İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ANLIK BASINÇ YÜKÜ ETKİSİNDEKİ KATMANLI KOMPOZİT BİR PLAĞIN TİTREŞİMLERİNİN AKTİF KONTROLÜ

DOKTORA TEZİ

Y. Müh. Haydar UYANIK

Anabilim Dalı : UÇAK MÜHENDİSLİĞİ

Programı : UÇAK MÜHENDİSLİĞİ

HAZİRAN 2006

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ANLIK BASINÇ YÜKÜ ETKİSİNDEKİ KATMANLI KOMPOZİT BİR PLAĞIN TİTREŞİMLERİNİN AKTİF KONTROLÜ

DOKTORA TEZİ
Y. Müh. Haydar UYANIK
(511972005)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 15 Ekim 2005
Tezin Savunulduğu Tarih : 14 Haziran 2006

Tez Danışmanı :	**Prof.Dr. Zahit MECİTOĞLU**
Diğer Jüri Üyeleri	**Prof.Dr. Süleyman TOLUN (İTÜ)**
	Prof.Dr. A. Kerim KAR (M.Ü.)
	Prof.Dr. Muammer KALYON (GYTE)
	Doç.Dr. Halit TÜRKMEN (İTÜ)

HAZİRAN 2006

Ö N S Ö Z

Bu tez çalışması Devlet Planlama Teşkilatı'nın 901341998k121980 numaralı "Yapılar Üzerindeki Patlama Etkilerinin Araştırılması" projesinin bir parçası olarak hazırlanmış olup elde edilen sonuçların bir kısmı bu proje kapsamında yayınlanan raporda yer almıştır.

Çalışmamın her aşamasında rehberliğini ve yardımlarını her zaman açık bir şekilde gördüğüm danışmanım saygıdeğer hocam Prof Dr Zahit MECİTOĞLU'na ve diğer hocalarıma şükranlarımı sunarım. Çalışmam sırasında desteklerini hiç bir zaman esirgemeyen başta Hava Hap Okulu Havacılık Mühendisliği Bölüm Başkanı Hv. Müh. Alb. Cemal ÖKSÜZ olmak üzere tüm amirlerime ve komutanlarıma teşekkürlerimi arz ederim. Yine çalışmalarım sırasında desteğini her zaman gördüğüm Hv. Müh. Yzb. Zafer KAZANCI başta olmak üzere diğer çalışma arkadaşlarıma da teşekkür ederim. Ayrıca 'Kontrol' konusunda bilgilerine başvurduğum Prof.Dr. Muammer KALYON'a ve Prof.Dr. Murat DOĞRUEL'e de teşekkürlerimi sunuyorum.

Sabırlarından, kendilerine ayırmam gereken zamanımı çalışmalarıma vermem konusundaki fedakarlıklarından ve manevi desteklerinden dolayı eşim Hilal'e ve çocuklarıma ayrıca teşekkür ederim.

HAZİRAN 2006 **Haydar UYANIK**

İÇİNDEKİLER

Ö N S Ö Z i
TABLO LİSTESİ iv
ŞEKİL LİSTESİ v
SEMBOL LİSTESİ vii
ÖZET x
SUMMARY xv

1 GİRİŞ 1
1.1 Mevcut Çalışmalar 2
1.1.1 Tarama Çalışmaları 2
1.1.2 Anlık Basınç Yükü Modelleri 3
1.1.3 Anlık Basınç Yüküne Maruz Yapılar 4
1.1.4 Titreşim Kontrolü 6
1.1.5 Anlık Basınç Yüküne Maruz Yapıların Titreşim Kontrolü 7
1.2 Yapılan Çalışmanın Kapsamı 8

2 ANLIK BASINÇ YÜKÜ MODELİ 10
2.1 Giriş 10
2.2 Deneysel Çalışmalar 10
2.3 Basınç Fonksiyonları 11

3 AKTİF SEMİLOOF KABUK ELEMAN 13
3.1 Genel Konular 13
3.2 Kabuk Eleman Serbestlik Dereceleri 14
3.3 Şekil Fonksiyonları 16
3.4 Eleman Formülasyonu 17
3.5 Piezoelektrik Etkiler 20

4 TİTREŞİM KONTROLÜ 25
4.1 Giriş 25
4.2 Çözüm Yöntemi 25
4.3 Mod Toplama Yöntemi 27
4.4 Durum Geri Beslemeli Kontrol 29
4.5 Kontroledilebilirlik ve Gözlenebilirlik Tanımları 30
4.6 Optimal Doğrusal Regülatör Problemi 34
4.7 Durum Geri Beslemesi ile Kutup Yerleştirme 35
4.8 Durum Gözleyici Sistemler 36

5 SAYISAL SONUÇLAR **39**
5.1 Giriş 39
5.2 Birinci Plak Modeli 42
5.2.1 Plak Serbest Titreşimi 43
5.2.2 İndirgeme İşlemi 46
5.2.3 Sabit Basınç ve Sabit Voltaj Yükü Etkisi Altındaki Plak 47
5.2.4 Titreşim Kontrolü 50
5.3 İkinci Plak Modeli 57
5.4 Üçüncü Plak Modeli 62
5.5 Dördüncü Plak Modeli 70
5.6 Hata Analizleri 72

6 DEĞERLENDİRME ve SONUÇ **78**

KAYNAKLAR **80**

EK−A **86**

ÖZGEÇMİŞ **93**

TABLO LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 5.1: Malzeme Özellikleri 43
Tablo 5.2: Birinci plağın semiloof kabuk sonlu eleman ve *Ansys* yazılımı ile elde edilen serbest titreşim frekanslarının karşılaştırılması (*Hz*). 43
Tablo 5.3: İkinci plağın semiloof kabuk sonlu eleman ve *Ansys* yazılımı ile elde edilen serbest titreşim frekanslarının karşılaştırılması (*Hz*). 57
Tablo 5.4: Üçüncü plağın semiloof kabuk sonlu eleman ve *Ansys* yazılımı ile elde edilen serbest titreşim frekanslarının karşılaştırılması (*Hz*). 62
Tablo 5.5: Dördüncü plağın semiloof kabuk sonlu eleman ve *Ansys* yazılımı ile elde edilen serbest titreşim frekanslarının karşılaştırılması (*Hz*). 71

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 2.1: Boyutsuz anlık basınç yükünün zamana bağlı değişimi. 11
Şekil 2.2: Anlık basınç yükü için eşdeğer üçgen dalga formu yaklaşımı. 12
Şekil 3.1: Semiloof kabuk eleman 15
Şekil 3.2: Semiloof elemanın düğüm noktalarında ξ ve η eğrisel koordinatları 17
Şekil 3.3: Çok katmanlı yapı 22
Şekil 3.4: Global ve katman koordinat eksen takımları 22
Şekil 4.1: Açık Çevrimli Kontrol Sistemi 30
Şekil 4.2: Durum Geri Beslemeli Kontrol Sistemi 30
Şekil 4.3: Durum gözleyicisi içeren sisteme ait blok diyagramı 38
Şekil 5.1: Statik analiz karşılaştırması için kullanılan plak modeli. 39
Şekil 5.2: Potansiyel farkı 10 V için plak orta hat deplasmanı 40
Şekil 5.3: Üniform basınç yükü ve farklı potansiyel farklarında plak orta hat deplasmanı 40
Şekil 5.4: Ortalama anlık basınç yükü (Houlston ve arkadaşları [12]) 41
Şekil 5.5: Anlık basınç yükü etkisinde plak orta noktasının zamana bağlı hareketi . 41
Şekil 5.6: Birinci plak modeli (boyutlar *mm*'dir) 42
Şekil 5.7: Semiloof plak 1 nci mod şekli, *f=35.890 Hz.* 44
Şekil 5.8: Semiloof plak 2 nci mod şekli, *f=132.931 Hz.* 44
Şekil 5.9: Semiloof plak 3 ncü mod şekli, *f=197.265 Hz.* 44
Şekil 5.10: Semiloof plak 4 ncü mod şekli, *f=352.183 Hz.* 45
Şekil 5.11: Semiloof plak 5 nci mod şekli, *f=507.294 Hz.* 45
Şekil 5.12: Semiloof plak 6 ncı mod şekli, *f=736.802 Hz.* 45
Şekil 5.13: Plak mod şekilleri ve frekansları (*Ansys*) 46
Şekil 5.14: Tam matris sistem, indirgenmiş sistem ve *Ansys* modelinin anlık basınç yüküne dinamik cevabı 47
Şekil 5.15: Sabit üniform basınç yükü etkisi altındaki plak 48
Şekil 5.16: Sabit üniform basınç için orta hat deplasmanı 48
Şekil 5.17: Sabit potansiyel farkı uygulanan plak 49
Şekil 5.18: Sabit potansiyel farkı için orta hat deplasmanı 50
Şekil 5.19: Deplasman ölçüm noktaları ve piezoelektrik eleman numaraları. 51
Şekil 5.20: Anlık basınç yükü etkiyen durum gözleyicili kontrol sistemi 52
Şekil 5.21: $\mathbf{Q}=10^4\cdot\mathbf{I}_8$ ve $\mathbf{R}=\mathbf{I}_4$ için piezoelektrik elemanlara uygulanan potansiyel farkları. 53
Şekil 5.22: $\mathbf{Q}=10^4\cdot\mathbf{I}_8$ ve $\mathbf{R}=\mathbf{I}_4$ için zamana bağlı deplasman değişimleri 54
Şekil 5.23: $\mathbf{Q}=10^5\cdot\mathbf{I}_8$ ve $\mathbf{R}=\mathbf{I}_4$ için piezoelektrik elemanlara uygulanan potansiyel farkları. 55
Şekil 5.24: $\mathbf{Q}=10^5\cdot\mathbf{I}_8$ ve $\mathbf{R}=\mathbf{I}_4$ için zamana bağlı deplasman değişimleri 56
Şekil 5.25: İkinci plak modeli (boyutlar *mm*'dir) 57
Şekil 5.26: Deplasman ölçüm noktaları ve piezoelektrik eleman numaraları. 58
Şekil 5.27: $\mathbf{Q}=10^3\cdot\mathbf{I}_8$ ve $\mathbf{R}=\mathbf{I}_4$ için piezoelektrik elemanlara uygulanan potansiyel farkları. 58

Şekil 5.28: $\mathbf{Q}=10^3\cdot\mathbf{I}_8$ ve $\mathbf{R}=\mathbf{I}_4$ için zamana bağlı deplasman değişimleri 59
Şekil 5.29: $\mathbf{Q}=10^4\cdot\mathbf{I}_8$ ve $\mathbf{R}=\mathbf{I}_4$ için piezoelektrik elemanlara uygulanan potansiyel farkları. 60
Şekil 5.30: $\mathbf{Q}=10^4\cdot\mathbf{I}_8$ ve $\mathbf{R}=\mathbf{I}_4$ için zamana bağlı deplasman değişimleri 61
Şekil 5.31: Üçüncü plak modeli (boyutlar *mm*'dir) 62
Şekil 5.32: Deplasman ölçüm noktaları ve piezoelektrik eleman numaraları. 63
Şekil 5.33: $\mathbf{Q}=10^3\cdot\mathbf{I}_8$ ve $\mathbf{R}=\mathbf{I}_4$ için Piezoelektrik elemanlara uygulanan potansiyel farkları. 64
Şekil 5.34: $\mathbf{Q}=10^3\cdot\mathbf{I}_8$ ve $\mathbf{R}=\mathbf{I}_4$ için zamana bağlı deplasman değişimleri 65
Şekil 5.35: $\mathbf{Q}=10^4\cdot\mathbf{I}_8$ ve $\mathbf{R}=\mathbf{I}_4$ için piezoelektrik elemanlara uygulanan potansiyel farkları. 66
Şekil 5.36: $\mathbf{Q}=10^4\cdot\mathbf{I}_8$ ve $\mathbf{R}=\mathbf{I}_4$ için zamana bağlı deplasman değişimleri 67
Şekil 5.37: $\mathbf{Q}=10^5\cdot\mathbf{I}_8$ ve $\mathbf{R}=\mathbf{I}_4$ için piezoelektrik elemanlara uygulanan potansiyel farkları. 68
Şekil 5.38: $\mathbf{Q}=10^5\cdot\mathbf{I}_8$ ve $\mathbf{R}=\mathbf{I}_4$ için zamana bağlı deplasman değişimleri 69
Şekil 5.39: Dördüncü plak modeli, deplasman ölçüm noktaları ve piezoelektrik eleman numaraları (boyutlar *mm*'dir). 70
Şekil 5.40: Dördüncü plak orta noktasının zamana bağlı deplasman değişimi. 71
Şekil 5.41: Plağın serbest kenar orta noktasının zamana bağlı hareketi 73
Şekil 5.42: Yapısal sönümün titreşim kontrolüne etkisi. 73
Şekil 5.43: Elastisite modülündeki azalmanın titreşim kontrolüne etkisi. 74
Şekil 5.44: Piezoelektrik kuvvet ve momentteki azalmanın titreşim kontrolüne etkisi. 75
Şekil 5.45: Duyarga ölçüm hatasının titreşim kontrolüne etkisi 76
Şekil 5.46: Sistem matrislerinin tümünün farklılığının titreşim kontrolüne etkisi. 76
Şekil 5.47: Gerçek sisteme ait değişiklikler ve gözleyicili kontrol sistemi. 77
Şekil A.1: Wilson θ metodu için lineer ivme değişimi. 89
Şekil A.2: Newmark sabit-ortalama-ivmelenme şeması. 91

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbf{A}$	: sistem matrisi
$\bar{\mathbf{A}}$	: kompozit eleman uzama katılık matrisi
$\mathbf{B}$	: kontrol matrisi
$\bar{\mathbf{B}}$	: kompozit eleman uzama/eğilme etkileşimi katılık matrisi
$\mathbf{c}_E$	: sabit elektrik alan elastisite matrisi
$\mathbf{C_q}$, $\mathbf{C_x}$	: çıkış matrisleri
$\mathbf{C}$	: sonlu eleman sönüm matrisi
$\mathbf{C_S}$	: genelleştirilmiş sönüm matrisi
$\tilde{\mathbf{C}}_\mathbf{S}$	: ağırlıklı genelleştirilmiş sönüm matrisi
$\mathbf{d}$	: piezoelektrik sabitler matrisi
$\mathbf{D}$	: elektrik yer değiştirme vektörü
$\bar{\mathbf{D}}$	: kompozit eleman eğilme katılık matrisi
$\mathbf{e}$	: piezoelektrik sabitler matrisi
$\tilde{\mathbf{e}}$	: gözleyici hata vektörü
E	: elastisite modülü
$\mathbf{E}$	: elektrik alan vektörü, bozuntu matrisi
f	: frekans
$\mathbf{F}$	: yük vektörü
$\mathbf{F}_B$, $\mathbf{F}_P$	: basınç ve piezoelektrik yük vektörleri
$\tilde{\mathbf{F}}_\mathbf{S}$	: ağırlıklı indirgenmiş yük vektörü
G	: kayma modülü
$\mathbf{G}$	: lokal yer değiştirmeleri ve türevlerini içeren vektör
h_k	: k katmanının kalınlığı
$\mathbf{I}_n$	: n boyutlu birim vektör
J	: performans göstergesi
$\mathbf{K}$	: sonlu eleman katılık matrisi
$\mathbf{K}_e$	: gözleyici geri besleme kazanç matrisi
$\mathbf{K_S}$	: genelleştirilmiş katılık matrisi
$\tilde{\mathbf{K}}_\mathbf{S}$	: ağırlıklı genelleştirilmiş katılık matrisi
$\mathbf{K_u}$	: regülatör geri besleme kazanç matrisi
$\mathbf{L}$	: loof noktaları şekil fonksiyonları matrisi
L_i	: loof noktası şekil fonksiyonları
$\mathbf{M}$	: sonlu eleman kütle matrisi
$\bar{\mathbf{M}}$	: eğilme moment vektörü
$\mathbf{M_S}$	: genelleştirilmiş kütle matrisi
$\tilde{\mathbf{M}}_\mathbf{S}$	: ağırlıklı genelleştirilmiş kütle matrisi
$\mathbf{N}$	: düğüm noktaları şekil fonksiyonları matrisi
$\bar{\mathbf{N}}$	: normal kuvvet vektörü
N_i , N_c	: düğüm noktası şekil fonksiyonları
$\mathbf{P}$	: herhangi bir noktanın konum vektörü

$p(t)$: anlık basınç yükü fonksiyonu
p_m : anlık basınç yükü maksimum basınç değeri
$P(x,y,z)$: noktasal koordinat bileşenleri
$\mathbf{q}$: sonlu eleman serbestlikleri vektörü
$\mathbf{q}^e$: düğüm noktası serbestlikleri vektörü
$\mathbf{Q}$: ağırlık matrisi
$\mathbf{Q}_C$: kontroledilebilirlik matrisi
$\bar{\mathbf{Q}}_k$: kompozit katman global katılık matrisi
$\mathbf{Q}_O$: gözlenebilirlik matrisi
$\mathbf{Q}_U$: çıkış kontroledilebilirlik matrisi
R : dönme miktarı
$\mathbf{R}$: ağırlık matrisi
$\bar{\mathbf{R}}$: dönme vektörü
$\mathbf{R}_S$, $\mathbf{R}_T$: lokalden globale dönüşüm matrisleri
$\mathbf{s}_E$: sabit elektrik alan elastisite matrisi
S : eğim miktarı
$\mathbf{S}$: Riccati matrisi
$\bar{\mathbf{S}}$: eğim vektörü
$\mathbf{S}_0$: plak orta düzlemi şekil değiştirmeler vektörü
$\mathbf{S}_p$: plak kalınlığınca oluşan deplasmanlar vektörü
t_j : j düğüm noktasının kalınlığı
t_p : pozitif anlık basınç etki süresi
T_X , T_Y : düğüm noktası kalınlık vektörü bileşenleri
$\mathbf{u}(t)$: kontrol vektörü, potansiyel fark vektörü
$\mathbf{u}^*$: optimal kontrol vektörü
u, v, w : x, y ve z doğrultusunda yer değiştirme bileşenleri
U, V, W : X, Y ve Z doğrultusunda yer değiştirme bileşenleri
$\mathbf{V}_B$, $\mathbf{V}_P$: birim basınç ve birim piezoelektrik yük vektörleri
$\mathbf{x}$: durum değişkenleri vektörü
$\tilde{\mathbf{x}}$: gözleyici durum değişkenleri vektörü
x, y, z : global koordinat bileşenleri
X, Y, Z : lokal koordinat bileşenleri
$\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$: lokal koordinat bileşenlerinin global eksendeki vektörleri
z_k : k katmanının orta düzlemden uzaklığı
α : basınç dalga formu parametresi
α_k : karakteristik polinomun katsayıları
γ_{xy} , γ_{xz} , γ_{yz} : kayma şekil değişimleri
$\boldsymbol{\delta}_G$: global yer değiştirme vektörü
$\boldsymbol{\delta}_L$: lokal yer değiştirme vektörü
$\boldsymbol{\Delta}$: alt ve üst yüzeyler arasında deplasman farkı
$\boldsymbol{\varepsilon}$: şekil değiştirme vektörü
$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$: global eksen takımında şekil değiştirme vektörü
$\boldsymbol{\varepsilon}_S$, $\boldsymbol{\varepsilon}_T$: dielektrik matrisleri
ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{zz} : normal şekil değiştirmeler
$\boldsymbol{\eta}$: indirgenmiş serbestlikler vektörü
θ_{XZ}^j , θ_{YZ}^j : j numaralı loof noktasındaki dönme bileşenleri
$\boldsymbol{\theta}_{XZ}^e$, $\boldsymbol{\theta}_{YZ}^e$: loof noktası serbestlik vektörleri
$\boldsymbol{\kappa}$: plak orta düzlemi eğrilik vektörü
$\boldsymbol{\Lambda}$: köşegen özdeğerler matrisi

ν	: Poisson oranı
ξ, η, ζ	: eğrisel koordinat bileşenleri
$\boldsymbol{\sigma}$	: gerilme vektörü
$\bar{\boldsymbol{\sigma}}$	: global eksen takımında gerilme vektörü
$\boldsymbol{\varphi}$	: modal dönüşüm matrisi
$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$	: ağırlıklı modal dönüşüm matrisi
ϕ_k	: k katmanına uygulanan potansiyel farkı

ANLIK BASINÇ YÜKÜ ETKİSİNDEKİ KATMANLI
KOMPOZİT BİR PLAĞIN TİTREŞİMLERİNİN AKTİF KONTROLÜ

ÖZET

Piezoelektrik kompozit malzemelerdeki gelişmeler gelişmiş hava ve uzay yapıları uygulamaları için büyük bir kullanım potansiyeli sunmaktadır. Kompozit yapıların titreşimleri piezoelektrik eyleyicilerle bastırılıp sönümlenebilmektedir. Bununla beraber piezoelektrik malzemeler kontrolü için de kullanılmaktadır.

Yapıların anlık basınç yüküne dinamik cevabı ve piezoelektrik pek çok uygulamada araştırılan konulardandır. Hopkinson [7] panel yapılara etkiyen anlık basın yükü etkisini araştırmıştır. Sunar ve Rao [2] çalışmalarında piezoelektrik malzeme teknolojisi yardımıyla esnek yapıların kontrolüne ve duyarga olarak kullanımına yönelik yakın zamandaki araştırmaları incelemişlerdir. Bu çalışmaları 336 farklı araştırmayı içermektedir. Sunar ve Rao'ya göre piezoelektrik duyargalar ve eyleyiciler akıllı yapıların tasarımı ve geliştirilmesinde oldukça büyük bir öneme sahiptir. Adaptif yapı elemanı olarak kullanılan piezoelektrik malzemelerin sonlu eleman modellemesi konusunda da Benjeddou [3] bir inceleme çalışması yapmıştır. Gopinathan and Varadan [4] tarafından yapılan çalışma ise piezoelektrik katmanların teorileri için bir karşılaştırmadır.

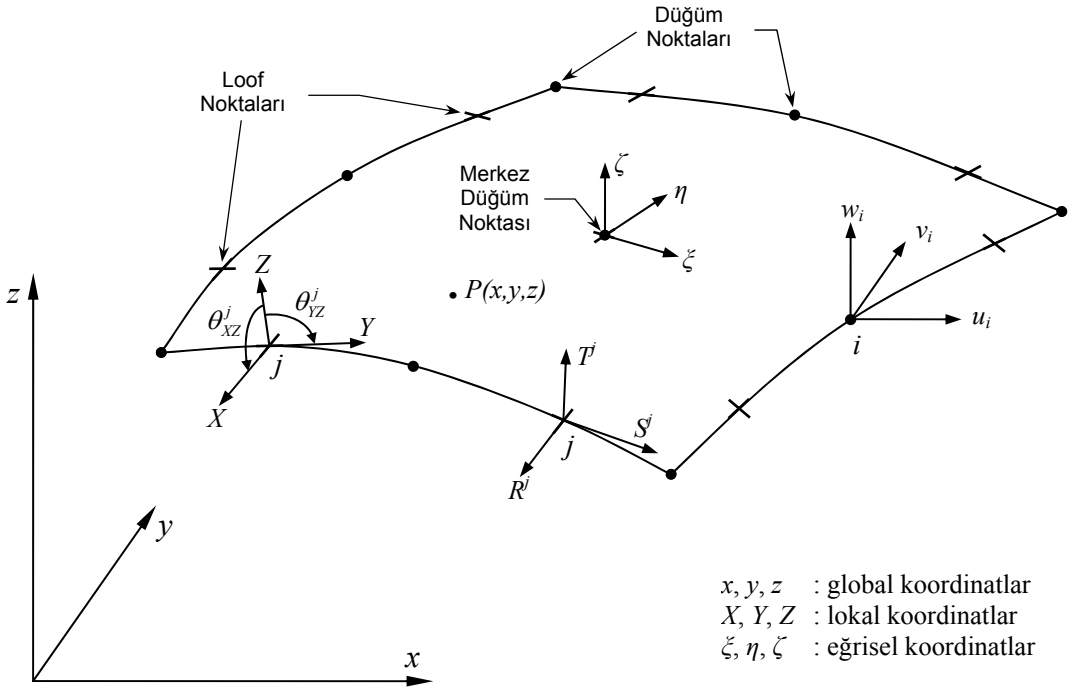
Bu çalışmada anlık basınç yüküne maruz bir kenarı ankastre mesnetli bir plağın titreşimleri piezoelektrik eyleyicilerle bastırılmıştır. Plağın sonlu eleman modeli için piezoelektrik etkilerin eklendiği semiloof kabuk sonlu eleman modeli kullanılmıştır. Mod toplama yöntemi kullanılarak sonlu eleman modelinin serbestlik derecesi azaltılmıştır. Plağın statik ve dinamik analiz sonuçları *Ansys* yazılımı ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmış ve iyi bir uyum gözlenmiştir. Anlık basınç yükü modeli için zamanla üstel olarak azalan Friedlander fonksiyonu kullanılmış ve bu fonksiyonun parametreleri bazı deneysel çalışmalardan [24] alınmıştır. İndirgenmiş sonlu eleman modelinden durum denklemleri elde edilmiş ve yapısal titreşimler bir durum gözleyicili kontrol sistemi ile başarılı olarak kontrol edilmiş ve bastırılmıştır.

Çalışmanın ikinci bölümünde anlık basınç yükü açıklanmıştır. Anlık basınç yükü modeli için değiştirilmiş zamanla azalan Friedlander fonksiyonu

$$p(t) = p_m(1 - t/t_p)e^{-\alpha t/t_p} \tag{1}$$

şeklinde ifade edilebilmektedir [14].

Plağın sonlu eleman modeli için piezoelektrik etkileri de içeren semiloof kabuk sonlu eleman modeli kullanılmıştır. Semiloof kabuk eleman değişken geometriye sahip kabukların çözümlerinde en etkin elemanlardan birisi olup hem membran hem de eğilme etkisini içerir. Eleman, izoparametrik bir eleman olup kısıt uygulanmamış eleman modeli Şekil 1'de gösterildiği gibidir.



Şekil 1: Semiloof kabuk eleman

Yukarıdaki şekilde görüldüğü üzere semiloof kabuk eleman üç tipte düğüm noktasına sahiptir:

- Köşe ve kenar-orta düğüm noktaları, her biri sırasıyla global x, y, z eksenleri doğrultusunda u_i, v_i, w_i şeklinde 3 serbestlik değerine sahiptir;
- Loof noktaları, her kenarda iki tane, Gauss integrasyon noktalarında yer alır ve kenar boyunca ve kenara dik olmak üzere sırasıyla θ_{XZ}, θ_{YZ} şeklinde dönme serbestlik değerlerine shiptir;

ve

- Merkez düğüm noktası, 5 serbestlik değerine yani yukarıda açıklanmış olan üç deplasman ve iki dönme serbestliğinin tümüne sahiptir.

Sonuçta eleman 17 düğüm noktasına ve 45 serbestlik derecesine sahiptir. Membran etkisini tanımlamak için köşe ve kenar-orta düğüm noktalarında üç deplasman değeri yeterli olmaktadır. Loof noktalarındaki dönme serbestlikleri C^1 sürekliliğini ve eğilme etkisini göz önüne almak için gerekli olmaktadır. Merkez düğüm noktası semiloof elemanın aşağıda denklemleri verilmiş olan ikinci dereceden normal doğrultudaki deplasman değişimlerini ifade eden şekil fonksiyonlarının sağlaması için gereklidir ve:

köşe düğüm noktaları için

$$N_i = \frac{1}{4}\left(1+\xi_0\right)\left(1+\eta_0\right)\left(\xi_0+\eta_0-1\right) \tag{2}$$

kenarlarda, kenar-orta düğüm noktaları için

$$\begin{aligned} N_i &= \left(1-\xi^2\right)\left(1+\eta_0\right) \quad ; \ \xi_i = 0 \\ N_i &= \left(1-\eta^2\right)\left(1+\xi_0\right) \quad ; \ \eta_i = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

merkez düğüm noktasında

$$N_c = \left(1-\xi^2\right)\left(1-\eta^2\right) \tag{4}$$

ve loof noktalarında

$$\begin{aligned} L_i &= \frac{3}{32}\left(3\xi^2-\eta^2\right)+\frac{1}{8}\left[3\xi_0\left(1-\eta^2\right)+3\eta_0\left\{3\xi^2+\xi_0-1+\frac{3}{2}\xi_0\left(\xi^2-\eta^2\right)\right\}\right] ;\xi_i=\pm 1 \\ L_i &= \frac{3}{32}\left(3\eta^2-\xi^2\right)+\frac{1}{8}\left[3\eta_0\left(1-\xi^2\right)+3\xi_0\left\{3\eta^2+\eta_0-1+\frac{3}{2}\eta_0\left(\eta^2-\xi^2\right)\right\}\right] ;\eta_i=\pm 1 \end{aligned} \tag{5}$$

ifadeleri şekil fonksiyonları olup burada

$$\xi_0 = \xi\xi_i \quad ; \qquad \eta_0 = \eta\eta_i \tag{6}$$

şeklindedir. Piezoelektrik etkiler elektrik ve mekanik enerji arasındaki dönüşümle ortaya çıkar. Piezoelektrik etkiler ancak, kristal yapısında simetri merkezi bulunmayan anizotropik özellikli bir malzemede görülebilmektedir. Elektromekanik etkileşimleri içeren doğrusal piezoelektrik bünye denklemleri

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}_E\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e}^T\mathbf{E} \tag{7}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{e}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}_S\mathbf{E} \tag{8}$$

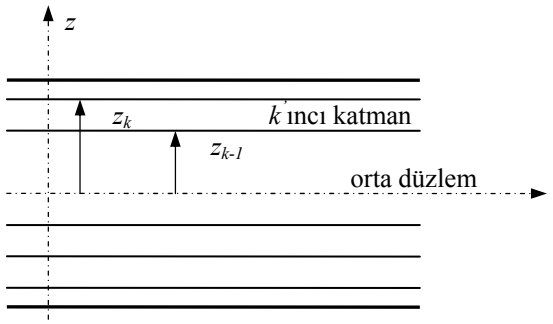
olarak ifade edilmektedir. Buradaki ilk denklem piezoelektrik elemanın eyleyiciliğini, diğeri algılayıcılığını ifade etmektedir. Kirchoff hipotezi gereği oluşan birim yer değiştirmeler plak orta düzleminin deplasmanına ve eğriliğine

$$\mathbf{S}_p = \mathbf{S}_0 + z\boldsymbol{\kappa} \tag{9}$$

şeklinde bağlıdır. Katman kalınlığı $h_k=z_k-z_{k-1}$ olan herhangi bir k'ıncı katmana uygulanan ve üniform kabul edilen elektrik alan değeri $E_k=\phi_k/h_k$ olacaktır. Bu ifadede ϕ_k o katmanın yüzeyleri arasındaki potansiyel farkıdır. Şekil 2'deki gibi çok katmanlı bir yapıda z ekseni doğrultusunda k'ıncı katmana uygulanan sabit üniform elektrik alan nedeniyle düzlem içinde ortaya çıkan $\mathbf{N}_k$ normal kuvvetleri ve $\mathbf{M}_k$ eğilme momentleri, düzlem içi gerilmelerin integrali alınarak

$$\mathbf{N}_k = \int_{-\frac{h_k}{2}}^{\frac{h_k}{2}} \boldsymbol{\sigma}_k dz \quad ; \quad \mathbf{M}_k = \int_{-\frac{h_k}{2}}^{\frac{h_k}{2}} \boldsymbol{\sigma}_k z dz \tag{10}$$

şeklinde hesaplanabilir.



Şekil 2: Çok katmanlı yapı

Çok katmanlı bir yapıda tüm katmanların oluşturduğu $\bar{\mathbf{N}}$ düzlem içi kuvvetleri ve $\bar{\mathbf{M}}$ eğilme momentleri, (9) eşitliği (7) eşitliğinde yazılıp her bir katmanın doğrultusu ile global eksen takımının doğrultusu dikkate alınarak integre edildiğinde yapının orta düzleminin $\mathbf{S}_0$ birim şekil değişimlerine, orta düzlemin $\boldsymbol{\kappa}$ eğriliğine ve piezoelektrik özelliğe sahip katmanlara uygulanan potansiyel farkına bağlı olarak

$$\begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{N}} \\ \bar{\mathbf{M}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} & \bar{\mathbf{B}} \\ \bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{D}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{S}_0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} + \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 \\ z_{mk}\mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \mathbf{R}_{Tk}^{-1} \mathbf{e}_k \phi_k \tag{11}$$

ifadesiyle hesaplanabilir. Bu ifadede yer alan $\mathbf{R}_{Tk}^{-1}$ ilgili *k*'ıncı katmanın lokal koordinatlardaki gerilmelerinin global koordinatlara dönüşüm matrisidir. z_{mk} ifadesi *k*'ıncı katmanın orta düzleminin plağın orta düzlemine uzaklığı olup

$$z_{mk} = \frac{z_k + z_{k-1}}{2} \tag{12}$$

ile hesaplanır. (11) denkleminde eşitliğin sağındaki ilk terim kompozit katmanlı bir yapı için bilinen katılık matrisi olup $\bar{\mathbf{A}}$ uzamam katılık matrisini, $\bar{\mathbf{D}}$ eğilme katılık matrisini ve $\bar{\mathbf{B}}$ uzama/eğilme etkileşim matrisidir. (11) eşitliğinin sağındaki ikinci terim ise piezoelektrik yükleri ifade eder.

Seeger, Köppe ve Gabbert [74] semiloof kabuk elemanlarla titreşimlerin kontrolü için bazı aktif elemanlar önermişlerdir. Bunlardan S1 elemanı olarak adlandırılan piezoelektrik sonlu eleman yaklaşımında yapıda elektromekanik etkileşim bulunmayıp bilinen semiloof kabuk sonlu eleman modeline ait katılık ve kütle matrisleri olduğu gibi kullanılır. Aktif katmanlara uygulanan potansiyel farkı nedeniyle oluşan kuvvetler ve momentler ise dinamik hareket denklemlerinde eşitliğin sağ tarafına yazılabilir.

Semiloof kabuk sonlu eleman modeli ile katılık, kütle ve sönüm matrisleri elde edilmiş bir yapıya ait dinamik hareket denklemleri

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F} \tag{13}$$

olarak elde edilir. Bu denklemde yer alan kuvvet vektörü hem anlık basınç yükünü hem de piezoelektrik yük vektörünü içermekte olup $\mathbf{F}_B$ ve $\mathbf{F}_P$ sırasıyla anlık basınç yük vektörü ve piezoelektrik yük vektörü olmak üzere

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_P \tag{14}$$

yazmak mümkündür. Sonlu eleman modelinin serbestlik derecesini azaltmak için yapının dinamik davranışında baskın olan modları içeren $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ ağırlıklı modal dönüşüm matrisi ile mod toplama yöntemi kullanılabilir. Mod toplama yöntemi sonrasında indirgenmiş sisteme ait dinamik hareket denklemi

$$\tilde{\mathbf{M}}_S\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \tilde{\mathbf{C}}_S\dot{\boldsymbol{\eta}} + \tilde{\mathbf{K}}_S\boldsymbol{\eta} = \tilde{\mathbf{F}}_S \tag{15}$$

haline gelir. Bu ifadede yer alan $\tilde{\mathbf{M}}_S$ ağırlıklı kütle matrisi, $\tilde{\mathbf{C}}_S$ ağırlıklı sönüm matrisi, $\tilde{\mathbf{K}}_S$ ağırlıklı katılık matrisi ve $\tilde{\mathbf{F}}_S$ anlık basınç yükü ile piezoelektrik yükü içeren indirgenmiş kuvvet vektörüdür. İndirgenmiş sonlu eleman modelinden elde durum denklemleri ise

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\tilde{\mathbf{M}}_S^{-1}\tilde{\mathbf{K}} & -\tilde{\mathbf{M}}_S^{-1}\tilde{\mathbf{C}}_S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\tilde{\mathbf{M}}_S^{-1}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^T\mathbf{V}_P \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\tilde{\mathbf{M}}_S^{-1}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^T\mathbf{V}_B \end{bmatrix} p(t) \tag{16}$$

şeklindedir. Bu ifadede $\mathbf{V}_B$ birim basınç yük vektörünü ve $\mathbf{V}_P$ birim piezoelektrik yük vektörünü temsil etmektedir. (16) denklemi kapalı formda

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}p(t) \tag{17}$$

olarak yazılabilir. Burada **A** sistem matrisi, **B** kontrol matrisi ve **E** bozuntu matrisi olmaktadır. Sistemin duyargalarından elde edilen çıkış denklemi, $\mathbf{C}_\mathbf{x}$ çıkış matrisini göstermek üzere

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_\mathbf{x}\mathbf{x} \tag{18}$$

olarak elde edilir. Sistemin kontrolü için (17) ve (18) ile verilen sistem matrislerinin kontroledilebilirlik şartı bulunmalıdır. Eğer sistem bir gözleyici kullanılarak kontrol edilmek isteniyorsa bu durumda gözlenebilirlik şartını da sağlamalıdır. Bu çalışmada anlık basınç yükü etkisiyle ortaya çıkan yapısal titreşimler, gözleyici içeren bir geri beslemeli kontrol sistemi kullanılarak başarılı bir şekilde kontrol edilmiş ve bastırılmıştır.

