T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ-CERRAHPAŞA
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

BEVELOİD DİŞLİLERİN MATEMATİK MODELLENMESİ VE DİŞLİ TEMAS ANALİZİ

Berat Gürcan ŞENTÜRK

DANIŞMAN
Prof. Dr. Mahmut Cüneyt FETVACI

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Makine Mühendisliği Programı

İSTANBUL-2020

Bu çalışma, Tarih girmek için burayı tıklatın. tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, Makine Mühendisliği Programında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Prof. Dr. Mahmut Cüneyt FETVACI(Danışman)
İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa
Mühendislik Fakültesi

Unvan Adı SOYADI
Üniversite
Fakülte

Unvan Adı SOYADI
Üniversite
Fakülte

Unvan Adı SOYADI
Üniversite
Fakülte

Unvan Adı SOYADI
Üniversite
Fakülte

20.04.2016 tarihli Resmi Gazete'de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa'nın abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Lisansüstü Eğitim Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

3. ÖNSÖZ

Bu çalışmanın tamamlanmasında bana baştan sona her konuda büyük destek olan danışman hocam Prof. Dr. M. Cüneyt FETVACI başta olmak üzere, doktora sürecinde bana desteklerinden dolayı Prof. Dr. Erol UZAL ve jüri üyesi hocalarım, Prof. Dr. M. Hüsnü DİRİKOLU ve Prof. Dr. C. Erdem İMRAK'a,

Analizler ve modelleme konusunda değerli katkıları sebebiyle, Dr. Öğr. Üyesi Sermet DEMİR ve Dr. Öğr. Üyesi Murat SARIBAY'a,

Üretim safhaları ve uygulamadaki gelişmeler ile ilgili vermiş olduğu bilgilerden ötürü Yılmaz Redüktör Ar-Ge müdürü Mak. Müh. Hakan YARDIMCI'ya,

Araştırma ve uygulama esnasında bilgi ve fikir paylaşımı yaptığım arkadaşlarım, Makine Yük. Müh. Faruk ÖRTEŞ, Makine Yük. Müh. Cengiz ÖZBEK ve İnşaat Yük. Müh. F. Cenk ŞENER'e,

Bunların yanında, mesleğimde var olduğum noktaya ulaşmamı sağlayan annem Fatma ŞENTÜRK, babam E. Melih ŞENTÜRK ve bana çalışmalarımın her aşamasında olan manevi destekleri sebebiyle ağabeyim İ. Ercan ŞENTÜRK ile eşim Elif YILMAZ ŞENTÜRK'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Haziran 2020 Berat Gürcan ŞENTÜRK

4. İÇİNDEKİLER

Sayfa No

3. ÖNSÖZ iv
4. İÇİNDEKİLER v
5. ŞEKİL LİSTESİ viii
6. TABLO LİSTESİ xvi
7. SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ xvii
8. ÖZET xix
9. SUMMARY xxii
1. GİRİŞ 1
2. GENEL KISIMLAR 3
2.1. AMAÇ VE MOTİVASYON 3
2.2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI 4
2.3. KAPSAM 10
2.4. GENEL DİŞLİ SİSTEMLERİ 11
2.5. BEVELOİD DİŞLİLER 14
2.6. BEVELOİD DİŞLİLERDE DİŞ YÜZEYLERİNİN MATEMATİKSEL MODELLENMESİ 15
2.6.1. Kremayer Takımın Matematiksel Modeli 15
2.6.2. Dişli Çarkın Modellenme Prosesi 20
2.7. SONLU ELEMANLAR METODU (FINITE ELEMENT METHOD) 22
2.7.1.Matematiksel Temeller 24
2.7.2. Abaqus/Standard Çalışma Prensibi 27
2.7.2.1. Problemin Kademelere Ayrılması (Step Definition). *27*
2.7.2.2. Analiz Yöntemlerinin Belirlenmesi *27*
2.7.2.3. Sınır Koşulları *27*
2.7.2.4. Çözüm ve Sonuçlar *27*
2.7.3. Abaqus Eleman Türleri 28

2.7.3.1. Eleman Aileleri *29*
2.7.3.2. Serbestlik Derecesi *29*
2.7.3.3. Düğüm Noktası (nod) Sayısı *29*
2.7.3.4. Formülasyon *30*
2.7.3.5. İntegrasyon *30*
2.8. TEMAS MEKANİĞİNİN TEORİSİ 30
2.8.1. Temas Problemlerinin Genel Formülasyonu 32
2.8.2. Varyasyonel Eşitsizlikler 34
2.8.3. Penaltı Metodu (Penalty Method) 36
2.8.3.1. Sürtünmesiz durum için *36*
2.8.4. Lagrange Çarpanları Metodu (Lagrange Multipliers Method) 37
2.8.4.1. Sürtünmesiz Durum İçin *37*
2.8.5. Temas Problemlerinin Sonlu Elemanlar Metodu ile Çözümü 38
2.8.5.1. Esnek ve Rijit Cisim Arasındaki Temas *38*
2.8.5.2. Normal temas *39*
2.8.6. ABAQUS/Standard'ın Temas (Contact) Algoritması 41
2.8.6.1. Yüzey Bazlı Temas Simülasyonu *41*
2.8.6.2. Nodlar ve Yüzeyler Arası Temas (Node To Surface Contact Discretization) *42*
2.8.6.3. Yüzeyler Arası Temas (Surface To Surface Contact Discretization): *42*
2.8.6.4. Sonlu-Kayma Yaklaşımı (The Finite-Sliding Approach) *44*
2.8.6.5. Küçük-Kayma Yaklaşımı (Small-Sliding Approach) *44*
3. MALZEME VE YÖNTEM 46
3.1.1. Dişli Çizimi Algoritması 49
3.2. KATI ERİYİK YIĞMA TEKNOLOJİSİ (FDM) METODUYLA MODELLEME 50
3.3. KONKAVLIK VE KONVEKSLİK MODİFİKASYONLARI 53
3.3.1. Konkav ve Konveks Beveloid Dişlilerin Matematik Modeli 53
3.4. ALTTAN KESME ANALİZLERİ 57
3.4.1. Pozitif Profil Kaydırma Metodu 58
3.4.2. Asimetrik Takım ile İmalat Metodu 61
3.4.3. Sonlu Eleman Modelleri 62
3.4.4. Elemanların Optimizasyonu 63
3.5. DİŞLİ TEMAS ANALİZLERİ 65
4. BULGULAR 68
4.1. ALTTANKESME DURUMLARININ ANALİZİ 68

4.2. PARALEL EKSENLER İÇİN DİŞLİ TEMAS ANALİZLERİ 71
4.2.1. Örnek 1 71
4.2.2. Örnek 2 73
4.2.3. Örnek 3 76
4.2.4. Örnek 4 78
4.2.5. Örnek 5 81
4.3. HELİSELKONİK MODELLERİN TEMAS ANALİZLERİ 85
4.4. KAVRAMA AÇISI DEĞİŞİMİNİN KÖK KISIMLARINDAKİ GERILME DAĞILIMLARINA ETKİSİ 94
4.5. TEMAS HATALARI (TRANSMISSION ERRORS) 101
4.6. KONKAV BEVELOİD MODELLERİN ANALİZ SONUÇLARI 113
5. TARTIŞMA VE SONUÇ 122
4. KAYNAKLAR 126
5. EKLER 132
6. ÖZGEÇMİŞ 146

5. ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 2. 1: Beveloid dişlilerin geometrik karakteristikleri. 5

Şekil 2. 2: South pointing chariot mekanizmasının modeli (George H. Lanchester, science museum of London).....11

Şekil 2. 3: Antikythera mekanizması. 12

Şekil 2. 4: Dişli türleri.....13

Şekil 2. 5: Beveloid dişli modelinin yandan görünüşü. 14

Şekil 2. 6: Evolvent konik dişlilerin imalatı.....15

Şekil 2. 7: Kremayer takım geometrisinin normal kesitteki görünümü. 16

Şekil 2. 8: Sn ve Sc koordinat sistemleri arasındaki ilişki. 18

Şekil 2. 9: Dişli çark ve kremayer takım koordinatları arasındaki ilişki. 20

Şekil 2. 10: Sonlu elemanlar yöntemi ile yapılan çalışma örnekleri. 24

Şekil 2. 11: Sonlu elemanlar modeli yardımı ile yapılan bir analiz. 25

Şekil 2. 12: Sonlu eleman türleri. 26

Şekil 2. 13: Heliselkonik dişli modeli; a) geometrik modelin kısımlara ayrılması, b) sonlu elemanlar modeli.....28

Şekil 2. 14: Heliselkonik dişlinin sonlu modelinin eleman analizi. 28

Şekil 2. 15: Abaqus dahilinde en sık kullanılan eleman aileleri 29

Şekil 2. 16: Düğüm noktaları (nod) sayısına göre eleman türleri. 30

Şekil 2. 17: Temas sınırları ve temas kuvveti. 32

Şekil 2. 18: 2 boyutlu cisimler arasında temas.....33

Şekil 2. 19: Penaltı yönteminin yay modeli. 37

Şekil 2. 20: Temasın oluşması ve ayrık gösterimi. 39

Şekil 2. 21: Nodlar ve yüzeyler arası temas. 42

Şekil 2.22: Yüzeyler arası ve nodlar ve yüzeyler arası temas yöntemlerinin karşılaştırılması....43

Şekil 2. 23: Sonlu-kayma yaklaşımında bir nodun yörüngesi....44

Şekil 2. 24: 103 nolu nod için yüzeyler arası temas metodu ve küçük kayma yaklaşımı kullanılarak baz alınan noktanın ve teğet düzleminin tanımlanması....45

Şekil 3. 1: Dişli profilini oluşturan bölgeler. 46

Şekil 3. 2: 2 boyutlu alın dişli profili. 47

Şekil 3. 3: 3 boyutlu beveloid dişli modeli için kesit görüntüleri. 47

Şekil 3. 4: Beveloid dişlinin 3 boyutlu görünümü. 48

Şekil 3. 5: Evolvent profilli konik dişli için solidworks modeli. 48

Şekil 3. 6: Dişli profillerini oluşturan algoritma. 49

Şekil 3. 7: FDM metodu ile imalat yapan 3 boyutlu yazıcının temel kısımları. 51

Şekil 3. 8: Heliselkonik dişli modeli. 51

Şekil 3. 9: Heliselkonik dişli üretim prosesi. 52

Şekil 3. 10: Heliselkonik dişlilerin FDM ile üretilen katı modelleri. 52

Şekil 3. 11: Konkav ve konveks beveloid dişlilerin imalatı. 54

Şekil 3. 12: Kremayer takımın koordinat sisteminin dönüşümü. 55

Şekil 3. 13: Konkav ve konveks dişli profillerinin (mavi renkte) modifiye edilmemiş profil ile (siyah renkte) karşılaştırılması a) konkav dişli, b) konveks dişli profilleri. 56

Şekil 3. 14: Konkav ve konveks dişli evolvent kısımlarının (mavi renkte) modifiye edilmemiş evolvent eğrileri ile (siyah renkte) 3 boyutta karşılaştırılması a) konkav dişli, b) konveks dişli profilleri. 57

Şekil 3. 15: Düz beveloid dişliler için kesit görüntüleri; a) alttankesmeye uğramış b) pozitif profil kaydırma yapılmış. 59

Şekil 3. 16: Helisel konik dişliler için kesit görüntüleri; a) alttankesmeye uğramış b) pozitif profil kaydırma yapılmış. 59

Şekil 3. 17: 3 boyutlu düz beveloid dişli modelleri; a) alttankesmeye uğramış, b) pozitif profil kaydırma yapılmış modeller. 60

Şekil 3. 18: Düz beveloid dişlilerde profil kaydırma faktörü ile diş sayıları arasındaki ilişki. 60

Şekil 3. 19: Helisel beveloid dişlilerde profil kaydırma faktörü ile diş sayıları arasındaki ilişki. 61

Şekil 3. 20: Helisel konik beveloid dişliler için kesit görüntüleri; a) Simetrik takımla imal edilmiş, b) Asimetrik takımla imal edilmiş modeller. 61

Şekil 3. 21: Beveloid dişlilerin 3 boyutlu sonlu eleman modelleri a) oluşturulma prosesi b) tamamlanmış 3 boyutlu model. 62

Şekil 3. 22: 2 boyutlu analizlerde yükleme durumu ve sınır koşulları. 63

Şekil 3. 23: Farklı diş geometrileri için oluşturulan sonlu eleman modelleri. 63

Şekil 3. 24: Farklı eleman sayılarında yapılan analiz sonuçları. 64

Şekil 3. 25: Farklı eleman sayılarına bağlı olarak gerilme değerlerinin değişimi. 65

Şekil 3. 26: Temas sırasında dişler arasındaki yük ve gerilme dağılımı. 66

Şekil 3. 27: Sonlu Eleman Modelleri. 67

Şekil 4. 1: Sonlu eleman analizi sonuçları. 68

Şekil 4. 2: Model a, c ve e için kök bölgesinde, S22 (Gerilme) değerlerinin değişimi. 69

Şekil 4. 3: Model b, d ve f için kök bölgesinde, S22 (Gerilme) değerlerinin değişimi 69

Şekil 4. 4: Model a, c ve e için kök bölgesinde, Von Misses (Gerilme) değerlerinin değişimi. 70

Şekil 4. 5: Model b, d ve f için kök bölgesinde, Von Misses (Gerilme) değerlerinin değişimi[64]. 70

Şekil 4. 6: mn = 4mm, T= 25, δ = 0˚, β = 0˚ parametreleri için analiz durumu. 71

Şekil 4. 7: mn = 4mm, T= 25, δ = 0˚, β = 0˚ parametreleri için Von Misses gerilmeleri. 71

Şekil 4. 8: mn = 4mm, T= 25, δ = 0˚, β = 0˚ parametreleri için contact press sonuçları. 72

Şekil 4. 9: mn = 4mm, T= 25, δ = 0˚, β = 0˚ parametreleri için dönme açılarına göre contact press değerleri değişimi. 72

Şekil 4. 10: mn = 4mm, t= 25, δ = 0˚, β = 0˚ parametreleri için dönme açılarına göre von misses değerleri değişimi. 73

Şekil 4. 11: mn = 3mm, T= 30, δ = 0˚, β = 10˚ parametreleri için analiz durumu. 73

Şekil 4. 12: mn = 3mm, T= 30, δ = 0˚, β = 10˚ parametreleri için Von Misses gerilmeleri. 74

Şekil 4. 13: mn = 3mm, T= 30, δ = 0˚, β = 10˚ parametreleri için contact press sonuçları. 74

Şekil 4. 14: mn = 3mm, T= 30, δ = 0˚, β = 10˚ parametreleri için dönme açılarına göre contact press değerleri değişimi. 75

Şekil 4. 15: mn = 3mm, T= 30, δ = 0˚, β = 10˚ parametreleri için dönme açılarına göre von misses değerleri değişimi. 75

Şekil 4. 16: mn = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β = 0˚ parametreleri için analiz durumu. 76

Şekil 4. 17: mn = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β = 0˚ parametreleri için Von Misses gerilmeleri.....76

Şekil 4. 18: mn = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β = 0˚ parametreleri için contact press sonuçları. 77

Şekil 4. 19: mn = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β = 0˚ parametreleri için dönme açılarına göre contact press değerleri değişimi. 77

Şekil 4. 20: mn = 3mm, T= 30, δ = 0˚, β = 10˚ parametreleri için dönme açılarına göre von misses değerleri değişimi. 78

Şekil 4. 21: mn = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =15˚ parametreleri için analiz durumu. 78

Şekil 4. 22: mn = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =15˚ parametreleri için Von Misses gerilmeleri.....79

Şekil 4. 23: mn = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =15˚ parametreleri için contact press sonuçları. 79

Şekil 4. 24: mn = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =15˚ parametreleri için dönme açılarına göre contact press değerleri değişimi. 80

Şekil 4. 25: mn = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =15˚ parametreleri için dönme açılarına göre von misses değerleri değişimi. 80

Şekil 4. 26: mn = 4mm, T= 25, δ = 7,5˚, β =0˚ ve mn = 4mm, T= 50, δ = 7,5˚, β =0˚ parametreleri için analiz durumu (1). 81

Şekil 4. 27: mn = 4mm, T= 25, δ = 7,5˚, β =0˚ ve mn = 4mm, T= 50, δ = 7,5˚, β =0˚ parametreleri için analiz durumu (2). 82

Şekil 4. 28: mn = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =15˚ parametreleri için Von Misses gerilmeleri.....82

Şekil 4. 29: mn = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =15˚ parametreleri için contact press sonuçları. 83

Şekil 4. 30: mn = 4mm, T= 25, δ = 7,5˚, β =0˚ ve mn = 4mm, T= 50, δ = 7,5˚, β =0˚ parametreleri için dönme açılarına göre von misses değerleri değişimi. 83

Şekil 4. 31: mn = 4mm, T= 25, δ = 7,5˚, β =0˚ ve mn = 4mm, T= 50, δ = 7,5˚, β =0˚ parametreleri için dönme açılarına göre contact press değerleri değişimi. 84

Şekil 4. 32: mn = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =10˚ parametreleri için örnek analiz durumu. 85

Şekil 4. 33: mn = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =10˚-12˚ parametreleri için contact press sonuçları. 86

Şekil 4. 34: mn = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =13˚-15˚ parametreleri için contact press sonuçları. 87

Şekil 4. 35: mn = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =10˚-12˚ parametreleri için Von Misses sonuçları. 88

Şekil 4. 36: mn = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =13˚-15˚ parametreleri için Von Misses sonuçları. 89

Şekil 4. 37: mn = 3mm, T= 30, δ = 10˚-12˚, β =10˚ parametreleri için contact press sonuçları. 90

Şekil 4. 38: mn = 3mm, T= 30, δ = 13˚-15˚, β =10˚ parametreleri için contact press sonuçları. 91

Şekil 4. 39: mn = 3mm, T= 30, δ = 10˚-12˚, β =10˚ parametreleri için Von Misses sonuçları. 92

Şekil 4. 40: mn = 3mm, T= 30, δ = 13˚-15˚, β =10˚ parametreleri için Von Misses sonuçları. 93

Şekil 4. 41: Helisel Konik Dişli Örnekleri; a) α=20˚ kavrama açısı ile imal edilmiş b) α=25˚ ile imal edilmiş.....94

Şekil 4. 42: Helisel Konik Dişli Örnekleri; a) α=20˚ kavrama açısı ile imal edilmiş b) α=25˚ ile imal edilmiş.....95

Şekil 4. 43: mn = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =10˚ ve α=20˚ parametreleri için analiz durumu.....95

Şekil 4. 44: mn = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =10˚ ve α=25˚ parametreleri için analiz durumu.....96

Şekil 4. 45: mn = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =10˚ ve α=20˚ parametreleri için S22 gerilme sonuçları. 96

Şekil 4. 46: mn = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =10˚ ve α=25˚ parametreleri için S22 gerilme sonuçları. 97

Şekil 4. 47: mn = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =10˚ parametreleri için kök kısımlarında S22 gerilme sonuçları (mavi grafik α=20˚, kırmızı grafik α=25˚ derece için).....97

Şekil 4. 48: mn = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β =0˚ ve α=20˚ parametreleri için analiz durumu.....98

Şekil 4. 49: mn = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β =0˚ ve α=25˚ parametreleri için analiz durumu.....98

Şekil 4. 50: mn = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β =0˚ ve α=20˚ parametreleri için S22 gerilme sonuçları. 99

Şekil 4. 51: mn = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β =0˚ ve α=25˚ parametreleri için S22 gerilme sonuçları. 99

Şekil 4. 52: mn = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β =0˚ parametreleri için kök kısımlarında S22 gerilme sonuçları (mavi grafik α=25˚, kırmızı grafik α=20˚ derece için).....100

Şekil 4. 53: mn = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β =0˚ parametreleri için analiz durumu. 101

Şekil 4. 54: mn = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β =0˚ ve temas hataları T.E. = 0-2 mm parametreleri için contact press sonuçları. 102

Şekil 4. 55: mn = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β =0˚ ve temas hataları T.E. = 3-5 mm parametreleri için contact press sonuçları. 103

Şekil 4. 56: mn = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β =0˚ ve temas hataları T.E. = 6 mm parametreleri için contact press sonuçları. 104

Şekil 4. 57: mn = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β =0˚ ve temas hataları T.E.= 0-2 mm parametreleri için Von Misses sonuçları. 105

Şekil 4. 58: mn = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β =0˚ ve temas hataları T.E.= 3-5 mm parametreleri için Von Misses sonuçları. 106

Şekil 4. 59: mn = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β =0˚ ve temas hataları T.E. = 6 mm parametreleri için Von Misses sonuçları. 107

Şekil 4. 60: mn = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =10˚ parametreleri için analiz durumu. 107

Şekil 4. 61: mn = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =10˚ ve temas hataları T.E. = 0-1 mm parametreleri için contact press sonuçları. 108

Şekil 4. 62: mn = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =10˚ ve temas hataları T.E. = 1.5-2 mm parametreleri için contact press sonuçları. 109

Şekil 4. 63: mn = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =10˚ ve temas hataları T.E. = 0-1 mm parametreleri için Von Misses sonuçları. 110

Şekil 4. 64: mn = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =10˚ ve temas hataları T.E. = 1.5-2 mm parametreleri için Von Misses sonuçları. 111

Şekil 4. 65: mn = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β =0˚ parametreleri için temas hatalarının artışı ile temas çizgilerinin düşey eksendeki konum değişimleri. 112

Şekil 4. 66: mn = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =10˚ parametreleri için temas hatalarının artışı ile temas çizgilerinin düşey eksendeki konum değişimleri. 112

Şekil 4. 67: mn = 4mm, T= 25, δ = 0˚, β =0˚ ve mn = 4mm, T= 25, δ = 10˚, β =0˚ parametreleri için modifikasyonsuz dişlilerin analiz durumu. 113

Şekil 4. 68: mn = 4mm, T= 25, δ = 0˚, β =0˚ ve mn = 4mm, T= 25, δ = 10˚, β =0˚ parametreleri için konkav beveloid dişlilerin analiz durumu. 113

Şekil 4. 69: mn = 4mm, T= 25, δ = 0˚, β =0˚ ve mn = 4mm, T= 25, δ = 10˚, β =0˚ parametreleri için modifikasyonsuz dişli çiftindeki temas elipsi (Von Misses gerilmeleri). 114

Şekil 4. 70: mn = 4mm, T= 25, δ = 0˚, β =0˚ ve mn = 4mm, T= 25, δ = 10˚, β =0˚ parametreleri için konkav beveloid dişli çiftindeki temas elipsi (Von Misses gerilmeleri). 114

Şekil 4. 71: mn = 4mm, T= 25, δ = 0˚, β =0˚ ve mn = 4mm, T= 25, δ = 10˚, β =0˚ parametreleri için modifikasyonsuz dişli çiftindeki temas elipsi (Contact Press değerleri).....115

Şekil 4. 72: mn = 4mm, T= 25, δ = 0˚, β =0˚ ve mn = 4mm, T= 25, δ = 10˚, β =0˚ parametreleri için konkav beveloid dişli çiftindeki temas elipsi (Contact Press değerleri).....115

Şekil 4. 73: mn = 4mm, T= 25, δ = 2.5˚, β =0˚ ve mn = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β =0˚ parametreleri için modifikasyonsuz dişlilerin analiz durumu. 116

Şekil 4. 74: mn = 4mm, T= 25, δ = 2.5˚, β =0˚ ve mn = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β =0˚ parametreleri için konkav beveloid dişlilerin analiz durumu. 116

Şekil 4. 75: mn = 4mm, T= 25, δ = 2.5˚, β =0˚ ve mn = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β =0˚ parametreleri için modifikasyonsuz dişli çiftindeki temas elipsi (Von Misses gerilmeleri). 117

Şekil 4. 76: mn = 4mm, T= 25, δ = 2.5˚, β =0˚ ve mn = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β =0˚ parametreleri için konkav beveloid dişli çiftindeki temas elipsi (Von Misses gerilmeleri). 117

Şekil 4. 77: mn = 4mm, T= 25, δ = 2.5˚, β =0˚ ve mn = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β =0˚ parametreleri için modifikasyonsuz dişli çiftindeki temas elipsi (Contact Press değerleri).....118

Şekil 4. 78: mn = 4mm, T= 25, δ = 2.5˚, β =0˚ ve mn = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β =0˚ parametreleri için konkav beveloid dişli çiftindeki temas elipsi (Contact Press değerleri).....118

Şekil 4. 79: mn = 4mm, T= 25, δ = 5˚, β =0˚ ve mn = 4mm, T= 25, δ = 5˚, β =0˚ parametreleri için modifikasyonsuz dişlilerin analiz durumu. 119

Şekil 4. 80: mn = 4mm, T= 25, δ = 5˚, β =0˚ ve mn = 4mm, T= 25, δ = 5˚, β =0˚ parametreleri için konkav beveloid dişlilerin analiz durumu. 119

Şekil 4. 81: mn = 4mm, T= 25, δ = 5˚, β =0˚ ve mn = 4mm, T= 25, δ = 5˚, β =0˚ parametreleri için modifikasyonsuz dişli çiftindeki temas elipsi (Von Misses gerilmeleri). 120

Şekil 4. 82: mn = 4mm, T= 25, δ = 5˚, β =0˚ ve mn = 4mm, T= 25, δ = 5˚, β =0˚ parametreleri için konkav beveloid dişli çiftindeki temas elipsi (Von Misses gerilmeleri). 120

Şekil 4. 83: mn = 4mm, T= 25, δ = 5˚, β =0˚ ve mn = 4mm, T= 25, δ = 5˚, β =0˚ parametreleri için modifikasyonsuz dişli çiftindeki temas elipsi (Contact Press değerleri).....121

Şekil 4. 84: mn = 4mm, T= 25, δ = 5˚, β =0˚ ve mn = 4mm, T= 25, δ = 5˚, β =0˚ parametreleri için konkav beveloid dişli çiftindeki temas elipsi (Contact Press değerleri).....121

6. TABLO LİSTESİ

Sayfa No

Şekil tablosu öğesi bulunamadı.

7. SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
m_n	: Normal modül, mm.
a_c, a_t	: Takım dizayn parametreleri.
b_c	: Takım dizayn parametresi.
T	: Diş sayısı.
σ	: Eğilme gerilmesi, Mpa.
ϕ_1	: Yuvarlanma parametresi.
l_j	: Eğrisel parametreler.
ρ_1, ρ_2	: Kremayer takımın kök eğrilik yarıçapı, derece.
α_{n1}, α_{n2}	: Normal kavrama açıları, derece.
δ	: Koniklik açısı, derece.
β	: Helis açısı, derece.
λ	: Kremayer takım ve dişli koordinat sistemi orijinleri arası mesafe, mm.
x_i	: Modifikasyon faktörü.
r_1, r_2	: Dişbaşı ve dişdibi daireleri yarıçaplar, mm.
z_b	: z ekseni üzerinde bir nokta.
R	: Taksimat dairesi yarıçapı, mm.

$\boldsymbol{n_c^i}$: Yüzey normali.

$\boldsymbol{\xi}$: Rijit yüzey üzerinde bir noktanın doğal koordinatı.

$\boldsymbol{g_n}$: Yüzeyler arası normal boşluk.

$\boldsymbol{g_t}$: Teğetsel kayma fonksiyonu.

$\boldsymbol{\pi_u}$: Potansiyel enerji.

$\boldsymbol{\varepsilon_n}$: Penaltı fonksiyonu.

$\boldsymbol{\lambda_L}$: Lagrange çarpanı.

$\boldsymbol{x_i}$: Profil kaydırma faktörü.

$\boldsymbol{l}$: Sapma miktarı, mm.

$\boldsymbol{\kappa_n}$: Yüzey eğriliği.

Kısaltmalar **Açıklama**

mm : Milimetre.

Nm **:** Newton metre.

Mpa **:** Megapaskal.

8. ÖZET

BEVELOİD DİŞLİLERİN MATEMATİK MODELLENMESİ VE DİŞLİ TEMAS ANALİZİ

DOKTORA TEZİ

Berat Gürcan ŞENTÜRK

İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Mahmut Cüneyt FETVACI

Bu çalışmada, genel anlamda beveloid dişlilerin matematiksel modellerini, programlama dillerinde tanımlanmaya ve özellikle eriyik yığma teknolojisi (FDM) yardımıyla katı modellemeye en elverişli olacak biçimde oluşturmak ve sonlu elemanlar yardımıyla temas analizlerinin gerçekleştirilmesi amaçlanmıştır. Matematiksel ifadelerden yola çıkılarak, farklı parametreler için dişlilerin kesit profilleri ve devamında dişli CAD modelleri elde edilmiş, sınır diş sayılarında meydana gelen alttan kesme durumlarının giderilebilmesi için farklı yöntemler ortaya konularak, matematiksel ifadelere ilave edilmiştir. Daha sonra sonlu eleman analizleri ile modifiye edilmiş modellerde yapılan iyileştirmeler test edilmiştir. Alttan kesme durumlarının giderilmesi için uygulanan metotlar yardımıyla da kök mukavemetinin arttırılabileceği görülmüştür.

Paralel eksenlerde çalışan beveloid dişliler, bu çalışmanın temel odak noktasıdır. Literatürde paralel eksenlerde beveloid dişlilerin güç aktarımı ve temas gerilmeleri konusunda sağlayabileceği iyileştirmelerile ilgili çok az çalışma mevcuttur. Bu kapsamda, çalışma esnasında beveloid dişlilerde meydana gelen temas gerilmeleri farklı dönme açılarında, koniklik ve helislik parametrelerinin değişimine göre incelenmiştir. Paralel eksenlerde meydana gelen temas hataları (transmission errors) simule edilerek, analiz sonuçları yorumlanmıştır.

Ayrıca imalat esnasında kremayer takımın kavrama açılarındaki değişimlerin, kök kısımlarındaki gerilme dağılımlarına etkileri incelenmiştir. Sonuçlarda, kök kısımlarında diş derinlikleri boyunca, ortalama gerilme değerlerinin kavrama açılarının arttırılması ile azaltılabileceği görülmüştür. Bu yönüyle ve paralel eksenlerdeki çalışma şartlarının simule edilmesiyle, yapılan çalışmanın literatüre katkıda bulunması hedeflenmektedir.

Konkavlık ve konvekslik modifikasyonları, beveloid dişlilerde temas gerilmelerine etki eden bir diğer unsurdur. Bu modifikasyonların matematiksel modellemesi ifade edilerek, konkav beveloid dişliler için sonlu eleman analizleri gerçekleştirilmiştir. Sonuçta konkavlık ve konvekslik modifikasyonları da beveloid dişlilerde maksimum temas gerilme değerlerinin düşürülmesi ve sınır bölge temaslarının (edge contact) giderilmesi açısından önemli iyileştirmeler sağlamaktadır.

Özellikle çakışan eksenlerde çalışan dişli çarklarda, diferansiyel geometri esasları baz alınarak formülize edilen teorik temas analizleri, sonlu elemanlar metodu yardımıyla yapılan simülasyonlara bir alternatif oluşturmaktadır. Bu bağlamda, çakışan eksenlerde dişli çiftleri için teorik temas analizleri gerçekleştirilerek, temas elipslerinin asal eksenlerdeki boyutları belirlenmiş, sonuçlar sonlu eleman analizleri ile karşılaştırılmıştır. Bu konu ile ilgili formülasyon ve sonuçlara çalışmanın ekler kısmında yer verilmiştir.

Sonuç olarak, özellikle paralel eksenlerde çalışan beveloid dişlilerde temas hatalarının (transmission errors) olduğu durumlarda, güç aktarımının belirli sınırlarda sağlanabildiği, kavrama açılarının büyütülmesi ile de köklerde oluşan maksimum gerilmelerin düşürülebildiği görülmüştür. Alttankesmeyi önleyen metotların yanı sıra konkavlık ve konvekslik modifikasyonları da aynı konuda fayda sağlamaktadır. Farklı dönme açılarında yapılan analizlerden yola çıkarak, gerilme değerlerinin deneysel veriler ile uyumlu olduğunu söylemek mümkündür.

Matematiksel modelleme esnasında kullanılan kodlar, MATLAB programı vasıtasıyla oluşturulmuş, sonlu eleman analizleri ise ABAQUS paket programı kullanılarak gerçekleştirilmiştir. CAD modellerinin oluşturulması için SOLIDWORKS, sonlu eleman modelleri için ise HYPERMESH paket programları kullanılmıştır.

Haziran 2020, 170 sayfa.

Anahtar kelimeler: Beveloid dişliler, alttankesme analizleri, sonlu elemanlar metodu, konkav beveloid dişliler, katı eriyik yığma teknolojisi (FDM), matemetiksel modelleme, hesaplamalı mekanik.

9. SUMMARY

MATHEMATICAL MODELLING AND TOOTH CONTACT ANALYSIS OF BEVELOID GEARS

Ph.D. THESIS

Berat Gürcan ŞENTÜRK

Istanbul University-Cerrahpasa

Institute of Graduate Studies

Department of Mechanical Engineering

Supervisor : Prof. Dr. Mahmut Cüneyt FETVACI

The main scope of this study is to obtain and clarify the mathematical models of beveloid gear geometries in a certain type of logic which is especially suitable for computer aided drawing programs and especially for fused deposition modelling (FDM) and secondly, execute the tooth contact analysis by the help of finite element method. Based on the mathematical expressions, with many different parameters, gear profiles on consecutive cross sections and CAD models of the beveloid gear types has been obtained. In addition, to prevent the undercutting, two different methods has been presented and specified in the mathematical expressions. For the purpose of testing the modifications for prevention of undercutting, finite element analysis of the modified gear models has been carried out. As seen from the results, it can be possible to increase the load carrying capacity on the root regions of the gear models.

The working conditions of beveloid gears with parallel axis is the main focus of the study. Very few of the studies in the literature are related to the improvements that beveloid gear systems with parallel axis can make about power transmission and contact stress values. By determining the conical and helical angles as the changing parameters, for different rotating angles, contact stress values of beveloid gears with parallel axes has been examined. In addition, the transmission errors has been defined between the meshing gears with parallel axes and the meshing conditions has been simulized, after that the analysis results has been evaluated. Also it has been investigated that, during the manufacturing process, how did the change in the pressure angles of the rack cutter, effect the stress distribution on the root regions. The results have shown that, along the width, average stress on the roots can be reduced by increasing the pressure angles of the rack. With the results and simulations that has been made, it was targeted that the study can make a contribution to the literature about the working conditions and advantages of beveloid gears with parallel axis.

Concave and convex modifications on the beveloid gears is another significant subject which effects the contact stress values during the meshing conditions. Alongside the mathematical expressions of these modifications which has been given, finite element analysis of the modified gear types has been generated. From the results, it has been deduced that, the concave and convex gear modifications can provide, the reduction of the maximum contact stress value and elimination of the edge contact situations respectively.

Especially for the gear pairs with intersected angles, theoretical methods based on the differential geometry principles, can be an alternative to the finite element simulations. About this context, theoretical tooth contact analysis to obtain the length of the contact ellipses on the principle axes has been made, the values have been compared with the finite element simulation results. Formulation and the results about the subject are given in the appendix section.

Finally, the main results of the study has shown that, especially for the beveloid gear pairs with parallel axes, in the conditions which transmission errors exist between the centers of rotation, between certain limits, the transmission of the torque can be provided. Also increasing the pressure angle values of the rack cutter profiles, can help to reduce the average stress on the root regions of the gears. The modifications for prevention of undercutting and adjusting the involute surfaces, can also have an positive effect about the same purpose. Based on the

simulations for the different rotation angles, it is possible to state that the results are in parallel with the experimental data.

During the study, for the modelling process Matlab software has been used. Also for the finite element simulations have been generated by the Abaqus software program. CAD and finite element models have been created with Solidworks and Hypermesh softwares respectively.

June 2020, 170 pages.

Keywords: Beveloid gears, undercutting analysis, finite element method, concave beveloid gears, fused deposition modelling (FDM), mathematical modelling, computational mechanics.

1. GİRİŞ

Beveloid dişliler veya bilinen isimleriyle evolvent profilli konik dişliler, redüktörler, otomobil ve yat şanzımanları, havacılık ve robotik gibi çok geniş bir uygulama alanında yaygın olarak kullanılmaktadır. Kolay imal edilebilmelerinin yanı sıra geometrik özellikleri dolayısı ile paralel, dik kesişen veya çakışık eksenlerde de çalışabilmeleri ve "backlash" ayarlamalarına elverişli olmaları beveloid dişlilerin oldukça fazla tercih edilmelerine sebep olmaktadır.

Beveloid dişlilerin matematiksel olarak modellenmesi, yalnızca belirli dizayn parametrelerinin değiştirilmesi ile tasarım ve imalat olanağı sunduğundan büyük önem arz etmektedir. Bilgisayar destekli tasarım programları yardımıyla matematiksel modelleri geometrik yüzeylere dönüştürmek ve sonlu eleman analizi yapan paket programlara aktarmak mümkündür. Analizler neticesinde ise temas bölgelerinin geometrik yerleri ve evolvent yüzeylerde oluşan gerilmeler tayin edilebilmektedir.

Bu çalışmada, öncelikle beveloid dişlilerin matematiksel modellerini, programlama dillerinde tanımlanmaya ve özellikle eriyik yığma teknolojisi (FDM) yardımıyla katı modellemeye en elverişli olacak biçimde oluşturmak amaçlanmıştır. Matematiksel ifadelerden yola çıkılarak, farklı parametreler için CAD modelleri elde edilmiş sonrasında ise sonlu eleman analizleri gerçekleştirilmiştir. Bilgisayar destekli temas analizleri ile çalışma şartları simule edilerek, çalışma esnasında oluşan istenmeyen durumları saptayabilmenin yanı sıra özellikle alttan kesme durumlarını giderilmesi başta olmak üzere, yapılabilecek konstrüktif değişiklikleri belirlemek amaçlanmıştır.

Bu çalışma kapsamında yapılan temas analizlerinde üzerinde durulan temel konu, paralel eksenlerde çalışan beveloid dişlilerdir. Bu kapsamda, farklı parametrelerde modellenen dişli türleri sonlu elemanlar metodu ile simule edilmiş ve sonuçlarda dişler üzerindeki yük dağılımları farklı dönme açılarında incelenmiştir. Sonraki aşamalarda ise, koniklik, helislik ve kavrama açıları gibi parametrelerin gerilme değerlerine etkisi, temas hatalarının (transmission errors) bulunduğu durumlarda, temas çizgilerinin geometrik yerlerindeki değişim incelenmiştir. Özellikle beveloid dişlilerin paralel eksenlerde incelenmesi literatürde hali hazırda fazla yeri

bulunmayan bir konudur. Bu sebeple paralel eksenlerde yapılan analizler ve özellikle kavrama açılarındaki değişimlerin paralel eksenlerde incelenmesi konuları ile yapılan çalışmanın literatüre katkıları olacaktır.

Çakışan eksenlerde çalışan beveloid dişliler için ise, kenar yüzey temaslarını (edge contact) önleyebilmek ve aksiyal transmisyon hatalarının önüne geçebilmek amacıyla konveks, paralel olmayan eksenlerde temas gerilmelerini azaltmak amacıyla ise konkav beveloid dişliler, hali hazırda dizayn edilmekte ve kullanılmaktadır. Bu türdeki konstrüksiyon teorileri ışığında yeni modeller dizayn edilmiş ve onlara ait analiz sonuçları geleneksel modeller ile karşılaştırılarak sonuçlardaki farklılıklara yol açan sebepler incelenmiştir.

Bu çalışmalara ek olarak da diferansiyel geometri esasları yardımıyla, çakışan eksenlerde temas elipslerinin teorik olarak elde edilmesi incelenmiş ve bu amaca yönelik bir formülasyon oluşturulmuştur. Bu konuda detaylı bilgi ekler kısmında mevcuttur.

Bu amaçla, matematiksel ifadelerden hareketle, dişlilere ait kesit resimleri MATLAB programı yardımıyla kodlanmıştır. Daha sonra alın, simetrik ve asimetrik beveloid dişlilerin CAD modelleri SOLIDWORKS yardımıyla oluşturulmuş ve sonlu eleman analizleri ABAQUS paket programı dahilinde yapılmıştır. Sonlu eleman modellerinin etkin bir biçimde elde edilmesi amacıyla HYPERMESH programı kullanılmıştır.

2. GENEL KISIMLAR

2.1. AMAÇ VE MOTİVASYON

Beveloid dişliler, paralel eksenlerin yanı sıra kesişen veya aykırı eksenlerde de çalışabilen, evolvent profilli konik dişli türleridir. Bu dişlilerde diş derinliği boyunca değişken bir profil kaydırma sabiti bulunmaktadır, böylelikle farklı şaft açılarında, paralel eksenlerin yanı sıra kesişen ve aykırı eksenlerde de çalışabilmektedirler. Aynı zamanda yan boşluk (backlash) ayarlamalarına uygun olma özelliklerinden ötürü paralel beveloid dişliler, çoğunlukla hassas transmisyon ve redüktör sistemlerinde iletimin düzgün olarak sağlanması amacıyla kullanılmaktadır. Diş genişliklerinin sivri kısımlara doğru azalması sebebiyle, evolvent konik dişlilerde yan boşluk iyileştirmeleri, eksenel düzenlemeler yardımıyla, yuvarlanma daireleri çapları değiştirilmeksizin yapılabilmektedir [1].

Çakışan eksenlerde çalışan beveloid dişli sistemlerine ise robotikten, yat şanzımanlarına, kadar pek çok uygulama alanında rastlamak mümkündür. Çalışmamızda beveloid dişlilerin matematiksel modelleri, özellikle eriyik yığma teknolojisi (FDM) ile modellemeye uygun olarak verilmiş, paralel eksenlerde çalışma durumları başta olmak üzere paralel ve çakışık eksenlerde çalışma şartları sonlu elemanlar metodu yardımıyla simule edilmiştir.

Literatürde hali hazırda var olan çalışmalarda, beveloid dişlilerin çakışık ve aykırı eksenlerde güç aktarımı ve temas gerilmelerinin incelenmesi konusunda yapılmış pek çok çalışma mevcuttur. Buna rağmen özellikle paralel eksenlerde çalışan beveloid dişliler için temas analizlerine etki eden koniklik, helislik ve kavrama açısı değişimi gibi faktörler, geleneksel yöntemlerle üretilen silindirik konik dişli türlerinde olduğu ölçüde derin olarak incelenmemiştir [2]. Bu açıdan, paralel beveloid dişlilerde temas karakterstiklerinin ve temas hatalarının (transmission errors) incelenmesi, ileride geniş bir uygulama alanı bulabilecek bir konu olarak karşımıza çıkmaktadır. Tez çalışmaları dahilinde paralel beveloid dişlilerde koniklik, helislik ve kavrama açıları değişimleri sonlu elemanlar yöntemi vasıtası ile analiz edilmiş ve incelenmiştir.

Beveloid dişlilerin tasarımında farklı diş sayılarında meydana gelen alttan kesme durumlarının giderilmesi de özellikle temas esnasında köklerde oluşabilecek maksimum gerilme değerlerinin düşürülmesini sağlayabilecek önemli bir çalışma konusudur. Bu çalışma kapsamında alttan

kesme durumlarını ortadan kaldıran 2 farklı metot matematiksel olarak ifade edilmiş ve bu metotlar yardımıyla oluşturulan dişli geometrileri sonlu elemanlar yöntemiyle test edilerek, alttan kesmeye uğrayan beveloid modeller ile karşılaştırılmıştır.

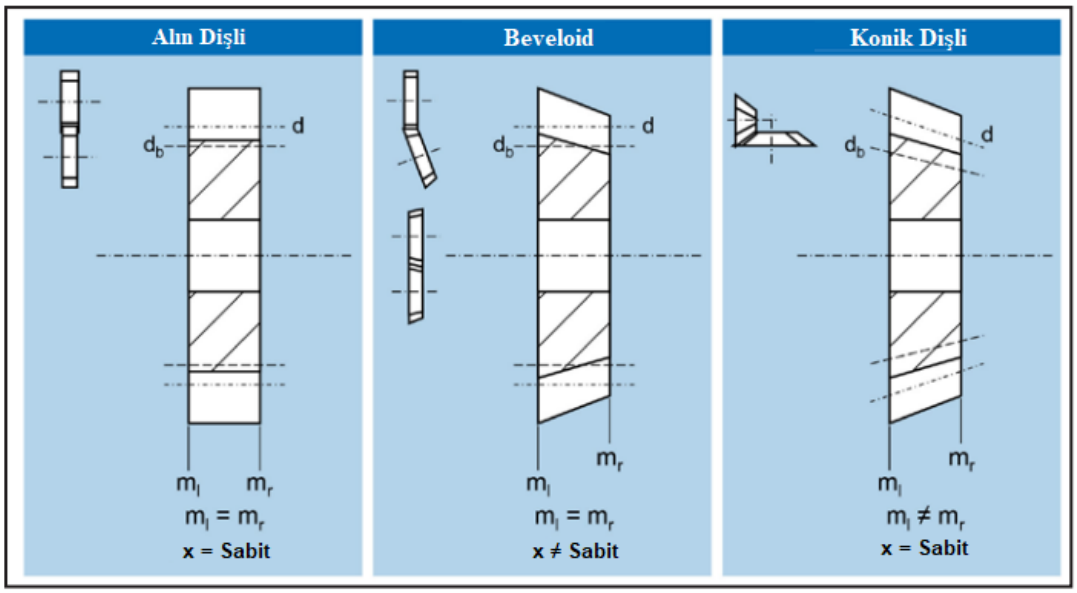
Beveloid dişlilerin tasarımında son zamanlarda sık olarak incelenen bir başka modifikasyon türü de konkavlık ve konvekslik modifikasyonlarıdır. Bu yöntemler vasıtası ile, konkav beveloid dişlilerde temas esnasında evolvent kısımda meydana gelen maksimum gerilme düşürülebilmekte, konvekslik modifikasyonunda ise çakışan eksenlerde meydana gelen sınır bölgelerinin teması (edge contact) giderilebilmektedir.

Ayrıca, bilgisayar destekli temas analizlerinde sonlu elemanlar yöntemine ek olarak, temas elipslerinin diferansiyel geometri esasları baz alınarak, teorik olarak elde edilmesi, bilgisayar destekli dişli temas analizlerinde, nümerik metotlara bir alternatif oluşturmaktadır. Bu amaçla teorik hesaplamalar ve elde edilen elipslerin ölçüleri, ek kısımlarında verilmiş, sonuçlar sonlu eleman simülasyonları ile karşılaştırılmıştır.

2.2.LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Literatürde yapılmış olan çalışmalarda genel olarak beveloid dişlilerin matematiksel modellemesi ve alttan kesme durumları incelenmiş, diş yüzeylerine uygulanabilecek yüzey modifikasyonları belirtilmiş, çalışma şartları ile ilgili sonlu elemanlar analizi ve deneysel çalışmalar yapılmıştır.

Sonlu elemanlar yönteminin dişli geometrileri üzerindeki ilk önemli uygulamalarından biri olarak Handschuh R.F. ve Litvin F. L. tarafından yapılan çalışma örnek gösterilebilir. Burada, spiral konik dişli geometrisini, sonlu eleman modellenmesi için uygun olabilecek oluşturan bir sistem ortaya konmuştur [3]. Benzer olarak, Litvin ve diğ. tarafından yapılan bir başka çalışma ise dişli çarklarda temas hataları (transmission errors) ve temas bölgelerinin düz, helisel ve spiral konik dişli türleri için incelenmesini içermektedir [4]. Burada, uygulamada meydana gelen bu durumların giderilebilmesi için dişli yüzeylerinde yapılabilecek modifikasyonlar da belirtilmiştir. Ayrıca, Coy J.J. ve Chao C.H.C., tarafından yapılan bir çalışmada, alın dişlilerde, Hertz deformasyoınlarının sonlu eleman analizlerine dahil edilebilmesi için düğüm noktalarının uygun belirlenebilmesini sağlayan bir sistem üzerinde çalışılmıştır [5].



Şekil 2. 1: Beveloid dişlilerin geometrik karakteristikleri[6].

Beveloid (evolvent profilli konik) dişliler ile ilgili ilk çalışmalara örnek olarak ise Mitome'nin evolvent profilli konik dişlilerin üretim yöntemleri ve alttan kesme iyileştirmeleri ile ilgili çalışması verilebilir [7]. Bu çalışmada, evolvent profilli konik dişli çarkların üretim sistemi açıklanmıştır. Ayrıca Mitome, kesici takım geometrilerini belirleyen bir metot geliştirerek, bu kapsamda hem düz hem de helisel konik dişli çarkların dizaynını incelemiştir. Alttan kesme durumları ile ilgili olarak da,matematiksel modellerde düz ve helisel konik dişli çarklar için alttan kesmeyi önleyebilecek katsayılar tanımlanmıştır. Aynı konuda benzer bir çalışma ise Chen Y.C. ve Tsay C.B. tarafından yapılmış, bu çalışmada da, temas durumundaki helis dişlilerde, eğilme gerilmeleri sonlu elemanlar yöntemi ile incelenmiştir [8]. Matematiksel modelleme yapıldıktan sonra geometri üzerinde sonlu elemanlar modelini oluşturan bir program geliştirilmiş, analizler ise ABAQUS paket programı yardımıyla yapılmıştır. Sonuçlardan hareketle, gerilme dağılımlarına dizayn parametreleri ve temasta dişlerin pozisyonlarının etkileri örneklerle gösterilmiştir. Beveloid dişlilerde alttan kesme durumlarının incelenmesini içeren önemli bir çalışma ise, Liu ve Tsay [9] tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada, alttan kesme durumlarının önlenmesini sağlayabilecek 2 farklı metodun ortaya konulmasının yanı sıra, beveloid dişlilerin genel matematiksel modellemesi yapılmış ve alttan kesmenin oluştuğu durumlar dişli parametrelerine sınırlar getirilerek belirtmişlerdir. Alttan kesmeyi giderebilecek bu metotlardan ilki, helisel dişlilerin imalatında kremayer takımda kavrama açısının büyütülmesi, diğeri ise, düz beveloid dişliler için kremayerde değişken diş

derinliklerinin kullanılmasıdır. Bir diğer önemli çalışmada Yang S.C., asimetrik profilli helisel dişliler için, iki farklı hayali kremayer takım vasıtası ile oluşturulan bir matematiksel model ortaya koymuş ve bu model için alttan kesme durumlarını incelemiştir [10]. Bu çalışmada, alttan kesme durumlarının giderilmesi için, bir pozitif profil kaydırma yöntemi kullanılmıştır. Fetvacı tarafından yapılan çalışmalarda da, evolvent profilli düz dişli çarklarda alttan kesilmenin bilgisayar simülasyonu verilmiş [11], pinyon-tipi takımla profil kaydırmanın dişli geometrisine olan etkileri incelenmiştir [12]. Ayrıca Pedrero J.I. ve diğ. tarafından yapılan bir çalışmada, alttan kesmenin temas gerilmeleri üzerine etkileri alın ve düz helis dişli türleri için incelenmiş, burada temas bölgeleri üzerindeki gerilmeler, Hertz eşitlikleri yanı sıra, "minimum elastik potansiyel kriteri" kullanılarak elde edilmiştir [13].

Alttan kesmenin yanı sıra, dişlilerde temasta bulunan yüzeylerde oluşan gerilmeler de hasara neden olabilecek faktörler arasındadır. Bu bağlamda, Li [14] tarafından yapılan bir çalışmada, diş başı yüksekliklerindeki artışın temas gerilmelerinin azaltılmasına olan etkisi incelenmiştir.

Beveloid dişli çarkların çalışması esnasında kök kısımlarında oluşan gerilmeler, dişlerin yük kapasiteleri ve hasara uğramaları açısından büyük bir önem arz etmektedir. Bu bağlamda Brecher ve diğ. [6] tarafından yapılan çalışmalarda, diş köklerinin yük kapasiteleri, bilgisayar destekli hesaplamalar ve deneysel veriler yardımıyla araştırılmıştır. Benzer bir başka araştırma ise Akpolat A. [15] tarafından yapılmış, burada kesici takımda simetrik ve asimetrik uç yarıçaplarının diş dibi eğilme gerilmesine etkisi, diğer tüm dişli parametreleri sabit tutularak incelenmiştir. Sonuçta asimetrik uçlu kesici takım kullanılarak modellenen dişli çarkların diş dibi eğilme gerilmelerinde %10 azalma elde edilmiştir.

Günümüzde bilgisayar destekli beveloid dişli geometrileri ve sonlu elemanlar modellerinin oluşturulması ile ilgili olarak, Brauer J. tarafından yapılmış çalışmalar büyük önem arz etmektedir. Burada, evolvent profilli düz konik dişliler için parametrik eşitlikler verilmiş, daha sonra bu formüller, sonlu eleman modellerinin oluşturulması amacıyla kullanılmıştır. Bunlara ek olarak, alttan kesme durumlarının iyileştirmesine olanak veren "burun modifikasyon katsayısı" (addendum modification coefficient) olarak isimlendirdirilen katsayılar tanımlanmış, bunlar matematiksel ifadelere ilave edilmiştir [16,17].

Literatürde benzer olarak, dişli geometrilerinin özelinde sonlu elemanlar modellerinin oluşturulması ile ilgili pek çok özel metot geliştirilmiştir. Dişlilerde özellikle temasın oluştuğu

evolvent ve kök eğrilerinin gerçek formlarına mümkün olduğunca yakın olarak modellenebilmesi analiz sonuçlarının doğruluğu açısından büyük önem arz etmektedir. Bu amaçla, Lei.Y. ve diğ. tarafından yapılan çalışmada, 2 boyutlu kesitlerdeki dişli profilleri baz alınarak sonlu elemanlar modelini oluşturan düğüm noktalarını oluşturan bir program geliştirilmiştir[18]. Atanasovska I. ve diğ. ise, helis dişliler için, sonlu elemanlar modellerini benzer yöntemler ile oluşturan bir model geliştirerek temas analizlerini gerçekleştirmişlerdir [19]. Benzer şekilde, Sobiepanski M. ve Niezsporek T. de, geliştirdikleri yöntem ile alın dişlilerde temas durumlarını sonlu elemanlar yöntemi ile incelemişlerdir [20]. Gonzalez-Perez I. ve Fuentes-Aznar A. ise çalışmalarında, alın dişliler için temas ve eğilme gerilmelerinin doğru olarak elde edilebilmesini sağlayan, bilgisayar hesaplamaları bakımından daha zahmetsiz bir yöntem ortaya koymuşlardır [21]. Bunlara ek olarak, Lin T. ve diğ. geliştirdikleri sonlu eleman oluşturma yöntemi yardımıyla, dişli çarkların dinamik temas ve darbe (impact) testlerini gerçekleştirmişlerdir [22].

Paralel eksenlerde çalışan beveloid dişliler ise redüktör ve transmisyon sistemlerinde hassas güç iletimini sağlayabilme amacıyla geniş bir uygulama alanına sahiptir. Bu konu ile ilgili olarak paralel eksenlerde çalışan beveloid dişlilerde temas hataları, Song C. ve diğ. tarafından incelenmiştir[2]. Bu çalışmada, paralel eksenlerde beveloid dişlilerin yüzeylerinin modellenmesi ile ilgili yeni bir yöntem ortaya konmuştur. Daha sonra, temas hatalarının olduğu ve olmadığı durumlar için, temas analizleri sonlu elemanlar yöntemi ile gerçekleştirilmiştir. Ayrıca, Song C. ve diğ. tarafıdan yapılan başka bir çalışmada da, paralel eksenlerde çalışan beveloid dişlilerin sonlu eleman modellemesinde dişlerin eş çalışma durumları, (mesh stiffness) potansiyel enerji yardımıyla hesaplayan bir metot geliştirilmiş ve analiz edilmiştir[23]. Brecher ve diğ. de, paralel eksenlerde çalışan beveloid dişlilerde yük taşıma kapasitesini yorulma analizleri vasıtasıyla incelemişlerdir. Ayrıca bu çalışma kapsamında kök kısımlarının yük kapasitelerini hesaplayan iki farklı metot ortaya koymuşlardır[24].

Konkavlık ve konvekslik modifikasyonları da beveloid dişlilerde temas esnasında oluşan maksimum gerilmelerin azaltılması ve sınır bölge temaslarının önlenebilmesi amacıyla geliştirilmiş önemli yöntemlerden birisinin olarak karşımıza çıkmaktadır.

Konkav beveloid dişlilerin matematiksel modellenmesi ve simülasyonu Liu ve diğ. [25] tarafından incelenmiş bir konudur. Bu kapsamda, Mitome ve diğer araştırmacılar tarafından ortaya konan imalat metotları vasıtasıyla üretilen konkav beveloid dişliler için iki farklı

matematiksel model sunularak, temas simülasyonları yapılmıştır. Bir başka çalışmada ise [1] çalışma şartları sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak simule edilmiş ve aynı parametreler için, modifikasyonların olmadığı dişli çiftleri ile karşılaştırılmıştır. Simülasyonlar çakışık eksenlerde çalışan beveloid dişliler için gerçekleştirilmiştir.

Sonlu elemanlar metodunun yanı sıra, lokal sentez ve teorik hesaplama TCA (Tooth Contact Analysis) yöntemleri, dişlilerde temas analizlerinin gerçekleştirilmesinde büyük katkı sağlamaktadırlar. Bu konu ile ilgili olarak, Litvin F. açıklamış olduğu yöntemlerde, diferansiyel geometri esasları yardımıyla, dişlilerde temas elipslerinin ilerleme doğrultularını ve yüzey alanlarının hesaplanabileceğini göstermiştir [26]. Ayrıca, Litvin F. ve diğ. spiral konik dişliler için yeni bir imalat yöntemi ortaya koyarak temas analizlerini lokal sentez ile birlikte nümerik temas analizi (TCA) uygulayarak gerçekleştirmişlerdir. [27].

Zhu. C. ve diğ. tarafından yapılan bir çalışmada, çakışan eksenlerde çalışan beveloid dişlilerin analizinde "yuvarlanan koni yöntemi" (pitch cone design) kullanılmış ve nümerik temas analizleri yardımıyla (TCA) temas ve hizalama hataları incelenmiştir. Daha sonra sonuçlar sonlu eleman analizleri ile karşılaştırılmıştır [28]. Ayrıca Song C. ve diğ. çalışmalarında, "yuvarlanan koniler yöntemi" (pitch cone design) kullanarak, çakışan eksenlerde çalışan silindirik evolvent ve beveloid dişli çifti için iletilen tork büyüklüğü, helis açısı ve hizalama hatalarının temas karakteristiklerin etkilerini incelemişlerdir [29].

Hwang S. C. ve diğ. tarafından yapılan bir çalışmada, düz ve helisel dişli çiftleri için sonlu elemanlar yöntemi ile temas analizleri oluşturulmuştur. Sonuçlar AGMA (American Gear Manufacturers Association) standartları ile karşılaştırılmış ve değerlerdeki değişiklikler yorumlanmıştır [30].

Beveloid dişlilerin günümüzde en yaygın olarak kullanıldığı alanlardan biri de transmisyon sistemleridir. Özellikle yat şanzımanlarında beveloid dişliler miller arasında güç aktarımını hassas bir şekilde sağlamaktadır. Bu konu ile ilgili olarak, Komatsubara H. ve diğ. konvansiyonel konik dişlilere göre yat şanzımanlarında konkav konik beveloid dişlilerin kullanılması ile temas elipslerinin genişlediğini, dolayısı ile bu durumda beveloid dişlilerin daha kullanışlı olacağını göstermişlerdir [31]. Benzer şekilde yat şanzımanlarında beveloid dişlilerin kullanımı ile ilgili olarak, Chaosheng S. ve diğ. yapmış oldukları çalışmada, beveloid dişlilerin dinamik analizlerini, nümerik ve deneysel yöntemler ile test etmişlerdir [32]. Zhu C.

ve diğ. ise, çalışma şartlarında beveloid dişlilerin hizalama hataları, iletilen tork ve temas açılarının etkilerini temas analizleri (TCA) nümerik yöntemler ile test ederek, deneysel testler ile sonuçları karşılaştırmışlardır [33].

Tüm bunlara ek olarak başta beveloid dişliler olmak üzere dişli sistemleri ile ilgili araştırmalar günümüzde pek çok farklı yöntem ve devam etmektedir. Bunlara örnek vermek gerekirse, beveloid dişliler için geliştirilen parabolik modifikasyonlar, çalışma esnasında pek çok iyileştirme yapılmasını mümkün kılmaktadır. Bu bağlamda, Ni G. tarafından yapılmış olan bir çalışmada, parabolik modifikasyonlu kremayer takım vasıtası ile üretilen beveloid dişli modelinin matematiksel ifadesi verilmiş ve temas gerilmeleri ve temas hataları bu modeller için incelenmiştir [34]. Başka bir çalışmada ise Ni G. ve diğ., çakışan eksenlerde parabolik modifikasyonlu beveloid dişlileri inceleyerek, temas hatalarının iyileştirilmesinde bu modifikasyonların etkilerini ortaya koymuşlardır[35].

Mitome [36] ve Litvin [37] in üzerinde durdukları, matematiksel modelleme yöntemlerine alternatif olarak Zimmer M., ve diğ. tarafından yapılan bir çalışmada ise, temel kinematik esaslar göz önüne alınarak, herhangi keyfi diş profilleri için matematiksel modelleme yapılabilmesini sağlayan alternatif bir yöntem geliştirilmiştir [38]. Bu sayede, özellikle farklı türde dişli profillerinin analizini hızlı ve analitik bir yöntem yardımıyla yapabilmek mümkün olmaktadır.

Langlois P. ve diğ. yaptıkları çalışmada, helis dişliler için, temas katılığının belirlenebilmesi (contact stiffness) için sonlu elemanlar yöntemine alternatif olabilecek, Hertz temas formülasyonunu baz alan ve bir yöntem geliştirmişlerdir [39]. Benzer şekilde Sanchez M.B. ve diğ. de çalışmalarında, her bir noktada temas esnasında yüklemelerin belirlenebildiği bir matematiksel yöntem ortaya koymuşlardır. Bu yöntemde eğilme, kesilme ve basma sonucu oluşan defleksiyonlar göz önüne alınmaktadır [40].

Tüm bunların dışında, dişli tasarımları konusunda yakın dönemde üzerinde çalışılmış ve devam etmekte olan güncel konulardan bir tanesi olarak elastik dişli modellemeleri örnek verilebilir. Bu konuda Do T. P. ve diğ. yaptıkları çalışmada, düz ve helisel dişliler için elastik çoklu cisim model analizlerini sonlu eleman analizleri ile karşılaştırmışlardır [41]. Başka bir çalışmada ise, tam elastik yaklaşım yardımıyla, beveloid dişlileri modelleyerek temas analizlerini gerçekleştirmişlerdir [42]. Sonuçlarda, klasik yaklaşımlara nazaran geliştirilen bu yöntemde,

geniş rotasyon açılarında yapılan simülasyonlara deformasyonların tamamıyla dahil edilebilmesinin mümkün olduğu ve temas analizleri için bu yöntemin daha elverişli olduğu görülmüştür. Bir başka konu ise iç dişli modellerinde yüzey iyileştirme metotlarıdır. Bu kapsamda, Chaubey S.K. ve Jain N.K., helisel ve konik dişliler için "wire spark erosion machining" (WSEM) yüzey işleme teknolojisini geliştirerek yüksek kalitede yüzeyler elde edilebildiği gösterilmiştir [43]. Ayrıca, Yang S.C. tarafından yapılan çalışmalarda, sırasıyla küresel evolvent dişli sistemlerinin matematiksel modeli tanımlanmış [44] ve beveloid iç dişli çiftinin imalat metodu ortaya konarak, temas karakteristikleri incelenmiştir [45].

2.3.KAPSAM

Tez çalışmaları esnasında üzerinde durulan temel konuları aşağıdaki şekilde sıralamak mümkündür:

1. Beveloid dişlilerin genel matematiksel modellemesi
2. Alttan kesme durumlarının incelenmesi ve bu durumları giderebilecek yöntemlerin uygulanarak yorumlanması
3. Koniklik ve helis açıları değişen heliselkonik dişlilerin temas analizleri
4. Paralel eksenlerde çalışan beveloid dişlilerin çalışma esnasında farklı dönme açılarında temas analizleri
5. Paralel eksenlerde temas hataları (transmission error) bulunan beveloid dişlilerin temas analizleri
6. Paralel eksenlerde, kavrama açıları değişen beveloid dişlilerin temas analizleri ve kök mukavemetlerinin incelenmesi
7. Teorik yöntemler yardımıyla, çakışan eksenlerde çalışan beveloid dişlilerin temas elipslerinin elde edilmesi
8. Konkav ve konveks modifikasyonlarına sahip beveloid dişlilerin modellenmesi
9. Çakışan eksenlerde çalışan konkav beveloid dişlilerin temas analizi

Burada, matematiksel modelleme sırasında MATLAB, CAD modelerinin elde edilmesi esnasında SOLIDWORKS, sonlu eleman modellerinin hazırlanması için HYPERMESH, ve analizlerin çözdürülmesi esnasında ABAQUS paket programları kullanılmıştır.

2.4.GENEL DİŞLİ SİSTEMLERİ

Dişliler, güç aktarımıyla ilgili hemen hemen tüm mekanizmalarda geniş bir şekilde kullanılan önemli bir makina elemanıdır. Çalışma esnasında dişli çiftleri, bir dişliye ait dişin ona karşılık gelen dişe teması dolayısı ile dönme hareketi ve torku, kayma olmaksızın iletebilir ve değiştirebilirler. Dişleri dairesel geometriler üzerinde yerleştirilmiş olan dişlilerde hızların ve torkların oranı sabittir, dairesel olmayan geometriler için bu oranlar değişken olabilmektedir.

