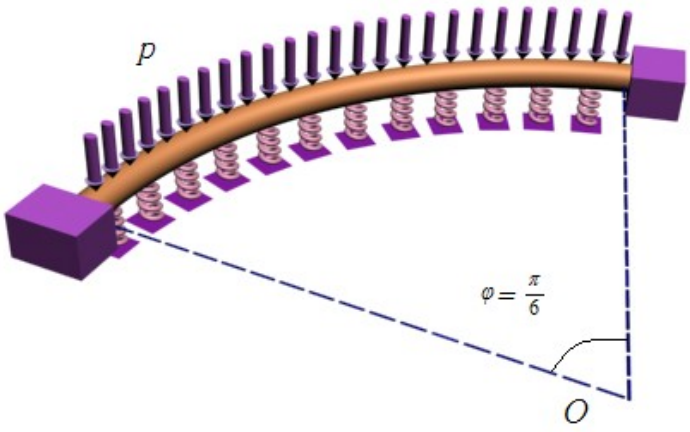
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_{n\frac{\pi}{6}} \\ M_{t\frac{\pi}{6}} \\ T_{b\frac{\pi}{6}} \end{bmatrix} = \text{F.} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_{n0} \\ M_{t0} \\ T_{b0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \end{bmatrix}^{6x1}$$

6x1 lik bir matris integralin ikinci kısmından gelir. Buradan üç bilinmeyenli üç denklem sayesinde bilinmeyen M_{n0}, M_{t0}, T_{b0} ve $M_{n\frac{\pi}{6}}, M_{t\frac{\pi}{6}}, T_{b\frac{\pi}{6}}$ değerleri bulunur.

Tablo 1: Zemin yatak katsayıları

Zemin Cinsi	k =zemin katsayısı (ton/m3)
Gevşek kum	480 - 1600
Orta sertlikte kum	960 - 8000
Sert kum	6400 - 12800
Siltli orta sert kum	2400 - 4800
Killi Zemin	
$q_u \leq 2.0$ kgf/cm2	1200 - 2400
$2.0 < q_u \leq 2.0$ kgf/cm2	2400 - 4800
$q_u > 8.0$ kgf/cm2	> 48000
q_u = silindirik basınç dayanımı	

ÖRNEK



Şekil 14: Elastik Zemine Oturan Dairesel kiriş

Tepe açısı $\frac{\pi}{6}$ olan daire eksenli yayılı yüklü çubuk parçası'nın

Kesit Özellikleri

Dairesel Enkesit

Yarıçap(r) = 0.75, Çap(D) = 2r = 1,5m

Eksen Eğriliği (λ) = sabit = R = 8m

Kesit Alanı (A) = $\pi.r^2 = 1.767145m^2$

Açısal Frekans (ω) = 0 $\frac{rad}{sn}$

Birim boydaki çubuğun kütlesi (ρ) = 0

Winkler Zemin Yatak Katsayısı (k) = 1,5 $\frac{t}{m^2}$

Malzeme Sabitleri

Elastisite Modülü (E) = $2,7.10^6$ $\frac{t}{m^2}$

Poisson Oranı (υ) = 0,3

Kayma Modülü (G) = E/(2.(1+υ)) = $1,03846.10^6 \frac{t}{m^2}$

Rijitlikler

Atalet Momenti $(I_n) = \frac{\pi.r^4}{4} = 0.24850m^4$

$I_t = \frac{\pi.D^4}{32}, I_t = 0,49701m^4$

Eksenel Rijitlik $(C_{tt}) = E.A = 4,771291.10^6$t

Eğilme Rijitliği $(S_{nn}) = E.I_n = 0,67095.10^6 tm^2$

Burulma Rijitliği $(S_{tt}) = G.I_t = 1,341927tm^2$

Problemin sınır koşulları:

$\underline{\varphi = 0' da}$

$U_b(0) = 0$

$\Omega_n(0) = 0$

$\Omega_t(0) = 0$

$\underline{\varphi = \pi/6' da}$

$U_b(\pi/6) = 0$

$\Omega_n(\pi/6) = 0$

$\Omega_t(\pi/6) = 0$

Yukarıda verilen kesit değerleri için sistemin diferansiyel geçiş matrisi ;

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1,192339.10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5,961576.10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bu matristen , [89] ifadesinden 10 terim alınarak taşıma matrisine geçilir . Daha yakınsak sonuçlar elde etmek için Mathematica ' da hazırlanan program ile $0 - \pi/6$ aralığı "5000" parçaya bölünerek [91] ifadesi taşıma matrisine uygulandığında , $\varphi = \pi/6$ için elde edilen taşıma matrisi ;

$$\begin{bmatrix} 0,999 & -3,999 & 1,071 & 1,23.10^{-5} & 3,330.10^{-6} & 1,763.10^{-5} \\ 2,645.10^{-5} & 0,865 & -0,499 & 5,545.10^{-6} & -2.341.10^{-6} & 1,23.10^{-5} \\ 5.279.10^{-6} & 0.499 & 0.866 & 2.341.10^{-6} & 2.564.10^{-6} & 3,330.10^{-6} \\ 12.861 & -17.875 & 2.361 & 0.865 & -0.499 & 3.999 \\ 2.265 & -2.361 & 0.248 & 0.499 & 0.866 & 1.071 \\ 6.283 & -12.861 & 2.265 & -2,645.10^{-5} & 5.279.10^{-6} & 0.999 \end{bmatrix}$$

olur. [89] ifadesinden 4 terim ve 0-π/6 aralığı 1000 e bölündüğünde çıkan F matrisinin terimleri karşılaştırılırsa

f_{11} = 0,9999719723791662
f_{12} = -3,9999765194537766
f_{13} = 1,0717947088408784
f_{14} = -0,000012339472612948351
f_{15} = 3,330189721571087.10^{-6}
f_{16} = -0,000017637627693092887