Bu çalışma gelecekte bu konuda yapılacak deneysel ve sayısal çalışmalara büyük bir katkı sağlayacaktır. Yapılacak sayısal ve deneysel çalışmalarda tekrarlı ve rasgele yük etkilerindeki titreşimlerin farklı kontrol stratejileri de kullanılarak sönümlendirilmesi konularının araştırılabileceği değerlendirilmektedir. Yine sınır şartlarındaki değişikliklerin, yapıya takviyeler eklenmesinin yapının titreşimlerine ve kontrolüne olan etkilerinin incelenebilir. İlave olarak bu çalışma yapısal sönüm ve nonlineer etkilerin de gözönüne alındığı titreşim kontrolü çalışmalarına katkı sağlayacaktır.

ACTIVE VIBRATION CONTROL OF A LAMINATED COMPOSITE PLATE SUBJECTED TO BLAST LOADING

SUMMARY

The development of piezoelectric composite materials offers great potential for use in advanced aerospace structural applications. Composite structure vibrations can be suppressed or controlled using piezoelectric actuators. Piezoelectric actuators are also used for static shape control.

The dynamic responses of structures to blast loading and piezoelectric have been investigated in many applications. Hopkinson [7] investigated panel structures subjected to blast load. Sunar and Rao [2] review the recent advances in sensing and control of flexible structures via piezoelectric materials technology. This study includes 336 different investigations. According to Sunar and Rao piezoelectric sensors and actuators have great importance in development and design of smart structures. Benjeddou [3] has also a survey study about finite element modeling of piezoelectric materials used as adaptive structural elements. A comparison was made about the theories for piezoelectric laminates by Gopinathan and Varadan [4].

This study presents vibration suppression of a cantilever plate subjected to blast loading by the use of piezoelectric actuators. Semiloof shell finite element which includes piezoelectric effects is used for the plate finite element model. To reduce the degrees of freedom of the finite element model, mode summation method is used. Calculated results of the static and dynamic analyses of the plate are compared with those modeled by using *Ansys* software. A good agreement is observed. Friedlander exponential decay equation is used for expressing the blast load model and the parameters of the equation are obtained from some experimental studies [24]. State-space equations are obtained from the reduced finite element model and structural vibrations are controlled and suppressed successfully by use of a state observer control system.

Blast load is explained in the second chapter. Modified Friedlander decay equation which can be expressed as

$$p(t) = p_m (1 - t / t_p) e^{-\alpha t / t_p} \tag{1}$$

is used for the modeling of blast load [14].

Semiloof shell finite element including piezoelectric effects is used for finite element modeling of the plate. Semiloof shell element is one of the most efficient elements for the solution of shells having arbitrary geometry and it accounts for both membrane and bending actions. It is an isoparametric non-confirming element. The unconstrained version of the element has the following configuration.

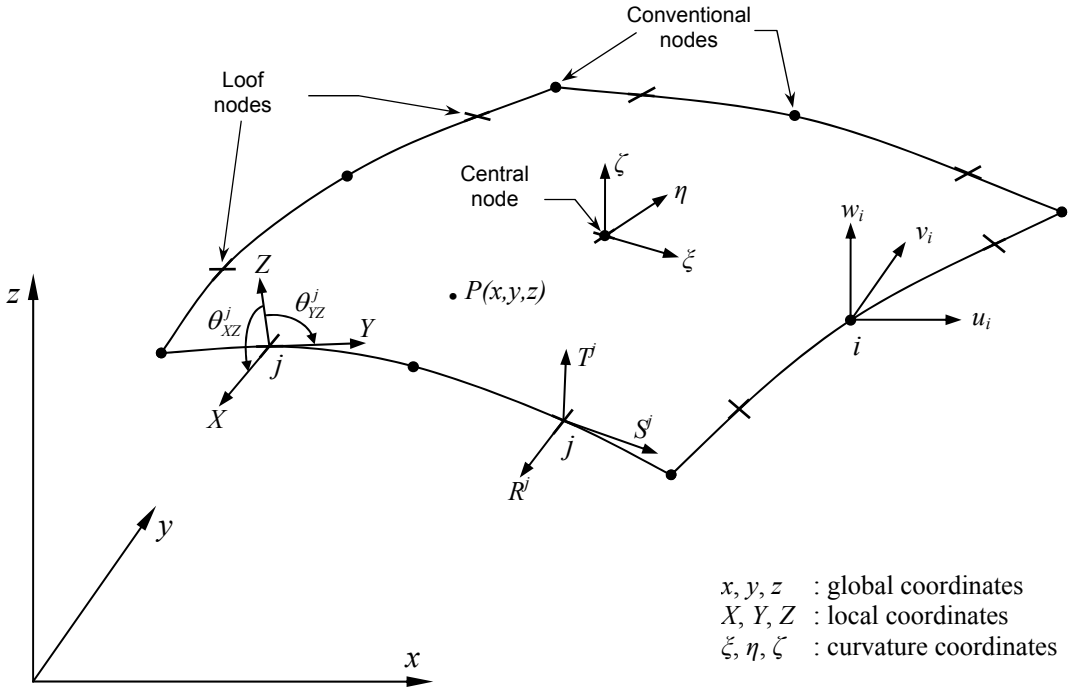


Figure 1: Semiloof shell element

As shown in the figure above semiloof shell element has three types of nodes:

- Corner and mid-side nodes having 3 degrees of freedom u_i, v_i, w_i along the global x, y, z directions, respectively;
- Loof nodes, two on each side, located at the Gaussian quadrature positions and having two rotational degrees of freedom θ_{XZ}, θ_{YZ} along and perpendicular to the edge, respectively;

and

- The central node, having all the 5 degrees of freedom, i.e. three displacements and two rotations explained above.

Thus, the element possesses 17 nodes and 45 degrees-of freedom. Three displacement degrees of freedom at the corner and mid-side nodes are sufficient for defining the membrane action. The rotations at loof nodes are necessary to impart C^1 continuity and account for bending action. The central node is required to satisfy the quadratic variation of normal deflections in the Shape functions of the semiloof shell element which can be expressed as the following forms,

for the corner nodes

$$N_i = \frac{1}{4}\left(1+\xi_0\right)\left(1+\eta_0\right)\left(\xi_0+\eta_0-1\right) \tag{2}$$

edge mid-side nodes

$$\begin{aligned} N_i &= \left(1-\xi^2\right)\left(1+\eta_0\right) \quad ; \ \xi_i = 0 \\ N_i &= \left(1-\eta^2\right)\left(1+\xi_0\right) \quad ; \ \eta_i = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

central node

$$N_c = \left(1-\xi^2\right)\left(1-\eta^2\right) \tag{4}$$

and loof nodes

$$\begin{aligned} L_i &= \frac{3}{32}\left(3\xi^2-\eta^2\right)+\frac{1}{8}\left[3\xi_0\left(1-\eta^2\right)+3\eta_0\left\{3\xi^2+\xi_0-1+\frac{3}{2}\xi_0\left(\xi^2-\eta^2\right)\right\}\right] ;\xi_i=\pm 1 \\ L_i &= \frac{3}{32}\left(3\eta^2-\xi^2\right)+\frac{1}{8}\left[3\eta_0\left(1-\xi^2\right)+3\xi_0\left\{3\eta^2+\eta_0-1+\frac{3}{2}\eta_0\left(\eta^2-\xi^2\right)\right\}\right] ;\eta_i=\pm 1 \end{aligned} \tag{5}$$

where

$$\xi_0 = \xi\xi_i \quad ; \qquad \eta_0 = \eta\eta_i \tag{6}$$

The piezoelectric effects can be seen as transformations between electrical and mechanical energy. For a material to exhibit an anisotropic property such as piezoelectricity, its crystal structure must have no centre of symmetry. Linear piezoelectric constitutive equations which include electromechanical coupling can be expressed as

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}_E\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e}^T\mathbf{E} \tag{7}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{e}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}_S\mathbf{E} \tag{8}$$

These equations denote the actuation and the sensing effects of piezoelectric materials, respectively. According to the Kirchhoff hypothesis, a fiber normal to the mid-plane remains so, after deformation. It follows that:

$$\mathbf{S}_p = \mathbf{S}_0 + z\boldsymbol{\kappa} \tag{9}$$

The electric field is assumed uniform across the thickness $h_k=z_k-z_{k-1}$ of each layer k: $E_k=\phi_k/h_k$ where ϕ_k is the difference of electric potential across the layer. Due to the constant, uniform electric field in the z direction of k^{th} piezoelectric layer, in-plane efforts $\mathbf{N}_k$ and bending moments $\mathbf{M}_k$ can be determined by integrating the stresses over the thickness of the multilayered material as shown in Figure 2.

$$\mathbf{N}_k = \int_{-\frac{h_k}{2}}^{\frac{h_k}{2}} \boldsymbol{\sigma}_k dz \quad ; \quad \mathbf{M}_k = \int_{-\frac{h_k}{2}}^{\frac{h_k}{2}} \boldsymbol{\sigma}_k z dz \tag{10}$$

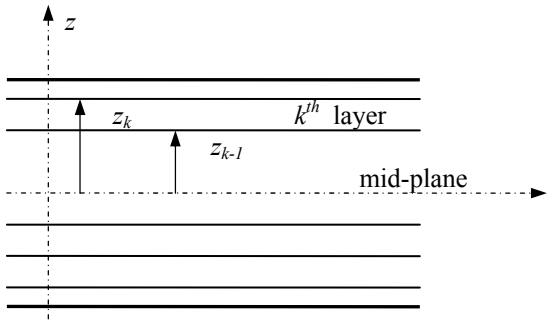


Figure 2: Multilayered material

By substituting equation (9) into equation (7) and integrating over the thickness taking the orientation of the layers into account with respect to the global axis, one gets the global equation which relates the resultant in-plane forces $\bar{\mathbf{N}}$ and bending moments $\bar{\mathbf{M}}$, to the mid-plane strain $\mathbf{S}_0$ and curvature $\boldsymbol{\kappa}$ and the electrical potential applied to the piezoelectric surfaces:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{N}} \\ \bar{\mathbf{M}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} & \bar{\mathbf{B}} \\ \bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{D}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{S}_0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} + \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 \\ z_{mk}\mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \mathbf{R}_{Tk}^{-1} \mathbf{e}_k \phi_k \tag{11}$$

where $\mathbf{R}_{Tk}^{-1}$ is the transformation matrix relating the stresses in the local coordinate system to the global one for k^{th} layer. z_{mk} is the distance from the mid-plane of k^{th} layer to the mid-plane of the laminate as follows:

$$z_{mk} = \frac{z_k + z_{k-1}}{2} \tag{12}$$

The first term in the right hand side of Eq.(11) is the classical stiffness matrix of a composite laminate, where $\bar{\mathbf{A}}$ is the extensional stiffness matrix, $\bar{\mathbf{D}}$ is the bending stiffness matrix and $\bar{\mathbf{B}}$ is the extension/bending coupling matrix. These matrices are related to the individual layers according to the classical relationships on composite materials. The second term in the right hand side of Eq.(11) expresses the piezoelectric loading.

Seeger, Köppe ve Gabbert [74] have suggested several active elements for the control of the vibrations by using semiloof shell elements. Piezoelectric element called S1 based on the finite element approach has no electromechanical coupling and the classical semiloof shell finite element stiffness and mass matrices can be used. Normal forces and moments due to potential differences between the active layer surfaces can be written in the right-hand side of the dynamic equations of motion.

Stiffness, mass and damping matrices which express the structural model are obtained from the semiloof shell finite element and used for obtaining the equations of motion which can be expressed as

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F} \tag{13}$$

The force vector in the equation (13) includes blast and piezoelectric effects and can be written in the following form

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_P \tag{14}$$

where $\mathbf{F}_B$ and $\mathbf{F}_P$ denote the blast load vector and piezoelectric load vectors, respectively. In order to reduce the degrees of freedom of the finite element model, mode summation method is used with weighted modal vector $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ including dominant modes in the dynamic behavior. After mode summation, equation of motion becomes

$$\tilde{\mathbf{M}}_S\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \tilde{\mathbf{C}}_S\dot{\boldsymbol{\eta}} + \tilde{\mathbf{K}}_S\boldsymbol{\eta} = \tilde{\mathbf{F}}_S \tag{15}$$

where $\tilde{\mathbf{M}}_S$ is weighted mass matrix, $\tilde{\mathbf{C}}_S$ is weighted damping matrix, $\tilde{\mathbf{K}}_S$ is weighted stiffness matrix, and $\tilde{\mathbf{F}}_S$ is the reduced force vector includes blast and

piezoelectric loads. State-space equations are obtained from the reduced finite element model and can be written as following

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\tilde{\mathbf{M}}_S^{-1}\tilde{\mathbf{K}} & -\tilde{\mathbf{M}}_S^{-1}\tilde{\mathbf{C}}_S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\tilde{\mathbf{M}}_S^{-1}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^T\mathbf{V}_P \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\tilde{\mathbf{M}}_S^{-1}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^T\mathbf{V}_B \end{bmatrix} p(t) \tag{16}$$

where $\mathbf{V}_B$ represents unit pressure load vector and $\mathbf{V}_P$ is unit piezoelectric load vector. The above equation can be expressed in the closed form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}p(t) \tag{17}$$

where **A** is system matrix, **B** is control matrix and **E** is the disturbance matrix. Output equation

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_\mathbf{x}\mathbf{x} \tag{18}$$

is obtained from the locations of sensor points. Here $\mathbf{C}_\mathbf{x}$ indicates the output matrix. The system of equation (17) and (18) must satisfy the controllability condition in order to be taken under control. If this system is also desired to be controlled by using a state observer, it must be satisfy the observability condition. Structural vibrations due to blast loading have been successfully controlled and suppressed by using a state observer feedback control system.

This study will provide noteworthy supports for experimental works in this area in the future. Vibration control of plates under different loads such as random or harmonic can be investigated by using different control strategies in experimentally or numerically. The influence of different boundary conditions and addition of stiffeners to the plate on structural vibrations and vibration control can also be investigated. Furthermore, some issues like nonlinear effects on plate deformations and adding structural damping are needed to be explored.

1 GİRİŞ

Bu çalışmada katmanlı kompozit bir plağın anlık basınç yükleri (blast load) etkisi altındaki dinamik davranışları incelenmiş ve ortaya çıkan titreşimler aktif olarak kontrol edilmiştir. Zamana bağlı dış uyarımlar etkisindeki elastik yapıların dinamik davranışları hava ve uzay araçlarının tasarımında oldukça önemli bir konudur. Zamana bağlı bu dış uyarımlar atmosferdeki türbülanslardan, nükleer patlamalardan, sonik patlamalardan (sonic boom), şok dalgalarından, yakıt patlamalarından vb. ortaya çıkabilir. Sonik patlama ses üstü uçuş yapan uçaklarda ve roketlerde ses hızının aşılması sırasında oluşur. Dolayısıyla uçak yapıları gerek civarında oluşan patlamalar etkisiyle gerekse ses hızının aşılmasında oluşan güçlü şok dalgaları nedeniyle anlık basınç yüklerine ve zamana bağlı dış uyarımlara maruz kalabilmektedirler. Bu tür yükler, gemiler, denizaltılar, basınç tankları ve diğer sivil mühendislik yapıları için de önem arz etmektedir. Bu tür yüklerin hava-uzay aracının yapısal bütünlüğü ve işletim ömrü üzerindeki zararlı etkilerinden dolayı bu yapıların dinamik cevabının belirlenmesi ve oluşan titreşimlerin kontrol edilerek sönümlenmesine yönelik uygun metotların bulunması gerekmektedir. Gelecek nesil hava ve uzay yapılarının yapısal esnekliğinin giderek artması ve ağır çevre şartlarında işletme zorunlulukları bu tür araştırmaların yapılmasını zorunlu hale getirmektedir.

Diğer taraftan hafifliğin çok önemli olduğu hava ve uzay yapılarında kompozit malzemelerin kullanımı da gün geçtikçe artmaktadır. Yakın bir gelecekte hava ve uzay araçları büyük oranda kompozit malzemeden yapılabilecektir. Bu çalışmada insansız bir hava aracının kanadı veya kuyruk kumanda ve kontrol yüzeyi ya da bir roket kontrol yüzeyi gibi elemanlar gözönüne alınarak, katmanlı kompozit konsol plak modelleri oluşturulmuş ve bu plakların anlık basınç yükleri etkisindeki dinamik davranışları incelenerek ortaya çıkan titreşimlerin aktif olarak kontrol edilmesini sağlayan durum gözleyicili bir kontrol sistemi tasarlanarak uygulanmıştır. Olay sayısal olarak modellenmiş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır.

1.1 Mevcut Çalışmalar

Literatürdeki konuyla ilgili çalışmaları aşağıda verilen balıklar altında genel olarak beş grupta ele alarak incelemekte yarar vardır:

- Tarama çalışmaları,
- Anlık basınç yükü ile ilgili çalışmalar,
- Panellerin anlık basınç yükleri altındaki davranışlarını inceleyen çalışmalar
- Panellerin dinamik davranışlarının kontrolü üzerine yapılmış çalışmalar
- Anlık basınç yükü etkisine maruz yapıların dinamik davranışının kontrolü ile ilgili çalışmalar.

1.1.1 Tarama Çalışmaları

Tarama çalışmaları daha önceden yapılmış olan pek çok benzer çalışmayı özetlediğinden dolayı oldukça yaralı olmaktadır. Bu çalışmaların ilkinde Dökmeci [1] piezoelektrik kristallerin titreşimleriyle ilgili tarama çalışmasında temel lineer piezoelektrik denklemleri ve ardından varyasyonel prensipleri verdikten sonra çubuk, plak, halka, disk ve kabuk gibi geometrilere sahip piezoelektrik kristal yapıların titreşim özelliklerini incelemiş, bu konulardaki çalışmaları anlatmış daha sonra sonlu elemanlar modellemelerini ve uygulamada eğilme ve kırılma açısından yapılan çalışmaları özetlemiştir. Sunar ve Rao [2] daha önce yapılmış olan 336 adet çalışmayı, piezoelektrik malzemelerin tarihsel gelişimleri ve teorileri, duyarga ve tahrik elemanı olarak piezoelektrik malzemelerin kullanımı, piezoelektrik malzemelerin yerleştirilmelerinin ve boyutlandırılmalarının optimizasyonu, nonlineerlik ve etkileri, sonlu eleman formülleri, mekanik, elektrik ve sıcaklık etkilerini içeren termopiezoelektrikler başlıkları altında sınıflandırarak özetlemiştir. Sunar'a göre akıllı yapıların geliştirilmesinde ve tasarımında piezoelektrik malzemelerden yapılmış duyarga ve tahrik elemanları oldukça önem arzetmektedir. Bir diğer çalışma Benjeddou [3] tarafından adaptif yapısal eleman olarak kullanılan piezoelektrik malzemelerin sonlu elemanlar modellemelerinin yapıldığı 113 çalışma üzerine bir incelemedir. İncelemede, piezoelektrik malzemelerin modellemelerinde kullanılan temel teorik yaklaşımlar kısaca anlatılmış, ardından tablolar halinde guruplandırılmış şekilde kullanılmış olan sonlu eleman çeşitleri verilmiştir. Gopinathan ve Varadan [4] çalışmalarında piezoelektrik tabakalar içeren plakların modellenmesinde kullanılan teorileri kısaca karşılaştırdıktan sonra, bu tür plaklar için

birinci dereceden kayma şekil değişimleri teorisini kullanarak duyarga ve tahrik elemanı olarak kullanılmaları durumundaki çözümleri elde etmişlerdir. Loewy [5] ise zeki yapıların yakın tarihlerdeki gelişimlerini ve havacılıkta, özellikle kumanda kontrol yüzeylerinin ve helikopter rotor pallerinin kontrol edilmesi yönündeki kullanımlarını 60 adet çalışmayı özetleyerek anlatmıştır. Yine Tauchert [6] yaptığı tarama çalışmasında ısıl etkileri de dikkate alarak akıllı kompozit yapılar anlamında piezoelektrik malzemelerin gelişmelerini ve duyarga, tahrik elemanı gibi kullanımlarına bağlı olarak modellemede kullanılan teorileri ve çözümlerde elde edilmiş sonuçları ilgili başlıklar altında özetlemiştir.

1.1.2 Anlık Basınç Yükü Modelleri

Anlık basınç yükü etkisine maruz panellerle ilgili olarak ilk yayınlardan olan Hopkinson [7] çalışmasında ölçekli modellerin kullanımı için bazı teoriler ortaya koymuştur. Hopkinson'un teorisinde boyutları dışında tüm özellikleri benzer olan iki yapısal sistemin, bu yapıların boyutlarının küpü ile orantılı kütlelere sahip patlayıcıların patlaması sonucunda oluşan anlık basınç yüklerinin etkimesi halinde ortaya çıkacak deplasmanların, boyutlarla orantılı olacak şekilde dinamik davranışlarının benzer olacağı ifade edilmektedir.

Patlamaların modellenmesi ile ilgili literatürde çeşitli çalışmalar bulunmaktadır. Beshara [8] patlamanın temel özelliklerini ve anlık basınç dalgası olayını incelemiş, patlamanın TNT olarak dengini ve anlık basınç ölçek yasasını tartışmıştır. Beshara bu çalışmasında rijit yapılar üzerine etki eden anlık basınç yükünü ele almış ve anlık basınç yükünün modellenmesi ile ilgili bir yaklaşım sunmuştur. Beshara diğer çalışmasında [9] sınırlanmış patlamaların, anlık basınç temasının ve patlamanın indüklediği yer şokunun özelliklerini ve yapısal etkilerini araştırmıştır. Singhal ve Larson [10] çeşitli havacılık yapılarının katılık ve kütle dağılımına dayanan dinamik indirgeme faktörlerini hesaba katan bir bilgisayar programı geliştirmiştir. Anlık basınç yükünün hesaplanmasında kullanılan bu program, yapının esnekliği, elastisite modülü, kütle dağılımı ve farklı sınır şartlarının etkisini hesaba katmaktadır. Chapman ve arkadaşları [11] anlık basınç dalgası ile yapıların etkileşiminin simülasyonu konusunda parametrik bir çalışma yapmışlardır. Araştırmacılar bu konuda yazdıkları programın sonuçları ile deneysel sonuçları karşılaştırmışlar ve anlık basınç yükünün belirlenmesinde analiz sonuçları ile deneysel sonuçları oldukça uyumlu bulmuşlardır.

1.1.3 Anlık Basınç Yüküne Maruz Yapılar

Anlık basınç yüküne maruz izotrop çelik paneller konusunda bir takım çalışmalar yapılmıştır. Çelik gemi panellerinin düzgün yayılı anlık basınç yüküne yapısal cevabının tahmin edilmesi ve ölçülmesi konusu Houlston ve arkadaşları [12] tarafından araştırılmıştır. Houlston ve arkadaşları çalışmalarında gemi panellerinin takviyeli olması durumunu da incelemişlerdir. Sözkonusu çalışmada plağın orta noktasının ivmesinin zaman ile değişimi deneysel olarak elde edilmiştir. Hız ve yer değiştirme değerleri ivmelerin integrasyonu ile hesaplanmış ve *ADINA* sonlu elemanlar yazılımı kullanılarak bulunan sayısal sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Sonlu elemanlar yöntemi ile çözüm sırasında lineer analiz için Newmark integrasyon tekniğinden yararlanılmış ve nonlineer analiz sırasında her zaman adımında Newton iterasyonu uygulanmıştır. Sonlu eleman sayısının arttırılması ile deneysel ve sayısal sonuçlar arasında iyi bir uyum elde edilmiştir. Houlston ve arkadaşları [13] bir başka çalışmalarında savaş gemisi panellerinin modeli olarak kare şeklinde bir çelik plağın düzgün yayılı anlık basınç yüküne cevabını *ADINA* sonlu elemanlar yazılımı yardımıyla bulmuşlar ve deneysel sonuçlar ile karşılaştırmışlar, sayısal çözümü Newmark integrasyon tekniği ile yapmışlar ve geometrik nonlineerliklerin analiz sonuçlarını etkilediğini göstermişlerdir. Gupta ve arkadaşları [14] basit mesnetli çelik bir plağın düzgün yayılı anlık basınç yüküne cevabını araştırmışlardır. Araştırmacılar lineer bölgede kalmak üzere, çalışmalarında plak üzerine etkiyen anlık basınç yükünü zamanla exponansiyel olarak azalan düzgün yayılı bir yük olarak almış ve plak için Navier formunda bir yer değiştirme fonksiyonu kabul etmişler ve elde ettikleri analiz sonuçlarını *ADINA* sonlu elemanlar yazılım sonuçları ile karşılaştırmışlardır. Sonlu eleman modelinde dört düğüm noktalı kabuk eleman kullanmanın, yapının dinamik cevabının elde edilmesinde yeterli doğrulukta sonuç verdiğini ortaya koymuşlardır. Nurick ve arkadaşı [15] anlık basınç yüküne maruz takviyeli kare plakları deneysel ve sayısal olarak araştırmışlardır. Nurick ve arkadaşı çalışmalarında nonlineer geometri ve malzeme etkilerini içeren bir sonlu eleman formülasyonu kullanmışlardır. Sonlu elemanlarla çözüm sırasında Newmark integrasyonu uygulamışlardır. Çelik plakların sünmesinin (large ductile deformation) ve kopmasının (tensile tearing) araştırıldığı bu çalışmada deney ve analiz sonuçları, sünmenin hesabında uyumlu sonuçların elde edildiğini göstermektedir. Kopma ile ilgili deneylerin azlığı analiz ve deney sonuçları arasında benzer bir ilişkinin kurulmasını önlemiştir. Singhal ve arkadaşları [16] anlık basınç yüküne maruz çeşitli

kalınlıklardaki esnek alüminyum panelleri farklı teknikler kullanarak analiz etmişlerdir. Bu tekniklerden birinde problem eşdeğer tek serbestlik dereceli olarak modellenmiş ve çözümde Duhamel integrasyon tekniği kullanılmıştır. Bir diğerinde ise probleme çok serbestlik derecesi ile yaklaşım yapan bir sonlu eleman programı kullanılmıştır. Araştırmacılar basınç yükünün üstel ve lineer olarak azaldığı durumları incelemiş ve sonuçları karşılaştırmışlardır. Redekop ve Azar [17] çelik silindirik kabuk panellerin anlık basınç yüküne cevabını teorik olarak araştırmıştır. Araştırmacılar çalışmalarında sınırlarından basit mesnetli olan farklı eğrilikteki paneller için lineer ve geometrik olarak nonlineer durumlarda teorik sonuçlar elde etmişler ve *ADINA* sonlu elemanlar yazılımı sonuçları ile karşılaştırmışlar, teorik sonuçlarla sayısal sonuçlar arasında nitelik bakımından iyi bir uyum elde etmişlerdir. Redekop [18] başka bir çalışmasında çelik toroidal kabuğun anlık basınç yüküne lineer elastik dinamik cevabını Mushtari-Vlasov-Donnell yaklaşımları çerçevesinde sayısal olarak incelemiştir. Sonuçlar karşılık gelen silindirik kabuğun sonuçları ile karşılaştırıldığında yer değiştirmeler silindirik kabuğun yer değiştirme değerlerinden daha küçük bulunmuştur. Olson [19] takviyeli plakların ve silindirik kabukların anlık basınç yüküne nonlineer cevabını sayısal olarak elde etmiştir. Jiang ve Olson [20] izotropik ve takviyeli kabukların anlık basınç yüküne cevabını sonlu şeritler metodunu kullanarak sayısal olarak incelemiş ve buldukları sonuçları önceki çalışmalarla ve deneysel sonuçlar ile karşılaştırmışlardır. Sayısal ve deneysel sonuçlar arasında maksimum yer değiştirme değerinin tahmini bakımından uyumlu sonuçlar elde edilmiştir. Araştırmacılar bu çalışmalarında geometrik ve malzeme nonlineerliklerini hesaba katmışlardır.

Anlık basınç yüküne maruz kalan sandviç panellerin dizayn metodları konusunda bir çalışma da Wiernicki ve arkadaşları [21] tarafından yapılmıştır. Sözkonusu çalışmada öndizayn için kullanılabilecek analitik ifadeler yer almıştır.

Librescu ve Nosier [22] düzgün yayılı anlık basınç yüküne maruz kalan simetrik katmanlı, kompozit, düz, dikdörtgen panellerin teorik analizinde, yanlamasına kayma deformasyonunu ve yanlamasına normal gerilmeleri hesaba katmışlardır. Librescu ve arkadaşı problemi integral dönüşüm tekniğini kullanarak çözmüşlerdir. Araştırmacılar buldukları sonuçları yanlamasına normal gerilme etkilerinin hesaba katılmadığı klasik plak teorisi çerçevesinde elde edilen sonuçlar ile karşılaştırmışlardır. Elde edilen sonuçlardan kalın kompozit plakların analizinde

yanlamasına normal gerilme etkilerinin hesaba katılmasının gerekli olduğu görülmüştür. Söz konusu çalışmada, araştırmacılar buldukları sonuçların doğruluk derecesini gösterecek bir kriter ile karşılaştırma yapmamışlardır. Son yıllarda, Türkmen ve Mecitoğlu [23] kenarlarından ankastre olarak mesnetlenmiş tek katmanlı kompozit bir plağın anlık basınç yüküne dinamik cevabını teorik olarak incelemişlerdir. Sözkonusu çalışmada geometrik nonlineerlikler hesaba katılmıştır. Elde edilen diferansiyel formdaki nonlineer hareket denkleminin çözümü için dördüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemi kullanılmıştır. Türkmen ve Mecitoğlu [24] katmanlı kompozit silindirik kabukların anlık basınç yüküne cevabını deneysel ve sayısal olarak incelemişlerdir. Sözü edilen çalışmada büyük yer değiştirme etkileri dikkate alınmıştır. Panellerin üzerindeki yüklemenin düzgün yayılı ve sinüsoidal olduğu durumlar incelenmiştir. Çözüm işlemi Newmark integrasyon tekniğinin kullanıldığı sonlu elemanlar yöntemi ile yapılmıştır. Türkmen ve Mecitoğlu [25] katmanlı kompozit plakların anlık basınç yüküne cevabını teorik, deneysel ve sayısal olarak elde etmişlerdir. Söz konusu çalışmada anlık basınç yükünün plak üzerinde düzgün yayılı ve sinüzoidal olarak yayılı olduğu durumlar ele alınmış ve problem nonlineer çerçevede çözülmüştür. Yaklaşık teorik çözümler Runge-Kutta yöntemi ile yapılmıştır. Sayısal çözümler Newmark integrasyon tekniğinden yararlanılarak sonlu elemanlar yöntemi ile yapılmıştır.

1.1.4 Titreşim Kontrolü

Literatürde çubuk ve plakların titreşimlerinin kontrol edilmesine yönelik, sayısal çalışmalar ağırlıklı olmak üzere deneysel ve sayısal çalışmalar bulunmaktadır. Takawa [26] bir kompozit çubuğun hem eğilme hem de burulma titreşimlerini piezoseramik eyleyicilerle ve kapalı çevrim kontrol kullanarak deneysel olarak kontrol etmiştir. Gaudenzi ve arkadaşları [27] yaptıkları deneysel çalışmada iki yüzü piezoelektrik malzemeyle kaplanmış katmanlı kompozit bir çubuğun zorlanmış titreşimlerini kapalı çevrimli kontrol sistemi ile aktif olarak 40~2000 Hz frekans aralığında kontrol etmiş ve piezoelektrik malzemelerin etkili bir biçimde titreşim kontrolünde kullanılabileceğini göstermişlerdir. Sun ve Huang [28] piezoelektrik malzemeyle kaplanmış kompozit bir çubuğun negatif hız geri beslemesi ile aktif olarak titreşimlerinin kontrolü için analitik bir çalışma yapmışlardır. Sun ve Huang [29] yaptıkları diğer bir analitik çalışmalarında piezoelektrik duyarga ve eyleyicilere sahip katanlı kompozit bir çubuğun harmonik titreşimlerinin bastırılması konusunu

incelemişler ve indirgenmiş sisteme ait denklemlerin elde edilmesi ve çözüme ulaşmada *Matlab* yazılımından yararlanmışlar ve kapalı çevrim kontrol yönteminin titreşimlerin aktif olarak sönümlenmesindeki etkinliğini göstermişlerdir. Han ve Lee [30] yaptıkları sayısal çalışmada kompozit çubukların piezoelektrik malzemelerle kapalı çevrimli aktif kontrolünde, plakların sonlu elemanlar modellemesinde katmanlı plak teorisi (layerwise plate theory) yaklaşımını kullanarak sonlu elemanlar modelini iyileştirmiş ve piezoelektrik elemanların oluşturdukları kuvvetleri daha hassas şekilde hesaplayarak daha iyi sonuçlar elde etmişlerdir. Lam ve Ng [31] duyarga ve tahrik elemanı olarak piezoelektrik malzemeleri kullanarak kompozit bir plağın, başlangıç deplasmanına sahip olması, harmonik yüzey yüklemesi ve noktasal dalga yüklemesi durumlarında kapalı çevrim kontrol sistemi ile sayısal olarak kontrol edilmesi problemini irdelemişlerdir. Varadarajan, Chandrashakhera ve Agarwal [32] yaptıkları sayısal çalışmada katmanlı kompozit bir çubuğu LQG/LTR (Linear Quadratic Gaussian/Loop Transfer Recovery) robust kontrol sistem yaklaşımı ile kontrol etmişler ve çeşitli başlangıç şartları için kapalı çevrimli kontrol sistem performansını araştırmışlardır. Valoor, Chandrashakhera ve Agarwal [33] kompozit plakların piezoelektrik malzeme kullanarak titreşimlerinin sayısal olarak kontrolü için neuro-controller kullanmışlar ve etkili bir şekilde titreşim kontrolünü gerçekleştirdiklerini göstermişlerdir. Hwu ve arkadaşları [34] merkezkaç kuvvetinin de etkisinde bulunan kompozit sandviç çubukların zorlanmış titreşimlerinin analitik incelemesini yapmış, merkezkaç ivmesinin ve kayma şekil değişiminin gözönüne alınmasının titreşim frekanslarına ve mod şekillerine etkisinin önemini ortaya koymuşlardır. Hwu ve arkadaşları bu çalışmalarında durum gözleyicili optimal kontrol yöntemini kullanarak bir kenarından ankastre mesnetli kompozit sandviç çubukların ilk birkaç titreşim modundaki zorlanmış titreşimlerini kontrol etmişlerdir.

1.1.5 Anlık Basınç Yüküne Maruz Yapıların Titreşim Kontrolü

Literatürde bu konuyla ilgili yapılmış çalışma sayısı oldukça sınırlı kalmıştır. Librescu ve Na [35,36,37] tarafından yapılmış olan üç sayısal çalışma göze çarpmaktadır. İlk çalışmada ince cidarlı katmanlı kompozit çubukların patlama yükü (blast load-sonic boom) etkisi altında titreşimlerinin kapalı çevrim kontrol sistemi ile kontrolü incelenmektedir. İkinci çalışma, patlama yüküne (blast load) maruz, dış yük taşıyan kanat yapılarının kapalı çevrim kontrol kavramı kullanılarak titreşimlerin kontrol edilmesi üzerine yapılmış sayısal bir çalışmadır. Bu çalışmada kanat yapısı

bir çubuk olarak modellenmiş ve eyleyici olarak piezoelektrik malzemeler kullanılmıştır. Üçüncü çalışma ise ince cidarlı katmanlı kompozit bir çubuğun patlama yükü (blast load-sonic boom) etkisi altında titreşimlerinin kontrol edilmesi için kullanılan kapalı çevrim kontrol sisteminin optimizasyonu konusundadır.

1.2 Yapılan Çalışmanın Kapsamı

Literatürde katmanlı kompozit panellerin anlık basınç yüküne dinamik cevabının elde edilebilmesi için yapılan çalışmalar oldukça azdır. Bu konuda özellikle deneysel çalışmalar oldukça sınırlı kalmıştır. Böylece yapılan pek az sayıdaki çalışmanın analitik ya da sayısal olarak elde edilen sonuçlarının gerçekte ne kadar tutarlı olduğu da bilinmemektedir. Bu çalışmada diğer mühendislik uygulamalarında ve özellikle havacılıkta pek çok kullanım alanı olan katmanlı kompozit plak yapıların dinamik yükler altındaki davranışları sayısal olarak incelenmiştir. Yapıya etki eden yükler sonucunda oluşan titreşimlerin, gerek yapının kullanım ömrünü azaltarak yorulmaya neden olması gerekse yapı üzerinde hasarlara yol açması nedeniyle kısa sürede sönümlenmesine ihtiyaç duyulmaktadır. Son yıllarda titreşimlerin sönümlenmesi çalışmalarında piezoelektrik malzemeler yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu çalışmada anlık basınç yüküne maruz , bir kenarından ankastre olarak mesnetlenmiş katmanlı kompozit bir plağın dinamik davranışları incelenmiş, sonrasında oluşan titreşimler sayısal olarak kontrol edilerek sönümlenmiştir.