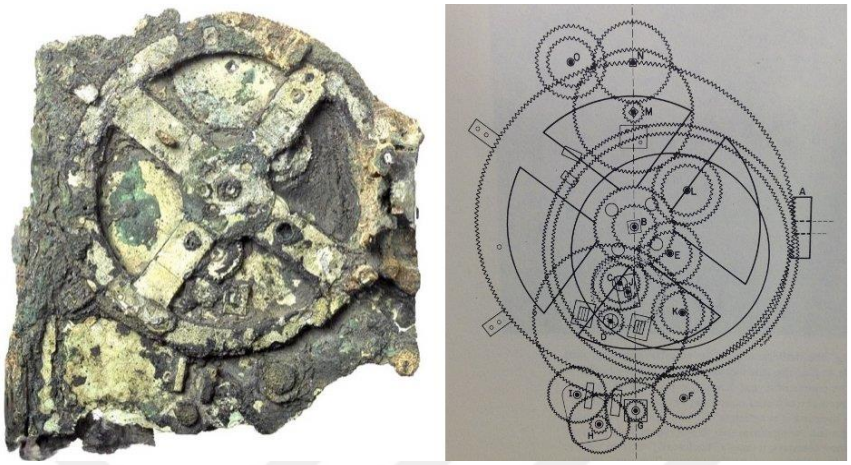
Dişli sistemlerinin ilk olarak kullanımı binlerce yıl önce Çin de üretilen eski bir pusula sistemine "South Pointing Chariot" kadar uzanmaktadır. Bu mekanizma, iki tekerlekli bir araba ve onu kullanan bir insan figürü olarak dizayn edilmiştir. İnsan figürü, mekanizma düzgün ve kaymaz bir yüzey üzerinde bulunduğu ve hareket ettiği takdirde daima güneyi göstermektedir[46]. Dişlilerin tarihte ilk olarak kullanıldığı cihazlara bir başka örnek olarak ise antik Yunanistanda takvim görevi görebilecek bir bilgisayar olarak tasarlanan Antikythera mekanizması (M.Ö. 80) gösterilebilir [47]. Antikhythera mekanizması, 30 dan fazla dişlinin bir araya gelmesi ile oluşturulmuş karmaşık bir diferansiyel dişli sistemidir.



Şekil 2. 2: South pointing chariot mekanizmasının modeli (George H. Lanchester, science museum of London)[46].

Dişliler, antik çağ boyunca pek çok pratik uygulamada Archimedes 'in modern sonsuz vida sistemlerinin ilk örnekleri olarak sayılabilecek vida sistemleri ve dişli çiftlerini içeren savaş makinelerinin (M.Ö. 250) yanı sıra İskenderiyeli Ctesibios'un, kremayer ve pinyon dişli yardımı ile çalışan su saati tasarımı (M.Ö. 300) ve İskenderiyeli Heron tarafından, paralel

eksenli dişliler ile küçük kuvvetler uygulanarak ağır yüklerin kaldırılmasını sağlayan mekanizmalarında (M.S. 60) kullanılmıştır[48,49].



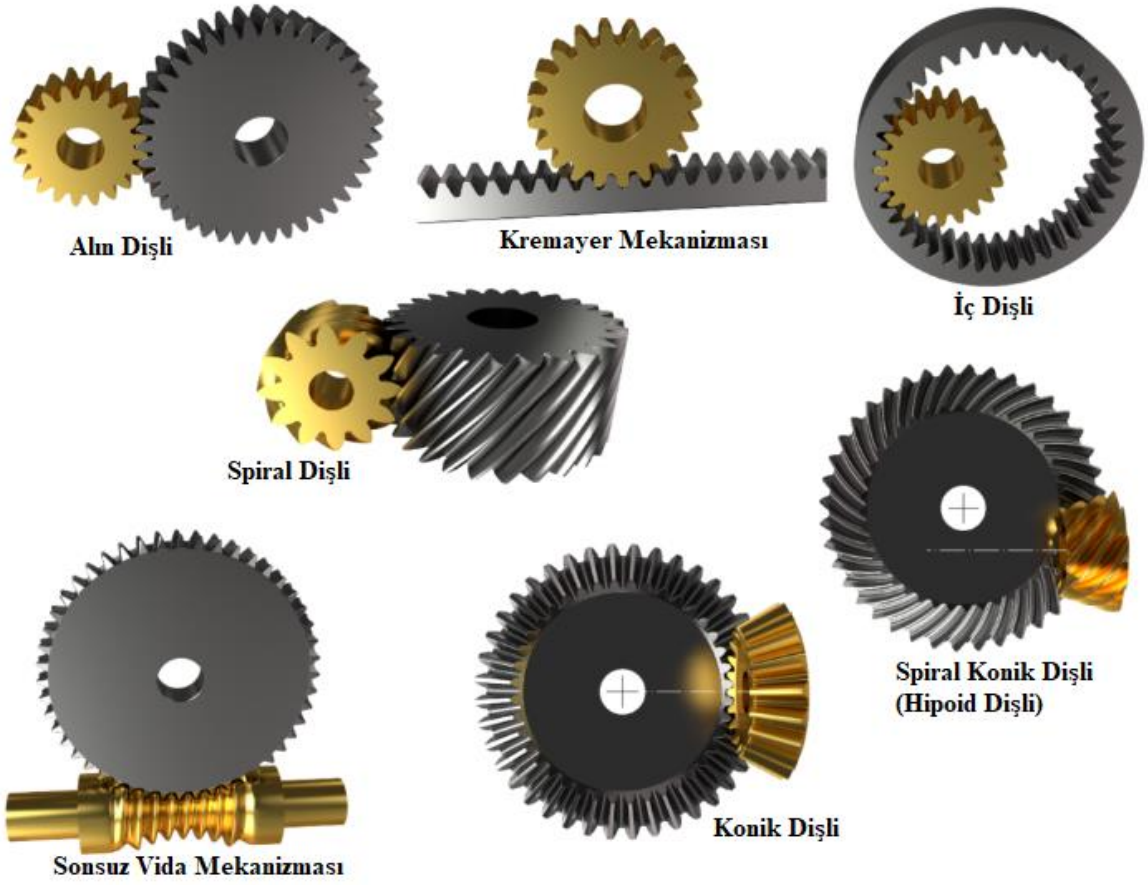
Şekil 2. 3: Antikythera mekanizması[50].

Günümüzde kullanılan dişli teorilerinin keşfi ve geliştirilmesi konusunda ise özellikle 18. ve 19. yüzyılda yapılan çalışmalar öncü olmuş, daha sonra bu teorik esaslar, üretim sektöründe pekçok uygulamada ve tasarımlarda kullanılmıştır.

Dişli çark teorisi (theory of gearing) diferansiyel geometri, üretim, dizayn, metroloji ve bilgisayar destekli araştırma metotları ile ilişkili bir bilim dalıdır. Dişli çark teorisinin ilk kurucuları Olivier ve Guchman, dişli çark teorisini projektif ve analitik geometri ile ilişkilendirmişlerdir. Daha sonra, dişli teknolojisindeki gelişmeler ve bilgisayar uygulamaları ile birlikte, araştırmacılar bu teorileri modern dişli çark teorisine modifiye etmişler, metodolojisini ve endüstriyel alandaki uygulamalarını genişletmişlerdir. Dişli çark teorisinin ele almış olduğu en büyük problemlerden biri düzlemsel ve 3 boyutlu uzaylarda dişli profilleri ve yüzeylerinin eşlenik çalışmasıdır. Bu konuyla ilgili olarak, De la Hire, Poncelet ve Camus sikloid dişliler konusunda önemli çalışmalar yapmışlar, Euler ise, matematik ve mekanik alanlarında yapmış olduğu muazzam katkıların yanı sıra daha sonradan endüstride çok geniş bir uygulama alanı bulan evolvent dişli profilerini ortaya koymuştur[51].

Günümüzde kullanılan dişli türleri, üzerinde çalıştıkları eksenlerin birbirine olan konumu ve dişlerin mil eksenlerine göre konumlarına göre değişiklik göstermektedir. Uygulamada en sık kullanılan dişli türleri şekil (2.4) de gösterilmiştir.

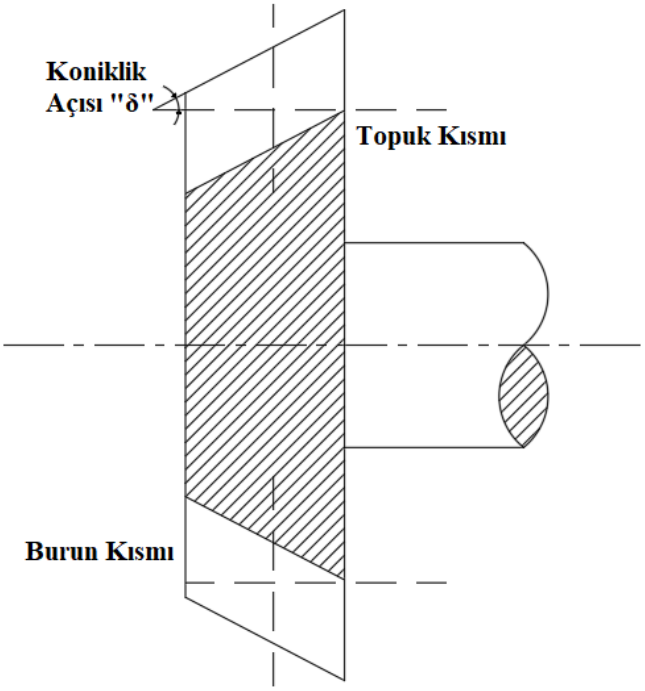
Burada en fazla kullanılan 3 temel türün alın dişliler, konik dişliler, helis dişliler olduğu söylenebilir. Paralel millerin birbirlerine bağlanmasında kullanılan dişli çarklar alın dişli çarklar olarak adlandırılırken, eksenleri aynı düzlemde olan fakat kesişen dişliler konik dişli çarklar, dişlerinin yönü çark eksenine göre eğik olan dişliler ise helis dişlilerdir. Dişli türleri bu 3 temel tipten farklı olarak helisel konik, kremayer, iç dişliler, ok dişli ve sonsuz vida mekanizmaları şeklinde de olabilir.



Şekil 2. 4: Dişli türleri[52].

2.5.BEVELOİD DİŞLİLER

Literatürdeki çalışmalarda beveloid dişliler olarak adlandırılan evolvent profilli konik dişliler ise, hali hazırda çok geniş bir uygulama alanına sahiptir. Genel anlamda beveloid dişlilerin evolvent dişlilerin genelleştirilmiş modeli olduğu söylenebilir. Bu türdeki dişlilerin profillerinde, diş genişliği boyunca lineer olarak değişen profil kaydırma vardır ve diş modülü, derinlik boyunca sabit kalmaktadır. Koni açısı nedeniyle alttan kesme ve sivri tepe gibi durumların oluşmasını önleyebilmek amacıyla dizaynlarında diş genişliği sınırlı tutulmaktadır. Beveloid dişlilerin geometrisinde görülen bir diğer farklılık ise helisel beveloid dişlilerde alın kesitte asimetrik profil oluşmasıdır. Şekil(2.5) de bir beveloid dişli örneğinin yandan görünüşü verilmiştir.



Şekil 2. 5: Beveloid dişli modelinin yandan görünüşü.

Beveloid dişliler, paralel eksenlerin yanı sıra kesişen veya aykırı eksenlerde de çalışabilirler. Başka bir önemli özellikleri ise yan boşluk (backlash) ayarlamalarına uygun olmalarıdır. Konik evolvent profilli dişlilerin kullanım alanlarına örnek olarak, özel otomobil şanzımanları, redüktörler ve yat şanzımanları ve robotikte kullanılan dişli sistemleri verilebilir.

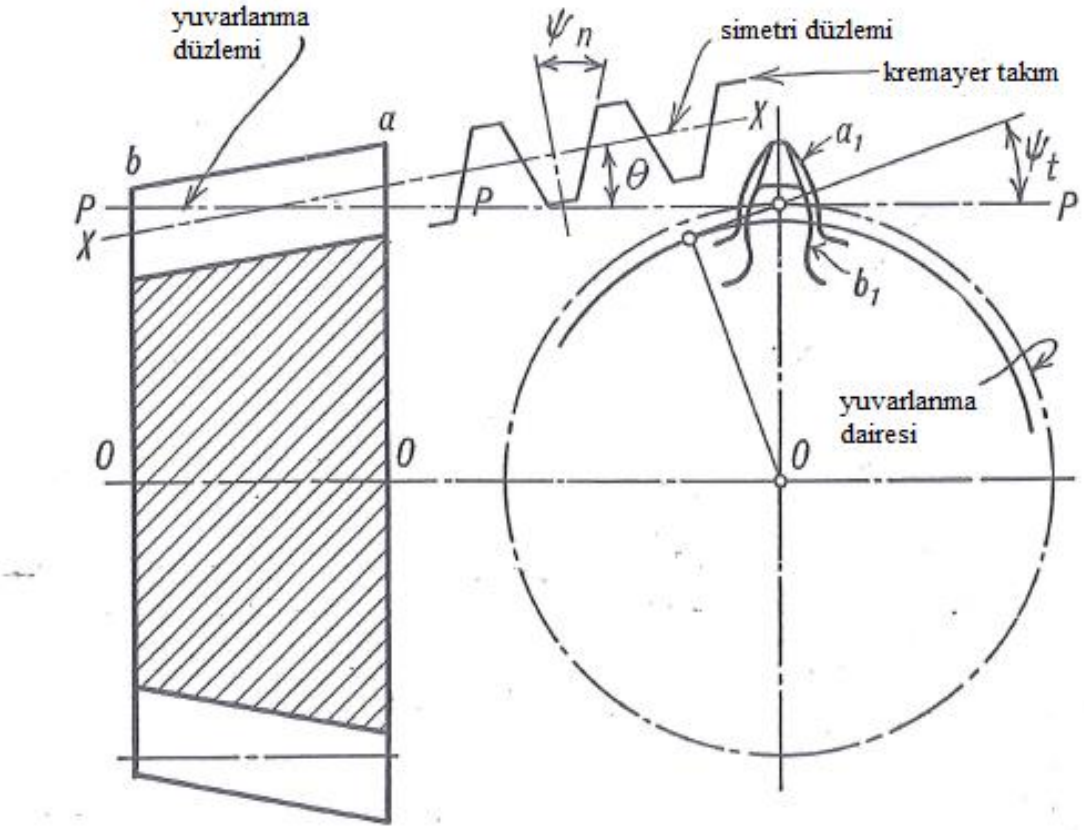
Bundan sonraki kısımda, beveloid dişli profillerinin matematiksel modeli, dişliyi oluşturan kremayer takımdan hareketle oluşturulmuş ve işlem aşamaları açıklanmıştır. Burada temel

amaç, bilgisayar destekli simülasyonların oluşturulabilmesi amacıyla, CAD modellerinin 2 boyutlu profiller yardımıyla elde edilebilmesidir.

2.6.BEVELOİD DİŞLİLERDE DİŞ YÜZEYLERİNİN MATEMATİKSEL MODELLENMESİ

2.6.1. Kremayer Takımın Matematiksel Modeli

Merritt' in dişli oluşturma konseptine göre, dişli profilleri, dişliyi oluşturduğu düşünülen kremayer takımın geometrisinden hareketle elde edilmektedirler. Şekil (2.6) da bu yöntemle oluşturulan evolvent profilli bir konik dişli görülmektedir.



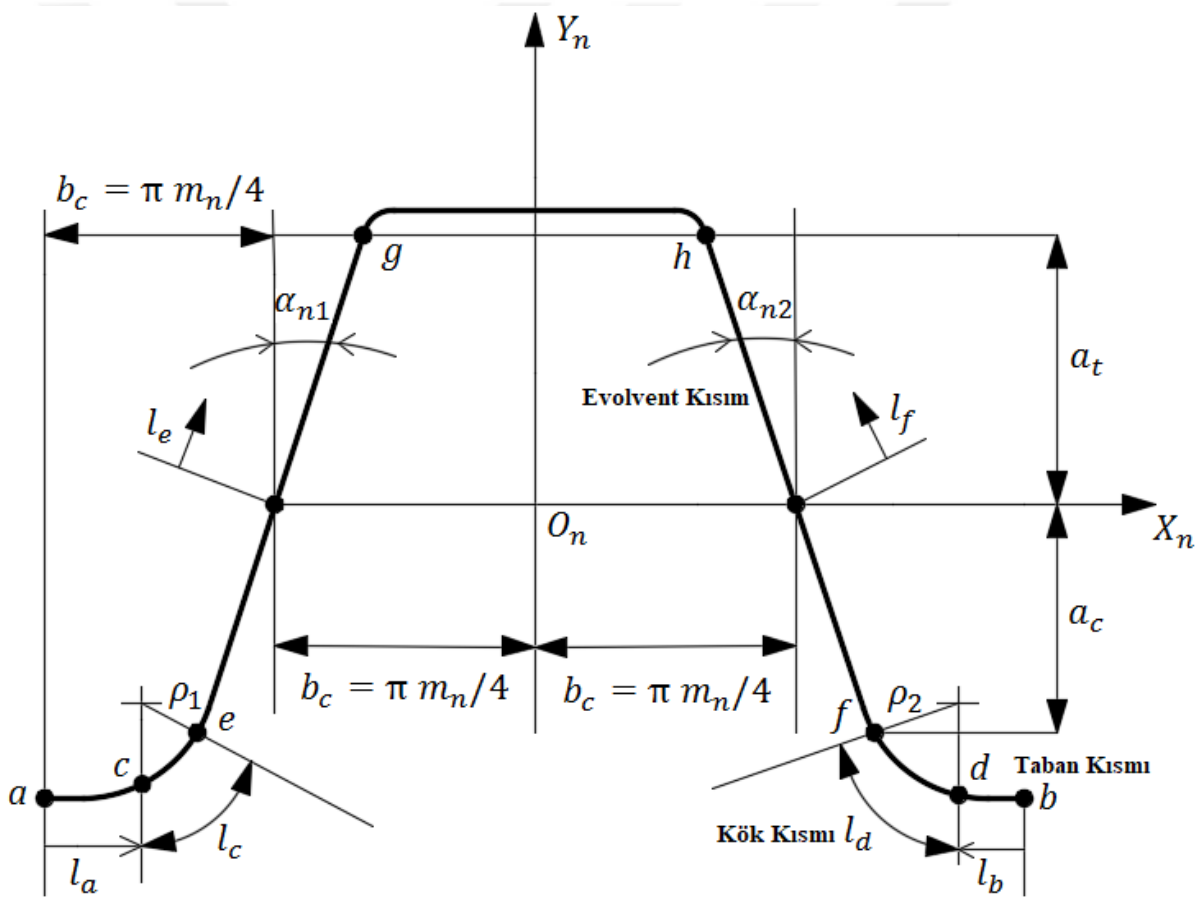
Şekil 2. 6: Evolvent konik dişlilerin imalatı[53].

Bu işlem esnasında, kremayer takıma ait taksimat düzlemi ile dişlinin dönme ekseni koniklik açısına eşit bir açı oluşturacak şekilde çakışmaktadır[53]. Burada "θ" koniklik açısını, "ψ_n"

ve "ψ_t" ise sırasıyla, normal ve transvers kesitlerdeki kavrama açılarını göstermektedir. "XX" ekseni kremayer takımın simetri düzlemi, "PP" ise dişliye ait yuvarlanma düzlemidir.

Bu yöntemden hareketle, dişli profilini oluşturacak kremayer takım, genel koordinat sistemi $S_n(X_n, Y_n, Z_n)$ olacak şekilde, kartezyen sisteme uygun olarak, şekil (2.7) de gösterilmiştir. Burada, temel büyüklüklerden a_c ve b_c, dişbaşı yüksekliği ve diş kalınlığının yarısını, m_n normal modülü, α_{n1} ve α_{n2} ise, normal kavrama açılarını ifade etmektedir.

Kremayer üzerindeki $\overline{fh}$ ve $\overline{eg}$ bölgeleri dişli profiline ait evolvent kısımları, $\overline{df}$ ve $\overline{ce}$ bölgeleri kök kısımlarını, $\overline{bd}$ ve $\overline{ac}$ ise taban kısımlarını oluşturmaktadır.



Şekil 2. 7: Kremayer takım geometrisinin normal kesitteki görünümü.

Bu bölgelerin matematiksel ifadelerini ise sırasıyla;

$$R_n^{fh} = \begin{bmatrix} x_n^{fh} \\ y_n^{fh} \\ z_n^{fh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_c - l_f \sin(\alpha_{n1}) + c_y \pi m_n \\ l_f \cos(\alpha_{n1}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$R_n^{eg} = \begin{bmatrix} x_n^{eg} \\ y_n^{eg} \\ z_n^{eg} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_c + l_e \, sin(\alpha_{n2}) + c_y \pi m_n \\ l_e \, cos(\alpha_{n2}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$R_n^{df} = \begin{bmatrix} x_n^{df} \\ y_n^{df} \\ z_n^{df} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_c + a_c \tan(\alpha_{n1}) + \rho_1 cos(\alpha_{n1}) - \rho_1 sin(l_d) + c_y \pi m_n \\ -a_c + \rho_1 sin(\alpha_{n1}) - \rho_1 cos(l_d) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$R_n^{ce} = \begin{bmatrix} x_n^{ce} \\ y_n^{ce} \\ z_n^{ce} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_c - a_c \tan(\alpha_{n2}) - \rho_2 cos(\alpha_{n2}) + \rho_2 sin(l_c) + c_y \pi m_n \\ -a_c + \rho_2 sin(\alpha_{n2}) - \rho_2 cos(l_c) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$R_n^{bd} = \begin{bmatrix} x_n^{bd} \\ y_n^{bd} \\ z_n^{bd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi m_n}{2} - l_b + c_y \pi m_n \\ -a_c + \rho_1 sin(a_{n1}) - \rho_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$R_n^{ac} = \begin{bmatrix} x_n^{ac} \\ y_n^{ac} \\ z_n^{ac} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\pi m_n}{2} + l_a + c_y \pi m_n \\ -a_c + \rho_2 sin(a_{n2}) - \rho_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

olarak belirtmek mümkündür, eşitliklerde görülen ρ_1 ve ρ_2 parametreleri kök eğrilik yarıçaplarını ifade etmektedir [9,26].

Burada verilen dizayn parametreleri l_e ve l_f;

$$-a_c/\cos(\alpha_{n1}) \leq l_e \leq a_t/\cos(\alpha_{n1}) \quad (2.7)$$

$$-a_c/\cos(\alpha_{n2}) \leq l_f \leq a_t/\cos(\alpha_{n2}) \quad (2.8)$$

aralıklarında tanımlıdır. c_y değeri ise imal edilen dişli çark ve kremayer takımın istenen diş sayısında gösterilebilmesi amacıyla, 0,1,2… olarak seçilebilecek bir büyüklüktür.

Benzer şekilde l_c ve l_d parametrelerinin;

$$0 \leq l_c \leq 90^\circ - \alpha_{n1} \quad (2.9)$$

$$0 \leq l_d \leq 90^{\circ} - \alpha_{n2} \tag{2.10}$$

aralıklarında, l_a ve l_b nin ise;

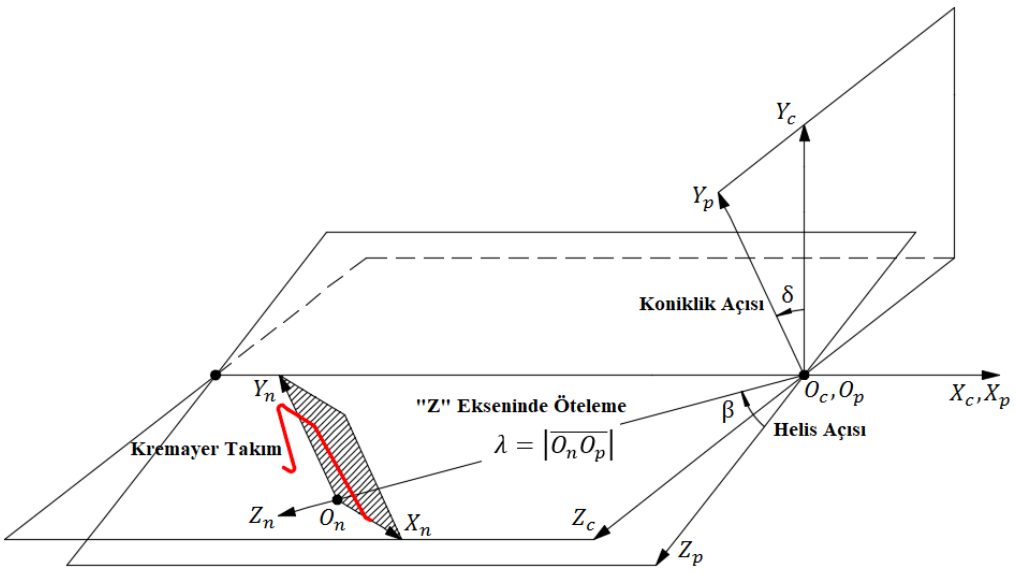
$$0 \leq l_a \leq b_c - a_c \tan(\alpha_{n1}) - \rho_1 \cos(a_{n1}) \tag{2.11}$$

$$0 \leq l_b \leq b_c - a_c \tan(\alpha_{n2}) - \rho_2 \cos(a_{n2}) \tag{2.12}$$

aralıklarında değiştiklerini belirtmek mümkün olacaktır.

Sırasıyla, kremayer takım ile elde edilecek olan dişli çarka ait koordinat sistemleri $S_n(X_n, Y_n, Z_n)$ ve $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$ arasında tanımlı dönüşümler vasıtası ile koniklik ve helislik açılarından kaynaklı dönmeler sonucu, kremayer takımda oluşan yer değiştirmeler ifade edilebilmektedir.

Koniklik ve helislik açılarının tanımlanması sonucu, 2 boyutlu diş profillerinde meydana gelen değişimleri görebilmek amacıyla normal kesit yerine takım geometrisi, alın kesit üzerinde tanımlanmaktadır. Takım geometrisi ve sabit koordinat sistemi $S_c(X_c, Y_c, Z_c)$ arasında meydana gelen dönüşümler şekil (2.8) de gösterilmiştir. Burada, "z" ekseninde tanımlı herhangi bir diş derinliği için, 2 boyutlu profiller, alın kesit üzerinde "λ" parametresi yardımı ile elde edilebilmektedir.



Şekil 2. 8: S_n ve **S_c** koordinat sistemleri arasındaki ilişki.

Koniklik ve helisliği ifade eden açılar sırasıyla "δ" ve "β" sembolleriyle gösterilmiştir.

Dönüşüm matrislerini ise;

$$\mathrm{M_{cp}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\delta) & -\sin(\delta) & 0 \\ 0 & \sin(\delta) & \cos(\delta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

$$\mathrm{M_{pn}} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) & \lambda\sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) & -\lambda\cos(\beta) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

olarak tanımlamak mümkündür.

Bu sayede, $S_n(X_n, Y_n, Z_n)$ ve $S_c(X_c, Y_c, Z_c)$ koordinat sistemleri arasındaki dönüşüm matrisi M_{cn}, M_{cp} ve M_{pn} matrislerinin çarpımları ile;

$$\mathrm{M_{cn}} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) & \lambda\sin(\beta) \\ -\sin(\beta)\sin(\delta) & \cos(\delta) & -\cos(\beta)\sin(\delta) & \lambda\cos(\beta)\sin(\delta) \\ \cos(\delta)\sin(\beta) & \sin(\delta) & \cos(\beta)\cos(\delta) & -\lambda\cos(\beta)\cos(\delta) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

olarak elde edilecektir.

Kremayer takımın konum vektörü R_c^i ise (2.16) eşitliği yardımıyla;

$$R_c^i = [M_{cn}]R_n^i \tag{2.16}$$

olarak hesaplanabilmektedir. Bu vektörün x,y, ve z eksenlerindeki bileşenleri ise açık ifade ile;

$$\begin{aligned} x_c^i &= x_n^i cos(\beta) + \lambda\, sin(\beta) \\ y_c^i &= y_n^i cos(\delta) + \lambda\cos(\beta)\sin(\delta) - x_n^i\sin(\delta)\sin(\beta) \\ z_c^i &= y_n^i sin(\delta) - \lambda\cos(\beta)\cos(\delta) + x_n^i\cos(\delta)\sin(\beta) \end{aligned} \tag{2.17}$$

olacaktır. Bu eşitliklerde, z_c^i , "z" ekseni üzerinde keyfi olarak seçilmiş bir noktayı ifade etmektedir.

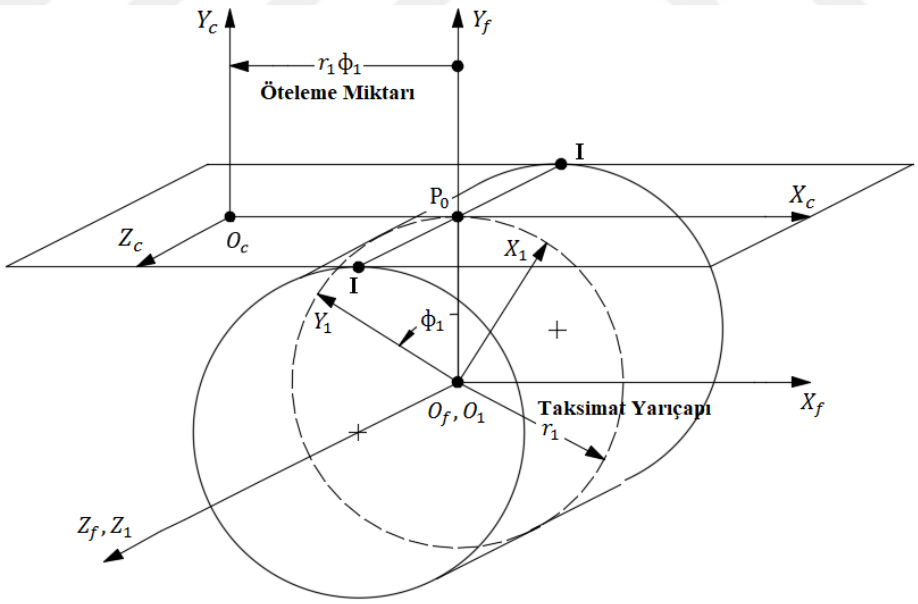
Kesici takım yüzeyinin normalleri, diferansiyel geometri esasları yardımıyla, denklem (2.18) de ifade edilen şekilde;

$$n_c^i = \frac{\frac{\partial R_c^i}{\partial l_j} \times \frac{\partial R_c^i}{\partial \lambda}}{\left| \frac{\partial R_c^i}{\partial l_j} \times \frac{\partial R_c^i}{\partial \lambda} \right|} \tag{2.18}$$

olarak elde edilebilirler[8,26]. Burada (i= ac,…..,fh) ve (j = a,…..,f) aralıklarında değişen indislerdir.

2.6.2. Dişli Çarkın Modellenme Prosesi

Kremayer takım ve dişli çarka ait koordinat sistemleri sırasıyla; $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$, $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$ olmak üzere, modelleme esnasında taksimat yarıçapı r_1 olan dişli taslağı, $S_c(X_c, Y_c, Z_c)$ sabit koordinat sistemine göre, ϕ_1 açısı kadar dönmekte ve yuvarlanma noktası P_0 dan, $r_1\phi_1$ uzunluğu kadar ötelenmektedir. Bu yuvarlanma aşaması şekil (2.9) da ayrıntılı olarak gösterilmiştir.



Şekil 2. 9: Dişli çark ve kremayer takım koordinatları arasındaki ilişki.

Bu aşamalar incelendiğinde, kremayer ve dişli çark koordinatları arasındaki dönüşüm matrisini;

$$M_{1c} = \begin{bmatrix} \cos(\phi_1) & \sin(\phi_1) & 0 & r_1(\sin(\phi_1) - \phi_1\cos(\phi_1)) \\ -\sin(\phi_1) & \cos(\phi_1) & 0 & r_1(\cos(\phi_1) + \phi_1\sin(\phi_1)) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

Olarak yazmak mümkün olacaktır. Dönüşüm matrislerinin konum vektörleri ile çarpılması sonucu, oluşturulan dişli çark profilini ifade eden koordinatlar, dişli çarka ait S_1 koordinat sisteminde, denklem (2.20) de görüldüğü şekilde elde edilebilecektir[26].

$$R_1^i = [M_{1c}]R_c^i \tag{2.20}$$

Bu eşitlikte "i", (i=ac…….fh) aralığında değişen bir indistir.

Dişli ana kanununda belirtildiği üzere, temas yüzeylerinin ortak normalleri, ani dönme ekseninden (I-I) geçmektedir. Bu esasa dayanarak eş çalışma denklemi eşitlik (2.21) de verilmiştir[26].

$$\frac{X_c^i - x_c^i}{n_{xc}^i} = \frac{Y_c^i - y_c^i}{n_{yc}^i} = \frac{Z_c^i - z_c^i}{n_{zc}^i} \tag{2.21}$$

Dolayısı ile yuvarlanma açısı ϕ_1, ani dönme ekseni üzerinde keyfi bir noktanın koordinatları, X_c^i, Y_c^i ve Z_c^i ve yüzey birim normaline ait doğrultman kosinüsleri n_{xc}^i, n_{yc}^i ve n_{zc}^i ise n_c^i, olmak üzere, denklem (2.22) de ifade edildiği şekilde;

$$\phi_1 = \frac{(y_c^i n_{xc}^i - x_c^i n_{yc}^i)}{r_1^i n_{xc}^i} \tag{2.22}$$

olarak hesaplanabilecektir.

Önceki kısımlarda belirtildiği üzere, 2 boyutlu diş profillerinin "z" ekseni üzerinde seçilen keyfi noktalar için elde edilebilmesi S_n ve S_c koordinat sistemleri arasındaki ötelemeyi ifade eden, "λ" parametresi yardımı ile yapılabilmektedir[54]. Eşitlik (2.23) de "λ" parametresinin açık ifadesi verilmiştir.

$$\lambda = \frac{(z_i + y_n^i \sin(\delta) + x_n^i \cos(\delta)\sin(\beta))}{\cos(\beta)\cos(\delta)} \tag{2.23}$$

Evolvent profilli helisel konik dişlilerde, dönme düzleminde dişli profilleri asimetrik bir şekil almaktadır. Bu durumda kavrama açıları;

$$\alpha_{t1} = tan^{-1}\left(\frac{cos\alpha_{n1}sin\beta sin\delta + sin\alpha_{n1}cos\delta}{cos\alpha_{n1}cos\beta}\right)$$

(2.24)

$$\alpha_{t2} = tan^{-1}\left(\frac{-cos\alpha_{n2}sin\beta sin\delta + sin\alpha_{n2}cos\delta}{cos\alpha_{n2}cos\beta}\right)$$

eşitliği yardımıyla hesaplanabilecektir.

Böylece, x_i y_i ve z_i koordinatları yüzey üzerindeki noktaları ifade etmek üzere, S_i koordinat sisteminde dişli çark profillerinin elde edilmesi mümkün olacaktır. Dişli profillerinin düşey eksendeki sınırlarını belirleyen, dişbaşı ve dişdibi daireleri ise R" taksimat dairesi yarıçapını göstermek üzere, denklem(2.25) ve (2.26) da görüldüğü şekilde tanımlanabilirler[8].

$$r_1 = z_b \tan(\delta) + R + (m_n/\cos(\delta)) \quad (2.25)$$

$$r_2 = z_b\, tan(\delta) + R - (1.25m_n/cos(\delta)) \quad (2.26)$$

2.7. SONLU ELEMANLAR METODU (FINITE ELEMENT METHOD)

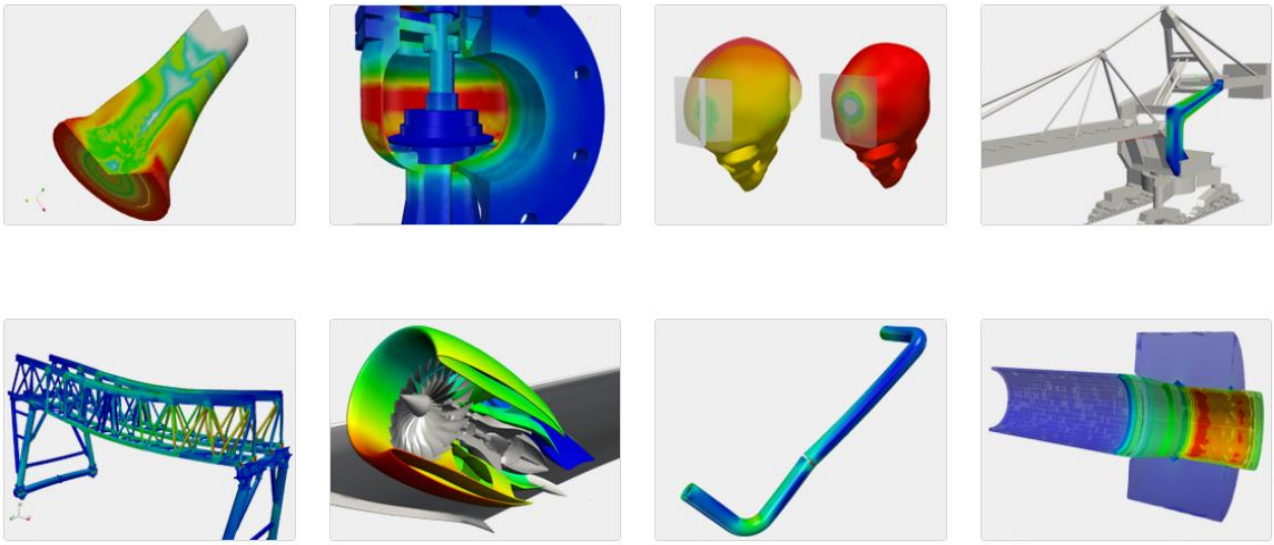
Fiziksel prensiplerin uygulama alanları, kütle dengesi, enerjinin korunumu, ve dengesi v.b. gibi pek çok mühendislik analizindeki durumları doğal olarak diferansiyel denklemlere yöneltmektedir. Farklı türlerde diferansiyel denklemlerin kesin çözümlerini elde edebilmek amacıyla pek çok metot geliştirilmiştir. Ancak bu metotlar pek çok pratik problemin çözümünde, kurucu diferansiyel eşitliklerin çözülebilir türden olmayışı veya karmaşık geometrilerin var olması sebebiyle yetersiz kalabilmektedirler. 2 yada 3 boyutlu bölgeler üzerinde tanımlanmış sınır koşullarını sağlayan analitik çözümleri bulabilmek çok zor bir görev haline gelmiştir. Bu sebeple nümerik metotlar, mühendisliğin her dalı için pratik problemlerin çözümünde geniş çapta kullanılmaktadır.

Sonlu elemanlar metodu, normal ve kısmi diferansiyel denklemler için yaklaşık sonuçlar elde edilmesini sağlayan metotlardan biridir. Özellikle karmaşık geometriler üzerinde tanımlı sınır koşulları ile çalışılması durumunda güçlü bir metot olduğu görülmektedir. "Finite Difference" veya "Boundary Element" metotları, belirli tür problemler için sonlu elemanlar metodu (Finite

Element Method) ile rekabet edebilir ve hatta daha güçlü olabilirler ancak, farklı türlerde pek çok bölge (alan, yüzey, geometri) üzerinde çözüm elde edebilme esnekliği ve bilgisayar destekli programlara uygulanabilirliği sebebiyle sonlu elemanlar metodu, geçtiğimiz yıllar boyunca pek çok pratik problemin çözümünde tercih edilen bir yöntem haline gelmiştir.

Modern sonlu elemanlar metodunun orijini, bir takım araştırmacıların, sürekli ortamları "elastik continua" yaklaşık olarak ayrık elastik çubuklar " bar" ile modelledikleri 1900 lü yılların başlarına kadar uzanmaktadır. Ancak uygulamalı matematikçi Courant'ın (1943), 1940 lı yılların başında yayınlanan bir makalesi dolayısı ile sonlu elemanlar metodunu ilk geliştiren kişi olduğu kabul edilmektedir. Courant, bu çalışmasında, torsiyon problemlerini, üçgensel alt kısımlar üzerinde "piecewise polynomial" yöntemi kullanarak incelemiştir. Ayrıca fizikçi J. L. Synge ve mühendisler J. H. Argyris and S. Kelsey tarafından yapılan çalışmalar sonlu elemanlar yönteminin ilk kulanıldığı araştırmalara örnek verilebilir[56,57].

Sonlu elemanlar yönteminin kullanımında bir sonraki önemli adım ise, 1950 yılında Boeing tarafından, Uçak kanatlarının modellenmesinde üçgensel "triangular" stress elemanlarının kullanımıyla atılmış ve pek çok araştırmacı tarafından takip edilmiştir. 1960 yılında ise Clough tarafından "Sonlu Elemanlar Metodu" terimi kullanılarak popüler hale gelmiştir. 60 lı yıllar boyunca, araştırmacılar sonlu elemanlar yöntemini, ısı transferi, seepage akışı v.b. mühendisliğin pek çok farklı alanında uygulamış, tamamıyla sonlu elemanlar hakkında olan ilk kitap ise Zienkiewicz and Y. K. Cheung tarafından 1967 de yazılmıştır [55,56,57].



Şekil 2. 10: Sonlu elemanlar yöntemi ile yapılan çalışma örnekleri[57].

2.7.1. Matematiksel Temeller

Matematiksel yaklaşıma göre, Sonlu elemanlar metodu, diferansiyel denklemlerin yaklaşık sonuçlarını bulmada Galerkin ve Rayleigh Ritz metotlarının özel bir hali olarak düşünülebilir. Bu iki metotta da kurucu diferansiyel denklemler, eşdeğer integral formlarına getirilmektedir. Rayleigh Ritz metodu varyasyon hesabı kullanarak, çözülmekte olan problemi tanımlayan bir eşdeğer varyasyon veya enerji fonksiyonu tanımlamaktadır. Galerkin metodu ise, daha doğrudan bir yaklaşımı benimsemektedir. Bu amaçla, bir veya iki bilinmeyen parametresi bulunan bir yaklaşık çözüm seçer. Genellikle bu yaklaşık çözüm, çözülmek istenen diferansiyel denklemi tam olarak sağlamamaktadır. Burada, integral formu, hatanın çözüm alanı üzerinde integrali alınarak elde edilen artık (residual) fonksiyonu temsil etmektedir. Hatayı minimalize eden bir kriteri kullanarak, bilinmeyen parametreleri bulmaktadır.

Ayrıca diğer benzer metotlara örnek olarak;

Least squares method.

Collocation method.

Subdomain metotlarını verebilmek mümkündür.

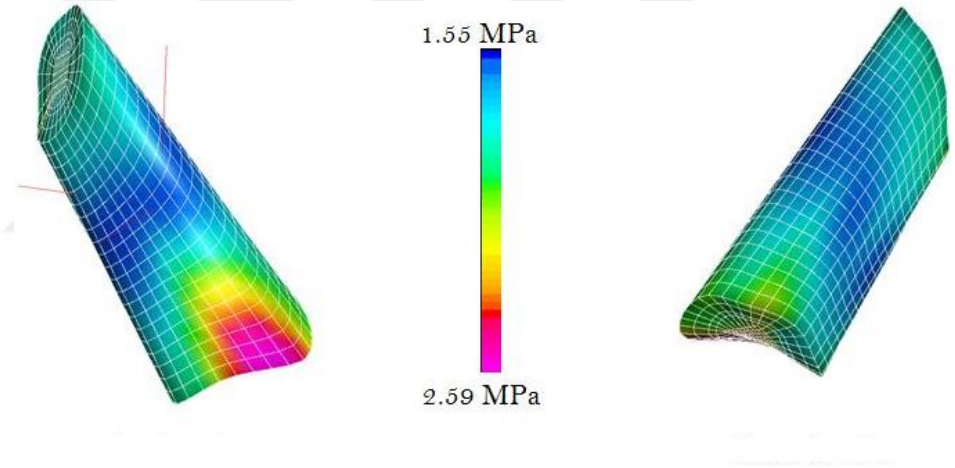
Belirlenen bir problemin sonlu elemanlar yöntemi ile çözümü şu adımları içermektedir.

3. Eleman denklemlerinin oluşturulması
4. Çözüm alanının (solution domain) sonlu eleman ağlarına bölünmesi
5. Eleman denklemlerinin birleştirilmesi
6. Sınır koşullarının tanımlanması
7. Nodal bilinmeyenler için çözümler.

Her elemanda ilgili büyüklükler ve sonuçların hesaplanması [57]

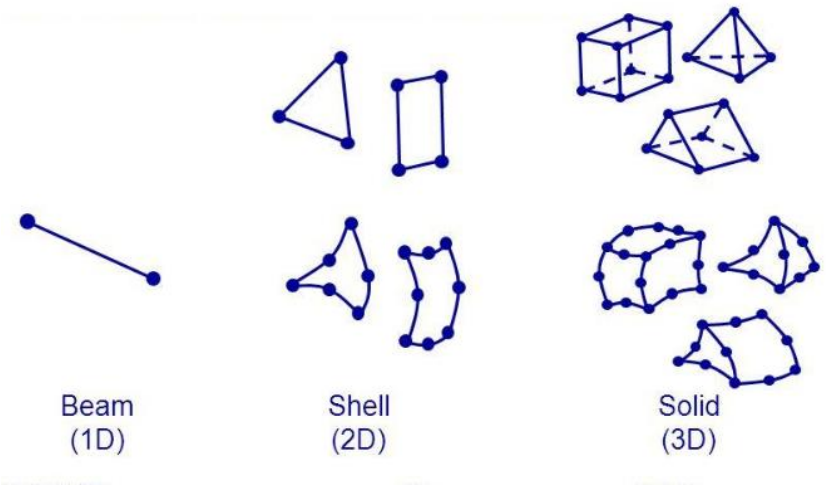
$$[K]\{u\} = \{F\} \tag{2.27}$$

Formülü yardımı ile mümkün olabilecektir. Burada, [K] malzeme özellikleri, cisim geometrisi ve tanımlanan elemanların özellikleri vasıtası ile belirlenen katılık matrisini,{u}, yer değiştirme vektörünü, {F} ise, elemanlara etkiyen kuvvet vektörünü ifade etmektedir.



Şekil 2. 11: Sonlu elemanlar modeli yardımı ile yapılan bir analiz[59].

Bir elemanın geometrisi, o elemana ait kurucu diferansiyel denklemlerin türleri ile ilişkilidir. 1 boyutlu adi diferansiyel denklemler ile tanımlanan problemler için eleman geometrileri, düz bir çizgi veya eğri şeklindedir. 2 boyutlu kısmi diferansiyel denklemler ile tanımlanan problemler için eleman geometrileri ise genellikle üçgensel "triangular" yada dörtgensel "quadrilateral" olacaktır. Elemanların kenarları düz veya eğimli olabilir. Eğri şeklinde kenarlara sahip olan elemanlar karmaşık geometrilerin modellenmesinde kullanılmaya elverişlidirler. 3 boyutlu problemler ise "tetrahedral" veya "solid brick" türlerinde elemanların kullanımını gerektirmektedir.



Şekil 2. 12: Sonlu eleman türleri[60].

Elemanlara ait eşitlikler, fiziksel parametreler ile kurucu diferansiyel denklemler arasında bir ilişki meydana getirmektedir. Bir problemdeki tüm elemanlara ait olan toplam denklemlerin sayısı çok büyük olabileceğinden, eleman denklemleri matris formunda ifade edilmektedir. Hesaplamalar iki adımda gerçekleştirilmektedir. İlk adımda, problemdeki tüm elemanları temsil eden tipik bir eleman için eleman matrisleri elde edilir. Hesaplamalar sembolik olarak, nümerik değerler kullanılmadan yapılmaktadır. Amaç, eleman matrisleri için , daha sonra aynı "class" a ait tüm nümerik problemlerde kullanılabilecek, genel formüller elde edebilmektir. İkinci adımda ise her bir elemana ait spesifik nümerik matrislerin yazılmasında bu genel formüllerin kullanılmasıdır.

Galerkin ve Rayleigh Ritz metotları sınır değer problemlerinin çözümleri için çok güçlü birer yöntemdir. Gerçek çözüm için elde edilen yakınsama, yaklaşık çözüm için varsayılan fonksiyona bağlıdır. Ancak bu varsayımın mümkün olduğunca doğru olarak yapılabilmesi için yararlanılabilecek prensip, özellikle 2 ve 3 boyutlu sistemler için bulunmamaktadır. Ayrıca bu varsayımsal çözümlerin belirli sınır koşullarını sağlamaları gerekmektedir ve çözümün tüm çözüm alanı üzerinde tanımlı olmasından dolayı sonucun doğruluğu açısından çok fazla sayıda terimin kulalnılması söz konusu olmaktadır.

Sonlu elemanlar metodu bu tür zorlukların üztesinden gelebilmeyi iki ana temel konsept yardımı ile mümkün kılmaktadır.

1) Çözüm alanı çok sayıda basit elemana bölünmektedir.

$$\int_0^1 (\dots)\, dx = \int_{x_1=0}^{x_2} (\dots)\, dx + \int_{x_2}^{x_3} (\dots)\, dx + \cdots \tag{2.28}$$

2) Klasik metotlarda varsayılan çözüm olarak belirlenen fonksiyonda, katsayılar fiziksel bir anlam taşımamakta, yalnızca matematiksel terimler olarak belirlenmektedir. Sonlu elemanlar metodunda ise polinomdaki katsayılar, elemanlar üzerinde belirli noktalarda bilinmeyen çözümler cinsinden tanımlanmışlardır. Bu çözümlerin tanımlı olduğu noktalar "düğüm noktaları" (nodlar) olarak isimlendirilirler[57].

2.7.2. Abaqus/Standard Çalışma Prensibi

Abaqus programında bir analizin tanımlanması;

1) Problemin kademelere (step) ayrılması,
2) Her bir kademe için, analiz yönteminin belirlenmesi,
3) Her bir kademe için yüklerin, sınır koşullarının ve istenilen sonuç türlerinin belirlenmesi aşamalarını içermektedir.

2.7.2.1. Problemin Kademelere Ayrılması (Step Definition).

Abaqus programının temel prensibi çözülecek problemin kademelere ayrılmasıdır. Bu kademeler, dinamik veya termal değişkenlik, sürünme davranışı v.b. olabilir.

2.7.2.2. Analiz Yöntemlerinin Belirlenmesi

Her bir kademe için seçilmesi gereken analiz yöntemleri:
Statik gerilme analizi
Dinamik gerilme analizi
Zamana bağlı ısı transferi
Elastik burkulma v.b. olabilir.

2.7.2.3. Sınır Koşulları

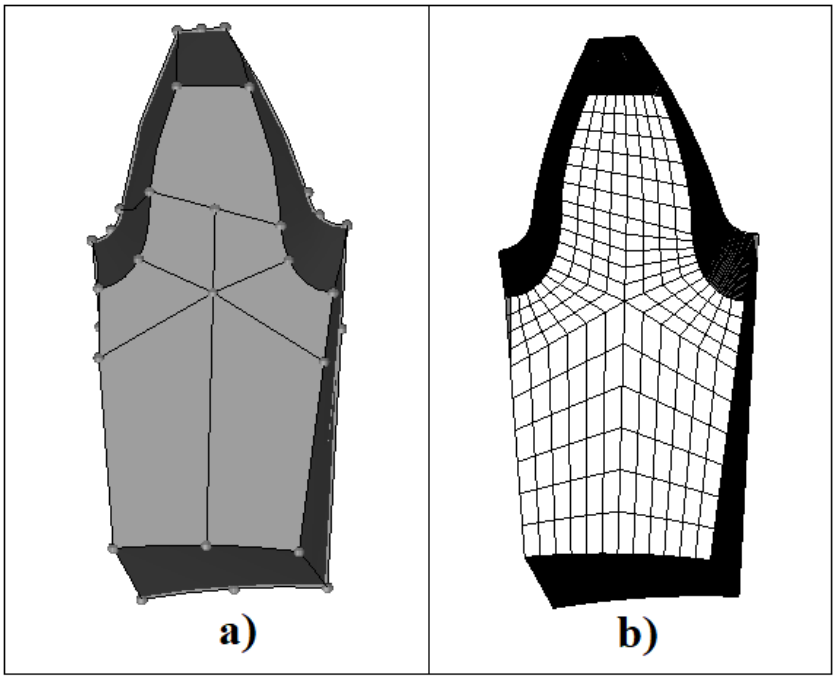
Problemin sınır koşulları analiz dahilinde her kademe için tanımlanmalıdır. Sınır koşullarının zamana bağlı değişimleri kullanıcı tarafından tanımlanmadığında, program tarafından tanımlandıkları kademenin başlangıcında ani olarak uygulandıkları varsayılacaktır.

2.7.2.4. Çözüm ve Sonuçlar

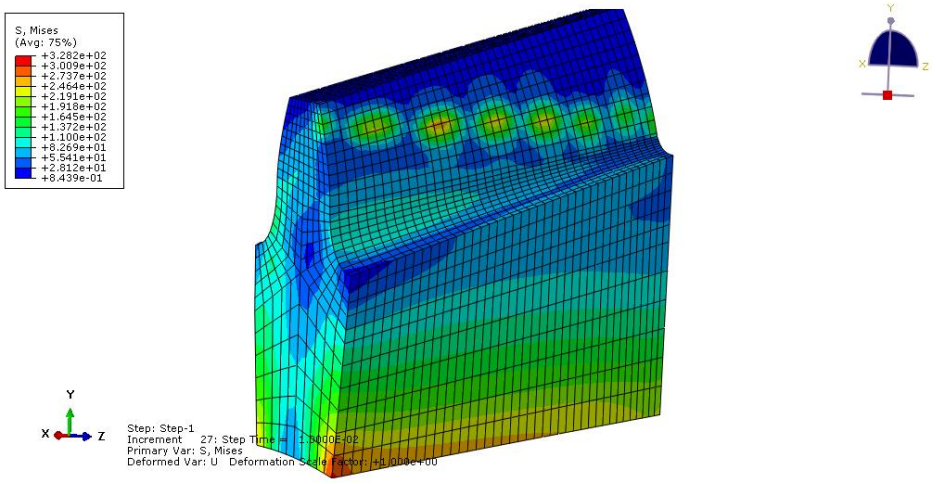
Abaqus/Standard, nonlineer problemlerin çözümü için Newton metodunu, lineer problemler için ise stiffness yöntemini kullanmaktadır. Her iki metot için de katılık matrisi (stiffness matrix) kullanılması gerekmektedir. Bazı problemler için, (Coulomb sürtünmesi v.b.) matrisler simetrik durumda olmayabilir, bu durumda Abaqus otomatik olarak, model ve kademelerin

tanımlanmasına bağlı olarak, simetrik veya asimetrik matris depolama ve çözüm yöntemi seçimi yapmaktadır.

Örnek olarak statik yapısal analizler için gerilme, yer değiştirme, enerji değişimleri, kompozit hasar ölçümleri v.b. sonuçların elde edilebilmesi mümkündür[61].



Şekil 2. 13: Heliselkonik dişli modeli; a) geometrik modelin kısımlara ayrılması, b) sonlu elemanlar modeli.



Şekil 2. 14: Heliselkonik dişlinin sonlu modelinin eleman analizi.

2.7.3. Abaqus Eleman Türleri

Abaqus programı dahilinde kullanılan eleman türlerini aşağıdaki başlıklar altında incelemek mümkündür.

-) Eleman ailesi

-) Serbestlik derecesi

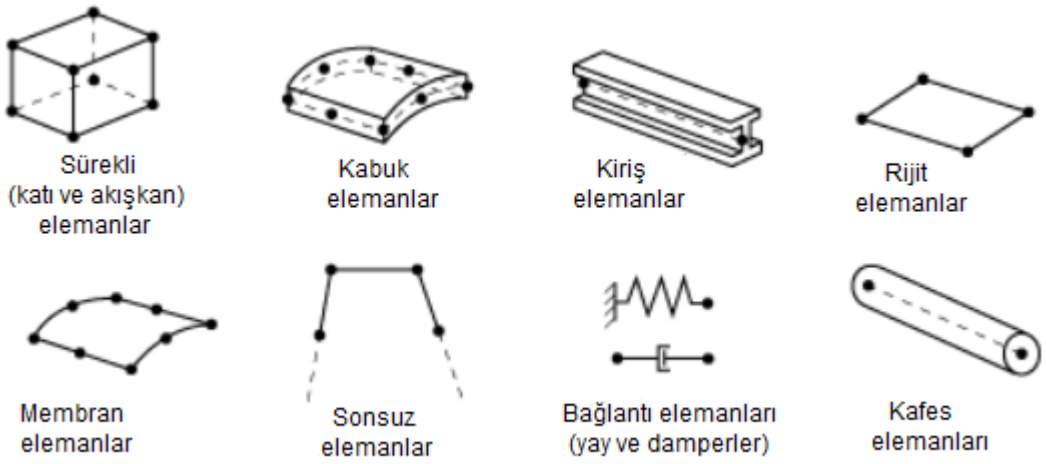
-) Düğüm noktası (nod) sayısı

-) Formülasyon

-) İntegrasyon

2.7.3.1. Eleman Aileleri

Şekil (2.15) de gerilme analizlerinde en sık kullanılan eleman aileleri gösterilmektedir. Buna ek olarak sürekli akışkan elemanlar, akışkan analizlerinde de kullanılmaktadır. Eleman türlerinin farklı ailelere ayrılmasında en büyük kıstasın geometrik farklılıklar olduğu söylenebilir.



Şekil 2. 15: Abaqus dahilinde en sık kullanılan eleman aileleri[61].

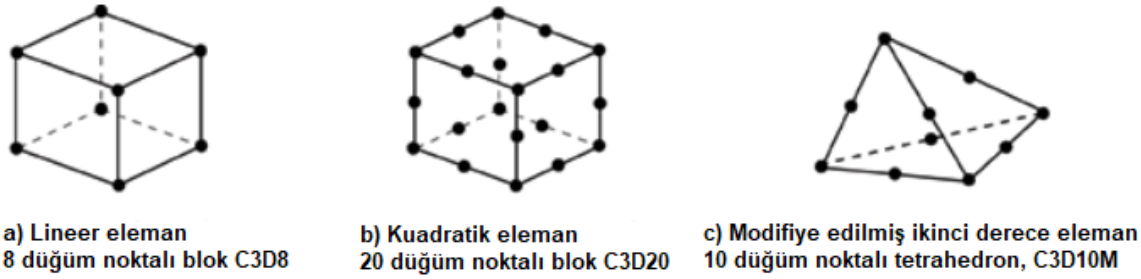
2.7.3.2. Serbestlik Derecesi

Serbestlik dereceleri, analizler esnasında hesaplanan temel değişkenlerdir. Gerilme-yer değiştirme analizlerinde serbestlik dereceleri öteleme ve dönme iken, ısı transferi için serbestlik derecesi düğüm noktalarındaki sıcaklık değerleri olacaktır. Termal-gerilme analizlerinde ise serbestlikler yer değiştirmelere ek olarak sıcaklık değerlerini de içereceğinden, bu türdeki analizler için özel türde elemanların tanımlanması gerekmektedir.

2.7.3.3. Düğüm Noktası (nod) Sayısı

Yer değiştirmeler ve diğer serbestlikler elemanların düğüm noktalarında hesaplanmaktadır. Eleman dahilinde herhangi bir nokta için yer değiştirmeler, düğüm noktalarındaki değerlerden

interpolasyon ile elde edilmektedir. Genellikle, interpolasyon derecesi, elemandaki düğüm noktası sayısı ile belirlenmektedir.



Şekil 2. 16: Düğüm noktaları (nod) sayısına göre eleman türleri[61].

2.7.3.4. Formülasyon

Elemanların davranışlarının tanımlanmasında kullanılan matematiksel teori eleman formülasyonu olarak isimlendirilmektedir.

2.7.3.5. İntegrasyon

Abaqus/Standard, eleman hacimleri içerisinde farklı büyüklüklerin hesaplanması amacıyla nümerik integrasyon yöntemleri kullanmaktadır. Çoğu eleman için Gauss kuadratürü kullanılmakta, her bir integrasyon noktasında malzeme tepkileri hesaplanmaktadır. Eleman türleri bu anlamda, tam (full integration) veya azaltılmış (reduced integration) integrasyon kullanılarak değişkenlerin hesaplandığı türler olarak ayrılmaktadırlar.

2.8. TEMAS MEKANİĞİNİN TEORİSİ

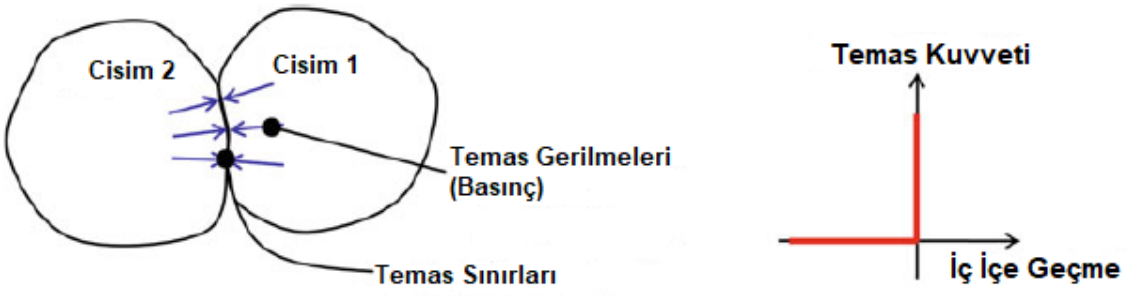
İki veya daha fazla cisim birbirine dokunduğunda yüzeyler arasında temas (contact) olayı meydana gelmektedir. Bu cisimler uzayda üst üste gelemez, tümüyle iç içe geçemezler. Metallerin şekillendirilmesi, taşıtların çarpışması, ateşlenen bir merminin bir yüzeye girmesi, kavramalar, dişli sistemlerinin çalışması v.b. durumlar temas olayına birkaç örnektir. En yaygın kullanımda üretim esnasında bir metal sac, bir mekanik pres ve kalıp ile temas ederek istenilen bir şekile dönüştürülmektedir. Tüm bunlar geniş bir perspektife göz önüne alındığında, temas olaylarını, mekanik sistemleri oluşturan cıvatalar, vidalar, somunlar, bağlantı ekipmanları v.b. pek çok farklı parça ve malzemenin bir araya getirilmesinde kullanılan temel araç olarak düşünmek mümkündür.

Temas analizlerinin temel amacı, şu soruların cevaplandırılmasını sağlamaktır:

1) İki veya daha fazla cismin temas durumunda olup olmadığı
2) Eğer öyle ise, temasın hangi nokta veya bölgede gerçekleştiği,
3) Temas bölgesinde meydana gelen basınç büyüklükleri,
4) Ara yüzde temas sonrası herhangi bir bağıl haraket olup olmadığı.

Temas durumlarını içeren problemler, nonlineer olarak kategorize edilebilirler. Bunu iki yönden açıklamak mümkündür. İlki, iki ayrık cisim arasında temas meydana geldiğinde, temas kuvveti ve yer değiştirme arasındaki grafik keskin bir çıkış gösterir. Çünkü temasa sebep olan kuvvet, cisimler ayrık durumdayken sıfırdır ve temas oluştuğunda düşey olarak yükselecektir. Böyle bir durumda, temas kuvveti ve yer değiştirme arasında fonksiyonel bir ilişki söz konusu değildir, çünkü aralarında birebir bir ilişki yoktur. Benzer bir durum, sürtünmenin olduğu durumda teğetsel doğrultuda da meydana gelmektedir. İki cisim temas halinde iken teğetsel kuvvet, bir eşik değerini geçtikten sonra sabit kalacak ve sürekli kayma meydana gelecektir. Temas kuvvetindeki "Contact force" bu ani değişme, problemi yüksek derecede nonlineer yapmaktadır. Mekanik açıdan iyi bir kolay çözülebilir "well posed" problemde yer değiştirme, (kinematik) veya kuvvet (kinetik) değişkenlerinden bir tanesinin malzemenin her bir noktasında belirli olması gerekmektedir. Bu sayede sonlu elemanlar metodu, bilinen veriler yardımı ile bilinmeyen verileri belirleyebilecektir. Örneğin, yer değiştirme sınır koşullarında eğer yer değiştirme belirli ise, reaksiyon kuvveti hesaplanmalıdır. Diğer yandan sürtünme sınır koşullarında ise uygulanan kuvvet biliniyor ise, meydana gelen yer değiştirme hesaplanmalıdır.

Ancak, temas durumunda, temas sınırlarının çözümün bir parçası olduğu durumlarda, yer değiştirme ve temas kuvvetleri bilinmeyen durumundadır. Bu durumda kullanıcı, problemi çözmeden önce, yalnızca temasa sınırı olma ihtimali bulunan noktaları tayin edebilir. Dolayısıyla, böyle bir durumda sonlu eleman programı, a) cismin sınır bölgelerindeki noktaların diğer cisim ile temasta olup olmadığı, b) uygulanması gereken temas kuvvetinin büyüklüğü gibi hesaplamaları yapmak durumundadır. Temas kuvvetinin oluştuğu noktaya komşu olan diğer noktalarda da deformasyon meydana gelme ihtimali bulunduğundan, bu işlem, temasta olma ihtimali bulunan her bir nokta için gerekli koşullar sağlanana dek tekrar edilmelidir[62].



Şekil 2. 17: Temas sınırları ve temas kuvveti[62].

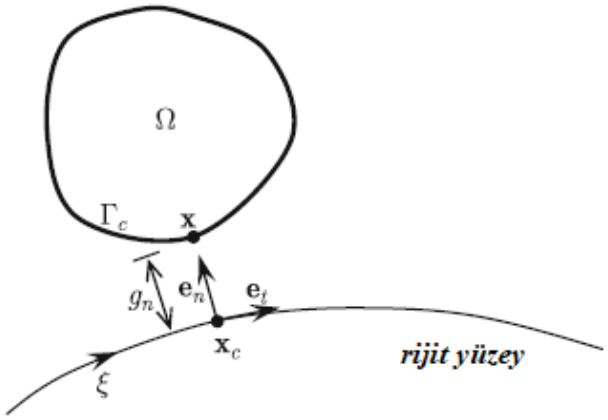
Temas problemlerinin pek çok farklı şekilde formülize edilmesine rağmen, "master-slave" konsepti, sonlu eleman uygulamalarında en yaygın olarak kullanılan yöntemdir. Bu konseptte, cisimlerden biri "slave-body" diğeri ise "master-body" olarak isimlendirilmektedir. Bu durumda, temas durumunun sınır koşulları, slave yüzeyinin, master yüzeyi ile iç içe geçme durumunun olmayacağı şekilde tanımlanmaktadır.

2.8.1. Temas Problemlerinin Genel Formülasyonu

Temas durumlarını, iç içe geçmelerin söz konusu olmadığı normal durum ve teğetsel kaymaların söz konusu olduğu durum olmak üzere iki ana başlığa ayırarak genelleştirmek mümkündür. Şekil (2.18) de, temas durumunda olan iki cisim arasındaki ilişki görülmektedir. Bu konsept ikiden fazla cisim arasında temas meydana gelmesi durumu için de genelleştirilebilir. Burada her bir cisim, temasın oluşmadığı durumlarda hareket etmeyecek şekilde mesnetlenmiştir.