f_{21} = 0,000026456441539640332
f_{22} = 0,8659976337740647
f_{23} = -0,4999970649317244
f_{24} = 5,545387391374531.10^{-6}
f_{25} = -2,341132298534405.10^{-6}
f_{26} = 0,000012339472612948226

f_{31} = 5.279472766721193.10^{-6}
f_{32} = 0,49999558289242313
f_{33} = 0.8660257911509983
f_{34} = 2,3411322985344058.10^{-6}
f_{35} = 2,5645145337617717.10^{-6}
f_{36} = 3,3301897215711067.10^{-6}

f_{41} = 12,861536506090575
f_{42} = -17.875246234726333
f_{43} = 2,361524006760049
f_{44} = 0,8659976337740645
f_{45} = -0,49999558289242285
f_{46} = 3,999976519453784

f_{51} = 2,2654806005023893
f_{52} = -2.3615240067600274
f_{53} = 0,24859856929285679

f_{54} = 0,4999970649317256
f_{55} = 0,866025791150998
f_{56} = 1,0717947088408792

f_{61} = 6,283149854243437
f_{62} = -12,861536506090555
f_{63} = 2,265480600502391
f_{64} = -0,00002645644153964081
f_{65} = 5,279472766721124.10^{6}
f_{66} = 0,9999719723791662

[89] ifadesinden 10 terim ve 0-π/6 aralığı 5000 e bölündüğünde çıkan F matrisinin terimleri

f_{11} = 0.9999719723791287
f_{12} = -3,9999765194537766
f_{13} = 1,0717947088408784
f_{14} = -0,000012339472612948351
f_{15} = 3,330189721571087.10^{-6}
f_{16} = -0,000017637627693092887

f_{21} = 0.00002645644153964184
f_{22} = 0.8659976337740672
f_{23} = -0.4999970649317159
f_{24} = 5.545387391374364.10^{-6}
f_{25} = -2.3411322985343575.10^{-6}
f_{26} = 0.00001233947261294743

f_{31} = 5.279472766721193.10^{-6}
f_{32} = 0,49999558289242313
f_{33} = 0.8660257911509983
f_{34} = 2,3411322985344058.10^{-6}
f_{35} = 2,5645145337617717.10^{-6}
f_{36} = 3,3301897215711067.10^{-6}

f_{41} = 12.861536506090186
f_{42} = -17.87524623472633
f_{43} = 2.361524006760365
f_{44} = 0.8659976337740726
f_{45} = -0.4999955828924156
f_{46} = 3.9999765194536048

f_{51} = 2.2654806005024617
f_{52} = -2.361524006760379

f_{53} = 0.2485985692933166
f_{54} = 0.4999970649317201
f_{55} = 0.8660257911509998
f_{56} = 1.0717947088408584

f_{61} = 6.28314985424323
f_{62} = -12.861536506090525
f_{63} = 2.2654806005025026
f_{64} = -0.000026456441539644232
f_{65} = $5.2794727667240045.10^{6}$
f_{66} = 0.9999719723791285

$$P[\pi/6] = F[\pi/6].P[0] + F[\pi/6].\int_{0}^{\pi/6} F[\pi/6]^{-1}(\tau).d\tau.\vec{f} \qquad (108)$$

denkleminden , bilinmeyen başlangıç değerleri ;

$$\mathbf{P[0]} = \begin{bmatrix} U_{b0} \\ \Omega_{n0} \\ \Omega_{t0} \\ M_{n0} \\ M_{t0} \\ T_{b0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7,39346 \\ -0,0131382 \\ -10,4615 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur . B sabit mesnetindeki değerlere bakılacak olursa ;

$$\mathbf{P}[\tfrac{\pi}{6}] = \begin{bmatrix} U_{b} \\ \Omega_{n} \\ \Omega_{t} \\ M_{n} \\ M_{t} \\ T_{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,13152.10^{-20} \\ -4,06576.10^{-20} \\ -1,69407.10^{-20} \\ 7,39346 \\ 0,0131382 \\ 10,4824 \end{bmatrix}$$

Şeklinde oldukları görülür . Burada $U_b[\pi/6]$, $\Omega_n[\pi/6]$, $\Omega_t[\pi/6]$ değerlerinin ankastre olarak mesnetlenmiş çubuk ucunda "0" çıkması beklenirken , çok küçük değerler çıktığı gözlemlenmektedir . Bunun sebebi yapılan numerik hesaplamalardır . Picard İntegrasyonunda alınan terim sayısı arttırıldığında ve belirtilen aralık daha fazla parçaya bölündüğünde bu sayıların çok daha azaldığı gözlemlenmiştir . Tüm nümerik hasaplamalarda olduğu gibi burada da sonuçlar yaklaşık olarak bulunmuştur . Fakat önemli olan sonuçların ne kadar yaklaşık olduğu ve onları elde etmek için izlenen yöntemin , matematiksel bazda ne kadar

güçlü olduğudur . I.Mertebe teorisinin geçerli olduğu ve zemin , çubuk etkileşiminin lineer elastik kabul edildiği bu çalışma için ortaya çıkan nümerik hataların mertebesi ihmal edilebilecek mertebede küçüktür . Hesaplanan P[0] başlangıç değerinden faydalanarak istenilen herhangi bir kesitteki iç kuvvet ve şekil değiştirme değerleri bulunabilir .