Çalışmanın birinci bölümünde literatür konusunda bir çalışma yapılmış olup ikinci bölümünde plağa etki eden anlık basınç yükü ile ilgili yapılmış bazı deneysel çalışmalardan bahsedilmiş ve anlık basınç yükü modeli için kullanılan yaklaşımlar kısaca anlatılmıştır. Anlık basınç yükü modelinde kullanılan ve zamanla azalan Friedlander üstel fonksiyonuna ait deneysel çalışmalardan elde edilen datalara göre değişim grafiği verilmiştir.

Üçüncü bölümde olayın semiloof kabuk sonlu eleman modeli anlatılmıştır. Olayın sonlu elemanlar modellemesi için piezoelektrik etkilerin gözönüne alındığı semiloof kabuk sonlu eleman modeli türetilmiştir. Piezoelektrik etkilerin ilave edildiği semiloof kabuk eleman modelinin türetilmesi için temel piezoelektrik özellikler anlatılmış ve sonlu eleman modeli için *Fortran* programlama dilinde hazırlanmış bir bilgisayar yazılımı kullanılmıştır.

Dördüncü bölümde sonlu eleman modeli oluşturulan yapının modern kontrol yöntemlerinde yaygın olarak tercih edilen durum denklemleri formunda ifade edilmesi ve serbestliklerin azaltılması için kullanılan mod toplama yöntemi anlatılmış, ardından yapısal sönümün ihmal edildiği problemin kararsızlık sınırında bulunmasından dolayı, sistemin kararlılığını garantilemek için optimal doğrusal regülatör yaklaşımından ve durum geri besleme kazanç matrisinin belirlenmesinden bahsedilmiştir. Plak modelinde yer alan piezoelektrik elemanların tamamı titreşimlerin aktif kontrolünde etkin olması için eyleyici olarak kullanıldığından belli noktalardaki deplasman değerleri ile sistemin tüm durumlarını iyi şekilde tahmin edecek bir durum gözleyicisine ait temel yaklaşımlar anlatılmıştır.

Beşinci bölümde sayılan uygulama için oluşturulan plak modellerinin sonlu eleman modelinin oluşturulmasının ardından elde edilen yapının statik ve dinamik analizleri yapılarak oluşturulan modelin literatürdeki bazı çalışmalarla ve *Ansys* yazılımı ile test edilmesi sağlanmıştır. Daha sonra yapıya ait sonlu eleman hareket denklemleri durum değişkenleri formunda ifade edilmeden önce (sonlu eleman modelinin serbestlik derecesi çok yüksek olduğundan) modelin serbestlik derecesinin indirgenmesini sağlayan mod toplama yöntemi kullanılmış ve ardından durum değişkenleri formunda indirgenmiş sisteme ait hareket denklemleri oluşturulmuştur. İndirgenmiş sistemin uygulanan anlık basınç yükünün etki süresi de dikkate alınarak dinamik analiz sonuçları ve statik analiz sonuçları hem tam matris sitemle hem de *Ansys* yazılımı sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Oluşan titreşimlerin kontrolünde durum gözleyicili bir kontrol sistemi tasarlanmış, geri besleme kazanç matrisi optimal doğrusal regülatör yaklaşımı ile ve sistemin tahmin edilen durumları kullanılarak belirlenmiştir. Kontrol çalışmaları için *Matlab-Simulink* yazılımından etkin olarak yararlanılmıştır.

Son bölümde elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

2 ANLIK BASINÇ YÜKÜ MODELİ

2.1 Giriş

Anlık basınç yükleri atmosferde şok veya patlama dalgası şeklinde ortaya çıkar. Şok veya patlama dalgası ise patlama kaynağından üretilen sıcak gazların çevresindeki atmosferi kuvvetli bir şekilde geri itmesiyle oluşmaktadır. Patlama dalgası şiddetine bağlı olarak yakın ve uzak çevresindeki yapılara değişik boyutlarda hasar verebilmektedir. Patlama yapının yakınında olduğunda basınç yapının üzerinde düzgün olmayan bir dağılım göstermektedir. Patlama kaynağından yeteri kadar uzakta ise yapı üzerindeki basınç dağılımı düzgün yayılı olarak kabul edilebilir hale gelmektedir.

2.2 Deneysel Çalışmalar

Patlamalar sonucunda ortaya çıkan anlık basınç yüklerinin yapısal analizine yönelik deneysel çalışmalardan olan Türkmen ve Mecitoğlu [38] birlikte yaptıkları çalışmalarında ve Türkmen [39-41] kendi yaptığı çalışmalarında katmanlı kompozit malzemelerin anlık basınç yüklerine cevabını incelemiş ve patlama kaynağından yeteri kadar uzakta basınç yükünün yapı üzerine zamana bağlı olarak şiddeti değişen düzgün yayılı yük formunda olduğunu göstermişlerdir. Patlama kaynağının yapıya yakın olduğu durumlarda ise basınç yükünün zamana bağlı değişim göstermesinin yanında yapı üzerinde konuma bağlı olarak değişen ve düzgün olmayan sinüzoidal bir dağılım gösterdiğini ortaya koymuşlardır. Jacinto ve arkadaşları [47] yaptıkları deneysel çalışmada patlayıcı kullanılarak oluşturulan patlama yükleri etkisi altındaki metal plakaların dinamik analizlerini gerçekleştirmişlerdir. Yaptıkları sayısal modellemede patlama yükü için deneyden elde ettikleri basınç yükünün zamana göre değişimi datalarını doğrudan kullanmışlar ancak teorik çalışmaları için anlık basınç yükünü üçgen dalga modeli şeklinde alarak basitleştirme yoluna gitmişlerdir. Jacob ve arkadaşları [48] ise yaptıkları deneysel çalışmalarında değişik kalınlıklardaki kenarlarından ankastre olarak mesnetli yumuşak çelik malzemeden yapılmış dörtgen plakların merkez noktalarına etkiyen ve yüzeylerine çok yakın olarak (1.8-14 mm)

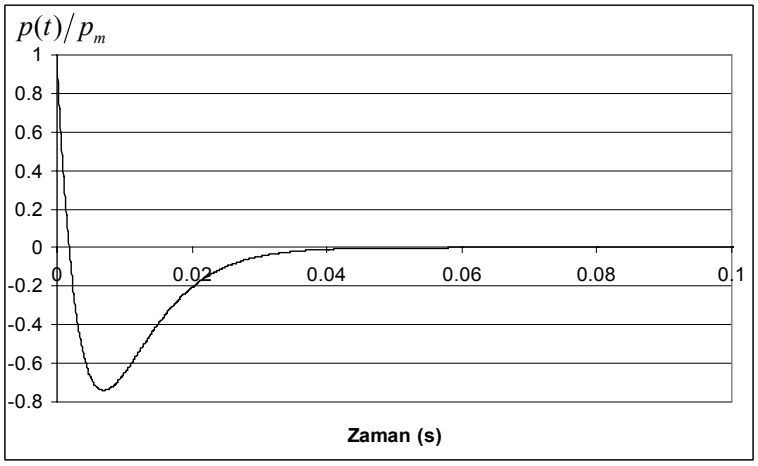
meydana gelen lokalize edilmiş patlamaların etkilerini incelemişlerdir. Benzer çalışmanın değişik özelliklerde takviyeler içeren plaklar için olanını önce üniform patlama yükü etkileri için Yuen ve Nurick [49], sonra lokalize edilmiş patlama yüküne etkileri için Langdon, Yuen ve Nurick [50] incelemişler ve elde ettikleri deneysel sonuçları *Abaqus* yazılımı sonuçları ile karşılaştırmışlardır.

2.3 Basınç Fonksiyonları

Patlama kaynağından yeteri kadar uzakta düzgün dağılım gösteren basınç yükünün zamana göre değişimi modeli için literatürde yapılan pek çok çalışma mevcut olup bu çalışmaların bazılarında

$$p(t) = p_m(1 - t/t_p)e^{-\alpha t/t_p} \tag{2.1}$$

ifadesi ile verilen zamanla üstel olarak azalan Friedlander basınç fonksiyonu kullanılmıştır [14,24,25,51,52,53]. Burada p_m basıncın zaman içindeki maksimum değeri, t_p basıncın etki süresini, α basınç dalga formu parametresini göstermektedir. Türkmen ve Mecitoğlu [24,25] deneysel çalışmalarında patlama kaynağından 100 cm uzakta bulunan bir panele etkiyen anlık basınç yükünün 22x22 cm boyutlarındaki kare bir plak için üniform olarak kabul edilebileceğini ve (2.1) ile verilen anlık basınç yükü fonksiyonu için basınç yükü parametrelerinin p_m=28906 *Pa*, t_p=0.0018 *s* ve α=0.35 şeklinde olduğunu göstermişlerdir. Verilen parametrelere göre boyutsuz anlık basınç yükü, $p(t)/p_m$ oranının zamana bağlı değişimi Şekil 2.1'de gösterilmiştir.

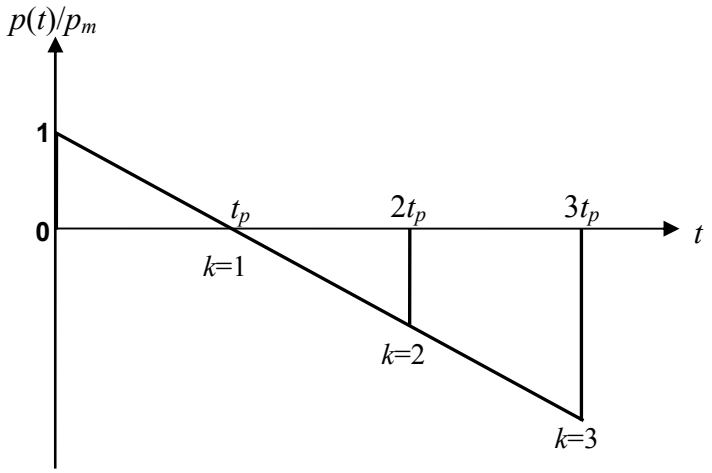


Şekil 2.1: Boyutsuz anlık basınç yükünün zamana bağlı değişimi.

Anlık basınç yükü ile ilgili bazı çalışmalarda patlama basınç yükünün basitleştirilerek

$$p(t)=\begin{cases} p_m(1-t/t_p) & ;\ 0<t<kt_p \\ 0 & ;\ t<0 \ \text{ve}\ t>kt_p \end{cases} \tag{2.2}$$

şeklinde eşdeğer üçgen dalga formunda alındığı göze çarpmaktadır [54-58]. Denklem (2.2) ifadesinde yer alan k katsayısı eşdeğer üçgen anlık basınç yükünün uzunluk etkisini göstermektedir. Şekil 2.2'de görüldüğü gibi k=1 durumu pozitif tam üçgen basınç yükünü ifade ederken k=2 ve k=3 durumları sırayla simetrik ve simetrik olmayan basınç yüklerini temsil etmektedir [58]. Böylece anlık basınç yükü modelinin negatif basınç etkisi de bu yaklaşımda modellenmeye çalışılmıştır.



Şekil 2.2: Anlık basınç yükü için eşdeğer üçgen dalga formu yaklaşımı.

3 AKTİF SEMİLOOF KABUK ELEMAN

3.1 Genel Konular

Karşılaşılan mühendislik problemlerinin hemen hemen tamamında gerek malzeme açısından gerekse problemin geometrisi açısından lineer olmama durumu mevcuttur. Bu durum problemlerin matematiksel olarak modellenmesinde büyük zorluklar oluşturur. Bu zorlukları aşmak için basitleştirici bazı kabuller yapılabilir. En çok yapılan kabul hem malzeme hem de geometrik olarak problemin lineer olduğu kabulüdür. Bu durumda yapıyı modellemede kullanılan matematiksel denklemler klasik lineer elastisite denklemleri olup şekil değiştirmeler, yer değiştirmeler ve dönmeler küçük kabul edilir.

Kabuk yapılara ait problemlerde yapılan kabullerden biri de kabuğun kalınlığı ile diğer boyutları arasındaki oranın belli bir değerin altında kalması halinde yapılan ince kabuk kabulüdür. Kabuk kalınlığı kabuğun en, boy ve eğrilik yarıçapı gibi diğer boyutları yanında onda bir veya daha düşük bir oranda küçük ise bu tip kabuklara ince kabuklar denir ve kabuğun ince kabul edilmesi kabuk denklemlerinin çıkarılmasında bazı basitleştirme kabullerine imkan tanımaktadır. İnce kabuk yaklaşımının kullanılması halinde düzlem içi yanlamasına normal gerilmeler ihmal edilebilir. Buna ilave olarak kabuğun orta düzleminin normalinin deformasyon sırasında yüzeye dik kaldığı ve normal doğrultudaki birim vektörün büyüklüğünün değişmediği yani orta düzlemin normali doğrultusundaki şekil değiştirmeların ihmal edilebileceği kabul edilir.

Problemin matematiksel modelinin oluşturulması ve çözümün elde edilmesinde kolaylık sağlayan bir diğer durum da malzemenin elastik davranış göstermesidir. Hava ve uzay yapılarında oldukça sık olarak karşımıza çıkan kabuk yapılar yüzeysel basınç yükleri, çizgisel basınç yükleri, tekil yükler ve atalet yükleri gibi zorlamalar etkisinde kalabilmektedir. Yapılara etkiyen bu tür yüklerin ortadan kalkmasından sonra yük etkisi sırasında oluşan yer değiştirmeler sıfır değerini alarak yapı tekrar başlangıçtaki yüksüz durumuna geri dönüyorsa yapıyı oluşturan malzemenin bu davranışı elastik davranış olarak adlandırılır.

3.2 Kabuk Eleman Serbestlik Dereceleri

İnce kabukların sonlu elemanlar analizleri günümüze kadar büyük gelişmeler göstermiştir ve ince kabukların analizleri için yeni sonlu elemanlar yöntemleri geliştirilmiştir. Bu yöntemler arasında Irons [59] tarafından geliştirilen semiloof eleman, formülasyonu ve performansı ile ayrı bir yere sahiptir. Semiloof eleman, izoparametrik elemanlarla –Ergatoudis [60]– membran ve istif edilmiş membran elemanların –Ahmad [61]– zaman içinde geliştirilmesi sonucunda ortaya çıkmıştır. Eğilme etkisini de içeren bu elemanlar, rijit düz çizgi gibi davranan kenarlarda, 3 yer değiştirme ve 2 dönme içeren düğüm noktalarına sahip katı elemanlardan türetilerek elde edilmiştir. Elemanı ekonomik ve ince kabuklar için daha elverişli hale getiren daha gelişmiş bir model, –Zienkiewicz [62]– integrasyon indirgenme tekniği kullanılarak elde edilmiştir. Bu elemanın üstün performansı, görevini tam olarak yerine getiremeyen birinci elemanın kullanımını kaldırmıştır. Bu eleman –Irons [63] ve Baldwin [64]– istenmeyen değişkenleri elimine etmek için ayrık (discrete) Kirchhoff kayma kabullerini kullanmaktadır. Zira başlangıçta

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{xx} = z u_{xz} && ; \quad \gamma_{xz} = u_z + w_x \\ &\varepsilon_{yy} = z v_{yz} && ; \quad \gamma_{yz} = v_z + w_y \\ &\gamma_{xy} = z\left(u_{yz} + v_{xz}\right) \end{aligned} \tag{3.1}$$

şeklindeki şekil değiştirme–yer değiştirme denklemlerinden hareket edilmektedir. Daha sonra Kirchhoff hipotezi ayrık noktalarda sayısal olarak sağlatılmaktadır. Semiloof kabuk elemanda istenmeyen değişkenler elimine edilirken benzer yöntemler kullanılır. Ancak ayrık olmayan (non-discrete) kısıtlarının sonucu olarak kısıt denklemleri çok karmaşıktır. Elemanın sayısal formülasyonu nispeten karışık olmasına rağmen, üstün performansı bu dezavantajını kapatmaktadır.

Semiloof eleman, sonlu eleman modellemelerinde başarılı olarak kullanılan bir çalışma elemanı olup bu tipteki diğer elemanlara önderlik yapmaktadır. Çok bağlantılı ve köşeli kabuklarda, dönme problemlerini halletmek için, semiloof eleman birçok kullanıcı tarafından kullanılmıştır. Son yıllarda semiloof eleman kullanılarak yapılan bazı çalışmaları [38-46] arasında yer almaktadır. Semiloof elemanın dezavantajı aşırı karmaşık olan teorisidir [59]. Kararlılık ve titreşim problemlerinin çözümüne yönelik lineer elastik çalışmaların sonuçları Albuquerque [67] , Martins [68] , Martins ve Owen [69] tarafından yayınlanmıştır. Owen ve Dinis

[70] dinamik analizlerde bazı sonuçlar elde etmişlerdir. Mecitoğlu [71,72] takviyeli dairesel silindirik kabuk yapıların serbest titreşimlerini semiloof eleman kullanarak incelemiştir. İlk olarak Irons [59] tarafından tanımlanan semiloof kabuk elemanın önemli bazı özellikleri aşağıdaki gibi sıralanabilir :

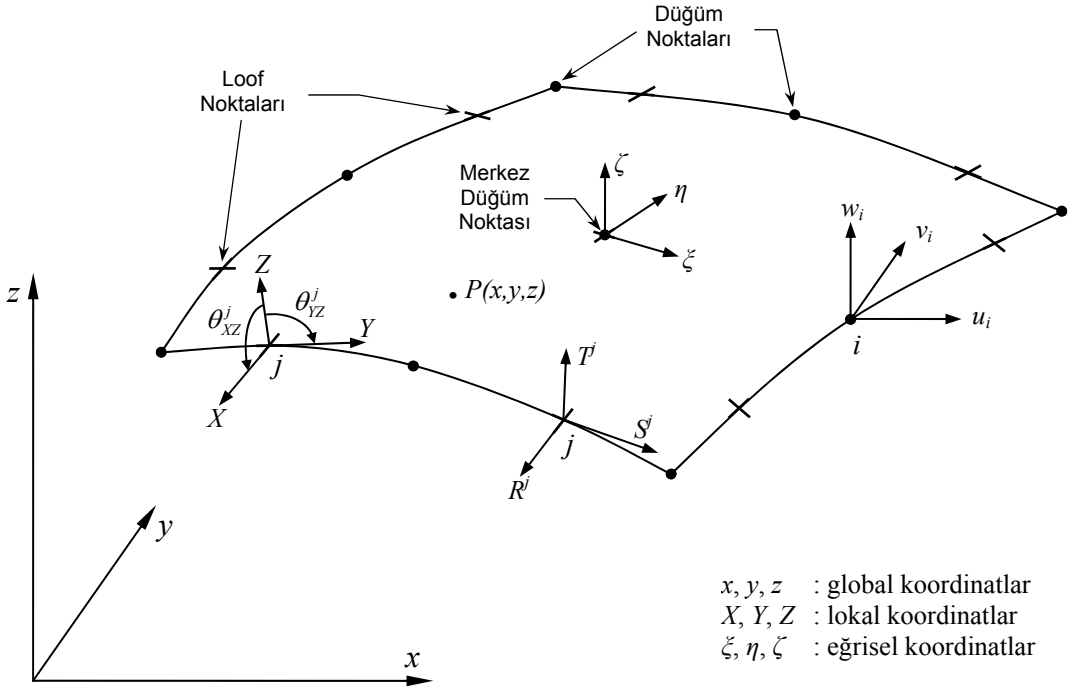
−Eleman bilinen izoparametrik 8 düğüm noktalı parabolik model olarak kullanılabilir.

−C^1 sürekliliğinin bazı ölçüleri, eleman çevresindeki Loof noktalarındaki normal dönme değişkenlerinin tanımlanması ile sağlanır.

−İnce kabuklar için geçerlidir.

−Süreksiz kalınlığa, keskin köşelere veya çok bağlantılılığa izin verir.

Şekil 3.1'de semiloof kabuk eleman görülmektedir. Burada x, y, z global koordinatları, X, Y, Z lokal koordinatları ve ξ, η, ζ ise eğrisel koordinatları göstermektedir.



Şekil 3.1: Semiloof kabuk eleman

Yukarıdaki şekilden de görüleceği üzere semiloof eleman için 3 değişik tipte düğüm noktası vardır:

- Köşe ve kenar orta düğüm noktaları: Global yer değiştirme vektörünün üç eksen doğrultusundaki bileşenleri düğüm noktası parametreleri olarak alınır.

- Loof düğüm noktaları: Bu düğüm noktaları Gaussian quadratik noktalarında yer alırlar. Düğüm noktası parametreleri sadece iki yönde θ_{XZ}, θ_{YZ} dönmeleridir.
- Merkez düğüm noktası: Lokal yer değiştirme vektörünün üç bileşeni ve eğrisel ξ ve η koordinatlarındaki 2 dönme düğüm noktası parametreleri olarak alınır.

Köşe ve kenar orta noktalarında 3 serbestlik derecesi, loof noktalarında 2 serbestlik derecesi, merkez düğüm noktasında 5 serbestlik derecesi olup bir eleman toplam 45 serbestlik derecesine sahiptir. Serbestlik derecesi sayısı kayma kısıtları uygulanarak 32'ye indirgenmektedir.

3.3 Şekil Fonksiyonları

Yukarıda açıklandığı gibi semiloof kabuk sonlu eleman, köşelerde 4, kenar ortalarında 4, loof noktalarında 8 ve merkezde bulunan 1 düğüm noktası ile toplam 17 düğüm noktasına sahiptir. Bu düğüm noktalarının her birinde ayrı bir şekil fonksiyonu tanımlıdır. Semiloof elemanın şekil fonksiyonları köşelerdeki düğüm noktalarında

$$N_i = \frac{1}{4}\left(1+\xi_0\right)\left(1+\eta_0\right)\left(\xi_0+\eta_0-1\right) \tag{3.2}$$

kenar ortalarındaki düğüm noktalarında

$$\begin{aligned} N_i &= \left(1-\xi^2\right)\left(1+\eta_0\right) \quad ; \ \xi_i = 0 \\ N_i &= \left(1-\eta^2\right)\left(1+\xi_0\right) \quad ; \ \eta_i = 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

merkezdeki düğüm noktasında

$$N_c = \left(1-\xi^2\right)\left(1-\eta^2\right) \tag{3.4}$$

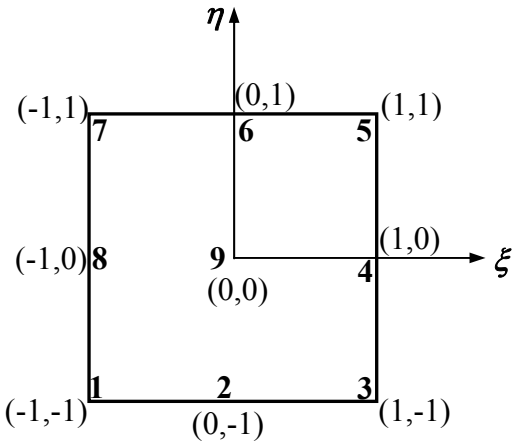
ve loof noktalarında

$$\begin{aligned} L_i &= \frac{3}{32}\left(3\xi^2-\eta^2\right)+\frac{1}{8}\left[3\xi_0\left(1-\eta^2\right)+3\eta_0\left\{3\xi^2+\xi_0-1+\frac{3}{2}\xi_0\left(\xi^2-\eta^2\right)\right\}\right] ; \xi_i = \pm 1 \\ L_i &= \frac{3}{32}\left(3\eta^2-\xi^2\right)+\frac{1}{8}\left[3\eta_0\left(1-\xi^2\right)+3\xi_0\left\{3\eta^2+\eta_0-1+\frac{3}{2}\eta_0\left(\eta^2-\xi^2\right)\right\}\right] ; \eta_i = \pm 1 \end{aligned} \tag{3.5}$$

şeklindedir. Burada

$$\xi_0 = \xi\xi_i \quad ; \qquad \eta_0 = \eta\eta_i \tag{3.6}$$

ile tanımlıdır. Şekil 3.2'de semiloof kabuk elemanının düğüm noktalarındaki ξ, η eğrisel koordinatları verilmiştir.



Şekil 3.2: Semiloof elemanın düğüm noktalarında ξ ve η eğrisel koordinatları

3.4 Eleman Formülasyonu

Şekil 3.1 de verilmiş olduğu gibi bir semiloof elemanda herhangi bir *P(x,y,z)* noktasındaki **X** ve **Y** lokal koordinat vektörleri için türevler kullanılarak ξ ve η eğrisel koordinatlarına bağlı olmak üzere aşağıdaki tanımlamalar yazılabilir.

$$\mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \xi} \quad ; \quad \mathbf{Z} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \eta} \tag{3.7}$$

Y koordinat vektörü diğer iki koordinat vektörünün oluşturacağı düzleme dik olacağından dolayı

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} \times \mathbf{Z} \tag{3.8}$$

ifadesini yazmak mümkündür. $\boldsymbol{\delta}_L$ lokal yer değiştirmelerinin global koordinatlardaki yer değiştirme vektörü $\boldsymbol{\delta}_G$'ye ve eleman düğüm noktası yer değiştirmeleri vektörü $\mathbf{q}^e$'ye bağlı olarak

$$\begin{aligned} U &= \mathbf{X}^T \boldsymbol{\delta}_G = \mathbf{X}^T \mathbf{N} \mathbf{q}^e \\ V &= \mathbf{Y}^T \boldsymbol{\delta}_G = \mathbf{Y}^T \mathbf{N} \mathbf{q}^e \\ W &= \mathbf{Z}^T \boldsymbol{\delta}_G = \mathbf{Z}^T \mathbf{N} \mathbf{q}^e \end{aligned} \tag{3.9}$$

ile ifade edilir. Burada global ve lokal koordinatlardaki yer değiştirme vektörleri

$$\boldsymbol{\delta}_G = \begin{Bmatrix} u(x,y,z,\tau) \\ v(x,y,z,\tau) \\ w(x,y,z,\tau) \end{Bmatrix} \;\; ; \;\; \boldsymbol{\delta}_L = \begin{Bmatrix} U(X,Y,Z,\tau) \\ V(X,Y,Z,\tau) \\ W(X,Y,Z,\tau) \end{Bmatrix} \tag{3.10}$$

şeklinde tanımlıdır. *U*, *V*, *W* terimleri lokal koordinatlardaki yer değiştirme bileşenleridir. (3.9) denklemlerindeki **N** matrisi (3.2)-(3.6) ifadelerinde verilmiş olan semiloof elemana ait şekil fonksiyonları matrisidir. Düzlem içi türevler lokal yer değiştirmelerin global koordinatlara göre birinci türevleri (3.9) denklemleri kullanılarak

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \mathbf{X}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \mathbf{q}^e \tag{3.11}$$

şeklinde ifade edilir.

Düzlem dışı türevleri elde etmek için, hem yer değiştirmelerden gelen hem de dönmelerden gelen ifadeler kullanılmalıdır. $\frac{\partial U}{\partial Z}$ gibi düzlem dışı türevlere iki türlü katkı vardır. $\mathbf{q}^e$ yer değişimlerinden gelen kısım

$$\left(\frac{\partial U}{\partial Z}\right)^N = -\frac{1}{t}\left[T_X \mathbf{X}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial X} + T_Y \mathbf{X}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial Y} \right] \mathbf{q}^e \tag{3.12}$$

şeklindedir ve $\boldsymbol{\theta}^e_{XZ}$ ve $\boldsymbol{\theta}^e_{YZ}$ dönmelerinden gelen kısım

$$\left(\frac{\partial U}{\partial Z}\right)^L = \frac{1}{t}\left[\mathbf{X}^T \bar{\mathbf{R}} \mathbf{L} \boldsymbol{\theta}^e_{XZ} + \mathbf{X}^T \bar{\mathbf{S}} \mathbf{L} \boldsymbol{\theta}^e_{YZ} \right] \tag{3.13}$$

ile ifade edilir. Burada *t* skaler kalınlık, T_X ve T_Y ise

$$\mathbf{T}_j = t_j \mathbf{Z}_j \tag{3.14}$$

şeklinde bir düğüm noktasında tanımlanan kalınlık vektörünün bileşenleridir. Bu denklemlerdeki $\bar{\mathbf{R}}$ dönme vektörüdür ve herhangi bir *j* düğüm noktasında

$$\bar{\mathbf{R}}_j = \mathbf{T}_j \times \mathbf{Y}_j \tag{3.15}$$

şeklinde tanımlıdır. Eğim vektörü ise

$$\bar{\mathbf{S}}_j = t_j \mathbf{Y}_j \tag{3.16}$$

şeklinde ifade edilir. Bu denklemlerdeki t_j herhangi bir j düğüm noktasındaki skaler kalınlığı simgelemektedir. Aynı şekilde $\frac{\partial V}{\partial Z}$ için de benzer ifadeler yazılabilir. Elemanın eğilme davranışı incelenecek olursa,

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial Y \partial Z}\right) = \frac{1}{t}\left[-\frac{\partial T_X}{\partial Y}\mathbf{X}^T\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial X} - \frac{\partial T_Y}{\partial Y}\mathbf{X}^T\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial Y} + \frac{\partial T_Z}{\partial Y}\mathbf{Z}^T\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial X}\right]\mathbf{q}^e + \frac{1}{t}\left[\mathbf{X}^T\bar{\mathbf{R}}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial Y}\boldsymbol{\theta}^e_{XZ} + \mathbf{X}^T\bar{\mathbf{S}}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial Y}\boldsymbol{\theta}^e_{YZ}\right] \tag{3.17}$$

şeklinde ifade edilebileceği görülür [71]. Aynı şekilde $\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Z}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Z}$ ve $\frac{\partial^2 V}{\partial Y \partial Z}$ için de benzer ifadeler elde edilebilir.

Katılık ve kütle matrislerinin belirlenmesi için lokal yer değiştirme ifadelerinin türevlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu ifadeler

$$\mathbf{G} = \left\{U, V, W, \frac{\partial U}{\partial X}, \frac{\partial U}{\partial Y}, \frac{\partial V}{\partial X}, \frac{\partial V}{\partial Y}, \frac{\partial U}{\partial Z}, \frac{\partial V}{\partial Z}, \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Z}, \frac{\partial^2 U}{\partial Y \partial Z}, \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Z}, \frac{\partial^2 V}{\partial Y \partial Z}\right\}^T \tag{3.18}$$

şeklindeki gibi bir vektörde toparlanabilir. γ_{XZ} ve γ_{YZ} ifadeleri ise

$$\gamma_{XZ} = \frac{\partial W}{\partial X} + \frac{1}{t}(\boldsymbol{\Delta}\cdot\mathbf{X}) - \frac{1}{t}\left[\frac{\partial U}{\partial X}R + \frac{\partial U}{\partial Y}S\right]$$
$$\gamma_{YZ} = \frac{\partial W}{\partial Y} + \frac{1}{t}(\boldsymbol{\Delta}\cdot\mathbf{Y}) - \frac{1}{t}\left[\frac{\partial V}{\partial X}R + \frac{\partial V}{\partial Y}S\right] \tag{3.19}$$

şeklindedir.

3.4.1.1 Kayma Kısıtlarının Uygulanması

Sadece normal bir sapma elde etmek için, merkezde yer değiştirmeleri birleştirilerek 2 düzlemiçi yer değiştirme elimine edilerek 45 olan serbestlik derecesi 43'e indirgenmiş olur. Kirchhoff hipotezi ile aşağıdaki kayma kısıtları uygulanırsa serbestlik derecesi 32'ye indirgenmektedir. Loof noktalarında

$$\gamma_{YZ} = 0 \tag{3.20}$$

alınarak 8 serbestlik derecesi elimine edilmektedir. Merkez noktasında

$$\int_A \mathbf{X}_c \boldsymbol{\gamma} dA = \int_A \mathbf{Y}_c \boldsymbol{\gamma} dA = 0 \tag{3.21}$$

alınarak 2 serbestlik derecesi elimine edilmektedir. Burada yan kayma vektörleri

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{X}\gamma_{XZ} + \mathbf{Y}\gamma_{YZ} \tag{3.22}$$

şeklinde tanımlıdır. $\mathbf{X}_c$ ve $\mathbf{Y}_c$ merkez düğüm noktasındaki birim vektörlerdir.

$$\int_{\text{kalınlık}} \gamma_{XZ}\,\mathrm{d}(sınır)=0 \tag{3.23}$$

alınarak bir serbestlik derecesi daha elimine edilmektedir. Böylece toplam 11 serbestlik derecesi elimine edilerek serbestlik derecesi 32'ye indirilmektedir.

3.5 Piezoelektrik Etkiler

Piezoelektrik elemanlar elektrik enerjisi ve mekanik enerji arasında dönüşümü gerçekleştiren ve simetrik olmayan kristal yapılara sahiptir. Lineer piezoelektrik özelliklere sahip malzemeler için elektromekanik etkileşimleri içeren temel denklemler

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{c}_E\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e}^T\mathbf{E} \\ \mathbf{D} &= \mathbf{e}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}_S\mathbf{E} \end{aligned} \tag{3.24}$$

veya

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{s}_E\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{d}^T\mathbf{E} \\ \mathbf{D} &= \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}_T\mathbf{E} \end{aligned} \tag{3.25}$$

ifadeleriyle verilmektedir [73]. Bu eşitliklerde yer alan $\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_{xx}\ \sigma_{yy}\ \sigma_{zz}\ \sigma_{yz}\ \sigma_{xz}\ \sigma_{xy}\}^T$ şeklinde olup gerilme vektörünü, $\boldsymbol{\varepsilon}=\{\varepsilon_{xx}\ \varepsilon_{yy}\ \varepsilon_{zz}\ \varepsilon_{yz}\ \varepsilon_{xz}\ \varepsilon_{xy}\}^T$ birim şekil değiştirme vektörünü, $\mathbf{E}=\{E_x\ E_y\ E_z\}^T$ şeklinde elektrik alan vektörünü, $\mathbf{D}=\{D_x\ D_y\ D_z\}^T$ olarak elektrik yer değiştirme vektörünü, $\mathbf{c}_E$ ve $\mathbf{s}_E$ terimleri sabit elektrik alan için 6x6 boyutunda elastisite matrisini, $\boldsymbol{\varepsilon}_S$ ve $\boldsymbol{\varepsilon}_T$ matrisleri sırayla sabit mekanik birim uzama ve sabit gerilme için 3x3 boyutunda dielektrik matrislerini, **e** ve **d** matrisleri 3x6 boyutunda piezoelektrik sabitler matrislerini ifade etmektedir. (3.24) ve (3.25) denklemlerindeki ilk eşitlikler piezoelektrik elemanın eyleyiciliğini (actuation), ikinci eşitlikler ise piezoelektrik elemanın algılayıcılığını (sensing) temsil etmektedir ve bu denklemlerden piezoelektrik sabitlerden oluşan **e** ve **d** matrisleri arasında

$$\mathbf{e} = \mathbf{d}\mathbf{c}_E \tag{3.26}$$

bağıntısının bulunduğu gösterilebilir. Genel olarak piezoelektrik bir eleman için **d** piezoelektrik sabitler matrisi

$$\mathbf{d}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} ; \ (d_{32}=d_{31}) \\ ; \ (d_{24}=d_{15}) \end{matrix} \tag{3.27}$$

şeklinde verilmektedir [73]. Sadece panelin kalınlığı boyunca, panel orta düzlemine dik doğrultuda etkiyen üniform elektrik alan veya elektrik yer değiştirmenin bulunması durumunda

$$\mathbf{E}=\{\,0 \quad 0 \quad E_z\}^T \ ; \ \mathbf{D}=\{\,0 \quad 0 \quad D_z\}^T \tag{3.28}$$

olacaktır. Kirchoff hipotezi gereği $\gamma_{yz}=\gamma_{xz}=0$ olmak üzere orta düzlemden z mesafesi uzaklığında oluşan deformasyonlar, orta düzlemin $\mathbf{S}_0$ deformasyonuna ve orta düzlemin $\boldsymbol{\kappa}$ eğriliğine

$$\mathbf{S}_p=\mathbf{S}_0+z\boldsymbol{\kappa} \tag{3.29}$$

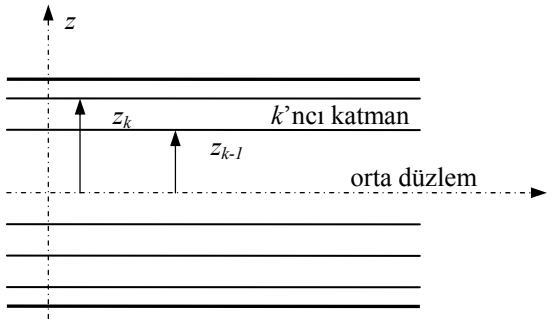
şeklinde bağlıdır. Burada $\mathbf{S}_p=\{\varepsilon_{xx}\ \varepsilon_{yy}\ \varepsilon_{xy}\}^T$ olup iki boyutlu birim şekil değişimlerini ifade etmektedir. Şekil 3.3'te görülen çok katmanlı bir yapıda piezoelektrik herhangi bir k'ncı katman için, bu katmana z doğrultusunda uygulanan üniform elektrik alanı E_k olmak üzere (3.24) denklemi (3.26) ve (3.27) ifadeleri gözönüne alınarak

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_k &= \mathbf{c}_{Ek}\boldsymbol{\varepsilon}_k-\begin{Bmatrix} e_{31} \\ e_{32} \\ 0 \end{Bmatrix}_k E_k \\ \mathbf{D}_k &= \{e_{31} \quad e_{32} \quad 0\}_k\boldsymbol{\varepsilon}_k+\boldsymbol{\varepsilon}_{Sk}E_k \end{aligned} \tag{3.30}$$

eşitlikleri bulunabilir. Bu ifadede geçen $\mathbf{c}_{Ek}$ ilgili katmanın elastisite matrisidir. Katmanda ortaya çıkan $\boldsymbol{\sigma}_k$ gerilmelerinin katman kenarlarında ve o katmanın orta yüzeyi üzerinde oluşturacağı $\mathbf{N}_k$ normal kuvvetleri ve bu kuvvetlerin katmanlı yapının orta düzleminde meydana getireceği $\mathbf{M}_k$ momentleri

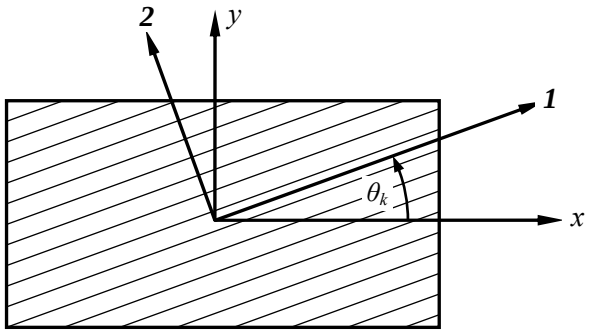
$$\mathbf{N}_k=\int_{-\frac{h_k}{2}}^{\frac{h_k}{2}}\boldsymbol{\sigma}_k dz \quad ; \quad \mathbf{M}_k=\int_{-\frac{h_k}{2}}^{\frac{h_k}{2}}\boldsymbol{\sigma}_k z dz \tag{3.31}$$

ifadeleriyle hesaplanır.