Şekilde görülen durum için, esnek olan cisim "slave-body" rijit olan ise "master-body" olarak isimlendirilmektedir. Burada temas sınırında bulunan bir "x" noktası, master yüzeyinde "x_c" noktası ile temasa girmektedir. Formülasyonlarda temas durumu yalnızca slave-body üzerindeki "x" noktası için incelenecek ve rijit yüzey üzerindeki hareket söz konusu olduğunda rijit yüzey üzerindeki herhangi bir noktanın konumu doğal koordinat "ξ" ile gösterilecektir. Böylece master yüzeyindeki temas noktası "x_c" yine doğal koordinatlar cinsinden "ξ_c" olarak ifade edilebilecektir.

$$\mathbf{x}_c = \mathbf{x}_c(\xi_c) \tag{2.29}$$



Şekil 2. 18: 2 boyutlu cisimler arasında temas [62].

Temas analizlerinin ilk amacı, slave yüzeydeki "x" noktasına karşılık gelen master yüzeyindeki temas noktası "x_c" nin bulunmasıdır. Bu noktanın bulunması, iki cismin temas halinde olup olmadığına karar verebilmek açısından önemlidir. Master-body üzerindeki temas sınırı düz bir çizgi halinde iken, çizgiye en yakın nokta kolaylıkla belirlenebilir ancak, genel nonlineer bir eğride temas noktasının bulunabilmesi için, aşağıdaki eşitliğin çözülmesi gerekmektedir[62].

$$\varphi(\xi_c) = \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(\xi_c)\right)^T \mathbf{e_t}(\xi_c) = 0 \qquad (2.30)$$

Burada, "$\mathbf{e_t} = t/\|t\|$" teğetsel birim vektör, "$\mathbf{t} = \mathbf{x}_{c,\xi}$" ise temas noktasındaki teğetsel vektördür. Bu denklem temas tutarlılık denklemi olarak isimlendirilir. $\mathbf{x}_c(\xi_c)$, x ϵ Γ_c noktasının, rijit yüzeydeki eşitliği sağlayan, en yakın projeksiyonudur.

Temas noktası bulunduktan sonra, temasın gerçekten gerçekleşip gerçekleşmediğinin belirlenmesi gerekmektedir. Bu da, iki nokta arasındaki mesafenin ölçülmesi ile gerçekleştirilebilir. Aynı zamanda iç içe geçmeme koşulu da aynı mesafe kullanılarak sisteme uygulanabilir. İç içe geçmeme durumu, normal mesafeyi ölçen normal boşluk fonksiyonu "g_n" kullanılarak tanımlanabilir.

$$g_n = \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(\xi_c)\right)^T \mathbf{e}_n(\xi_c) \geq 0, \qquad x \epsilon \Gamma_c \qquad (2.31)$$

Burada," $\mathbf{e}_n(\xi_c)$" temas noktasındaki master yüzeyinin birim normal vektörüdür[62].

Temas noktası, master yüzeyin sınırlarında hareket ederken, teğetsel yöndeki sürtünme kuvveti teğetsel yönde bir bağıl hareketin oluşmasına engel olmaktadır. Rijit yüzey üzerinde temas noktasının bağıl hareketini ölçen "g_t" teğetsel kaymaları belirten fonksiyondur ve;

$$g_t \equiv \|t^0\|(\xi_c - \xi_c^0) \tag{2.32}$$

Olarak tanımlanır. Buradaki üstindis "0" zamanı göstermektedir.

2.8.2. Varyasyonel Eşitsizlikler

Temas durumlarını belirten diferansiyel denklem, aşağıdaki şekilde yazılabilir[62].

$$\begin{aligned} &\sigma_{ij,j} + f_i^B = 0 && x \in \Omega \\ &u_i(x) = 0 && x \in \Gamma^g \\ &\sigma_{ij} n_j = f_i^S && x \in \Gamma^S \end{aligned} \tag{2.33}$$

Temas koşulları ise;

$$\begin{aligned} &\mathbf{u^T e}_n + g_n \geq 0 \\ &\sigma_n \geq 0, \quad x \in \Gamma_c \\ &\sigma_n(\mathbf{u^T e}_n + g_n) = 0 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Olarak yazılabilir[62]. Buradaki ilk eşitsizlik, lineer küçük deformasyon problemi göz önüne alındığında (2.33) denkleminin artımlı formu olarak düşünülebilir. Aşağıda tanımlanan konveks grubu, tüm kinematik kısıtları (yer değiştirme koşullarını) sağlamaktadır.

$$\mathbb{K} = \{\mathbf{w} \in [H^1(\Omega)]^N \;\; |\mathbf{w}|_{\Gamma^g} = 0 \;\; \text{ve} \;\; \mathbf{w}^T \boldsymbol{e_n} + \boldsymbol{g_n} \geq \mathbf{0} \;\; \boldsymbol{on} \;\; \Gamma_c\} \tag{2.35}$$

Temas durumunu tanımlayan diferansiyel denklemin zayıf formu (weak form), aşağıdaki şekilde elde edilebilir. Burada eşitlik (2.34) deki diferansiyel denklemin çözümü olan "u" değişkeni, $\mathbf{w} \in \mathbb{K}$ için "w-u" olarak değiştirilir ve kısmi integrasyon uygulanırsa bu form;

$$\int_\Omega \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(w-u)d\Omega = -\int_\Omega \sigma_{ij,j}(w_i - u_i)d\Omega + \int_{\Gamma^S \cup \Gamma_c} \sigma_{ij} n_j (w_i - u_i)d\Gamma$$

$$= l\,(w-u) + \int_{\Gamma_c} \sigma_{ij} n_j (w_i - u_i) d\Gamma \tag{2.36}$$

olacaktır. Burada, son terim aşağıda görülen şekilde, sonuç tam olarak elde edilene dek tam olarak çözülememektedir ve her zaman pozitif değer alacaktır[62].

$$\int_{\Gamma_c} \sigma_{ij} n_j\,(w_i - u_i) d\Gamma = \int_{\Gamma_c} \sigma_n\,(w_n - u_n) d\Gamma$$

$$= \int_{\Gamma_c} \sigma_n\,(w_n + g_n - u_n - g_n\,) d\Gamma = \int_{\Gamma_c} \sigma_n\,(w_n + g_n) d\Gamma \geq 0, \quad \forall w \in \mathbb{K} \tag{2.37}$$

$$a\,(\mathbf{u}, \mathbf{w} - \mathbf{u}) \geq l(\mathbf{w} - \mathbf{u}), \qquad \forall w \in \mathbb{K}$$

Burada, $a\,(\mathbf{u}, \mathbf{w} - \mathbf{u})$, kendi argümanlarına göre bilineer olup, enerji-bilineer form olarak isimlendirilmektedir. $l(\mathbf{w} - \mathbf{u})$ ise, yer değiştirmeden bağımsız yalnızca konservatif kuvvetlerin göz önüne alındığı, yük-lineer formdur.

Mühendislik açısından, varyasyonel eşitsizliği doğrudan, önceden tanımlanmış olan konveks grubu "$\mathbb{K}$" üzerinde bir test fonksiyonu tanımlamaksızın çözmek uygun olmasa da, varyasyonel eşitsizliği, potansiyel enerjinin kısıtlanmış bir optimizasyonu olarak düşünmek mümkündür. Burada söz konusu olan potansiyel enerji ifadesini,

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{u}) = \tfrac{1}{2} a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) - l(\boldsymbol{u}) \tag{2.38}$$

olarak ifade etmek mümkün olacaktır[62]. Burada kısıtlı optimizasyonu doğrudan çözmek yerine, penaltı yöntemi (Penalty Method) veya Lagrange çarpanı (Lagrange Multiplier Method) yöntemini kullanarak kısıtlı optimizasyon probleminde kısıtlamaları kaldırarak normal forma dönüştürmek daha kolaydır.

Penaltı metodu, kısıtlanmış optimizasyon problemlerini, kısıtların olmadığı ve çözümlerinin orijinal çözüme yakınsadığı bir takım farklı problemlere dönüştürmektedir. Burada kısıtlamaların kaldırıldığı eşitlikler, penaltı fonksiyonu olarak isimlendirilen terimlerin eklenmesi ile elde edilmektedir. Bu fonksiyon, kısıtlamaların ihlali ölçütü ile orantılı olup, penaltı metodu ile oluşturulan potansiyel enerji ifadesinin minimumu temas kısıtlamalarını sağlamaktadır.

Lagrange çarpanları metodu ise temelde eşitlik kısıtlamaları bulunan bir fonksiyonun, maksimum ve minimumunun bulunması ile ilişkilidir. Bu amaçla potansiyel enerji ifadesi,

temas kısıtlamaları ve Lagrange çarpanları ile çarpılmakta, ortaya çıkan yeni ifade, temas kısıtlamalarını sağlamaktadır.

2.8.3. Penaltı Metodu (Penalty Method)

Temas durumunda olan cisimlere ait aktif olan ve olmayan temas noktaları, $\bar{\Gamma}_c^1 \in \Gamma_c^1$ ve $\bar{\Gamma}_c^2 \in \Gamma_c^2$ biliniyor ise temas durumuna ait diferansiyel denklemi, virtüel yer değiştirmelerdeki $\delta\boldsymbol{u} \in \mathbb{V}$ kısıtlamalar ve temas kısıtları ile tamamlanarak, virtüel işler eşitliği ile değiştirmek mümkün olacaktır. Böylece;

$$\int_\Omega \tilde{\sigma} \cdot\cdot\, \delta\nabla\mathbf{u}\boldsymbol{d}\Omega + \int_{\bar{\Gamma}_c^1} (\boldsymbol{\sigma}_t^T \delta\boldsymbol{\xi}) d\bar{\Gamma}_c^1 \geq \int_{\Gamma_f} \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \delta\boldsymbol{u} d\Gamma + \int_\Omega \boldsymbol{f}_v \cdot \delta\boldsymbol{u} d\Omega \tag{2.39}$$

$$\mathbb{V} = \{\delta\boldsymbol{u} \in \mathbb{H}^{\mathbf{1}}(\Omega) \,|\, \delta\boldsymbol{u} = 0 \; on \; \Gamma_{\boldsymbol{u}}\}$$

Olarak yazılabilir[63].

2.8.3.1. Sürtünmesiz durum için

İç içe geçmeme durumunu karşılamak amacıyla, temas noktasında normal basınç temas arayüzünde $\sigma_n < 0$ olacaktır. Hertz-Signorini-Moreau koşulları bu durumu aşağıdaki şekilde özetlemektedir.

$$g \geq 0, \; \sigma_n \leq 0, \qquad g\sigma_n = 0, \qquad \sigma_t = 0 \tag{2.40}$$

Böylece penaltı metodunu, bu koşulların yaklaşık olarak sağlanabilmesi üzerine kurmak mümkün olabilecektir. Temas noktasında meydana gelen basıncın, iç içe geçmenin sürekli bir fonksiyonu olduğu göz önüne alınırsa;

$$\sigma_n(g) \; = \; \varepsilon_n(\langle -g \rangle) = \begin{cases} 0, & g > 0 \\ \varepsilon_n(-g), & g \leq 0 \end{cases} \tag{2.41}$$

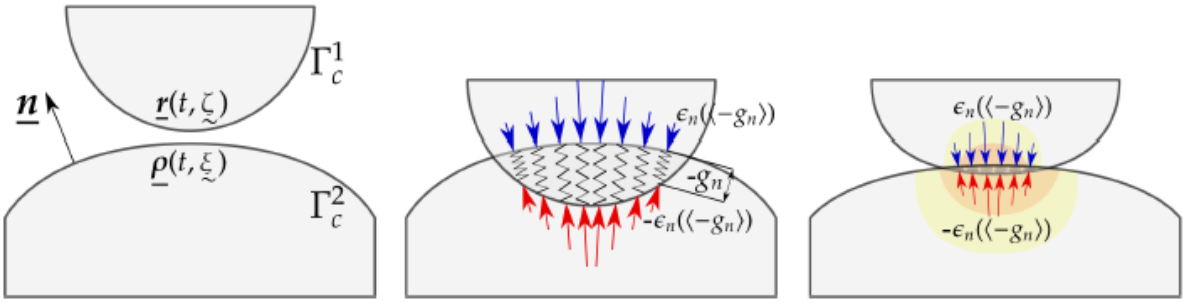
olarak ifade etmek mümkün olacaktır. Böylece virtüel işler ifadesi,

$$\int_\Omega \tilde{\sigma} \cdot\cdot\, \delta\nabla\mathbf{u}\boldsymbol{d}\Omega + \int_{\bar{\Gamma}_c^1} \varepsilon_n(\langle -g_n \rangle) \delta g_n d\bar{\Gamma}_c^1 \geq \int_{\Gamma_f} \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \delta\boldsymbol{u} d\Gamma + \int_\Omega \boldsymbol{f}_v \cdot \delta\boldsymbol{u} d\Omega \tag{2.42}$$

Şeklinde yeniden yazılabilir. Burada, "ε_n" penalty fonksiyonunu ifade etmektedir [63].

Aşağıdaki şekilde penaltı yönteminin yay modeli yardımıyla yorumlanması gösterilmiştir. Sol tarafta temasın oluşmadığı durum, orta kısımda ise iç içe geçmelerin $\boldsymbol{g_n}(\boldsymbol{\xi})$ gerçekleşmesinden

sonraki konfigürasyon görülmektedir. Bu durum temasta, basıncın $\boldsymbol{\sigma_n(\xi) = \epsilon_n(-g_n(\xi))}$ meydana gelmesine sebep olacaktır. Mavi oklar "slave", kırmızı oklar ise "master" yüzey üzerinde basınç dağılımını göstermektedir. Sağ tarafta ise deformasyonun meydana gelmesi ile iç içe geçme miktarındaki azalma ve böylece denge durumunun oluşması görülmektedir[63].



Şekil 2. 19: Penaltı yönteminin yay modeli[63].

2.8.4. Lagrange Çarpanları Metodu (Lagrange Multipliers Method)

İsmini Joseph-Louis Lagrange'dan alan bu metot, optimizasyon teorisinde, kısıtları bulunan fonksiyonların ekstremum noktalarının belirlenmesinde kullanılmaktadır. Özetle, sınırları $g(\boldsymbol{u})$ olan $\Pi(\boldsymbol{u})$ fonksiyonelini minimum yapan $\boldsymbol{u}$ argümanının bulunabilmesini amaçlamaktadır.

$$\min_{g(\boldsymbol{u})=0} \Pi(\boldsymbol{u}) \longrightarrow \quad \nabla \mathcal{L}(\boldsymbol{u}, \lambda_L) = 0 \tag{2.43}$$

Yukarıdaki eşitlikte, $\mathcal{L}(\boldsymbol{u}, \lambda_L)$, Langrange fonksiyoneli, "λ_L" ise Lagrange çarpanı olarak isimlendirilen terimdir.

2.8.4.1. Sürtünmesiz Durum İçin

Hertz-Signorini-Moreau koşullarını hatırlayacak olursak;

$$g(\boldsymbol{u}) \geq 0, \ \sigma_n \leq 0, \qquad \sigma_n g(\boldsymbol{u}) = 0 \qquad \Gamma_c \text{ de} \tag{2.44}$$

Burada, aktif temas bölgesi $\bar{\Gamma}_{\boldsymbol{c}}$ için;

$$\forall \mathbf{u} \in \bar{\Gamma}_{\boldsymbol{c}} : \quad g(\boldsymbol{u}) \geq 0 \tag{2.45}$$

olacaktır. Bu durumda virtüel işler ifadesi, "$\boldsymbol{X}$", cisim üzerinde herhangi bir nokta, $\lambda_{\mathrm{n}}(\boldsymbol{X})$ aktif temas bölgesinde sürekli olan değerler için lagrange çarpanı ve $\Pi(\boldsymbol{u})$ enerji ifadesi olmak üzere, Lagrange ifadesi;

$$\delta\mathcal{L}(\boldsymbol{u},\lambda_n) = \delta\Pi(\boldsymbol{u}) + \int_{\bar{\Gamma}_c} g(\boldsymbol{u})\delta\lambda_n + \delta g(\boldsymbol{u})\lambda_n \, d\bar{\Gamma}_c \tag{2.46}$$

olarak yazılırsa, bu durumda virtüel işler ifadesi;

$$\int_\Omega \tilde{\sigma} \cdot\cdot\, \delta\nabla\mathbf{u}\boldsymbol{d}\Omega + \int_{\bar{\Gamma}_c^1} g(\boldsymbol{u})\delta\lambda_n + \delta g(\boldsymbol{u})\lambda_n d\bar{\Gamma}_c^1 - \int_{\Gamma_f} \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \delta\boldsymbol{u} d\Gamma + \int_\Omega \boldsymbol{f}_v \cdot \delta\boldsymbol{u} d\Omega = 0 \tag{2.47}$$

$$\mathbb{V} = \{\delta\boldsymbol{u} \in \mathbb{H}^{\mathbf{1}}(\Omega) \big| \delta\boldsymbol{u} = 0 \; on \; \Gamma_{\boldsymbol{u}}\} \qquad \lambda_{\mathrm{n}} \leq 0 \;\; \Gamma_c^1 \; de$$

Eşitliğine dönüşecektir[62]. Böylece, temas durumunu ifade eden genel diferansiyel denklem ve varyasyonel çözüm yöntemleri sürtünmesiz durumlar için özetlenmiştir[63].

2.8.5. Temas Problemlerinin Sonlu Elemanlar Metodu ile Çözümü

Temas formülasyonu kurucu modellerden bağımsız olduğu için bu bölümde, varyasyonel formun sonlu eleman formülasyonundan bahsetmek yeterli olacaktır. Sonradan bu formülasyon, elastik malzemeler ve elastoplastik malzeme modelleri gibi farklı malzeme türleri için matris formuna dönüştürülebilecektir.

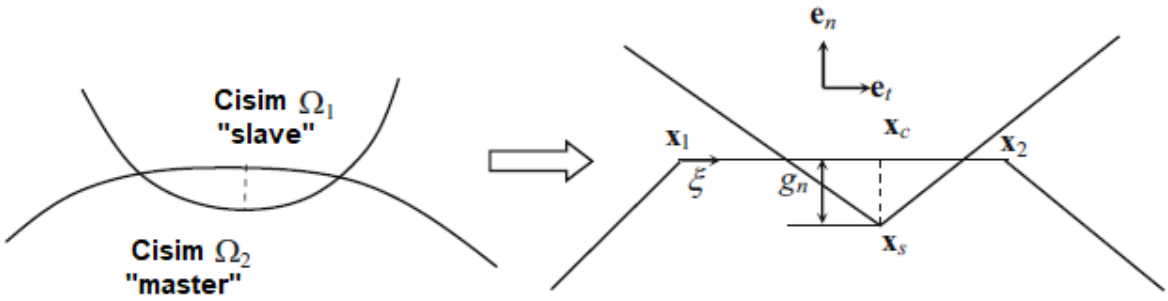
Temas problemi, sonlu eleman analizlerinin bir bölümü olarak çözüldüğünden, temas problemini aynı bağlamda formülize etmek mantıklı olacaktır. Bu amaçla, varyasyonel form, ayrıştırılmış sonlu eleman bölgelerindeki sınırlarda çözülmektedir.

Eğer yapısal bölge, iki boyutlu sonlu elemanlara bölünmüş ise, temas problemi, iki boyutlu sonlu elemanların sınırlarında tanımlanacaktır. Bu çok uzun bir sınır eğrisidir. 3 boyutlu elemanlar için, temas problemi, sınır yüzeylerinde tanımlanmaktadır. Bu bölümde temas koşulları iki boyutlu sistem için incelenecektir. Bu inceleme, bir esnek ve bir rijit cisim arasındaki temas için yapılacaktır[62].

2.8.5.1. Esnek ve Rijit Cisim Arasındaki Temas

Bu bölümde incelenecek olan sistemde rijit cismin hareketsiz, esnek olan cismin ise hareketli olduğu farz edilmektedir. Bu durumda, esnek olan cismi slave-body, rijit cismi ise master-body olarak belirlemek uygun olacaktır.

Γ_c'nin, slave-body üzerinde, şekil(2.20) de görüldüğü gibi master-body ile iç içe geçen bir bölge olduğunu varsayalım. Şekilde görülen sınır bölgede, master-body ile iç içe geçmiş durumdaki slave-body'e ait birtakım düğüm noktaları gösterilmektedir. Sonlu elemanlar yönteminde, temas kısıtlamalarını göstermenin pek çok farklı yolu olmasına rağmen, bu kısımda bu kısıtlar, slave bölgedeki bir düğüm noktası (nod) ve bir master bölgesi ile ifade edilecektir. Buna ek olarak da yalnızca master bölgesinde yalnızca iki düğüm noktası arasında kalan bir düz çizgi göz önüne alınmaktadır. Böylece temas çifti, slave kısımda bir adet ve master bölgede iki adet düğüm noktası ile tanımlanabilmektedir. Bu temas çiftini, $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}^{\mathrm{T}}$ olarak göstermek mümkündür. Burada, $\mathbf{x}_1$ ve $\mathbf{x}_2$, master bölgedeki düğüm noktalarını göstermektedir ve doğal koordinat, ξ, $\mathbf{x}_1$noktasında sıfır ve $\mathbf{x}_2$ noktasında bir değerini almaktadır.



Şekil 2. 20: Temasın oluşması ve ayrık gösterimi[62].

2.8.5.2. Normal temas

Bir temas çifti için birim normal ve teğetsel vektörler, aşağıdaki şekilde tanımlanabilir. Master bölgesinin sınır koşulları ankastre olarak tanımlandığı için bu vektörlerin sınır koşulları da aynı şekilde hareketsiz olacaktır.

$$\mathbf{t} = \mathbf{x_2} - \mathbf{x_1} \qquad \mathbf{e_t} = \frac{\mathbf{t}}{\|\mathbf{t}\|} \qquad \mathbf{e_n} = \mathbf{e_3} \times \mathbf{e_t} \tag{2.48}$$

Boşluk değeri ise ;

$$g_{\mathrm{n}} = (\mathbf{x_s} - \mathbf{x_1})^{\mathrm{T}} \mathbf{e}_{\mathrm{n}} \tag{2.49}$$

formülü yardımıyla hesaplanabilir. Burada eğer $g_{\mathrm{n}} > 0$ ise, temas oluşmamakta, sıfırdan farklı bir değer aldığında ise doğal koordinat $0 \leq \xi \leq 1$ değerleri arasında olmalı ve master bölgede temas meydana gelmelidir. Temas noktasındaki doğal koordinat değeri;

$$\xi_{\boldsymbol{c}} = \frac{\mathbf{1}}{\|\boldsymbol{t}\|}(\mathbf{x_s} - \mathbf{x_1})^{\mathrm{T}}\mathbf{e}_{\mathrm{n}} \tag{2.50}$$

formülü ile hesaplanabilir. Eğer $\xi < 0$ veya $\xi > 1$ ise temas meydana gelmeyecektir. Temasın meydana geldiği durumlar için normal vektör ile aynı yönde bir temas kuvveti meydana gelecek ve iç içe geçme miktarı ile orantılı olacaktır. Temas kuvveti;

$$\mathbf{f}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{c}} = -\omega_{\mathrm{n}} g_{\mathrm{n}} \mathbf{e_n} \tag{2.51}$$

formülü yardımıyla hesaplanabilecektir. Nonlineer analizler esnasında, teğetsel sertliğin "tangent stiffness" bilinmesi gerekmektedir. "$\mathbf{e_n}$" sabit olduğundan, yalnızca boşluk değerinin lineerleştirilmesi gerekmektedir. Yer değiştirmedeki artış yer değiştirme varyasyonu ile değiştirildiğinde katılık matrisi ifadesi (stiffness matrix);

$$\mathbf{k}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{c}} = \omega_{\mathrm{n}} \mathbf{e}_{\mathrm{n}} \mathbf{e}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}} \tag{2.52}$$

olarak ifade edilebilir. Süreklilik formülasyonunda $b_N(\mathbf{u}, \tilde{\boldsymbol{u}})$, $\Gamma_{\boldsymbol{c}}$ sınırı boyunca ifade edilen integrali göstermektedir. Ancak, master ve slave sınırlarındaki temas çifti kullanılarak ve kollokasyon integrali yardımıyla, $\Gamma_{\boldsymbol{c}}$ sınırları boyunca hesaplanan integrale, temas esnasında ihlale uğrayan slave-body üzerindeki düğüm noktalarının toplamı ile yakınsamak mümkün olacaktır. NC master segmenti ile iç içe geçen slave-body üzerindeki düğüm noktalarının (nodes) sayısı olursa, ayrıklaştırılmış varyasyonel temas formu;

$$b_{\mathrm{N}}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}) \approx \sum_{I=1}^{NC} [\bar{\mathbf{u}}^{\mathrm{T}}(\omega_{\mathrm{n}} \mathrm{g}_{\mathrm{n}} \mathbf{e}_{\boldsymbol{n}})]_{\boldsymbol{I}} = \sum_{I=1}^{NC} [\bar{\mathbf{u}}^{\mathrm{T}}(-\mathbf{f}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{c}})]_{\boldsymbol{I}} \equiv \bar{\mathbf{u}}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{T}}(-\mathbf{F}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{c}}) \tag{2.53}$$

olacaktır[62]. Burada, F_c^n, global koordinatlardaki temas kuvvetlerini göstermektedir. Bu kuvvet ifadesi, her bir slave düğüm noktasındaki uygun global serbestlik derecelerine temas kuvvetlerinin eklenmesi ile elde edilmiştir.

Nonlineer analizler boyunca Newton - Raphson iterasyonunda, temas denkemlerinin varyasyonel formunun hesaplanması gerekmektedir. $b_N(\mathbf{u}, \tilde{\boldsymbol{u}})$ formunun lineerleştirilmesi sonucu;

$$b_{\mathrm{N}}^{*}(\mathbf{u}; \Delta\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}) = \sum_{I=1}^{NC} (\omega_n \tilde{\mathbf{u}}^{\mathrm{T}} \mathbf{e}_{\mathrm{n}} \mathbf{e}_{\mathrm{n}}^{\boldsymbol{T}} \Delta\mathbf{u})_I = \sum_{I=1}^{NC} (\tilde{\mathbf{u}}^{\mathrm{T}} \mathbf{k}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{c}} \Delta\mathbf{u})_I \equiv \tilde{\mathbf{u}}_g^{\mathrm{T}} \mathbf{K}_n^{\mathrm{c}} \Delta\mathbf{u}_g \tag{2.54}$$

Burada, K_n^c global koordinatlardaki temas sertliğini (contact stiffness) ifade etmektedir[62].

2.8.6. ABAQUS/Standard'ın Temas (Contact) Algoritması

Abaqus/Standard dahilinde temas durumlarının tanımlanmasında kullanılan yaklaşımlar;

Genel temas (general contact)

Temas çiftleri (contact pairs)

Temas elemanları (contact elements) dir[61].

2.8.6.1. Yüzey Bazlı Temas Simülasyonu

"Contact pairs" veya "general contact" seçenekleri ile tanımlanan temas simülasyonları;

- Temasa girme potansiyeli bulunan cisimlerin yüzey özellikleri
- Birbiri ile etkileşim içinde olan yüzeyler
- Birbiri ile etkileşim içinde olan yüzeylerde varsayılanın dışında olan yüzey özellikleri
- Mekanik ve termal temas karakteristikleri, basınç-yaklaşma ilişkisi, sürtünme katsayısı, temas iletim katsayısı v.b.
- Temas formülasyonunda varsayılanın dışında olan durumlar
- Analizler için algoritmik temas kontrollerinin belirlenmesi konularını içermektedir.

Temas simülasyonlarında temas elemanlarının kullanılması ise Abaqus/Standard içerisinde bulunan temas elemanları kütüphanesi yardımıyla belirli türde özel problemlerin çözümü için yapılan modellemelerde yararlanılan bir metottur.

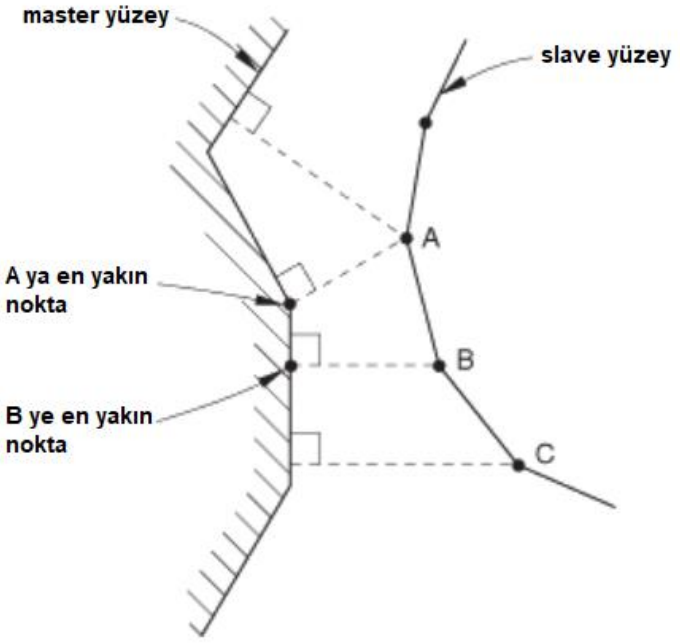
Abaqus/Standard ın sağlamış olduğu temas formülasyonları genel olarak; ayrıklaştırma (contact discretization), izleme yaklaşımı ve "master" ve "slave" yüzeylerinin belirlenmesi konularını içermektedir.

Abaqus/Standard, temas durumlarının simule edilebilmesi amacıyla, etkileşimde olan yüzeylerin çeşitli bölgelerinde koşullu kısıtlamalar uygulamaktadır. Bu bölgeler ve kısıtlama koşulları, uygulanmakta olan temas formülasyonunda kullanılan ayrıklaştırma yöntemlerine göre belirlenmektedir. Abaqus/Standard tarafından uygulanan iki temel ayrıklaştırma yöntemi,

nodlar ve yüzeyler arası temas (node to surface contact discretization) ve yüzeyler arası (surface to surface contact discretization) temas ayrıklaştırması olarak isimlendirilmektedir.

2.8.6.2. Nodlar ve Yüzeyler Arası Temas (Node To Surface Contact Discretization)

Bu yöntem temelde, "slave" yüzey üzerindeki nodların "master" yüzey üzerindeki projeksiyonları ile etkileşimde olması esasına dayanmaktadır. Şekil (2.21) bu prensipte oluşan temas durumunu göstermektedir. Böylece, temas esnasında her bir durumda, "slave" yüzey üzerindeki bir nod ve "master" yüzeyde, değerleri projeksiyon noktasına göre interpolasyonu alınan (projeksiyona en yakın) nodlar söz konusu olacaktır.



Şekil 2. 21: Nodlar ve yüzeyler arası temas[61].

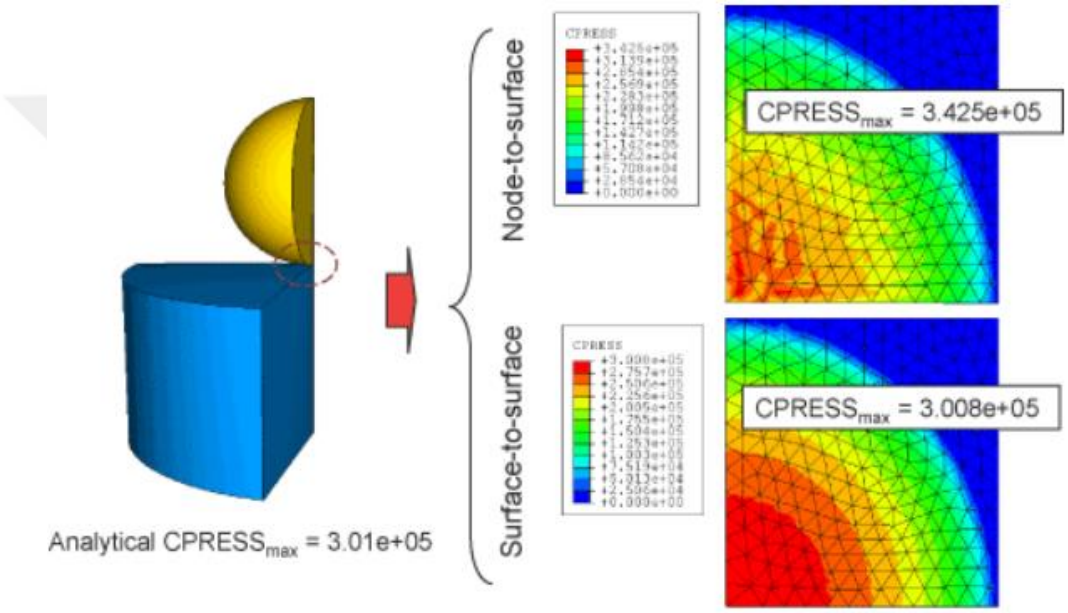
2.8.6.3. Yüzeyler Arası Temas (Surface To Surface Contact Discretization):

Bu metotta "slave" ve "master" yüzeylerinin her ikisinin de yüzey şekilleri göz önüne alınmaktadır. Temel özellikleri;

- Formülasyonun temas koşullarını, "slave" yüzey üzerindeki tek bir nod yerine aynı zamanda bu nodun çevresindeki yakın nodlar için de uygulaması, küçük oranlarda iç içe geçmelerin gerçekleşmesi ancak, büyük ve beklenmedik penetrasyonların meydana gelmemesi,

- Temas yönünün, “slave” yüzey üzerindeki bir nod çevresindeki ortalama normale dayanarak belirlenmesi,
- Temas çiftinin belirlenmesi noktasal bazlı olarak seçildiğinde (node-based) yüzeyler arası (surface to surface) temas formülasyonunun uygulanamamasıdır.

Eğer yüzey geometrisi makul derecede düzgün olarak tanımlanmış ise genellikle, yüzeyler arası ayrıklaştırma yöntemi daha doğru gerilme ve basınç sonuçları sunmaktadır. Şekil (2.22) de temas durumunda bu iki yöntem ile hesaplanan sonuçlar karşılaştırılmıştır.



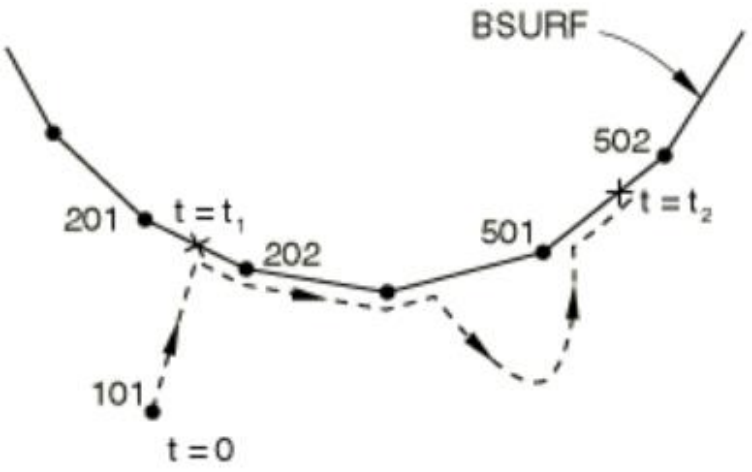
Şekil 2. 22: Yüzeyler arası ve nodlar ve yüzeyler arası temas yöntemlerinin karşılaştırılması[61].

Nodlar ve yüzeyler arası temas ayrıklaştırma yönteminde, slave yüzeydeki düğüm noktalarının master yüzey ile iç içe geçmesi engellenmektedir. Yükler bu noktalarda yığılma eğilimindedirler. Bu yığılma basıncın yüzeye dağılımında tepe ve çukur noktalarının oluşmasına sebep olmaktadır. Yüzeyler arası temas yöntemi, iç içe geçmeler slave yüzey üzerinde sonlu bölgelerde ortalama miktarda engellenmektedir. Bu daha yumuşak bir dağılıma sebep olmaktadır. Eleman sayısının arttırılması iki yöntem arası sonuç farklılıklarının azalmasına sebep olmaktadır.

Abaqus /Standard programı dahilinde, mekanik temas simülasyonlarında, karşılıklı etkileşimde olan iki yüzeyin bağıl hareketinin tanımlanmasında, iki farklı izleme (takip) yaklaşımı kullanılmaktadır.

2.8.6.4. Sonlu-Kayma Yaklaşımı (The Finite-Sliding Approach)

Bu yaklaşımın, temas yüzeylerinde keyfi relatif ayrılma, kayma ve dönmelere izin veren en yaygın kullanılan izleme yaklaşımı olduğu söylenebilir. Şekil(2.23) de, 101 nolu düğüm noktasının t_1 anında 201,202 ve t_2 anında 501 ve 502 ile temasa girmektedir. Her iki anda da temasta olan noktalar arasında yük aktarımı meydana gelmektedir.



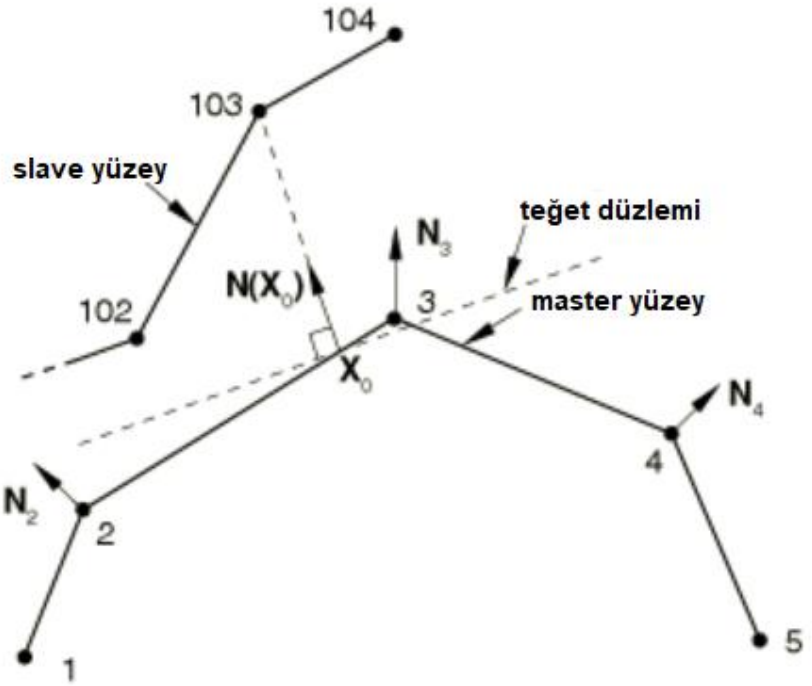
Şekil 2. 23: Sonlu-kayma yaklaşımında bir nodun yörüngesi[61].

2.8.6.5. Küçük-Kayma Yaklaşımı (Small-Sliding Approach)

Geometrik lineerliğin söz konusu olduğu analizler için, bu metot, temasta olan yüzeylerin relatif ve mutlak hareketlerinin çok küçük olduğunu varsaymaktadır.

Temas etkileşimleri slave yüzeydeki bir nokta ve lokal teğet düzlemi arasında gerçekleştiği varsayılmaktadır. Şekil(2.24) de bu metot kullanılarak tanımlanmış bir temas durumu görülmektedir. Teğet düzlemleri master yüzey üzerinde baz alınan bir X_o noktası ve bu noktadaki oryantasyon vektörü ile tanımlanmaktadır.

Eğer slave yüzey üzerinde bir nokta için karşı yüzeyde baz alınan bir nokta bulunamıyorsa, bu slave noktasında temasın gerçekleşmediği varsayılmaktadır.

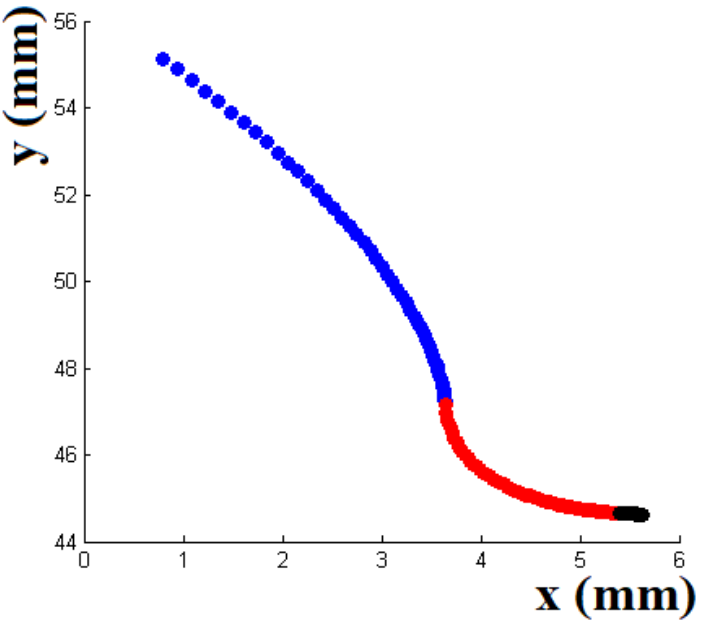


Şekil 2. 24: 103 nolu nod için yüzeyler arası temas metodu ve küçük kayma yaklaşımı kullanılarak baz alınan noktanın ve teğet düzleminin tanımlanması[61].

3. MALZEME VE YÖNTEM

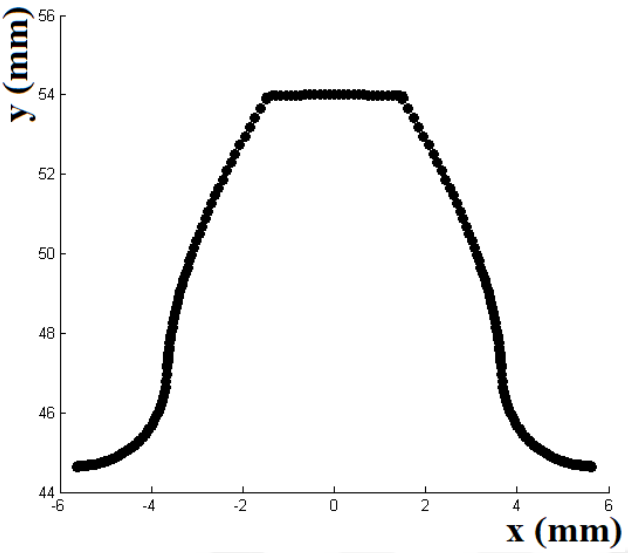
3.1. 3 BOYUTLU DİŞLİ MODELİNİN OLUŞTURULMASI

3 boyutlu dişli modellerinin oluşturulabilmesi amacıyla, MATLAB programı yardımıyla, alın kesitte 2 boyutlu dişli profillerinde sırasıyla evolvent, kök ve taban kısımlarını oluşturan noktaların koordinatları, SOLIDWORKS programına aktarılmış ve LOFT komutu yardımıyla 2 boyutlu profiller birleştirilmiştir.



Şekil 3. 1: Dişli profilini oluşturan bölgeler.

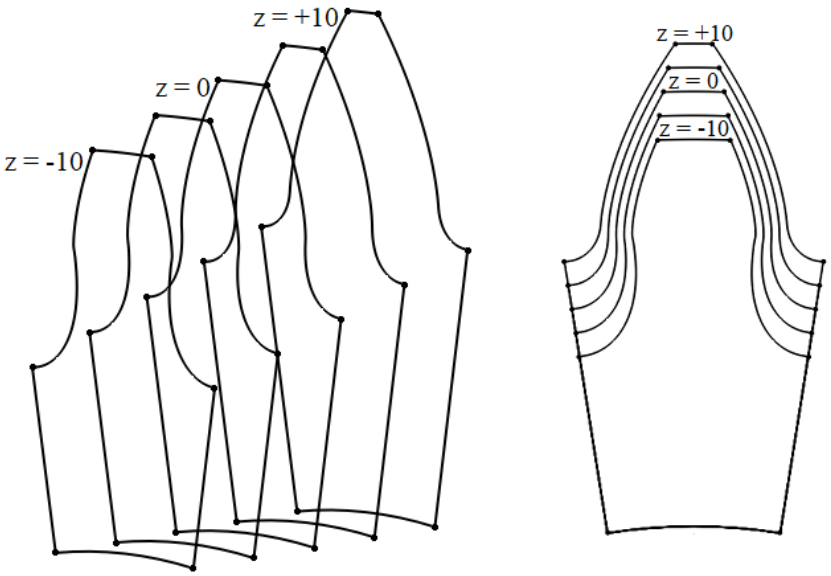
Şekilde mavi, kırmızı ve siyah bölgelerde sırasıyla 2 boyutlu diş profiline ait evolvent, kök ve taban bölgelerini göstermektedir.



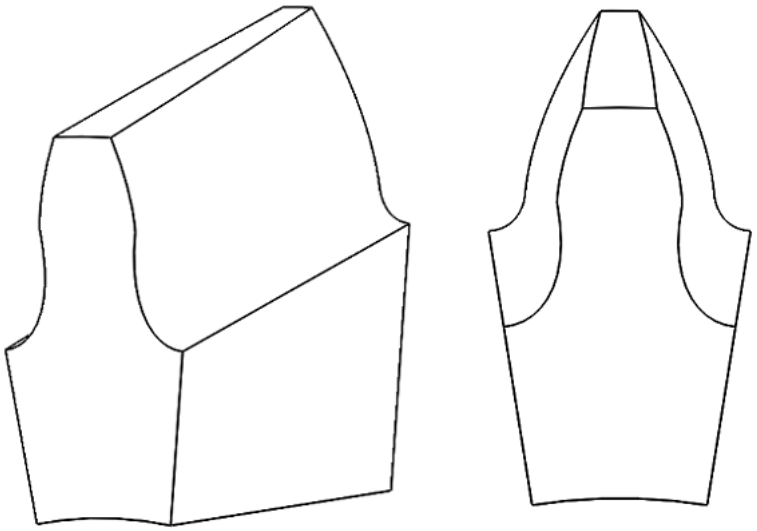
Şekil 3. 2: 2 boyutlu alın dişli profili.

Yukarıdaki şekilde de, "z=0" düzleminde 2 boyutlu simetrik diş profili görülmektedir.

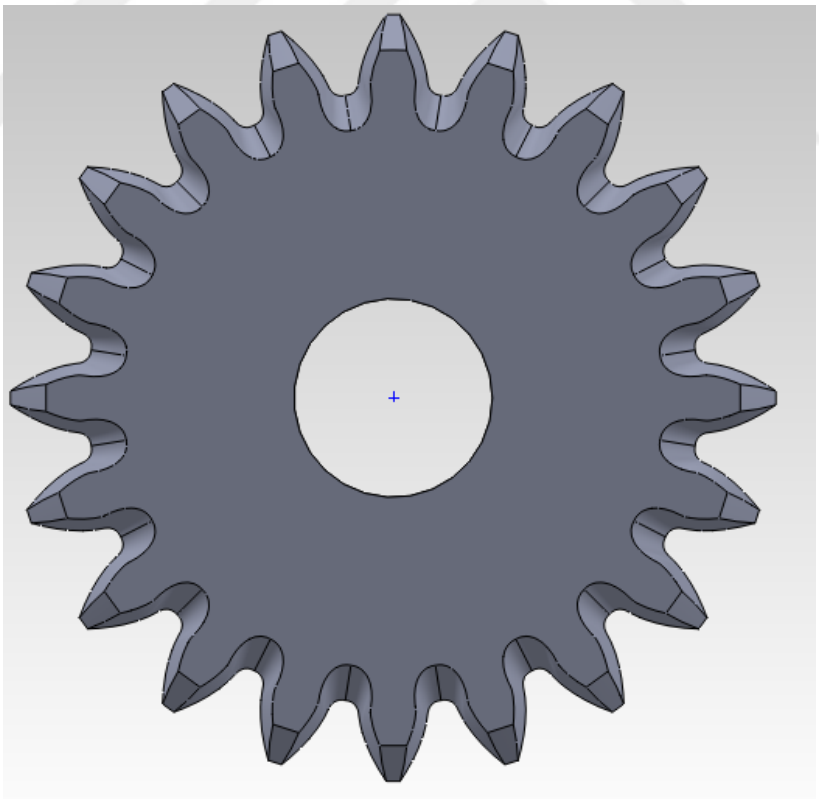
Verilen bilgiler doğrultusunda, matematiksel ifadelere uygun olarak oluşturulan evolvent profilli düz konik dişli modeli Şekil (3.3) ve (3.4) de görüldüğü gibi elde edilmiştir. Bu modelde normal modül m_n = 5mm, diş sayısı T = 20, koniklik açısı δ = 15˚, diş genişliği b = 20 mm olarak belirlenmiştir[64].



Şekil 3. 3: 3 boyutlu beveloid dişli modeli için kesit görüntüleri.



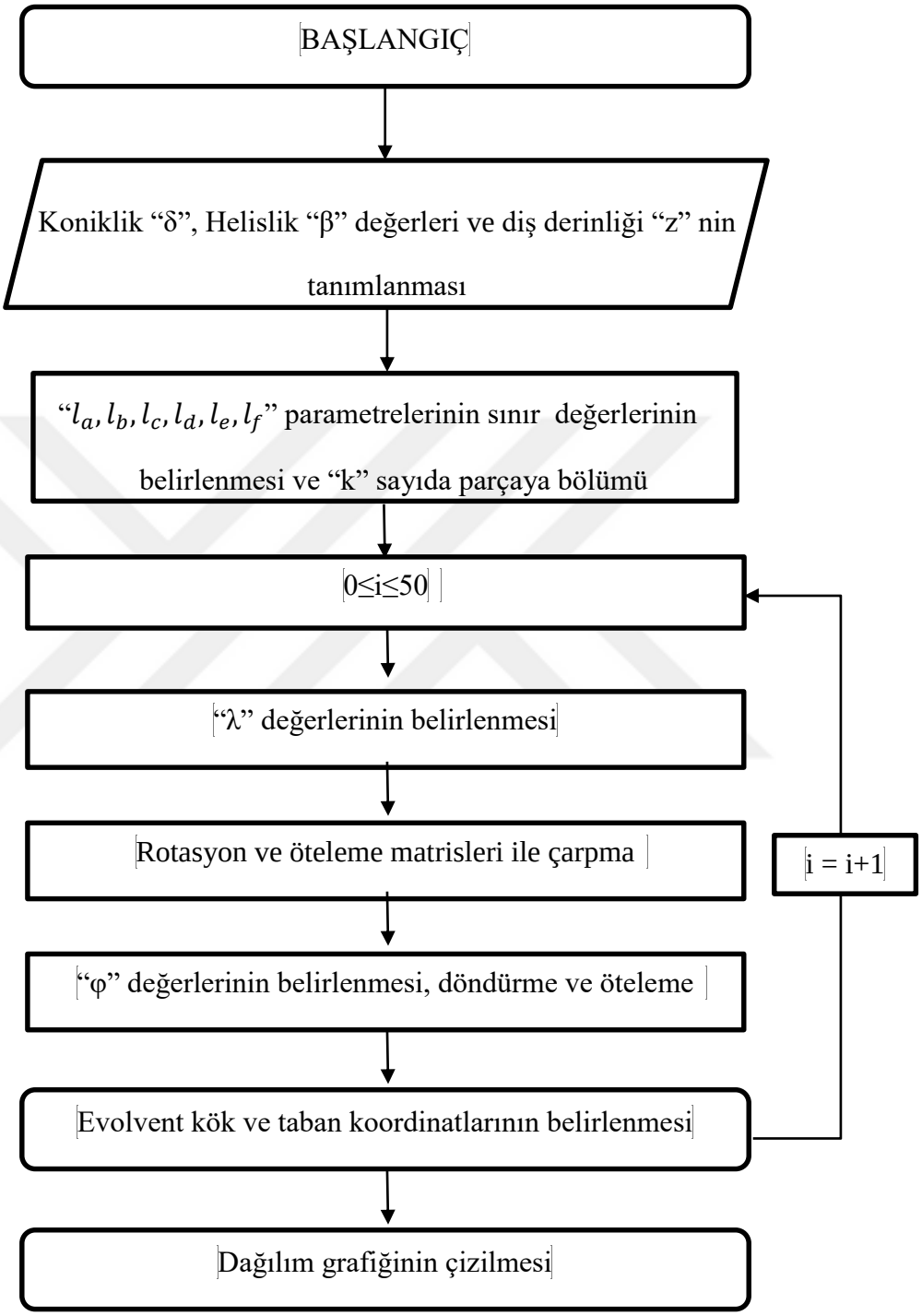
Şekil 3. 4: Beveloid dişlinin 3 boyutlu görünümü.



Şekil 3. 5: Evolvent profilli konik dişli için solidworks modeli.

Yukarıdaki şekilde, elde edilen 2 boyutlu dişli kesitlerinden hareketle Solidworks programı ile oluşturulan tüm dişli modeli görülmektedir.

3.1.1. Dişli Çizimi Algoritması



Şekil 3. 6: Dişli profillerini oluşturan algoritma.

3.2. KATI ERİYİK YIĞMA TEKNOLOJİSİ (FDM) METODUYLA MODELLEME

Fused Deposition Modelling (FDM) veya Fused Filament Fabrication (FFF) teknolojisi, malzeme ekstrüzyonu prensibinin kullanıldığı bir katmanlı imalat yöntemidir. Bu yöntemde, üretilmek istenilen parça, eritilmiş malzemenin önceden belirlenen yönler üzerinde, katmanlı olarak üst üste yığılması ile imal edilmektedir. Kullanılan malzemeler, filament formuna getirilmiş, termoplastik polimerlerdir[65].

Bu metot 3 boyutlu yazıcılarda çok yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu metodu kullanarak imalat yapılırken, doğru sonuçlara ulaşılması, temelde yöntemin kapasitesi ve kısıtlarının detaylı olarak incelenmesine bağlıdır.

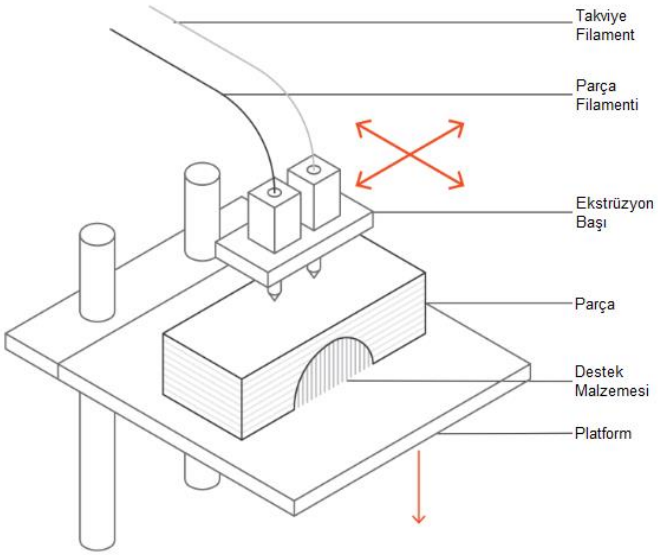
Bu yöntem yardımıyla imalatın gerçekleştirilmesi esnasında, aşağıdaki adımlar izlenilmektedir.

1) Makara halindeki termoplastik filament, yazıcıya yüklenir. Nozul istenilen sıcaklığa ulaştığında, filament, nozul içerisindeki ekstrüzyon başına gönderilir.

2) Ekstrüzyon başı, 3 eksende hareket edebilen bir sistem üzerine sabitlenmiştir. Eriyen malzeme ekstrüzyon başından, istenilen bölgelere ince tel şeritler halinde preslenerek, katmanlar halinde yığılmakta ve katılaşmaktadır. Bu aşamada bazı sistemlerde, malzemenin katılaşmasını hızlandırmak amacıyla soğutucu fanlar kullanılmaktadır.

3) Bir bölgenin doldurulabilmesi için üzerinde birden fazla geçiş yapılması gerekebilir. Bir katmanın tamamlanması durumunda, platform aşağı veya yukarı yönde hareket ettirilerek, parça üzerinde bir sonraki katmanın oluşturulması sağlanır. Aynı işlemler parça tamamlanana kadar tekrarlanacaktir.

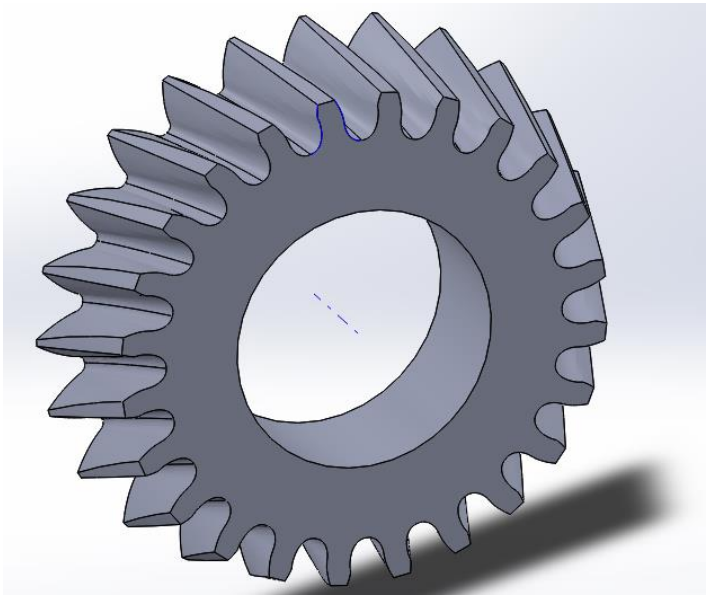
Aşağıdaki şekilde, FDM metodu ile modelleme yapan bir cihazın temel kısımları görülmektedir.



Şekil 3. 7: FDM metodu ile imalat yapan 3 boyutlu yazıcının temel kısımları[65].

Bu yöntem yardımıyla, bilgisayar destekli yöntemler ile modellenen heliselkonik dişli modelinin imalatı gerçekleştirilmiştir. Elde edilen modellerin, paralel ve çakışan eksenlerde, istenilen şekilde çalışabildiği gözlemlenmiştir.

Şekil (3.8) de m_n = 3mm, T= 24, δ = 15˚, β =15˚ parametreleri için dizayn edilmiş dişlinin Solidworks ile elde edilmiş katı modeli görülmektedir.



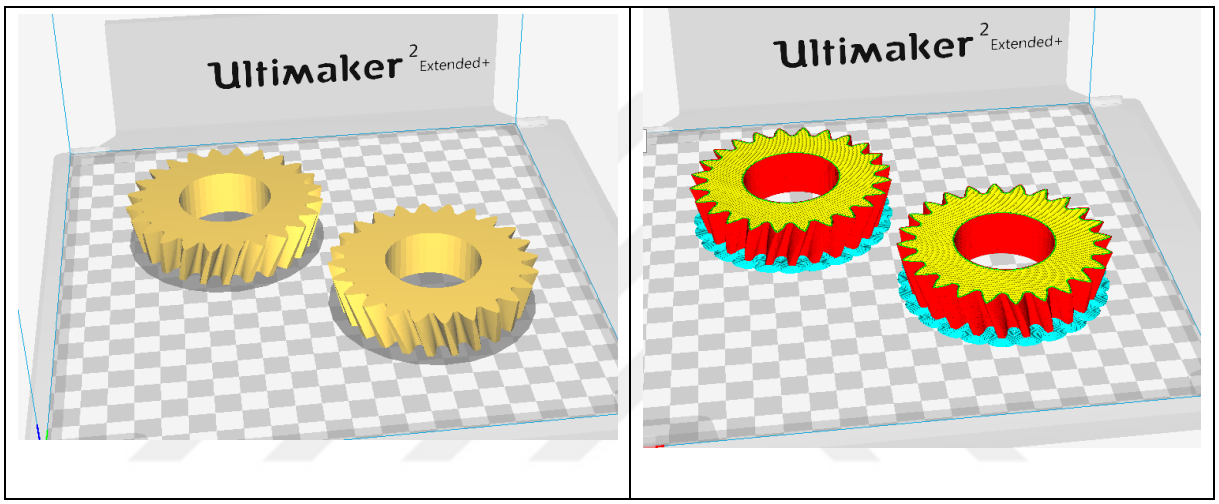
Şekil 3. 8: Heliselkonik dişli modeli.

Söz konusu modelin FDM yöntemi yardımı ile üretimi gerçekleştirilmiştir. Şekil(3.9) da üretim esnasında 3 boyutlu yazıcı sisteminden alınmış görüntüler görülmektedir. Burada üretim parametreleri;

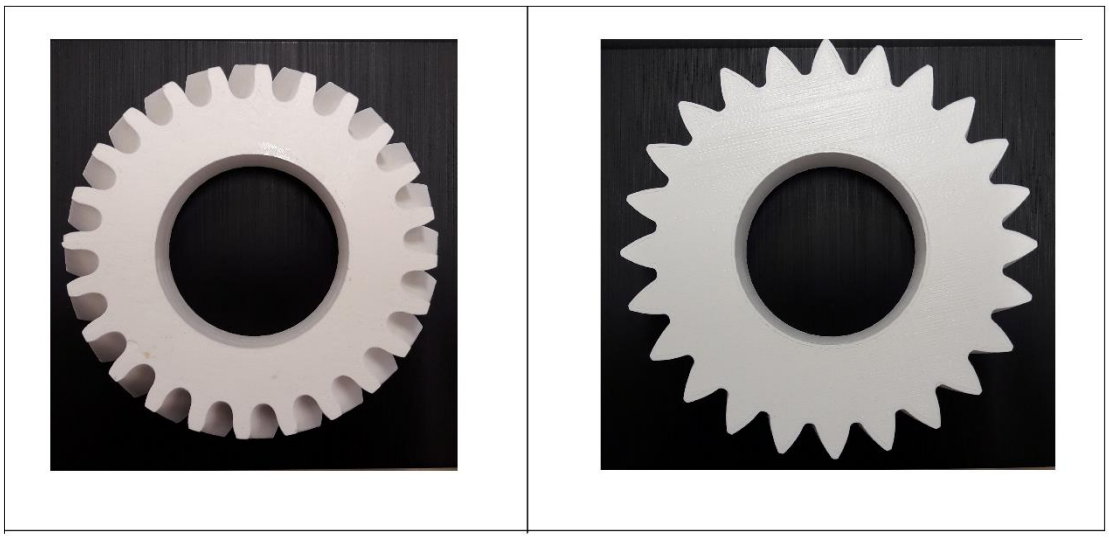
Malzeme : PLA

Katman yüksekligi : 140 mikron

Doluluk : %20 olarak belirlenmiştir.



Şekil 3. 9: Heliselkonik dişli üretim prosesi.



Şekil 3. 10: Heliselkonik dişlilerin FDM ile üretilen katı modelleri.

3.3. KONKAVLIK VE KONVEKSLİK MODİFİKASYONLARI

Beveloid dişlilerin, evolvent profilli konik dişli türleri olduğu önceki kısımlarda belirtilmiştir. Bu türdeki dişliler aynı zamanda paralel ve çakışan eksenlerde çalışabilmektedirler. Günümüzde beveloid dişli türlerinin dizayn ve üretim yöntemleri konusunda ortaya çıkan gelişmeler, uygulama alanlarının genişlemesinde büyük rol oynamıştır. Önceki kısımlarda belirtildiği üzere beveloid dişlilerin en bilinen kullanım alanı yat şanzıman sistemleridir. Burada beveloid dişliler, helisel veya düz profilli pinyon dişli ile temasa geçerek motor için en uygun açıda güç aktarımını sağlamaktadırlar[66]. Robotikte kullanılan diferansiyel dişliler ve sektör dişlilerinde de beveloid dişli türlerine rastlamak mümkündür. Ayrıca yapılan çalışmalarda belirtildiği üzere AWD (All Wheel Drive) tipi otomatik şanzımanlarda beveloid dişlilerin kullanılmasının uygun olduğu gösterilmiştir[67].

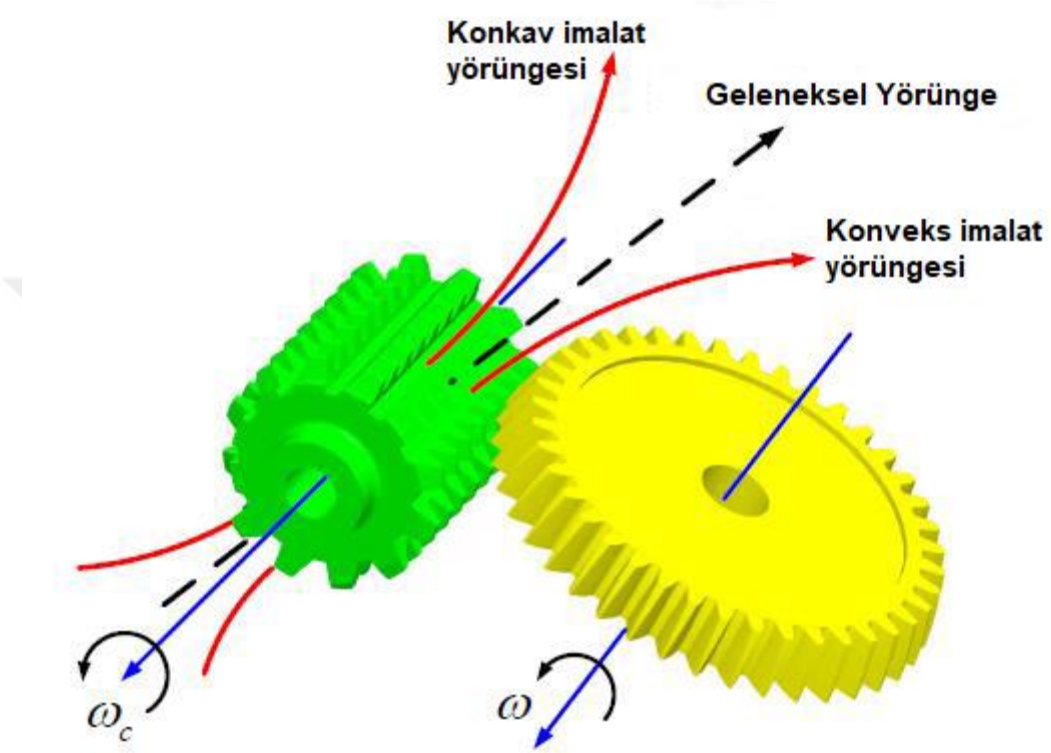
Beveloid dişlilerde, özellikle çakışan eksenlerde çalışma esnasında meydana gelen temas elipslerinin boyutları oldukça küçülmekte ve temasta oluşan basınç yükselerek, hasarların oluşabilme ihtimali güçlenmektedir. Bu tür sakıncaların giderilebilmesi amacıyla, beveloid dişli profillerinin dizaynında konkavlık modifikasyonlarının yapılması sıklıkla önerilen ve üzerinde çalışılan bir yöntem olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu yöntem vasıtasıyla, dişlerdeki düşük yük kapasiteleri, temasın oluştuğu alanların dolayısı ile temas elipslerinin büyütülmesi yardımıyla giderilebilmektedir. Tez kapsamında konkav beveloid dişlilerin temas analizleri sonlu elemanlar yöntemi ile gerçekleştirilerek, sonuçlar detaylı olarak sunulmuştur.