Bundan sonraki bölümde , tepe açısının içerdiği çubuk için kesit tesirleri 15 parçada ayrı ayrı hesaplanıp , elde edilen değerlere , her bilinmeyen fonksiyon için en uygun polinomu hesaplanmaya çalışılmıştır . Bu hesaplarda gene Mathematica yazılımından faydalanılmıştır. Yapılan program istenilen özellikteki dataların girilmesiyle her kesit değeri için bu grafikler elde edilmektedir. Burada adım adım programın çıktıları irdelenerek , çubuğun kesit tesiri grafikleri çizilmiştir.

$$P[\pi/6] = F[\pi/6].P[0] + F[\pi/6].\int_0^{\pi/6} F[\pi/6]^{-1}(\tau).d\tau.\vec{f} \tag{109}$$

$$\mathbf{P[0]} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7,39346 \\ -0,0131382 \\ -10,4615 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P[\tfrac{\pi}{90}]} = \begin{bmatrix} -3,74.10^{-7} \\ 2,49.10^{-6} \\ 6,75.10^{-8} \\ 4,66334 \\ 0,19617 \\ -9,0652 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P[\tfrac{\pi}{45}]} = \begin{bmatrix} -1,29.10^{-6} \\ 3,92.10^{-6} \\ 2,37.10^{-7} \\ 2.31703 \\ 0.31688 \\ -7.6689 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}[\tfrac{\pi}{30}] = \begin{bmatrix} -2,48.10^{-6} \\ 4,45.10^{-6} \\ 4,58.10^{-7} \\ 0,35738 \\ 0,36240 \\ -6.2727 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}[\tfrac{2\pi}{45}] = \begin{bmatrix} -3,71.10^{-6} \\ 4,24.10^{-6} \\ 6,86.10^{-7} \\ -1,2132 \\ 0,34629 \\ -4,8764 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}[\tfrac{\pi}{18}] = \begin{bmatrix} -4,80.10^{-6} \\ 3,45.10^{-6} \\ 8,88.10^{-7} \\ -2,3928 \\ 0,28214 \\ -3,4801 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}[\tfrac{\pi}{15}] = \begin{bmatrix} -5,60.10^{-6} \\ 2,24.10^{-6} \\ 1,03.10^{-6} \\ -3.1801 \\ 0.18363 \\ -2.0839 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}[\tfrac{7\pi}{90}] = \begin{bmatrix} -6,03.10^{-6} \\ 7,88.10^{-7} \\ 1,11.10^{-6} \\ -3,5739 \\ 0,064465 \\ -0,6876 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}[\tfrac{4\pi}{45}] = \begin{bmatrix} -6,03.10^{-6} \\ 7,54.10^{-7} \\ 1,11.10^{-6} \\ -3,5740 \\ 0,06162 \\ -0,7086 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}[\tfrac{\pi}{10}] = \begin{bmatrix} -5,61.10^{-6} \\ 2,21.10^{-6} \\ 1,03.10^{-6} \\ -3.1802 \\ -0.1808 \\ 2.10486 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}[\tfrac{\pi}{9}] = \begin{bmatrix} -4,81.10^{-6} \\ 3,42.10^{-6} \\ 8,91.10^{-7} \\ -2,3930 \\ 0,27961 \\ -3,5011 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}[\tfrac{11\pi}{90}] = \begin{bmatrix} -3,73.10^{-6} \\ 4,22.10^{-6} \\ 6,89.10^{-7} \\ -1,2134 \\ 0,34407 \\ -4,8973 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}[\tfrac{2\pi}{15}] = \begin{bmatrix} -2,50.10^{-6} \\ 4,43.10^{-6} \\ 4,61.10^{-7} \\ 0,35738 \\ 0,36240 \\ -6.2936 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}[\tfrac{13\pi}{90}] = \begin{bmatrix} -1,31.10^{-6} \\ 3,91.10^{-6} \\ 2,40.10^{-7} \\ 2.31686 \\ 0.31557 \\ -7.6899 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}[\tfrac{7\pi}{45}] = \begin{bmatrix} -3,84.10^{-7} \\ 2,48.10^{-6} \\ 6,94.10^{-8} \\ 4,66324 \\ 0,19547 \\ -9,0861 \end{bmatrix},$$

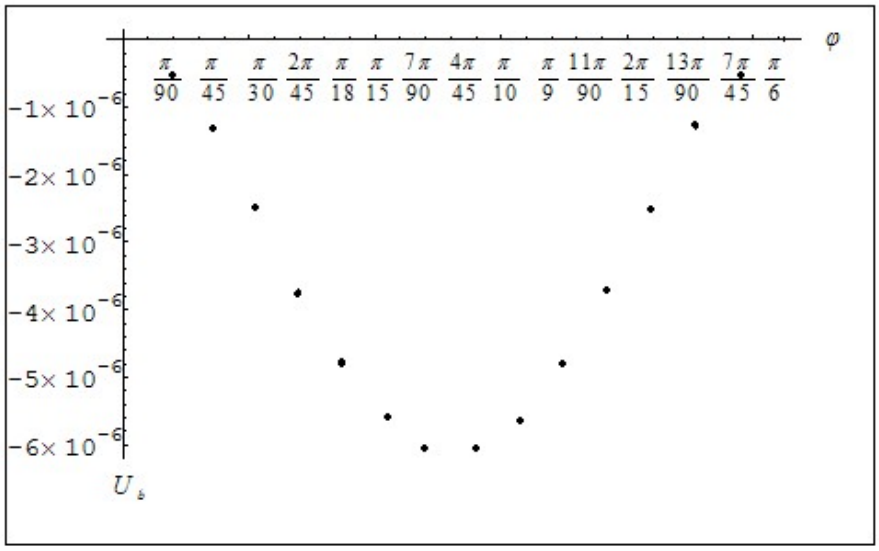
$$\mathbf{P}[\tfrac{\pi}{6}] = \begin{bmatrix} 8,13.10^{-20} \\ -4,06.10^{-20} \\ -1,69.10^{-20} \\ 7,39345 \\ -0,0131 \\ -10,4824 \end{bmatrix},$$

Ayrıca 0-π/6 aralığının daha fazla aralığa bölünmesi sonucunda ([89] ifadesinden 4 terim alınıp) reaksiyon tepki kuvvetlerinin çok daha simetriğe yaklaştığını görebiliyoruz. Aralık sayısı ve ona göre çıkan tepki kuvvetleri tabloda verilmiştir.