Şekil 3.3: Çok katmanlı yapı

Kuvvet ve moment hesapları yapılırken Şekil 3.4'te görüldüğü üzere ilgili katmanın doğrultusunu da dikkate almak gerekir.



Şekil 3.4: Global ve katman koordinat eksen takımları

Bu durumda katman doğrultusundaki gerilmeler ile global koordinatlardaki $\overline{\boldsymbol{\sigma}}_k$ gerilmeleri arasında

$$\boldsymbol{\sigma}_k = \mathbf{R}_{Tk}\overline{\boldsymbol{\sigma}}_k \tag{3.32}$$

bağıntısı bulunmaktadır. Bu eşitlikteki $\mathbf{R}_{Tk}$ matrisi

$$\mathbf{R}_{Tk} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta_k & \sin^2\theta_k & 2\sin\theta_k\cos\theta_k \\ \sin^2\theta_k & \cos^2\theta_k & -2\sin\theta_k\cos\theta_k \\ -\sin\theta_k\cos\theta_k & \sin\theta_k\cos\theta_k & \cos^2\theta_k - \sin^2\theta_k \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

şeklinde k'ncı katman için lokal koordinat sistemindeki gerilmelerin katman doğrultusuna bağlı olarak global eksen takımına dönüşüm matrisidir. Benzer şekilde katman doğrultusundaki şekil değiştirmelerle global eksen takımındaki $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$ şekil değiştirme değerleri arasında

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k = \mathbf{R}_{Sk}\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_k \tag{3.34}$$

bağıntısını yazmak mümkündür. Bu ifadedeki $\mathbf{R}_{Sk}$ matrisi de k'ncı katman için

$$\mathbf{R}_{Sk} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta_k & \sin^2\theta_k & \sin\theta_k\cos\theta_k \\ \sin^2\theta_k & \cos^2\theta_k & -\sin\theta_k\cos\theta_k \\ -2\sin\theta_k\cos\theta_k & 2\sin\theta_k\cos\theta_k & \cos^2\theta_k - \sin^2\theta_k \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

şeklinde şekil değiştirmelerin lokal koordinat sisteminden global eksen takımına dönüşüm matrisidir. Gerilme dönüşüm ifadesi olan (3.32) eşitliğini

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_k = \mathbf{R}_{Tk}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_k \tag{3.36}$$

olarak ta yazmak mümkündür. Piezoelektrik özelliğe sahip olmayan bir katman için $\boldsymbol{\sigma}_k = \mathbf{c}_{Ek}\boldsymbol{\varepsilon}_k$ olduğu dikkate alınarak ve (3.34) denklemi de bu ifadede kullanılarak

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_k = \mathbf{R}_{Tk}^{-1}\mathbf{c}_{Ek}\mathbf{R}_{Sk}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_k \tag{3.37}$$

eşitliği elde edilir. İlgili k'ncı katman için katmanın katılık matrisinin global eksen takımındaki dönüştürülmüş değeri olarak

$$\bar{\mathbf{Q}}_k = \mathbf{R}_{Tk}^{-1}\mathbf{c}_{Ek}\mathbf{R}_{Sk} \tag{3.38}$$

tanımlamasını yapmak mümkündür. Piezoelektrik özelliklere sahip bir katman için ise (3.30) denklemlerinin birincisinde verilen gerilme ifadesinin global eksen takımına (3.36) ile dönüşümünden

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_k = \mathbf{R}_{Tk}^{-1}\mathbf{c}_{Ek}\mathbf{R}_{Sk}\mathbf{S}_p - \mathbf{R}_{Tk}^{-1}\begin{Bmatrix} e_{31} \\ e_{32} \\ 0 \end{Bmatrix}_k E_k \tag{3.39}$$

eşitliği elde edilir. Piezoelektrik katmanın kalınlığı $h_k=z_k-z_{k-1}$ boyunca elektrik alanın üniform olmasından dolayı, ϕ_k ilgili katmanın yüzeyleri arasındaki potansiyel farkı olmak üzere bu elektrik alan ifadesi $E_k=\phi_k/h_k$ şeklinde olacaktır. n adet katmandan oluşan ve içinde piezoelektrik özelliklere sahip katmanlar bulunduran bir yapıda bu piezoelektrik aktif katmanlara uygulanan potansiyel farklarının oluşturduğu kuvvet ve momentlerin, yapının orta düzlemine indirgenerek toplanmasıyla yapı içinde yer alan tüm piezoelektrik katmanların oluşturduğu $\bar{\mathbf{N}}$ normal kuvvetleri ve $\bar{\mathbf{M}}$ eğilme momentlerinin değerleri

$$\begin{Bmatrix}\bar{\mathbf{N}}\\ \bar{\mathbf{M}}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{A}} & \bar{\mathbf{B}}\\ \bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{D}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{S}_0\\ \boldsymbol{\kappa}\end{Bmatrix}-\sum_{k=1}^{n}\begin{bmatrix}\mathbf{I}_3\\ z_{mk}\mathbf{I}_3\end{bmatrix}\mathbf{R}_{Tk}^{-1}\begin{Bmatrix}e_{31}\\ e_{32}\\ 0\end{Bmatrix}_k\phi_k$$
$$\mathbf{D}_k=\begin{Bmatrix}e_{31} & e_{32} & 0\end{Bmatrix}_k\mathbf{R}_{Sk}\begin{bmatrix}\mathbf{I}_3 & z_{mk}\mathbf{I}_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{S}_0\\ \boldsymbol{\kappa}\end{Bmatrix}+\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{Sk}}{h_k}\phi_k \tag{3.40}$$

şeklinde elde edilir. Bu eşitliklerde yer alan z_{mk} ifadesi

$$z_{mk}=\frac{z_k+z_{k-1}}{2} \tag{3.41}$$

şeklinde k'ncı katmanın orta yüzeyinin plağın orta düzleminden olan uzaklığıdır. $\mathbf{I}_3$ matrisi 3x3 boyutunda birim matris olup eşitliğin sağ tarafındaki ilk terim içerisinde yer alan ifadeler katmanlı kompozit bir yapı için klasik katılık matrisini oluşturan terimleri içerir. $\bar{\mathbf{A}}$ uzama katılık matrisi, $\bar{\mathbf{D}}$ eğilme katılık matrisi ve $\bar{\mathbf{B}}$ ise uzama ve eğilme etkileşimini ifade eden matris olup

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{A}}&=\sum_k\bar{\mathbf{Q}}_k(z_k-z_{k-1})\\ \bar{\mathbf{B}}&=\frac{1}{2}\sum_k\bar{\mathbf{Q}}_k(z_k^2-z_{k-1}^2)\\ \bar{\mathbf{D}}&=\frac{1}{3}\sum_k\bar{\mathbf{Q}}_k(z_k^3-z_{k-1}^3)\end{aligned} \tag{3.42}$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Ortaya çıkan ve (3.40) denklemleri ile hesaplanan normal kuvvet ve momentler semiloof elemanın şekil fonksiyonları kullanılarak eleman düğüm noktalarındaki serbestlikler doğrultusunda dağıtılabilmektedir.

Irons [59,63] tarafından geliştirilmiş olan 8 düğüm noktalı ve 32 serbestlik derecesine sahip semiloof kabuk elemanlar için Seeger, Köppe ve Gabbert [74] aktif olarak kullanılabilecek çeşitli elemanlar önermişlerdir. Bunlardan S1 elemanı olarak adlandırılan sonlu eleman yaklaşımına göre yapıdaki piezoelektrik elemanlarda elektromekanik etkileşim (coupling) bulunmayıp orijinal semiloof kabuk sonlu eleman katılık ve kütle matrisleri değişmeden kalır. Aktif katmanlara uygulanan potansiyel farkı yani elektrik alan tarafından oluşturulan normal kuvvet ve momentler, dinamik denge denklemlerinde eşitliğin diğer tarafında yapıya etkiyen kuvvetler vektörü olarak yer alır.

4 TİTREŞİM KONTROLÜ

4.1 Giriş

Plakların piezoelektrik elemanlar kullanılarak titreşimlerinin aktif olarak kontrol edilmesi ve sönümlendirilmesi konusunda yapılan çalışmalarda yakın zamanlarda artış olduğu göze çarpmaktadır. Bu çalışmaların hemen hemen tamamına yakınında kısım 4.2'de anlatılan durum geri beslemeli kontrol yöntemi kullanılmıştır. Plakların yüzeylerine yapıştırılmış olan ve titreşimlerin sönümlendirilmesi için kullanılan piezoelektrik elemanlardan bir yüzeydekiler eyleyici olarak kullanılırken diğer yüzeydeki piezoelektrik elemanlar ise duyarga olarak kullanılmış ve böylece duyarga olarak kullanılan piezoelektrik elemanlardan elde edilen elektriksel deplasman değerleri bir kazanç değeri ile çarpılarak eyleyici piezoelektrik elemanlara uygulanacak potansiyel farkları kolayca hesaplanmıştır.

Bu çalışmada piezoelektrik elemanların tamamı eyleyici olarak tasarlanmıştır. Bu durumda deplasman ölçümü yapan duyargalardan elde edilen değerlerin bir katsayısı ile çarpılıp geri besleme kazanç değerinin kolayca elde edilebilmesi mümkün olmamıştır. Diğer yandan plak yapısal sönümü ihmal edildiğinden sistemin davranışını belirleyen sistem matrisinin özdeğerlerinin tamamı sanal eksen üzerinde olup kontrol edilmek istenen plağa ait sistem kararsızlık sınırında bulunmaktadır. Bu durumda sistemin geri besleme kazanç matrisinin belirlenmesi için deplasman ölçümlerinin yapıldığı noktaların yer değiştirmeleri sayesinde sistemin diğer tüm durumlarını iyi bir şekilde tahmin eden bir gözleyici ile elde edilen durum değişkenleri sayesinde tam durum geri beslemeli bir sistem için kullanılan optimum doğrusal regülatör (linear quadratik regulator) kazanç matrisi elde edilmiş ve böylece sonuçta elde edilen sistemin kararlı olması garantilenmiştir.

4.2 Çözüm Yöntemi

Zamana bağlı dış uyarımlar etkisindeki n serbestlik derecesine bir yapının sonlu elemanlar yaklaşımıyla elde edilen dinamik hareket denklemleri için

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F} \tag{4.1}$$

ifadesi yazılabilir. Burada **M** yapının sonlu eleman kütle matrisini, **C** yapısal sönüm matrisini, **K** yapının sonlu eleman katılık matrisi ve **F** yapıya etkiyen yük vektörünü temsil etmektedir. Bir önceki bölümde söylendiği gibi S1 semiloof kabuk sonlu eleman yaklaşımının kullanılması durumunda elemana uygulanan potansiyel farkı sonucunda oluşan ve plak orta düzlemine indirgenmiş olan kuvvetler vektörü hareket denkleminde eşitliğin sağ tarafına yazılabilir [74]. Bu durumda üzerinde piezoelektrik elemanlar olan ve zamana bağlı anlık basınç yükü etkisinde bulunan bir plak için (4.1) hareket denklemindeki yük vektörü

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_P \tag{4.2}$$

şeklinde ifade edilebilir. $\mathbf{F}_B$ ve $\mathbf{F}_P$ sırasıyla yapıya etkiyen zamana bağlı anlık basınç yük vektörünü ve piezoelektrik yük vektörünü göstermektedir. Anlık basınç yükü yapının hareket etmesine ve titreşimine neden olan bozucu etkidir. Piezoelektrik elemanlarla oluşturulan yük vektörü ise oluşan titreşimleri aktif olarak sönümlendirecektir. Birim basınç yük vektörünün $\mathbf{V}_B$ ve her bir piezoelektrik elemana uygulanan birim potansiyel farkı için yapıya etki eden yük vektörünün $\mathbf{V}_P$ olduğu düşünülürse yük vektörlerini

$$\mathbf{F}_B = \mathbf{V}_B p(t) \quad ; \quad \mathbf{F}_P = \mathbf{V}_P \mathbf{u}(t) \tag{4.3}$$

ifadeleriyle yazmak mümkündür. Bu eşitliklerde yer alan $p(t)$, daha önceki bölümlerde anlatılmış olan ve (2.1) denklemi ile verilen anlık basınç yükünün zamana bağlı değişimidir. Yapıda içerisinde mevcut bulunan p adet piezoelektrik elemanın her birine zamana bağlı olarak uygulanan potansiyel farkı ise

$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_p \end{Bmatrix}^T \tag{4.4}$$

vektörü ile ifade edilebilir.

Yapısal titreşimlerin sönümlenmesi için piezoelektrik elemanlara uygulanacak potansiyel farklarının belirlenmesi bir kontrol problemi olduğundan ve mevcut sonlu eleman modeli matrislerden oluştuğundan dolayı (4.1) hareket denkleminin durum değişkenleri (state-space) formunda ifade edilmesi uygun kontrol stratejisinin belirlenmesini kolaylaştıracaktır. Ancak sonlu elemanlar yaklaşımı ile elde edilmiş olan yapının serbestlik derecesi bu durumda iki katına çıkacağından kullanım

açısından çok pratik olmayacaktır. Matris boyutlarının azaltılması için kullanılacak bazı yöntemlere ihtiyaç olacaktır.

4.3 Mod Toplama Yöntemi

Semiloof kabuk sonlu eleman modeli ile elde edilen yapıya ait serbestliklerin azaltılabilmesi için kullanılabilecek yöntemlerden biri olan mod toplama (mod summation) yönteminde, yapıya etkiyen bozucu yük nedeniyle ortaya çıkmayacağı düşünülen yüksek frekanslı modlar elimine edilmektedir. Bu işlem için yapının dinamik davranış karakterinin belirlenmesinde baskın olduğu kabul edilen ilk *r* tane moda karşılık gelen vektörlerden oluşan

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \cdots & \varphi_r \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

modal dönüşüm matrisi kullanılarak

$$\mathbf{q} = \boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\eta} \tag{4.6}$$

değişken dönüşümü yapılmaktadır. Bu dönüşüm ifadesi (4.1) hareket denkleminde yazılarak ve tüm terimler (4.5) modal dönüşüm matrisinin transpozu ile soldan çarpılarak

$$\boldsymbol{\varphi}^T\mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\varphi}^T\mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}\dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\varphi}^T\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\varphi}^T\mathbf{F} \tag{4.7}$$

ifadesi elde edilir [75]. İndirgenmiş matrisler için

$$\mathbf{M_S} = \boldsymbol{\varphi}^T\mathbf{M}\boldsymbol{\varphi} \;\; ; \;\; \mathbf{C_S} = \boldsymbol{\varphi}^T\mathbf{C}\boldsymbol{\varphi} \;\; ; \;\; \mathbf{K_S} = \boldsymbol{\varphi}^T\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi} \;\; ; \;\; \mathbf{F_S} = \boldsymbol{\varphi}^T\mathbf{F} \tag{4.8}$$

şeklinde sırasıyla genelleştirilmiş kütle, sönüm, katılık matrisleri ve modal yük vektörü tanımlamaları yapılıp (4.7) ifadesinde kullanılırsa

$$\mathbf{M_S}\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{C_S}\dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{K_S}\boldsymbol{\eta} = \mathbf{F_S} \tag{4.9}$$

şeklinde sonlu eleman modeli *n* serbestlik derecesine sahip olan yapının, baskın olan modları içeren *r* serbestlik derecesindeki indirgenmiş modeline ait dinamik hareket denklemi elde edilmiş olur. Sistemin dinamik davranış özelliğini belirleyen özvektörlerin ortogonal olmasından dolayı (4.8) ile tanımlanmış olan indirgeme işlemiyle elde edilen genelleştirilmiş kütle, sönüm ve katılık matrisleri köşegen matris olup köşegen dışındaki elemanlar sıfırdır [75]. Modal dönüşüm matrisinin her

sütunu, genelleştirilmiş $\mathbf{M_S}$ kütle matrisinin o sütuna karşılık gelen köşegen elemanının kareköküne bölündüğünde elde edilen yeni matrise ağırlıklı modal matris denir ve $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ ile gösterilirse

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^T \mathbf{M} \tilde{\boldsymbol{\varphi}} = \tilde{\mathbf{M}}_\mathbf{S} = \mathbf{I}_r \tag{4.10}$$

şeklindeki çarpım sonucu *r* boyutlu birim matrisi verir. Aynı işlem **K** katılık matrisi dönüşümü için de uygulanırsa

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^T \mathbf{K} \tilde{\boldsymbol{\varphi}} = \tilde{\mathbf{K}}_\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Lambda} \tag{4.11}$$

şeklinde özdeğerlerden oluşan köşegen matrisi elde edilecektir. İndirgeme işlemi için $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ ağırlıklı modal dönüşüm matrisi kullanılırsa (4.9) hareket denklemi böylece

$$\tilde{\mathbf{M}}_\mathbf{S} \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \tilde{\mathbf{C}}_\mathbf{S} \dot{\boldsymbol{\eta}} + \tilde{\mathbf{K}}_\mathbf{S} \boldsymbol{\eta} = \tilde{\mathbf{F}}_\mathbf{S} \tag{4.12}$$

haline gelir. Elde edilen bu hareket denkleminde $\mathbf{x_1} = \boldsymbol{\eta}$ ve $\mathbf{x_2} = \dot{\boldsymbol{\eta}}$ tanımlamaları yapılır ve modal yük vektörleri için (4.2) ve (4.3) denklemleri (4.8) tanımında kullanılırsa

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\tilde{\mathbf{M}}_\mathbf{S}^{-1}\tilde{\mathbf{K}} & -\tilde{\mathbf{M}}_\mathbf{S}^{-1}\tilde{\mathbf{C}}_\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\tilde{\mathbf{M}}_\mathbf{S}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^T\mathbf{V}_P \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\tilde{\mathbf{M}}_\mathbf{S}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^T\mathbf{V}_B \end{bmatrix} p(t) \tag{4.13}$$

ifadesi elde edilir. $\mathbf{x}=\{\mathbf{x_1}\ \mathbf{x_2}\}^T$ olmak üzere ve

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\tilde{\mathbf{M}}_\mathbf{S}^{-1}\tilde{\mathbf{K}} & -\tilde{\mathbf{M}}_\mathbf{S}^{-1}\tilde{\mathbf{C}}_\mathbf{S} \end{bmatrix} \ ; \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\tilde{\mathbf{M}}_\mathbf{S}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^T\mathbf{V}_P \end{bmatrix} \ ; \ \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\tilde{\mathbf{M}}_\mathbf{S}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^T\mathbf{V}_B \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

matris tanımlamaları yapıldığında

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}p(t) \tag{4.15}$$

şeklinde hareket denkleminin durum denklemleri formuna dönüştürülmüş şekli elde edilir. Bu ifadedeki **A** sistem matrisi, **B** kontrol matrisi ve **E** bozuntu matrisidir. Yapının ölçme için duyarga yerleştirildiği ya da deplasman ölçümü yapıldığı kabul

edilen fiziksel koordinatlardaki serbestliklerden elde edilen çıkış matrisi $\mathbf{C_q}$ olmak üzere

$$\mathbf{y} = \mathbf{C_q}\mathbf{q} \tag{4.16}$$

ifadesi çıkış denklemi olup (4.6) ile tanımlanan dönüşüm ifadesi gözönüne alınmak üzere uygun $\mathbf{C_x}$ çıkış matrisini ve böylece

$$\mathbf{y} = \mathbf{C_x}\mathbf{x} \tag{4.17}$$

şeklinde indirgenmiş sistem için çıkış denklemini belirlemek mümkün olur.

Yapısal sönümün ihmal edildiği durumlarda (4.1) hareket denklemi basitleşir ve

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F} \tag{4.18}$$

haline gelir. Ağırlıklı modal dönüşüm matrisi kullanılarak yapılmış indirgeme işlemleriyle elde edilmiş olan (4.12) denklemi de bu durumda

$$\tilde{\mathbf{M}}_S\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \tilde{\mathbf{K}}_S\boldsymbol{\eta} = \tilde{\mathbf{F}}_S \tag{4.19}$$

ifadesi haline gelecektir. Benzer şekilde indirgenmiş yapının durum değişkenleri formundaki ifadesinde yer alan ve (4.14) ile tanımlanmış olan **A** sistem matrisi de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\tilde{\mathbf{M}}_S^{-1}\tilde{\mathbf{K}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

haline gelecektir. Görüleceği üzere yapısal sönümün ihmal edilmesi, sistemin durum denklemlerinde sadece sistem matrisini değiştirmektedir.

4.4 Durum Geri Beslemeli Kontrol

Durum denklemleri

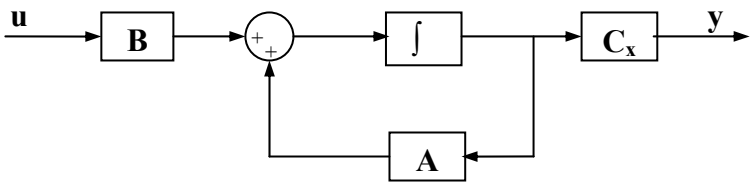
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{4.21}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C_x}\mathbf{x} \tag{4.22}$$

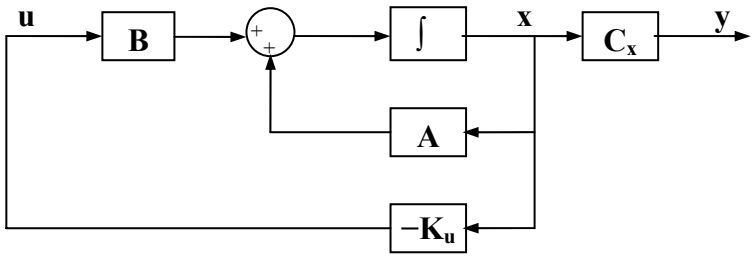
olarak verilen ve Şekil 4.1'de görülen açık çevrimli bir kontrol sisteminde, sistemin kontrol edilmesinde kullanılan kontrol sinyali

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K_u}\mathbf{x} \tag{4.23}$$

şeklinde, bir $\mathbf{K_u}$ durum geri besleme kazanç matrisi ile **x** durum vektörü çarpılarak belirleniyor ve Şekil 4.2'de görülen kapalı çevrimli kontrol sistemi elde ediliyorsa bu kontrol sistemine durum geri beslemeli kontrol sistemi adı verilir.



Şekil 4.1: Açık Çevrimli Kontrol Sistemi



Şekil 4.2: Durum Geri Beslemeli Kontrol Sistemi

4.5 Kontroledilebilirlik ve Gözlenebilirlik Tanımları

Doğrusal sürekli sistemlerin optimum kontrol problemine ilişkin çözümü olup olmadığını belirlemede etkili olan kontroledilebilirlik ve gözlenebilirlik kavramlarını ilk kez ortaya koyan Kalman olmuştur [76]. Kontroledilebilirlik, durum denklemleri (4.21) denklemindeki gibi verilen ve herhangi bir t_0 başlangıç anında $\mathbf{x}(t_0)$ başlangıç durum vektörü konumunda bulunan sürekli bir sistemin, sınırlandırılmamış bir kontrol vektörü ile sonlu bir zaman aralığında istenilen başka herhangi bir durum vektörüne getirilebilir olması şeklinde tanımlanabilir. Başka bir ifadeyle, **x** durum vektörü n boyutlu vektör olan, **A** $n\times n$ boyutunda sistem matrisi, **B** $n\times 1$ boyutunda kontrol matrisi, u ile verilen bir girişli kontrol değerine sahip

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{4.24}$$

şeklindeki sürekli bir sistem gözönüne alındığında bu sistemin tüm durum değişkenleri başlangıç zamanı t_0=0 olmak üzere t_1 zamanına kadar istenen sistemin

denge noktası olan $\mathbf{x}_{denge}=\mathbf{0}$ konumuna getirilebiliyorsa sistemin tanımı yapılan tam kontroledilebilirlik şartını sağladığı söylenebilir. (4.24) denkleminin çözümü için

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau \tag{4.25}$$

ifadesi verilebilir [77]. Tam kontroledilebilirlik şartı bu ifadeye uygulanacak olursa

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{0} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau \tag{4.26}$$

ifadesine ve buradan

$$\mathbf{x}(0) = -\int_0^{t_1} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}u(\tau)d\tau \tag{4.27}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlikte yer alan $e^{-\mathbf{A}\tau}$ terimi, α_k karakteristik polinomun katsayıları olmak üzere

$$e^{-\mathbf{A}\tau} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau)\mathbf{A}^k \tag{4.28}$$

olarak yazılabilir. (4.28) ifadesi (4.27)'de yazılırsa

$$\mathbf{x}(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^k\mathbf{B}\int_0^{t_1} \alpha_k(\tau)u(\tau)d\tau \tag{4.29}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik içinde yer alan integral ifadesi

$$\int_0^{t_1} \alpha_k(\tau)u(\tau)d\tau = \beta_k \tag{4.30}$$

olarak tanımlanacak olursa (4.29) eşitliği

$$\mathbf{x}(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^k\mathbf{B}\beta_k = -\begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{AB} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1}\end{bmatrix} \tag{4.31}$$

halini alır. Bu eşitliğin verilen herhangi bir başlangıç durum vektörü $\mathbf{x}(0)$ değerini sağlaması için $n\times n$ boyutlu

$$\mathbf{Q}_C = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \tag{4.32}$$

matrisinin vektörleri lineer olarak bağımsız olmalı yani bu matrisin rankının değeri *n* olmalıdır. Bu durumda tek kontrol girişli (4.24) ile verilen sistemin tam kontrol edilebilir olma şartı, (4.31) ile tanımlanmış kontroledilebilirlik matrisinin rankının sistemin rankına eşit olmasıdır. Benzer eşitlik kontrol girişi *r* boyutlu **u** kontrol vektörüne sahip (4.21) denklemi ile verilen sistem için de elde edilebilir. Bu durumda *n* boyutlu durum vektörüne ve *r* boyutlu kontrol vektörüne sahip sürekli bir sistemin tam kontrol edilebilir olması için gerek ve yeter şart,

$$\mathbf{Q}_C = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \tag{4.33}$$

şeklinde verilen $n \times n \cdot r$ boyutlu kontrol edilebilirlik matrisinin rankının *n* olmasıdır. Bazı fiziksel sistemlerin matematiksel modelinden elde edilen sistem matrisleri kontroledilebilirlik şartını sağlamadan sistemin çıkışları kontroledilebilir olmaktadır. Bazı durumlarda ise sistemin tüm durumlarını kontrol etmek yerine sadece çıkışlarını kontrol etmek tercih edilebilir. Bu tür durumlarda sistemin çıkış kontroledilebilirliği tanımlanır. Genel haliyle $\mathbf{D_u}$ kontrol girişinin varsa çıkışa doğrudan etkisini ifade eden katsayılar matrisi olmak üzere ve sistem *m* tane çıkışa sahip olmak üzere durum denklemleri

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \tag{4.34}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C_x x} + \mathbf{D_u u} \tag{4.35}$$

ile verilen bir sistem için çıkış kontroledilebilirlik matrisi

$$\mathbf{Q}_U = \begin{bmatrix} \mathbf{CB} & \mathbf{CAB} & \mathbf{CA}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B} & \mathbf{D_u} \end{bmatrix} \tag{4.36}$$

olarak tanımlanırsa, sistemin çıkışlarının tam kontroledilebilir olması için $m\times(n+1)r$ boyutundaki bu matrisin rankı çıkış sayısına eşit olmalı yani *m* olmalıdır.

Durum denklemleri (4.34) ve (4.35) denklemleri ile verilen bir sistemin gözlenebilirliği ise herhangi bir t_0 başlangıç anında $\mathbf{x}(t_0)$ başlangıç durum vektörü konumunda bulunan bu sistemin sonlu bir zaman aralığında herhangi bir andaki durum vektörünün, sistemin çıkışı olarak belirlenebilir olması şeklinde tanımlanabilir. (4.34) ve (4.35) denklemleri ile verilen sistemin gözlenebilirliği hiçbir zorlama bulunmayan bu sistemin

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{4.37}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_{\mathbf{x}}\mathbf{x} \tag{4.38}$$

denklemleriyle verilen serbest davranışı incelenerek gösterilebilir. Bunun nedeni (4.34) ve (4.35) denklemlerinden elde edilen

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{4.39}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \mathbf{C}\int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u} \tag{4.40}$$

eşitliklerinde $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C_x}$, $\mathbf{D_u}$ ve giriş kontrol vektörü $\mathbf{u}$ değerlerinin biliniyor olmasından dolayı hesaplanarak gözlenen $\mathbf{y}(t)$ değerine eklenebilir olmalarıdır. Bu durumda tam gözlenebilirlik için gerek ve yeter şart (4.37) ve (4.38) denklemleri ile verilen sistem denklemleri kullanılarak ifade edilebilir. (4.38) gözönüne alındığı zaman (4.40) çıkış denklemi

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) \tag{4.41}$$

haline gelecek olup

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)\mathbf{A}^k \tag{4.42}$$

ifadesi de dikkate alındığında

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)\mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) \tag{4.43}$$

veya

$$\mathbf{y}(t) = \alpha_0(t)\mathbf{C}\mathbf{x}(0) + \alpha_1(t)\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \alpha_2(t)\mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{x}(0)\cdots + \alpha_{n-1}(t)\mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{x}(0) \tag{4.44}$$

ifadesi elde edilir. Eğer sistem tam gözlenebilirlik özelliğine sahip ise $0 \le t \le t_1$ zaman aralığında elde edilen $\mathbf{y}(t)$ çıkışını verecek sadece birtek $\mathbf{x}(0)$ değeri (4.44) denkleminden çözülebilir. Bunun olması için $nm \times n$ boyutlu

$$\mathbf{Q}_O = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \tag{4.45}$$

veya diğer bir ifadeyle

$$\mathbf{Q}_O = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T & \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T & \left(\mathbf{A}^T\right)^2\mathbf{C}^T & \cdots & \left(\mathbf{A}^T\right)^{n-1}\mathbf{C}^T \end{bmatrix} \tag{4.46}$$

şeklinde tanımlanan gözlenebilirlik matrisinin rankı *n* olmalı yani birbirinden lineer olarak bağımsız *n* tane sütun vektörü olmalıdır.

4.6 Optimal Doğrusal Regülatör Problemi

Yukarıda bahsedilmiş ve (4.23) ile verilmiş olan geri besleme kazanç matrisinin en uygun (optimum) değerinin belirlenmesi için yapısal titreşimin bastırılması problemlerinde yaygın olarak kullanılan bir yöntem doğrusal regülatör problemidir (*linear quadratik regulator problem, LQR*). Burada amaç sisteme ait tüm durum değişkenlerini bir başlangıç konumundan sistemin denge konumuna getirmektir (genellikle yapısal titreşim problemlerinde $\mathbf{x}_{denge}=\mathbf{0}$ olmaktadır). Sonuçta elde edilen sistemin kararlı olması bu yöntemin en önemli avantajıdır [77]. Doğrusal regülatör probleminde minimum yapılmak istenen performans göstergesi için

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left[\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u}\right]dt \tag{4.47}$$

integrali tanımlanır. Burada **Q** ve **R** simetrik pozitif tanımlı, keyfi olarak seçilebilen ağırlık matrisleridir. Daha büyük **Q** matrisinin seçildiği optimum kontrol durumunda sistemin denge konumuna daha çabuk ulaşması önem kazanır. Diğer taraftan **R** matrisinin büyütüldüğü optimum kontrol durumunda kontrol için daha az çaba sarf edilen bir durum söz konusu olur. Durum denklemleri (4.21) ile verilen bir sistem için doğrusal regülatör probleminin gözönüne alındığını, sistemin kontrol edilmesini sağlayan ve (4.47) ifadesini minimum yapan kontrol vektörünün

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S}(t)\mathbf{x}^*(t) \tag{4.48}$$

şeklinde hesaplanabileceğini kabul edelim. Bu ifadede yer alan $\mathbf{x}^*(t)$, giriş olarak sisteme gelen optimal kontrol vektörü $\mathbf{u}^*$ için durum denklemlerinden hesaplanan

durum vektörüdür. $\mathbf{S}(t)$ ise belirlenmesi gereken zamana bağlı simetrik bir matris olup Riccati matrisi olarak adlandırılır. $\mathbf{S}(t)$ matrisinin belirlenmesi halinde (4.23) ifadesinden optimum geri besleme kazanç matrisinin elde edilebileceği açıktır. Bazı uygun işlemler yapılarak elde edilen ve

$$\mathbf{Q}-\mathbf{S}(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{T}\mathbf{S}(t)+\mathbf{A}^{T}\mathbf{S}(t)+\mathbf{S}(t)\mathbf{A}+\frac{d\mathbf{S}(t)}{dt}=\mathbf{0} \tag{4.49}$$

şeklinde tanımlanan Matris Riccati Denklemini, bitiş şartı $\mathbf{S}(t_f)=\mathbf{0}$ olmak üzere, $\mathbf{S}(t)$ matrisinin sağlaması gerekir. Çok uzun bir zaman aralığında (4.47) denkleminde bitiş zamanı sonsuz yapılabilir ve bu durumda performans göstergesi için

$$J=\int_{t_0}^{\infty}\left[\mathbf{x}^{T}\mathbf{Q}\mathbf{x}+\mathbf{u}^{T}\mathbf{R}\mathbf{u}\right]dt \tag{4.50}$$

ifadesini yazmak mümkün olur. Tamamen kontroledilebilir yapısal özellikleri zamanla değişmeyen (steady-state) bir sistemin denge konumuna döndürüldüğü optimal kontrol problemi söz konusu ise $\mathbf{S}(t)$ matrisi sabit olacağından ve bu durumda $d\mathbf{S}(t)/dt=\mathbf{0}$ olacağından Riccati denklemi basitleşirek

$$\mathbf{Q}-\mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{T}\mathbf{S}+\mathbf{A}^{T}\mathbf{S}+\mathbf{S}\mathbf{A}=\mathbf{0} \tag{4.51}$$

şeklinde doğrusal olmayan bir cebrik denklem sistemi haline gelir. Bu denklem takımının sayısal olarak çözümünü yapan algoritmalar geliştirilmiş olup bunlardan *Matlab* yazılımı ile Riccati matrisinin değerini dolayısıyla

$$\mathbf{K}_{\mathbf{u}}=-\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{T}\mathbf{S} \tag{4.52}$$

ifadesi ile optimum geri besleme kazanç matrisinin değerini elde etmek mümkündür.