3.3.1. Konkav ve Konveks Beveloid Dişlilerin Matematik Modeli

Konkav beveloid dişlilerin matematiksel modellenmesinin, temel olarak önceki kısımlarda beveloid dişliler için verilen ifadelere dayandığını söylemek mümkündür. Buna ek olarak, evolvent ve kök kısımlarında, yüzey alanının genişlemesini sağlayan modifikasyonlar matematiksel ifadelere ilave edilerek benzer şekilde 2 boyutlu dişli kesit profilleri oluşturulmakta ve bu profiller CAD programları yardımıyla 3 boyutlu modellere dönüştürülmektedir.

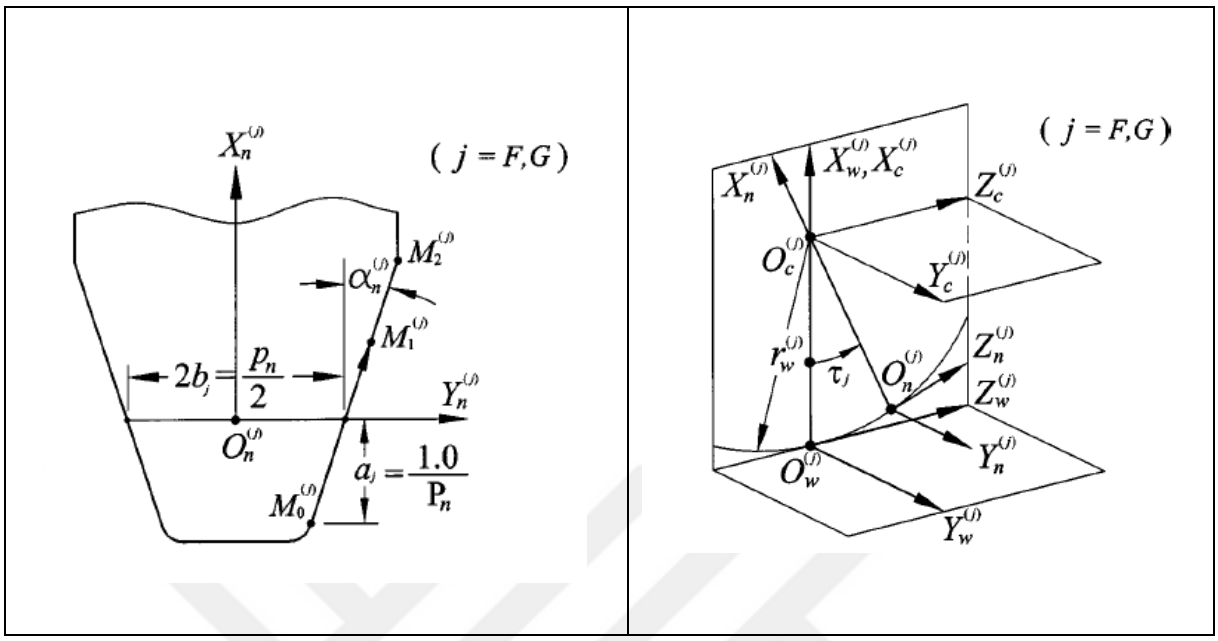
Konkav beveloid dişlilerin matematiksel modellemesinde izlenen genel yöntemi konkavlık ve konvekslik modifikasyonlarının oluşturulmasını sağlayan dönüşüm matrisleri ile kremayer takımın sırasıyla evolvent kök ve taban kısımlarının ifadelerinin çarpılmasından sonra,

dişli profillerinin z ekseninde herhangi bir değer için 2 boyuta projeksiyonunu sağlayan "λ" parametresinin buradan hareketle elde edilmesi ve koniklik ve helislik dönüşümlerinin buradan elde edilen ifadeler ile yapılması olarak özetlemek mümkündür. Bu yöntemin matematiksel olarak ifade edilmesi aşağıda verilmiştir.



Şekil 3. 11: Konkav ve konveks beveloid dişlilerin imalatı[68].

Konkav ve konveks beveloid dişlilerin matematiksel ifadesinde, öncelikle kremayer takım modellendikten sonra, yarıçapı konkavlık yarıçapı " r_w" ye eşit olan bir çember etrafında "θ" açısı kadar bir dönme yapıldığı düşünülür. Şekil (3.12) de sol tarafta kremayer takım sağda ise kremayer takımın koordinat sisteminin "$O_c^{(j)}$" orijini etrafında döndürülmesi ile meydana gelen yeni koordinat sisteminin ifadesi görülmektedir.



Şekil 3. 12: Kremayer takımın koordinat sisteminin dönüşümü[66].

Kremayer takımın evolvent kısmının modellenmesi esnasında kullanılan ifadeyi;

$$R_n^{fh} = \begin{bmatrix} x_n^{fh} \\ y_n^{fh} \\ z_n^{fh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_c - l_f \sin(\alpha_{n1}) + c_y \pi m_n \\ l_f \cos(\alpha_{n1}) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

olarak yazmak mümkündür[25]. Konkavlık ve konvekslik modifikasyonunu sağlayan dönüşüm matrisleri ise;

$$\mathrm{M}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & r_w \cos(\theta) - r_w \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & r_w \sin(\theta) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

olarak ifade edilebilir. Burada "r_w" değeri pozitif değer aldığında konvekslik negatif olduğunda ise konkavlık modifikasyonu sağlanacaktır. Denklem (2.13) ve (2.14) den koniklik ve helisliği sağlayan dönüşüm matrislerinin sırasıyla $\mathrm{M_{cp}}$ ve $\mathrm{M_{pn}}$ olduğu, ayrıca "ϕ_1" açısı kadar dönme ve "$r_1\phi_1$" kadar ötelemeyi sağlayan matrisin "M_{1c}" olduğu hatırlanırsa;

$$M_{kn} = [M_k][M_{cp}][M_{pn}] \tag{3.3}$$

$$R_c^i = [M_{kn}]R_n^i \tag{3.4}$$

$$R_1^i = [M_{1c}]R_c^i \tag{3.5}$$

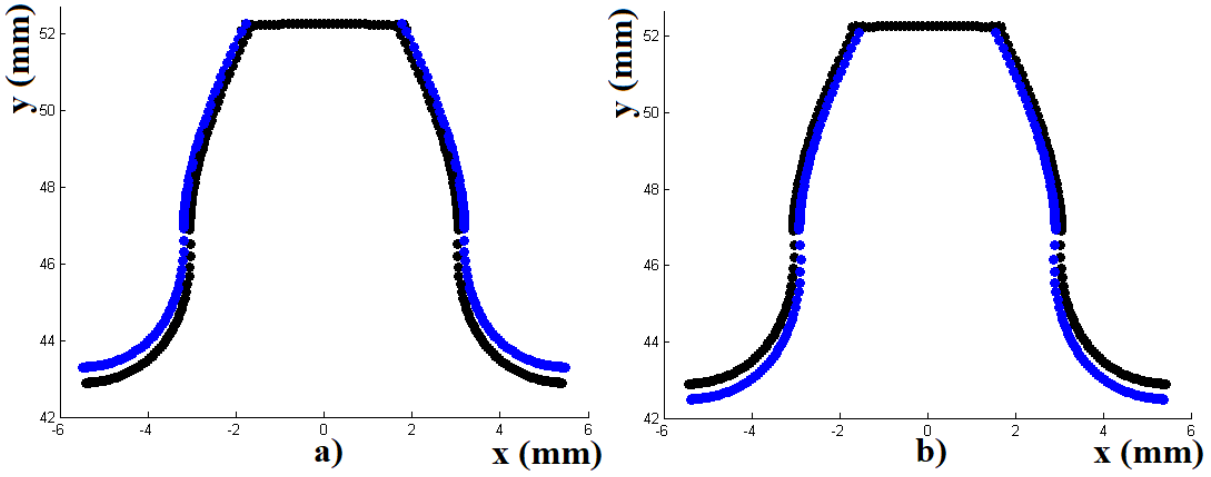
denklemlerini yazmak mümkün olacaktır. Burada, "R_1^i" kremayer takım ifadesinden yola çıkılarak elde edilen dişli koordinatlarını ifade eden vektördür.

Konkavlık ve konvekslik modifikasyonları esnasında, dişli profillerinin 2 boyutta projeksiyonunu sağlayan "λ" parametresinin elde edilebilmesi için, konkavlık ve konvekslik dönüşümünü sağlayan "M_k" dönüşüm matrisinin, M_{cp} ve M_{pn} matrisleri ile çarpılmasından sonra "z" eksenindeki büyüklükleri "0" değerine getirecek şekilde tanımlanması büyük önem arz etmektedir.

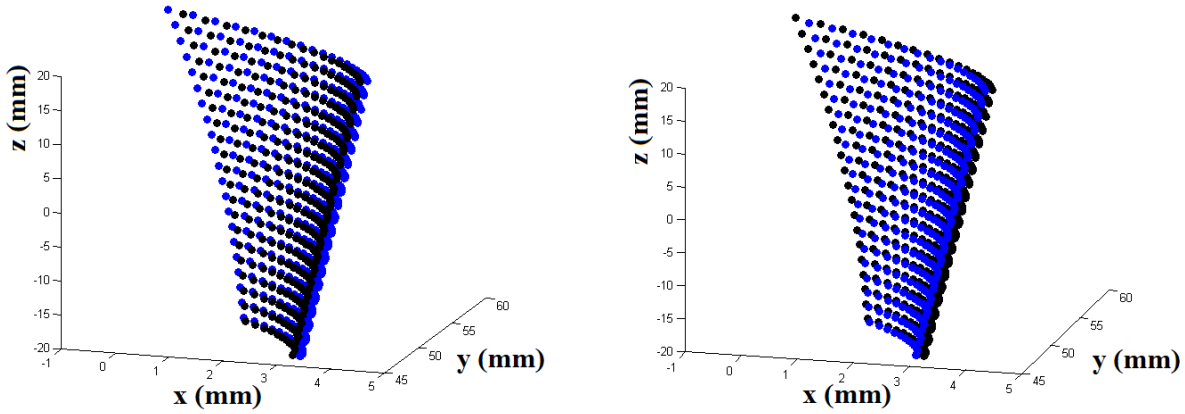
Bu modifikasyonların oluşturulması esnasında, " r_w" yarıçapı ve dönme açısı "θ" arasındaki ilişki ise;

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{W}{2(r_w - m)}\right) \tag{3.6}$$

Olacaktır[68]. Bu ifadelerin uygulanması sonucu elde edilen konkav ve konveks beveloid dişlilerin kesit görüntüleri ve normal beveloid dişli profilleri ile karşılaştırılması şekil (3.13) ve (3.14) de görülmektedir.



Şekil 3. 13: Konkav ve konveks dişli profillerinin (mavi renkte) modifiye edilmemiş profil ile (siyah renkte) karşılaştırılması a) konkav dişli, b) konveks dişli profilleri.



Şekil 3. 14: Konkav ve konveks dişli evolvent kısımlarının (mavi renkte) modifiye edilmemiş evolvent eğrileri ile (siyah renkte) 3 boyutta karşılaştırılması a) konkav dişli, b) konveks dişli profilleri.

Burada, siyah renk ile görülen profil modifikasyon yapılmamış beveloid dişli modeline, sol tarafta mavi ile gösterilmiş olan profil konkav beveloid dişli ve sağ tarafta mavi renkte görülen profil ise konveks beveloid dişli modeline aittir. Şekil (3.14) de ise, konkav ve konveks beveloid dişlilere ait evolvent kısımların 3 boyutta modifikasyon yapılmamış evolvent eğrileri ile karşılaştırılması görülmektedir. Evolvent eğrileri konkav beveloid modellerde dışarıya doğru genişlemekte, konveks beveloid modellerde ise iç kısımlara doğru daralmaktadır.

3.4. ALTTAN KESME ANALİZLERİ

Alttankesme durumları, dişlilerde çalışma esnasında gerilme yığılmaları ve kök hasarlarının meydana gelmesine sebep olabilen önemli bir olgudur. Ayrıca kök kısımları bu esnada kendisine karşılık gelen evolvent bölge ile birlikte çalışamaz ve bu da kavrama oranını düşürür.

Alttankesme durumlarını genel olarak, alın kesitte, diş dipleri olarak belirtilen kök kısımlarında meydana gelen daralmalar olarak tanımlayabilmek mümkündür. Bu durumlar, minimum diş sayısının altında imalat yapılması veya büyük koniklik açılarının tanımlanması ile kritik hale gelebilmektedir[16].

Beveloid dişlilerin modellenmesi esnasında alttan kesme durumlarının giderilmesini sağlayan metotların geliştirilmesi, yukarıda belirtilen kusurların giderilmesi amacıyla büyük bir öneme sahiptir. Bu çalışma kapsamında, alttan kesme durumlarını önleyen matematiksel ifadeler belirtilerek, modeller üzerinde uygulanmıştır. Çalışma durumları ise sonlu elemanlar metodu

yardımıyla simule edilmiştir. Bu amaçla üzerinde durulan temel iki metot, pozitif profil kaydırma ve asimetrik takım ile imalat metotlarıdır.

3.4.1. Pozitif Profil Kaydırma Metodu

Pozitif profil kaydırma yöntemi, genel anlamda, imalat esnasında takımın taslağa göre pozitif yönde yukarı ötelenmesi esasına dayanmaktadır. Bu yöntemin uygulanması ile kremayer takım parametrelerinde meydana gelen değişiklikler denklem(3.7-11) de gösterilmiştir. Burada x_i, profil kaydırma faktörünü ifade etmektedir.

$$0 \leq l_a \leq (\pi m_n/4) - a_c \tan(\alpha_{n1}) - \rho_1 cos(\alpha_{n1}) - m_n x_i \tan(\alpha_{n1}) \quad (3.7)$$

$$0 \leq l_b \leq (\pi m_n/4) - a_c \tan(\alpha_{n2}) - \rho_2 cos(\alpha_{n2}) - m_n x_i \tan(\alpha_{n2}) \quad (3.8)$$

$$a_t = m_n(1 + x_i) \quad (3.9)$$

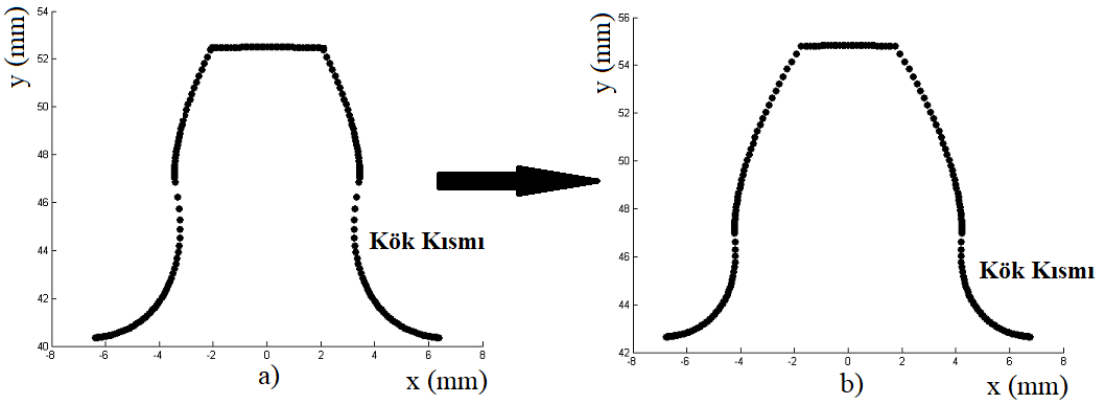
$$a_c = m_n(1 - x_i) \quad (3.10)$$

$$b_c = (\pi m_n/4) + (x_i m_n tan(\alpha_{n1})) \quad (3.11)$$

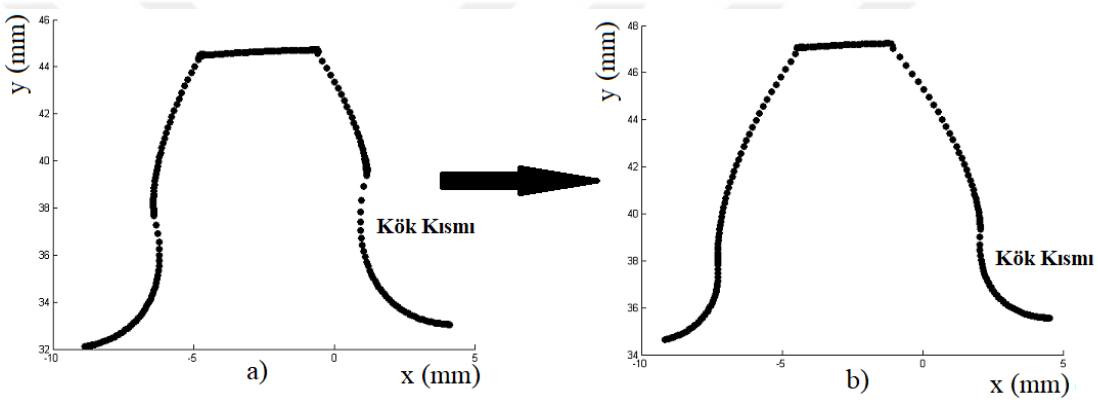
Profil kaydırma faktörü x_i ise denklem (3.12) yardımıyla hesaplanabilmektedir.

$$x_i = \frac{\cos(\beta)}{\cos(\delta)} - \frac{T \sin(\alpha_t)^2}{2} \quad (3.12)$$

Burada, α_t alın kavrama açısını ifade eden parametredir[7]. Şekil (3.15) ve (3.16) da sırasıyla, m_n= 5mm, T = 20, δ= 15˚, β = 0˚ ve m_n = 5mm, T = 16, δ= 10˚, β = 15˚ parametreleri için z_i= -10mm diş genişliğinde normal yöntemler ile ve pozitif profil kaydırma kullanılarak elde edilmiş dişli profilleri alın kesitte gösterilmiştir.

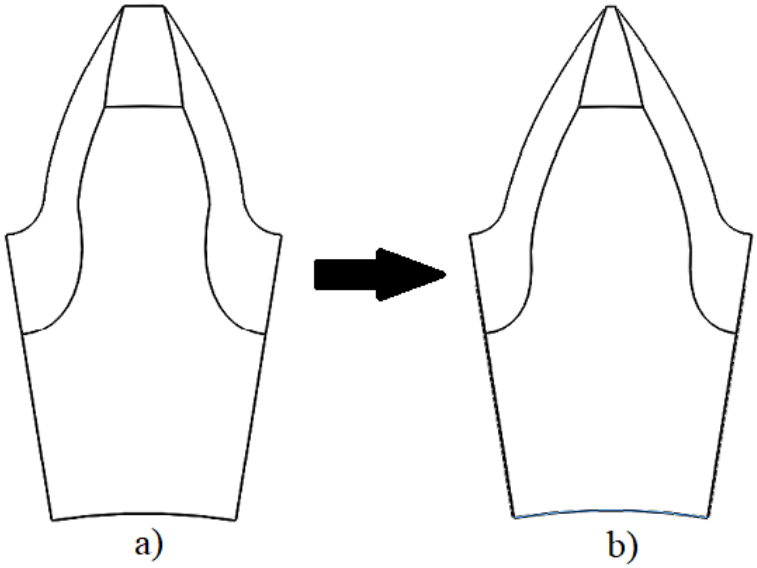


Şekil 3. 15: Düz beveloid dişliler için kesit görüntüleri; a) alttankesmeye uğramış b) pozitif profil kaydırma yapılmış.



Şekil 3. 16: Helisel konik dişliler için kesit görüntüleri; a) alttankesmeye uğramış b) pozitif profil kaydırma yapılmış**.**

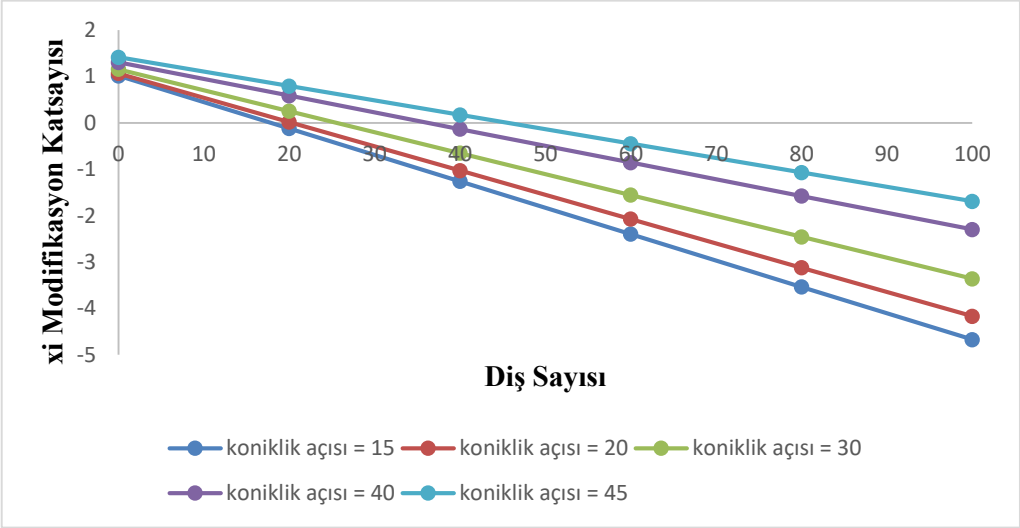
Şekil (3.17) de ise, pozitif profil kaydırma yöntemi uygulanmış olan 3 boyutlu beveloid dişli modelleri görülmektedir. Bu modeller için dişli parametreleri, m_n = 5mm, T = 20, δ = 15˚, b = 20mm olarak belirlenmiş, profil kaydırma faktörü ise, x_i = 0.5 olarak seçilmiştir[64].



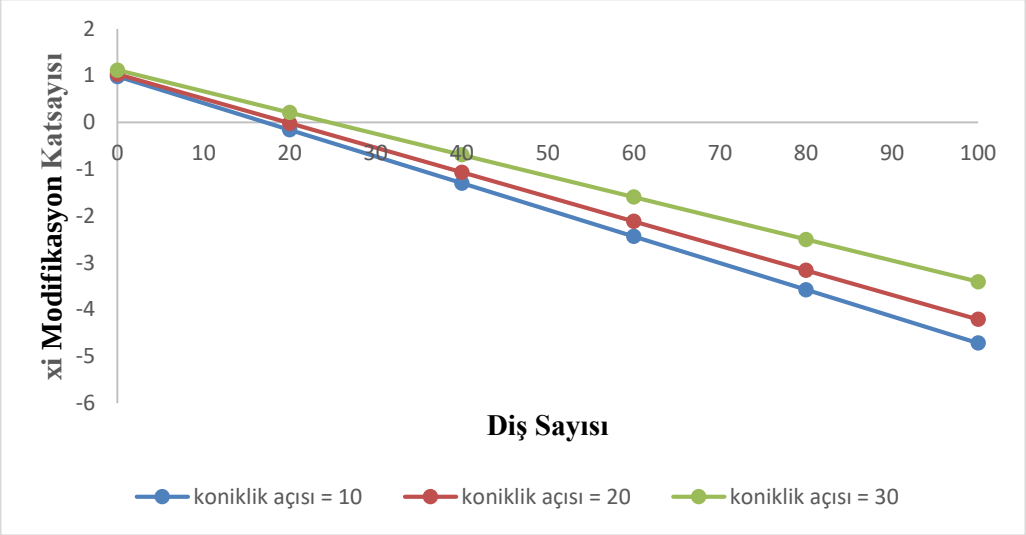
Şekil 3. 17: 3 boyutlu düz beveloid dişli modelleri; a) alttankesmeye uğramış, b) pozitif profil kaydırma yapılmış modeller.

Burada görünen bir diğer önemli husus, pozitif profil kaydırma uygulanan modelde, topuk tarafında görülen sivri tepe tehlikesidir.

Farklı koniklik açıları için minimum profil kaydırma faktörü x_i nin değişimi ise şekil (3.18) ve (3.19) da gösterilmiştir. Burada, şekil (3.18) de, helislik açısı β = 0˚ iken koniklik açısı δ = 0 ˚ ile 15˚ arasında değişmekte ve şekil (3.19) da helislik açısı β = 20˚, koniklik açısı ise δ = 10 ˚ ile 30˚ arasında değişmektedir.



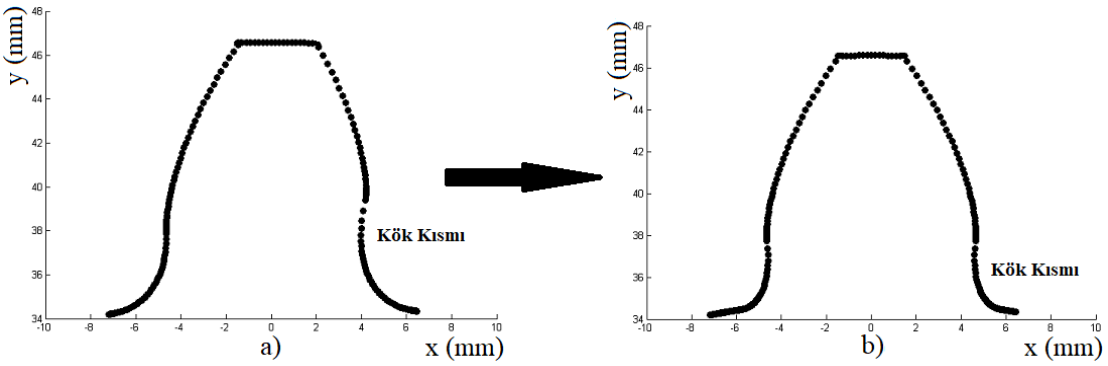
Şekil 3. 18: Düz beveloid dişlilerde profil kaydırma faktörü ile diş sayıları arasındaki ilişki.



Şekil 3. 19: Helisel beveloid dişlilerde profil kaydırma faktörü ile diş sayıları arasındaki ilişki.

3.4.2. Asimetrik Takım ile İmalat Metodu

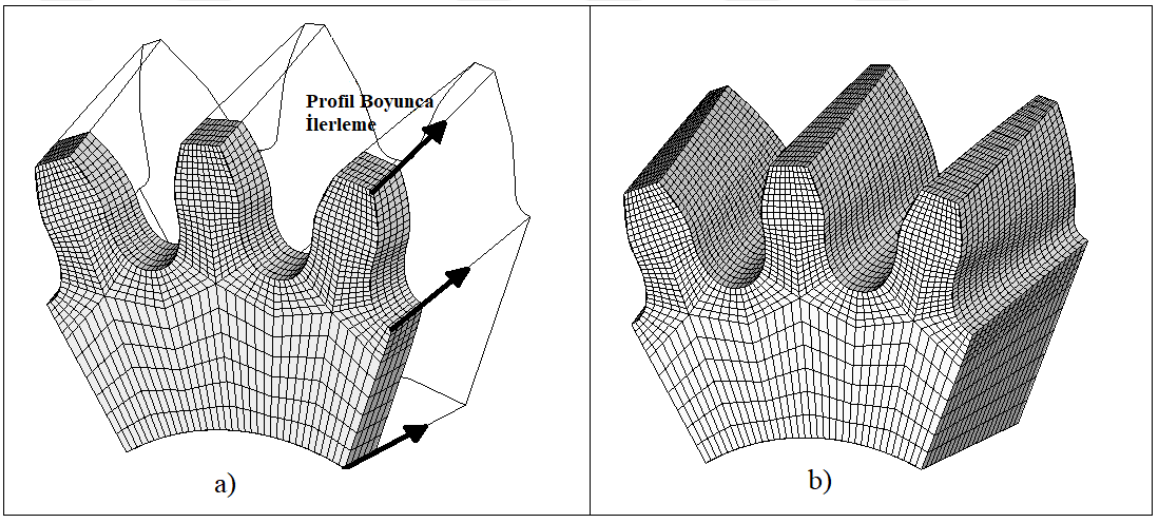
İmalatın asimetrik kremayer takım kullanılarak yapılması, alttan kesme durumlarını giderebilecek önemli bir yöntemlerden biridir[8,45]. Şekil (3.20) de simetrik ve asimetrik takım kullanılarak imal edilmiş dişli profilleri alın kesitte gösterilmiştir. Burada, temel parametreler, z_i = 0 mm diş derinliği için m_n = 5mm, T= 16, δ = 15˚, β = 15˚olarak belirlenmiş, kavrama açıları ise alttan kesmenin meydana geldiği profilde $\alpha_n = 20^\circ$ iken asimetrik takımla imal edilen dişlide sırasıyla, $\alpha_{n1} = 26.6873^\circ$, $\alpha_{n2} = 20^\circ$ dir[64].



Şekil 3. 20: Helisel konik beveloid dişliler için kesit görüntüleri; a) Simetrik takımla imal edilmiş, b) Asimetrik takımla imal edilmiş modeller.

3.4.3. Sonlu Eleman Modelleri

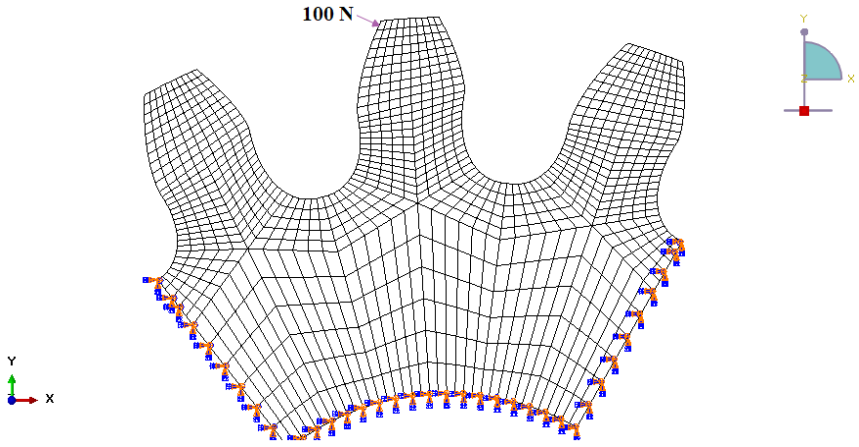
Sonlu elemanlar modellerinin oluşturulması esnasında, Hypermesh programı kullanılmıştır. Dişli yüzeyleri önceki kısımlarda anlatıldığı üzere, 2 boyutlu profiller yardımı ile Solidworks programı dahilinde oluşturulmuştur. Daha sonra yüzey modelleri Hypermesh içerisinde dahil edilerek, öncelikle ön yüzeylerde sonlu elemanlar oluşturulmuştur. Ön yüzeylerde istenilen kalınlıkta elde edilen 3 boyutlu elemanlar, profil boyunca ötelenerek kopyalanmıştır. Şekil(3.21) de bu aşamada elde edilen 3 boyutlu sonlu eleman modelleri görülmektedir. Modellemeler esnasında, C3D8I tipi, 3 boyutlu ve 8 düğüm noktası (nod) bulunan eleman türü seçilmiştir[64].



Şekil 3. 21: Beveloid dişlilerin 3 boyutlu sonlu eleman modelleri a) oluşturulma prosesi b) tamamlanmış 3 boyutlu model.

3 boyutlu modeller daha sonra temas analizlerinde eş çalışma durumlarının simule edilebilmesi amacıyla kullanılmıştır. Alttan kesme analizlerinde ise, kritik kısımlar olarak belirlenen köklerde gerilme dağılımlarının her bir diş derinliğinde ayrıntılı görülebilmesi amacıyla kritik kesitlerde 2 boyutlu elemanlar kullanılarak modelleme yapılmıştır. Bu aşamada, CPS4R tipi, 2 boyutlu, 4 düğüm nodlu, bilineer elemanlar seçilmiştir.

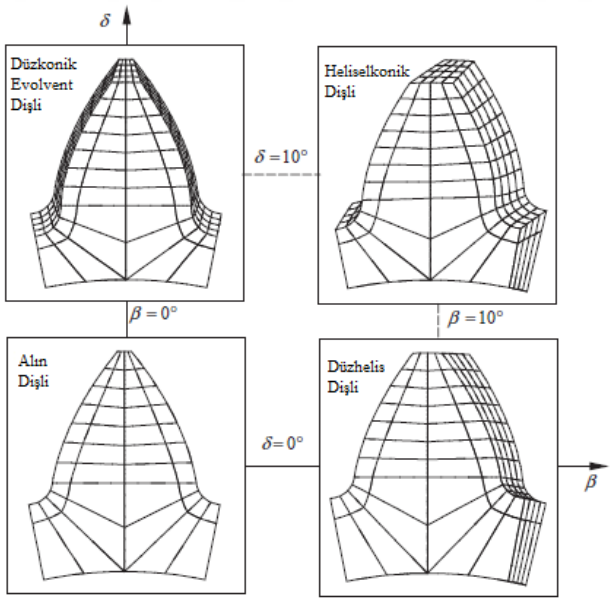
Şekil (3.22) de alttankesme analizleri esnasında belirlenen sınır koşulları ve yükleme durumu gösterilmiştir. Uygulanan kuvvet, dişbaşı kısmında basınç olarak belirlenmiş, sınır koşulları ise yan kısımlar ve mil boşluklarında zorlanmaların doğru gözlemlenebilmesi için ankastre olarak tanımlanmıştır.



Şekil 3. 22: 2 boyutlu analizlerde yükleme durumu ve sınır koşulları.

3.4.4. Elemanların Optimizasyonu

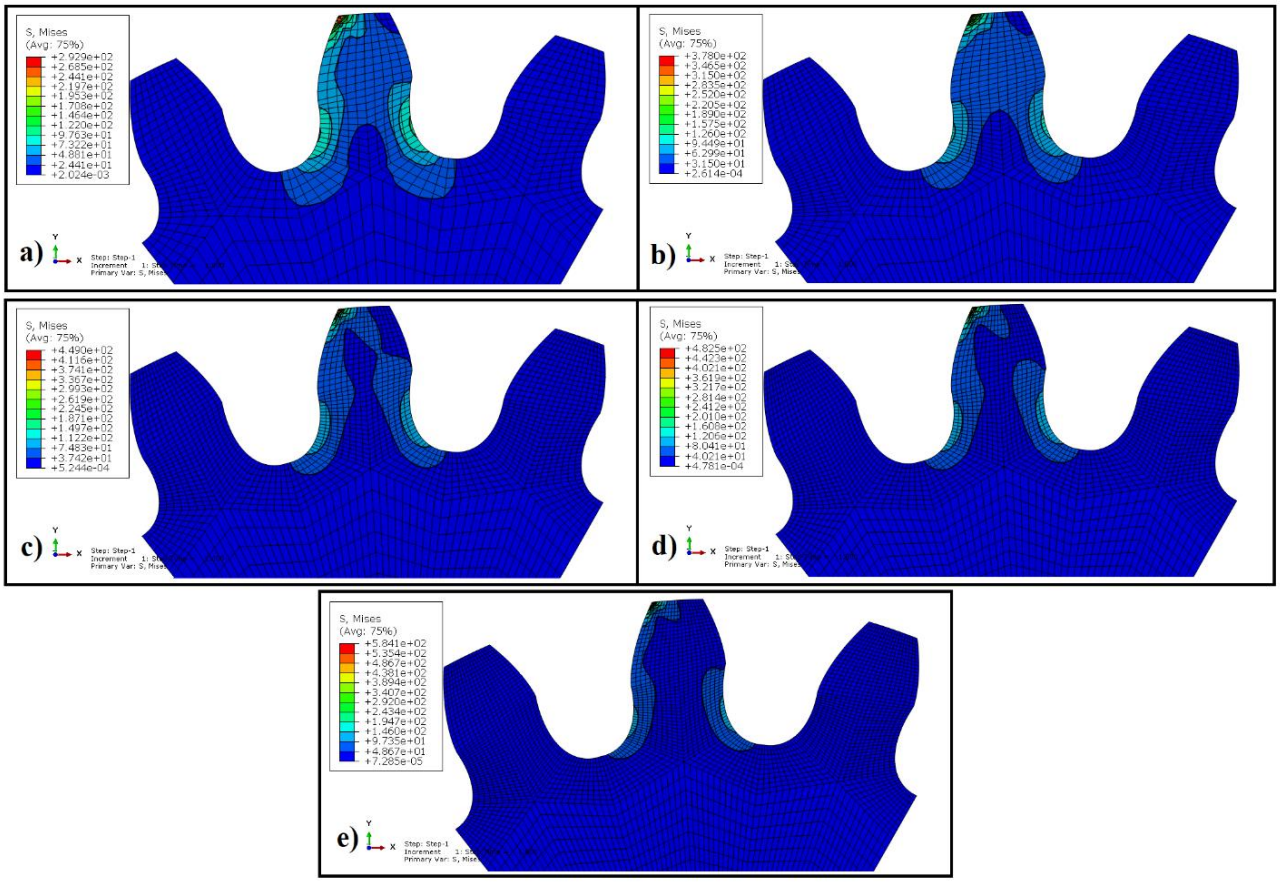
Sonlu eleman modellerinin oluşturulması sırasında, Şekil(3.23) de gösterilen yapılar esas alınmıştır. Evolvent ve kök kısımların geometrik yapısını koruyabilmek amacıyla, ayırma (partition) tekniği kulanılarak, yüzeyler üzerinde dörtgen geometride "mapped" elemanlar oluşturulmuştur. CPS4R kodlu iki boyutlu dörtgen eleman türü tercih edilmiştir.



Şekil 3. 23: Farklı diş geometrileri için oluşturulan sonlu eleman modelleri[17].

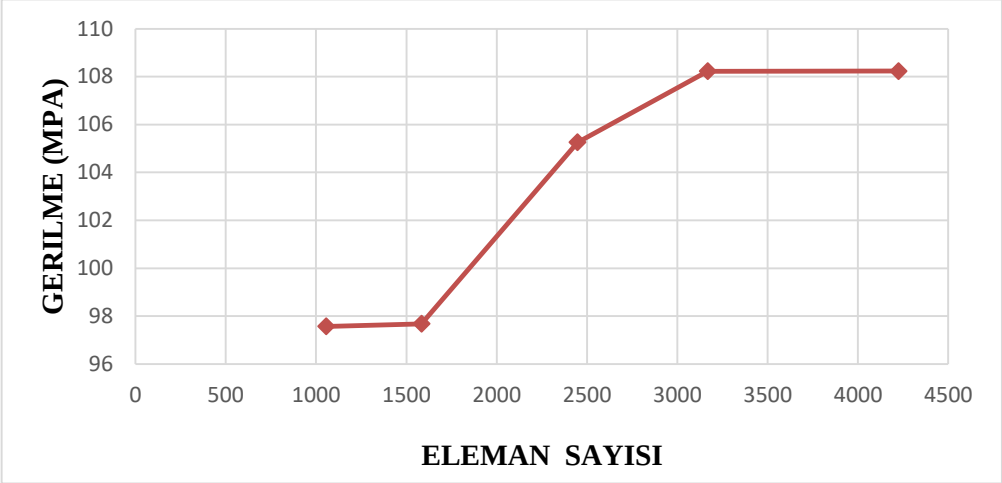
Analizlerde kullanılacak olan eleman ve nod sayılarının belirlenebilmesi amacıyla, "h metodu" uygulanmış, eleman sayıları düzgün olarak değiştirilerek, elde edilen sonuçlar

karşılaştırılmıştır. Eleman sayılarının arttırılması ile sonuçların sabit bir değere yakınsadığı görülmüş, bu durumun ilk saptandığı durumdaki eleman sayıları baz alınarak sonraki analizler gerçekleştirilmiştir. Eleman sayılarının belirlenmesi amacıyla yapılan analizler Şekil (3.24) de görülmektedir. Burada, dişlerin tepe noktasında 100N değerinde yatay eksende tekil yükleme uygulanmış, sınır koşulları ise, mil boşlukları vey yan kısımlardan ankastre olarak belirlenmiştir. Analizler, m_n = 5mm, T= 16, δ = 10˚, β = 15˚ parametrelerinde heliselkonik dişli geometrileri için yapılmıştır.



Şekil 3. 24: Farklı eleman sayılarında yapılan analiz sonuçları.

Analizlerde, eleman sayıları a,b,c,d ve e de sırasıyla, 1056, 1584, 2448,3168 ve 4224 dür.



Şekil 3. 25: Farklı eleman sayılarına bağlı olarak gerilme değerlerinin değişimi.

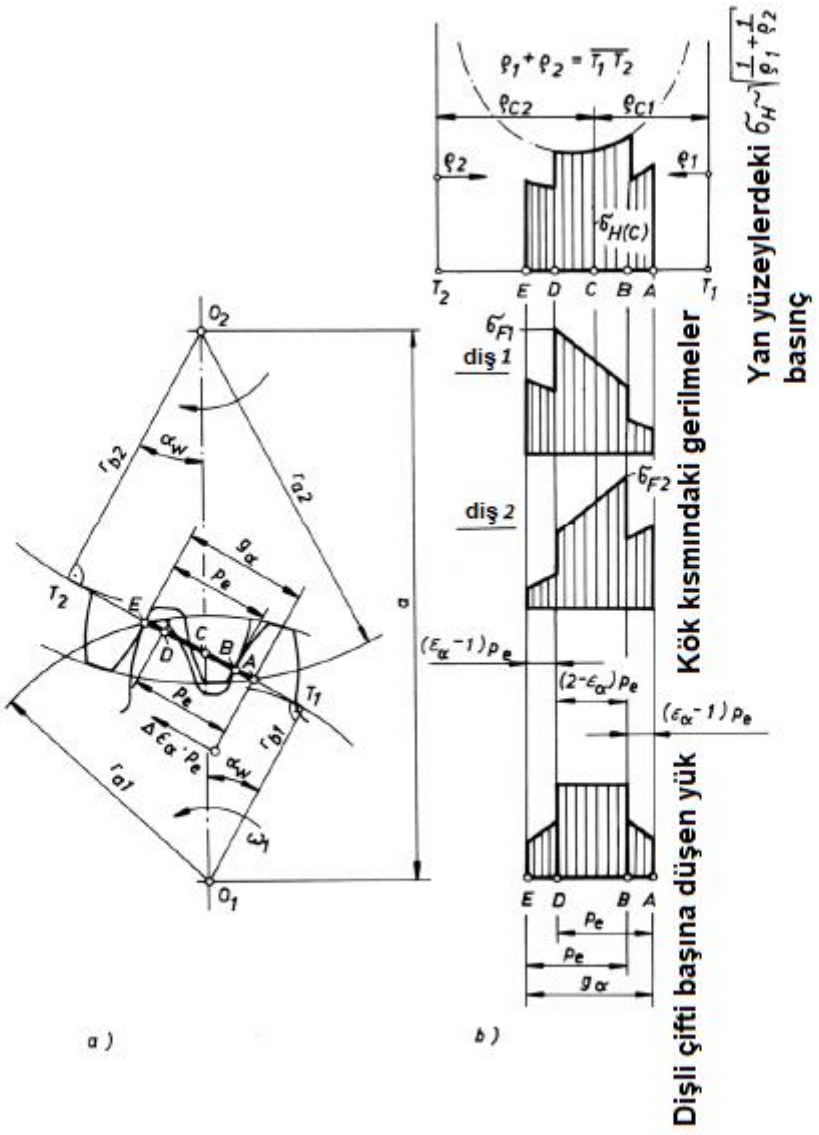
Şekil (3.25) deki grafikte, farklı eleman sayılarında kritik kesit boyunca Von Mises gerilme değerlerinin değişimi görülmektedir. Şekilde görüldüğü üzere, eleman sayılarının artması ile alınan sonuçlar sabit bir değere yakınsamakta ve belirli bir noktadan sonra eleman sayısının artışı, sonuçları kayda değer ölçüde etkilememektedir. Eleman sayılarının artması aynı zamanda çözüm sürelerinin de uzamasına sebep olabilmektedir. Ancak, eleman türlerinin lineer olması ve yükleme durumlarının basitliği sebebiyle, alttan kesme analizleri esnasında model e de görülen eleman sayısı baz alınmıştır[64].

3.5. DİŞLİ TEMAS ANALİZLERİ

Farklı koniklik ve helislik parametrelerine sahip modellerin temas analizleri farklı dönme açıları için gerçekleştirilmiştir. Sonlu eleman modelleri, temasın meydana geldiği yüzeylerde eleman sayıları maksimum, mil bağlantısının yapıldığı gövde kısımında ise minimum olacak şekilde belirlenmiştir. İç kısımlarda ise piramit türünde lineer elemanlar kullanılmıştır. Modeller Hypermesh programı dahilinde oluşturulmuştur.

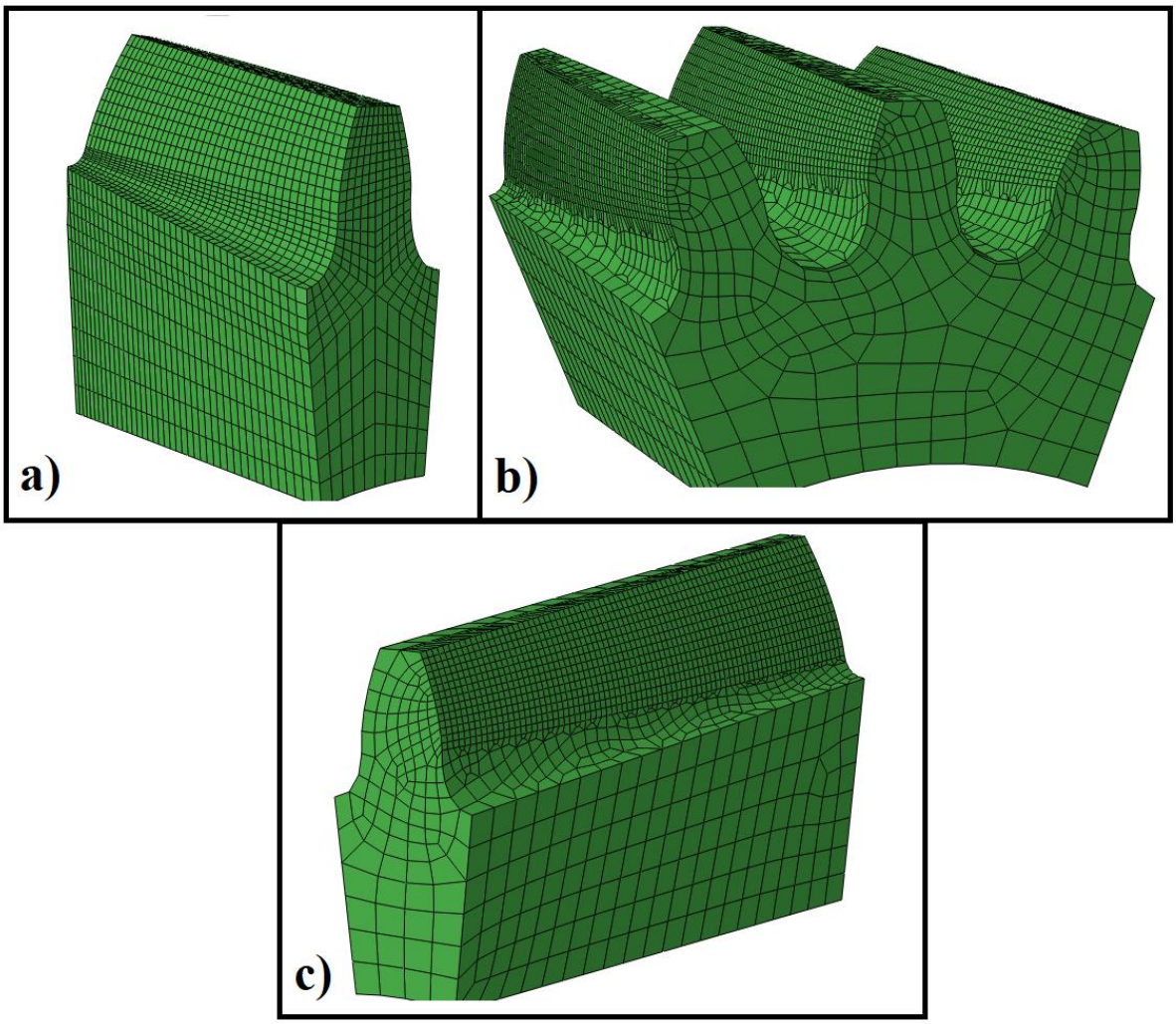
Tek diş modelinin kullanıldığı analizlere göre özellikle kök ve taban kısımlarında eleman yapısının daha kaba olduğu söylenebilir. Bunun sebebi ard arda gelen 3 diş şeklinde modelleme yapılması dolayısı ile eleman sayıları ve analiz sürelerinin buna bağlı olarak artmasıdır. Sınır koşulları mil boşluklarında ankastre, yan kısımlarda iki boyutta hareket serbestliği olacak şekilde belirlenmiştir. Yükleme ise mil boşluklarından döndürme momenti uygulanacak şekilde tanımlanmıştır.

Aşağıdaki şekilde, temas esnasında yan yüzeyler ve kök kısımlarında oluşan gerilme dağılımları teorik olarak gösterilmiştir.



Şekil 3. 26: Temas sırasında dişler arasındaki yük ve gerilme dağılımı[69].

Bu analizlerde, yuvarlanma noktası üzerinde ortalama Von Mises ve temas gerilmesi (contact press) değerlerinin maksimum, temasın sona erdiği dönme açılarında ise minimum olduğu görülmüştür. Bu sonuçlar, literatürde yapılmış çalışmalar ile benzerlik göstermektedir.



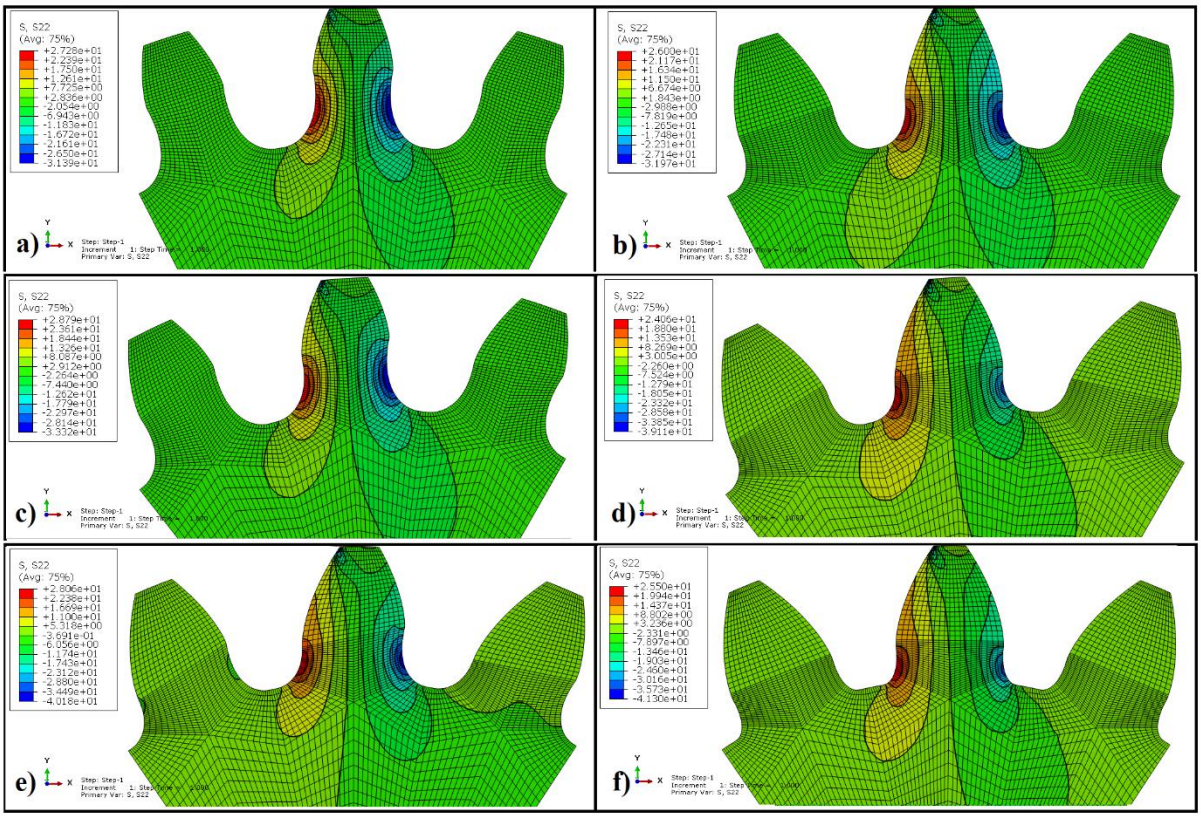
Şekil 3. 27: Sonlu Eleman Modelleri.

Analizler esnasında kullanılan sonlu eleman modelleri şekil (3.27) de gösterilmiştir. Heliselkonik modellerin analizlerinde model a da görülen, evolvent ve kök kısımları "partition" yöntemi ile ayrılmış tek diş modelleri kullanılırken, paralel eksenlerde genel temas analizleri esnasında ve konkavlık modifikasyonlarının test edilmesi aşamasında, model b ve c de görülen modeller kullanılmıştır. Bu durumda eleman sayısının çok fazla artması sebebiyle eleman sayıları, temasın oluştuğu evolvent yüzeylerden mil boşluklarına doğru azalan biçimde dağılmış modeller, Hypermesh programı yardımıyla oluşturulmuştur. Modellerin eleman sayıları ise sırasıyla 11070, 105968, 38118 dir.

4. BULGULAR

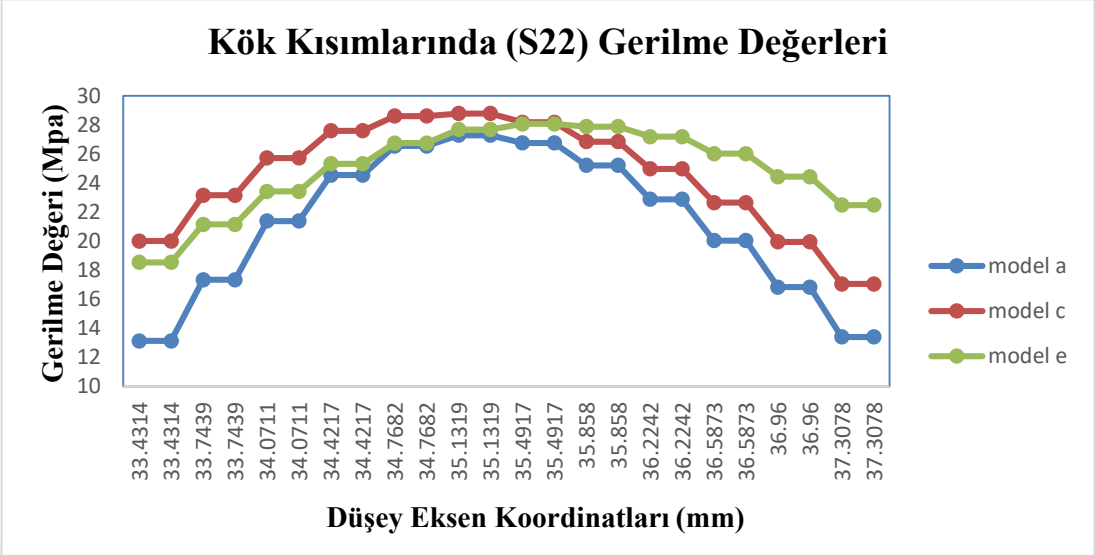
4.1. ALTTANKESME DURUMLARININ ANALİZİ

Sonlu eleman analizlerinden alınan sonuçlar şekil (4.1) de verilmiştir[64].

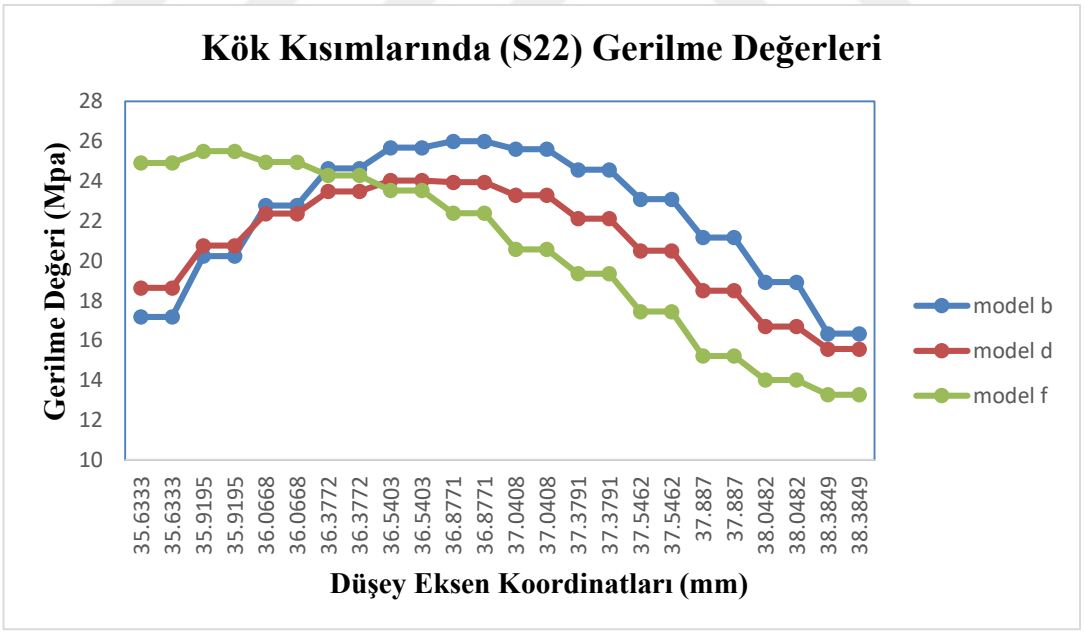


Şekil 4. 1: Sonlu eleman analizi sonuçları.

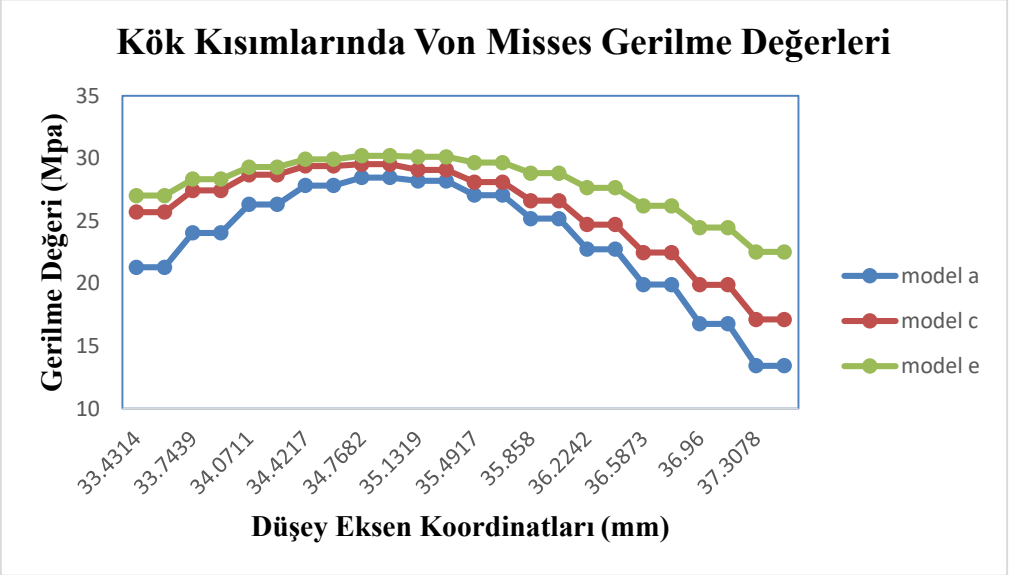
Model a,b,c ve d de düz konik ve helisel konik dişli geometrileri için, alttan kesmeye uğramış ve pozitif profil kaydırma ile üretilmiş sonlu eleman modelleri, e ve f de, simetrik ve asimetrik takımla imal edilmiş heliselkonik dişli modelleri görülmektedir. Profil kaydırma için belirlenen modifikasyon faktörü $x_i = 0.45m_n$ olarak hesaplanmıştır.



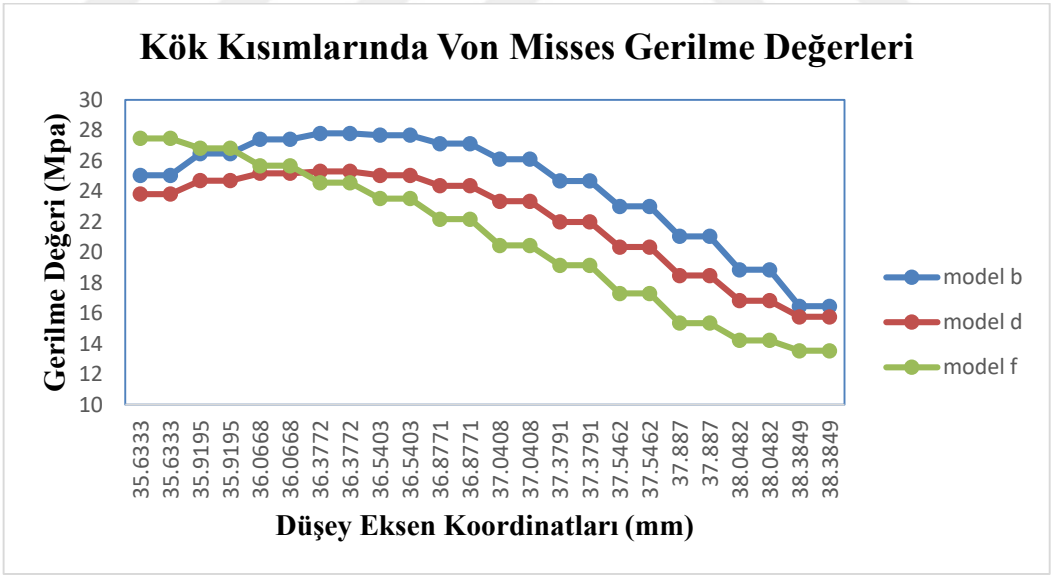
Şekil 4. 2: Model a, c ve e için kök bölgesinde, S22 (Gerilme) değerlerinin değişimi[64].



Şekil 4. 3: Model b, d ve f için kök bölgesinde, S22 (Gerilme) değerlerinin değişimi[64].



Şekil 4. 4: Model a, c ve e için kök bölgesinde, Von Misses (Gerilme) değerlerinin değişimi[64].



Şekil 4. 5: Model b, d ve f için kök bölgesinde, Von Misses (Gerilme) değerlerinin değişimi[64].

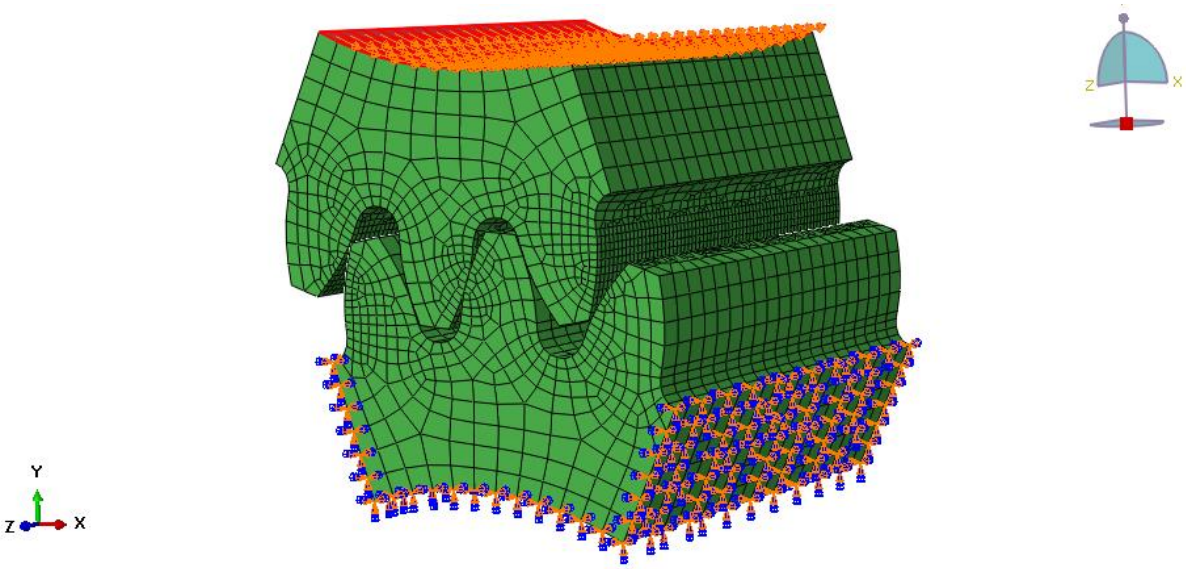
Sonuçlarda, pozitif profil kaydırma ve asimetrik kremayer takımla imalat yapılmış modellerde kök kısımlarındaki gerilme değerlerinin düştüğü görülmektedir.

4.2. PARALEL EKSENLER İÇİN DİŞLİ TEMAS ANALİZLERİ

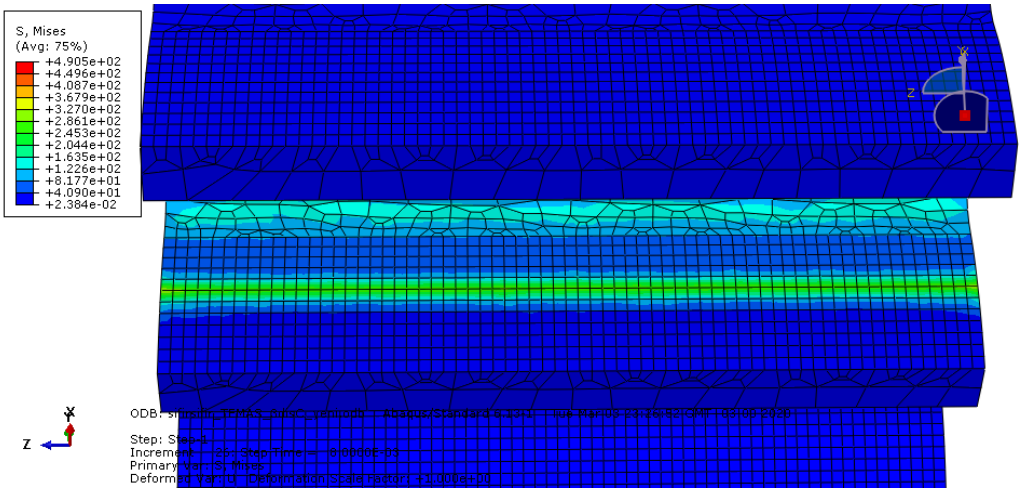
4.2.1. Örnek 1

m_n = 4mm, T= 25, δ = 0˚, β = 0˚ değerleri için elde edilen sonuçlar görülmektedir.