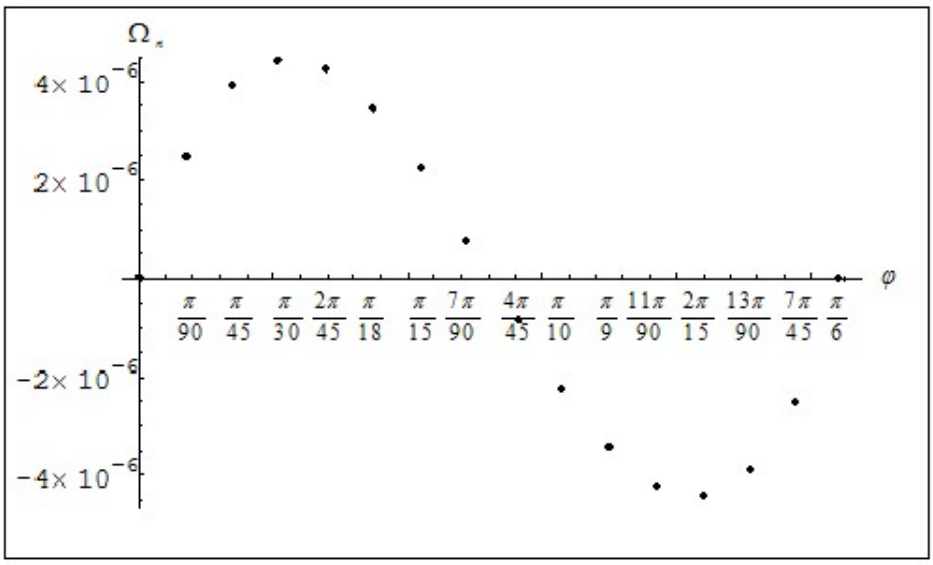
Tablo 2: $T_{b0} ve T_{b\pi/6}$ değerleri

Aralık sayısı (0 - π/6)	T_{b0}	$T_{b(\pi/6)}$
250	10,4301	10,5139
500	10,451	10,4929
750	10,458	10,4859
1000	10,4615	10,4824

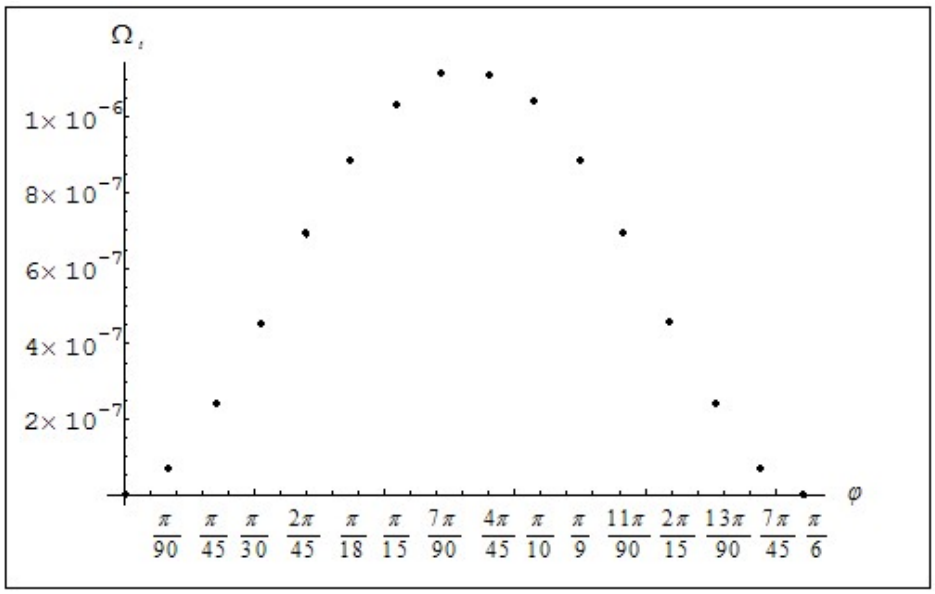
elde edilen bu değerler yardımı ile kesit tesir fonksiyonlarının φ ’ ye bağlı grafikleri çizilirse ;