4.7 Durum Geri Beslemesi ile Kutup Yerleştirme

Kutup yerleştirme düşüncesi temel olarak kapalı çevrimli bir sistemin geri besleme kazanç matrisinin, sistemin arzulanan davranış özellikleri göstermesini sağlayacak şekilde belirlenmesi esasına dayanır. Şekil 4.2.(a)'da görülen açık çevrimli sistemin doğal davranışını belirleyen, sistem matrisi olarak tanımlanan **A** matrisinin özdeğerleridir. Şekil 4.2.(b)'de görülen kapalı çevrimli sistemde ise (4.23) ile hesaplanan kontrol vektörü (4.21) ifadesinde yerine yazıldığında

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_u)\mathbf{x} \tag{4.53}$$

olduğundan bu ifadeden de görüleceği gibi kapalı çevrimin yani regülatörün sistem matrisi ($\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K}_u$) olup sistemin doğal davranışını belirleyen özdeğerlerin başka bir deyişle kapalı çevrimli sistemin kutuplarının arzulanan değerleri almasını sağlayacak kazanç matrisini belirlemek mümkündür. Bu işlemin gerçekleşebilmesi için gerek ve yeter şart sistemin tam kontroledilebilir olmasıdır [77]. Kutup yerleştirme probleminin sayısal olarak çözümü için geliştirilmiş algoritmalar mevcut olup bunlardan *Matlab* yazılımı ile geri besleme kazanç matrisinin değeri hesaplanabilmektdir..

4.8 Durum Gözleyici Sistemler

Genel olarak titreşimlerin sönümlenmesi için tasarlanan kontrol sistemlerinde yapıya ait tüm noktalarda hız ve deplasman değerlerinin tamamının ölçülmesi mümkün olmaz. Yani uygulamada tüm durum değişkenlerinin geri besleme için kullanılması söz konusu değildir. Ancak eğer yapı biliniyor ve gözlenebilir özelliğini taşıyorsa, yani sistemi ifade eden **A** durum matrisi biliniyor ve ölçüme ait çıkış matrisi **C** olmak üzere sistem (4.46) ifadesi ile verilen gözlenebilirlik şartını sağlıyorsa, bu durumda gözleyici olarak tanımlanan ve ölçüm verilerinden hareketle tüm sistemin durum değişkenlerini iyi bir yaklaşıklıkla tahmin eden bir alt sistem tasarlamak mümkün olur. Gözleyici tarafından tahmin edilen durum vektörü $\tilde{\mathbf{x}}$ olarak tariflenirse, **u** kontrol vektörünün hesaplanmasında $\tilde{\mathbf{x}}$ vektörü kullanılır. Durum denklemleri (4.21) ile verilen bir sistemde gözleyici durum vektörü $\tilde{\mathbf{x}}$ kullanılarak tahmin edilecek durum vektörü **x** olmak üzere

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{K}_e(\mathbf{y} - \mathbf{C}_x\tilde{\mathbf{x}}) \tag{4.54}$$

ifadesi durum gözleyicisinin dinamik modelini temsil eder. Durum gözleyicisinin girişleri **y** ve **u** olup $\tilde{\mathbf{x}}$ ise çıkıştır. Bu ifadedeki son terim bir düzeltme terimi olup ölçülen çıkış durum değişkenleri ile tahmin edilen durum değişkenleri arasındaki farkı içermektedir ve dinamik model ile gerçek sistem arasındaki farkı azaltıcı yönde katkıda bulunur. Bu terimdeki $\mathbf{K}_e$ matrisi ise hatanın etkinliğini belirleyen ağırlık matrisi gibidir.

Gözleyicinin hata fonksiyonunu elde etmek için (4.21) denklemlerinin **x** durum vektörü için olan birincisinden (4.54) denklemi çıkartılırsa

$$\dot{\mathbf{x}} - \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{K}_e(\mathbf{C}_x\mathbf{x} - \mathbf{C}_x\tilde{\mathbf{x}}) = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}_x)(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) \tag{4.55}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadeden hata vektörü için

$$\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} \tag{4.56}$$

tanımı yapılacak olursa

$$\dot{\tilde{\mathbf{e}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}_x)\tilde{\mathbf{e}} \tag{4.57}$$

şeklinde hata fonksiyonu elde edilir. Hata vektörünün dinamik davranışını bu denklemin sistem matrisi olan $(\mathbf{A}-\mathbf{K}_e\mathbf{C}_x)$ matrisinin özdeğerleri belirleyecektir. Eğer $\mathbf{K}_e$ matrisi, $(\mathbf{A}-\mathbf{K}_e\mathbf{C}_x)$ matrisinin özdeğerlerinin, yani gözleyicinin kutuplarının sol yarı eksende olmasını sağlayacak şekilde seçilirse (4.57) denklemi asimptotik olarak kararlı olur ve başlangıç anındaki herhangi bir $\tilde{\mathbf{e}}(0)$ hata vektörü sonuçta sıfır değerine yakınsar. Başka bir deyişle başlangıç anındaki gerçek sistemin durum vektörü $\mathbf{x}(0)$ ile gözleyici durum vektörü $\tilde{\mathbf{x}}(0)$ arasındaki fark ne olursa olsun sonuçta $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ vektörü $\mathbf{x}(t)$ vektörüne yakınsayacaktır. Gözleyici kutuplarının regülatör kutuplarından daha hızlı olması halinde ise (yani reel eksende gözleyici kutuplarının regülatör kutuplarından daha solda olması halinde) bu yakınsama daha çabuk gerçekleşir, hata azalması daha hızlı olur ve böylece gözleyici gerçek sistemi daha iyi takip eder [77]. Pratik uygulamada gözleyici kutuplarının regülatör kutuplarından yaklaşık olarak 2 ile 6 kat arasında daha hızlı olması tavsiye edilmektedir [78]. Arzulanan gözleyici özdeğerlerini sağlayacak $\mathbf{K}_e$ matrisinin belirlenmesi kutup yerleştirme işlemi ile gerçekleştirilebilmektedir.

Şekil 4.3'de görüldüğü gibi durum denklemi (4.21) ile verilen ve durum gözleyicisi içeren kazanç geri beslemeli sistemde giriş kontrol işaretinin

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_u\tilde{\mathbf{x}} \tag{4.58}$$

şeklinde olacağı açıktır. Bu giriş değeri durum denkleminde yazılacak olursa

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}_u\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_u)\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{K}_u(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) \tag{4.59}$$

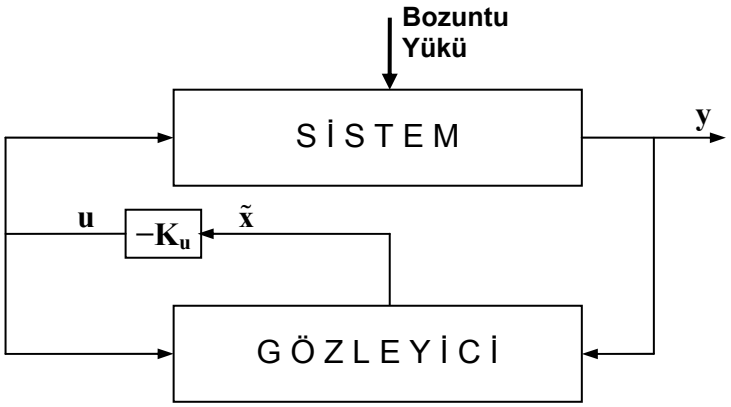
ifadesi elde edilebilir. Tahmin edilen durum vektörü ile sistemin durum vektörü arasındaki farkı ifade eden (4.56) hata vektörü (4.59) denkleminde yazılacak olursa

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_u)\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{K}_u\tilde{\mathbf{e}} \tag{4.60}$$

eşitliği bulunur. Gözleyici hata fonksiyonunun (4.57) ile verildiği dikkate alınır ve (4.60) ile birleştirilirse

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{e}}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_u & \mathbf{B}\mathbf{K}_u \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \tilde{\mathbf{e}} \end{Bmatrix} \tag{4.61}$$

şeklinde gözleyici içeren durum geri beslemeli bir sistemin dinamik durum denklemi elde edilir.



Şekil 4.3: Durum gözleyicisi içeren sisteme ait blok diyagramı

Durum gözleyicisi içeren ve (4.61) eşitliği ile ifade edilen sistemin karakteristik denklemi bu durumda

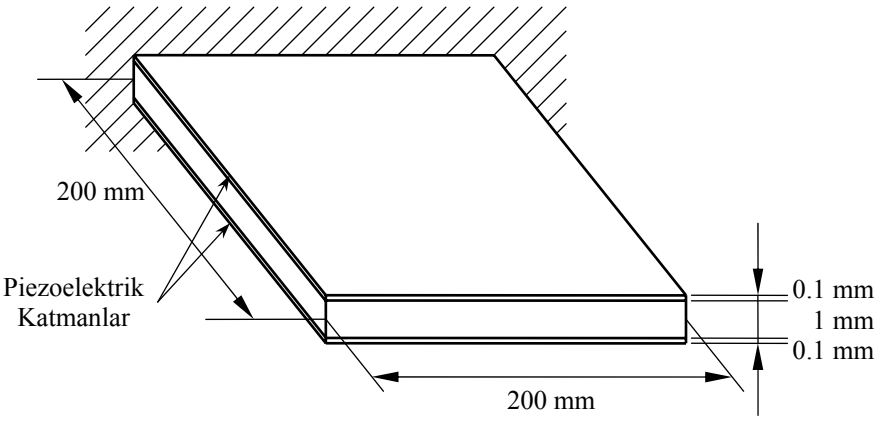
$$\begin{vmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_u & -\mathbf{B}\mathbf{K}_u \\ \mathbf{0} & s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C} \end{vmatrix} = \left|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_u\right| \left|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C}\right| = 0 \tag{4.62}$$

halindedir. Bu ifadeden görüleceği üzere gözleyici içeren durum geri beslemeli bir sistemin davranışını hem kendi geri besleme kutupları hem de gözleyici kutupları belirlemekte olup bunlar uygun yöntemler kullanılarak birbirlerinden bağımsız olarak belirlenebilir.

5 SAYISAL SONUÇLAR

5.1 Giriş

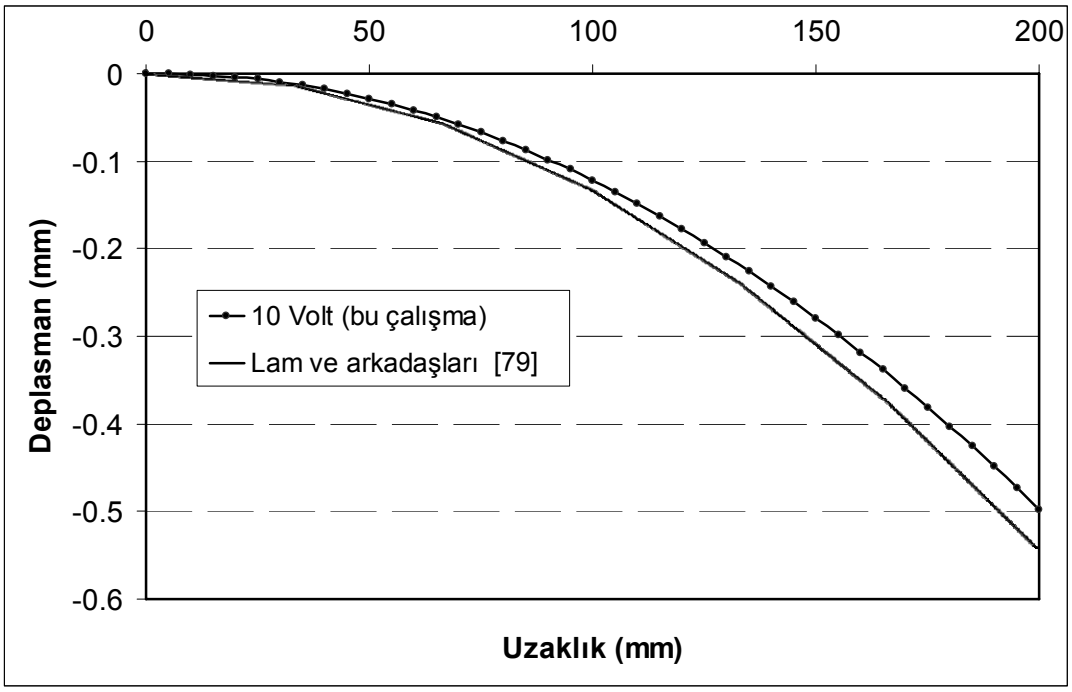
Anlık basınç yükü etkisindeki plak titreşimlerinin kontrolünden önce oluşturulan sayısal çözüm yöntemini güvenilirliği test edilmiştir. Bu amaçla literatürde mevcut bazı çalışmalar gözönüne alınmış, hem statik hem de dinamik analizler için karşılaştırmalar yapılmıştır. Statik analiz için Lam ve arkadaşlarının [79] çalışmalarında kullandıkları Şekil 5.1'de verilen bir kenarından ankastre olarak mesnetlenmiş 200×200 mm boyutunda, üst ve alt yüzeylerinde 0.1 mm kalınlığında elastisite modülü E=63 kN/mm^2, poission oranı ν=0.3, kayma modülü G=24.2 kN/mm^2, yoğunluğu 7600 kg/m^3, piezoelektrik sabitleri $d_{31}=d_{32}=254\cdot10^{-9}$ mm/V değerlerine sahip PZT F1195N piezoelektrik elemanları yapıştırılmış, katman kalınlığı 0.25 mm, fiber doğrultuları [-45/45/-45/45] olarak verilen dört katmanlı, mekanik özellikleri E_1=150 kN/mm^2, E_2=9 kN/mm^2, poission oranı ν_{12}=0.3, kayma modülü G_{12}=7.1 kN/mm^2 olan T300/976 grafit-epoksiden imal edilmiş kompozit plak ele alınmıştır. İlk olarak her ikisi de eyleyici olarak kullanılan piezoelektrik katmanlara sabit şiddette ve zıt işaretli 10 V potansiyel farkı uygulanarak plağın orta hat deplasmanı elde edilmiş ve sonuçlar Şekil 5.2'deki grafikte gösterilmiştir.



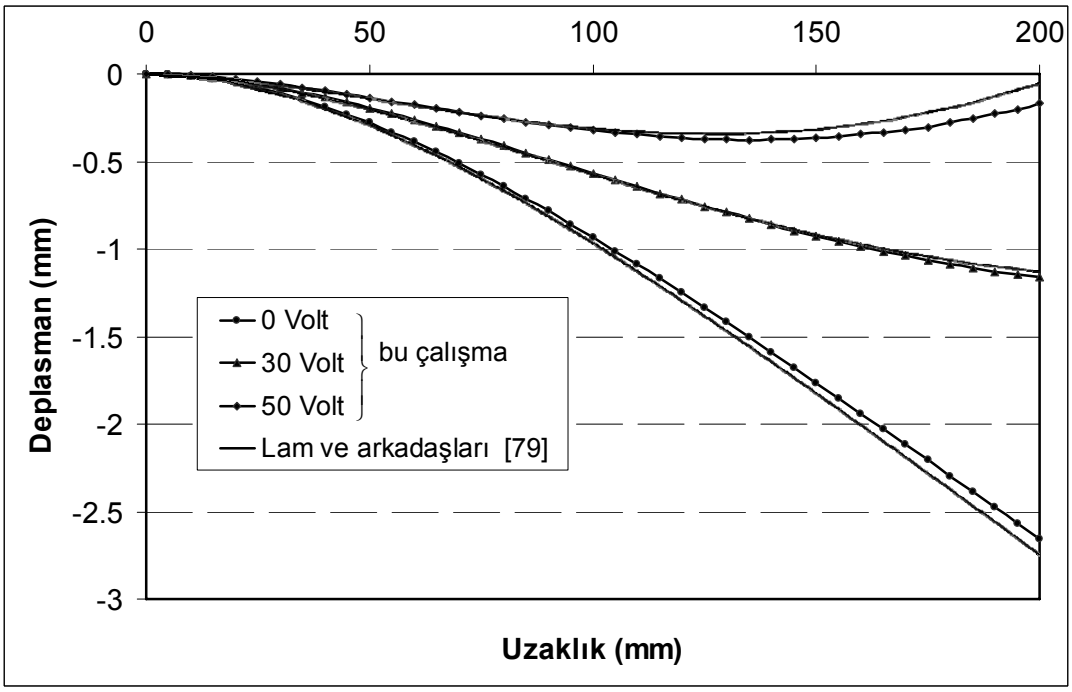
Şekil 5.1: Statik analiz karşılaştırması için kullanılan plak modeli.

Daha sonra plak yüzeyine üniform sabit 100 N/m^2 basınç yükü uygulanmıştır. Eyleyici olarak kullanılan piezoelektrik elemanlara ise eşit şiddette zıt işaretli değişik

potansiyel farkları uygulanarak statik çözümler elde edilmiştir. Plağın orta hat deplasman değişimleri karşılaştırmalı olarak Şekil 5.3'te verilmiştir.



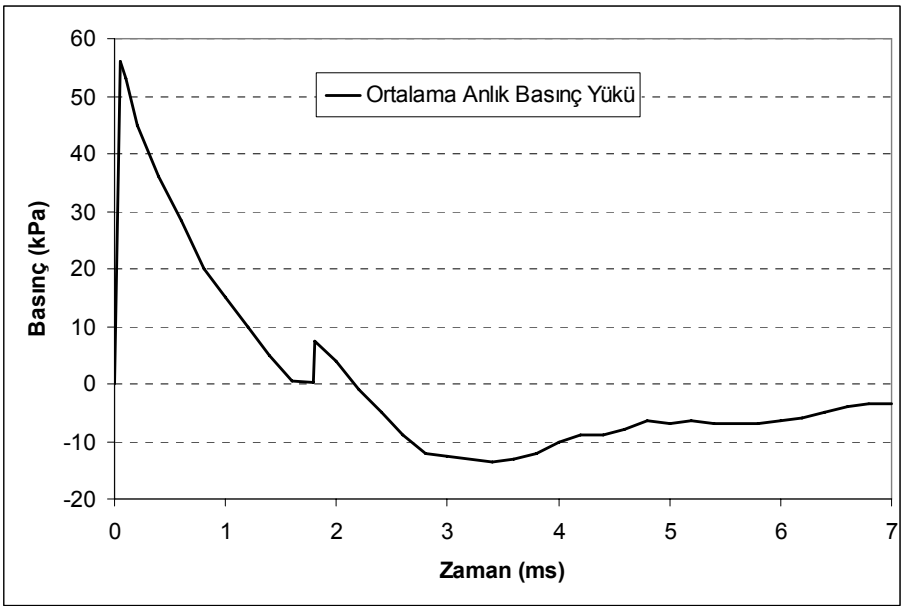
Şekil 5.2: Potansiyel farkı 10 V için plak orta hat deplasmanı



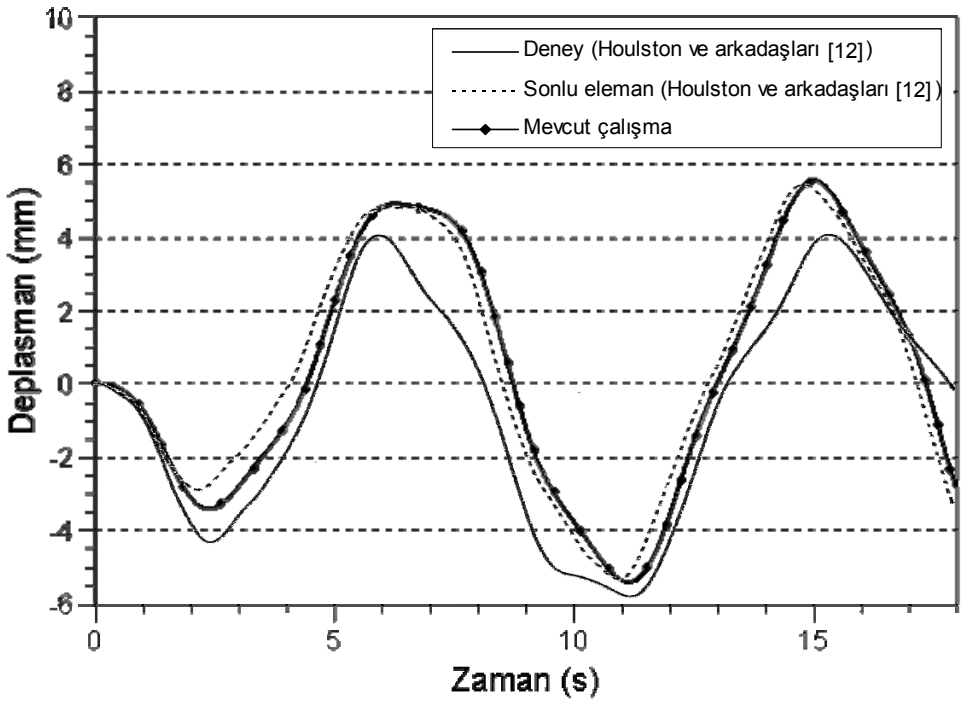
Şekil 5.3: Üniform basınç yükü ve farklı potansiyel farklarında plak orta hat deplasmanı

Sonraki aşamada Houlston ve arkadaşları tarafından [12] deneysel ve sayısal olarak analiz edilmiş anlık basınç yüküne maruz, kenarlarından ankastre olarak mesnetli

508×508 mm boyutlarında 3.4 mm kalınlıklı, elastisite modülü E=207 kN/mm^2, poission oranı v=0.3, ve yoğunluğu 7770 kg/m^3 olan kare plak ele alınmıştır. Plak, üniform olarak Şekil 5.4'te verilen ve Houlston'un deneysel çalışmasından elde ettiği ortalama anlık basınç yüküne maruz bırakılmıştır. Plak orta noktasının zamana bağlı hareketi, Newmark integrasyon tekniği ile zaman adımı 0.01 ms alınarak elde edilmiş ve karşılaştırmalı olarak Şekil 5.5'te gösterilmiştir.



Şekil 5.4: Ortalama anlık basınç yükü (Houlston ve arkadaşları [12])

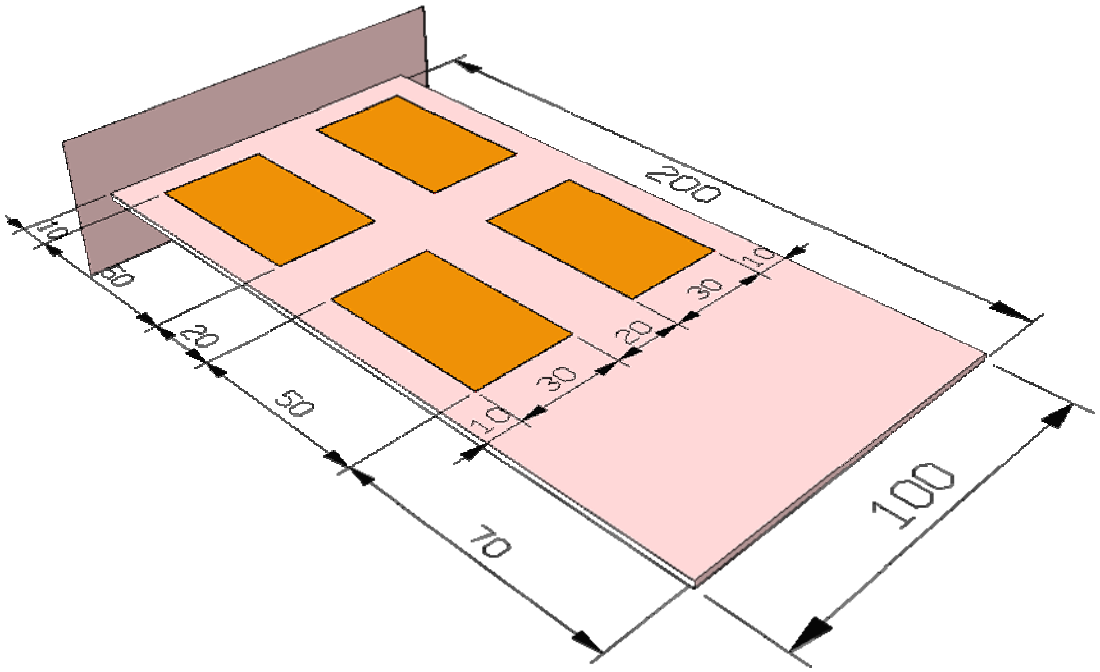


Şekil 5.5: Anlık basınç yükü etkisinde plak orta noktasının zamana bağlı hareketi

Hem statik hem de dinamik analizlerde bu çalışmada kullanılan sayısal çözüm modelinin daha önce yapılmış literatürdeki çalışmalarla oldukça uyumlu olduğunun görülmesinin ardından titreşim kontrolü için malzeme özellikleri değişmemek üzere geometrileri ve sınır şartları farklı dört ayrı plak modeli kullanılmıştır. Bunlardan üçü bir kenarından ankastre mesnetli konsol plak, bir tanesi tüm kenarlarından ankastre mesnetli plak olarak ele alınmıştır.

5.2 Birinci Plak Modeli

Birnci plak modeli için Şekil 5.6'da görülen alt ve üst yüzeylerinde dörder adet piezoelektrik eyleyici bulunan, fiber doğrultuları $[0^o/\overline{90}^o]_s$ olan 7 katmanlı kompozit konsol plak modeli kullanılmıştır. Kompozit malzemenin ve piezoelektrik elemanların malzeme özellikleri Tablo 5.1'de verildiği gibidir. Plağın her iki yüzeyinde bulunan piezoelektrik elemanların tamamı eyleyici (actuator) olarak kullanılmış olup üst ve alt yüzeylerdeki karşılıklı piezoelektrik eyleyicilere uygulanan elektrik alanlar zıt yönlü olarak seçilmiştir.



Şekil 5.6: Birinci plak modeli (boyutlar *mm*'dir)

Semiloof kabuk sonlu eleman modeli ile modellenmiş olan plağın serbest titreşim analizleri ile statik yükleme durumlarındaki davranışları *Ansys* yazılımı kullanılarak elde edilen sonuçlarla da karşılaştırılmıştır. Semiloof kabuk sonlu eleman ile elde edilen modelinin serbestlik derecesi 2760 olmuştur. Titreşim kontrolü için sistem, durum değişkenleri formunda ifade edildiğinde serbestliklerin iki katına çıkması söz

konusu olduğundan ve uygulama açısından bu durum çok pratik olmayacağından plağın dinamik davranışında etkin olduğu düşünülen ilk dört frekans değerine karşılık gelen mod şekilleri esas alınarak indirgeme yapılmıştır. Ardından zamana bağlı anlık basınç yükü etkisi altındaki plağın dinamik davranışı EK−A'da verilen Newmark zaman integrasyonu ile analiz edilmiş ve indirgenmiş sistemin anlık basınç yüküne cevabı ile karşılaştırılmıştır. Sonrasında *Matlab-Simulink* yazılımı kullanılarak tasarlanan durum gözleyicili sistemle anlık basınç yükü etkisindeki kompozit katmanlı plağın titreşimleri kontrol edilerek sönümlenmiştir.

Tablo 5.1: Malzeme Özellikleri

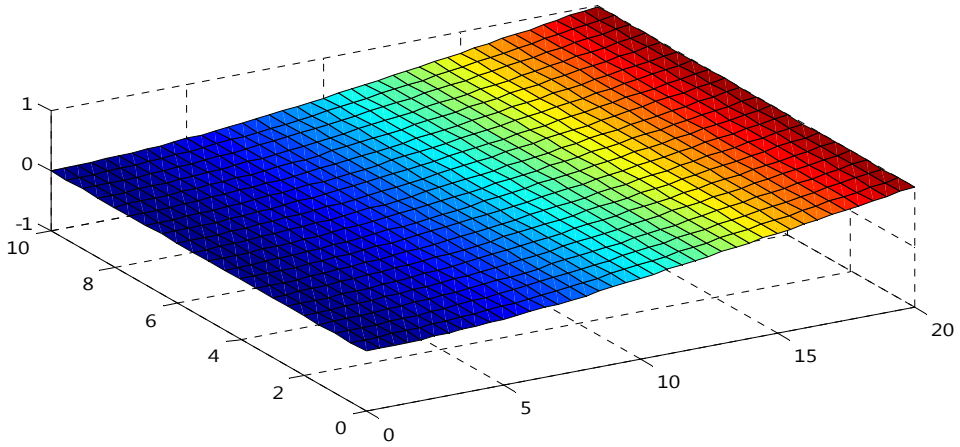
	Kompozit: Cam Elyafı Kumaş	**Piezoseramik:** PZT G1195N
Elastisite Modülü (N/mm^2)	$E_{11}=E_{22}=24140$	$E=63000$
Poisson Oranı	$\nu_{12}=0.11$	$\nu=0.3$
Kayma Modülü (N/mm^2)	$G_{12}=3790$	$G=24200$
Yoğunluk ($N{\cdot}s^2/mm^4$)	$1.8{\cdot}10^{-9}$	$7.6{\cdot}10^{-9}$
Piezoelektrik yük sabiti (mm/V)	−	$d_{31}=d_{32}=254{\cdot}10^{-9}$
Katman Kalınlığı (mm)	0.28	0.25

5.2.1 Plak Serbest Titreşimi

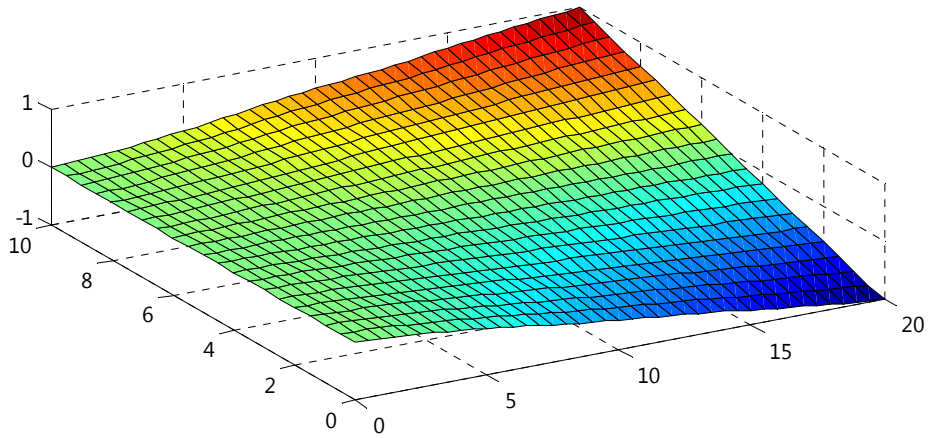
Semiloof kabuk sonlu eleman modeli kullanılarak modellenen yapısal sönümün ihmal edildiği plağın serbest titreşim analizi için, yani serbest titreşim frekanslarını ve mod şekillerini elde etmek için (4.18) hareket denklemlerinde dış kuvvet **F=0** alındığında problem bir özdeğer problemidir. Özdeğerlerden serbest titreşim frekansları ve özvektörlerden bu frekanslara karşılık gelen mod şekilleri elde edilir. Elde edilen sonuçları karşılaştırmak amacıyla *Ansys* yazılımında SOLID46 ve SOLID5 elemanları ile plak modeli oluşturulmuştur. Her iki analiz sonucunda elde edilen serbest titreşim frekansları karşılaştırmalı olarak Tablo 5.2'de verilmiştir. Semiloof kabuk sonlu eleman modeli kullanılarak modellenen plağa ait serbest titreşim frekansları ila bu frekans değerlerine karşılık gelen mod şekilleri Şekil 5.7 ile Şekil 5.12 arasında gösterilmiştir. *Ansys* modelinden elde edilen serbest titreşim frekansları ve mod şekilleri ise Şekil 5.13'te gösterilmiştir.

Tablo 5.2: Birinci plağın semiloof kabuk sonlu eleman ve *Ansys* yazılımı ile elde edilen serbest titreşim frekanslarının karşılaştırılması (*Hz*).

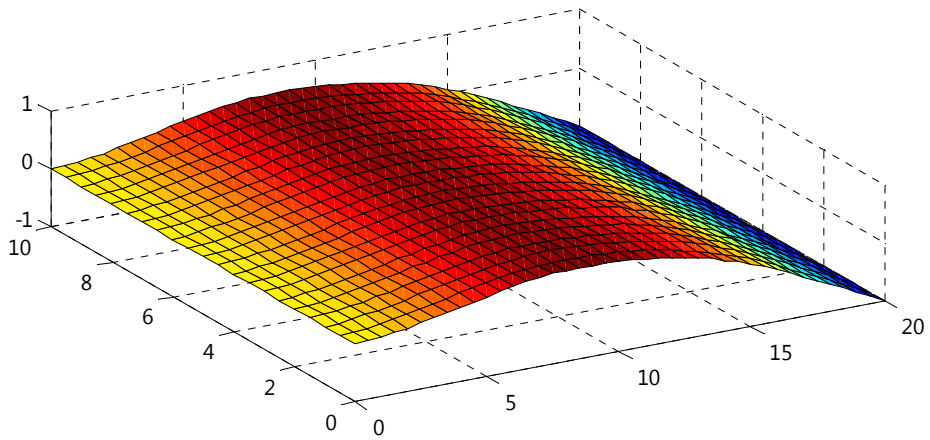
Modlar	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Semiloof Plak	35.890	132.931	197.265	352.183	507.294	736.802
Ansys	35.994	131.86	198.17	350.25	509.48	731.79



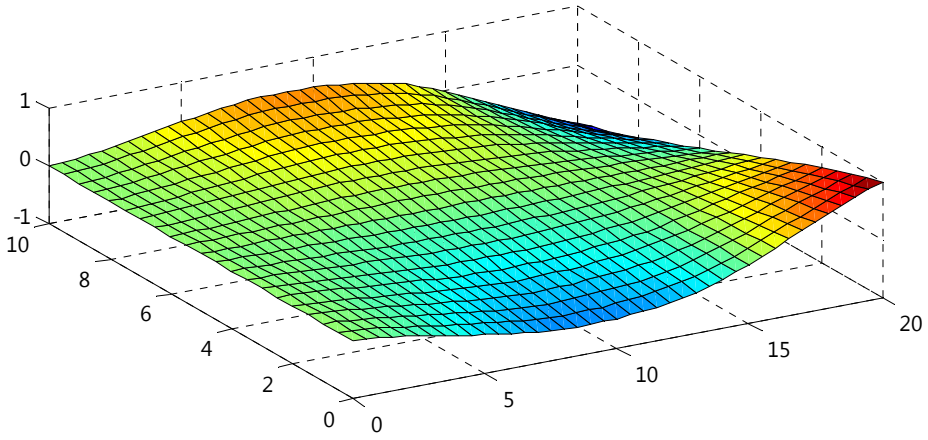
Şekil 5.7: Semiloof plak 1 nci mod şekli, *f=35.890 Hz.*



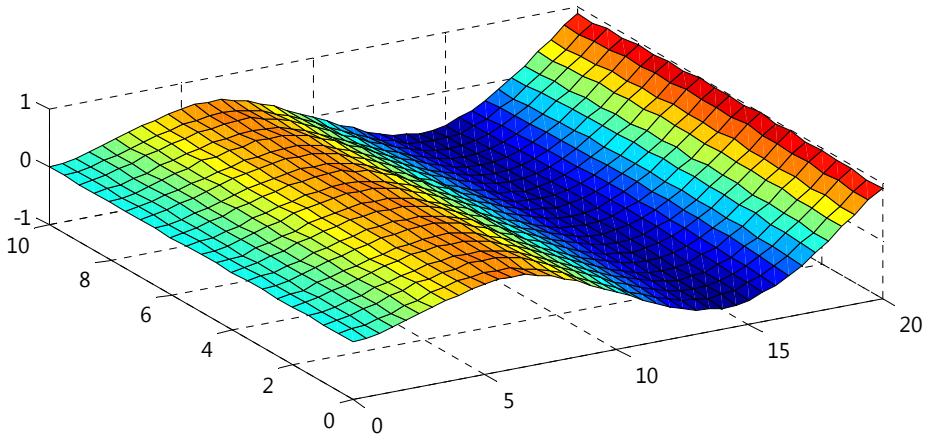
Şekil 5.8: Semiloof plak 2 nci mod şekli, *f=132.931 Hz.*



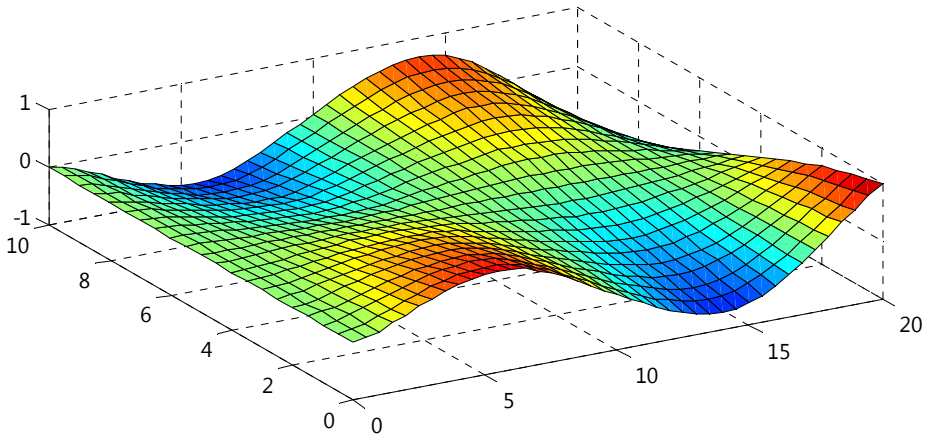
Şekil 5.9: Semiloof plak 3 ncü mod şekli, *f=197.265 Hz.*