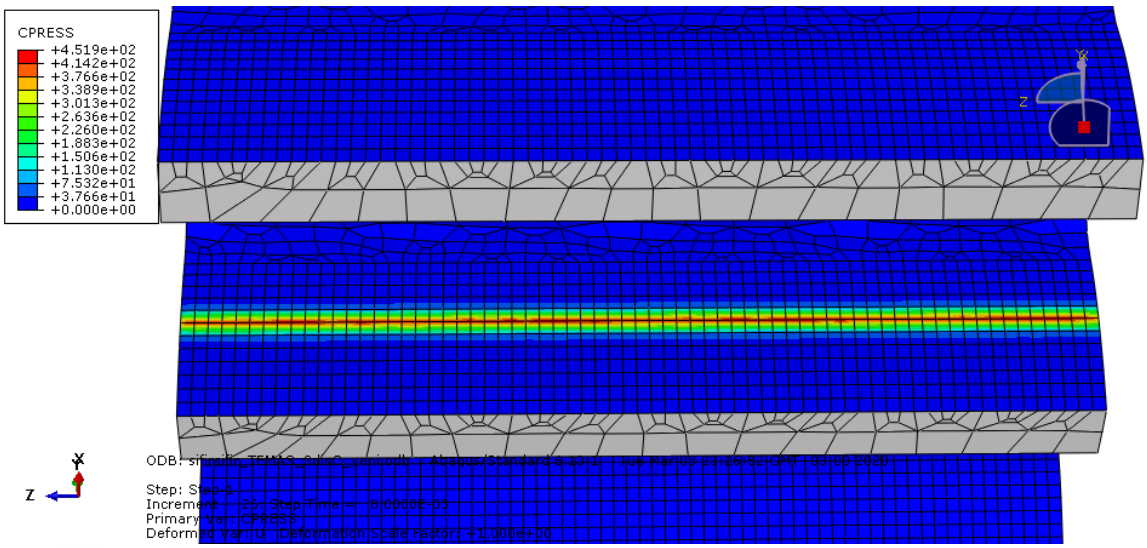
Analizlerde, sınır koşulları, gövde ve yan ksıımlarda anksatre olarak belirlenmiş, döndürme momenti 6.87 x 10^2 Nm olarak belirlenmiştir.



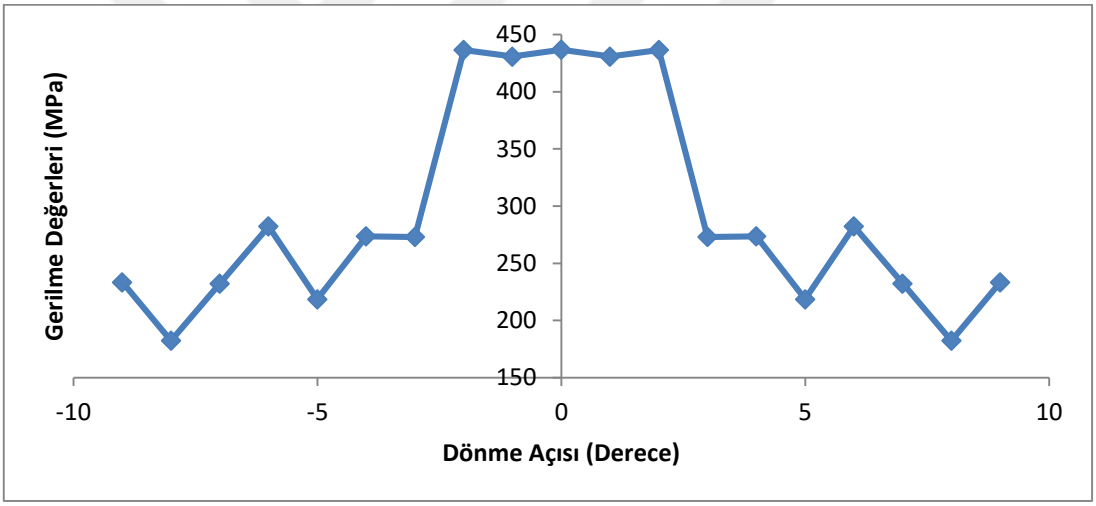
Şekil 4. 6: m_n = 4mm, T= 25, δ = 0˚, β = 0˚ parametreleri için analiz durumu.



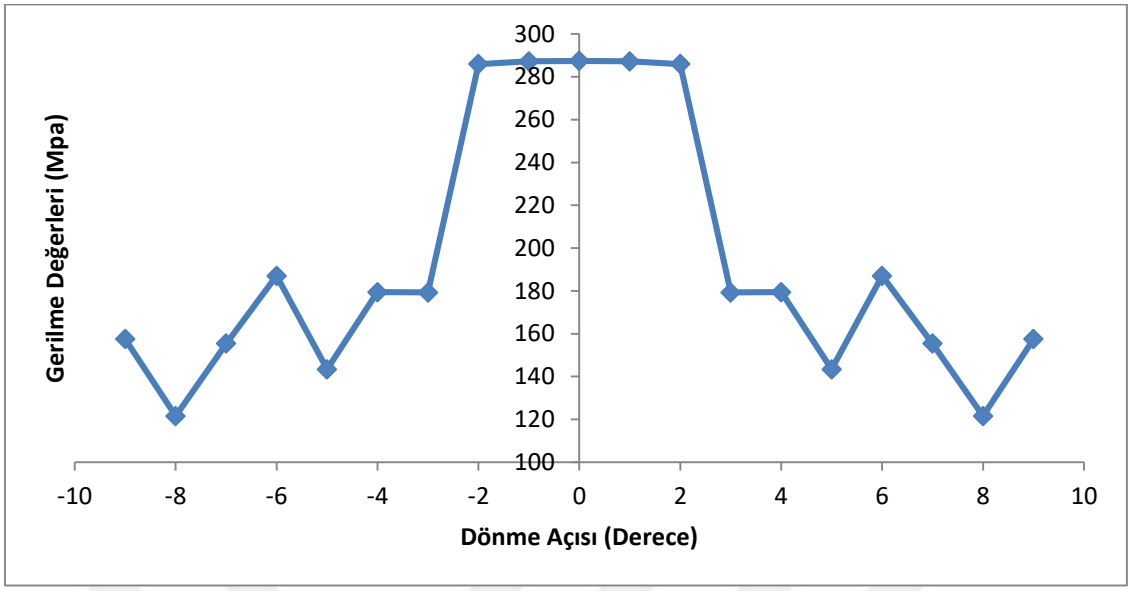
Şekil 4. 7: m_n = 4mm, T= 25, δ = 0˚, β = 0˚ parametreleri için Von Misses gerilmeleri.



Şekil 4. 8: m_n = 4mm, T= 25, δ = 0˚, β = 0˚ parametreleri için contact press sonuçları.



Şekil 4. 9: m_n = 4mm, T= 25, δ = 0˚, β = 0˚ parametreleri için dönme açılarına göre contact press değerleri değişimi.

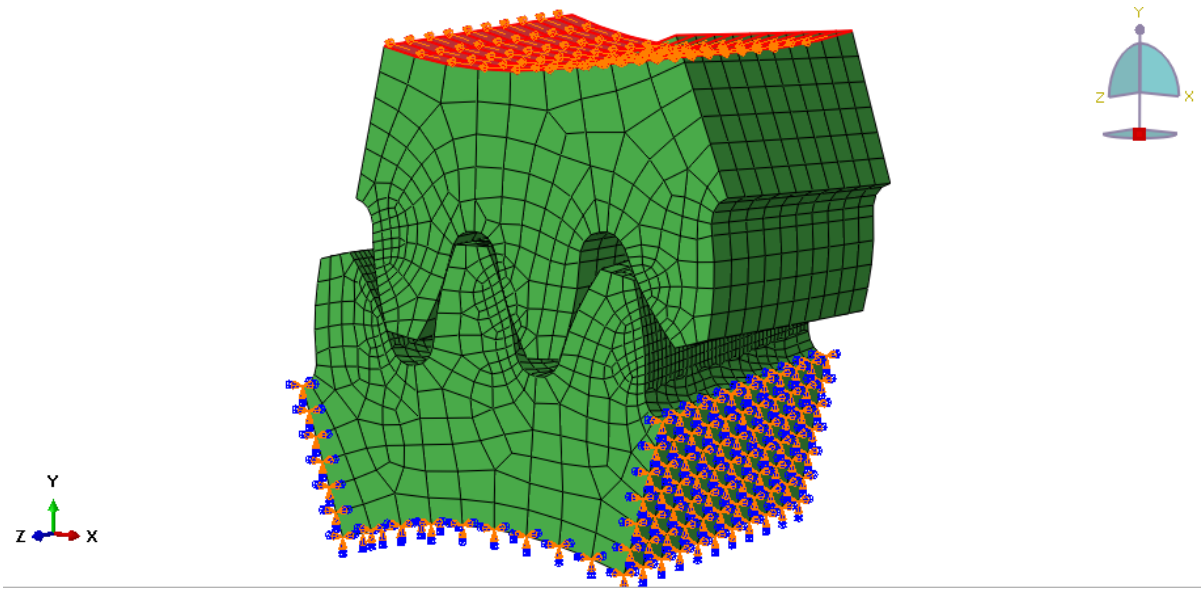


Şekil 4. 10: m_n = 4mm, t= 25, δ = 0˚, β = 0˚ parametreleri için dönme açılarına göre von misses değerleri değişimi.

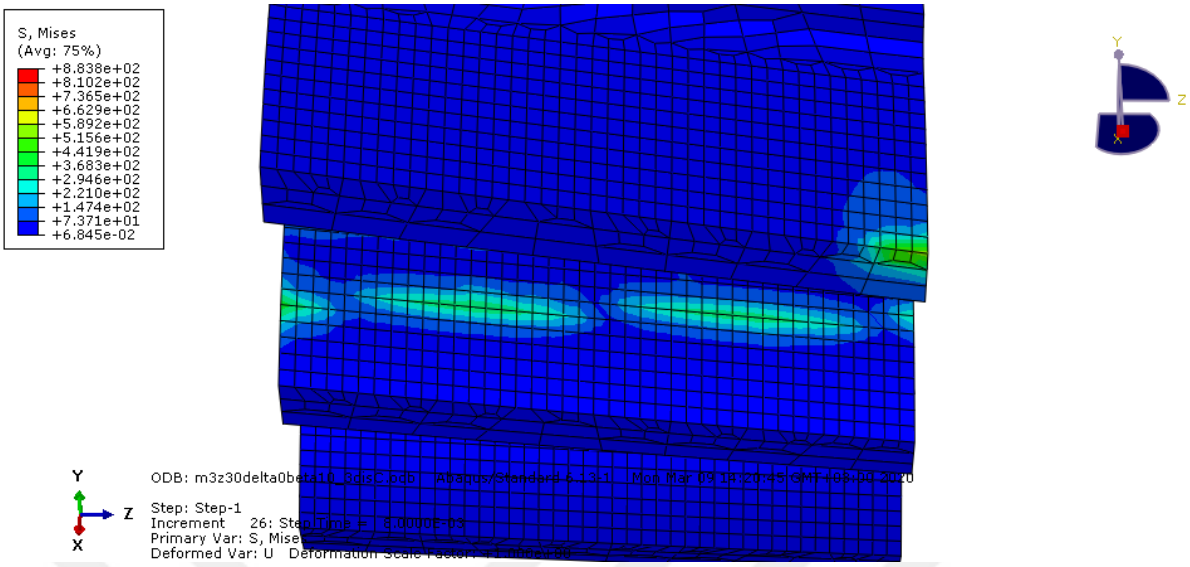
4.2.2. Örnek 2

m_n = 3mm, T= 30, δ = 0˚, β = 10˚ değerleri için elde edilen sonuçlar görülmektedir.

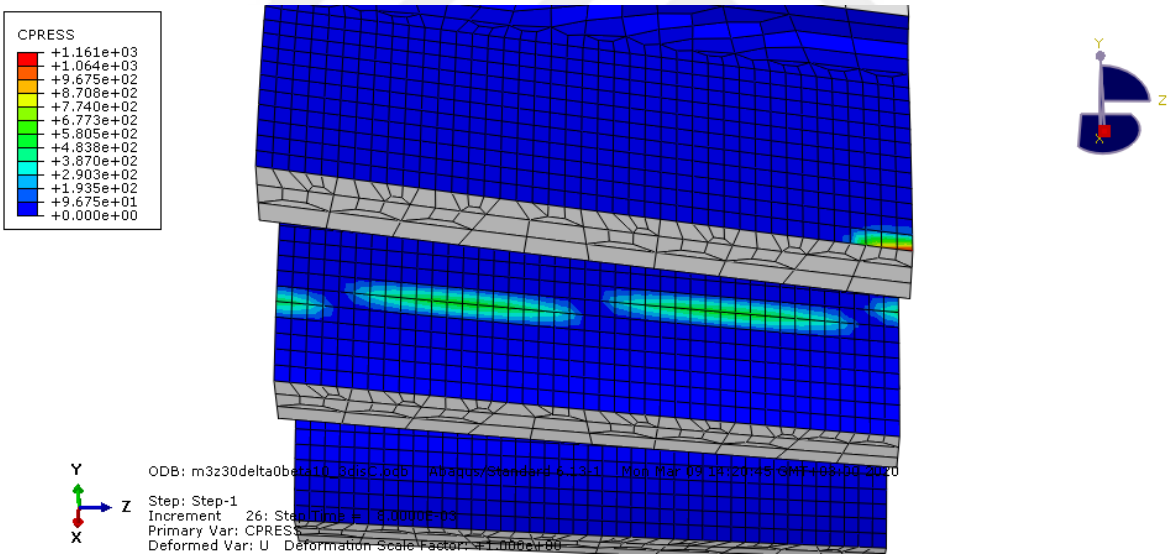
Analizlerde, sınır koşulları, gövde ve yan ksıımlarda anksatre olarak belirlenmiş, döndürme momenti 8.89 x 10^2 Nm olarak belirlenmiştir.



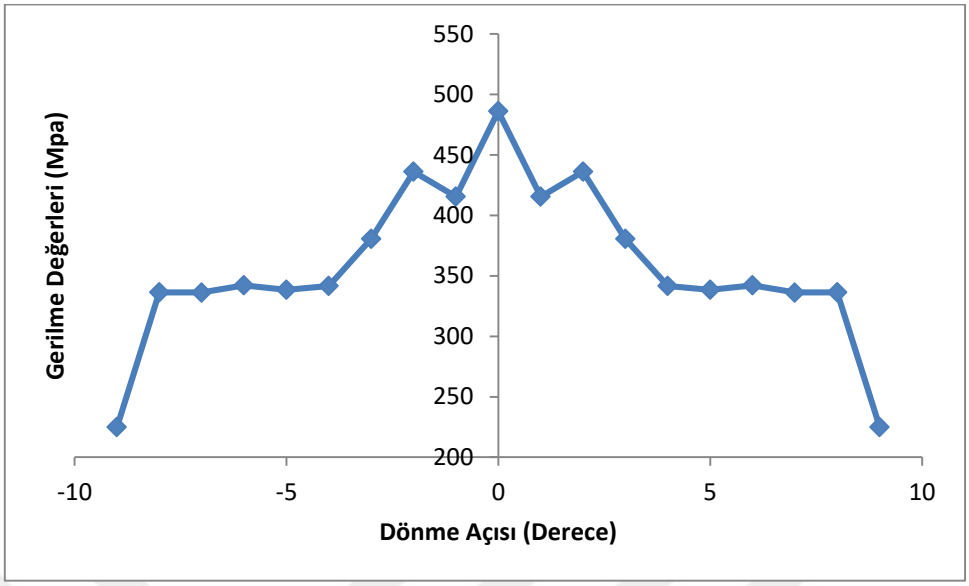
Şekil 4. 11: m_n = 3mm, T= 30, δ = 0˚, β = 10˚ parametreleri için analiz durumu.



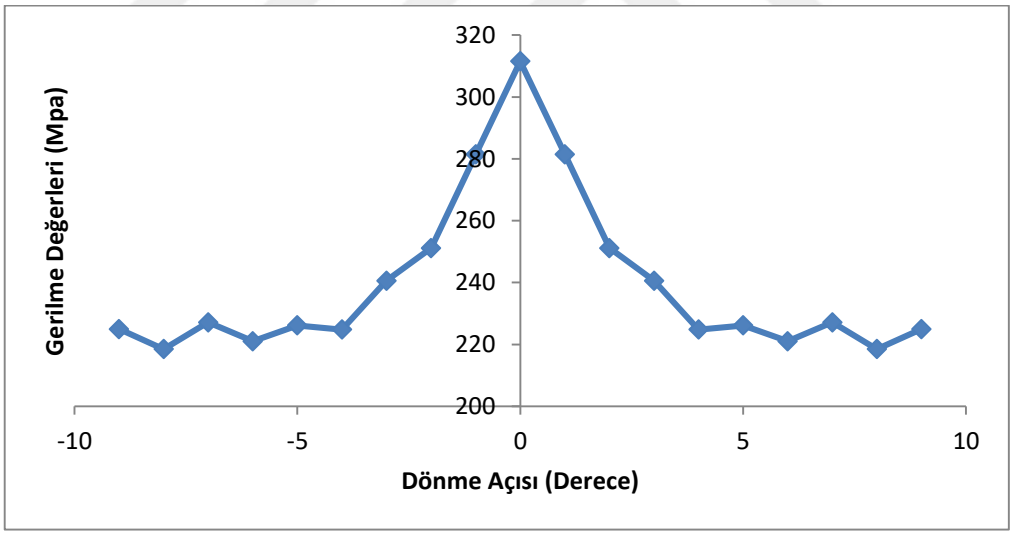
Şekil 4. 12: m_n = 3mm, T= 30, δ = 0˚, β = 10˚ parametreleri için Von Misses gerilmeleri.



Şekil 4. 13: m_n = 3mm, T= 30, δ = 0˚, β = 10˚ parametreleri için contact press sonuçları.



Şekil 4. 14: m_n = 3mm, T= 30, δ = 0˚, β = 10˚ parametreleri için dönme açılarına göre contact press değerleri değişimi.

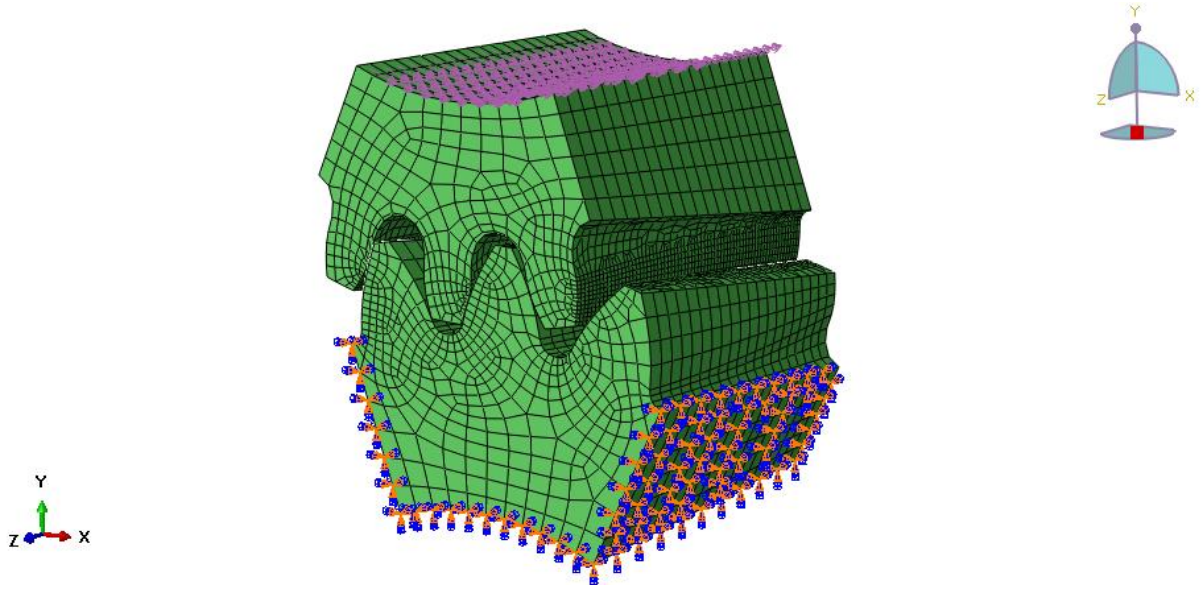


Şekil 4. 15: m_n = 3mm, T= 30, δ = 0˚, β = 10˚ parametreleri için dönme açılarına göre von misses değerleri değişimi.

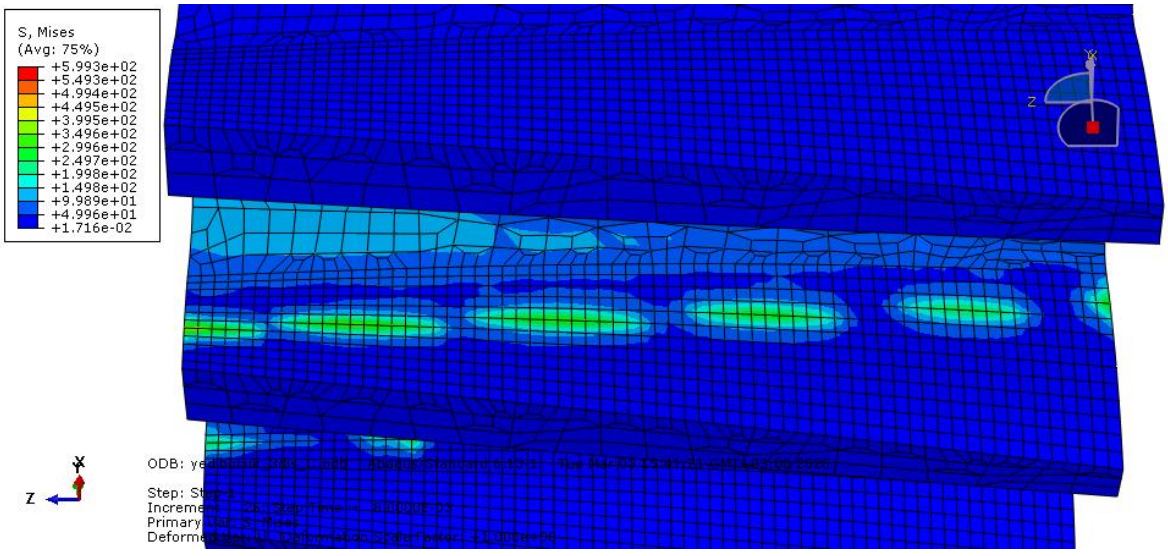
4.2.3. Örnek 3

m_n = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β = 0˚ değerleri için elde edilen sonuçlar görülmektedir.

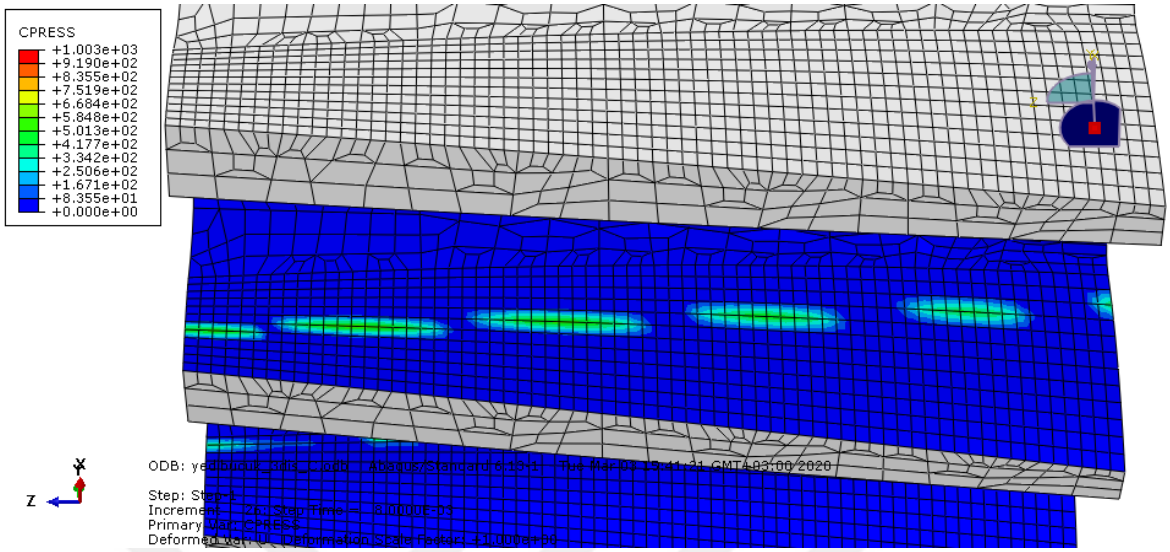
Analizlerde, sınır koşulları, gövde ve yan ksıımlarda anksatre olarak belirlenmiş, döndürme momenti 6.81 x 10^2 Nm olarak belirlenmiştir.



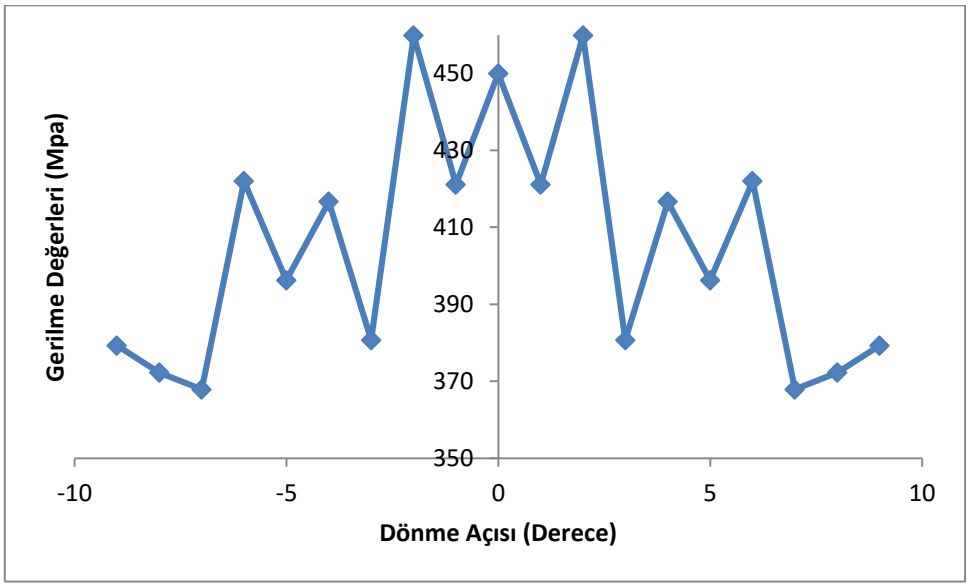
Şekil 4. 16: m_n = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β = 0˚ parametreleri için analiz durumu.



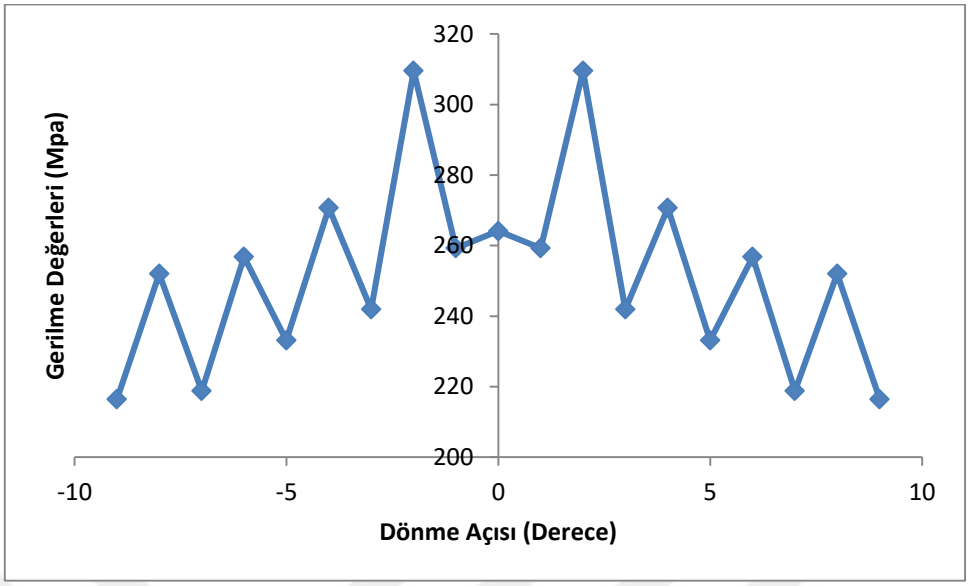
Şekil 4. 17: m_n = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β = 0˚ parametreleri için Von Misses gerilmeleri.



Şekil 4. 18: m_n = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β = 0˚ parametreleri için contact press sonuçları.



Şekil 4. 19: m_n = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β = 0˚ parametreleri için dönme açılarına göre contact press değerleri değişimi.

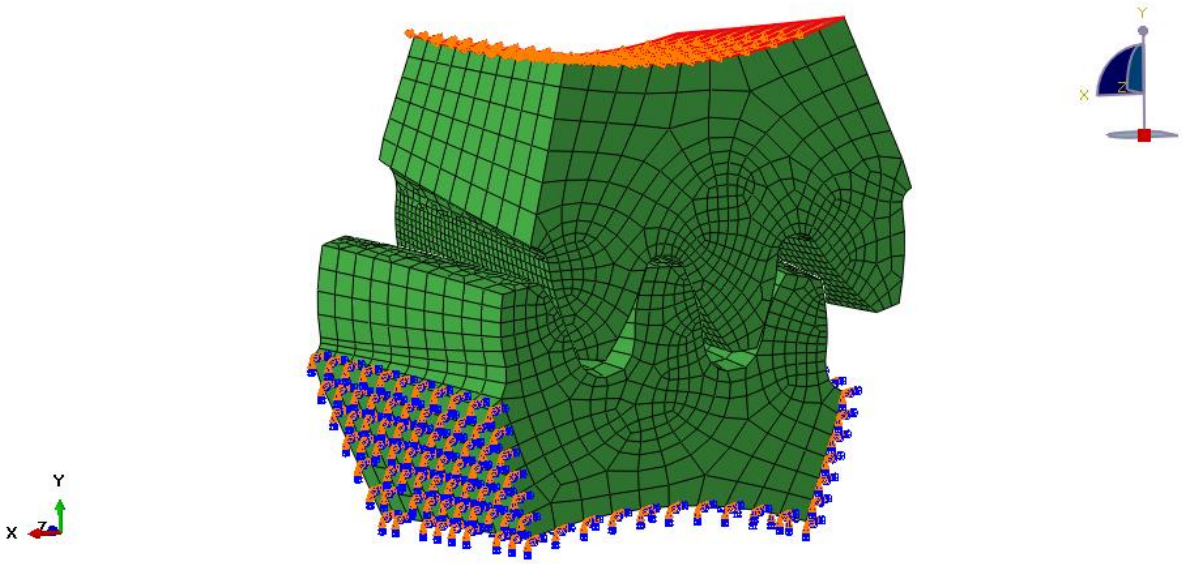


Şekil 4. 20: m_n = 3mm, T= 30, δ = 0˚, β = 10˚ parametreleri için dönme açılarına göre von misses değerleri değişimi.

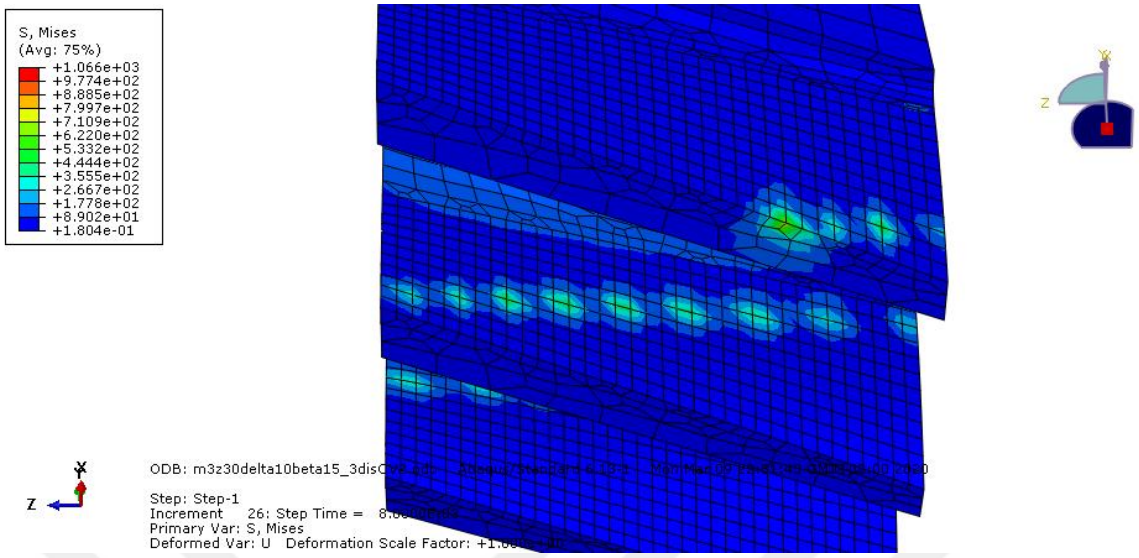
4.2.4. Örnek 4

m_n = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =15˚ değerleri için elde edilen sonuçlar görülmektedir.

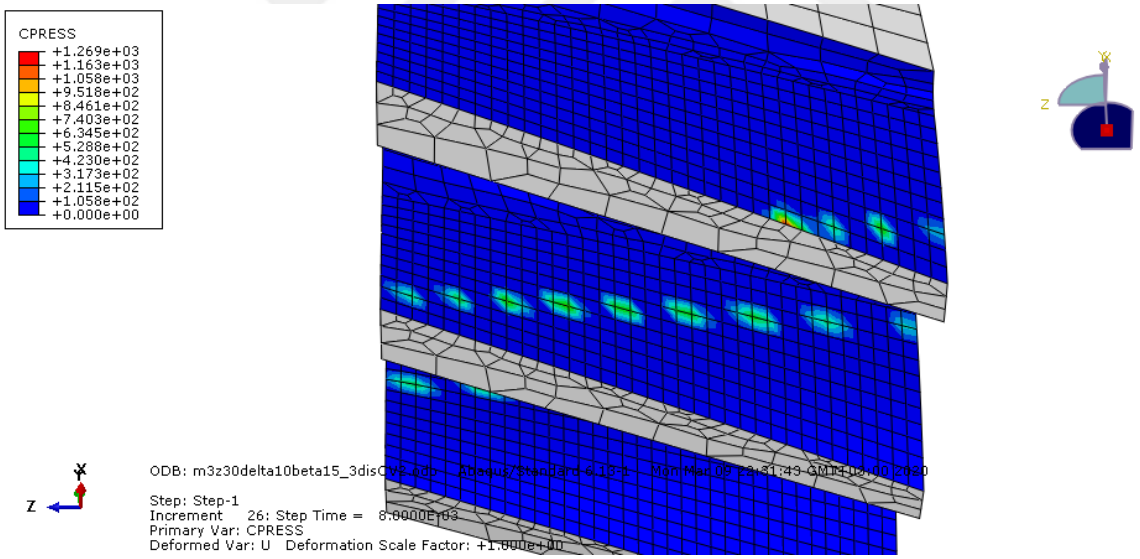
Analizlerde, sınır koşulları, gövde ve yan ksıımlarda anksatre olarak belirlenmiş, döndürme momenti 1.941 x 10^3 Nm olarak belirlenmiştir.



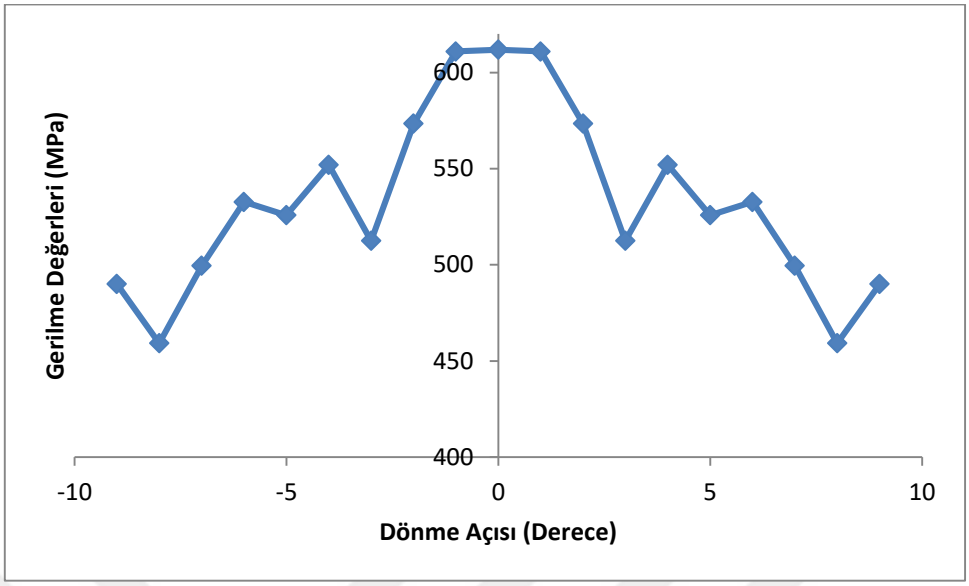
Şekil 4. 21: m_n = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =15˚ parametreleri için analiz durumu.



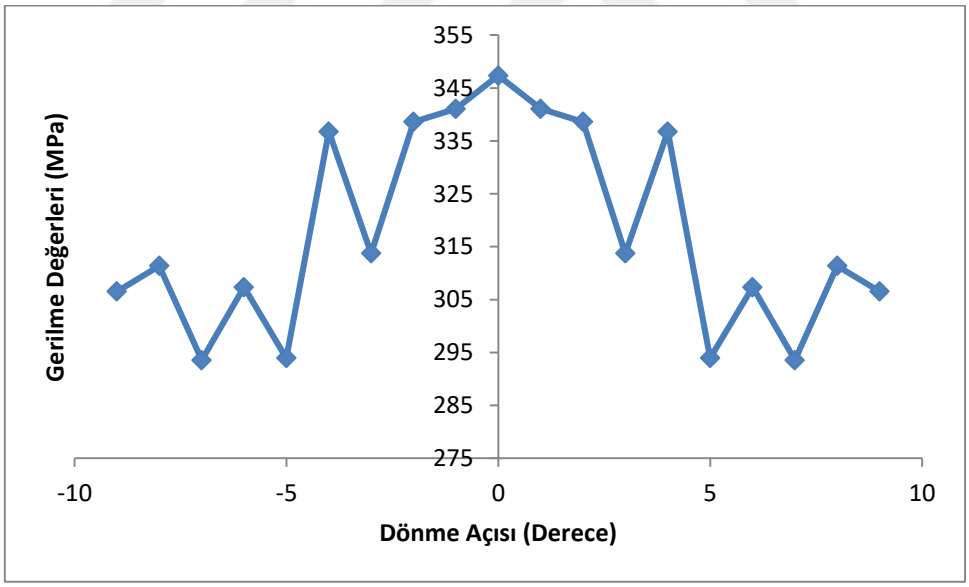
Şekil 4. 22: m_n = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =15˚ parametreleri için Von Misses gerilmeleri.



Şekil 4. 23: m_n = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =15˚ parametreleri için contact press sonuçları.



Şekil 4. 24: m_n = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =15˚ parametreleri için dönme açılarına göre contact press değerleri değişimi.

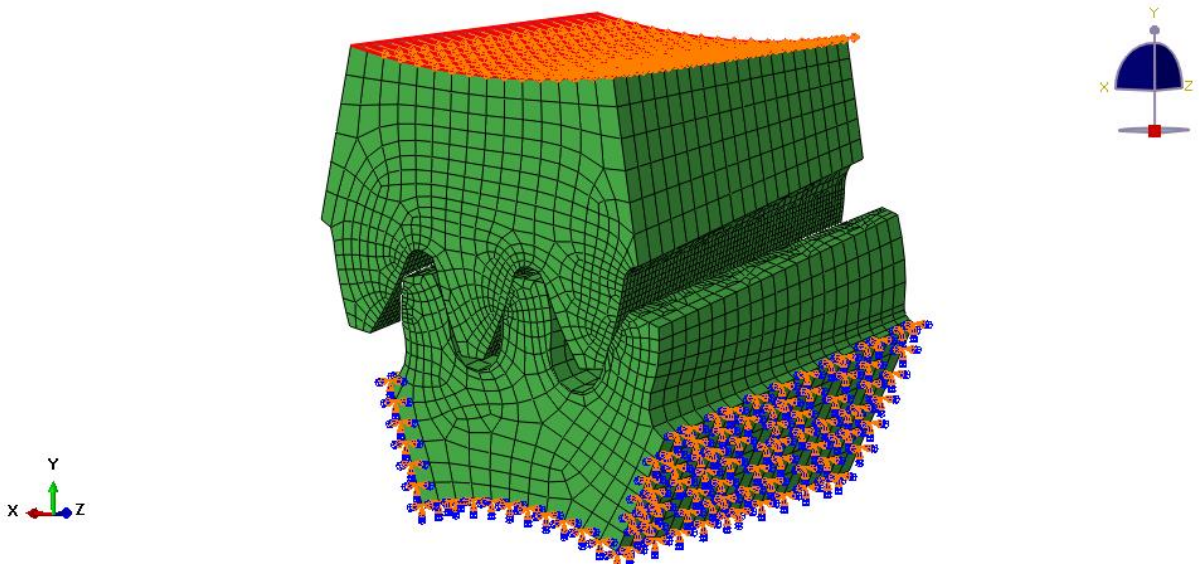


Şekil 4. 25: m_n = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =15˚ parametreleri için dönme açılarına göre von misses değerleri değişimi.

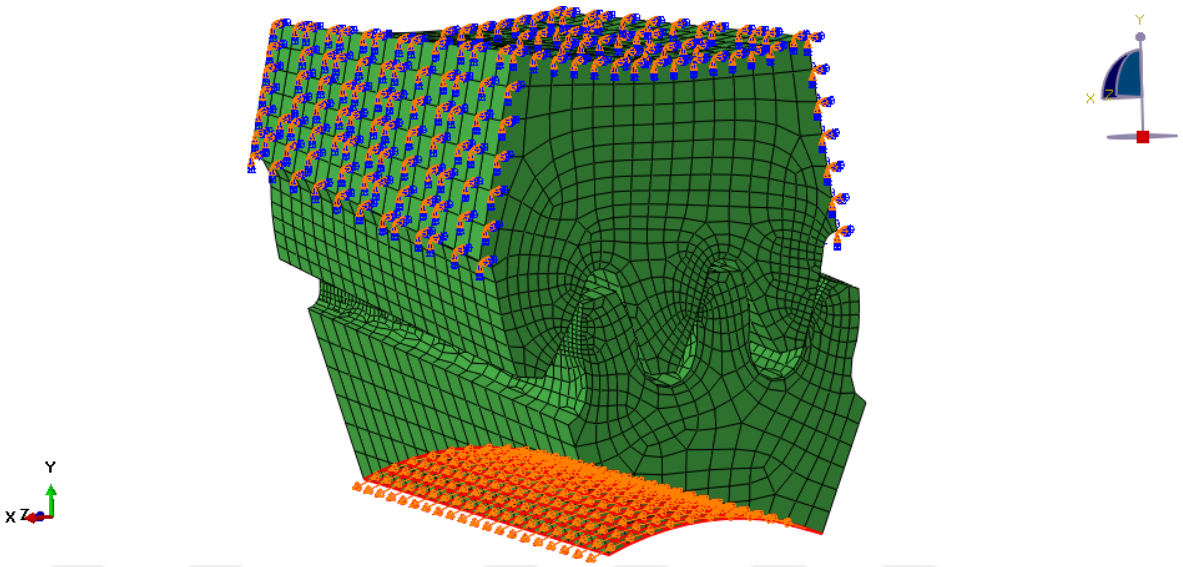
4.2.5. Örnek 5

m_n = 4mm, T= 25, δ = 7,5˚, β =0˚ ve m_n = 4mm, T= 50, δ = 7,5˚, β =0˚ değerleri için elde edilen sonuçlar görülmektedir.

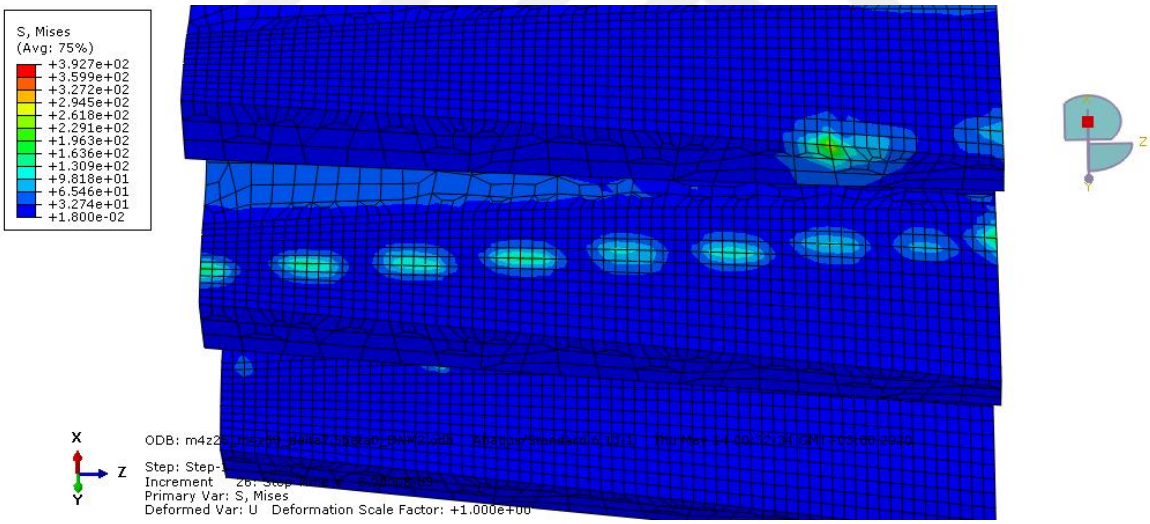
Analizlerde, sınır koşulları, gövde ve yan kısımlarda anksatre olarak belirlenmiş, döndürme momenti 1.25×10^2 Nm olarak belirlenmiştir.



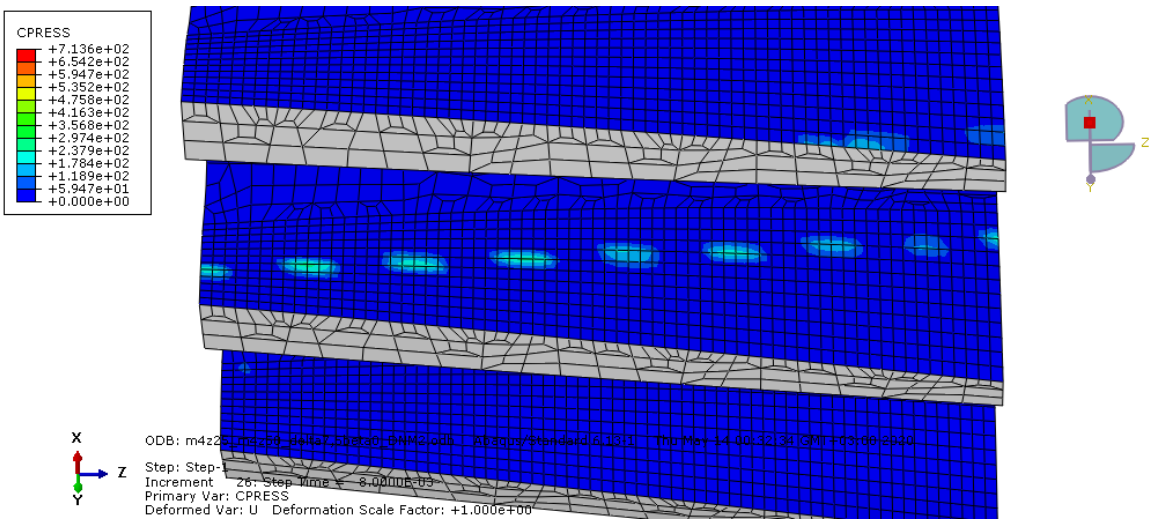
Şekil 4. 26: $\boldsymbol{m_n}$ = 4mm, T= 25, δ = 7,5˚, β =0˚ ve $\boldsymbol{m_n}$ = 4mm, T= 50, δ = 7,5˚, β =0˚ parametreleri için analiz durumu (1).



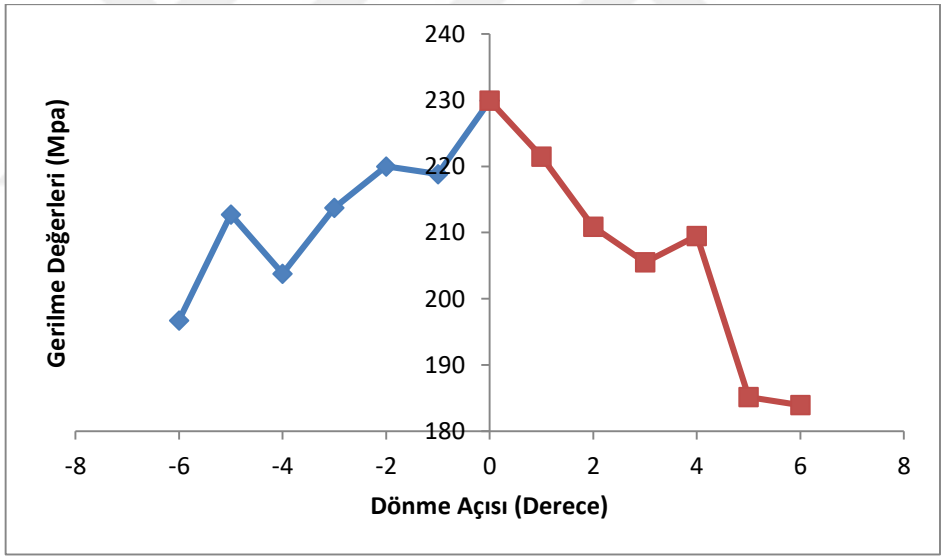
Şekil 4. 27: m_n = 4mm, T= 25, δ = 7,5˚, β =0˚ ve m_n = 4mm, T= 50, δ = 7,5˚, β =0˚ parametreleri için analiz durumu (2).



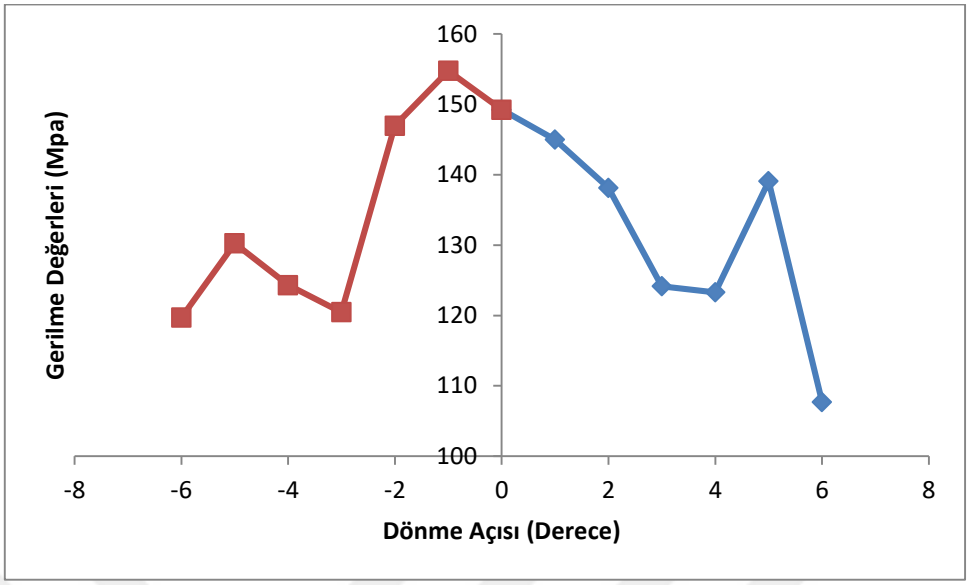
Şekil 4. 28: m_n = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =15˚ parametreleri için Von Misses gerilmeleri.



Şekil 4. 29: m_n = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =15˚ parametreleri için contact press sonuçları.



Şekil 4. 30: m_n = 4mm, T= 25, δ = 7,5˚, β =0˚ ve m_n = 4mm, T= 50, δ = 7,5˚, β =0˚ parametreleri için dönme açılarına göre von misses değerleri değişimi.



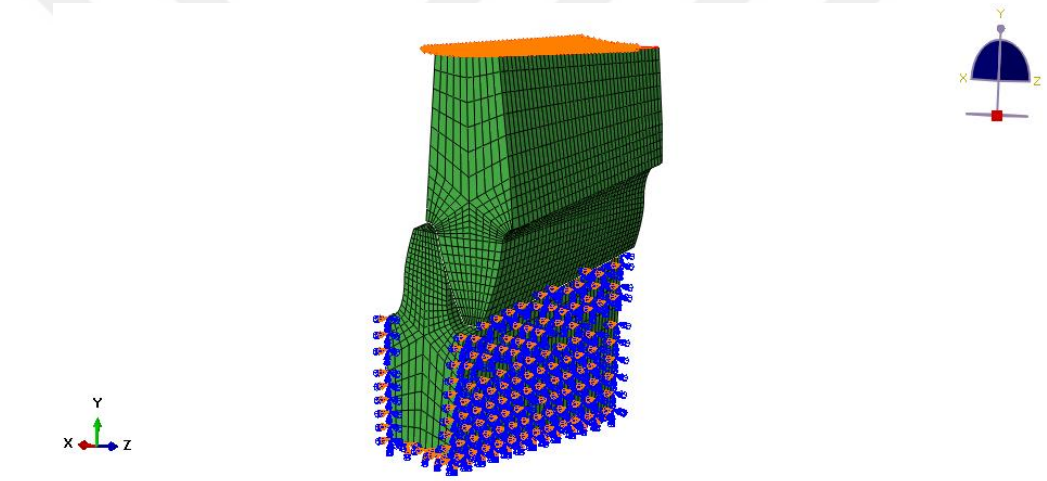
Şekil 4. 31: m_n = 4mm, T= 25, δ = 7,5˚, β =0˚ ve m_n = 4mm, T= 50, δ = 7,5˚, β =0˚ parametreleri için dönme açılarına göre contact press değerleri değişimi.

Sonuçlarda görüldüğü üzere, temas analizlerinde gerilme değerleri, yuvarlanma noktası üzerinde maksimum değerlerine ulaşmaktadır. Dönme açılarındaki artış ile ardışık dişler arasında yük paylaşımı meydana geldiğinden, gerilme değerleri düşmektedir. Sonuçlar bu yönüyle, şekil(3.26) da görülen teorik veriler ile benzerlik göstermektedir.

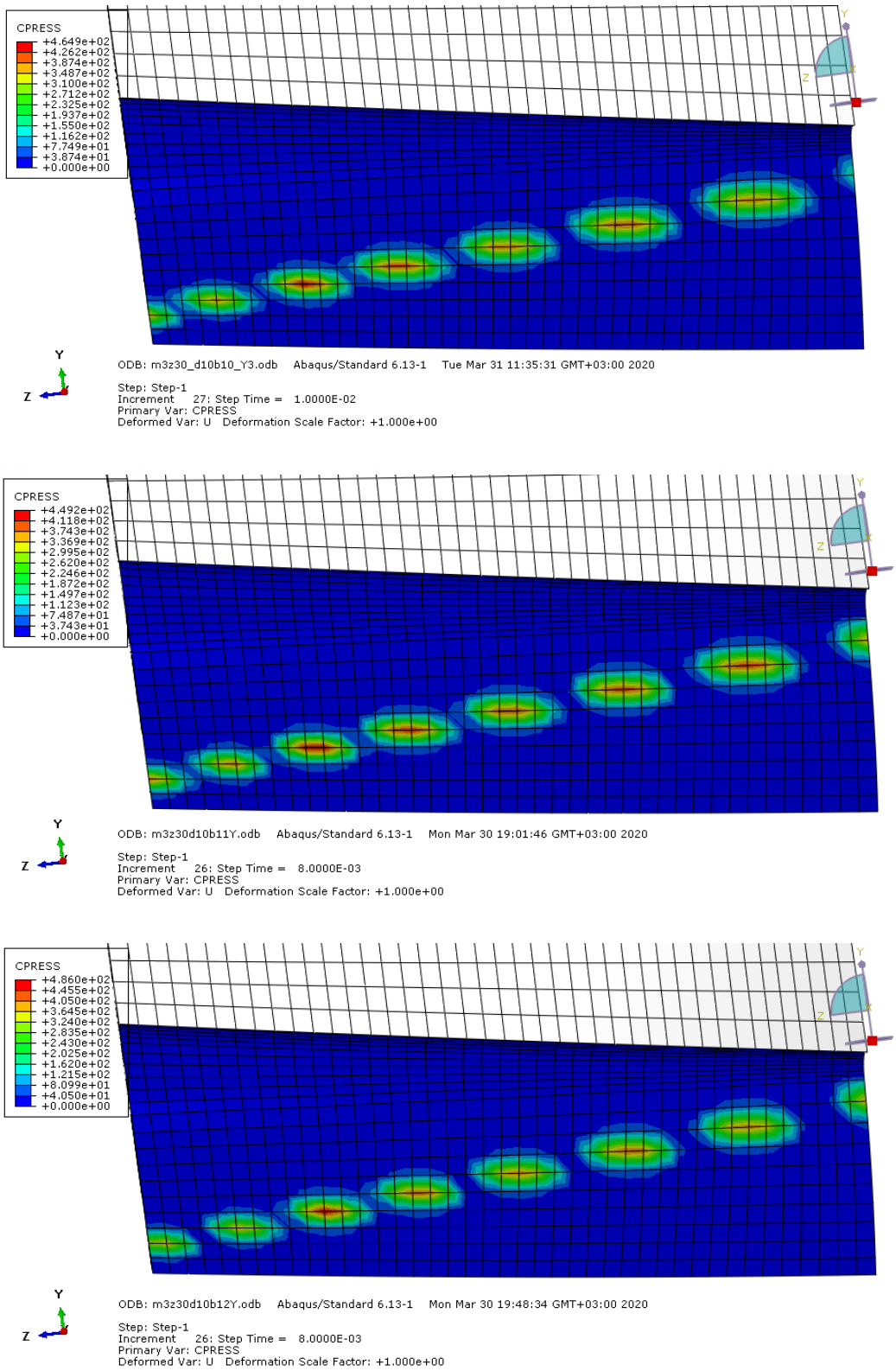
4.3. HELİSELKONİK MODELLERİN TEMAS ANALİZLERİ

m_n = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =10˚-15˚ değerleri için helislik değeri 10˚ ile 15˚ arasında değişen ve m_n = 3mm, T= 30, δ =10˚-15, β =10˚ değerleri için koniklik değeri 10˚ ile 15˚ arasında değişen helisel konik modeller için koniklik ve helislik açıları değişiminin temas gerilmeleri ile ilişkisi incelenmiştir.

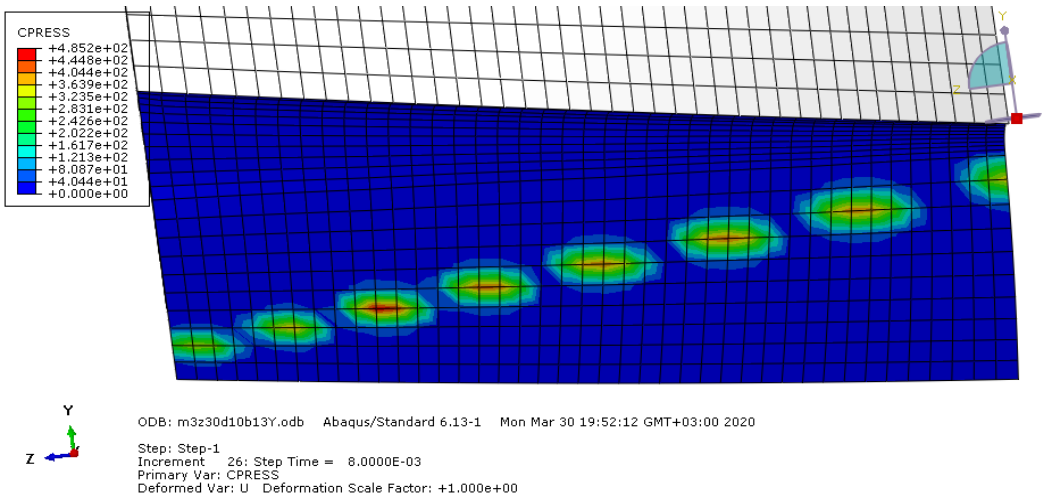
Analizlerde, sınır koşulları, gövde ve yan ksıımlarda anksatre olarak belirlenmiş, döndürme momenti 7.71 x 10^3 Nm olarak belirlenmiştir.

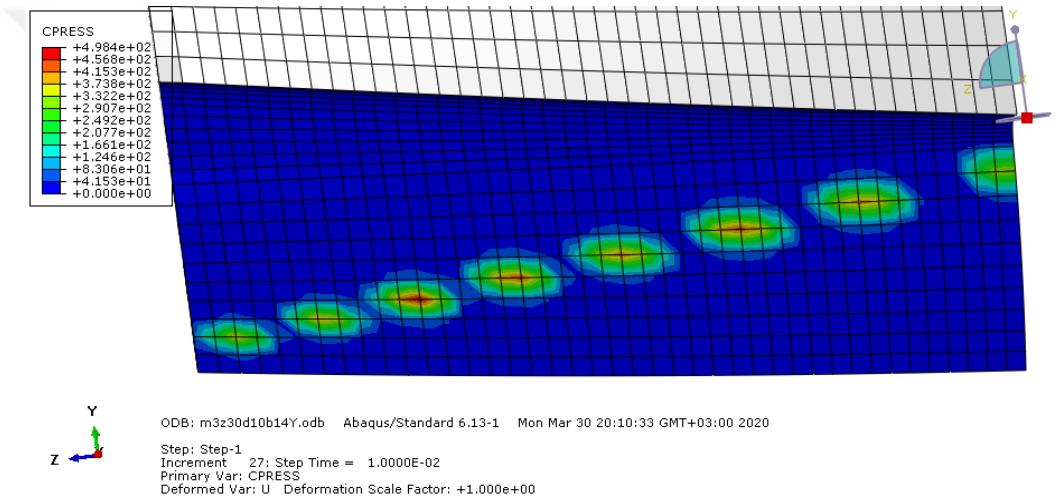


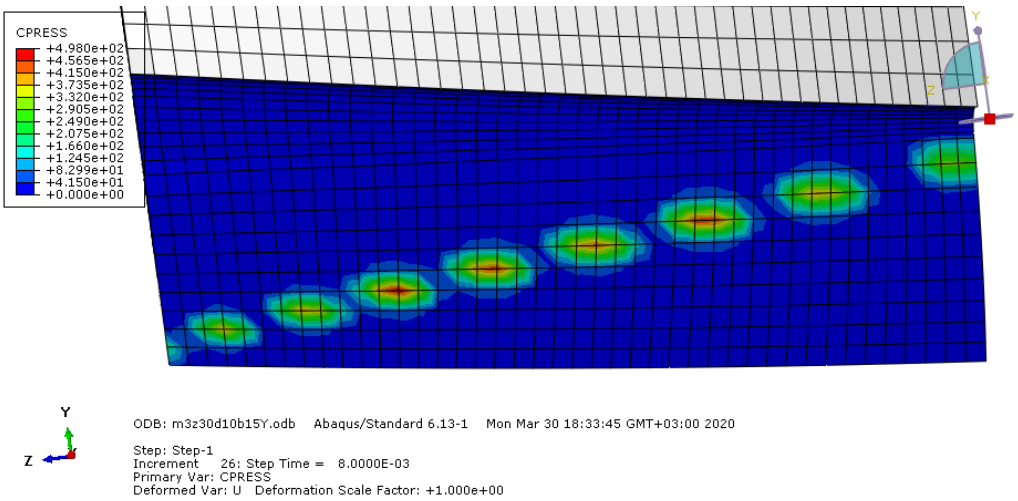
Şekil 4. 32: m_n = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =10˚ parametreleri için örnek analiz durumu.



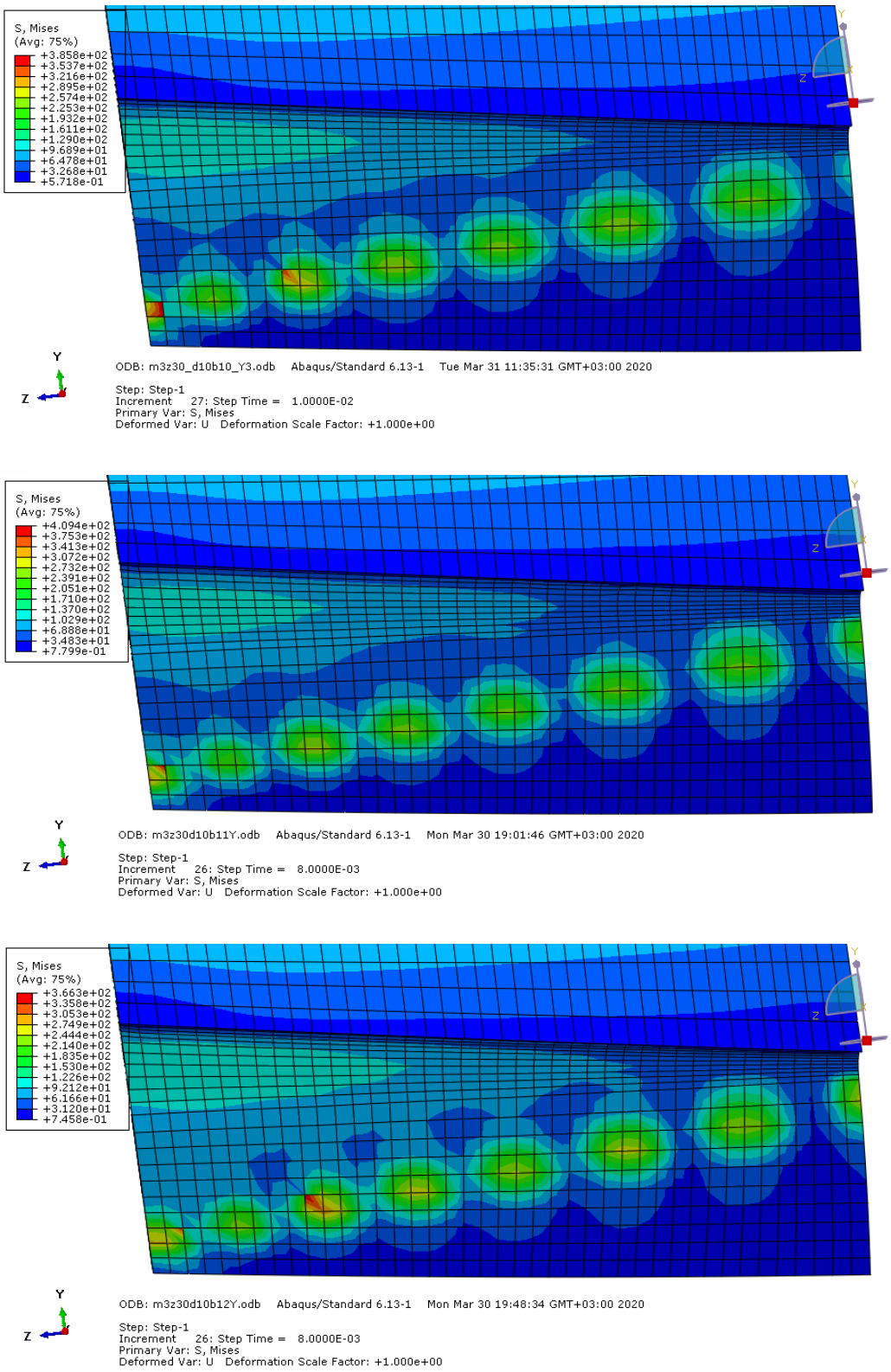
Şekil 4. 33: m_n = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =10˚-12˚ parametreleri için contact press sonuçları.