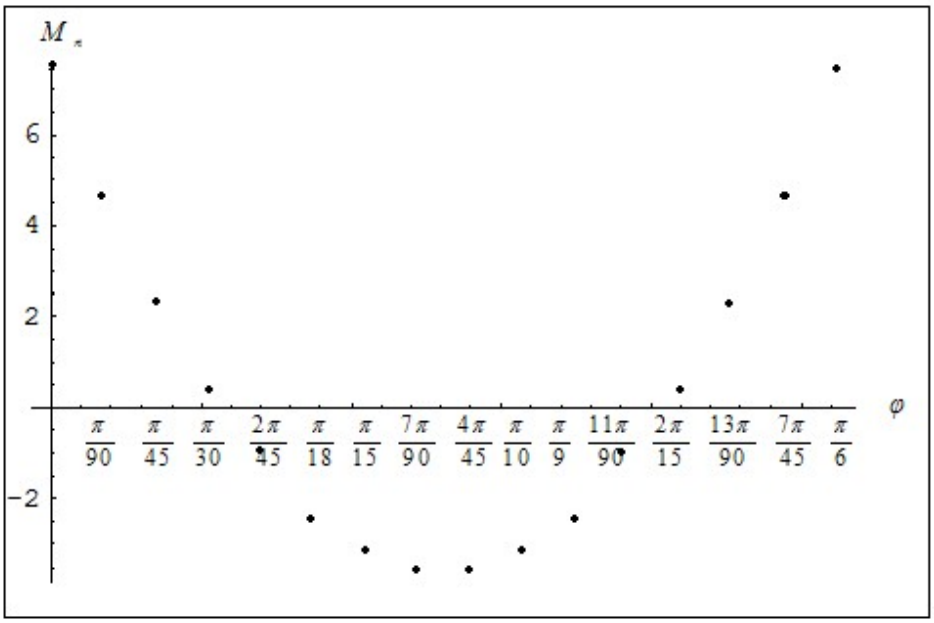
Şekil 15: $U_b - \varphi$



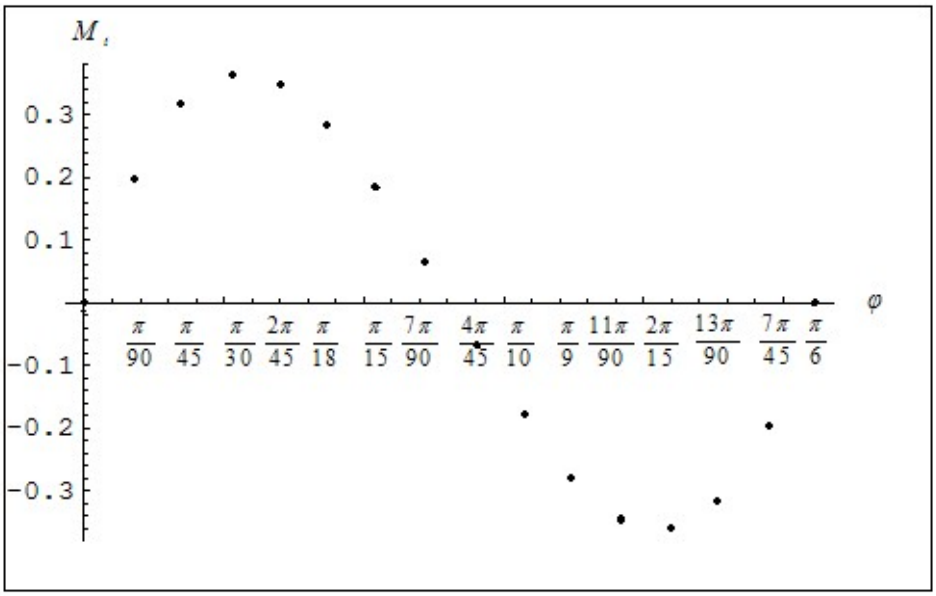
Şekil 16: $\Omega_n - \varphi$



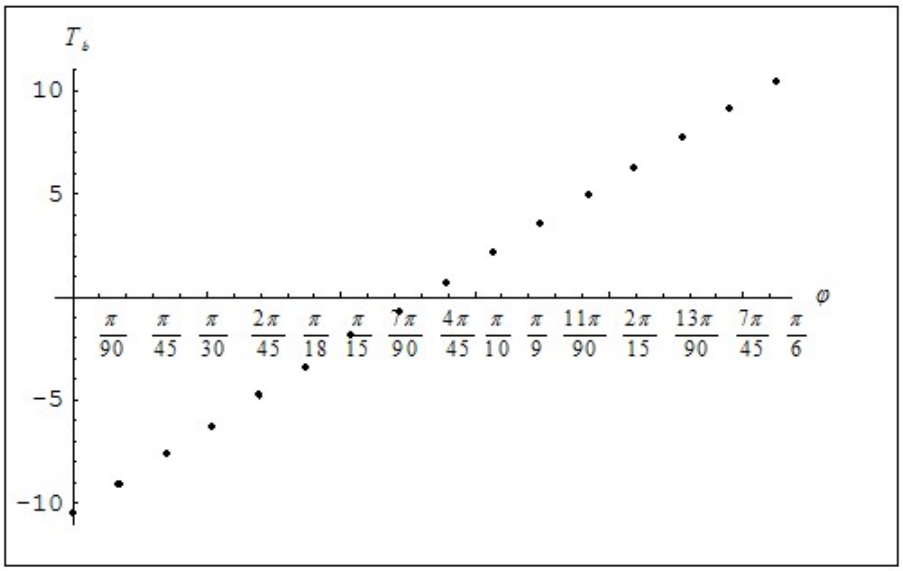
Şekil 17: $\Omega_t - \varphi$



Şekil 18: $M_n - \varphi$



Şekil 19: $M_t - \varphi$



Şekil 20: $T_b - \varphi$

Bu grafikler elde edildikten sonra burada yapılması gereken her kesit tesiri fonksiyonu için , bu noktalarla en iyi uyumu sağlayan eğrileri bulmak olacaktır . her kesit tesiri için bulunan polinom fonksiyonun mertebesi farklı olabilir . Bulunan bu polinom fonksiyonlarının genel denklemlerde yerine konulması ile uygunluğu ve nümerik hesaplar sonucu ortaya çıkan hatalar gözlenebilinir . Kesit tesirine uygun polinomlar seçilmesinde Mathematica yazılımı kullanılmıştır . Elde edilen fonksiyonlar ;

$$\begin{aligned} U_b &= 1,46643.10^{-13} - 1,32179.10^{-10}.\varphi - 0,0003526.\varphi^2 + 0,00133.\varphi^3 \\ &- 0,001195.\varphi^4 - 0,000168.\varphi^5 + 0,0001072.\varphi^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_n &= 1,9157.10^{-12} + 0,00008815.\varphi - 0,0004988.\varphi^2 + 0,0005979.\varphi^3 \\ &- 0,001195.\varphi^4 - 0,0001053.\varphi^5 \end{aligned}$$