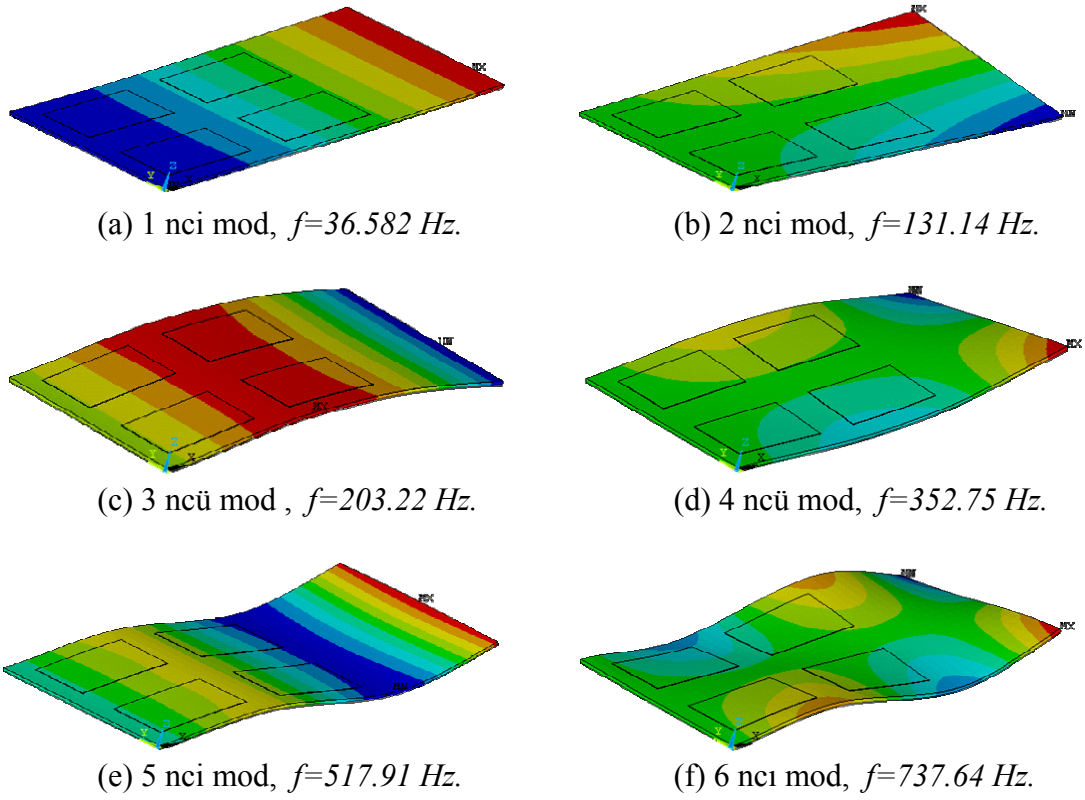
Şekil 5.10: Semiloof plak 4 ncü mod şekli, *f=352.183 Hz.*



Şekil 5.11: Semiloof plak 5 nci mod şekli, *f=507.294 Hz.*



Şekil 5.12: Semiloof plak 6 ncı mod şekli, *f=736.802 Hz.*



(a) 1 nci mod, *f=36.582 Hz.* (b) 2 nci mod, *f=131.14 Hz.*

(c) 3 ncü mod , *f=203.22 Hz.* (d) 4 ncü mod, *f=352.75 Hz.*

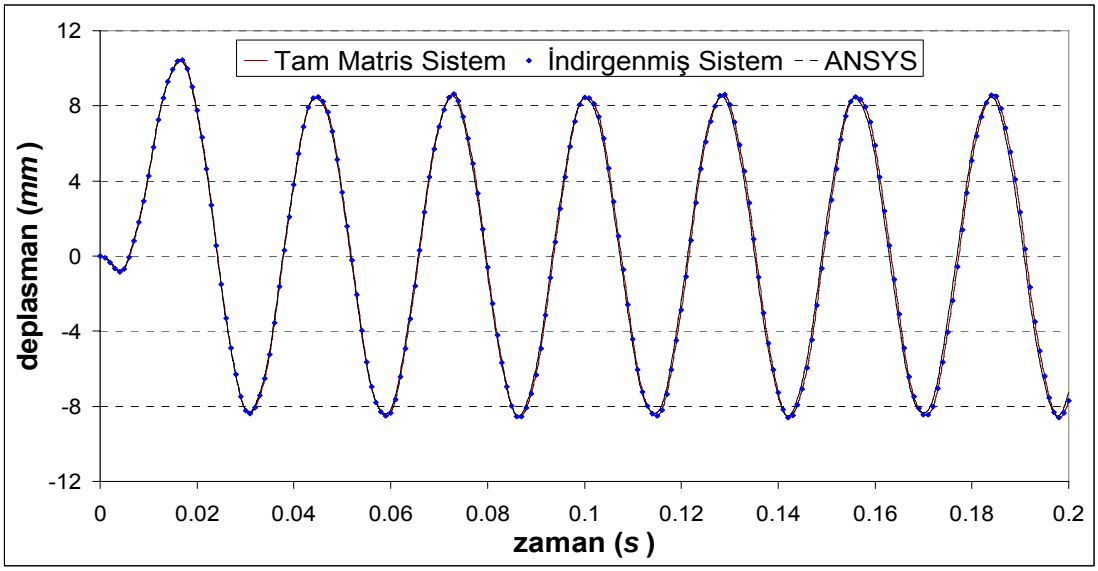
(e) 5 nci mod, *f=517.91 Hz.* (f) 6 ncı mod, *f=737.64 Hz.*

Şekil 5.13: Plak mod şekilleri ve frekansları (*Ansys*)

5.2.2 İndirgeme İşlemi

Semiloof kabuk sonlu eleman yaklaşımı ile elde edilen sistemin serbestlik derecesi 2760 olarak elde edilmiştir. Sistemin dinamik hareket denklemlerinin modern kontrol yöntemlerince tercih edilen durum değişkenleri formunda ifade edilmesi halinde serbestlik derecesi iki katına çıkacağı için elde edilecek matris denklemlerin analizleri çok pratik olmayacaktır. Bu nedenle sisteme etkiyen anlık basınç yükünün özelliği de gözönüne alınarak ilk dört frekansa karşılık gelen iki eğilme ve iki burulma modunu esas alarak mod toplama yöntemi ile indirgeme yapılabileceği değerlendirilmiştir. Plağın yapısal sönümünün ihmal edildiği ideal bir durumun var olduğu kabul edilerek indirgeme işlemi gerçekleştirilmiştir. Anlık basınç yükü etkisindeki plağın zamana bağlı dinamik hareketinin çözümü için (2.1) denklemi ile verilmiş olan anlık basınç yükü denkleminde plağa etkiyen anlık basınç yükü şiddetinin patlama kaynağından uzaklaştıkça azalacağı düşüncesinden hareketle maksimum basınç değeri için p_m=1000 N/m^2 ve zaman adımı için Δt=0.1 ms olarak alınmak üzere EK−A'da verilen Newmark zaman integrasyonu yönteminin kullanıldığı bir Fortran programı hazırlanmıştır. Böylece tam matris sistemin ve mod toplama yöntemiyle elde edilen indirgenmiş sistemin anlık basınç yüküne dinamik

cevabının karşılaştırılmasını yapmak mümkün olmuştur. Yine *Ansys* yazılımı ile oluşturulmuş olan plak modelinin anlık basınç yüküne dinamik cevabı elde edilmiş ve bu üç çözümden elde edilen sonuçların karşılaştırılması için plağın serbest kenar orta noktasının zamana bağlı deplasman hareketi gözönüne alınarak Şekil 5.14'de verilen grafikte gösterilmiştir. Grafikten de anlaşılacağı üzere anlık basınç yükü etkisindeki plağın dinamik davranışının analizinde, anlık basınç yükünün etki süresi de dikkate alınarak yapılan indirgeme işlemi için ilk dört frekans ve bu frekanslara karşılık gelen mod şekillerinin seçilmesinin yeterli olduğu görülmektedir.

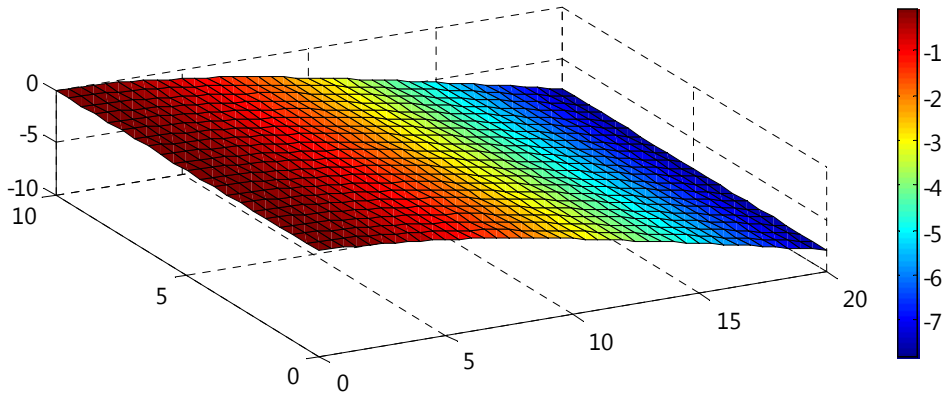


Şekil 5.14: Tam matris sistem, indirgenmiş sistem ve *Ansys* modelinin anlık basınç yüküne dinamik cevabı

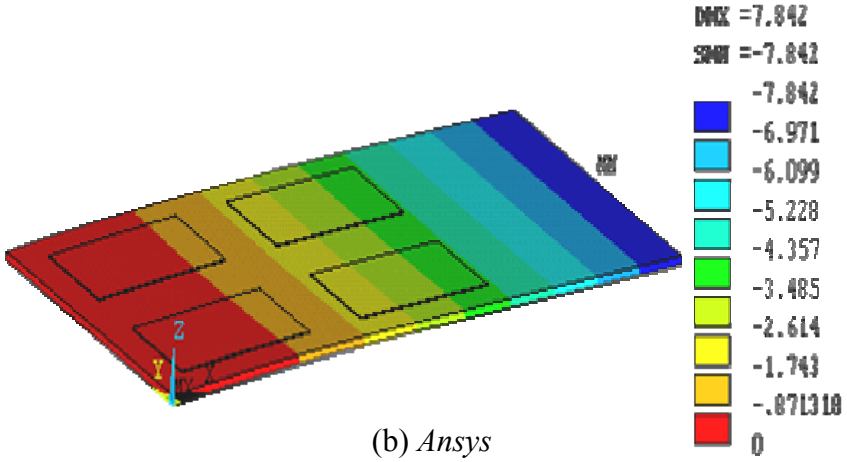
5.2.3 Sabit Basınç ve Sabit Voltaj Yükü Etkisi Altındaki Plak

Sabit basınç yükü etkisindeki plağın statik analizi için plak yüzeyine düzgün yayılı 1000 N/m^2 şiddetinde basınç yükünün etkidiği kabul edilmiştir. Bu yükleme durumunda statik olarak ortaya çıkan şekil değişimi semiloof kabuk sonlu eleman modeli ile ve *Ansys* yazılımı ile analiz edilmiştir. Elde edilen sonuçlar Şekil 5.15'te verilmiştir.

Plak orta düzleminde simetri eksenini oluşturan orta hat çizgisinin deplasmanının incelenmesi, statik çözüm sonuçlarının daha anlamlı olarak karşılaştırılabilmesini sağlayacağından orta hat deplasmanı karşılaştırmalı olarak Şekil 5.16'te verilmiştir. Semiloof kabuk modeli ile yapılan statik analiz sonucunda plağın serbest kenar orta noktasının deplasmanı tam matris çözümünden −7.858 mm, indirgenmiş sistem çözümünden −7.848 mm ve *Ansys* çözümünden −7.842 mm olarak elde edilmiştir.

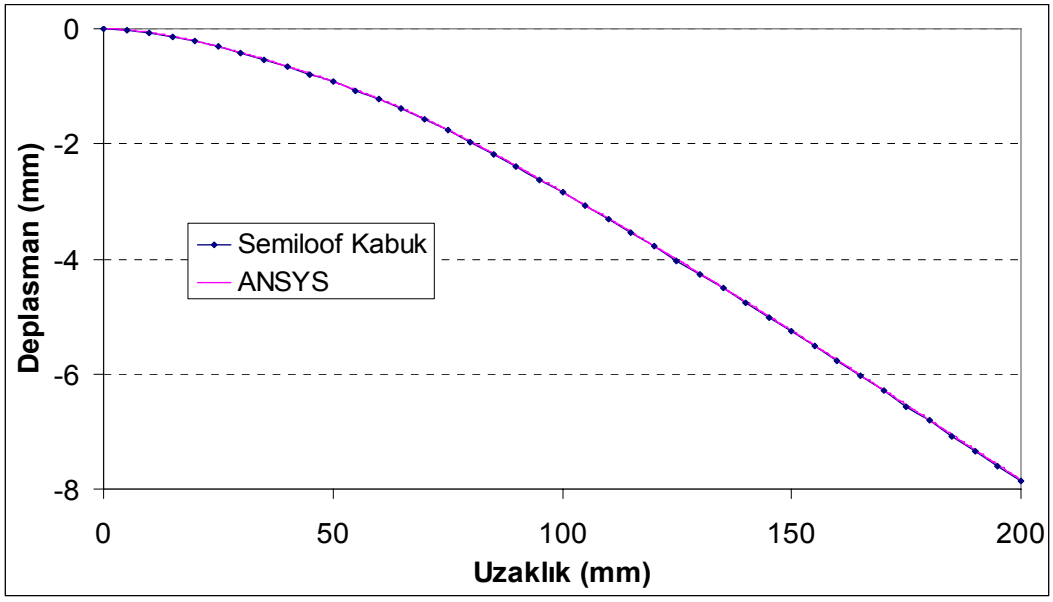


(a) Semiloof Kabuk (*mm*)



(b) *Ansys*

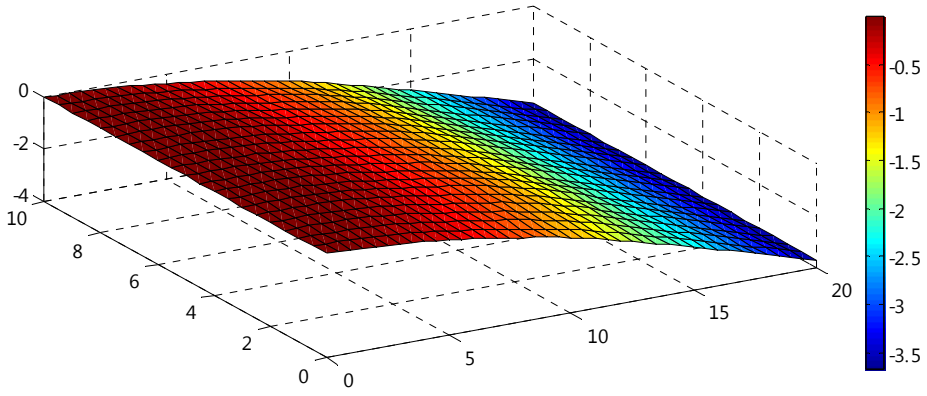
Şekil 5.15: Sabit üniform basınç yükü etkisi altındaki plak



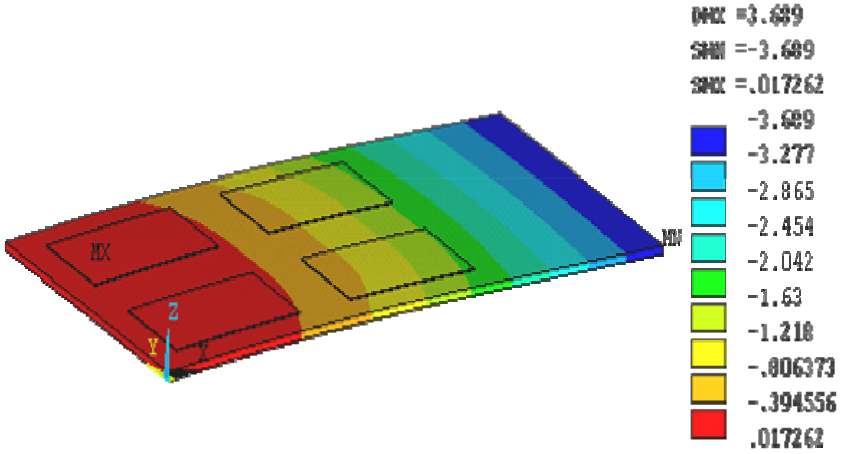
Şekil 5.16: Sabit üniform basınç için orta hat deplasmanı

Semiloof kabuk sonlu eleman modelinin piezoelektrik etkiler yönünden test edilmesi amacıyla piezoelektrik elemanlara uygulanan sabit potansiyel farkının oluşturacağı statik şekil değişimi de incelenmiştir. Bu amaçla üst yüzeydeki piezoelektrik elemanlara 500 V, alt yüzeydeki piezoelektrik elemanlara ise −500 V potansiyel farkı uygulanmıştır. Semiloof sonlu eleman çözümüyle elde edilen deplasmanlar, *Ansys* çözümüyle elde edilenlerle karşılaştırmalı olarak Şekil 5.17'da verilmiştir.

Yine bu yükleme durumu için oluşan deplasmanların karşılaştırılmasının daha anlamlı olması için plağın orta hat çizgisinin deplasmanları karşılaştırmalı olarak Şekil 5.18'de verilmiştir. Oluşturulan semiloof kabuk sonlu modeli ile piezoelektrik elemanlara uygulanan potansiyel farkları sonucunda plağın serbest kenar orta noktasının deplasmanı için tam matris çözümünden −3.67 mm, indirgenmiş sisteme ait çözümden −3.7499 mm ve *Ansys* çözümünden ise −3.689 mm olarak elde edilmiştir. Tam matris çözümü ile *Ansys* çözümü arasında % 0.3253, indirgenmiş sistem çözümü ile *Ansys* çözümü arasında ise % 1.65 fark olduğu görülmektedir.

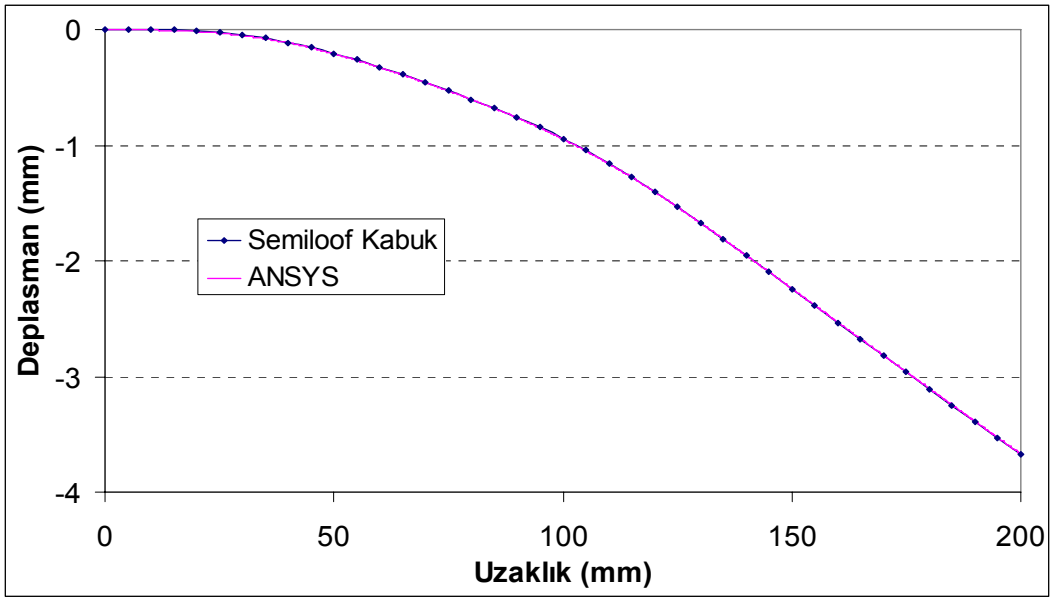


(a) Semiloof Kabuk



(b) *Ansys*

Şekil 5.17: Sabit potansiyel farkı uygulanan plak



Şekil 5.18: Sabit potansiyel farkı için orta hat deplasmanı

5.2.4 Titreşim Kontrolü

Sonlu eleman modeli semiloof kabuk sonlu eleman modeli ile elde edilen plağın anlık basınç yükü etkisi altında oluşan titreşimlerinin kontrolü için modelin durum değişkenleri formunda ifade edilmesinin kontrol sisteminin oluşturulmasında kolaylık sağlayacağı önceki bölümlerde belirtilmişti. İndirgeme işlemleri ile plağın sonlu eleman modelinin serbestlik derecesi 4'e başarılı bir şekilde indirgenmiştir. İndirgenmiş katılık ve kütle matrisleri (4.14) denklemlerinde kullanılarak sistem matrisi, kontrol matrisi ve bozuntu vektörleri, sistemin serbestlik derecesi n=8 olmak üzere aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\mathbf{A} = 10^{6} \cdot \left[\begin{array}{cccc|c} & & \mathbf{[0]}_{4\times4} & & 10^{-6}\cdot\mathbf{I}_4 \\ \hline -0.050852 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & -0.69761 & 0 & 0 & \mathbf{[0]}_{4\times4} \\ 0 & 0 & -1.5362 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & -4.8966 & \end{array}\right]$$

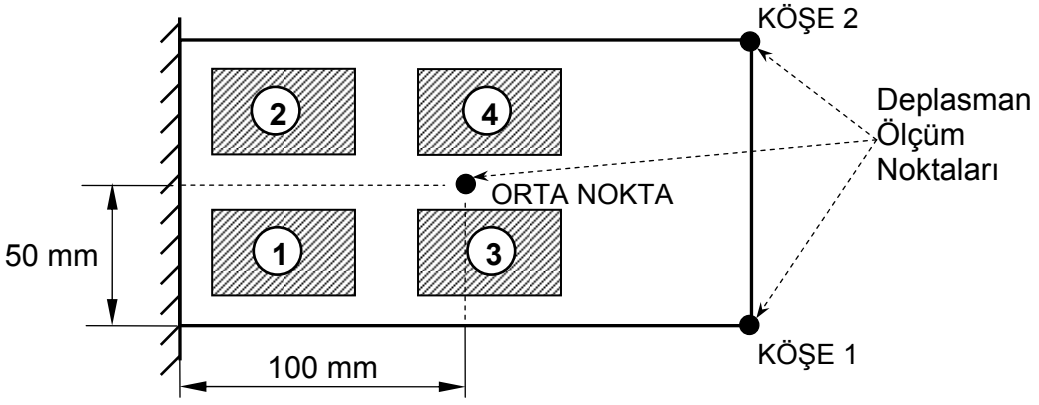
$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{cccc} & \mathbf{[0]}_{4\times4} & & \\ \hline 0.5590 & 0.5590 & 0.2068 & 0.2068 \\ 0.5107 & -0.5107 & -0.1828 & 0.1828 \\ -0.5027 & -0.5027 & 2.6742 & 2.6742 \\ -0.0282 & 0.0282 & 3.1717 & -3.1710 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{E} = 10^{6} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1.7931 & 0 & 0.6761 & 0 \end{bmatrix}^{T}$$

Plağın serbest kenar köşe noktalarından ve orta noktasından zamana bağlı deplasman ölçümlerinin yapıldığı kabul edilerek bu noktalara karşılık gelen düğüm noktalarının serbestlikleri ve ağırlıklı modal dönüşüm matrisi $\tilde{\varphi}$ gözönüne alınarak elde edilen çıkış matrisi ise

$$\mathbf{C}_z = \left[\begin{array}{cccc:c} 225.5047 & 341.5648 & 244.88 & 443.6668 & \\ 225.5047 & -341.5648 & 244.88 & -443.6668 & [\mathbf{0}]_{3\times 4} \\ 79.0111 & 0 & -126.3025 & 0 & \end{array}\right]$$

şeklindedir. Deplasman ölçümünün yapıldığı noktaların yerleri ve piezoelektrik elemanların numaralandırılması Şekil 5.19'da gösterildiği gibidir.

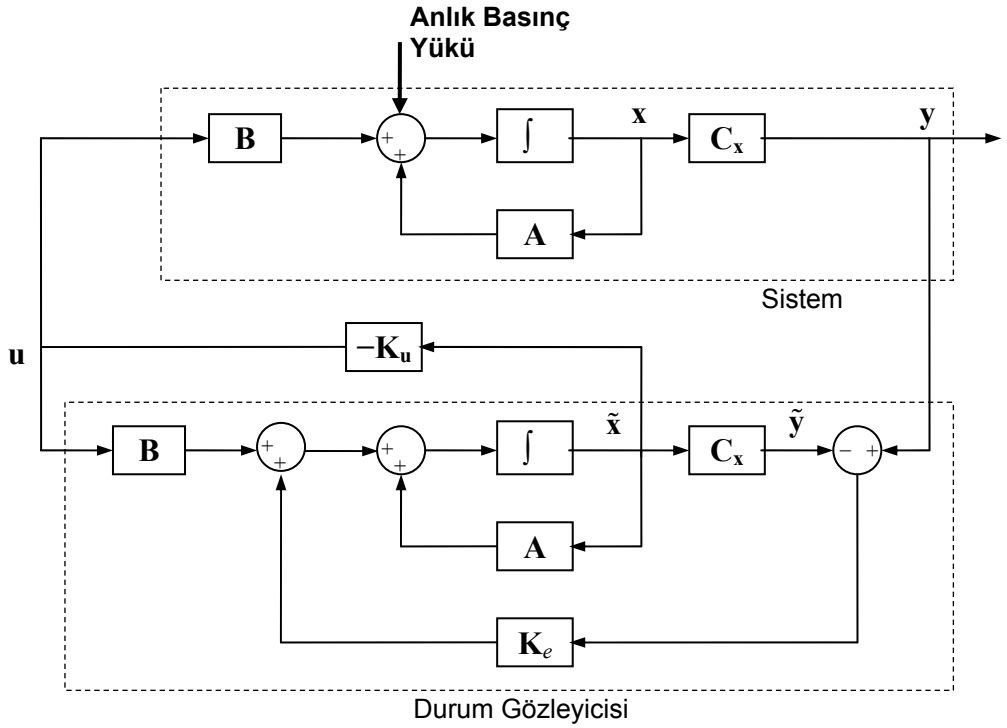


Şekil 5.19: Deplasman ölçüm noktaları ve piezoelektrik eleman numaraları.

Böylece durum denklemleri (4.15) ve (4.17) eşitlikleri ile verilen sistemin tüm matrisleri elde edilmiş olur. Kontrol uygulamasından önce (4.33) ve (4.46) ile verilen kontroledilebilirlik ve gözlenebilirlik matrisleri oluşturularak sistemin tam kontroledilebilir ve gözlenebilir olduğu kolayca gösterilebilir.

Kontrol modelinin daha gerçekçi olması amacıyla Şekil 4.3'de blok diyagramı verilmiş olan gözleyici kontrol sistemi, sisteme etkiyen bozuntu yükü yani anlık basınç yükü etkisi gözönüne alınarak Şekil 5.20'de daha ayrıntılı olarak tekrar gösterilmiştir.

Şekilde görülen blok diyagramının kullanılması durumunda geri besleme kazanç matrislerinin belirlenmesine ihtiyaç vardır. Gözleyicinin kutuplarının daha hızlı olması için önce regülatör kazanç matrisi $\mathbf{K_u}$ belirlenmiştir.



Şekil 5.20: Anlık basınç yükü etkiyen durum gözleyicili kontrol sistemi

Sistem geri besleme kazanç matrisini belirlemek amacıyla Şekil 4.2'de verilmiş tam durum geri beslemeli sistem için optimal doğrusal regülatör kazanç matrisi esas alınmış, performans göstergesinde ağırlık matrisleri $\mathbf{Q}=10^4\cdot\mathbf{I}_8$ ve $\mathbf{R}=\mathbf{I}_4$ olmak üzere optimum kazanç matrisinin değeri

$$\mathbf{K_u}=\begin{bmatrix} 27.790 & -18.222 & 941.066 & -2018.928 & 66.417 & 66.675 & -13.127 & -0.562 \\ 27.790 & 18.222 & 941.066 & 2018.928 & 66.417 & -66.675 & -13.127 & 0.562 \\ -148.945 & 1785.273 & 346.317 & 719.783 & 24.259 & -23.450 & 69.477 & 70.702 \\ -148.945 & -1785.273 & 346.317 & -719.793 & 24.259 & 23.450 & 69.477 & -70.702 \end{bmatrix}$$

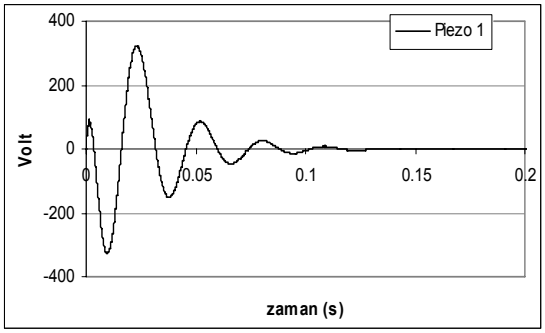
olarak hesaplanmıştır. ($\mathbf{A}-\mathbf{BK_u}$) ile ifade edilen regülatör sistem matrisinin kutupları (yani özdeğerleri) ise

$$regulatorpoles_1=\begin{bmatrix} -42.1469\pm 221.5308\,j \\ -192.3912\pm 1224.4222\,j \\ -224.2131\pm 2201.4341\,j \\ -38.3347\pm 834.3505\,j \end{bmatrix}$$

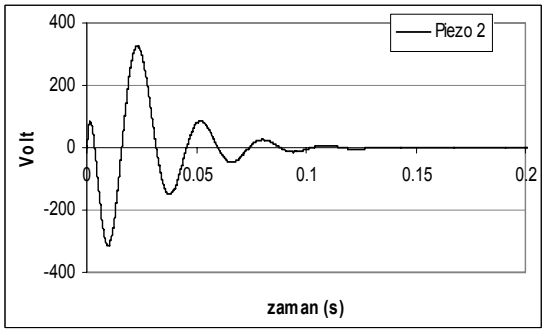
şeklindedir. Gözleyicinin kutuplarının 10 kat daha hızlı olması için yani (4.57) denklemi ile verilen ($\mathbf{A}-\mathbf{K}_e\mathbf{C}$) matrisinin özdeğerlerinin sol yarı eksende, köşegen üzerinde, regülatör özdeğerlerinden 10 kat daha uzakta olabilmesi için $\mathbf{K}_e$ matrisinin değeri kutup yerleştirme yöntemi ile

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 6.45 & 41.79 & 16.17 & -42.65 & 273421.06 & 323486.06 & 53696.92 & -21076.12 \\ -10.07 & -125.30 & 10.48 & 74.44 & 267822.28 & -475987.69 & 111392.48 & -3100.04 \\ 48.59 & -21.66 & 37.48 & -24.44 & 903100.73 & 243082.18 & -520271.68 & -50577.60 \end{bmatrix}^T$$

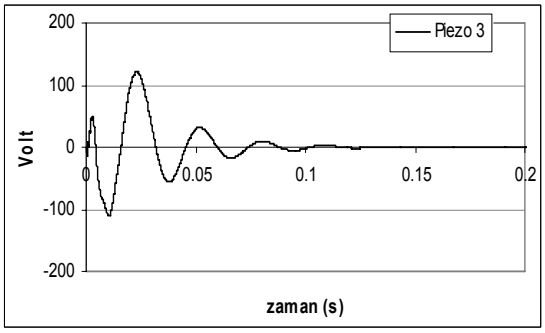
olarak bulunmuştur. Şekil 4.3'de verilmiş olan gözleyicili kontrol sistemi *Matlab-Simulink* yazılımı kullanılarak modellenmiş ve sistemi kontrol etmek için daha önceden numaralandırılmış piezoelektrik elemanlara uygulanan potansiyel farkları Şekil 5.21'de gösterildiği gibi elde edilmiştir. Deplasman ölçümünün yapıldığı kabul edilen noktaların zamana bağlı deplasman değişimleri ise Şekil 5.22'de gösterildiği gibidir.



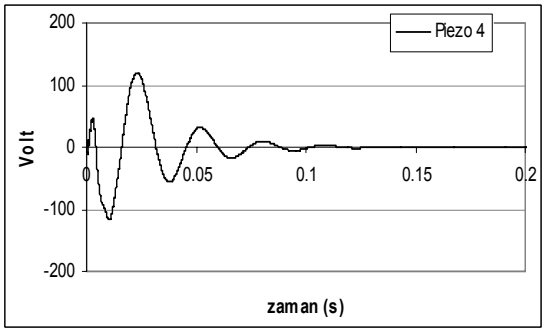
(a) 1 nci piezoelektrik eleman



(b) 2 nci piezoelektrik eleman



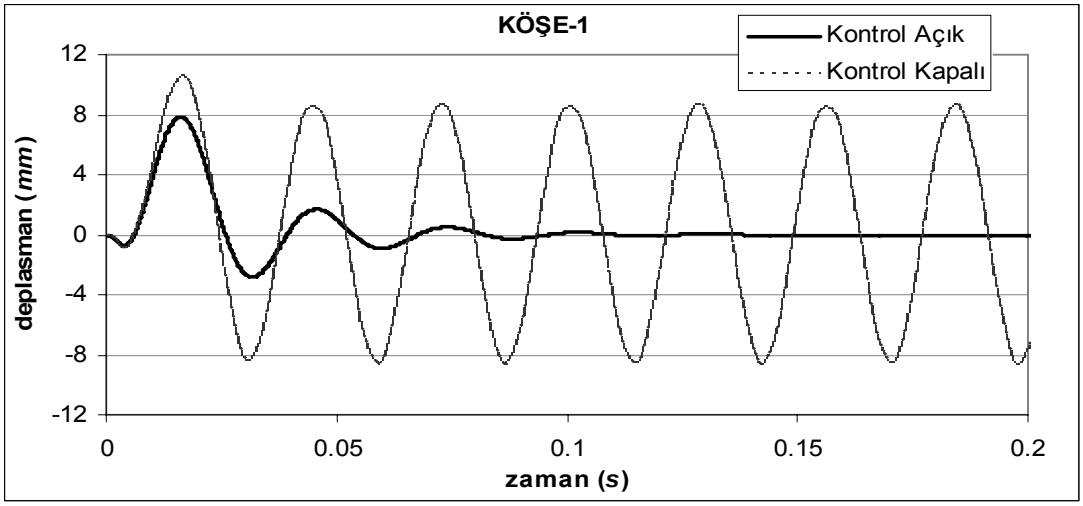
(a) 3 ncü piezoelektrik eleman



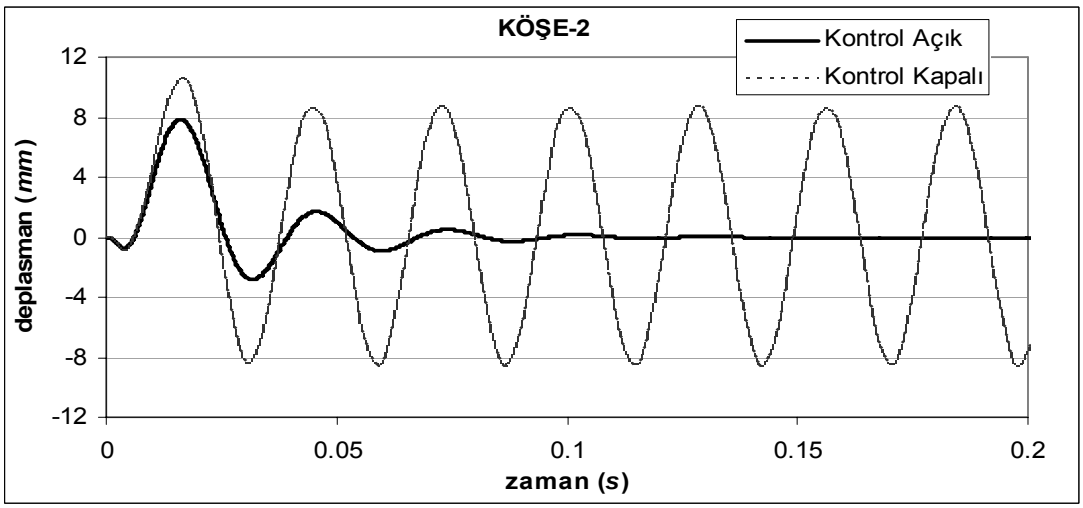
(b) 4 ncü piezoelektrik eleman

Şekil 5.21: Q=$10^4 \cdot \mathbf{I}_8$ ve **R**=$\mathbf{I}_4$ için piezoelektrik elemanlara uygulanan potansiyel farkları.