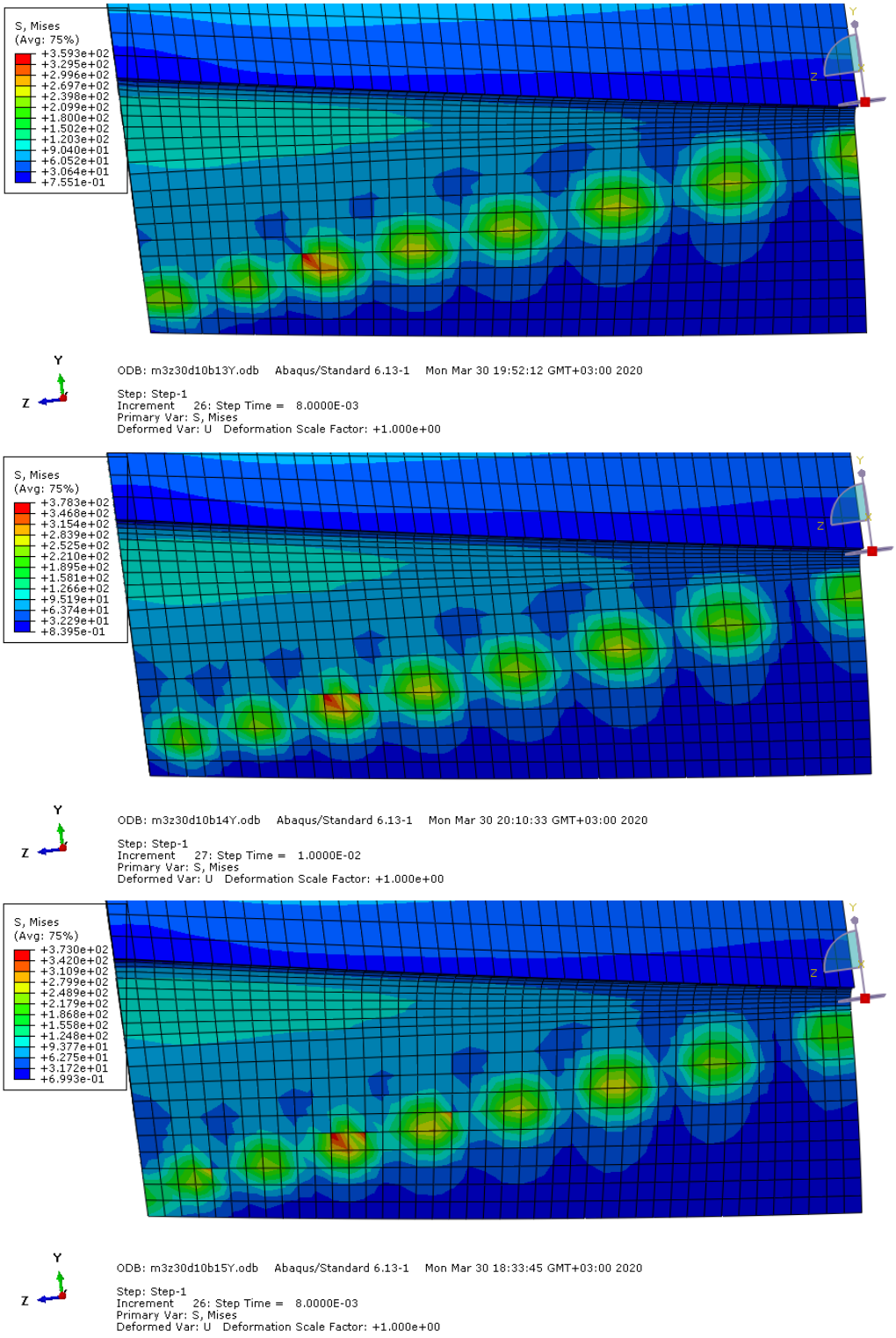




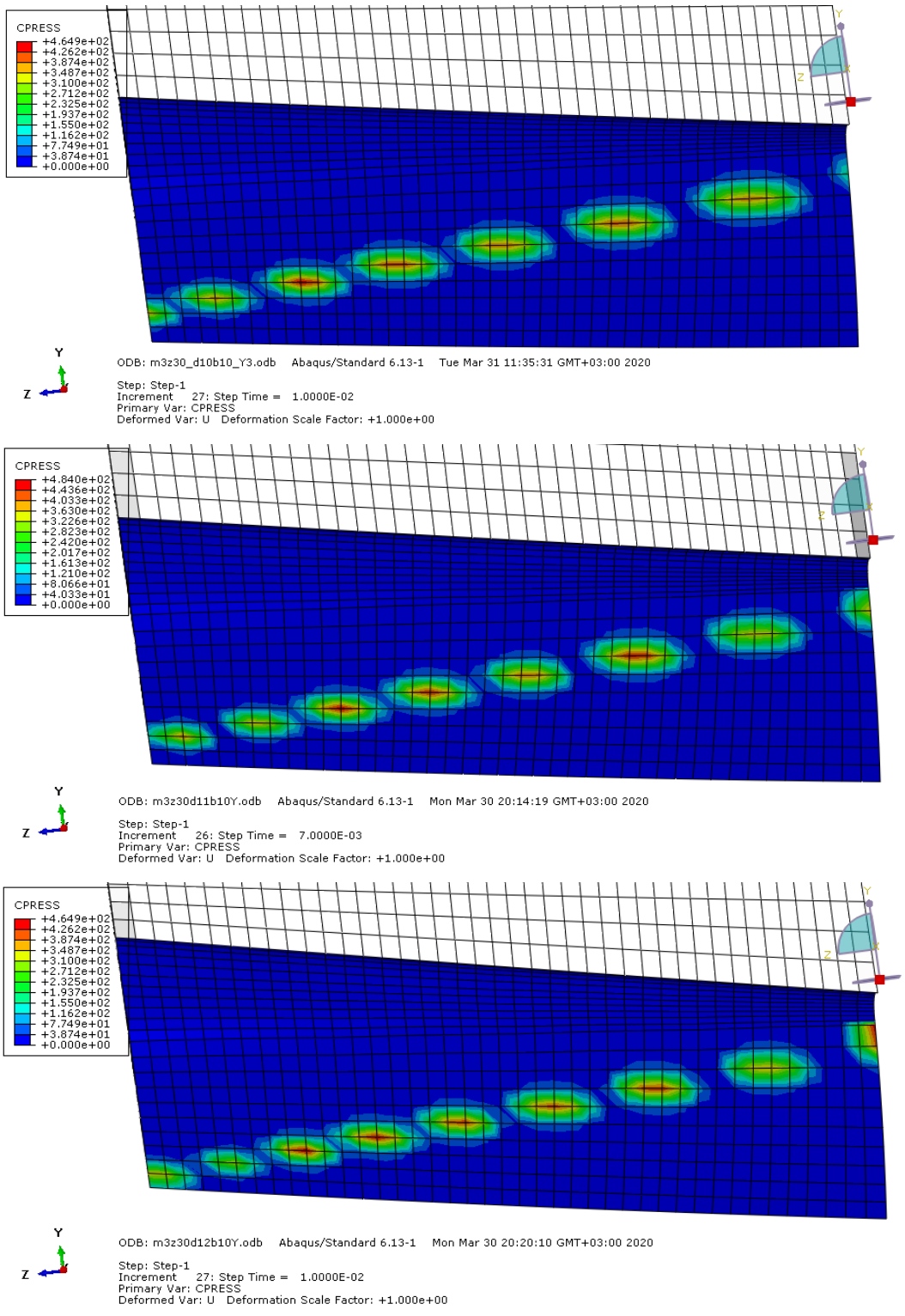
Şekil 4. 34: m_n = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =13˚-15˚ parametreleri için contact press sonuçları.



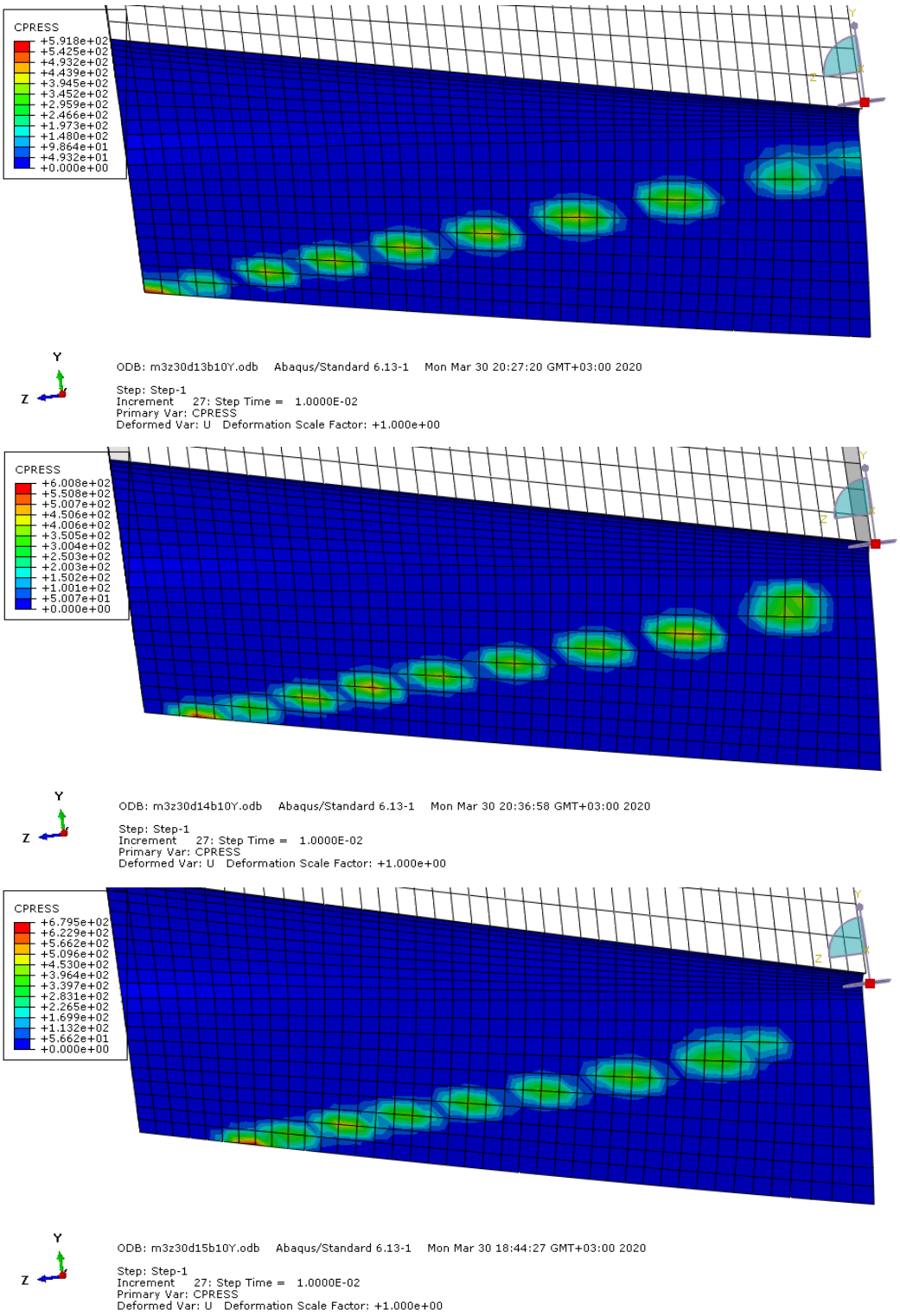
Şekil 4. 35: m_n = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =10˚-12˚ parametreleri için Von Misses sonuçları.



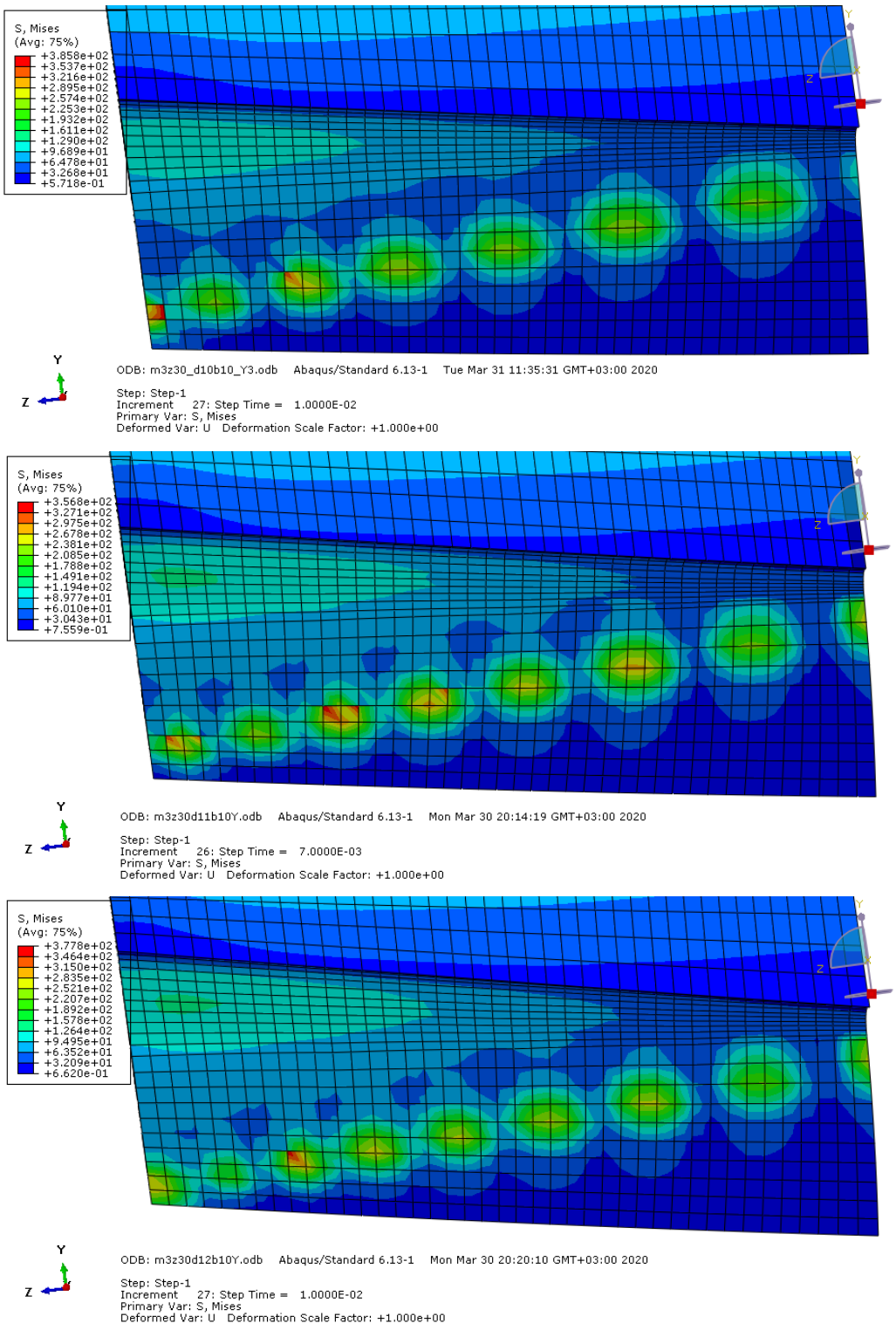
Şekil 4. 36: m_n = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =13˚-15˚ parametreleri için Von Misses sonuçları.



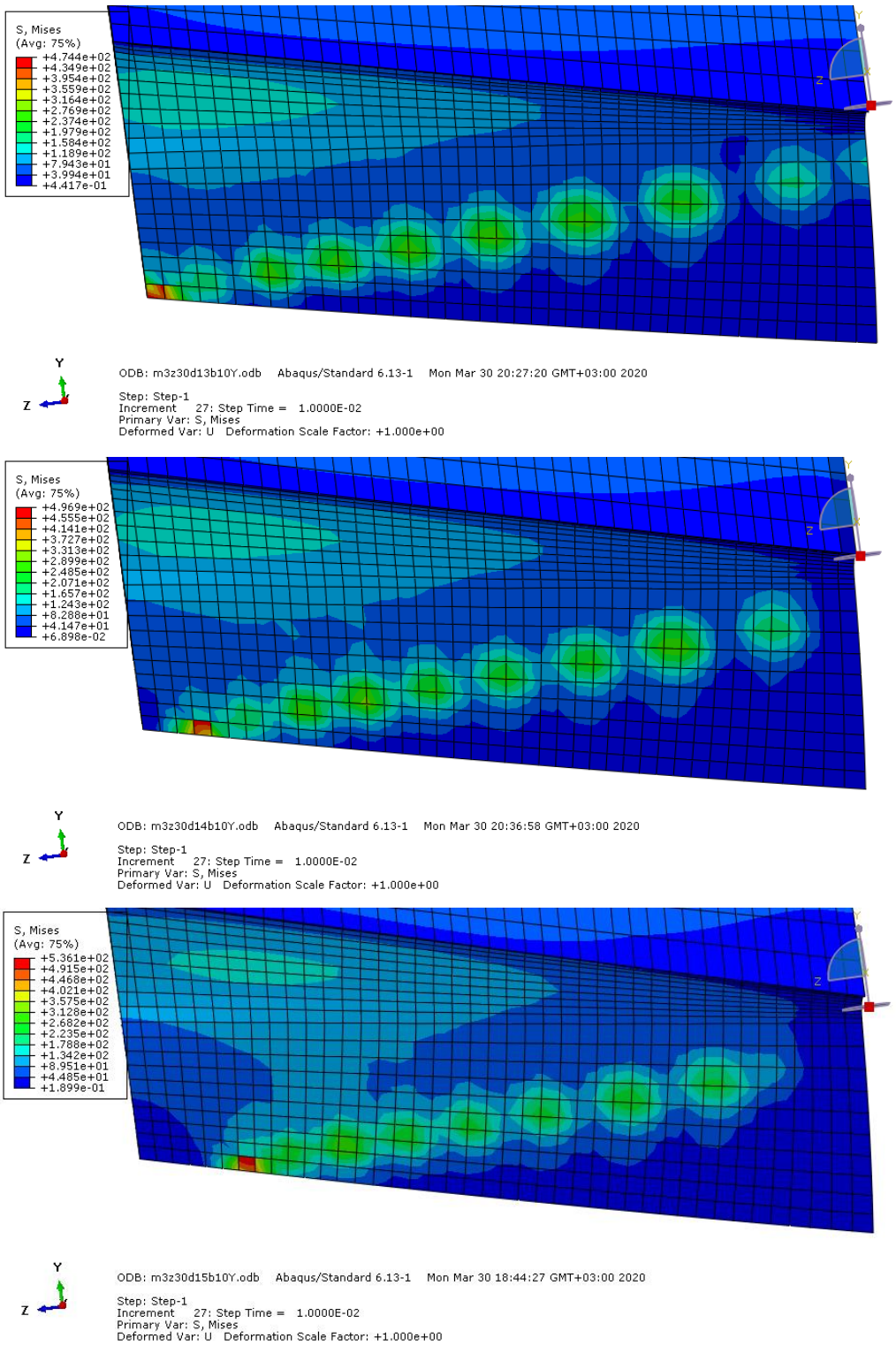
Şekil 4. 37: m_n = 3mm, T= 30, δ = 10˚-12˚, β =10˚ parametreleri için contact press sonuçları.



Şekil 4. 38: m_n = 3mm, T= 30, δ = 13˚-15˚, β =10˚ parametreleri için contact press sonuçları.



Şekil 4. 39: m_n = 3mm, T= 30, δ = 10˚-12˚, β =10˚ parametreleri için Von Misses sonuçları.

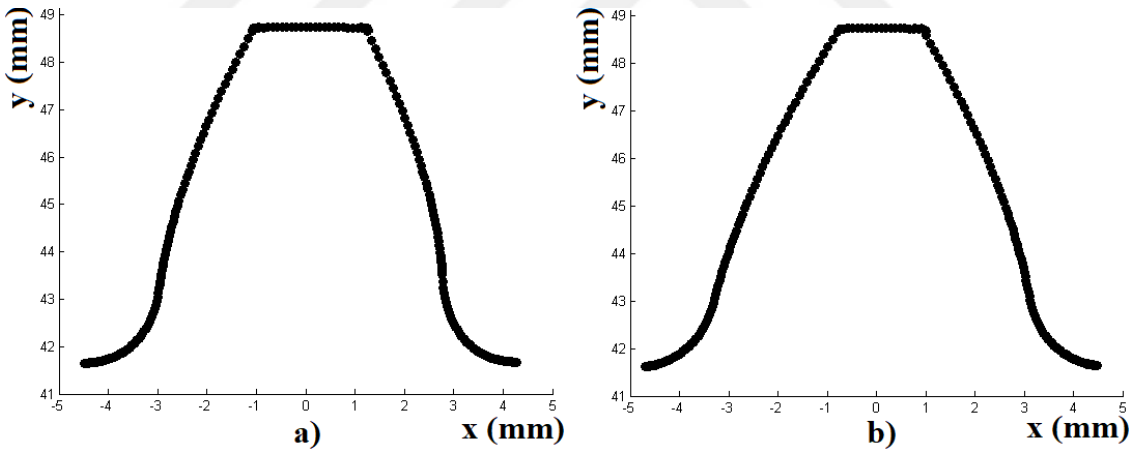


Şekil 4. 40: m_n = 3mm, T= 30, δ = 13˚-15˚, β =10˚ parametreleri için Von Misses sonuçları.

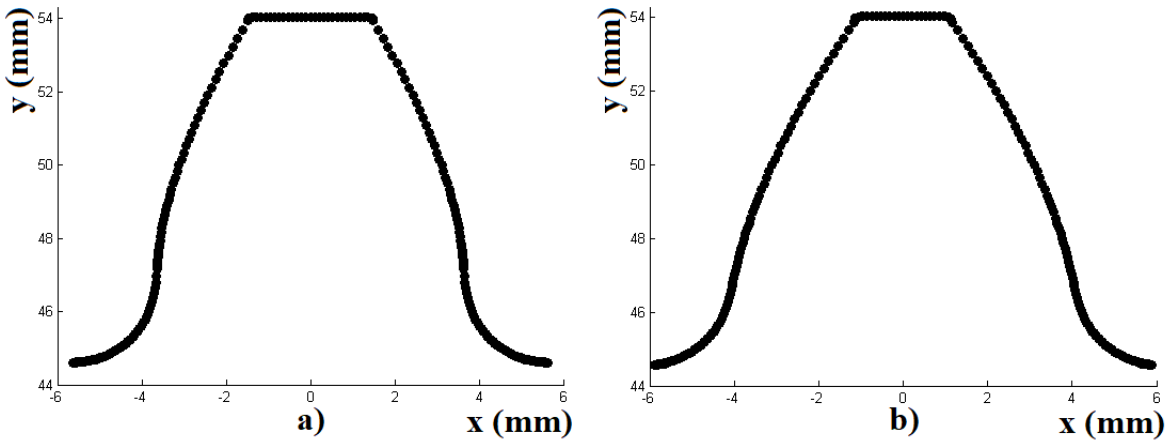
Sonuçlarda koniklik açılarındaki artışın sınır bölge temaslarına (edge contact) sebep olabileceği, bunun yanında helislik ve koniklik açılarının arttırılması ile temas elipslerinin büyütülebileceği görülmektedir. Bu durum temas gerilmelerinin düşürülebilmesini sağlayacaktır.

4.4. KAVRAMA AÇISI DEĞİŞİMİNİN KÖK KISIMLARINDAKİ GERILME DAĞILIMLARINA ETKİSİ

Temas durumunda köklerde meydana gelen ortalama gerilme değerlerinin düşürülmesi, tasarım esnasında kavrama açılarının belirli oranlarda büyütülmesi ile mümkün olabilmektedir. Aşağıdaki şekilde m_n = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =10˚ ve m_n = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β =0˚ parametreleri için z = 0 mm genişliğinde farklı kavrama açılarında dizayn edilmiş helisel konik dişli profilleri görülmektedir.

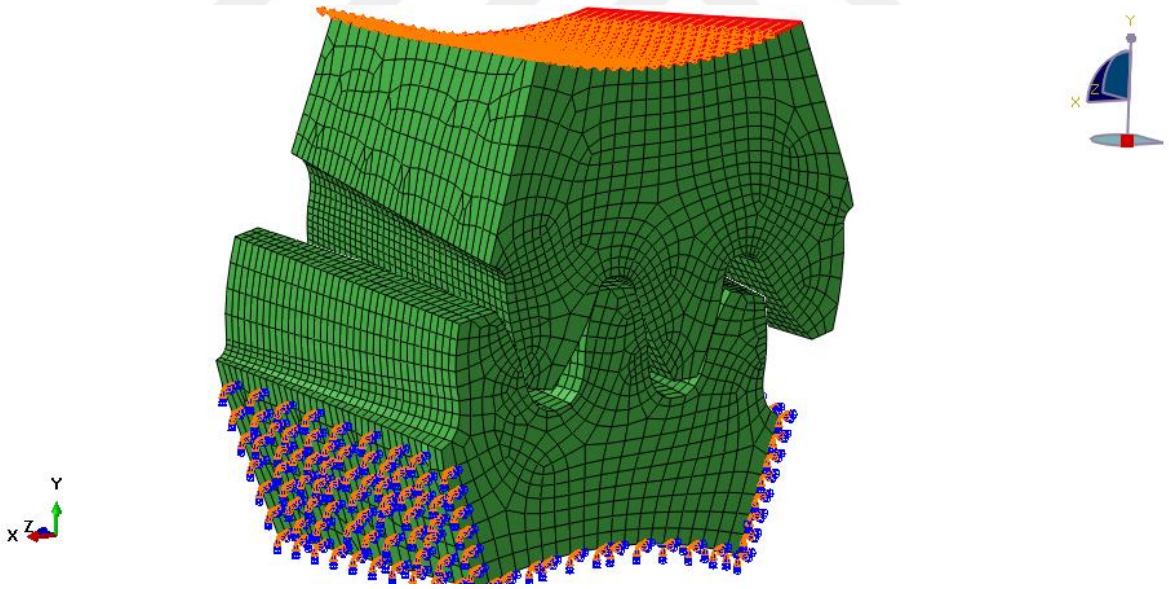


Şekil 4. 41: Helisel Konik Dişli Örnekleri; a) α=20˚ kavrama açısı ile imal edilmiş b) α=25˚ ile imal edilmiş.

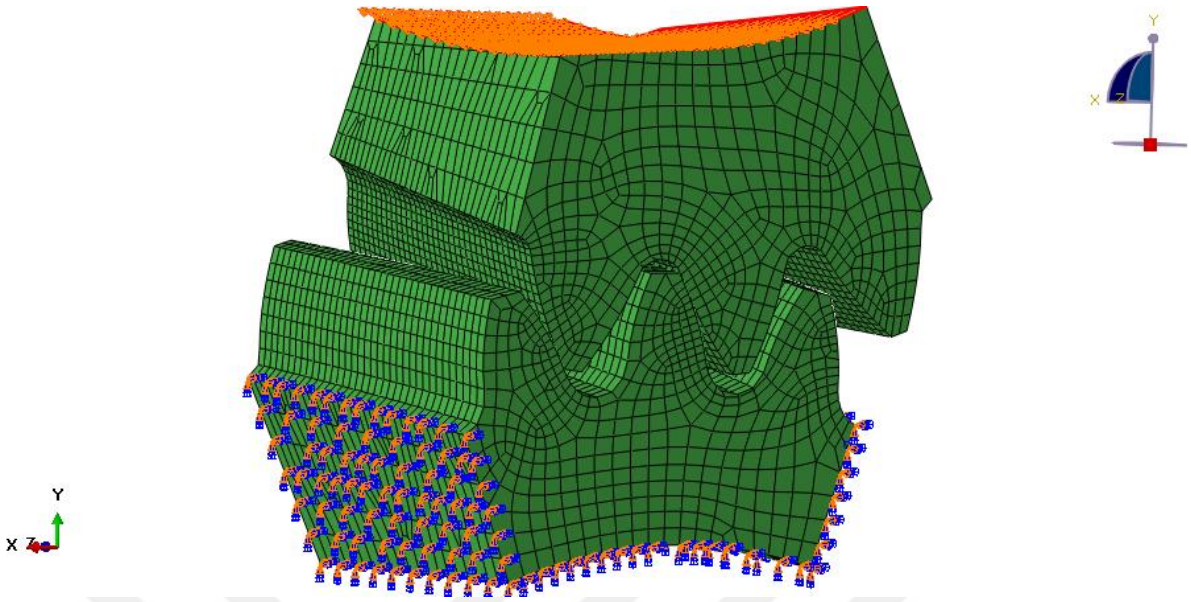


Şekil 4. 42: Konik Dişli Örnekleri; a) α=20˚ kavrama açısı ile imal edilmiş b) α=25˚ ile imal edilmiş.

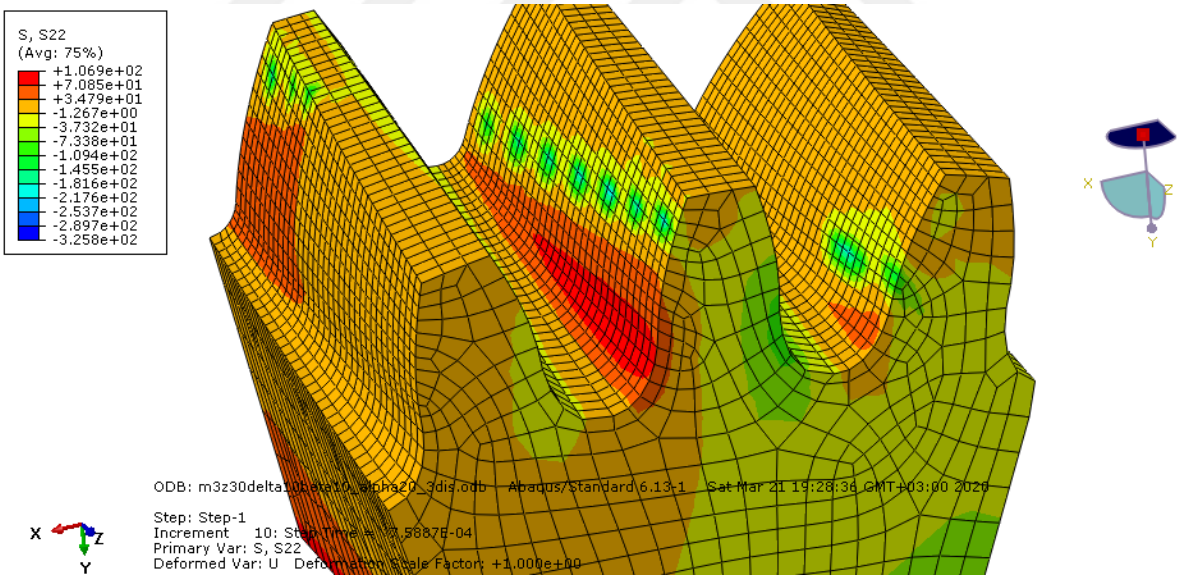
Belirlenen parametreler için sonlu eleman analizleri Abaqus programında oluşturulmuş ve sonuçlar her iki durum için karşılaştırılmıştır. Analizlerde, sınır koşulları, gövde ve yan ksıımlarda anksatre olarak belirlenmiş, döndürme momenti 1.05×10^3 Nm olarak belirlenmiştir.



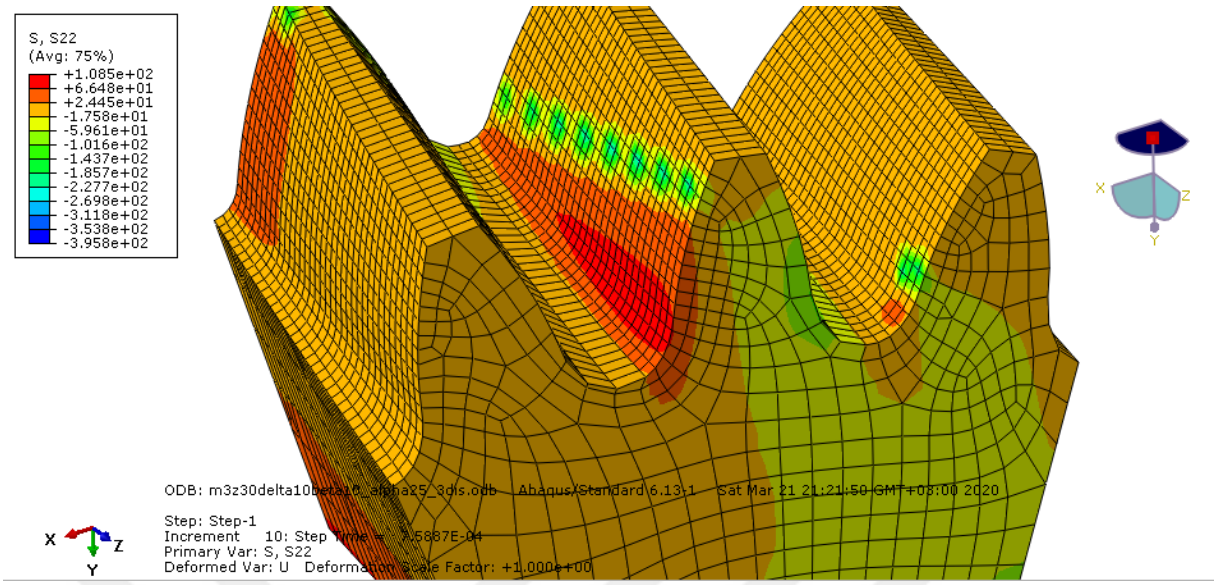
Şekil 4. 43: m_n = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =10˚ ve α=20˚ parametreleri için analiz durumu.



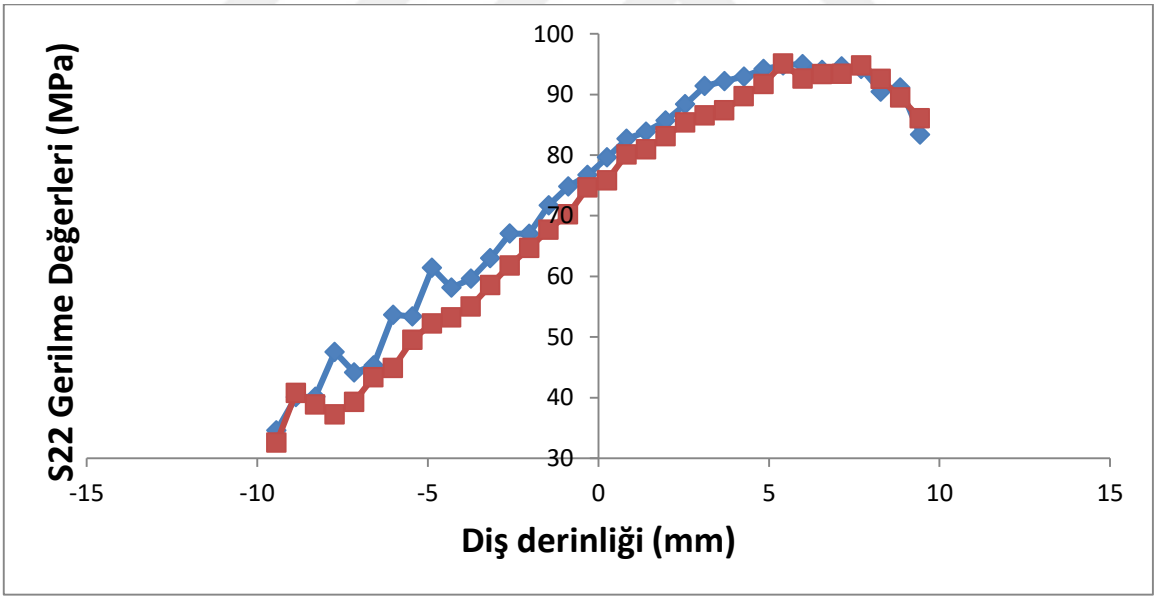
Şekil 4. 44: m_n = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =10˚ ve α=25˚ parametreleri için analiz durumu.



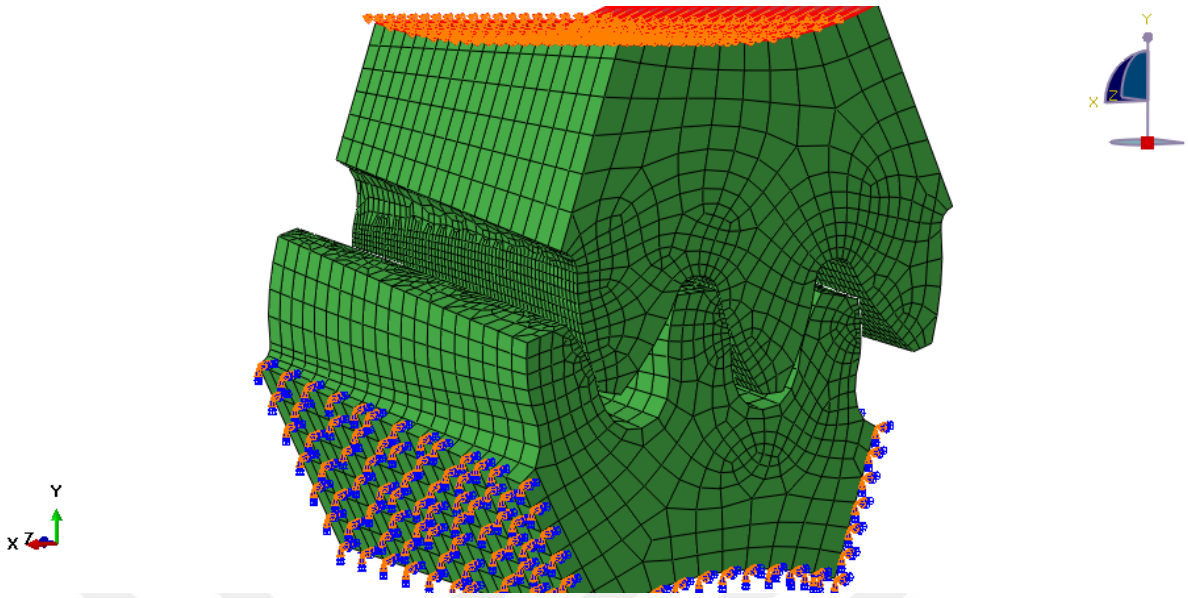
Şekil 4. 45: m_n = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =10˚ ve α=20˚ parametreleri için S22 gerilme sonuçları.



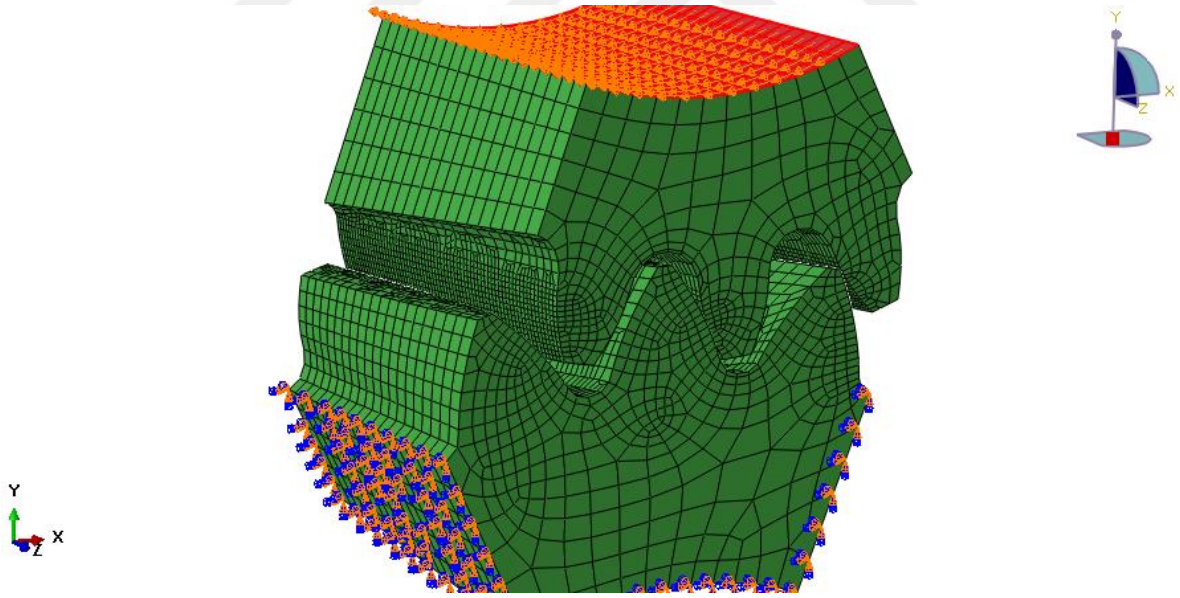
Şekil 4. 46: m_n = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =10˚ ve α=25˚ parametreleri için S22 gerilme sonuçları.



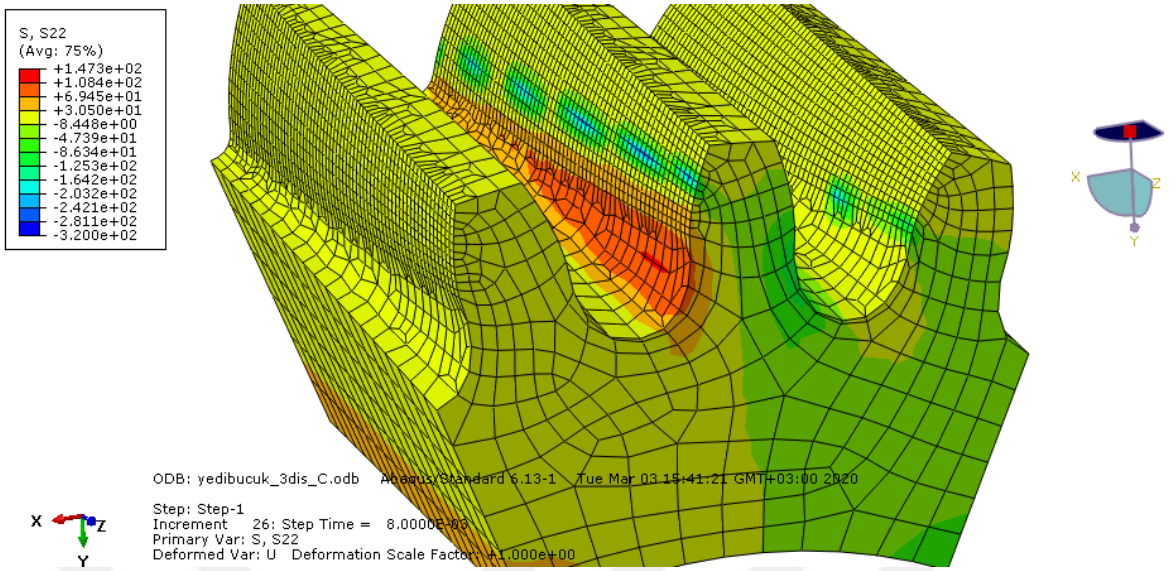
Şekil 4. 47: m_n = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =10˚ parametreleri için kök kısımlarında S22 gerilme sonuçları (mavi grafik α=20˚, kırmızı grafik α=25˚ derece için).



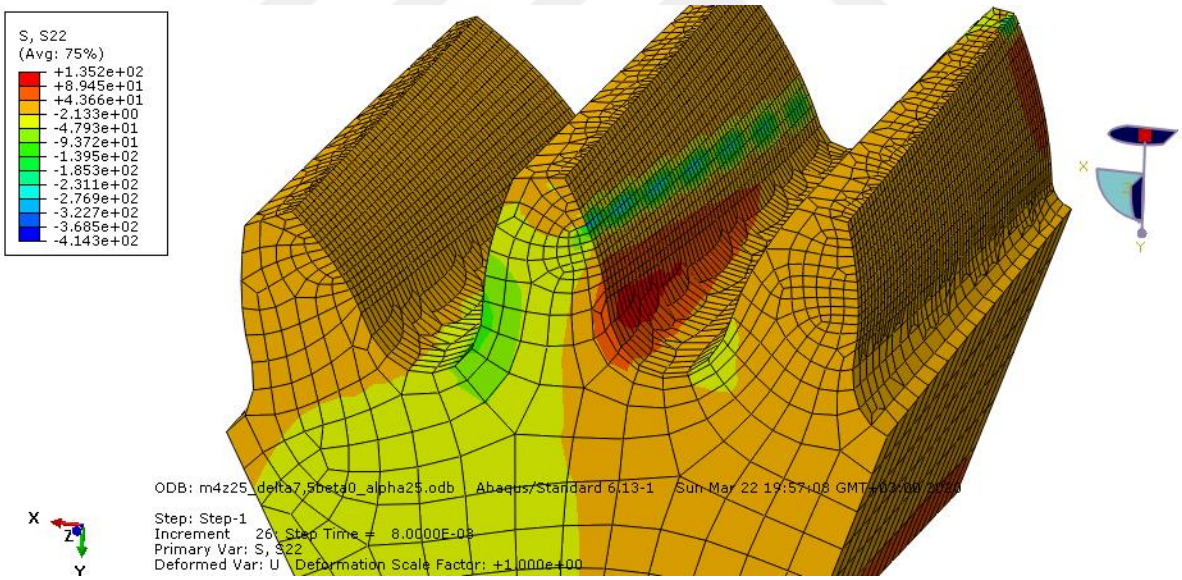
Şekil 4. 48: m_n = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β =0˚ ve α=20˚ parametreleri için analiz durumu.



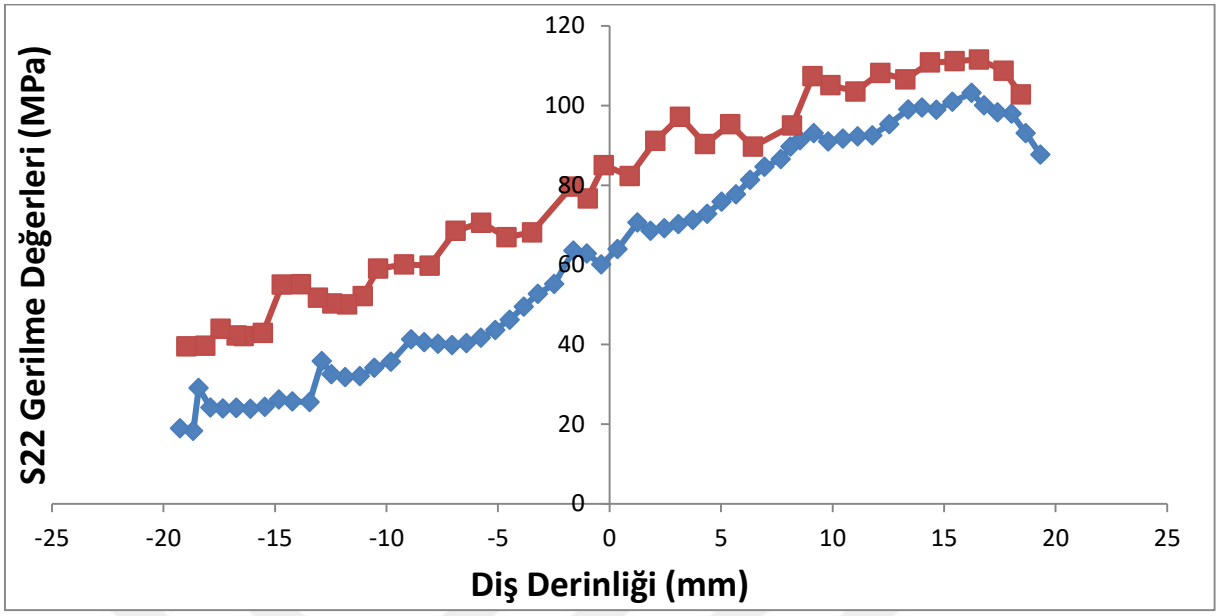
Şekil 4. 49: m_n = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β =0˚ ve α=25˚ parametreleri için analiz durumu.



Şekil 4. 50: m_n = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β =0˚ ve α=20˚ parametreleri için S22 gerilme sonuçları.



Şekil 4. 51: m_n = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β =0˚ ve α=25˚ parametreleri için S22 gerilme sonuçları.

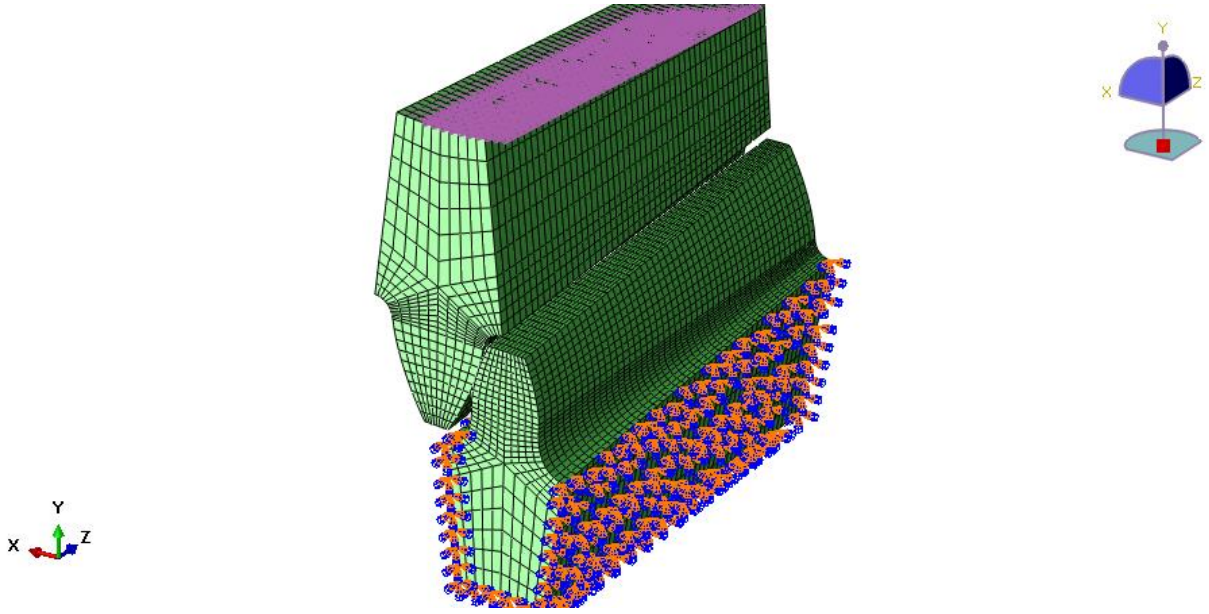


Şekil 4. 52: m_n = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β =0˚ parametreleri için kök kısımlarında S22 gerilme sonuçları (mavi grafik α=25˚, kırmızı grafik α=20˚ derece için).

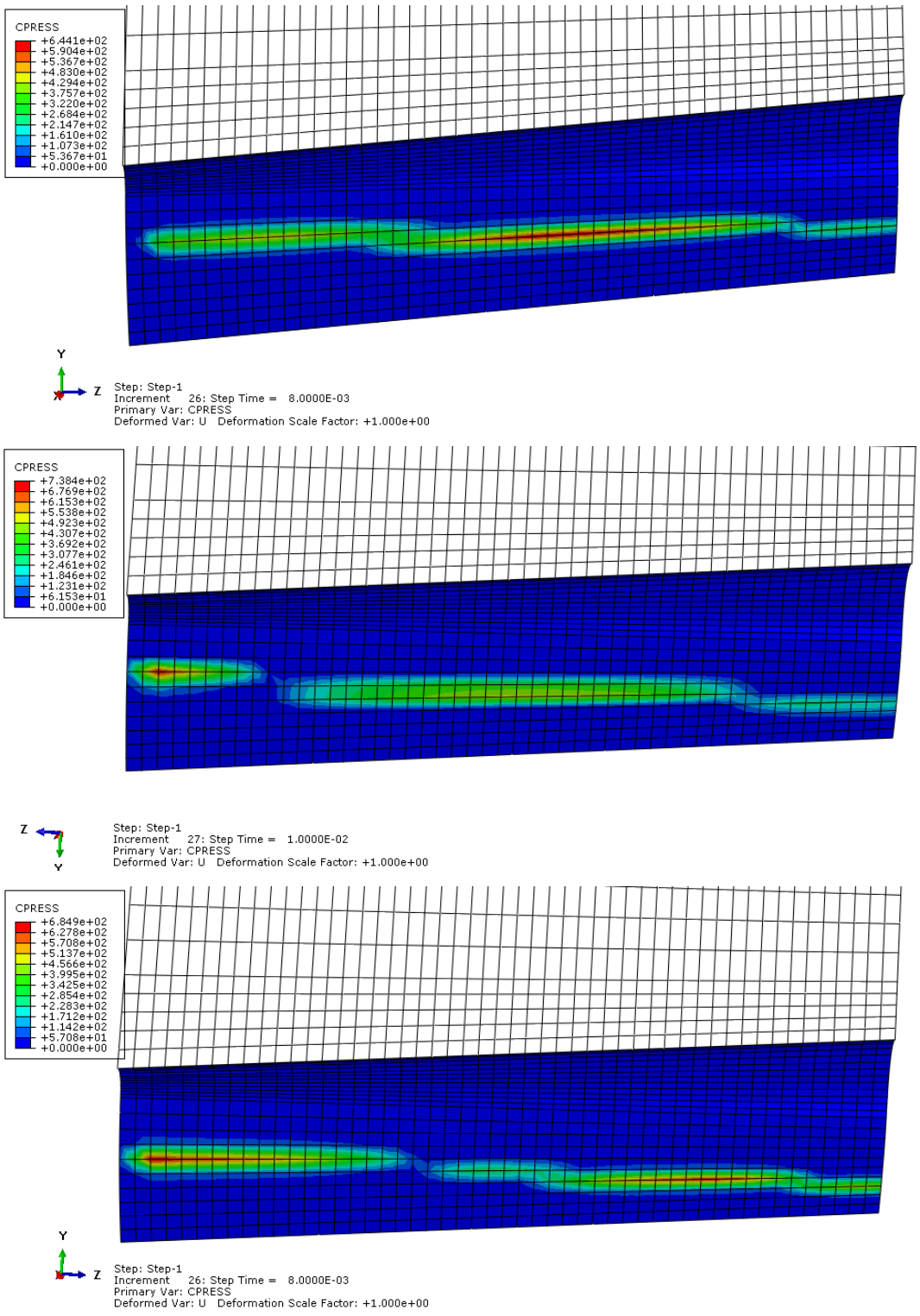
Sonuçlarda görüldüğü üzere, kavrama açısındaki büyüme ile birlikte diş profilleri evolvent ve kök kısımlarından genişlemekte, bu sayede köklerdeki gerilme değerleri azaltılarak kök mukavametinin arttırılabilmesi mümkün olmaktadır.

4.5. TEMAS HATALARI (TRANSMISSION ERRORS)

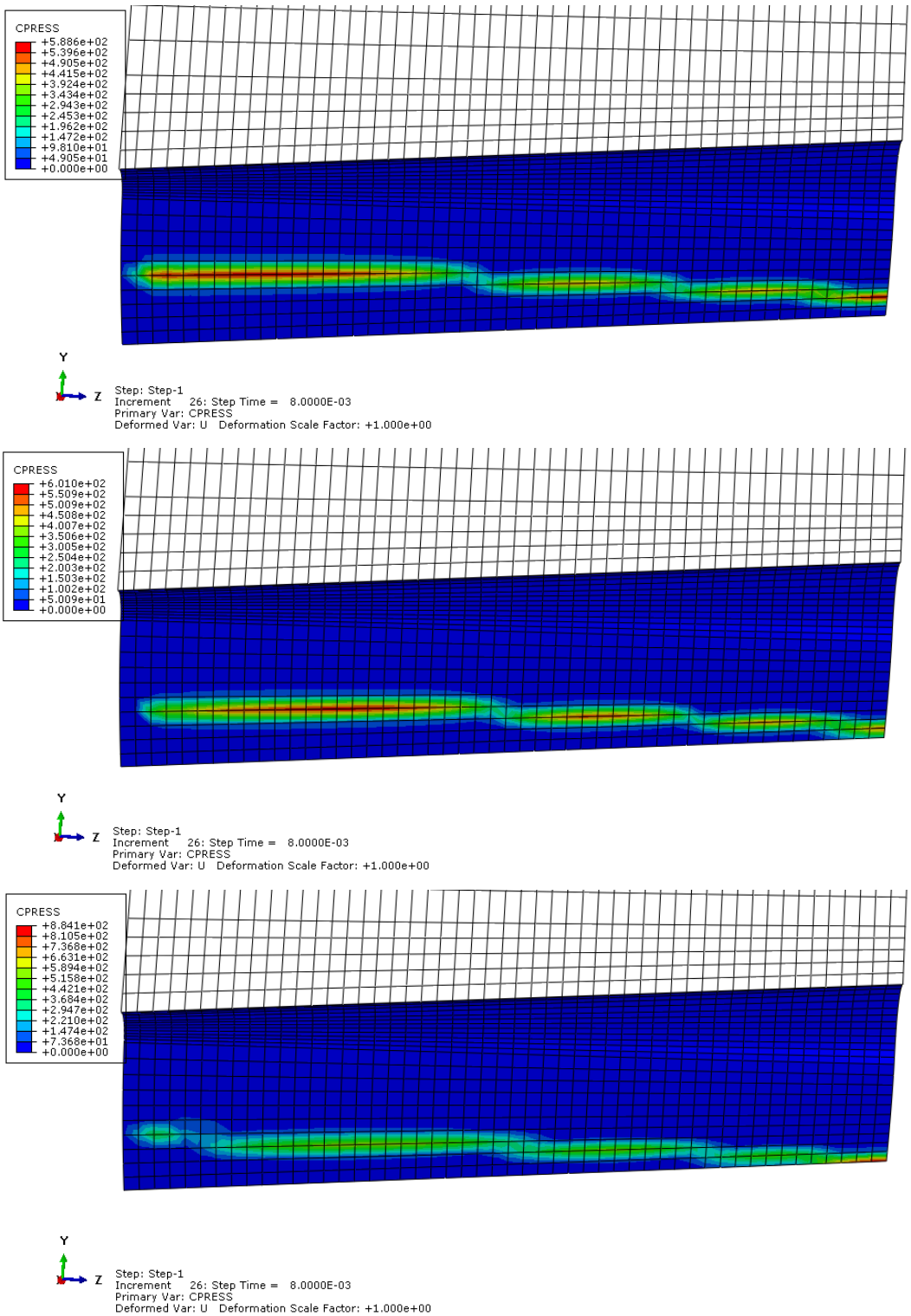
m_n = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β =0˚ ve m_n = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =10˚ parametreleri için Temas hataları eksenler arası mesafeler arttırılarak düşey eksende tanımlanmış ve temas analizleri gerçekleştirilmiştir. Yüklemelerde sırasıyla $7.55x10^3$Nm ve $9.23x10^3$ Nm değerlerinde moment uygulanmıştır. Sınır koşulları gövde ve yan kısımlarda ankastre olarak belirlenmiştir.



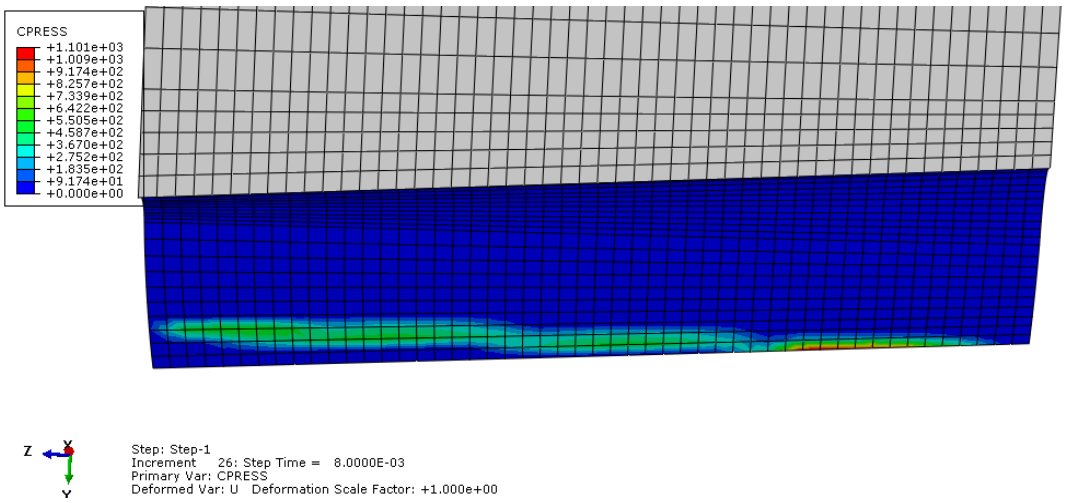
Şekil 4. 53: m_n = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β =0˚ parametreleri için analiz durumu.



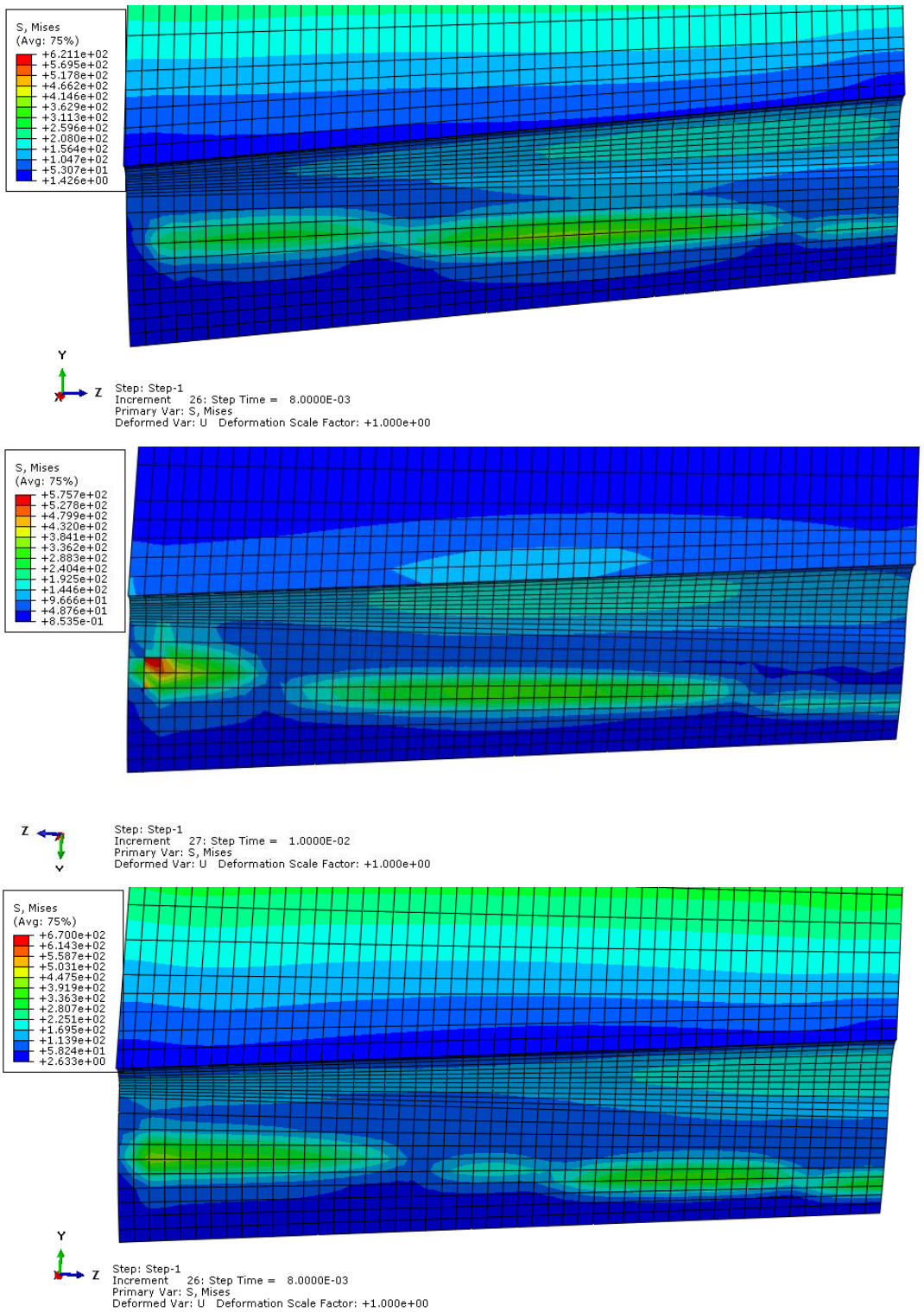
Şekil 4. 54: m_n = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β =0˚ ve temas hataları T.E. = 0-2 mm parametreleri için contact press sonuçları.