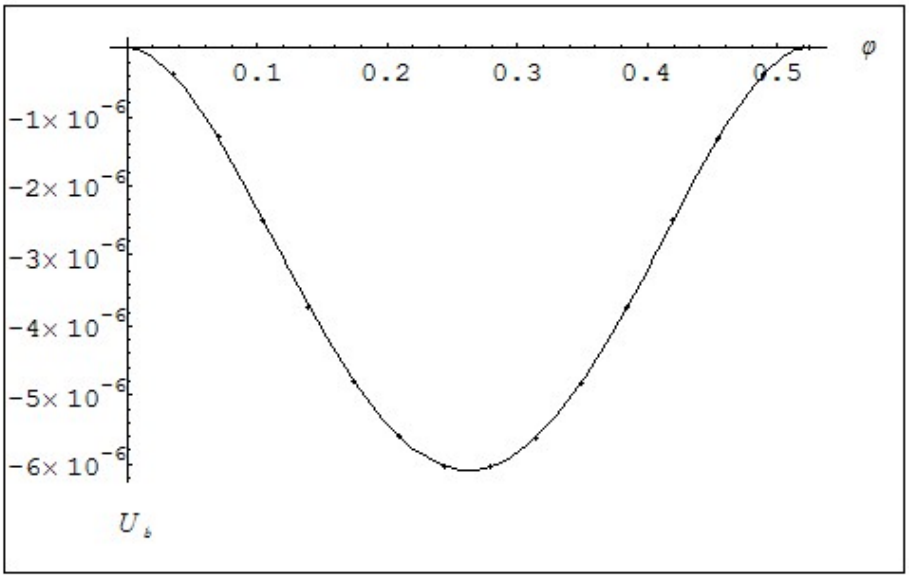
$$\begin{aligned} \Omega_t &= 1,1332.10^{-10} - 1.00461.10^{-10}\varphi + 0.0000666\varphi^2 - 0.00025\varphi^3 \\ &+ 0.000241827\varphi^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_n &= 7,39346 - 83,6782\varphi + 156,13\varphi^2 + 14,0579.\varphi^3 - 13.4101.\varphi^4 \\ &- 0.001368373.\varphi^5 \end{aligned}$$

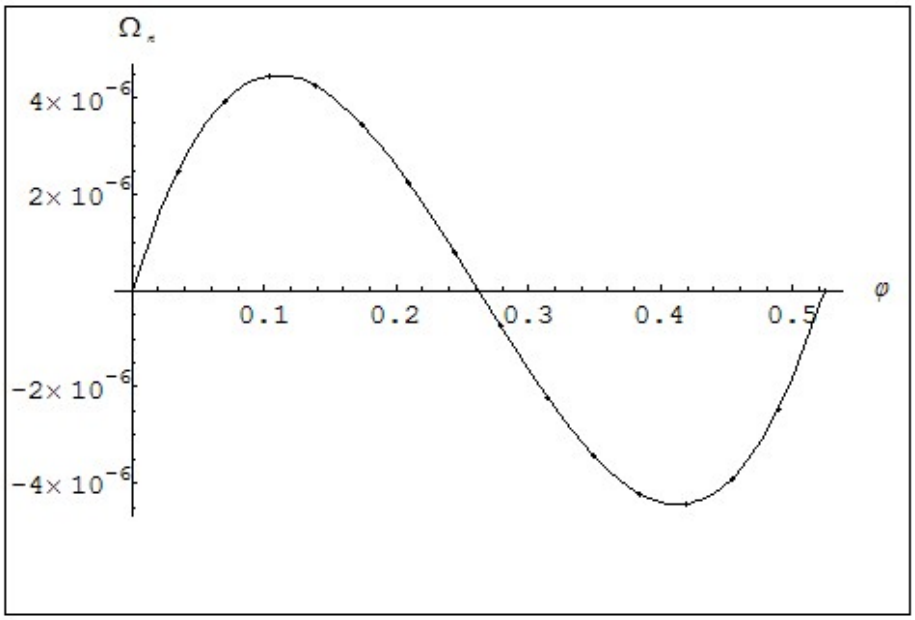
$$M_n = -0,01333 + 40.\varphi - 0,0003508.\varphi^2 + 0,000443.\varphi^3 + 0.00518.\varphi^4$$

$$T_b = -10,4615 + 7,4136.\varphi - 42,1427\varphi^2 + 53,6281.\varphi^3 + 5.845.10^{-6}.\varphi^4$$

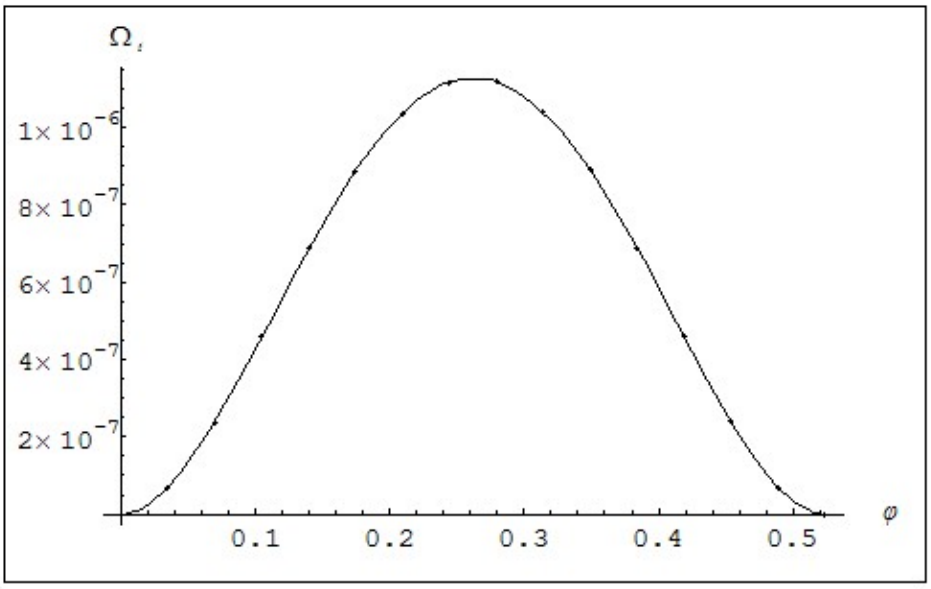
Bu fonksiyonların grafikleri ve daha önceden çizilen nokta bazlı grafikler karşılaştırılırsa ;