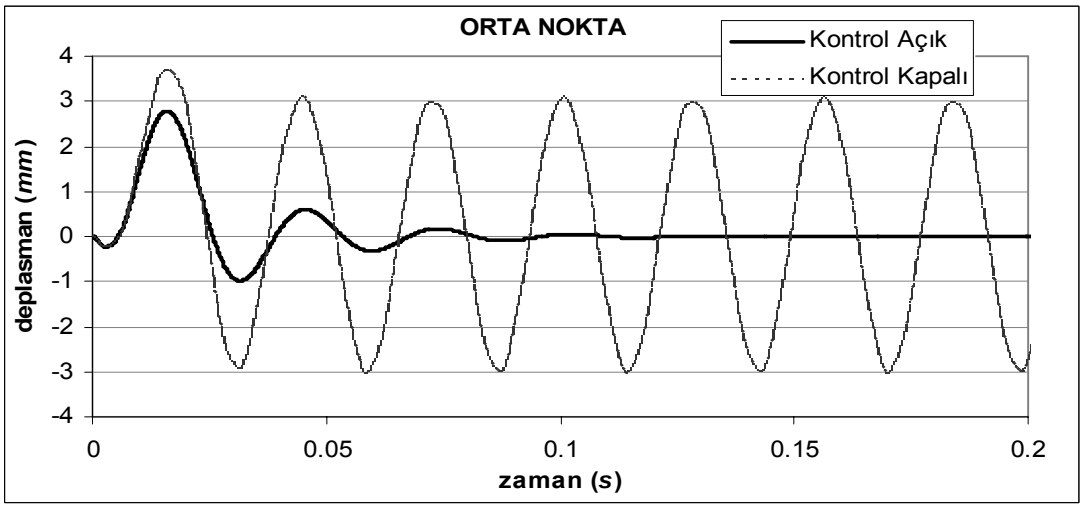
Şekil 5.22'de verilen grafiklerde de görülebileceği gibi plağın serbest kenar köşe noktalarının zamana bağlı deplasman değişimleri birbiriyle eşdeğerdir ve sadece eğilme modu uyarılmıştır. Plak orta noktasının serbest kenar köşe noktaları ile orantılı deplasman hareketi yapıyor olması ise uyarılan mod şeklinin birinci eğilme mod şekli olduğunu daha yüksek frekanslı modların uyarılmadığını göstermektedir. Kontrol açık durumda iken piezoelektrik elemanların oluşturduğu kuvvet ve momentlerin plağın maksimum titreşim genliğini azalttığı da dikkat çekmektedir.



(a) Serbest kenar 1 nci köşe noktası



(b) Serbest kenar 2 nci köşe noktası



(c) Plak orta noktası

Şekil 5.22: $\mathbf{Q}=10^4\cdot\mathbf{I}_8$ ve $\mathbf{R}=\mathbf{I}_4$ için zamana bağlı deplasman değişimleri

Ağırlık matrislerinin değerleri $\mathbf{Q}=10^5\cdot\mathbf{I}_8$ ve $\mathbf{R}=\mathbf{I}_4$ alındığında

$$\mathbf{K}_u = \begin{bmatrix} 204.46 & -305.98 & 7428.63 & -17324.13 & 212.07 & 213.16 & -42.87 & -0.173 \\ 204.46 & 305.98 & 7428.63 & 17324.13 & 212.07 & -213.16 & -42.87 & 0.173 \\ -1173.16 & 15264.09 & 2632.92 & 5984.95 & 70.66 & -65.03 & 219.37 & 223.453 \\ -1173.16 & -15264.09 & 2632.92 & -5984.95 & 70.66 & -65.03 & 219.37 & -223.453 \end{bmatrix}$$

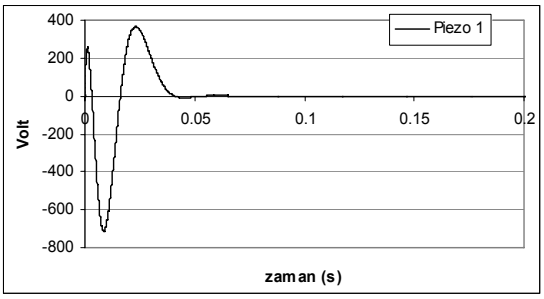
olarak optimum kazanç matrisi hesaplanmış ve buna karşılık regülatör kutupları için

$$regulatorpoles_2 = \begin{bmatrix} -133.312 \pm 181.97\,j \\ -608.040 \pm 1079.6\,j \\ -708.507 \pm 2095.81\,j \\ -120.812 \pm 826.63\,j \end{bmatrix}$$

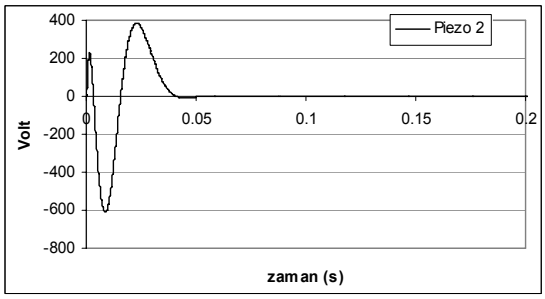
değerleri elde edilmiştir. Gözleyici kutupları yine 10 kat daha hızlı olarak seçilmiş ve

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 27.5721 & 253.9872 & 5.4742 & -192.1914 & 325052.62 & 440832.99 & 134057.03 & -8762.639 \\ 6.8294 & -147.6754 & 9.7925 & 91.0979 & 244335.58 & -177735.65 & -1175.83 & -36867.495 \\ 46.6401 & -126.3671 & -37.4056 & -13.3201 & 891225.91 & 135311.27 & -834268.89 & -231930.804 \end{bmatrix}^T$$

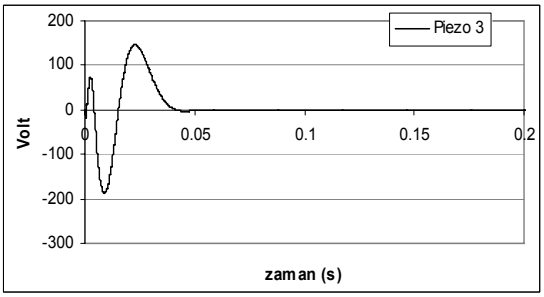
şeklinde gözleyici kazanç matrisi hesaplanmıştır. Elde edilen matrisler kontrol sisteminde kullanılmış ve Şekil 5.23'te görülen piezoelektrik eleman potansiyel farkları bulunmuştur. Deplasman ölçümü yapılan noktaların zamana bağlı hareketleri ise Şekil 5.24'te görüldüğü gibidir.



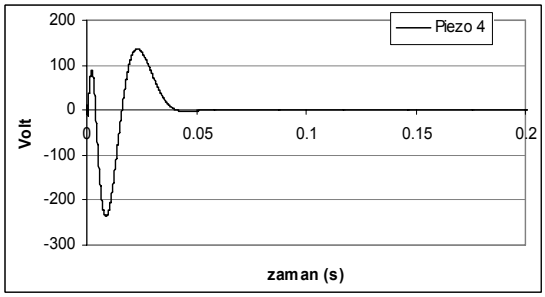
(a) 1 nci piezoelektrik eleman



(b) 2 nci piezoelektrik eleman

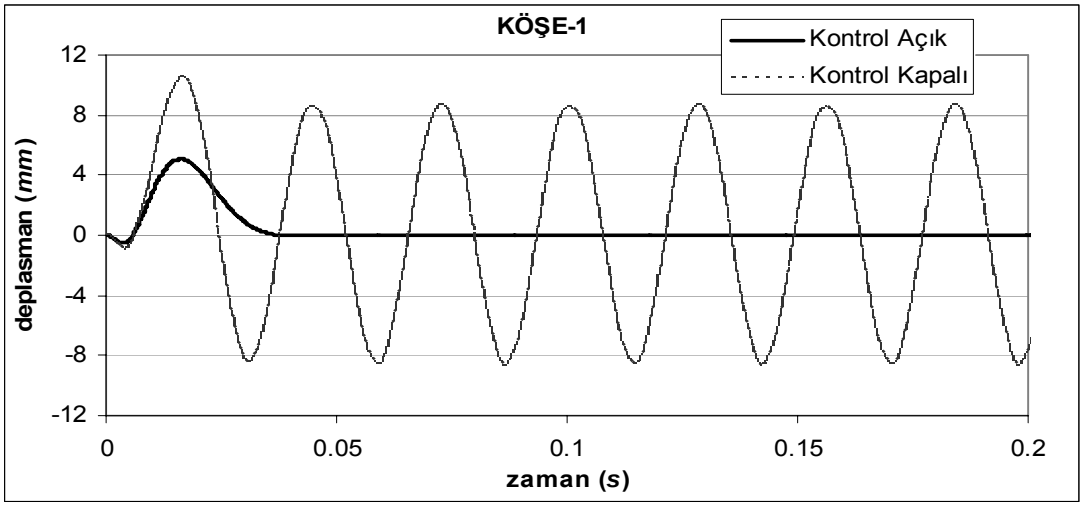


(a) 3 ncü piezoelektrik eleman

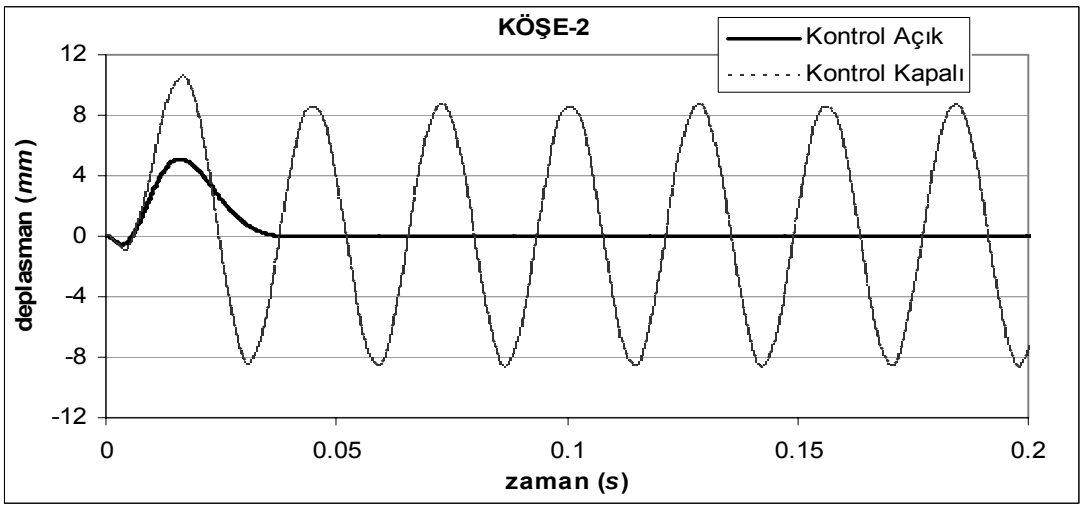


(b) 4 ncü piezoelektrik eleman

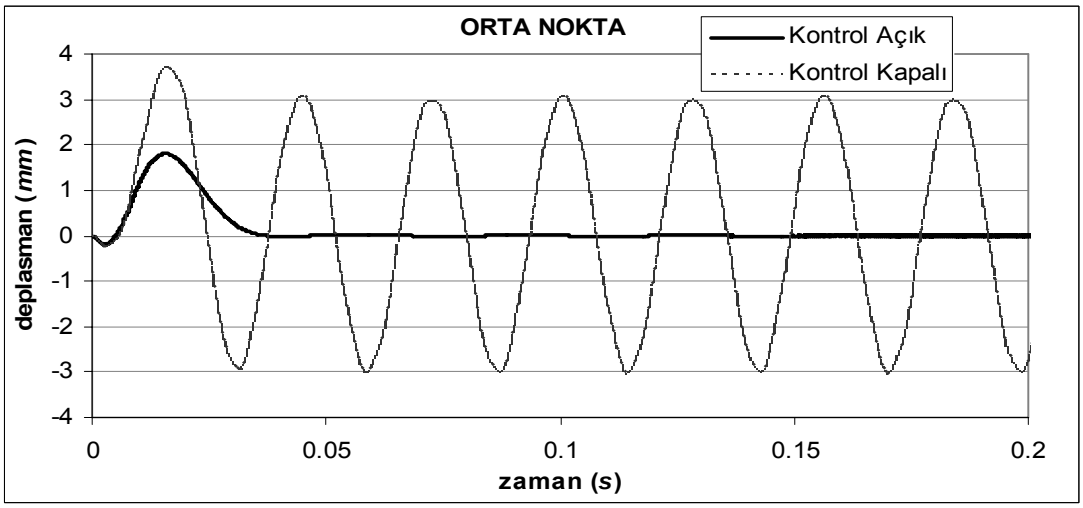
Şekil 5.23: $\mathbf{Q}=10^5\cdot\mathbf{I}_8$ ve $\mathbf{R}=\mathbf{I}_4$ için piezoelektrik elemanlara uygulanan potansiyel farkları.



(a) Serbest kenar 1 nci köşe noktası



(b) Serbest kenar 2 nci köşe noktası

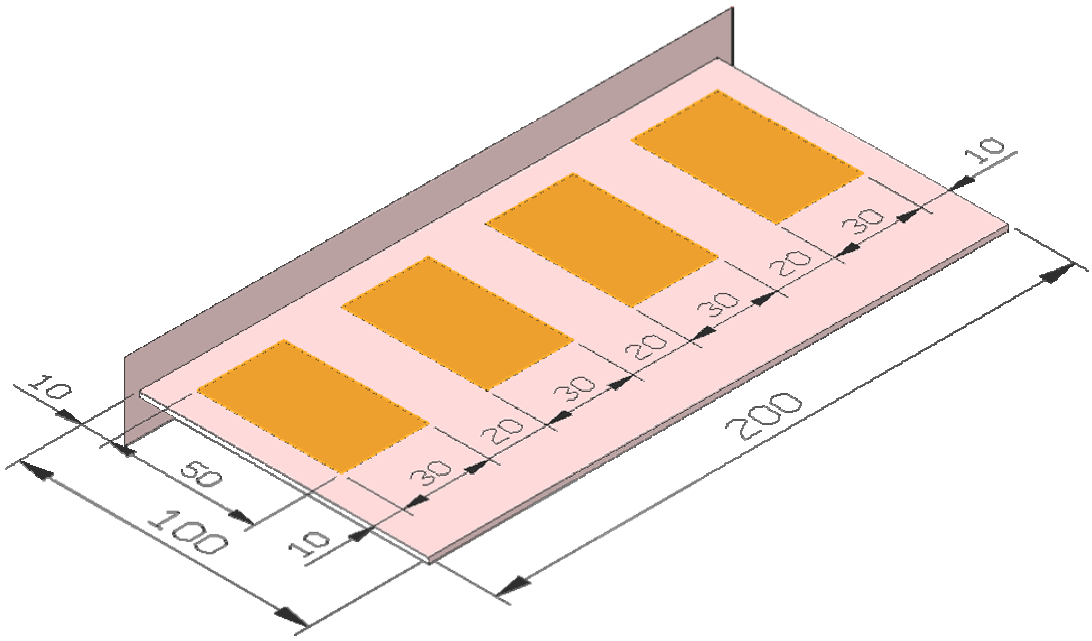


(c) Plak orta noktası

Şekil 5.24: $\mathbf{Q}=10^5\cdot\mathbf{I}_8$ ve $\mathbf{R}=\mathbf{I}_4$ için zamana bağlı deplasman değişimleri

5.3 İkinci Plak Modeli

Malzeme özellikleri Tablo 5.1'de verilen değerler olmak üzere ve katman kalınlıkları ile fiber doğrultuları aynı olan ikinci plak modeli Şekil 5.25'te gösterildiği gibidir. Plak semiloof kabuk sonlu eleman modeli ile 20×40 elemanla modellenmiş ve sonlu eleman sisteminin serbestlik derecesi 10560 olmuştur. Plak üzerinde deplasman ölçümünün yapıldığı kabul edilen noktaların yerleri ve kullanılan piezoelektrik elemanların numaraları ise Şekil 5.26'da verildiği gibidir.

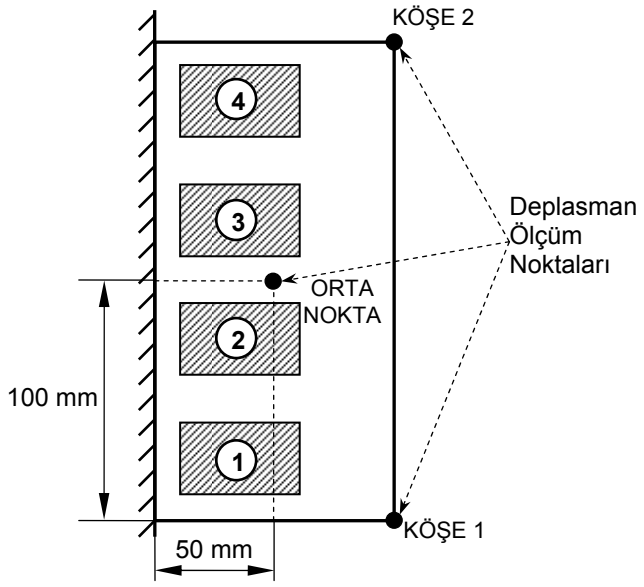


Şekil 5.25: İkinci plak modeli (boyutlar *mm*'dir)

Semiloof kabuk sonlu eleman ile modellenmiş olan ikinci plak aynı zamanda *Ansys* yazılımı kullanılarak ta modellenmiş ve serbest titreşim çözümleri elde edilmiştir. Semiloof kabuk ve *Ansys* çözümüyle elde edilmiş olan ilk 6 serbest titreşim frekansı karşılaştırmalı olarak Tablo 5.3'te verilmiştir. Her iki çözümden elde edilen sonuçların oldukça uyumlu oldukları görülmektedir. Birinci plak modelinde hem statik hem dinamik analiz sonuçlarının uyumluluğu kullanılan sonlu eleman modelinin geçerliliğini gösterdiğinden ikinci plak modeli için sadece serbest titreşim analiz sonuçlarının karşılaştırılmasının yeterli olacağı değerlendirilmiştir.

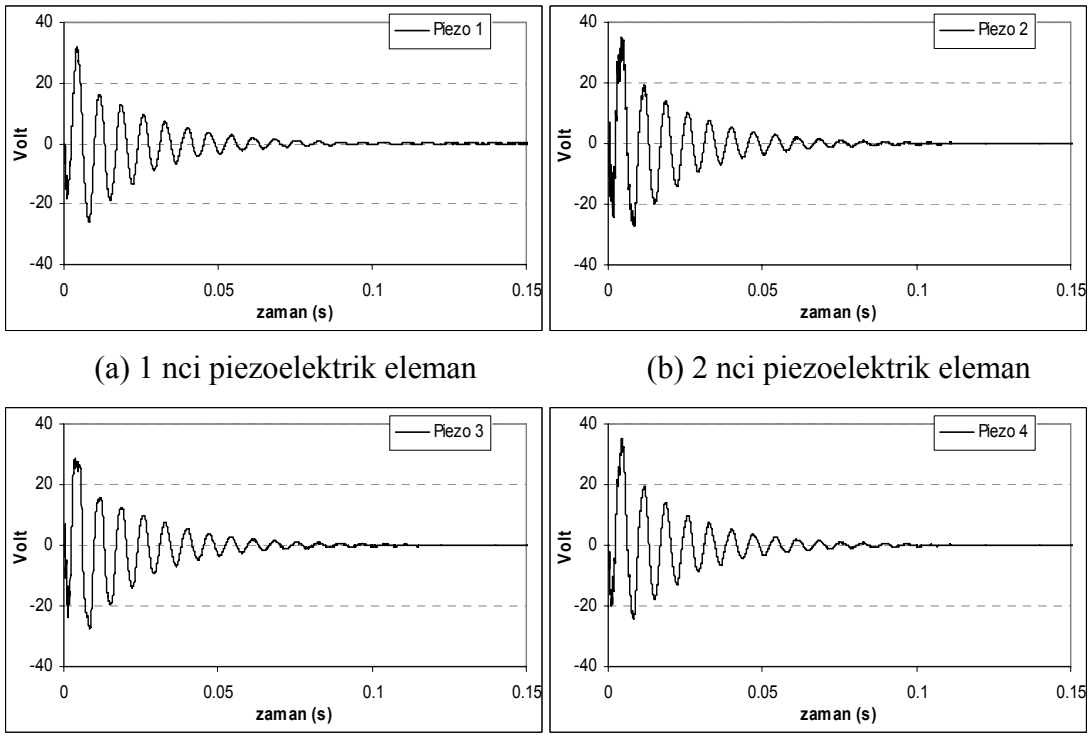
Tablo 5.3: İkinci plağın semiloof kabuk sonlu eleman ve *Ansys* yazılımı ile elde edilen serbest titreşim frekanslarının karşılaştırılması (*Hz*).

Modlar	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Semiloof Plak	140.678	192.000	357.971	673.810	822.985	911.983
Ansys	140.66	191.15	354.92	673.19	776.72	822.53



Şekil 5.26: Deplasman ölçüm noktaları ve piezoelektrik eleman numaraları.

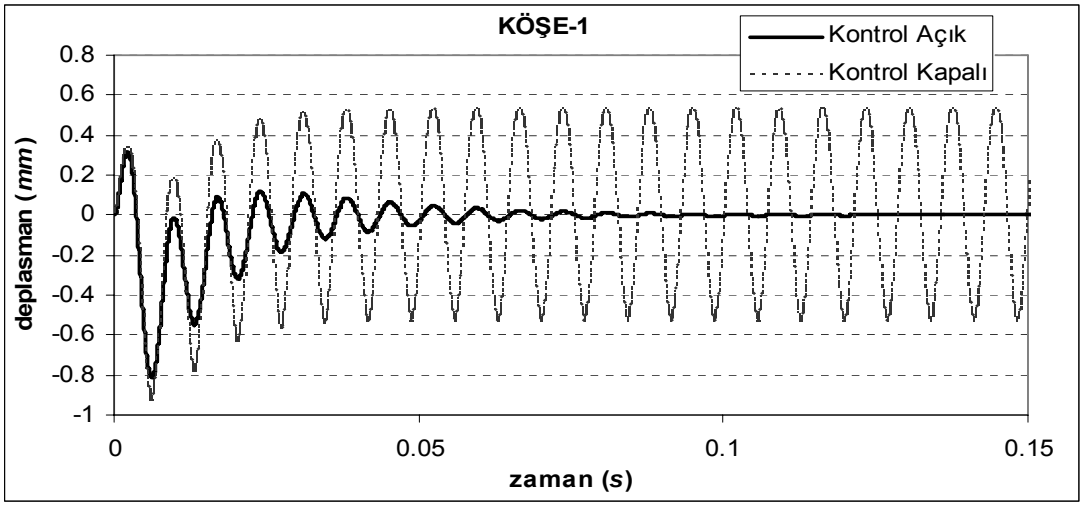
Plak titreşimlerinin kontrolü için performans göstergesinde ağırlık matrisleri $\mathbf{Q}=10^3\cdot\mathbf{I}_8$ ve $\mathbf{R}=\mathbf{I}_4$ alındığında piezoelektrik elemanlara uygulanan potansiyel farkları Şekil 5.27'deki gibidir. Bu durumda plağın deplasman ölçümü yapıldığı düşünülen noktalarının zamana bağlı deplasman değişimleri ise Şekil 5.28'de verilmiştir.



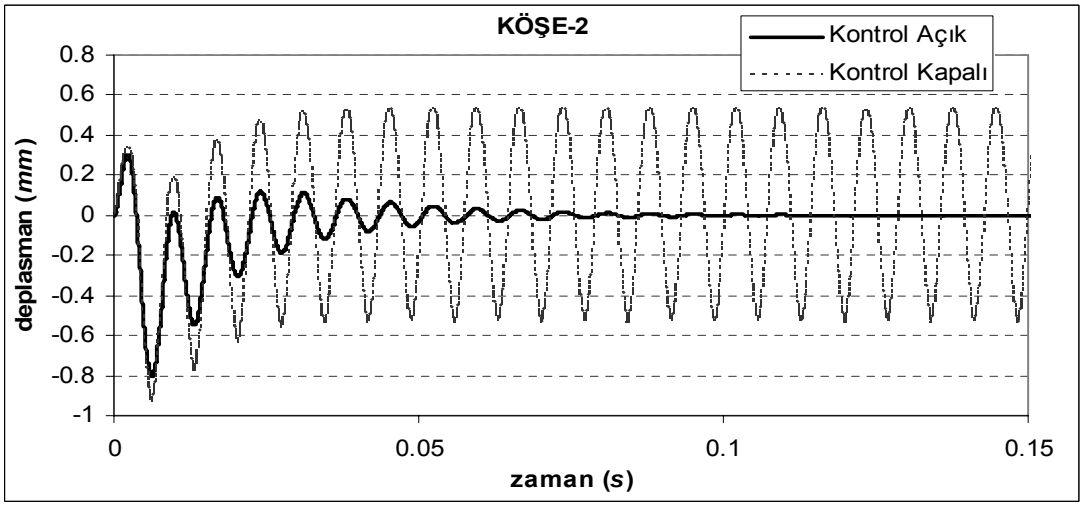
(a) 1 nci piezoelektrik eleman (b) 2 nci piezoelektrik eleman

(c) 3 ncü piezoelektrik eleman (d) 4 ncü piezoelektrik eleman

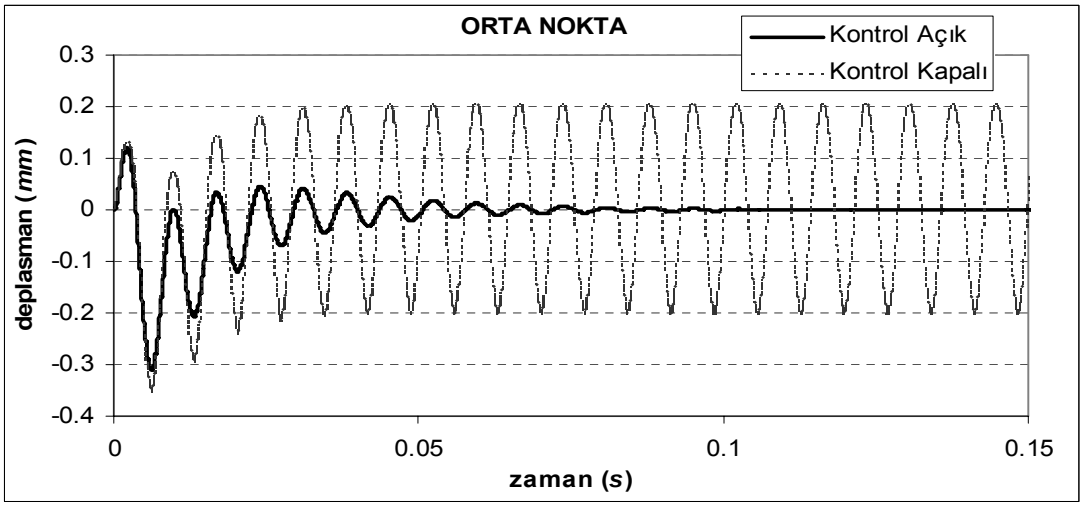
Şekil 5.27: $\mathbf{Q}=10^3\cdot\mathbf{I}_8$ ve $\mathbf{R}=\mathbf{I}_4$ için piezoelektrik elemanlara uygulanan potansiyel farkları.



(a) Serbest kenar 1 nci köşe noktası



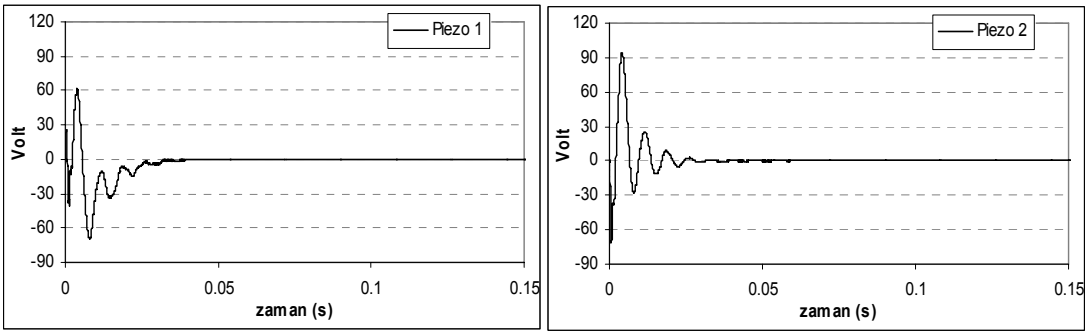
(b) Serbest kenar 2 nci köşe noktası



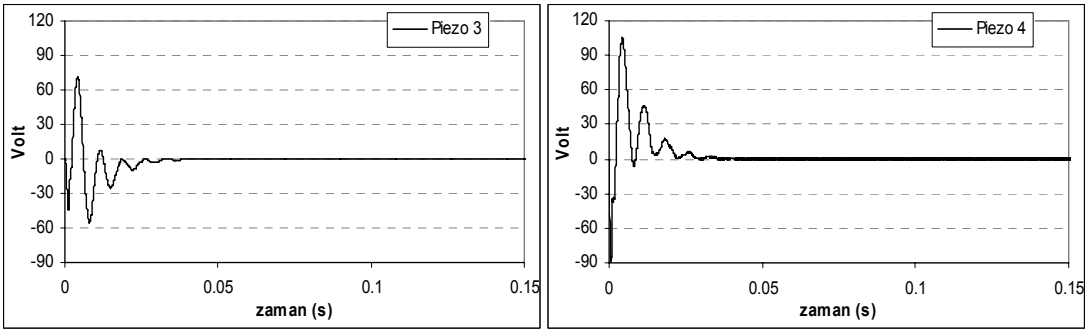
(c) Plak orta noktası

Şekil 5.28: $\mathbf{Q}=10^3\cdot\mathbf{I}_8$ ve $\mathbf{R}=\mathbf{I}_4$ için zamana bağlı deplasman değişimleri

Serbest kenar köşe noktalarının ve plağın orta noktasının deplasmanlarına bakıldığında ilk serbest titreşim frekansı yüksek olan plağın, titreşim yaparken aynı anda anlık basınç yükünü de takip ettiği görülmektedir. Performans göstergesinde ağırlık matrislerinin seçimi ile elde edilmiş olan kazanç matrisi kullanılarak uygulanan geri beslemede piezoelektrik potansiyel farkları 40 V değerine bile ulaşmamaktadır. Piezoelektrik elemanlara 1000 V değerine kadar potansiyel farkı uygulanmasına izin verildiği düşünülürse titreşimlerin sönümlenmesi için ağırlık matrisleri değiştirilerek daha yüksek potansiyel farkı uygulamasını sağlayacak geri besleme kazanç matrisleri belirlenebilir. Bu amaçla plak titreşimlerinin kontrol edilmesi için performans göstergesinde ağırlık matrisleri $\mathbf{Q}=10^4\cdot\mathbf{I}_8$ ve $\mathbf{R}=\mathbf{I}_4$ olarak seçilirse, oluşan titreşimleri sönümlemek için piezoelektrik elemanlara uygulanması gereken potansiyel farkları Şekil 5.29'da gösterildiği gibi olup en yüksek potansiyel farkı değeri 100 V civarındadır. Bu kontrol durumunda plağın deplasman ölçümü yapıldığı kabul edilen noktalarının zamana bağlı deplasman değişimleri ise Şekil 5.30'da görülmektedir.

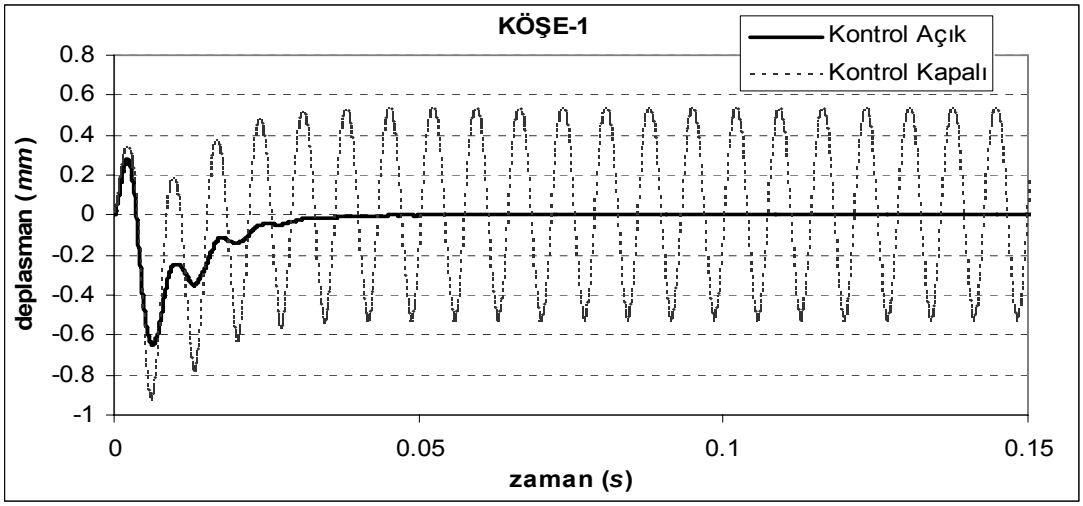


(a) 1 nci piezoelektrik eleman (b) 2 nci piezoelektrik eleman

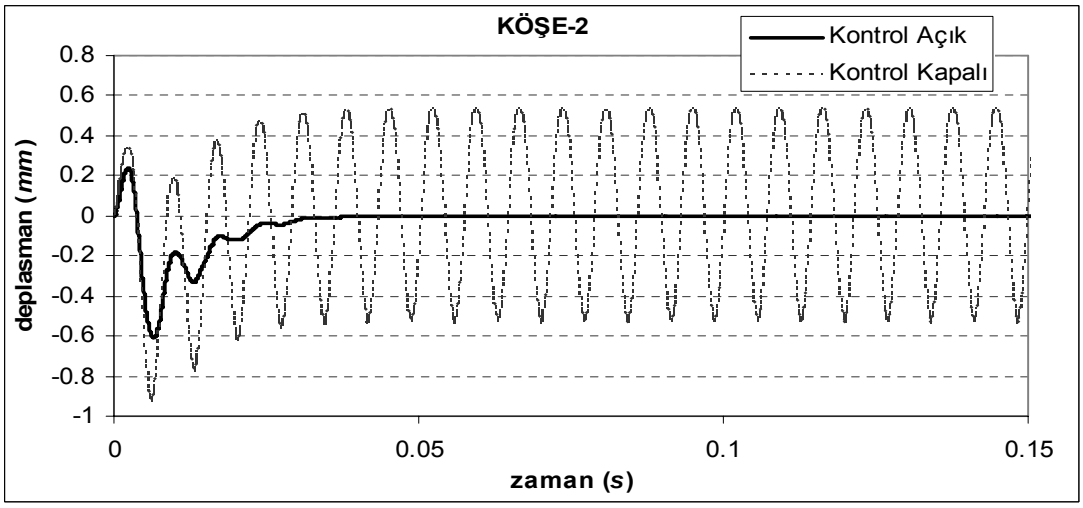


(a) 3 ncü piezoelektrik eleman (b) 4 ncü piezoelektrik eleman

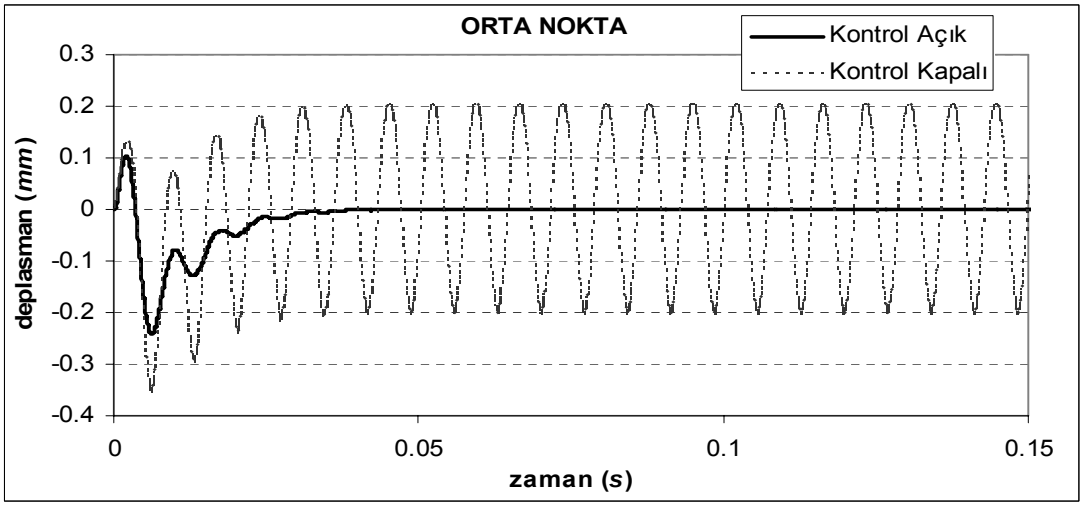
Şekil 5.29: $\mathbf{Q}=10^4\cdot\mathbf{I}_8$ ve $\mathbf{R}=\mathbf{I}_4$ için piezoelektrik elemanlara uygulanan potansiyel farkları.