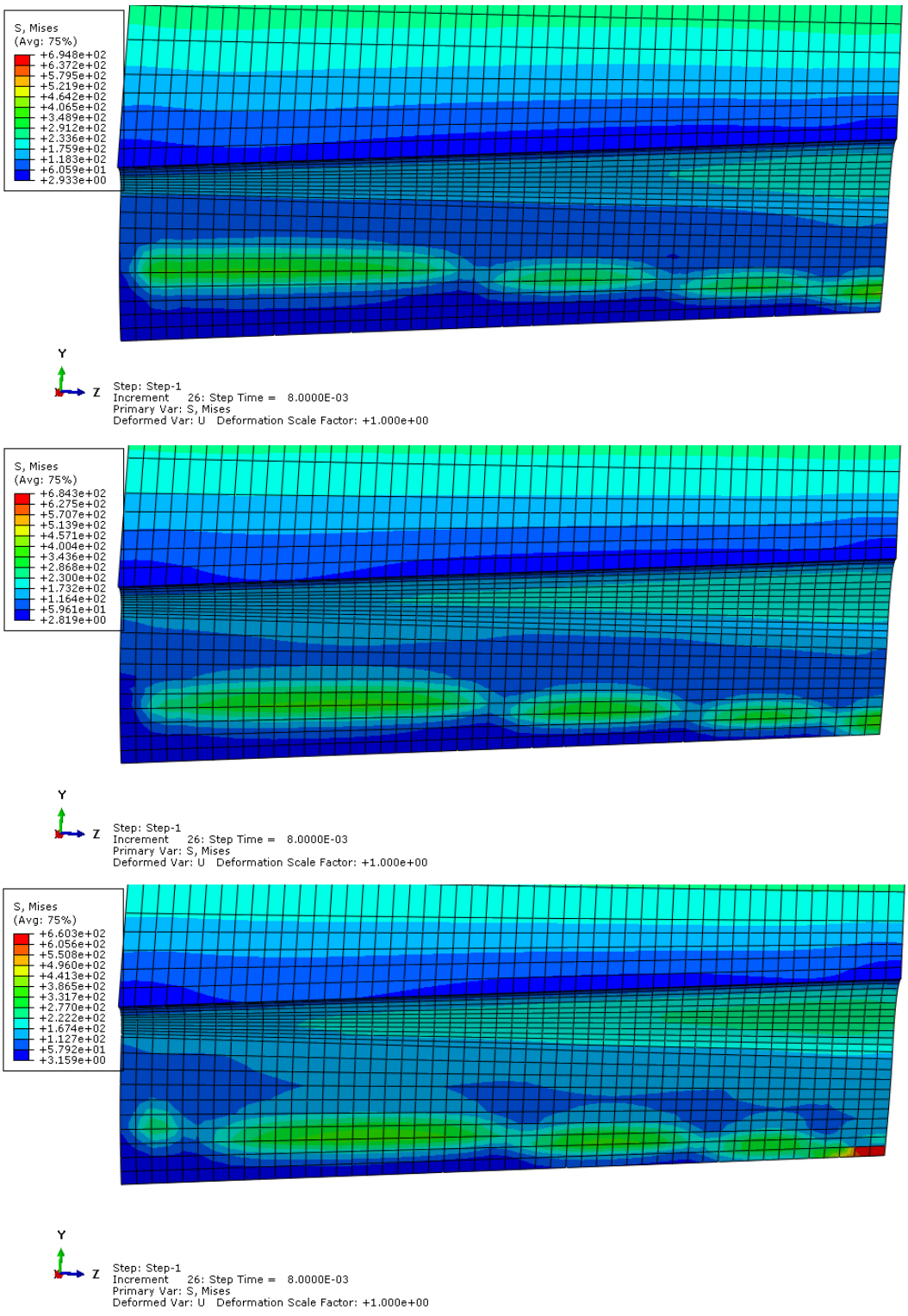
Şekil 4. 55: m_n = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β =0˚ ve temas hataları T.E. = 3-5 mm parametreleri için contact press sonuçları.



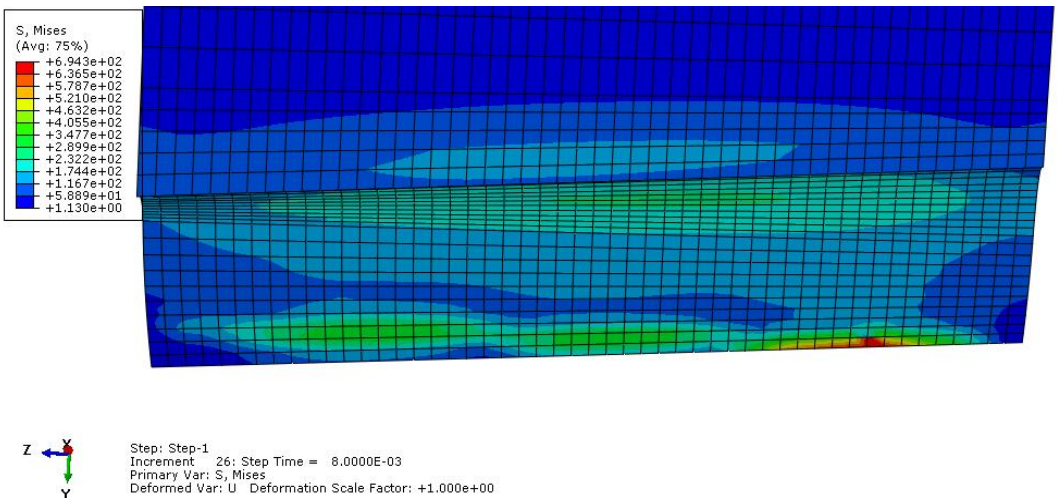
Şekil 4. 56: m_n = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β =0˚ ve temas hataları T.E. = 6 mm parametreleri için contact press sonuçları.



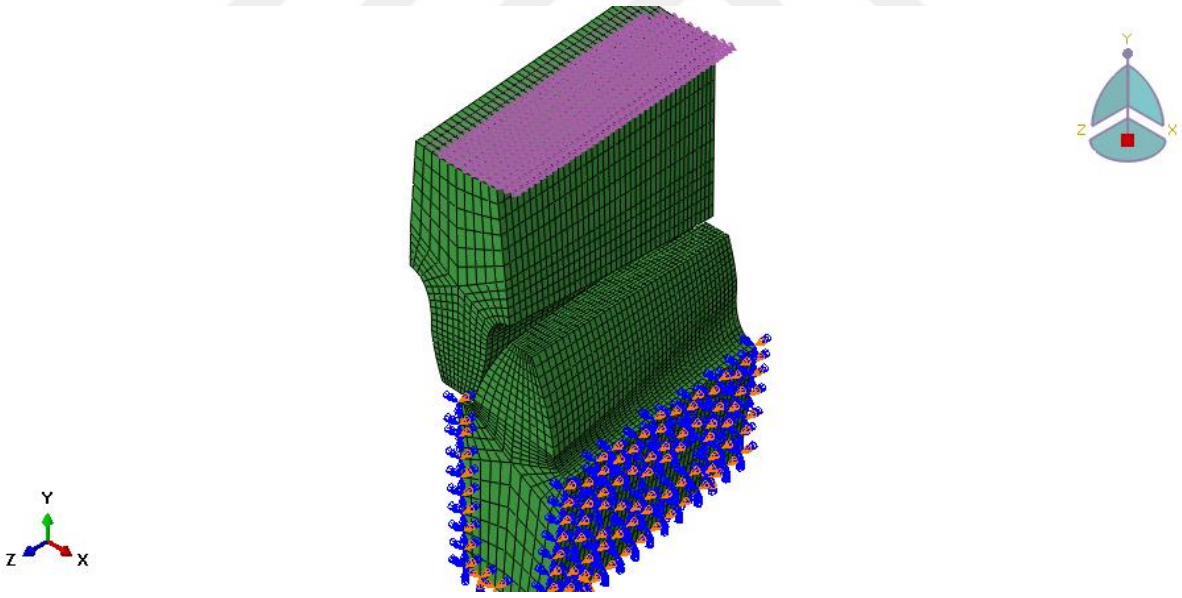
Şekil 4. 57: m_n = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β =0˚ ve temas hataları T.E.= 0-2 mm parametreleri için Von Misses sonuçları.



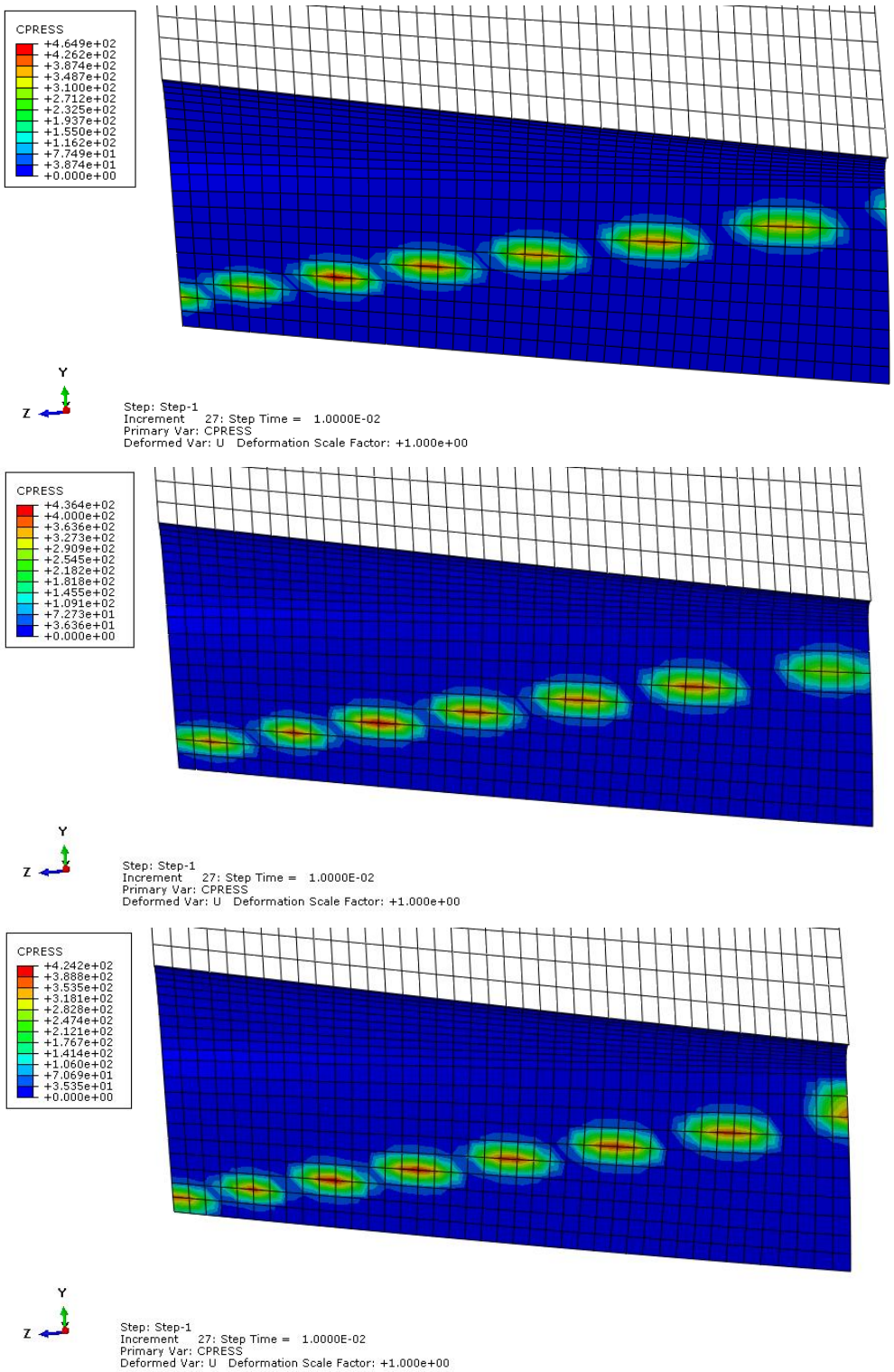
Şekil 4. 58: m_n = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β =0˚ ve temas hataları T.E.= 3-5 mm parametreleri için Von Misses sonuçları.



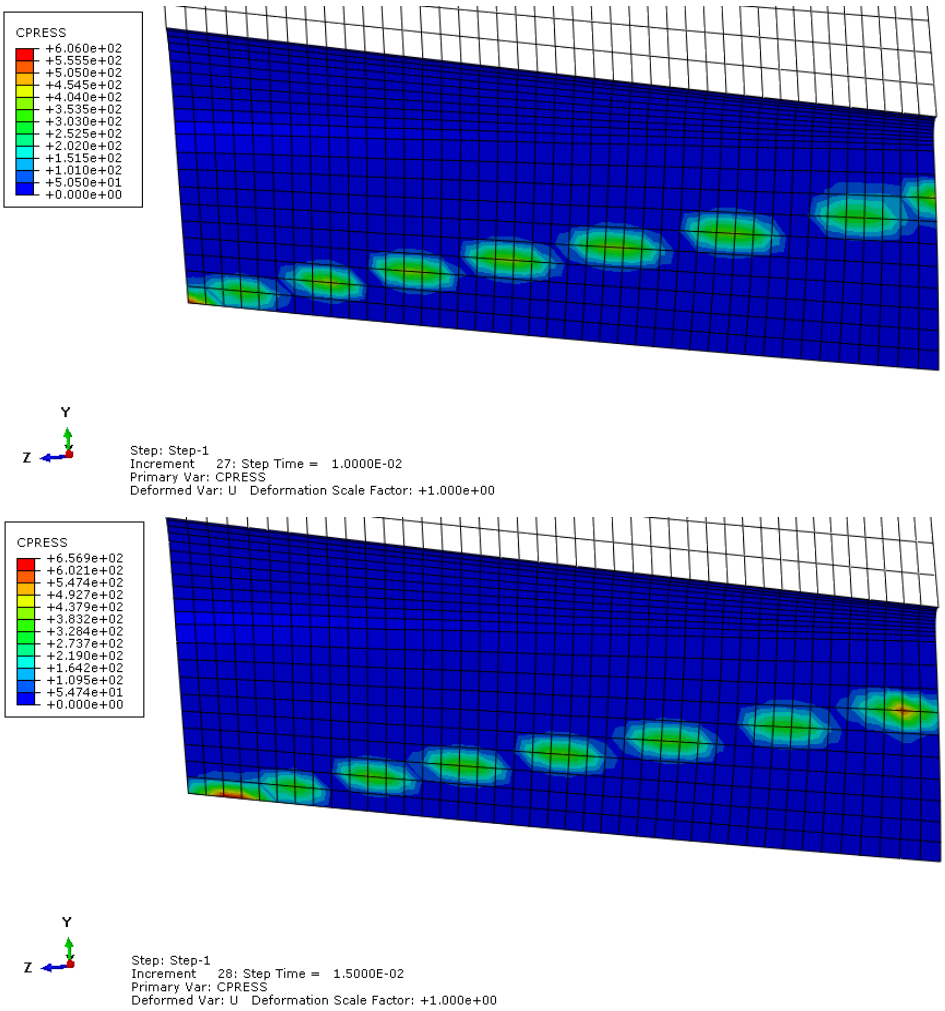
Şekil 4. 59: m_n = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β =0˚ ve temas hataları T.E. = 6 mm parametreleri için Von Misses sonuçları.



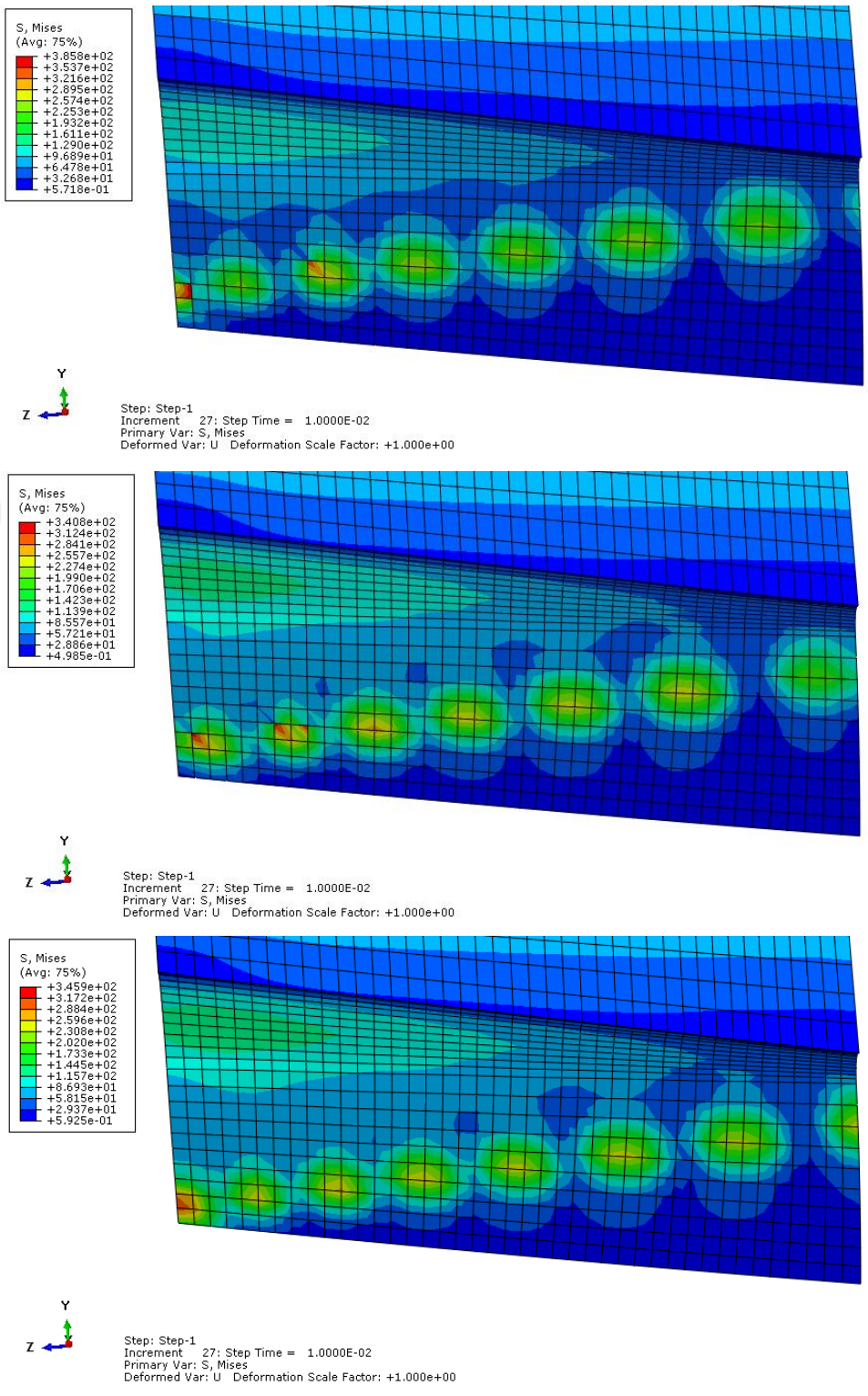
Şekil 4. 60: m_n = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =10˚ parametreleri için analiz durumu.



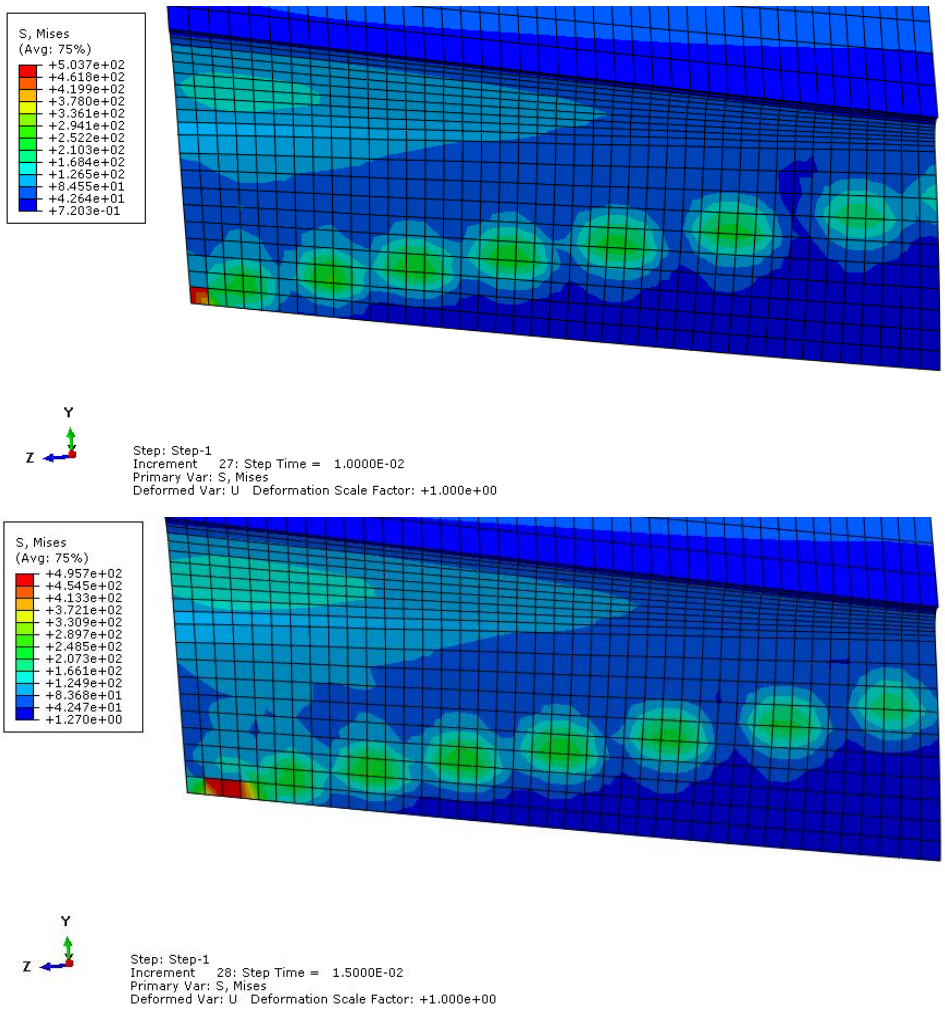
Şekil 4. 61: m_n = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =10˚ ve temas hataları T.E. = 0-1 mm parametreleri için contact press sonuçları.



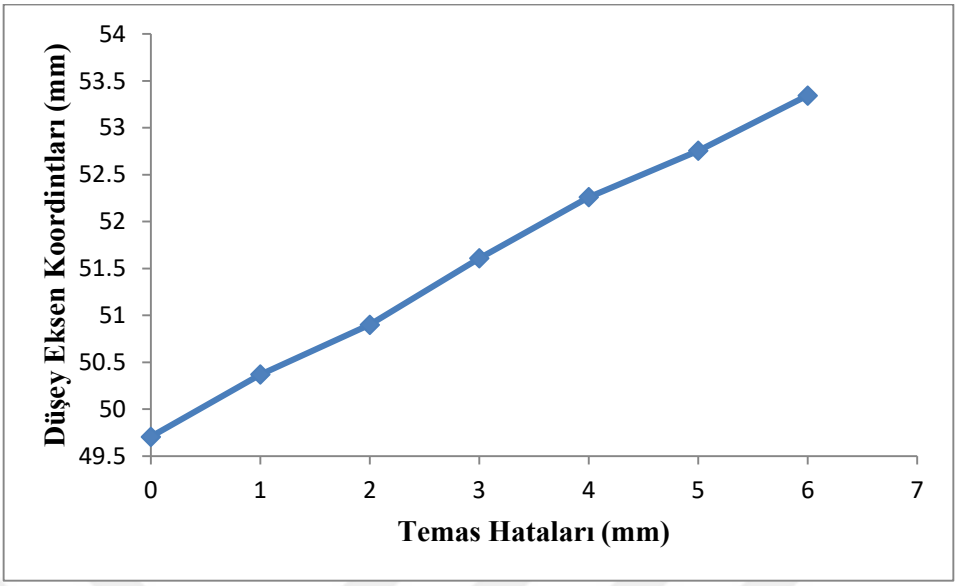
Şekil 4. 62: m_n = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =10˚ ve temas hataları T.E. = 1.5-2 mm parametreleri için contact press sonuçları.



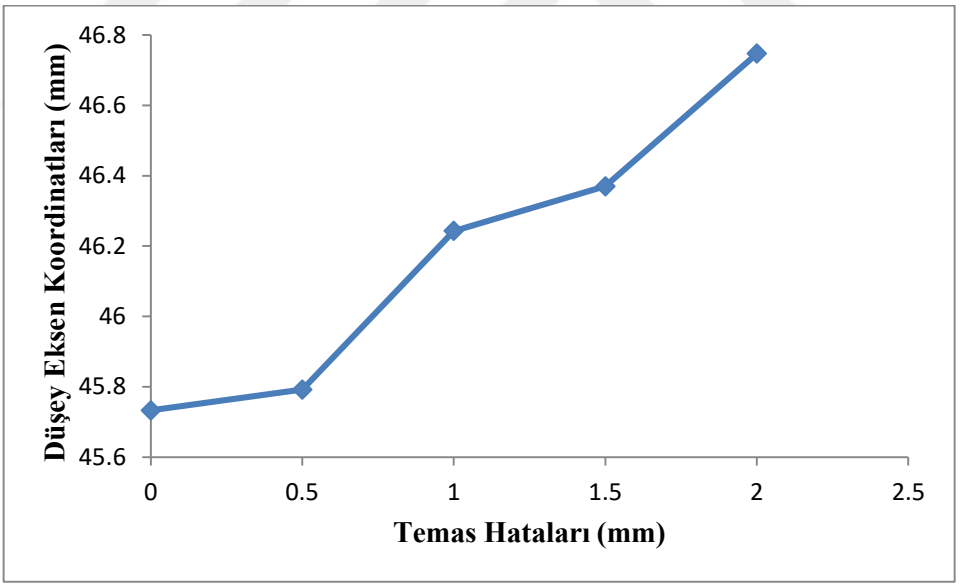
Şekil 4. 63: m_n = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =10˚ ve temas hataları T.E. = 0-1 mm parametreleri için Von Misses sonuçları.



Şekil 4. 64: m_n = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =10˚ ve temas hataları T.E. = 1.5-2 mm parametreleri için Von Misses sonuçları.



Şekil 4. 65: m_n = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β =0˚ parametreleri için temas hatalarının artışı ile temas çizgilerinin düşey eksendeki konum değişimleri.

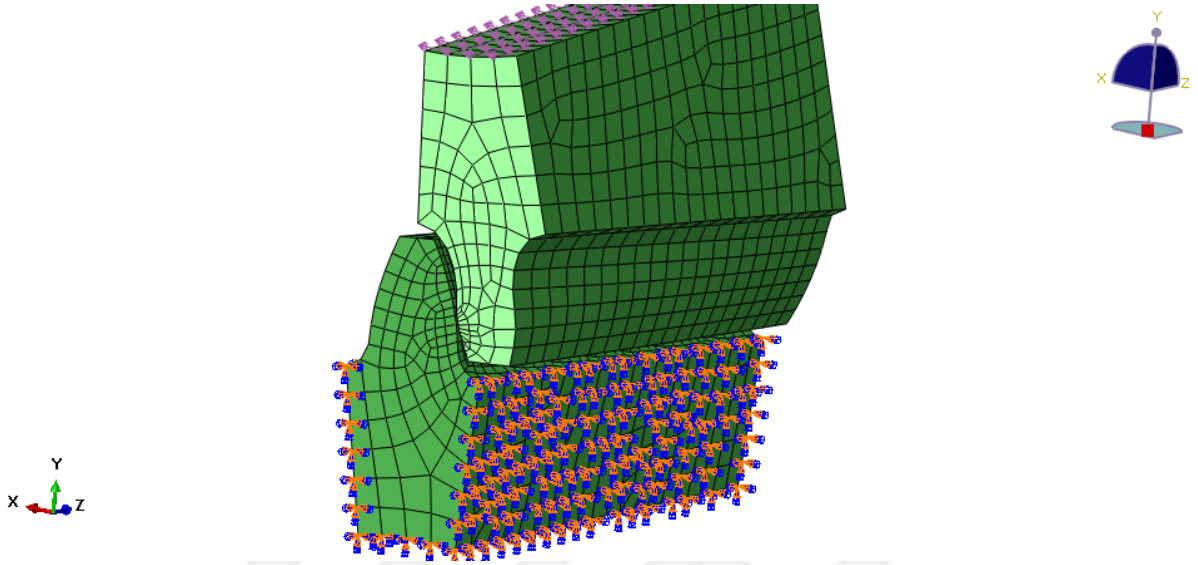


Şekil 4. 66: m_n = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =10˚ parametreleri için temas hatalarının artışı ile temas çizgilerinin düşey eksendeki konum değişimleri.

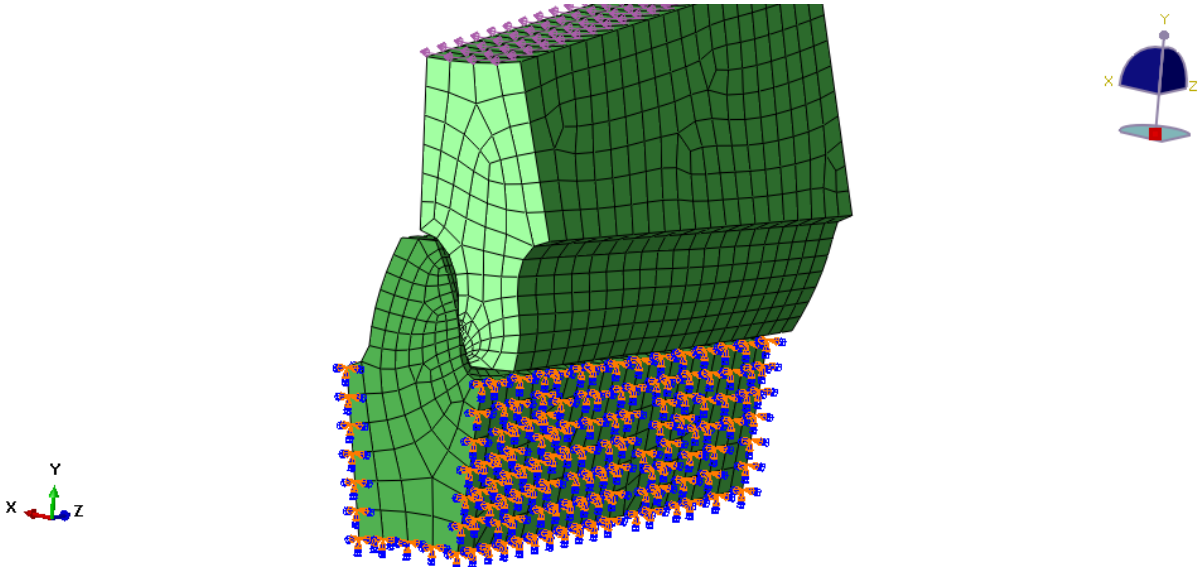
Sonuçlardan hareketle, diş derinliğinin fazla olduğu modellerde sınır bölge temasları (edge contact) daha büyük hata değerlerinde meydana gelirken, düzkonik ve heliselkonik modeller için, belirli aralıklarda temas hatalarının olması halinde güç aktarımının düzgün sağlanabileceği görülmektedir.

4.6. KONKAV BEVELOİD MODELLERİN ANALİZ SONUÇLARI

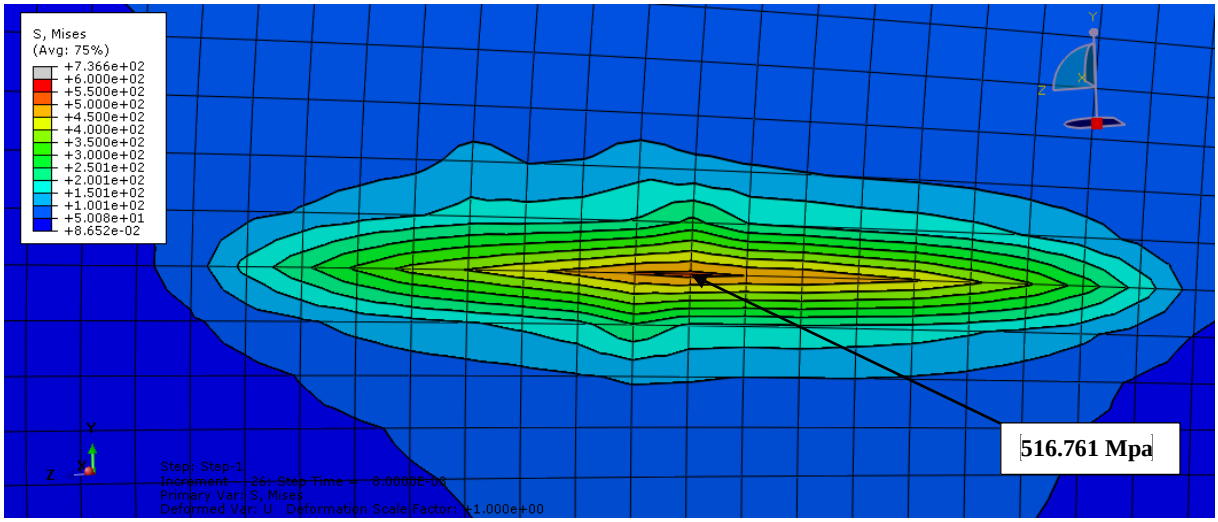
Analizlerde, sınır koşulları, gövde ve yan kısımlarda anksatre olarak belirlenmiş, döndürme momenti 1.665 x 10^3 Nm olarak belirlenmiştir.



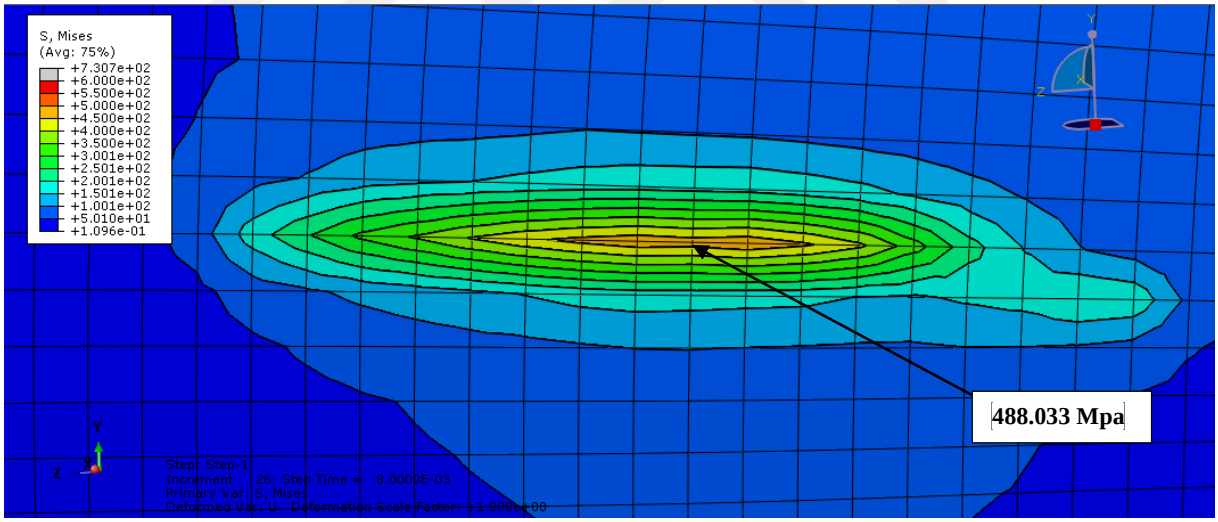
Şekil 4. 67: m_n = 4mm, T= 25, δ = 0˚, β =0˚ ve m_n = 4mm, T= 25, δ = 10˚, β =0˚ parametreleri için modifikasyonsuz dişlilerin analiz durumu.



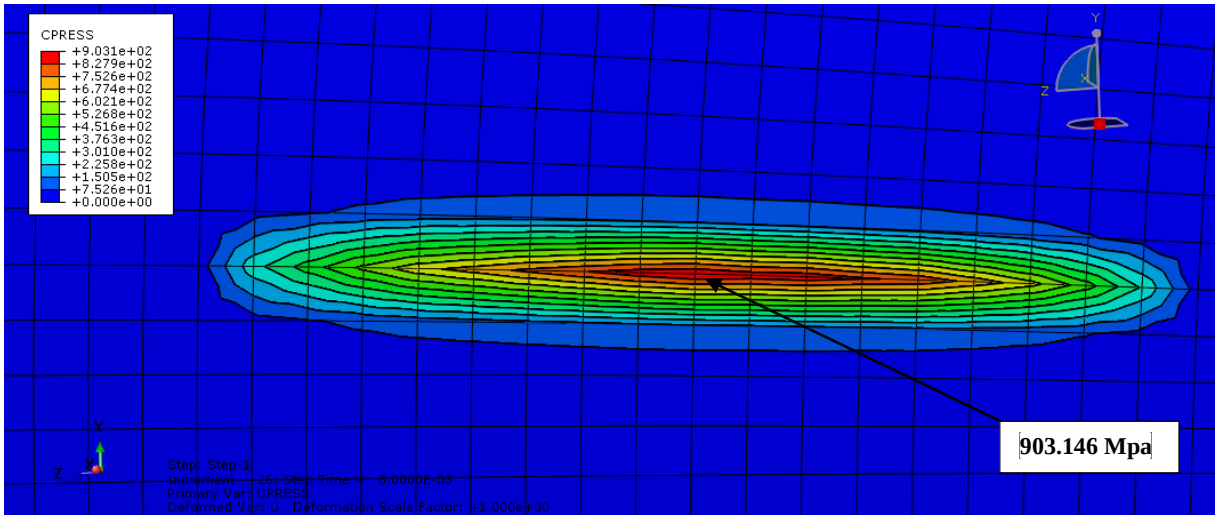
Şekil 4. 68: m_n = 4mm, T= 25, δ = 0˚, β =0˚ ve m_n = 4mm, T= 25, δ = 10˚, β =0˚ parametreleri için konkav beveloid dişlilerin analiz durumu.



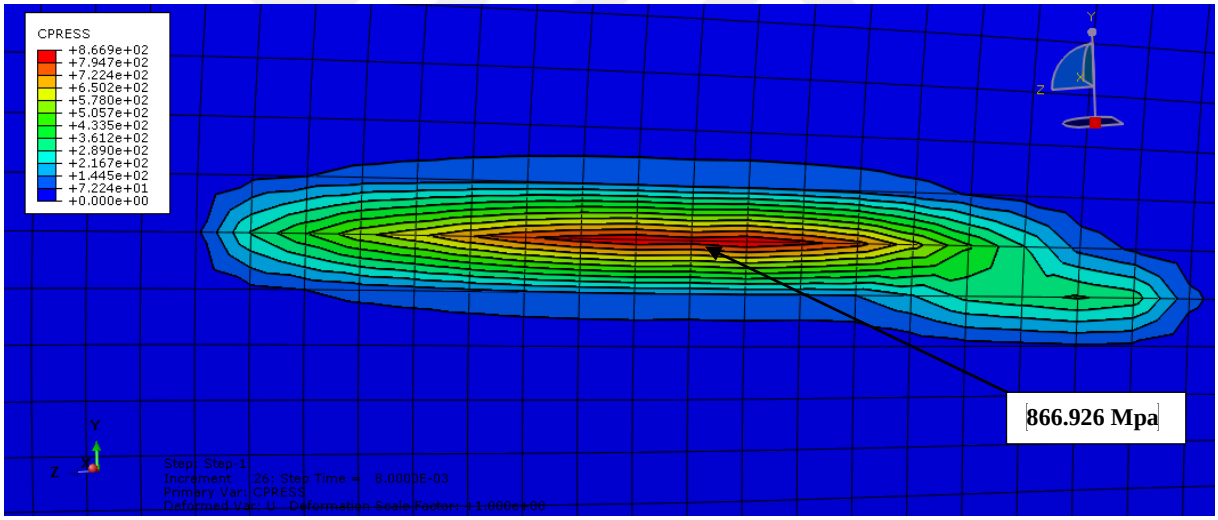
Şekil 4. 69: m_n = 4mm, T= 25, δ = 0˚, β =0˚ ve m_n = 4mm, T= 25, δ = 10˚, β =0˚ parametreleri için modifikasyonsuz dişli çiftindeki temas elipsi (Von Misses gerilmeleri).



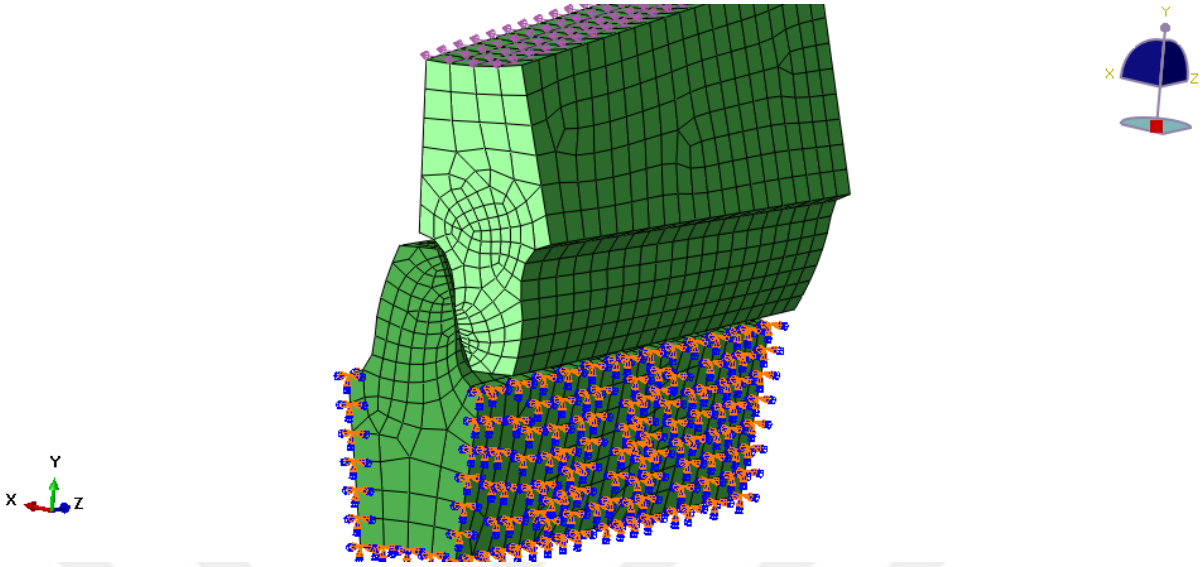
Şekil 4. 70: m_n = 4mm, T= 25, δ = 0˚, β =0˚ ve m_n = 4mm, T= 25, δ = 10˚, β =0˚ parametreleri için konkav beveloid dişli çiftindeki temas elipsi (Von Misses gerilmeleri).



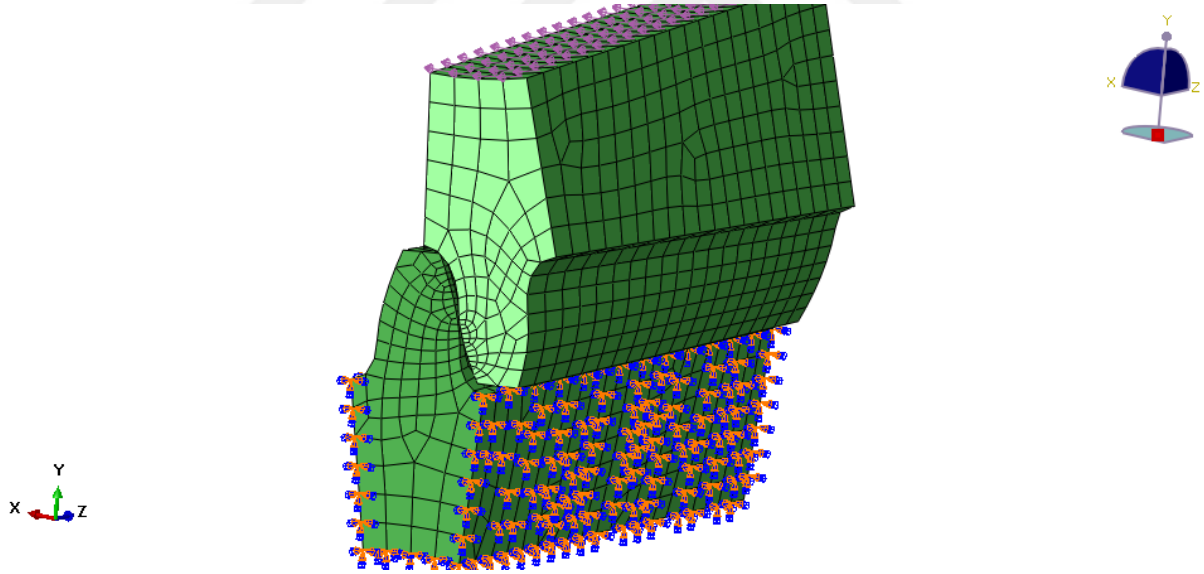
Şekil 4. 71: m_n = 4mm, T= 25, δ = 0˚, β =0˚ ve m_n = 4mm, T= 25, δ = 10˚, β =0˚ parametreleri için modifikasyonsuz dişli çiftindeki temas elipsi (Contact Press değerleri).



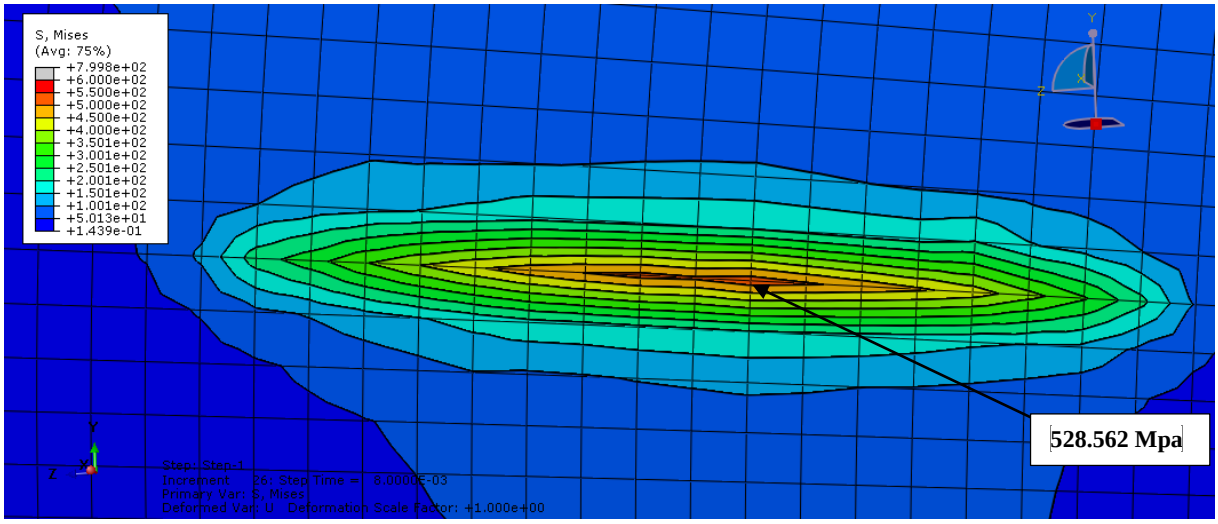
Şekil 4. 72: m_n = 4mm, T= 25, δ = 0˚, β =0˚ ve m_n = 4mm, T= 25, δ = 10˚, β =0˚ parametreleri için konkav beveloid dişli çiftindeki temas elipsi (Contact Press değerleri).



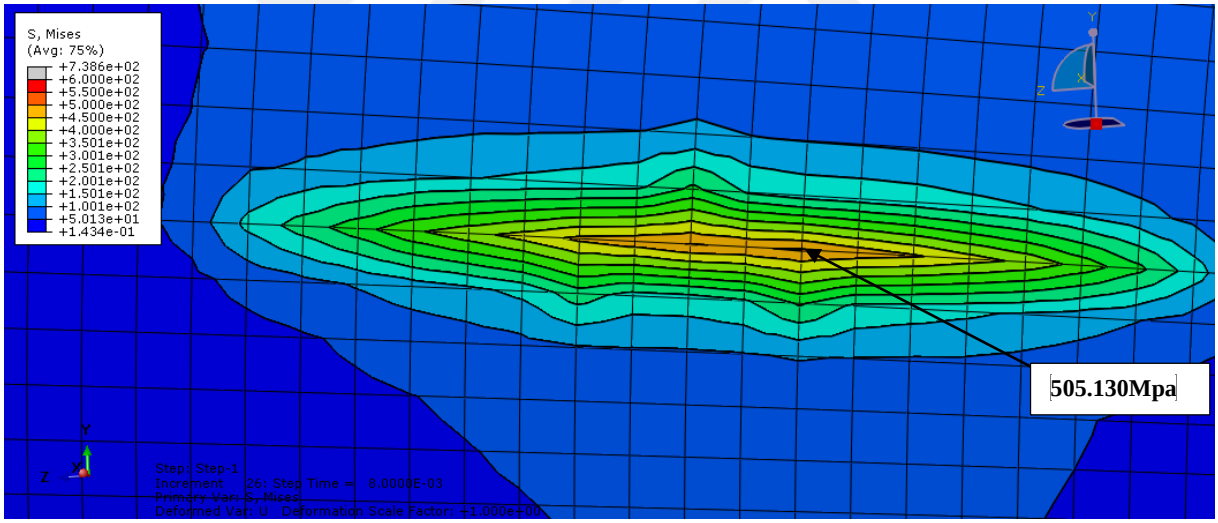
Şekil 4. 73: m_n = 4mm, T= 25, δ = 2.5˚, β =0˚ ve m_n = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β =0˚ parametreleri için modifikasyonsuz dişlilerin analiz durumu.



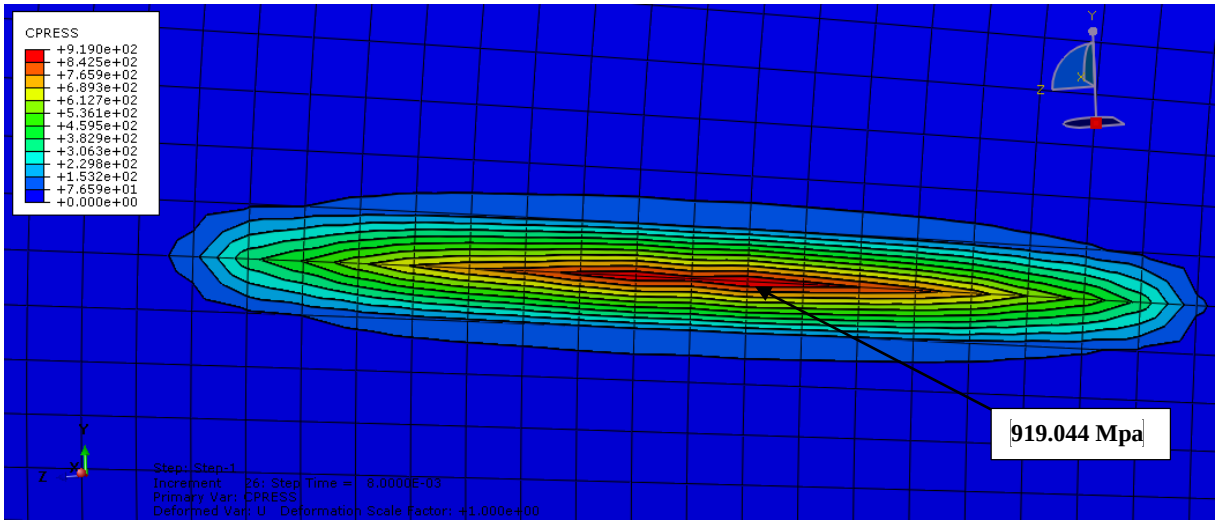
Şekil 4. 74: m_n = 4mm, T= 25, δ = 2.5˚, β =0˚ ve m_n = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β =0˚ parametreleri için konkav beveloid dişlilerin analiz durumu.



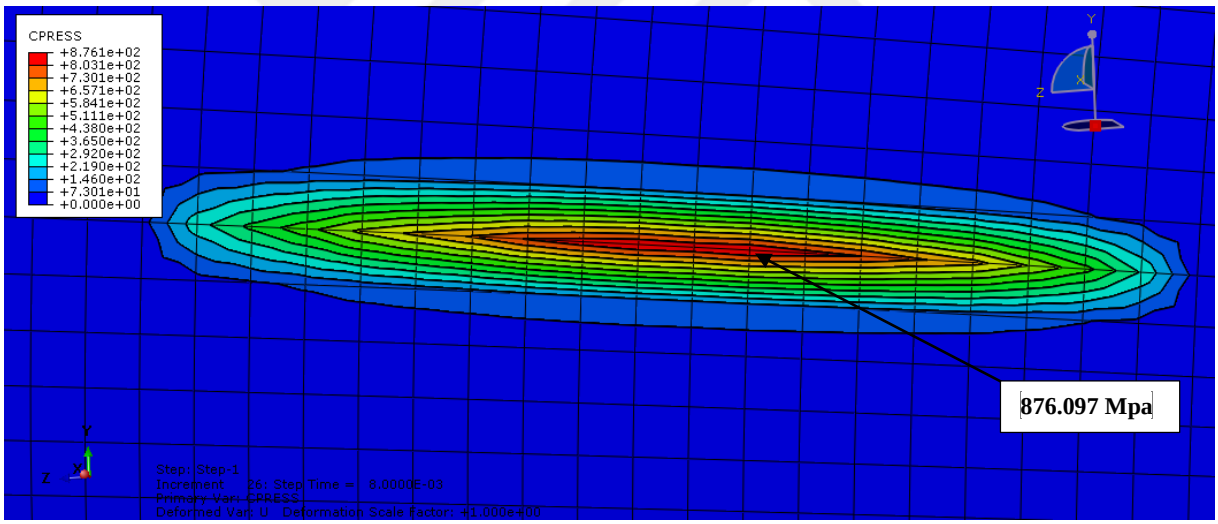
Şekil 4. 75: m_n = 4mm, T= 25, δ = 2.5˚, β =0˚ ve m_n = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β =0˚ parametreleri için modifikasyonsuz dişli çiftindeki temas elipsi (Von Misses gerilmeleri).



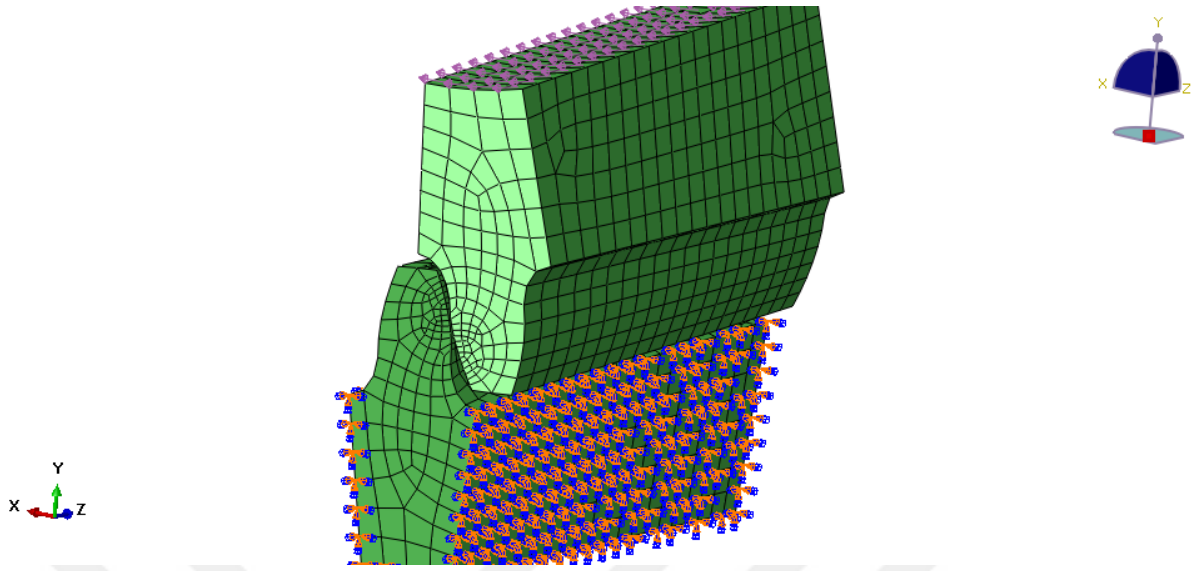
Şekil 4. 76: m_n = 4mm, T= 25, δ = 2.5˚, β =0˚ ve m_n = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β =0˚ parametreleri için konkav beveloid dişli çiftindeki temas elipsi (Von Misses gerilmeleri).



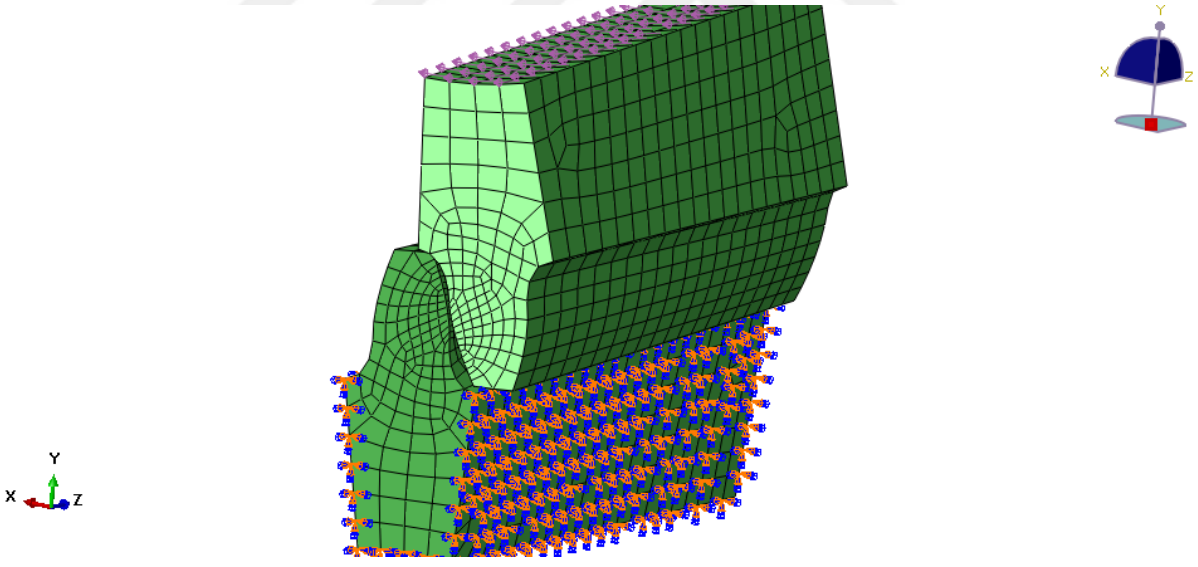
Şekil 4. 77: m_n = 4mm, T= 25, δ = 2.5˚, β =0˚ ve m_n = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β =0˚ parametreleri için modifikasyonsuz dişli çiftindeki temas elipsi (Contact Press değerleri).



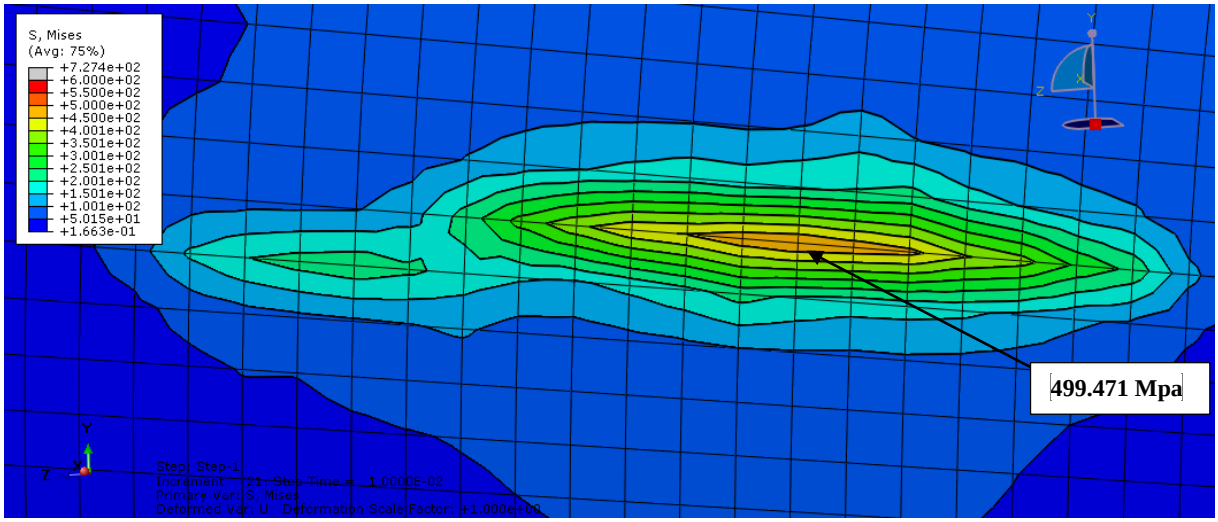
Şekil 4. 78: m_n = 4mm, T= 25, δ = 2.5˚, β =0˚ ve m_n = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β =0˚ parametreleri için konkav beveloid dişli çiftindeki temas elipsi (Contact Press değerleri).



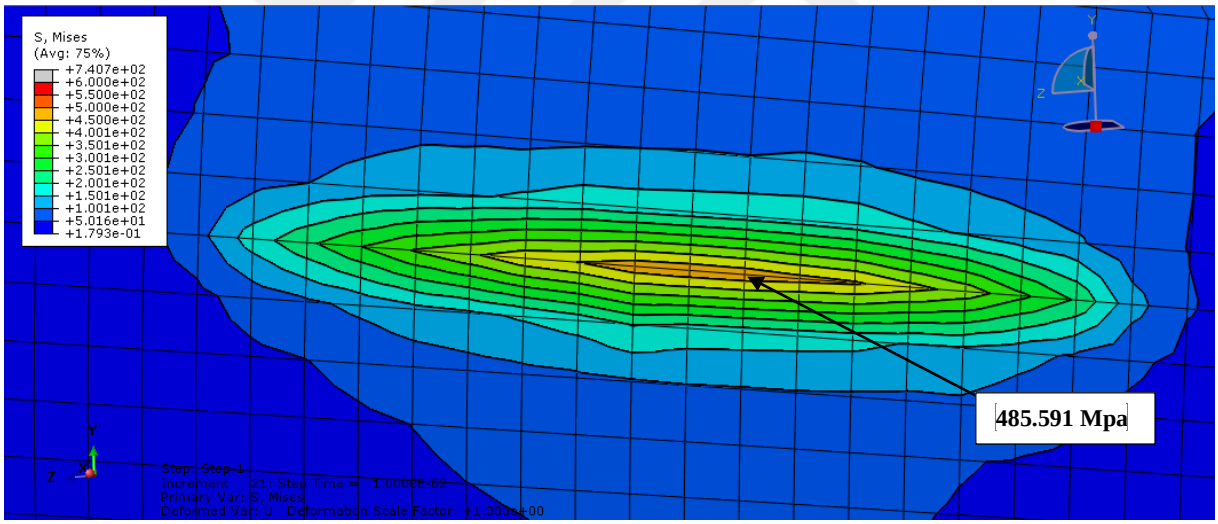
Şekil 4. 79: m_n = 4mm, T= 25, δ = 5˚, β =0˚ ve m_n = 4mm, T= 25, δ = 5˚, β =0˚ parametreleri için modifikasyonsuz dişlilerin analiz durumu.



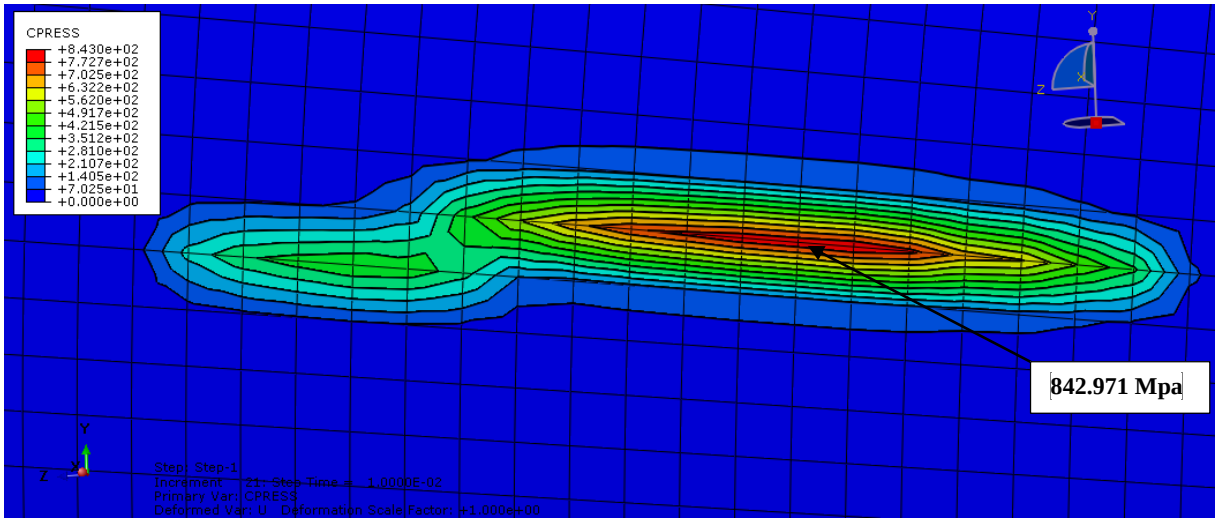
Şekil 4. 80: m_n = 4mm, T= 25, δ = 5˚, β =0˚ ve m_n = 4mm, T= 25, δ = 5˚, β =0˚ parametreleri için konkav beveloid dişlilerin analiz durumu.



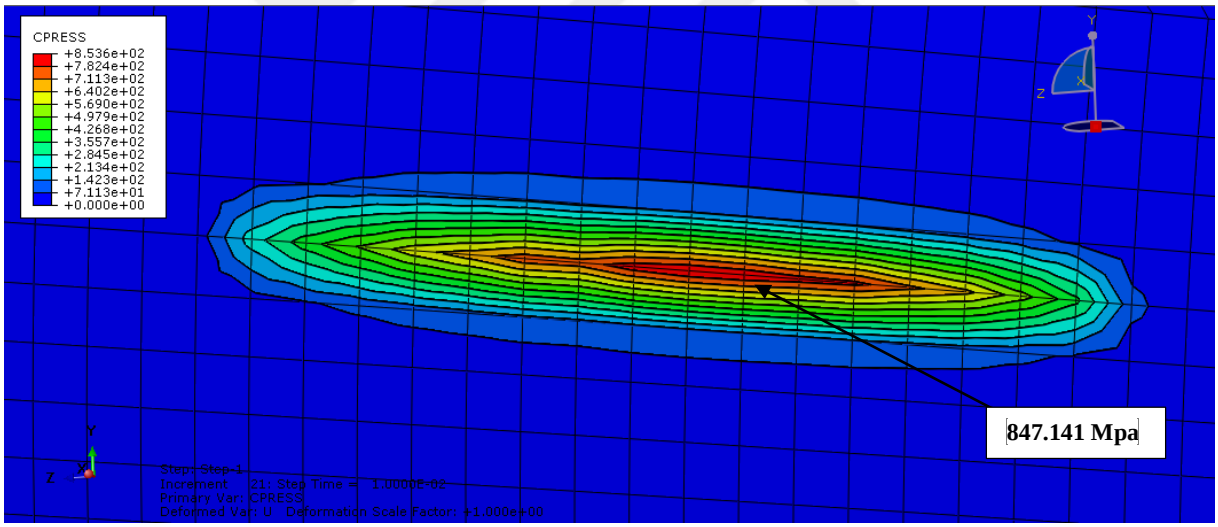
Şekil 4. 81: m_n = 4mm, T= 25, δ = 5˚, β =0˚ ve m_n = 4mm, T= 25, δ = 5˚, β =0˚ parametreleri için modifikasyonsuz dişli çiftindeki temas elipsi (Von Misses gerilmeleri).