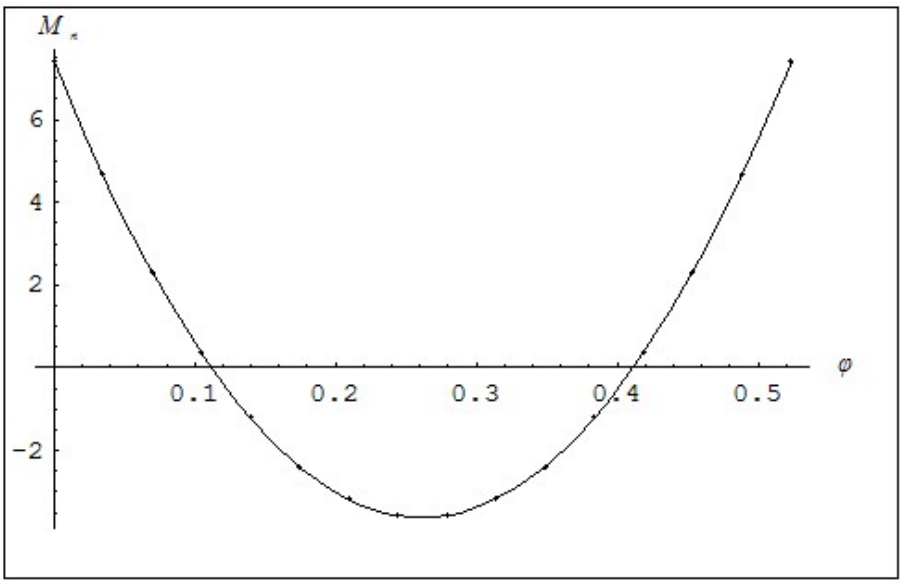
Şekil 21: $U_b - \varphi$



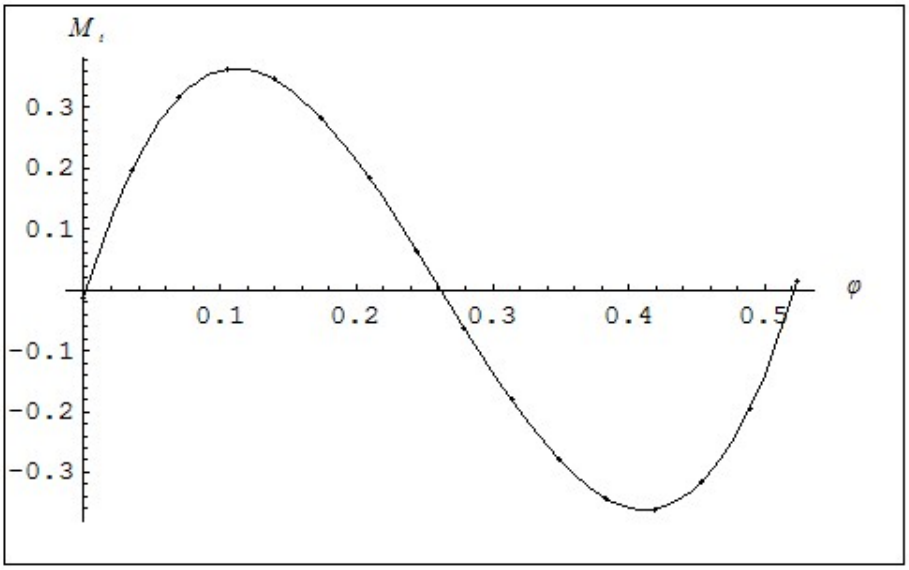
Şekil 22: $\Omega_n - \varphi$



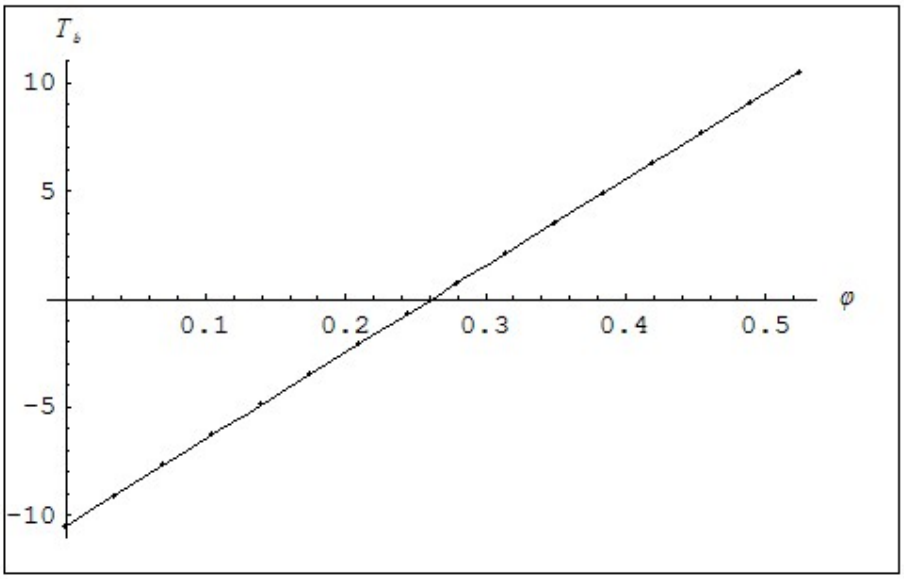
Şekil 23: $\Omega_t - \varphi$



Şekil 24: $M_n - \varphi$



Şekil 25: $M_t - \varphi$



Şekil 26: $T_b - \varphi$

3. SONUÇLAR

Bu çalışmada elastik zemine oturan dairesel eksenli yayılı yüklü çubuğun kesit tesirleri, başlangıç değerleri ve taşıma matrisi yöntemi kullanılmak suretiyle elde edilmiştir. Çalışmada yapılan işlemlerde matematika programı kullanılmıştır. Elastik zemine oturan dairesel çubukların kapalı olarak taşıma matrisini bulmak için yapılması gereken işlemler bilgisayarsız yapılamayacak kadar uzundur.