Şekil 4. 82: m_n = 4mm, T= 25, δ = 5˚, β =0˚ ve m_n = 4mm, T= 25, δ = 5˚, β =0˚ parametreleri için konkav beveloid dişli çiftindeki temas elipsi (Von Misses gerilmeleri).



Şekil 4. 83: m_n = 4mm, T= 25, δ = 5˚, β =0˚ ve m_n = 4mm, T= 25, δ = 5˚, β =0˚ parametreleri için modifikasyonsuz dişli çiftindeki temas elipsi (Contact Press değerleri).



Şekil 4. 84: m_n = 4mm, T= 25, δ = 5˚, β =0˚ ve m_n = 4mm, T= 25, δ = 5˚, β =0˚ parametreleri için konkav beveloid dişli çiftindeki temas elipsi (Contact Press değerleri).

Sonuçlarda, konkavlık modifikasyonlarının yapıldığı modellerde, temas esnasında elipslerin yüzey alanlarında küçük de olsa artış meydana geldiği ve maksimum gerilme değerlerinin düştüğü görülmektedir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Yapılan bu çalışmada, beveloid dişlilerin matematiksel modellenmesi ve genel anlamda sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak temas analizlerinin gerçekleştirilmesi konu edilmiştir. Bu kapsamda özelikle paralel eksenlerde çalışan beveloid dişli çiftleri bu çalışmanın odak noktası olmuştur.

İlk adımda, beveloid dişlilerin matematiksel modellenmesi acamıyla dişli profillerini oluşturan denklemler özellikle FDM (Fused Deposition Modelling) yöntemi ile imalata uygun olacak şekilde verilmiş, CAD modellerinin yanı sıra FDM kullanılarak imalat yapılmıştır. İmal edilen dişli modellerinin istenilen şekilde paralel ve çakışık eksenlerde çalışabildiği gözlemlenmiştir.

Alttan kesme durumları ise, beveloid dişlilerin tasarımında belirli diş sayıları söz konusu olduğunda sıklıkla karşılaşılan ve dizaynda yapılacak iyileştirmeler ile giderilmesi gereken bir hususdur. Bu çalışma kapsamında Mitome'nin [6] evolvent profilli konik dişliler için tanımlamış olduğu alttan kesme iyileştirmelerinden hareketle, alttan kesmeyi giderebilecek, pozitif profil kaydırma ve asimetrik kremayer takımla imalat yöntemleri önerilerek, matematiksel ifadelere ilave edilmiştir. Burada, pozitif profil kaydırma yönteminin uygulandığı durumlarda m_n= 5mm, T = 20, δ= 15˚, β = 0˚ ve m_n = 5mm, T = 16, δ= 10˚, β = 15˚ parametreleri için hazırlanan modellerde köklerde maksimum gerilmelerin sırası ile %4.69 ve %16.42 mertebesinde azaltıldığı, m_n = 5mm, T= 16, δ = 15˚, β = 15˚ parametreleri için ise asimetrik takımla imalat yönteminin uygulandığı durumda % 8.9 iyileştirme sağlandığı görülmüştür. Buradan hareketle, sonlu eleman analizleri sonuçlarına göre alttan kesme modifikasyonları yapılmış olan modellerde diğerlerine göre kök kısımlarındaki gerilme değerleri düşmekte ve bu sayede çalışma esnasında kök mukavemetinin arttırılabileceği görülmektedir.

Bir sonraki aşamada, paralel eksenlerde çalışan dişli modellerinin sonlu elemanlar yöntemi yardımı ile temas analizleri gerçekleştirilmiştir. Çalışma esnasında dönme açılarının değişimi ile elde edilen gerilme değerleri, yuvarlanma noktasında temas gerilmelerinin maksimum değerine ulaştığı ve temasın sona erdiği noktalara doğru giderek düştüğünü göstermektedir. Bu durum, şekil (3.26) da ortaya konan teorik sonuçlar ile benzerlik göstermektedir. Böylece

bilgisayar destekli yöntemler ile test edilen temas durumlarının beklenen değerlere belirli oranda yakınsadığı gözlemlenmiştir. Hali hazırda paralel eksenlerde çalışan beveloid dişlilerin incelenmesi ile ilgili çalışma sayısının az olması sebebiyle, yapılmış olan bu çalışmanın beveloid dişlilerin paralel eksenlerde güç aktarımı ve temas gerilmeleri ile ilgili avantajları konusunda literatüre önemli bir katkısı olacağı düşünülmektedir.

Beveloid dişlilerin dizaynında koniklik ve helislik parametrelerindeki değişimin, temas gerilmelerine olan etkisi bir diğer araştırma konusudur. Bu amaçla, m_n = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =10˚ parametreleri için koniklik ve helislik değerleri düzenli arttırılarak elde edilen modellerin paralel eksenlerde teması simule edilmiştir. Sonuçlarda, koniklik açısındaki artışların, sınır bölge temaslarına (edge contact) sebep olduğu, bunun yanında, Song C. ve diğ. [23] tarafından yapılan çalımaya paralel olarak, helislik ve koniklik parametrelerinin arttırılması ile temas elipslerinin bir araya gelerek büyüme eğiliminde oldukları görülmüştür. Bu şekilde dişlerde yük taşıma kapasitesinin belirli oranlarda arttırılabileceği söylenebilir.

Paralel eksenlerde çalışma esnasında, test edilen bir diğer parametre kavrama açısıdır. Kavrama açılarındaki değişimlerin temas gerilmelerine etkisi, $\alpha = 20^{\circ}$ ve $\alpha = 25^{\circ}$ değerleri için test edilmiştir. Sonuçta kavrama açısındaki artış ile diş profillerinin evolvent ve kök kısımlarında yatay eksende genişlediği ve simülasyon sonuçlarında köklerdeki ortalama gerilme değerlerinin düştüğü görülmüştür. m_n = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =10˚ ve m_n = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β =0˚ parametreleri için hazırlanan modellerde, köklerdeki ortalama gerilmelerin sırasıyla %4.18 ve %19.77 mertebelerinde azaldığı görülmüştür. Bu durumda, dizaynda kavrama açılarının arttırılmasının, dişlerde yük taşıma kapasitesi ve kök kısımların mukavemetini önemli ölçüde attırabileceğini söylemek mümkündür.

Paralel eksenlerde çalışan beveloid dişlilerde temas hatalarının (transmission errors), etkileri belirli aralıklarda test edilmiştir. Sırasıyla m_n = 4mm, T= 25, δ = 7.5˚, β =0˚ ve m_n = 3mm, T= 30, δ = 10˚, β =10˚ parametreleri için yapılan analizlerde, düz konik dişli modelinde 0-6mm ve heliselkonik modelde 0-2mm aralığında merkezler arası mesafede tanımlanan hatalar sonucu, diş derinliğinin ve helisliğin artması ile sınır bölge temaslarının azaltılabildiği görülmüştür. Beveloid dişlilerin paralel eksenlerde, eksenler arası mesafe artışı durumunda da belirli aralıklarda verimli çalışabildikleri söylenebilir.

Özellikle çakışan eksenlerde çalışan beveloid dişlilerin dizaynında oluşturulan, konkavlık ve konvekslik modifikasyonları da dişlerde yük kapasitesini arttırabilen önemli yöntemlerdir. Bu yöntemlerin matematiksel modellemesi incelenerek konkav ve konveks dişli profilleri, geleneksel modeller ile karşılaştırılmıştır. Konveks beveloid dişlilerin, normale oranla yatay eksende diş genişliklerinin az oluşu sebebiyle, özellikle paralel eksenlerde sınır bölge temaslarını (edge contact) azaltıcı bir etki gösterdikleri yapılan çalışmalarda[68] görülmektedir. Bu daralma durumu, merkezler arası mesafelerin artması ile uç kısımlara doğru ilerleyen temas çizgilerinin belirli oranlarda yan yüzey sınırları arasında kalmasını sağlamaktadır. Konkav beveloid dişli profilleri ise yatay eksende, genişlemekte ve yüzeylerde temasa giren bölgelerin genişlemesini sağlayarak, maksimum gerilmelerin azaltılması yönünde etki gösterebilmektedir. Bu çalışma kapsamında çakışan eksenlerde 3 farklı durum için konkav beveloid dişli modelleri test edilerek, sonuçlar modifikasyonsuz durumlar ile karşılaştırılmıştır. m_n = 4mm, T= 25 parametreleri için, koniklik açıları δ = 0˚ ve 10˚ olan modellerde, temaslarda maksimum Von Misses gerilmelerinin %5.55 azaltıldığı, koniklik açıları δ = 2,5˚ ve 7,5˚ olan ve her iki dişli için koniklik açısının δ = 5˚ olduğu modellerde ise maksimum temas gerilmelerinde sırasıyla % 4.43 ve % 2.77 mertebelerinde azalma olduğu görülmüştür. Bu sonuçlardan yola çıkılarak, temas eliplerindeki genişlemeler sonucu maksimum gerilme değerlerinin az da olsa azaltılabildiğini söylemek mümkündür.

Liu C.C. ve diğ. [25] tarafından yapılan çalışmalarda tanımlanan konkavlık ifadeleri kullanılarak, modeller oluşturulmuştur. İleriki çalışmalarda, literatürdeki diğer çalışmalarda belirlenen farklı modifikasyonlar da test edilerek, beveloid dişlilerin optimizasyonu konusunda verilen matematiksel ifadeler geliştirilerek, yeni modellerin oluşturulması hedeflenmektedir.

Son olarak sonlu eleman analizleri yanında diferansiyel geometri esasları ve kabul edilmiş deneysel veri sonuçları yardımıyla temas elipslerinin teorik olarak hesaplanması, dişli dizaynlarının test edilmesi konusunda önemli bir metot olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu sebeple, çakışan eksenlerde çalışan beveloid dişliler için temas elipsleri teorik olarak elde edilmiş ve sonlu eleman analizleri sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Teorik bilgiler, oluşturulan formülasyon ve sonuçlar ekler kısmında verilmiştir. Belirli oranlarda sonuçların sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen sonuçlar ile benzerlik gösterdiği görülmüştür.

Beveloid dişlilerin optimizasyonu konusunda farklı imalat yöntemlerini geliştirilmesi, parabolik modifikasyonlar v.b. pek çok çalışma hali hazırda sürmektedir. Çakışan eksenlerde,

temas eliplerinin teorik olarak elde edilmesi ve farklı modifikasyonlar için yapılabilecek sonlu eleman analizleri, ileriki aşamalarda yapılması hedeflenen önemli çalışmalardır.

4. KAYNAKLAR

[1] Liu, C., Chen, Y. and Peng, Y. (2015) 'Contact Pattern Simulation and Stress Analysis of Intersected Concave Conical Involute Gear Pairs Generated by Shaper Cutters', *The 14th IFToMM World Congress, Taipei, Taiwan*, October, pp. 3–8.

[2] Sun, R., Song, C., Zhu, C., Liu, S., Wei, C., (2019) 'Tooth Surface Modelling and Mesh Behaviors for Paralleled Beveloid Gears', *Journal of Mechanical Design* , 142(5).

[3] Handschuh, R. F., & Litvin, F. L. (1991). A Method for Determining Spiral-Bevel Gear Tooth Geometry for Finite Element Analysis (No. NASA-TP-3096). *National Aeronautıcs And Space Administration Cleveland Oh Lewis Research Center*.

[4] Litvin, F. L., Vecchiato, D., Gurovich, E., Fuentes, A., Gonzalez-Perez, I., Hayasaka, K., Yukishima, K., (2005) 'Computerized developments in design, generation, simulation of meshing, and stress analysis of gear drives', *Meccanica*, 40(3), pp. 291–323.

[5] Coy, J. J., & Chao, C. H. C. (1982). "Discussions of 'A Method of Selecting Grid Size to Account for Hertz Deformation in Finite Element Analysis of Spur Gears', *ASME J. Mech. Des.*, 104(4), pp. 759-764.

[6] Brecher, C., Brumm, M. and Henser, J. (2014) 'Calculation of the Tooth Root Load Carrying Capacity of Beveloid Gears', *American Gear Manufacturers Association, AGMA, Alexandria-U.S.A.*, pp. 52–61.

[7] Mitome, K. I. (1983). Conical involute gear: part 1. design and production system. *Bulletin of JSME*, 26(212), pp. 299-305.

[8] Chen, Y. C. and Tsay, C. B. (2002) 'Stress analysis of a helical gear set with localized bearing contact', *Finite Elements in Analysis and Design*, 38(8), pp. 707–723.

[9] Liu, C.-C. and Tsay, C.-B. (2001) 'Tooth Undercutting of Beveloid Gears', *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 123(DECEMBER 2001), pp. 569–576.

[10] Yang, S. C. (2005) 'Mathematical model of a helical gear with asymmetric involute teeth and its analysis', *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 26(5–6), pp. 448–456.

[11] Fetvacı, M.C. (2014) 'Evolvent Düz Dişlilerde Alttan Kesmenin Bilgisayar Simülasyonu'. *Engineer & the Machinery Magazine* 656, pp. 50–58.

[12] Fetvacı, M.C. (2018) 'Pinyon-tipi takımla imal edilen standart olmayan dişlilerin bilgisayar simülasyonu Computer simulation of nonstandard gears manufactured by pinion-type cutters', *Journal of the Faculty of Engineering & Architecture of Gazi University*, 33(1) pp. 51–61.

[13] Pedrero, J. I., Pleguezuelos, M. and Muñoz, M. (2011) 'Contact stress calculation of undercut spur and helical gear teeth', *MAMT*. Elsevier Ltd, 46(11), pp. 1633–1646.

[14] Li, S. (2008) 'Mechanism and Machine Theory Effect of addendum on contact strength , bending strength and basic performance parameters of a pair of spur gears', *Mechanism and Machine Theory*. Elsevier Ltd, 43(12), pp. 1557–1584.

[15] Akpolat, A. (2018) 'Asimetrik uçlu simetrik kremayer takımla imal edilen dişli çarklarda diş dibi eğilme gerilmelerinin azaltılması', *Journal of the Faculty of Engineering & Architecture of Gazi University*' vol. 2, pp. 713–727.

[16] Brauer J. (2002) 'Analytical Geometry of Straight Conical Involute Gears', '*Mechanism and Machine Theory*', vol. 37, no. 1, pp. 127–141, 2002.

[17] Brauer J. (2004) 'A General Finite Element Model of Involute Gears', '*Finite Element in Analysis and Design'*, pp. 1857-1872.

[18] Lei, Y., Yan, B., Fu, Y., Chen, W., & Hou, L. (2017, June) 'Research on Finite Element Model Generating Method of General Gear Based on Parametric Modelling'. In *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* (Vol. 207, No. 1, p. 012061). IOP Publishing.

[19] Atanasovska, I., Nikolić-Stanojlović, V., Dimitrijević, D., & Momčilović, D. (2009). 'Finite Element Model For Stress Analysis And Nonlinear Contact Analysis Of Helical Gears'. '*Sci Tech Rev', 64*, pp.61-69.

[20] Sobiepański, M., & Nieszporek, T. (2017). 'Spur gears with longitudinal tooth profile modification mesh creating which is suitable for stress analysis'. '*Technical Gazette', 24*(6), 1657-1660.

[21] Gonzalez-perez, I. and Fuentes-aznar, A. (2017) 'Implementation of a finite element model for stress analysis of gear drives based on multi-point constraints', *Mechanism and Machine Theory*. Elsevier Ltd, 117, pp. 35–47.

[22] Lin, T., Ou, H. and Li, R. (2007) 'A finite element method for 3D static and dynamic contact/impact analysis of gear drives', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(9–12), pp. 1716–1728.

[23] Song, C., Zhou, S., Zhu, C., Yang, X., Li, Z., & Sun, R. (2018). Modeling and analysis of mesh stiffness for straight beveloid gear with parallel axes based on potential energy method. *Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing*, *12*(7), pp. 1–14.

[24] Brecher, C., Brumm, M. and Henser, J. (2014) 'Validation Of The Tooth Root Load Carrying Capacity Calculation Of Beveloid Gears With Parallel Axes', *International Gear Conference 2014*. Woodhead Publishing Limited.

[25] Liu, C.-C. and Tsay, C.-B. (2002) 'Mathematical Models and Contact Simulations of Concave Beveloid Gears', *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 124(December 2002), pp. 753–760.

[26] Litvin, F. L., & Fuentes, A. (2004). *Gear geometry and applied theory*. Cambridge University Press.

[27] Litvin, F. L., Fuentes, A., Fan, Q., & Handschuh, R. F. (2002). Computerized design, simulation of meshing, and contact and stress analysis of face-milled formate generated spiral bevel gears. *Mechanism and Machine Theory*, *37*(5), pp. 441-459.

[28] Zhu, C., Song, C., Lim, T. C., & Peng, T. (2013). Pitch cone design and influence of misalignments on tooth contact behaviors of crossed beveloid gears. *Mechanism and machine theory*, *59*, 48-64.

[29] Song, C., Zhou, Y., Zhu, C., Ni, G., Liu, S., (2018) 'Loaded Tooth Contact Analysis Of Intersected Beveloid And Cylindrical Involute Gear Pair With Small Shaft Angle', *Journal of Advanced Mechanical Design, Systems and Manufacturing* 12(1), pp. 1–15.

[30] Hwang, S. C., Lee, J. H., Lee, D. H., Han, S. H., & Lee, K. H. (2013). Contact stress analysis for a pair of mating gears. *Mathematical and Computer Modelling*, *57*(1-2), pp. 40-49.

[31] Komatsubara, H., Mitome, K. I., & Ohmachi, T. (2002). Development of concave conical gear used for marine transmissions. *JSME International Journal Series C Mechanical Systems, Machine Elements and Manufacturing*, *45*(2), 543-550.

[32] Song, C., Zhu, C., Liu, H., & Ni, G. (2015) 'Dynamic analysis and experimental study of a marine gearbox with crossed beveloid gears', *Mechanism and Machine Theory*. Elsevier Ltd, 92, pp. 17–28.

[33] Zhu, C., Liu, L., Song, C., Xiang, Y., & Liu, H. (2014). Pitch cone design and tooth contact analysis of intersected beveloid gears for marine transmission. *Mechanism and Machine Theory*, *82*, 141-153.

[34] Ni, G., Zhu, C., Song, C., Shi, J., & Liu, S. (2018). Effects of rack-cutter parabolic modification on loaded contact characteristics for crossed beveloid gears with misalignments. *International Journal of Mechanical Sciences*, *141*, 359-371.

[35] Ni, G., Zhu, C., Song, C., Du, X., & Zhou, Y. (2017). Tooth contact analysis of crossed beveloid gear transmission with parabolic modification. *Mechanism and Machine Theory*, *113*, 40-52.

[36] Mitome, K. I. (1991). Conical Involute Gear: Design of Nonintersecting-Nonparallel-Axis Conical Involute Gear. *JSME international journal. Ser. 3, Vibration, control engineering, engineering for industry*, *34*(2), 265-270.

[37] Litvin, F.L., (1989) 'Theory of Gearing', '*NASA Reference Publication* 1212 AVSCOM Technical Report 88-C-035, 1989.

[38] Zimmer, M., Otto, M., & Stahl, K. (2016). 'Homogeneous Geometry Calculation of Arbitrary Tooth Shapes: Mathematical Approach and Practical Applications'. *Power Transmission Engineering*, (02/2016), 36-45.

[39] Langlois, P., Al, B., & Harris, O. (2016). 'Hybrid Hertzian and FE-based helical gear-loaded tooth contact analysis and comparison with FE'. *Gear Technology*, *6*, 54-57.

[40] Sánchez, M. B., Pleguezuelos, M., & Pedrero, J. I. (2017). 'Approximate equations for the meshing stiffness and the load sharing ratio of spur gears including hertzian effects'. *Mechanism and Machine Theory*, *109*, 231-249.

[41] Do, T. P., Siegler, P., & Eberhard, P. (2013). Simulation of elastic gears with non-standard flank profiles. *Archive of Mechanical Engineering*, *60*(1).

[42] Do, T. P., Ziegler, P., & Eberhard, P. (2017). Simulation of contact forces and contact characteristics during meshing of elastic beveloid gears. *Computer Assisted Methods in Engineering and Science*, *21*(2), 91-111.

[43] Chaubey, S. K., & Jain, N. K. (2019). Analysis and multi-response optimization of gear quality and surface finish of meso-sized helical and bevel gears manufactured by WSEM process. *Precision Engineering*, *55*, 293-309.

[44] Yang, S. C. (2002). Mathematical model of a ring-involute-teeth spherical gear with a double degree of freedom. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, *20*(12), 865-870.

[45] Yang, S. C. (2007). Study on an internal gear with asymmetric involute teeth. *Mechanism and Machine Theory*, *42*(8), 977-994.

[46] The Chinese South-Pointing Chariot. https://www.lockhaven.edu/~dsimanek/make-chinese/southpointingcarriage.htm [Ziyaret tarihi: 5 Mayıs 2017].

[47] de Solla Price, D. (1974). Gears from the Greeks. The Antikythera mechanism: a calendar computer from ca. 80 BC. *Transactions of the American Philosophical Society*, 1-70.

[48] A Brief History of Gears. https://www.geartechnology.com/issues/0599x/addendum.pdf [Ziyaret tarihi: 4 Haziran 2017].

[49] Babichev, D., Lagutin, S., & Barmina, N. (2016). Russian school of the theory and geometry of gearing: Its origin and golden period (1935-1975). *Frontiers of Mechanical Engineering*, *11*(1), 44-59.

[50] The AntikytheraMechanism. https://thatsmaths.com/2013/11/21/the-antikythera-mechanism/ [Ziyaret Tarihi: 5 Mayıs 2017]

[51] Litvin, F. L. (1997). *Development of gear technology and theory of gearing* (Vol. 1406). National Aeronautics and Space Administration, Lewis Research Center.

[52]Overview ofthe Types of Gears. https://www.tec-science.com/mechanical-power-transmission/gear-types/cylindrical-gears/ [Ziyaret Tarihi: 16 Haziran 2016].

[53] Merrit, H. E., 1954, ‘‘Conical Involute Gears,’’ Gears, 3rd. ed., Issac Pitman and Sons, London, pp. 165–170.

[54] Fetvacı M.C., Evolvent Konik Dişli Çarkların Bilgisayar Simülasyonu, Mühendis ve Makina, 51 (602), pp. 12-18, 2010.

[55] Moaveni, S. (1999). Finite Element Analysis: Theory and Application With ANSYS “Prentice-Hall. *Upper Saddle River, NJ*.

[56] Bhatti, M. A. (2005). *Fundamental finite element analysis and applications: with Mathematica and Matlab computations* (p. 720). Hoboken, NJ: John Wiley.

[57] Bathe, K. J. (2014). Finite Element Procedures. Watertown, MA.

[58] FEA Software Applications. https://www.simscale.com/product/fea/ [Ziyaret Tarihi: 4 Mayıs 2019].

[59] Research Project: Finite Element Modelling Of Biological Connective Soft Tissue Application to the Ligaments of the Human Knee. https://www.southampton.ac.uk/engineering/research/projects/finite_element_modelling_of_biological_connective_soft_tissue.page [Ziyaret Tarihi: 4 Mayıs 2019].

[60]Inroduction to the Finite Element Method. http://www.myshared.ru/slide/884331/ [Ziyaret Tarihi: 10 Mayıs 2019].

[61] Version, A. (2014). 6.14 Analysis Users Guide. *Volumes I-IV*.

[62] Kim, N. H. (2015). *Introduction to nonlinear finite element analysis*. Springer Science & Business Media.

[63] Yastrebov, V. (2011). *Computational contact mechanics: geometry, detection and numerical techniques* (Doctoral dissertation, École Nationale Supérieure des Mines de Paris).

[64] Şentürk, B. G., & Fetvacı, M. C. (2020). Beveloid dişli çarkların modellenmesi ve alttan kesme analizi. *Journal of the Faculty of Engineering & Architecture of Gazi University*, *35*(2). pp.901-915.

[65] Introduction to FDM 3d Printing. https://www.3dhubs.com/knowledge-base/introduction-fdm-3d-printing/[Ziyaret Tarihi: 10 Mayıs 2019]

[66] Liu, C. C., Chen, Y. C., & Lin, S. H. (2010). Contact stress analysis of straight concave conical involute gear pairs with small intersected angles. In *Proceedings of the International MultiConference of Engineers and Computer Scientists* (Vol. 3, March. 17-19 2010).

[67] Börner, J., Humm, K., & Joachim, F. (2003, January). Development of conical involute gears (beveloids) for vehicle transmissions. In *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference* (Vol. 37025, pp. 695-702).

[68] Tai-Hong, Y. (2007). Surface Design, Curvature Analysis, Ranges of Design Parameters for Avoiding Undercutting and Tooth Contact Analysis ofConvex and Concave Beveloid Gears. *Taiwan: National Cheng Kung University Department of Mechanical Engineering*.

[69] Linke, H., Börner, J., & Hess, R. (Eds.). (2016). *Cylindrical gears: calculation–materials–manufacturing*. Carl Hanser Verlag GmbH Co KG.

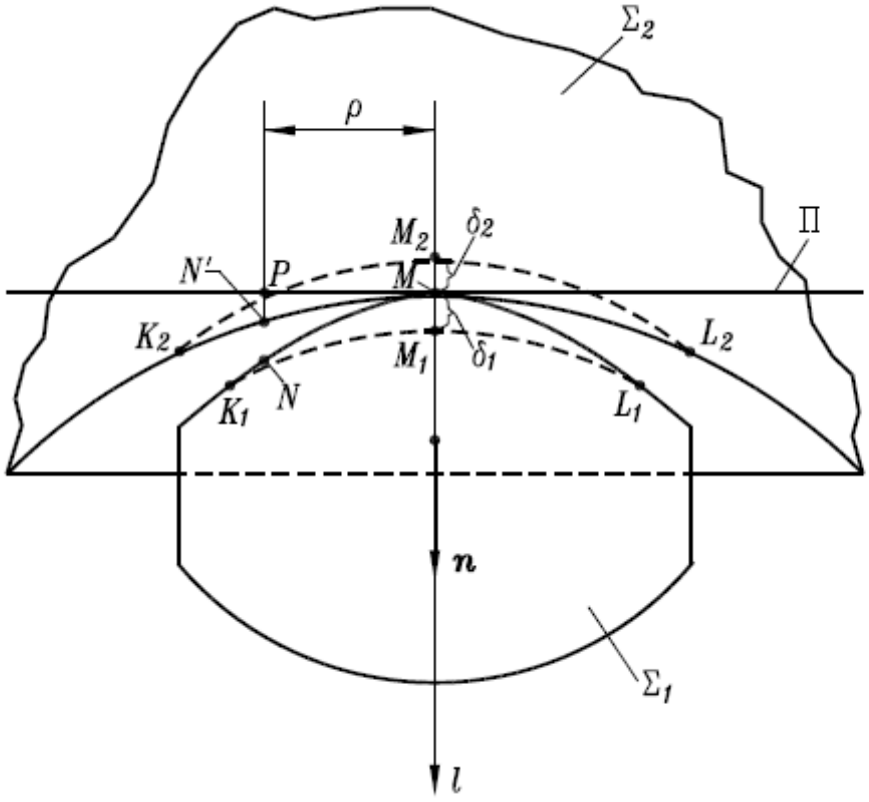
5. EKLER

TEMAS ELİPSLERİNİN TEORİK OLARAK HESAPLANMASI

Dişli çiftlerinin çalışması esnasında, temas etmekte olan diş yüzeyleri (evolvent profilli dişliler için evolvent eğrilerinin oluşturduğu yüzey) üzerinde, boyutları uygulanan kuvvetin büyüklüğü ile orantılı olarak değişen temas elipsleri meydana gelmektedir. Dişlilerin paralel eksenlerde çalışması durumunda, bu elips yüzeyleri düz çizgi görünümüne gelecektir. Ani temas elipsinin simetri merkezi, teorik olarak temasın meydana geldiği varsayılan nokta ile çakışmaktadır. Temasın oluştuğu bölge de, temas elipslerinin bir araya gelmesi ile meydana gelecektir. Bu bölümde temas elipslerinin boyutlarının teorik ifadelerini elde etmek amaçlanmaktadır. Bu amacın gerçekleştirilebilmesi için, temas yüzeylerinin asal eğrilikleri, $e_I^{(1)}$ $e_{II}^{(2)}$ birim vektörleri arasındaki açı σ ve teorik temas noktası "M" deki elastik deformasyon "δ" nin belirli olması gerekmektedir. Burada "δ", uygulanan yüklere bağlı olmasına karşın, genellikle deneysel verilerden bilindiği değeriyle 0.00025 inch olarak alınacaktır.

EK 1 de Σ_1 ve Σ_2 yüzeyleri "M" noktasında teğet durumundadırlar. Yüzey birim normali ve teğet düzlemi sırasıyla **n** ve Π ile gösterilmiştir. Yüzey deformasyon alanı ise kesikli çizgi ile gösterilmiş ve Σ_1 ve Σ_2 yüzeyleri için sırasıyla $K_1M_1L_1$ ve $K_2M_2L_2$ ile gösterilmiştir. "M" noktasında temas eden yüzeylerin deformasyonları sırasıyla δ_1 ve δ_2 ile gösterilmiştir. "M" noktasında elastik yaklaşım yardımıyla ise $\delta = \delta_1 + \delta_2$ olarak yazmak mümkündür.

"N" ve "N′" noktaları, elastik deformasyon sonrası karşılıklı iki yüzeyde temasa girmesi muhtemel olan iki noktayı işaret etmektedir. "N" ve "N′" noktalarının "M" noktasına göre konumları EK 2 de görüldüğü üzere, (ρ, $l^{(i)}$) (i=1,2) koordinatları ile gösterilmektedir. Burada, "$l^{(i)}$" yüzey üzerinde varsayılan kesit için K_iML_i (i=1,2) eğrisinin eğriliği göz önüne alınarak, $N^{(i)}$ noktasının "M" noktasına göre sapması olarak tanımlanabilir[26].



EK 1. Elastik deformasyon bölgesi[26].

Temas Elipslerinin elde edilmesi:

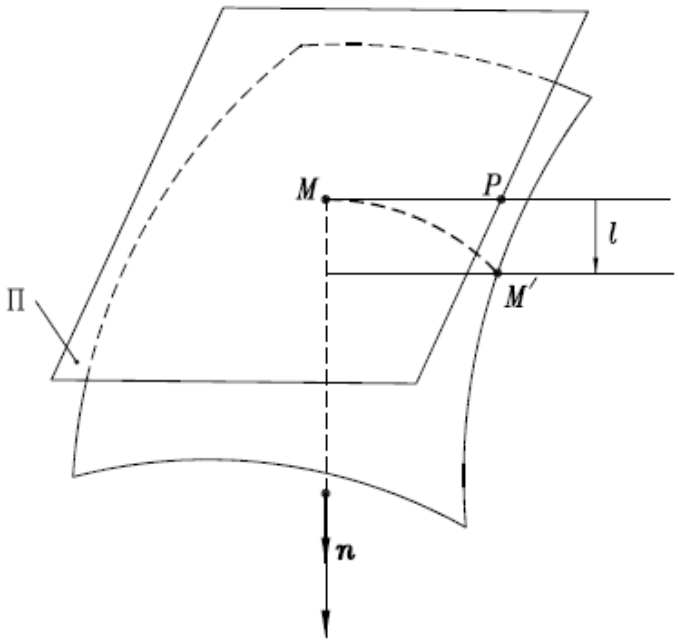
Verilen herhangi bir Σ yüzeyi için ($\boldsymbol{u}$,θ) yüzey koordinatlarını belirttiği takdirde, Σ yüzeyi üzerindeki $\overline{MM_1}$ eğrisi;

$$r = r[u(s), \theta(s)] \tag{1}$$

şeklinde formülize edilebilir. Burada "s" yay uzunluğunu göstermektedir. Birbirine komşu olan iki nokta M ve M' yi birbirine bağlayan eğrinin uzunluğu Δs olarak gösterildiğinde, $\Delta s = MM'$ olacaktır. Δr olarak gösterilen konum vektörü r nin uzunluğu ise, $\Delta r = \overline{MM'}$ dir. Δr ifadesi Taylor Serisi olarak ifade edildiğinde;

$$\overline{MM'} = \Delta r = \frac{dr}{ds}\Delta s + \frac{d^2r}{ds^2}\frac{(\Delta s)^2}{2!} + \frac{d^3r}{ds^3}\frac{(\Delta s)^3}{3!} + \cdots \tag{2}$$

$$\frac{dr}{ds} = \frac{\partial r}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial r}{\partial \theta}\frac{d\theta}{ds} \tag{3}$$



EK 2. Sapma miktarı "*l*" nin belirlenmesi[26].

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{\partial^2 r}{du^2}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 r}{\partial u \partial \theta}\frac{du}{ds}\frac{d\theta}{ds} + \frac{\partial^2 r}{d\theta^2}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 \tag{4}$$

Olacaktır. EK 2 de görülen Π düzlemi, yüzeye M noktasında teğettir. P noktası, M' noktasının Π düzlemi üzerindeki yansımasını göstermektedir.

$$\overline{PM'} = l\boldsymbol{n} \tag{5}$$

İfadesindeki vektör ise, Π düzlemine P noktasında diktir ve "*l"* eğri üzerindeki M' noktasının teğet düzleminden olan sapmasını ifade etmektedir. Sapma miktarı "*l",* $\overline{PM'}$ ve "**n**" aynı yönde olduklarında pozitiftir. $\overline{MM'} = \Delta r$ ve $\overline{MM'} = \overline{MP} + l\mathbf{n}$ eşitliklerinden;

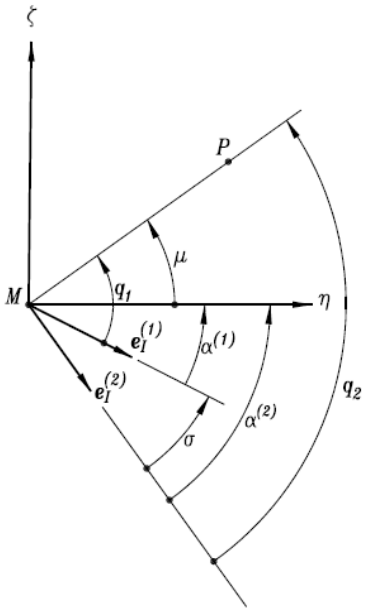
$$\overline{MP} + l\mathbf{n} = \frac{dr}{ds}\Delta s + \frac{d^2r}{ds^2}\frac{(\Delta s)^2}{2!} + \frac{d^3r}{ds^3}\frac{(\Delta s)^3}{3!} + \cdots \tag{6}$$

Olarak yazmak mümkün olabilecektir. $\overline{MP}$ ve n vektörleri karşılıklı olarak diktir ve yukarıdaki eşitlikte her iki tarafın "n" ile çarpılması ve "l" için yazılmış olan ifadeyi üçüncü derecede kısıtlamış olduğumuzda;

$$l = \left(\frac{d^2r}{ds^2} \cdot \mathbf{n}\right)\frac{\Delta s^2}{2} \tag{7}$$

Yazmak mümkün olacaktır. Yüzeyin eğriliği ise

$$\kappa_n = \frac{d^2r}{ds^2} \cdot \mathbf{n} \tag{8}$$



EK 3. Temas elipsinin elde edilmesi[26].

Olarak yazılırsa;

$$l = \kappa_n \frac{(\Delta s)^2}{2} = \frac{1}{2}\kappa_n \rho^2 \tag{9}$$

Olarak yazmak mümkün olacaktır. Burada, $\Delta s \approx |\overline{MP}| = \rho$ şeklindedir.

Σ_i (i = 1,2) yüzeyinin normal ve asal eğrilikleri Euler eşitliği yardımıyla,

$$\kappa_n^{(i)} = \kappa_I^{(i)} \cos^2 q_i + \kappa_{II}^{(i)} \sin^2 q_i \tag{10}$$

Olarak yazılabilir. Burada, q_i $\overline{MP}$ ve $e_I^{(i)}$vektörleri arasındaki açıdır.

Elastik deformasyon sonrasında temasta bulunan noktalar olarak “N” ve “N′”noktalarını daha önce tanımlamıştık. Elastik deformasyondan önce bu noktaların teğet düzleminden sapmaları;

$$l^{(1)} = \frac{\rho^2}{2}(\kappa_I^{(1)} \cos^2 q_1 + \kappa_{II}^{(1)} sin^2 q_1) \tag{11}$$

$$l^{(2)} = \frac{\rho^2}{2}(\kappa_I^{(2)} \cos^2 q_2 + \kappa_{II}^{(2)} sin^2 q_2) \tag{12}$$

eşitlikleri yardımıyla ifade edilebilir. Burada, $q_1$ve q_2, $e_I^{(1)}$, $e_I^{(2)}$ ve $\overline{MP}$ vektörleri arasındaki açılar, $\kappa_I^{(i)}$ve $\kappa_{II}^{(i)}$ (i = 1,2) ise Σ_1 ve Σ_2 yüzeylerinin asal eğrilikleridir.

Teğetsel düzlem koordinatlarının (η,ζ), elde edilecek olan temas elipsinin koordinatları olduğu varsayıldığında, $\overline{MP}$ vektörünün (η,ζ) düzlemindeki oryantasyonu, “μ” açısı ile belirlenecektir. Temas bölgesinin sınırlarında;

$$l^{(1)} - l^{(2)} = \pm\delta \tag{13}$$

Eşitliği geçerli olmaktadır.

Temas Elipslerinin boyutlarının ve $e_I^{(1)}$ya da $e_I^{(2)}$ ye göre oryantasyonunun elde edilmesinde, aşağıdaki eşitlikler göz önüne alınmalıdır.

$$q_1 = \alpha^{(1)} + \mu, \qquad q_1 = \alpha^{(1)} + \mu, \qquad \rho^2 = \eta^2 + \zeta^2$$

$$\cos\mu = \frac{\eta}{\rho}, \qquad \sin\mu = \frac{\zeta}{\rho} \tag{14}$$

Gerekli dönüşümler yapıldıktan sonra ise;

$$\eta^2(\kappa^{(1)} \cos^2\alpha^{(1)} + \left(\kappa_{II}^{(1)} \sin^2\alpha^{(1)} - \kappa_I^{(2)} \cos^2\alpha^{(2)} - \kappa_{II}^{(2)} \sin^2\alpha^{(2)}\right)$$

$$+ \zeta^2\left(\kappa^{(1)} \sin^2\alpha^{(1)} + \kappa_{II}^{(1)} \cos^2\alpha^{(1)} - \kappa_I^{(2)} \sin^2\alpha^{(2)} - \kappa_{II}^{(2)} \cos^2\alpha^{(2)}\right)$$

$$-\eta\zeta\left(g_1 \sin 2\alpha^{(1)} - g_2 \sin 2\alpha^{(2)}\right) = \pm 2\delta \tag{15}$$

Burada,

$$g_1 = \kappa_I^{(1)} - \kappa_{II}^{(1)}, \quad g_2 = \kappa_I^{(2)} - \kappa_{II}^{(2)} \tag{16}$$

şeklindedir. Koordinat eksenleri (η,ζ) nin $e_I^{(1)}$ vektörüne göre oryantasyonunu belirleyen $\alpha^{(1)}$açısı keyfi olarak seçilebilir. Örneğin;

$$\alpha^{(2)} = \alpha^{(1)} + \sigma \tag{17}$$

Eşitliğini sağlayacak şekilde seçildiğinde;

$$\tan 2\alpha^{(1)} = \frac{g_2 \sin 2\sigma}{g_1 - g_2 \cos 2\sigma} \tag{18}$$

Eşitliği sağlanacaktır. Bu eşitlik aynı zamanda $2\alpha^{(1)}$için iki farklı çözümü sağlamaktadır. Bunlar;

$$\cos 2\alpha^{(1)} = \frac{g_1 - g_2 \cos 2\sigma}{(g_1^2 - 2g_1 g_2 \cos 2\sigma + g_2^2)^{1/2}} \tag{19}$$

$$\sin 2\alpha^{(1)} = \frac{g_1 - g_2 \sin 2\sigma}{(g_1^2 - 2g_1 g_2 \cos 2\sigma + g_2^2)^{1/2}} \tag{20}$$

(19) ve (20) eşitlikleri, (η,ζ) eksenlerinin temas etmekte olan yüzeylerin asal eksenlerine göre oryantasyonunu belirlemektedir. Bu eşitliklere göre;

$$\cos^2 \alpha^{(1)} = 0.5\,[1 + m(g_1 - g_2 \cos 2\sigma)]$$

$$\sin^2 \alpha^{(1)} = 0.5[1 - m(g_1 - g_2 \cos 2\sigma)] \tag{21}$$

$$\cos^2 \alpha^{(2)} = 0.5\,[1 + m(g_1 \cos 2\sigma - g_2)]$$

$$\sin^2 \alpha^{(2)} = 0.5\,[1 - m(g_1 \cos 2\sigma - g_2)]$$

olacaktır. Burada;

$$m = \frac{1}{(g_1^2 - 2g_1 g_2 \cos 2\sigma + g_2^2)^{1/2}} \tag{22}$$

şeklindedir. Dolayısı ile yukarıda belirtilen (22) ve (23) nolu eşitlikler yardımıyla, temas bölgesinin teğet düzlemi üzerindeki projeksiyonunun bir elips olduğu doğrulanmıştır.

Temas elipsleri;

$$B\eta^2 + A\zeta^2 = \pm\delta \tag{23}$$

Eşitliği ile ifade edilebilirler. Elips eksenleri ise;

$$2a = 2\left|\frac{\delta}{A}\right|^{1/2}, \qquad 2b = 2\left|\frac{\delta}{B}\right|^{1/2} \tag{24}$$

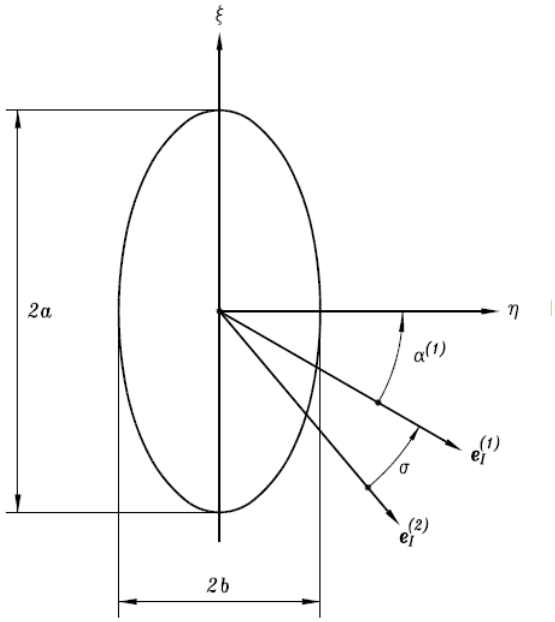
Olarak ifade edilmektedir. Burada;

$$A = \frac{1}{4}[\left(\kappa_{\Sigma}^{(1)} - \kappa_{\Sigma}^{(2)} - (g_1^2 - 2g_1g_2\cos 2\sigma + g_2^2)^{1/2}\right)] \tag{25}$$

$$B = \frac{1}{4}[\left(\kappa_{\Sigma}^{(1)} - \kappa_{\Sigma}^{(2)} + (g_1^2 - 2g_1g_2\cos 2\sigma + g_2^2)^{1/2}\right)] \tag{26}$$

$$\kappa_{\Sigma}^{(1)} = \kappa_I^{(i)} - \kappa_{II}^{(i)}, \quad g_i = \kappa_I^{(i)} - \kappa_{II}^{(i)} \tag{27}$$

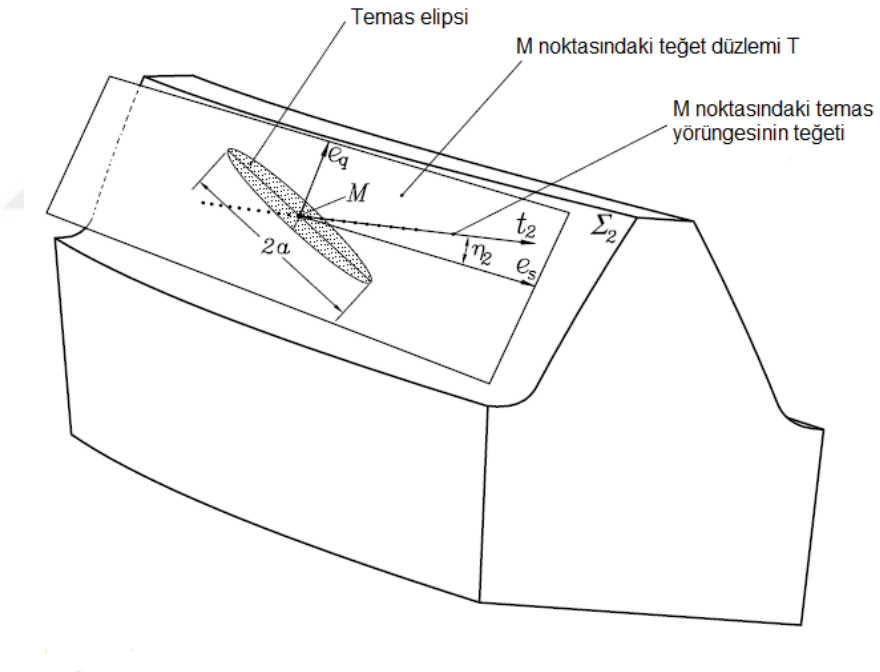
Olmaktadır. Temas elipsi EK 4 de görülmekte ve elipsin teğet düzlemi üzerindeki oryantasyonu (24) eşitliği yardımıyla elde edilmektedir[26].



EK 4. Temas elipsi koordinatları[26].

TEORİK DİŞLİ TEMAS ANALİZLERİ (TCA).

Teorik temas analizleri hesaplamalarını gerçekleştiren bilgisayar yazılımlarının genel amacı, belirlenen temas bölgesinde temas durumunun simule edilmesidir. Daha ayrıntılı incelendiğinde ise bu yazılımlar, diş yüzeylerindeki temas doğrultusu, yanlış hizalama sonucu oluşan temas hataları, ani temas elipslerinin bir araya gelmesi ile meydana gelen, temas bölgelerinin tanımlanması gibi temel hedefleri yerine getirmektedirler. Bu bölümde (TCA) analizlerine benzer şekilde çakışık eksenlerde çalışan beveloid dişli modelleri için temas elipsleri teorik olarak Matlab programı dahilinde elde edilmiştir.

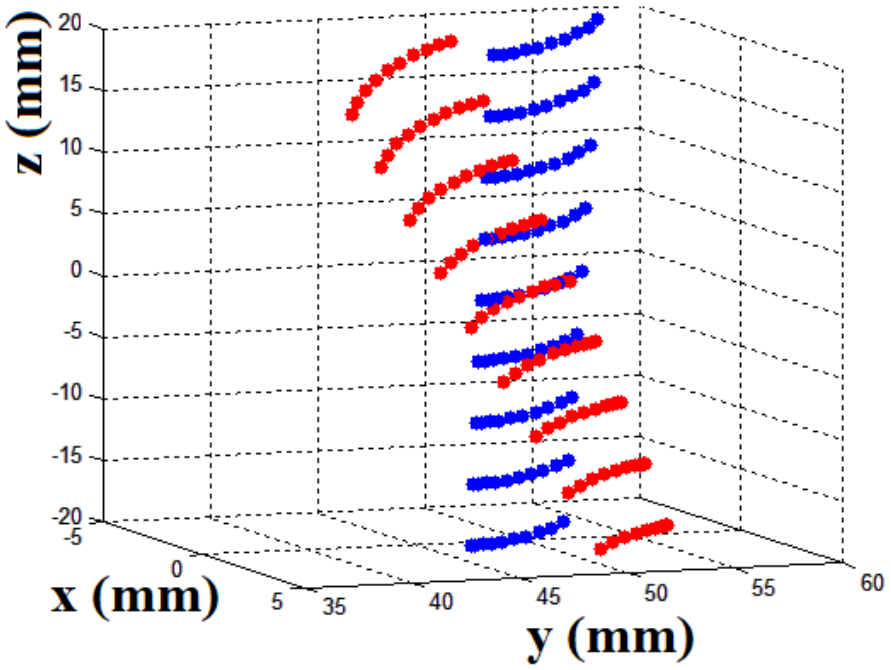


EK 5. Diş yüzeyi üzerindeki temas elipsi ve teğet düzlemi[26].

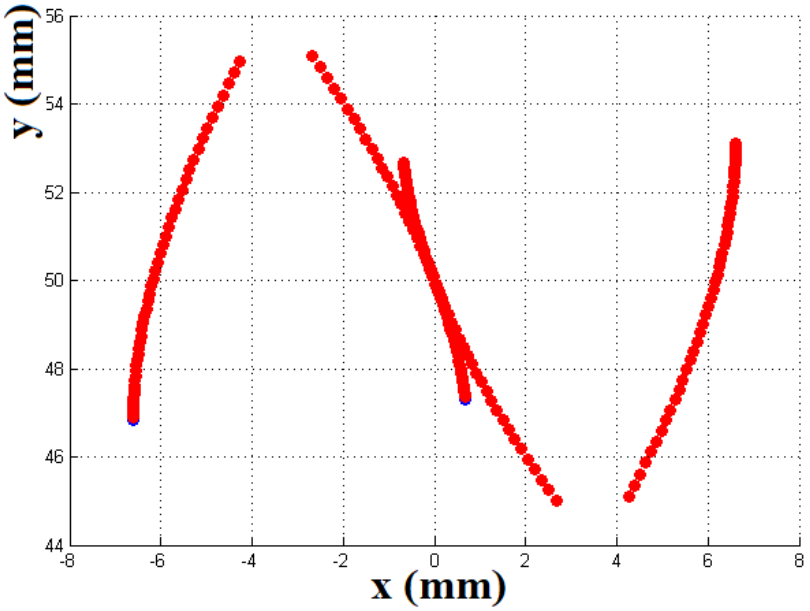
EK6 da temasa giren pinyon ve dişli yüzeylerinin elde edilmesi ile ilgili belirli aralıklarda evolvent eğrilerinin koordinatları görülmektedir. Buradan hareketle, temasın meydana geldiği

noktalardaki yüzey eğrilikleri hesaplanarak, formülasyonda görüldüğü şekilde, elipslerin asal eksenlerdeki uzunlukları elde edilebilcektir.

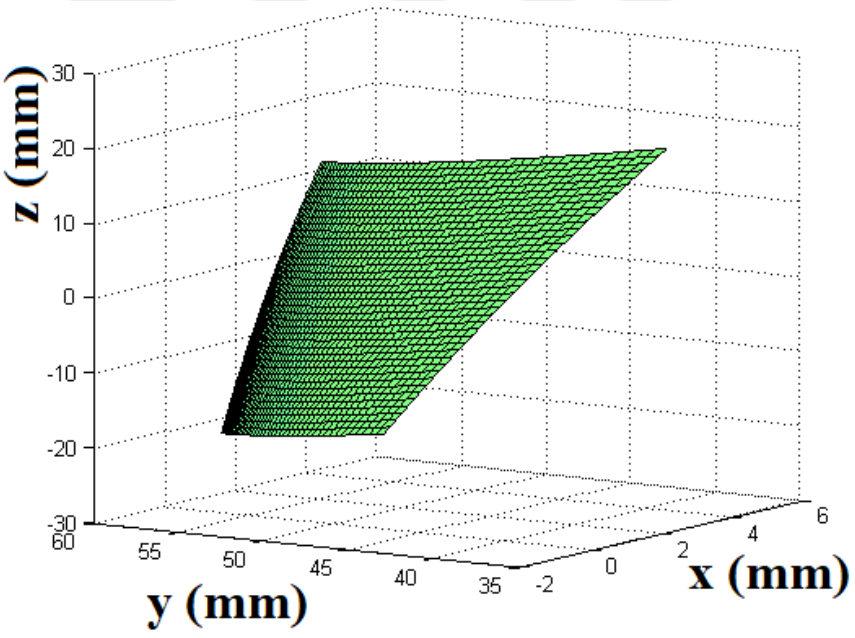
EK (8) ve EK (9) da temas durumunda, m_n = 4mm, T= 25, δ = 5˚, β =0˚ parametreleri için, pinyon ve dişliye ait evolvent yüzeyler 3 boyutlu ve z=0 diş derinliğinde 2 boyutlu olarak görülmektedir.



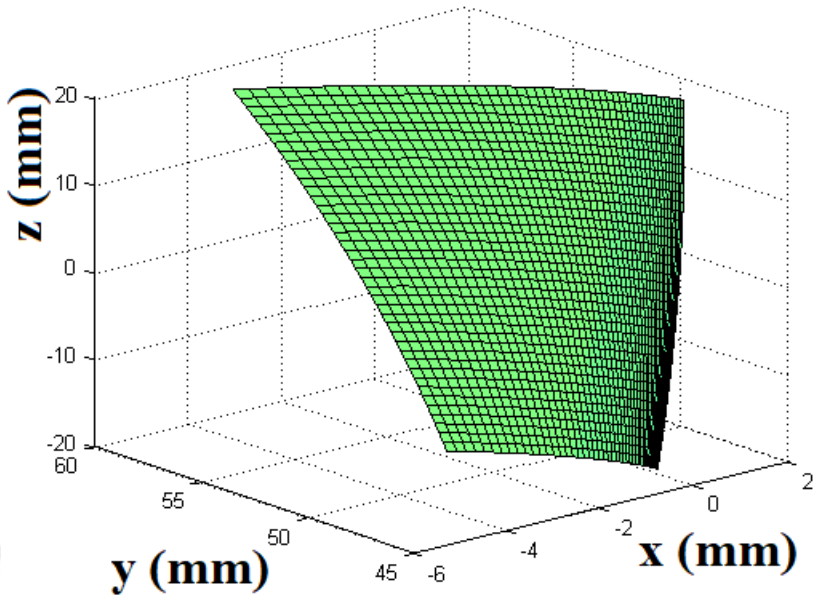
EK 6. Çakışan eksenlerde dişli profillerinin temas durumu.



EK 7. Evolvent kısımların z=0 kesitinde teması.



EK 8. Pinyon dişlide evolvent bölgelerin oluşturduğu yüzey.



EK 9. Döndürülen dişlide evolvent bölgelerin oluşturduğu yüzey.

Yüzeylerin elde edilmesinden sonra,

$$L = \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial u^2}\mathbf{n}, \qquad \mathrm{M} = \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial u \partial v}\mathbf{n}, \qquad N = \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial v^2}\mathbf{n} \tag{28}$$

$$E = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}, \qquad F = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}, \qquad G = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v} \tag{29}$$

Eşitlikleri yardımıyla asal eğrilik ifadeleri;

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \tag{30}$$

$$H = \frac{EN + GL - 2FM}{2EG - F^2} \tag{31}$$

$$Pmax = H + \sqrt{H^2 - K} \tag{32}$$

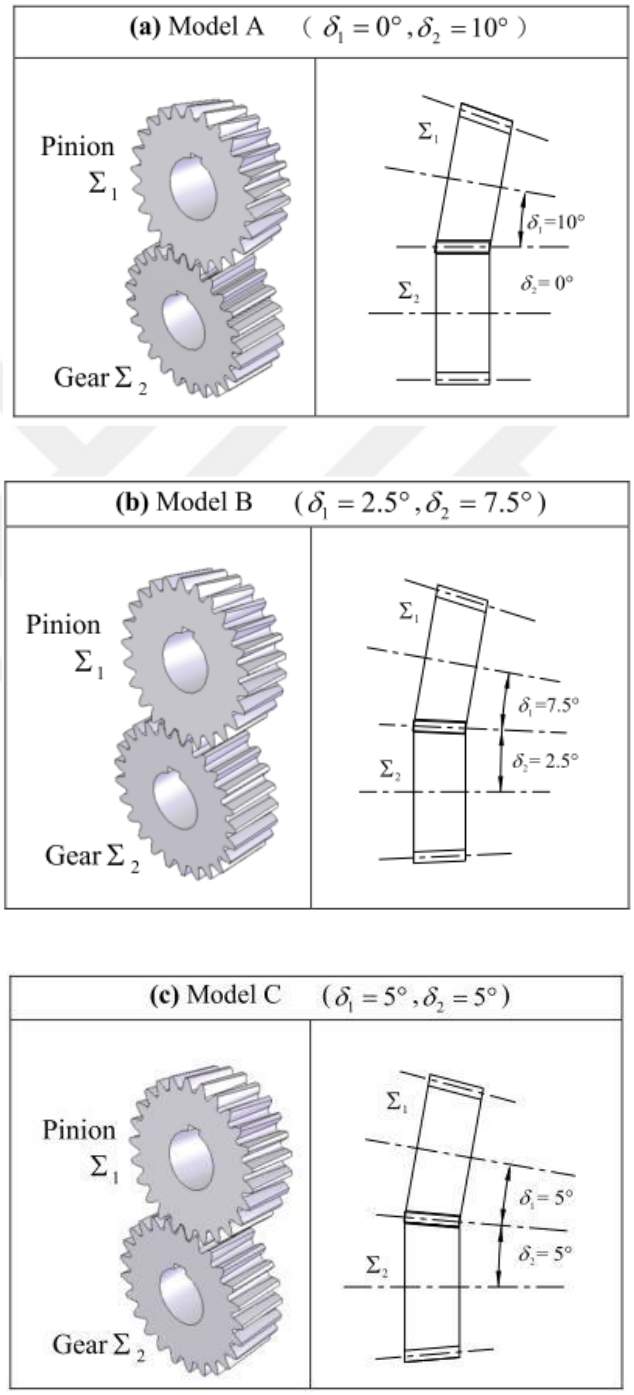
$$Pmin = H - \sqrt{H^2 - K} \tag{33}$$

Olarak hesaplanabilir. Burada $\mathbf{R} = (u, v)$ yüzey üzerinde herhangi bir noktayı ifade eden vektörü ve H, K değerleri sırasıyla ortalama eğrilik ve Gauss eğriliklerini göstermektedir.

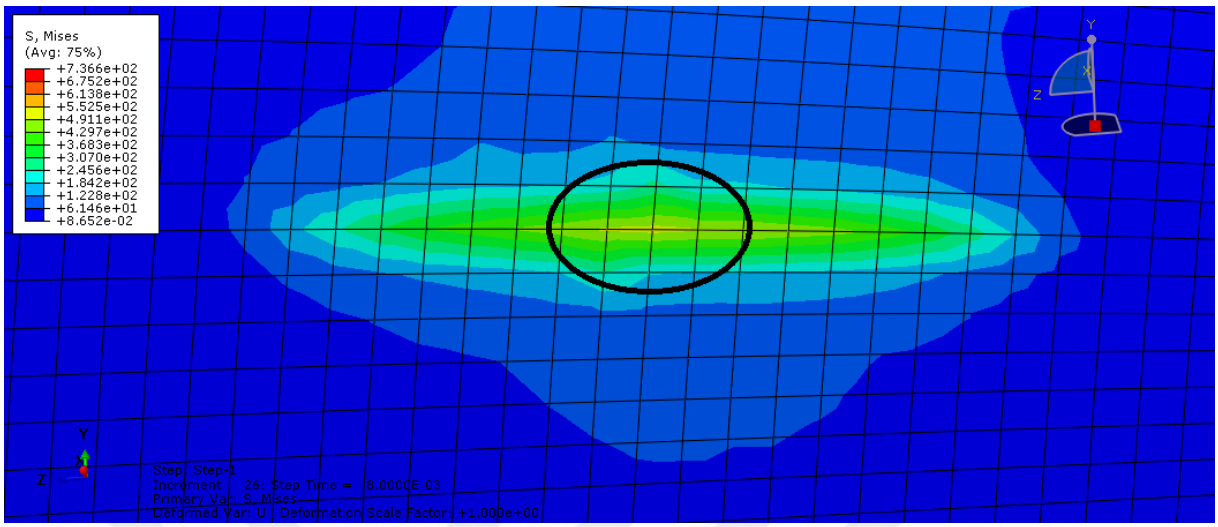
Bu sayede, temas elipsleri için verilen asal eksenlerdeki uzunluk ifadeleri, $A\ ve\ B$, $\kappa_{\Sigma}^{(1)}, \kappa_{\Sigma}^{(2)}$

eğrilikleri hesaplanarak belirlenebilir. EK 10 da gösterilen 3 farklı durum için temas elipslerinin ve asal eksenlerdeki uzunluk değerleri EK 14 de gösterildiği gibi olacaktır.

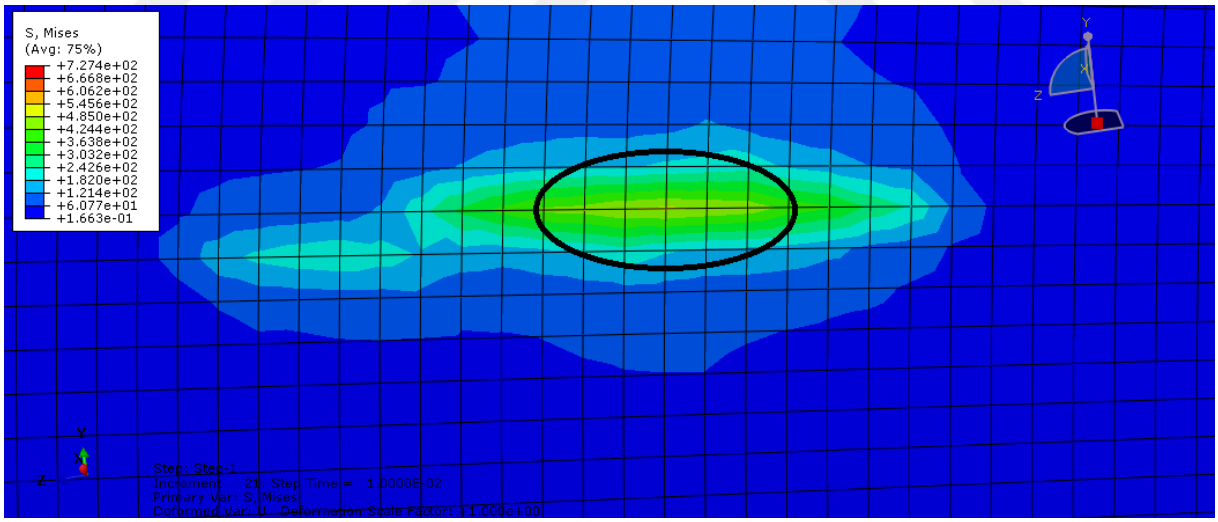
TEORİK TEMAS ANALİZLERİ



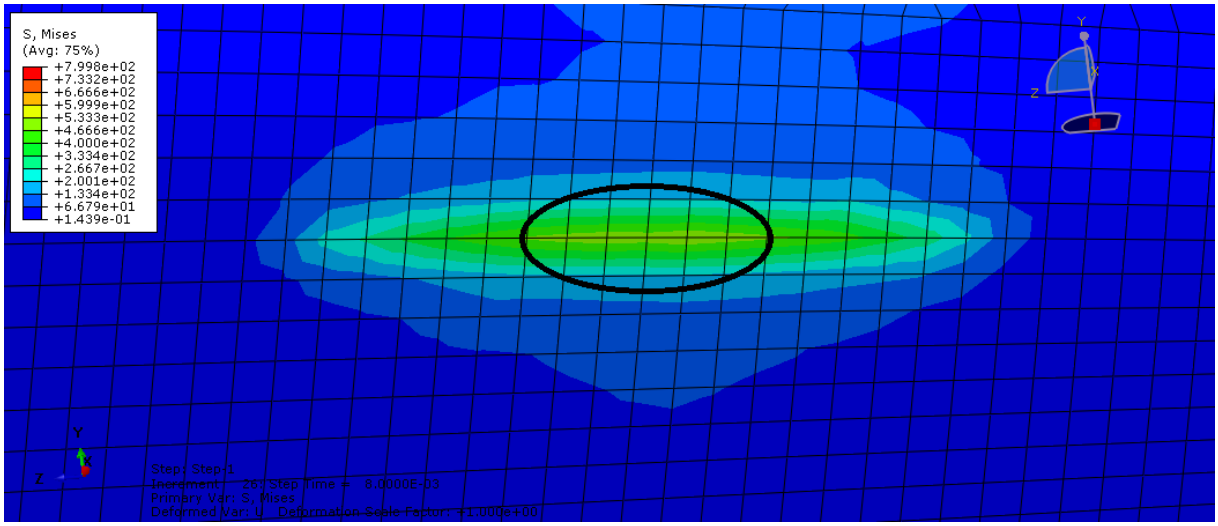
EK 10. Çakışan eksenlerde incelenen temas durumlarının şematik gösterimi[66].



EK 11. Model A için, pinyon dişlideki temas elipsi ve teorik olarak hesaplanan elips.



EK 12. Model B için, pinyon dişlideki temas elipsi ve teorik olarak hesaplanan elips.



EK 13. Model B için, pinyon dişlideki temas elipsi ve teorik olarak hesaplanan elips.

Analiz No	Düşey eksen uzunluğu (mm)	Yatay eksen uzunluğu (mm)
1	2.0605	2.3415
2	1.4981	3.2413
3	1.5099	3.2253

EK 14. Teorik hesaplanan elipslerin eksen uzunlukları.

6. ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Berat Gürcan Şentürk
Doğum Yeri	Ordu/Fatsa
Doğum Tarihi	02.04.1988
Uyruğu	☑ T.C. ❒ Diğer:
Telefon	05556044359
E-Posta Adresi	gurcansenturk@gmail.com
Web Adresi	



Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Süleyman Demirel Üniversitesi
Fakülte	Mühendislik Fakültesi
Bölümü	Makine Mühendisliği
Mezuniyet Yılı	2011

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Teknik Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Makine Mühendisliği Anabilim Dalı
Programı	Katı Cisimlerin Mekaniği

Makale ve Bildiriler
Şentürk, B. G., & Fetvacı, M. C. (2020). Beveloid dişli çarkların modellenmesi ve alttan kesme analizi. *Journal of the Faculty of Engineering & Architecture of Gazi University*, *35*(2). B.G. Şentürk, E. Sünbüloğlu, A. Özdeş, E. Bozdağ., The numerical Investigation of Running Safety and Fatigue Analysis of a Freight Wagon, International Congress on Advanced Railway Engineering, IC-ARE, 2015.