Başlangıç değerleri metodunda kullanılan Taşıma Matrisini bulmak için Picard açılımından fazla terim alınmasının iyi sonuçlar verdiği literatürde bilinmektetir. Fakat artan işlem kalabalığı kullanılan programın çok iyi olmasına rağmen beklenmeyen sonuçlarla karşılaşılabilinir. Sonuç olarak işlem hacmini düşürmek için sistemin diferansiyel karakterini ifade eden D diferansiyel geçiş matrisinden, sistemin integral özelliklerini karakterize eden F Taşıma Matrisine geçilirken, Picard açılımından alınan terim sayısını arttırmak yerine Matrisant integral serisi metodu kullanılır. Bu işlemler matematika yazılımı kullanılarak program haline getirilmiştir.

Problemin hiperstatiklik derecesinin artması problemin çözümüne ek bir hesap fazlalığı getirmez. Bu zaten başlangıç değerleri metodunun özelliğidir. Uygulamalarda bu metod sayesinde problemin kuruluş ve çözümü aynı genel denklemler yardımıyla olmaktadır. Matrisant integral serisi metodunu kullanarak program yardımıyla eğriliği nasıl olursa olsun düzlem çubuklar için Taşıma Matrisi bulmak ve analitik çözümü oldukça zor olan elastik zemine oturan eğri eksenli bir çubuk için istenilen kesitteki tesirleri bulmak oldukça kolaydır. Sadece diferansiyel geçiş matrisinde yapılan basit değişiklikler ile hesap çeşitliğinin oluşması yöntemin önemli bir özelliğini göstermektedir.

KAYNAKLAR

[1]**İnan,M. ,1996**. Elastik Çubukların Genel Teorisi, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul.

[2]**İnan,M. ,1996**. Elasto-Mekanikte Başlangıç Değerleri Metodu ve Taşıma Matrisi, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul.

[3]**İnan,M. ,1988**. Cisimlerin Mukavemeti, İ.T.Ü Yayınları, 6.Baskı.

[4]**İnan,M. ,1968**. The Metod of Initial Values and Carry-Over Matrix in ElastoMechanics, Middle East Technical Univercity, Ankara.

[5]**Hetenyi,M**. ,1946. Beams on Elastic Foundation, The Univercity of Michigan Press, MI.

[6]**Volterra,E**. ,1952. Bending of Circular Beam Resisting on an Elastic Foundation, Journal of Applied Mechanics, ASME, 19, 1-4.

[7]**Popov,P.E** ,1979. Introduction to Mechanics of Solid, Prentice Hall of India, New Delhi -110001.

[8]**Cerit,C**. ,1998. Çözümlü Diferansiyel Denklem Problemleri, İ.T.Ü Fen-Edebiyat Fakültesi, İstanbul.

[9]**Artan,R**. ,1999. Kendi Düzlemine Dik Yüklerle Yüklü Düzlem Çubukların Başlanğıç Değerleri Yöntemiyle Hesabı, XI. Ulusal Mekanik Kongresi, Bolu, 6-10 Eylül.

[10]**Kıral,E**. ,1974. Elastik Zemine Oturan Eğri Eksenli Düzlemsel Çubuklar, METU Journal of Pure and Applied Science,7, 44-53 ,April.

[11]**Aköz,Y**. ,Zubaroğlu,S. ,1995. Elastik Zemine Oturan Dairesel Eksenli Çubuklar ve Taşıma Matrisi IX. Ulusal Mekanik Kongresi, Ürgüp, Eylül.

[12]**Aköz,Y**. ,Aksoydan,M. ,2004. Transfer Stiffnes Matrix for Timoshenko Beams on Elastic Foundations, ARI The Bulletin of the Istanbul Technical Univercity, 54, 1-15.

[13]**Aköz,Y**. ,Kadıoğlu,F. ,2004. The Mixed Finite Element Solution of Circular Beam on Elastic Foundation, Computers and Structure, 60, 643-651.

[14]**Civalek, Ö**. ,2004. Elastik Zemine Oturan Yapıların Hesap Yöntemlerine Genel Bir Bakış, Türkiye Mühendislik Haberleri, 432, 45-54

[15]**Zubaroğlu,S**. ,1994. Elastik Zemine Oturan Dairesel Eksenli Çubuklar ve Taşıma Matrisi, Yüksek Lisans Tezi, İ.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

[16]**Akbulut,A**. ,2005. Yüksek Lisans Tezi

[17]**Atımtay,E**. ,2000. Afet Bölgelerinde Yapılacak Yapılar Hakkında Yönetmelik (Betonarme Yapılar)

ÖZGEÇMİŞ

1978 yılınında Ankara'da doğdu. Orta ve lise öğrenimini Fatih Sultan Mehmet Lisesinde tamamladı. 1998 yılında Erciyes Üniversitesi Yozgat Mühendislik ve Mimarlık Fakültesi İnşaat mühendisliği bölümünde lisans eğitimine başladı.2003 yılında mezun oldu. 2004 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi de Yapı Mühendisliği Mekanik Ana Bilim dalında yüksek lisansa başladı.