(a) Serbest kenar 1 nci köşe noktası



(b) Serbest kenar 2 nci köşe noktası

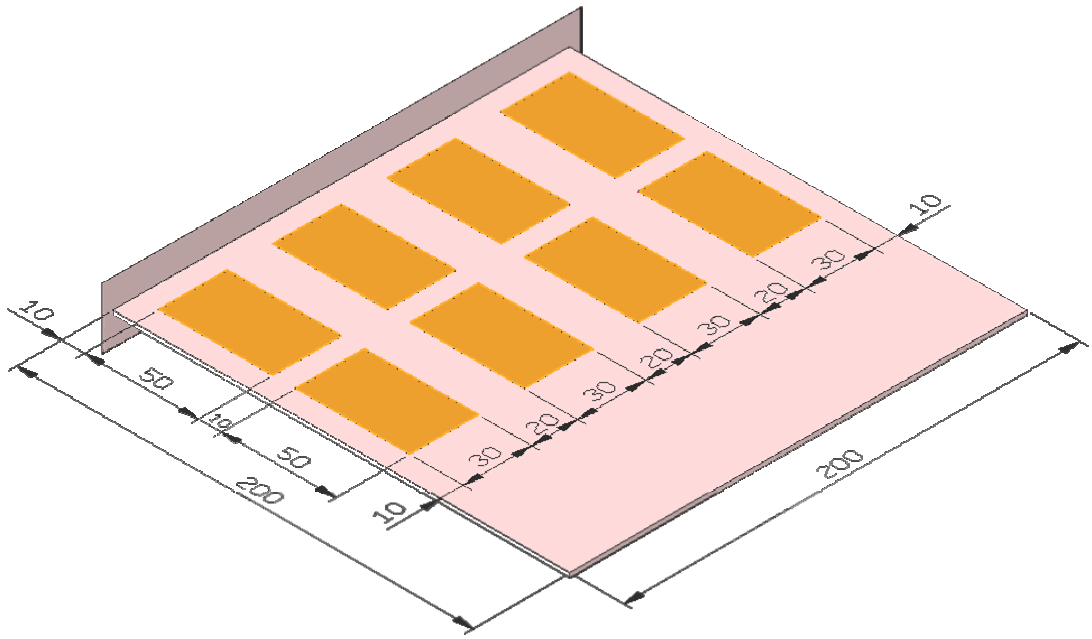


(c) Plak orta noktası

Şekil 5.30: $\mathbf{Q}=10^4\cdot\mathbf{I}_8$ ve $\mathbf{R}=\mathbf{I}_4$ için zamana bağlı deplasman değişimleri

5.4 Üçüncü Plak Modeli

Üçüncü plak modeli için Tablo 5.1'de malzeme özellikleri verilen değerler kullanılmak üzere ve katman kalınlıkları ile fiber doğrultuları birinci ve ikinci plak ile aynı olan üçüncü plak modeli Şekil 5.31'de gösterilmiştir. Plak semiloof kabuk sonlu eleman modeli ile 20×20 elemanla modellenmiştir ve sonlu eleman matrislerinin boyutları 5360 olmuştur. Plak alt ve üst yüzeylerinde tamamı eyleyici olmak üzere toplam 8 çift piezoelektrik eleman kullanılmıştır.

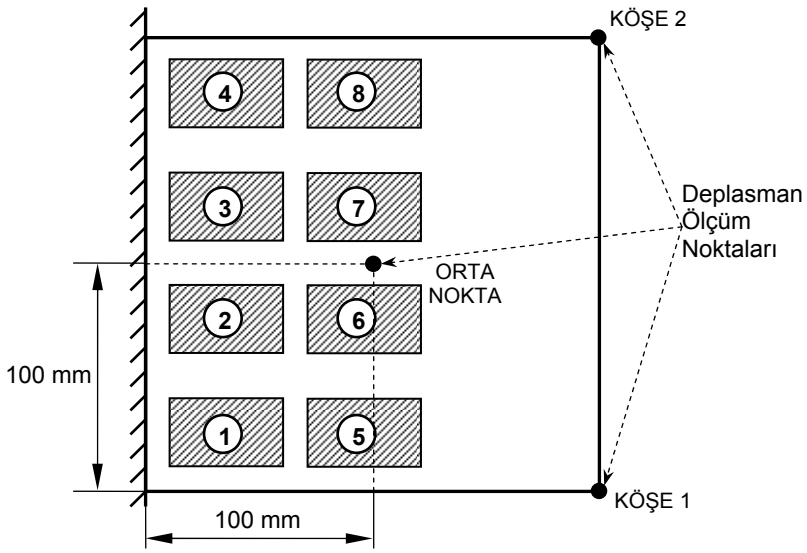


Şekil 5.31: Üçüncü plak modeli (boyutlar *mm*'dir)

Üçüncü plak modeli de modelin güvenilirliğinin test edilmesi amacıyla Ansys yazılımı ile modellenmiş ve hem semiloof kabuk eleman hem de Ansys yazılımı ile serbest titreşim analizleri yapılarak elde edilen ilk 6 frekans değeri Tablo 5.4'te karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Frekansların ve mod şekillerinin (buraya konmamıştır) uyumluluğu birinci plak modelinde yapılmış olan daha detaylı analizlere ihtiyaç olmadığını ortaya koymaktadır. Kullanılan piezoelektrik elemanların numaralandırılmaları ve plak üzerinde deplasman ölçümünün yapıldığı kabul edilen noktaların yerleri Şekil 5.32'de gösterilmiştir.

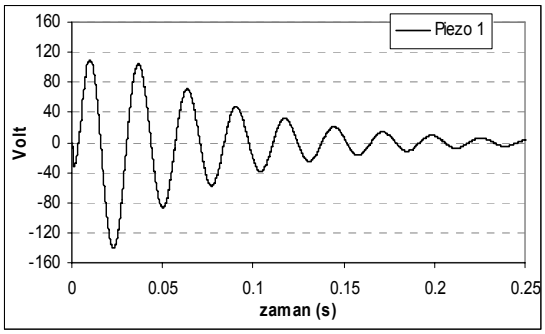
Tablo 5.4: Üçüncü plağın semiloof kabuk sonlu eleman ve *Ansys* yazılımı ile elde edilen serbest titreşim frekanslarının karşılaştırılması (*Hz*).

Modlar	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Semiloof Plak	37.162	75.664	194.210	233.332	238.880	397.672
Ansys	37.244	75.329	195.17	233.28	239.09	397.45

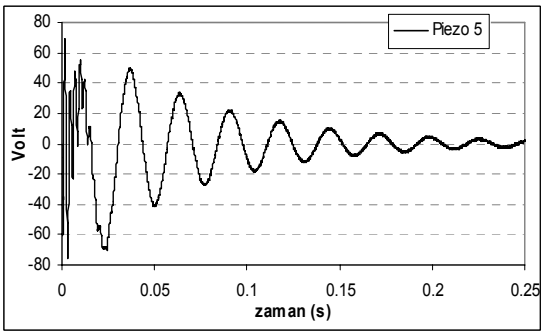


Şekil 5.32: Deplasman ölçüm noktaları ve piezoelektrik eleman numaraları.

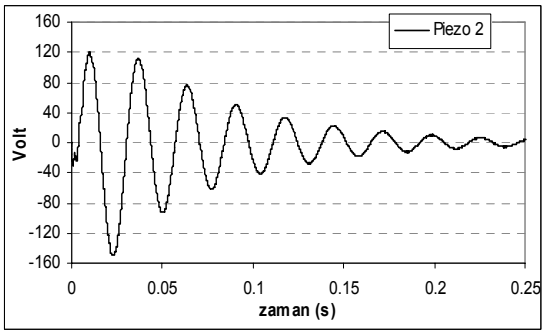
Üçüncü plak modelinin serbestlik değeri daha önceki plak modellerinde olduğu gibi mod toplama yöntemi kullanılarak 4'e indirgenmiştir. Hareket denklemlerinin durum denklemleri formunda ifade edilmesi halinde serbestlik derecesi iki katına yani 8 değerine çıkmıştır. Plağın 3 noktasından deplasman değerleri çıkış olarak alındığından ve piezoelektrik eleman çiftlerinin sayısı 8 olduğundan 3 çıkışlı ve 8 girişli bir kontrol sistemi elde edilmiştir. Gözleyici sayesinde çıkış değerleri olan deplasmanlarla sistemin tüm durumları tahmin edilmiştir. Tahmin edilen durum vektörü ile de piezoelektrik eleman çiftlerine uygulanacak potansiyel farklarını bulmak için performans göstergesinde üç farklı ağırlık matrisi değeri seçilmiş ve her biri için geri besleme kazanç matrisleri hesaplanmıştır. İlk olarak ağırlık matrisleri için $\mathbf{Q}=10^3\cdot\mathbf{I}_8$ ve $\mathbf{R}=\mathbf{I}_4$ değerleri alınmış ve bu durumda piezoelektrik elemanlara uygulanması gereken potansiyel farkları Şekil 5.33'te gösterilmiştir. Anlık basınç yükü etkiyen plağın serbest kenar köşe noktaları ile orta noktasının zamana bağlı deplasmanları da Şekil 5.34'te verildiği gibi elde edilmiştir. Şekillerden piezoelektrik elemanlara uygulanan potansiyel farklarının beklendiği gibi plağın orta hattına göre simetrik oldukları ve mesnede yakın olanlara daha yüksek potansiyel farkı uygulandığı, köşe noktalarının deplasmanlarının birbiriyle aynı ve orta noktanın deplasman hareketiyle orantılı oldukları görülmektedir. Ağırlık matrislerinin $\mathbf{Q}=10^4\cdot\mathbf{I}_8$; $\mathbf{R}=\mathbf{I}_4$ ardından $\mathbf{Q}=10^5\cdot\mathbf{I}_8$; $\mathbf{R}=\mathbf{I}_4$ seçilmesi durumlarında piezoelektrik elemanlara uygulanan potansiyel farkları ve deplasman ölçümü yapılan noktaların deplasmanlarının zamanla değişimleri Şekil 5.35 ile Şekil 5.38 arasında verilmiştir.



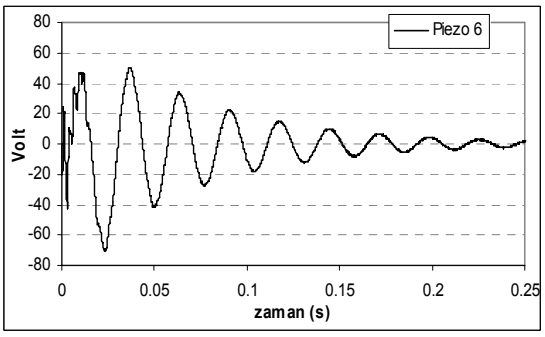
(a) 1 nci piezoelektrik eleman



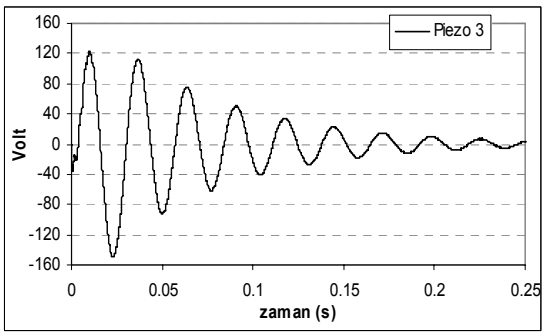
(e) 5 nci piezoelektrik eleman



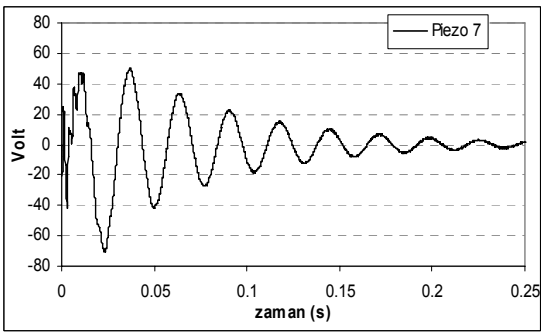
(b) 2 nci piezoelektrik eleman



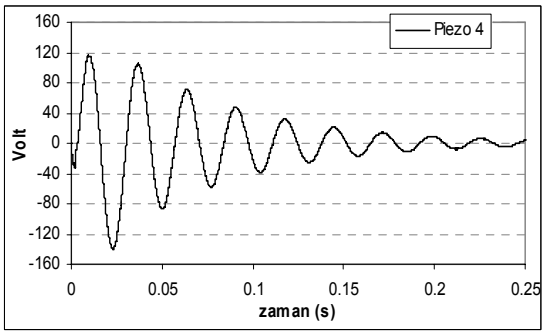
(f) 6 ncı piezoelektrik eleman



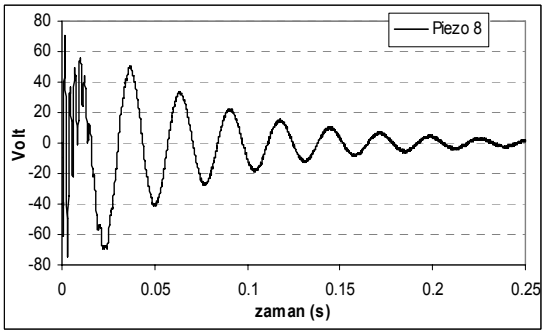
(c) 3 ncü piezoelektrik eleman



(g) 7 nci piezoelektrik eleman

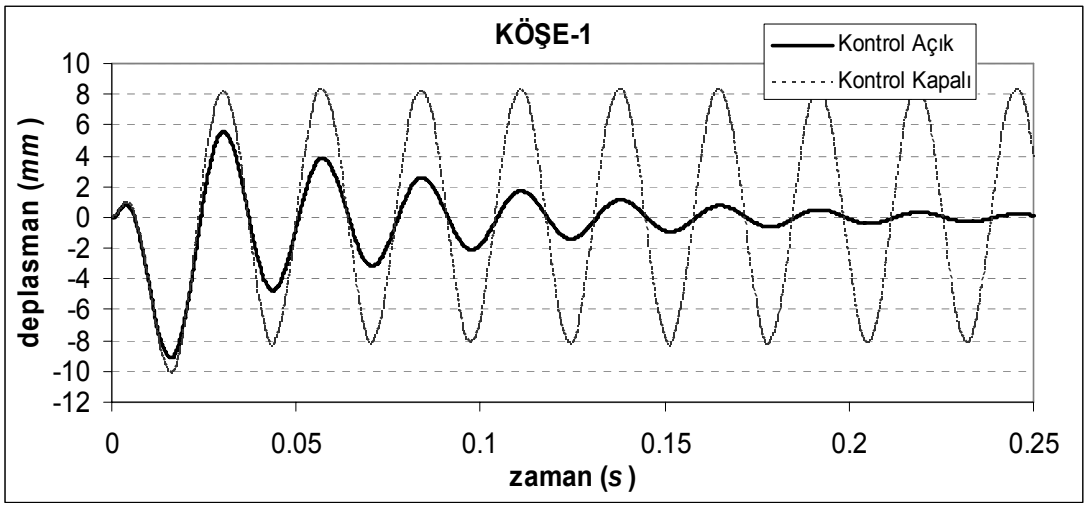


(d) 4 ncü piezoelektrik eleman

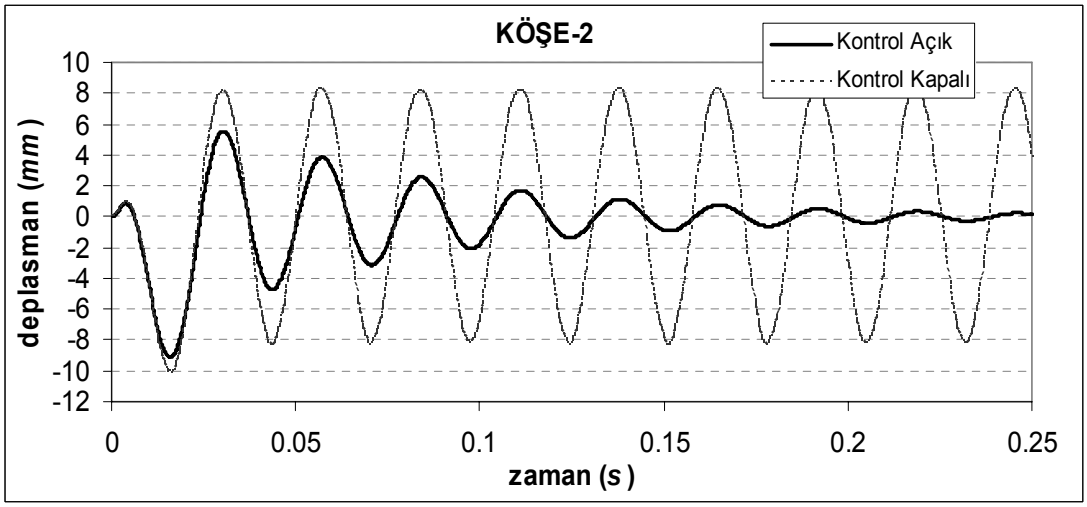


(h) 8 nci piezoelektrik eleman

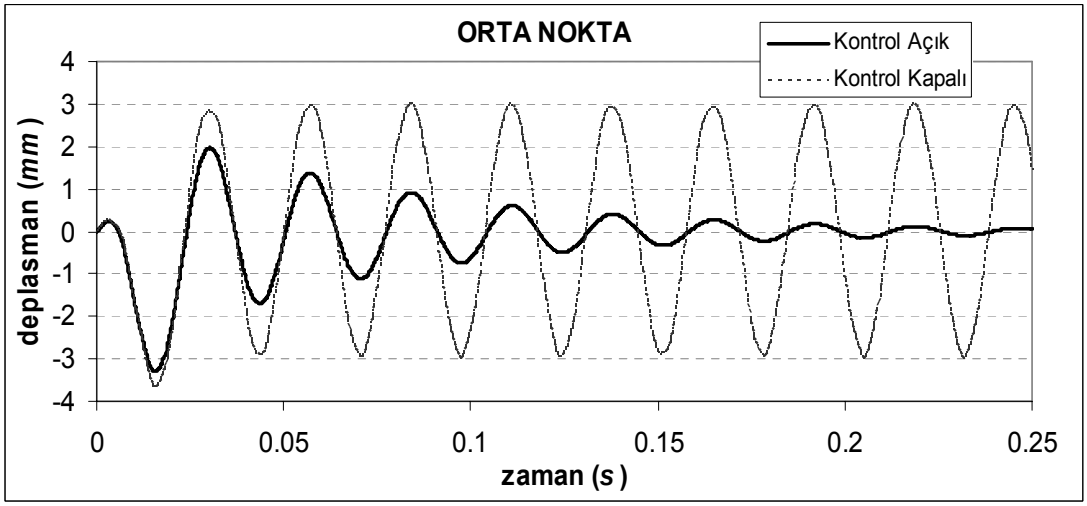
Şekil 5.33: Q=$10^3 \cdot \mathbf{I}_8$ ve **R**=$\mathbf{I}_4$ için Piezoelektrik elemanlara uygulanan potansiyel farkları.



(a) Serbest kenar 1 nci köşe noktası

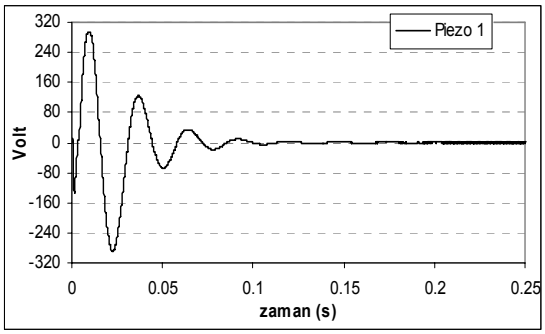


(b) Serbest kenar 2 nci köşe noktası

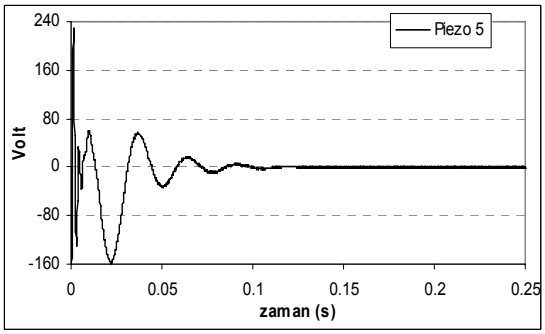


(c) Plak orta noktası

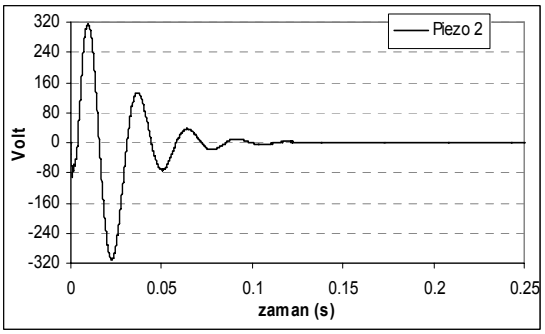
Şekil 5.34: Q=$10^3 \cdot \mathbf{I}_8$ ve **R**=$\mathbf{I}_4$ için zamana bağlı deplasman değişimleri



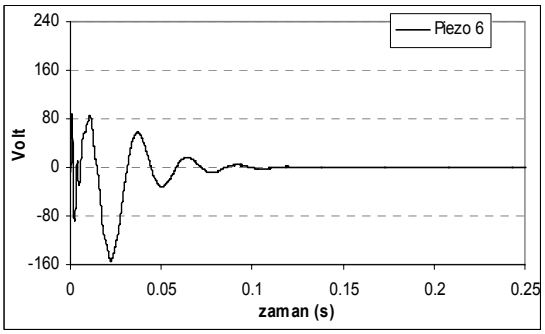
(a) 1 nci piezoelektrik eleman



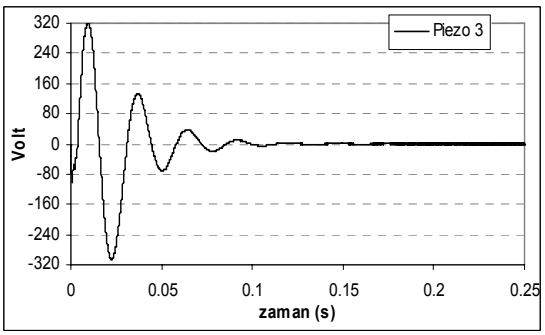
(e) 5 nci piezoelektrik eleman



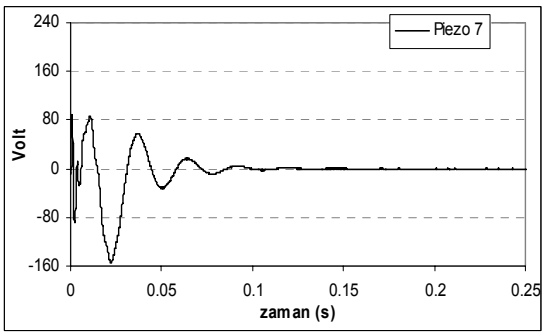
(b) 2 nci piezoelektrik eleman



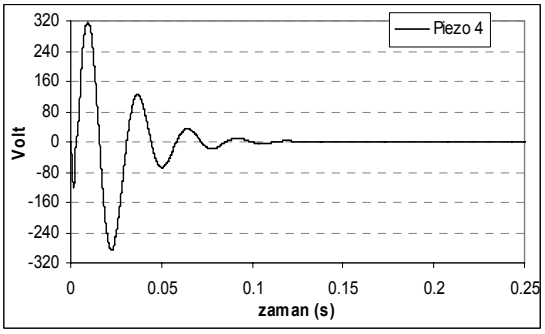
(e) 6 ncı piezoelektrik eleman



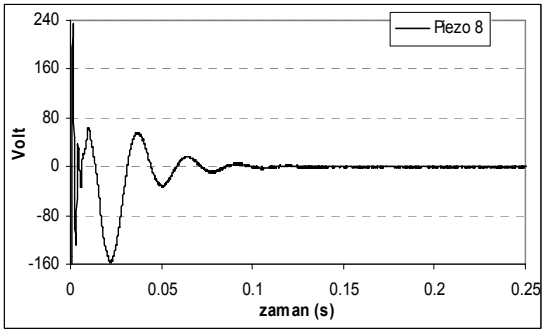
(c) 3 ncü piezoelektrik eleman



(f) 7 nci piezoelektrik eleman

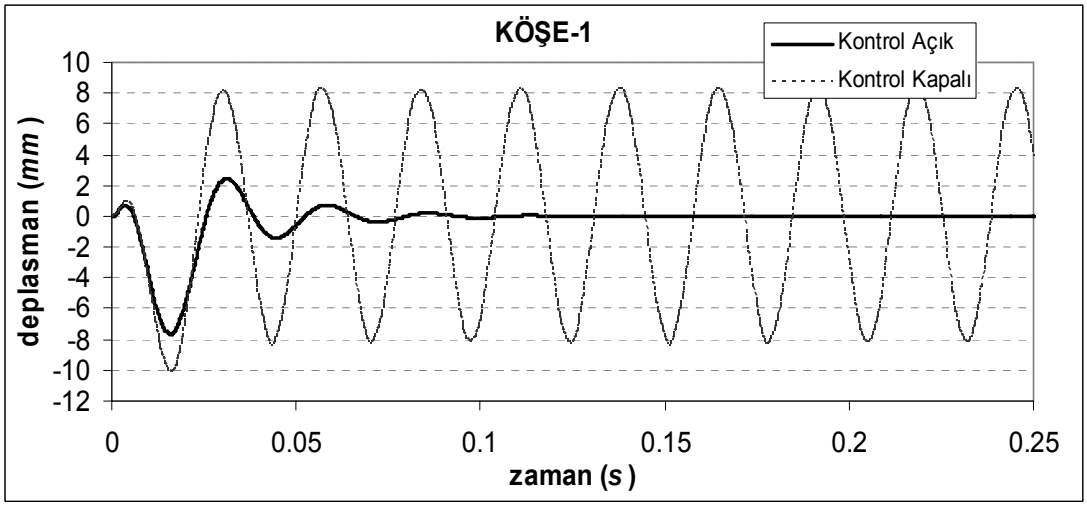


(d) 4 ncü piezoelektrik eleman

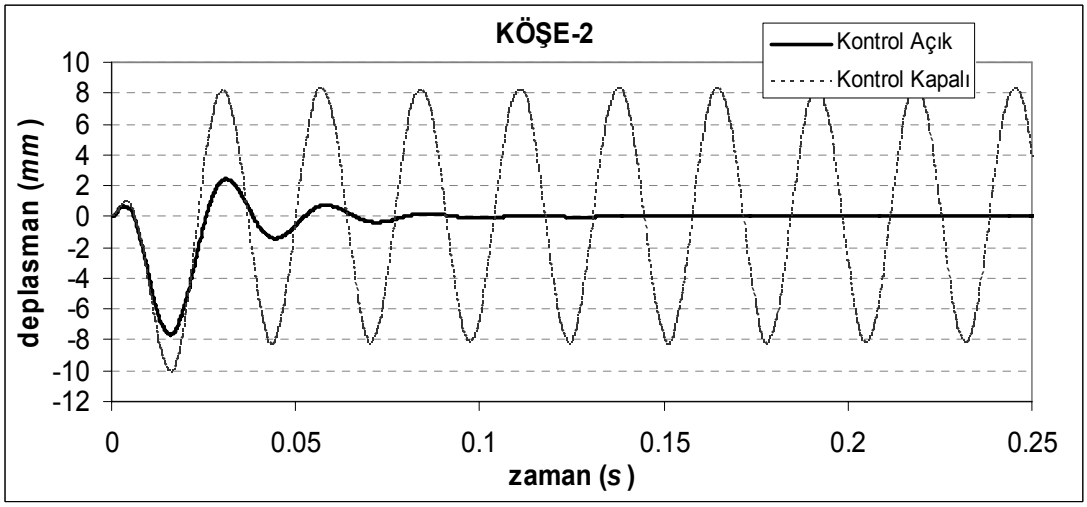


(h) 8 nci piezoelektrik eleman

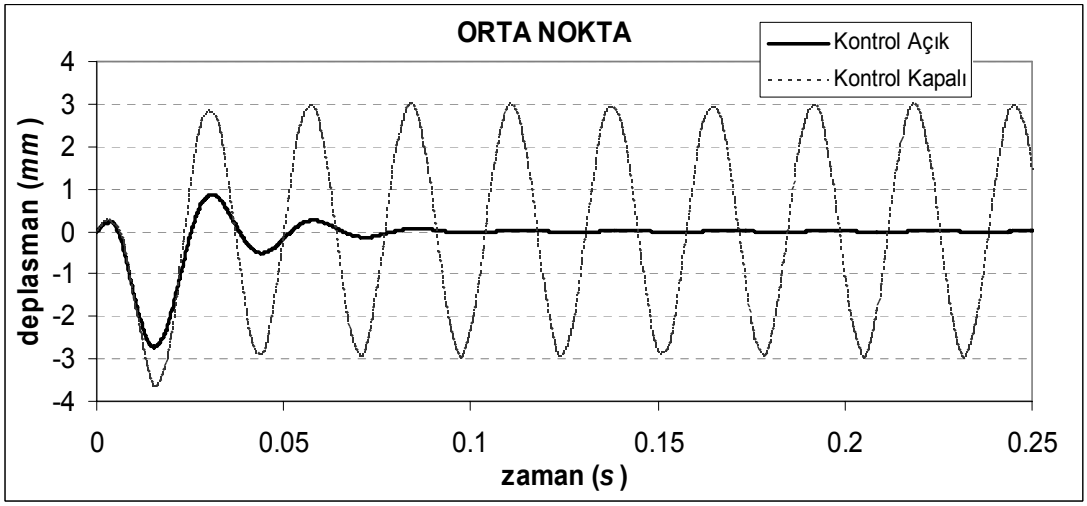
Şekil 5.35: Q=$10^4 \cdot \mathbf{I}_8$ ve **R**=$\mathbf{I}_4$ için piezoelektrik elemanlara uygulanan potansiyel farkları.



(a) Serbest kenar 1 nci köşe noktası

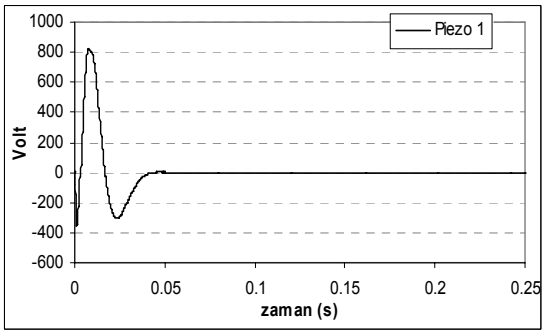


(b) Serbest kenar 2 nci köşe noktası

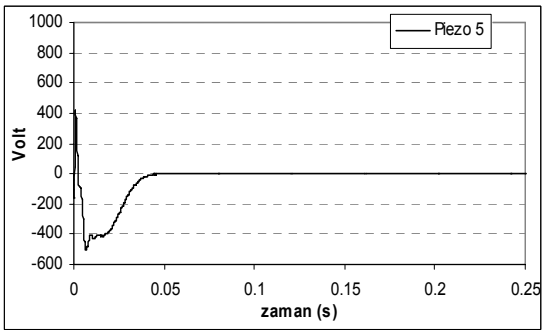


(c) Plak orta noktası

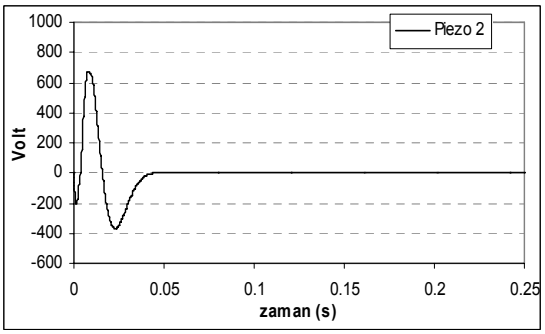
Şekil 5.36: $\mathbf{Q}=10^4\cdot\mathbf{I}_8$ ve $\mathbf{R}=\mathbf{I}_4$ için zamana bağlı deplasman değişimleri



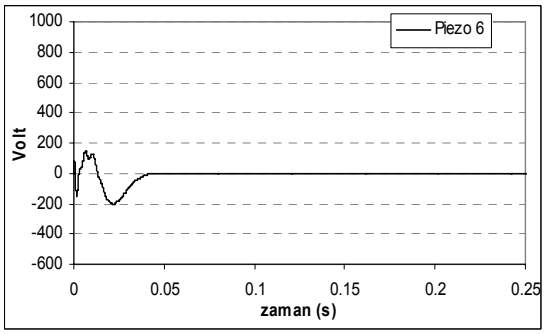
(a) 1 nci piezoelektrik eleman



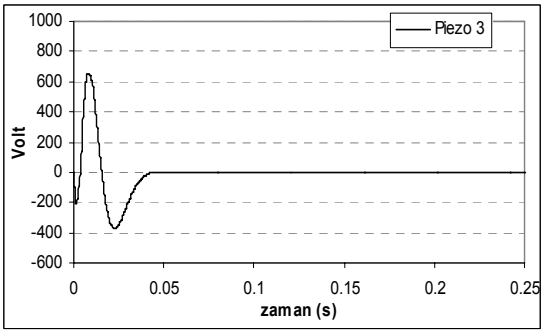
(e) 5 nci piezoelektrik eleman



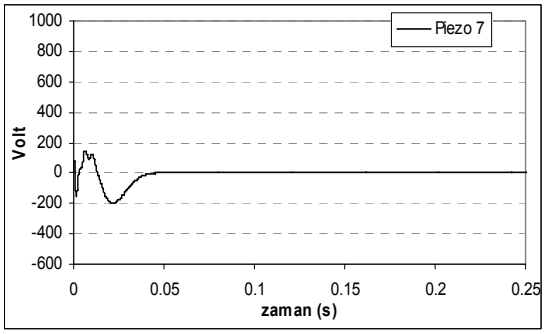
(b) 2 nci piezoelektrik eleman



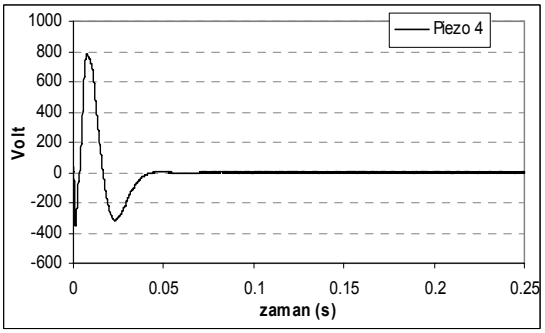
(e) 6 ncı piezoelektrik eleman



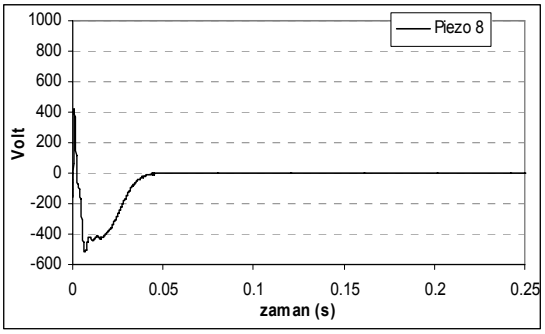
(c) 3 ncü piezoelektrik eleman



(f) 7 nci piezoelektrik eleman

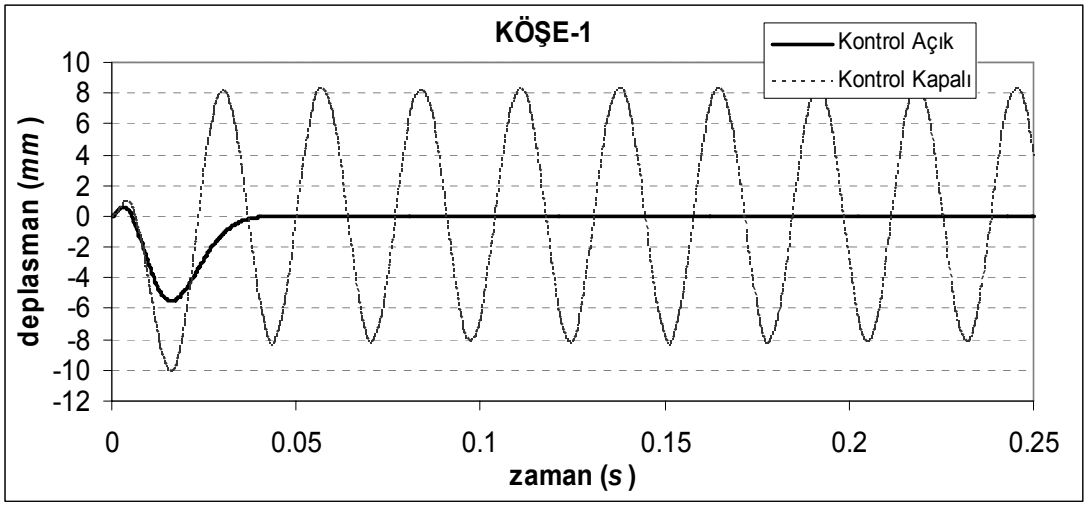


(d) 4 ncü piezoelektrik eleman

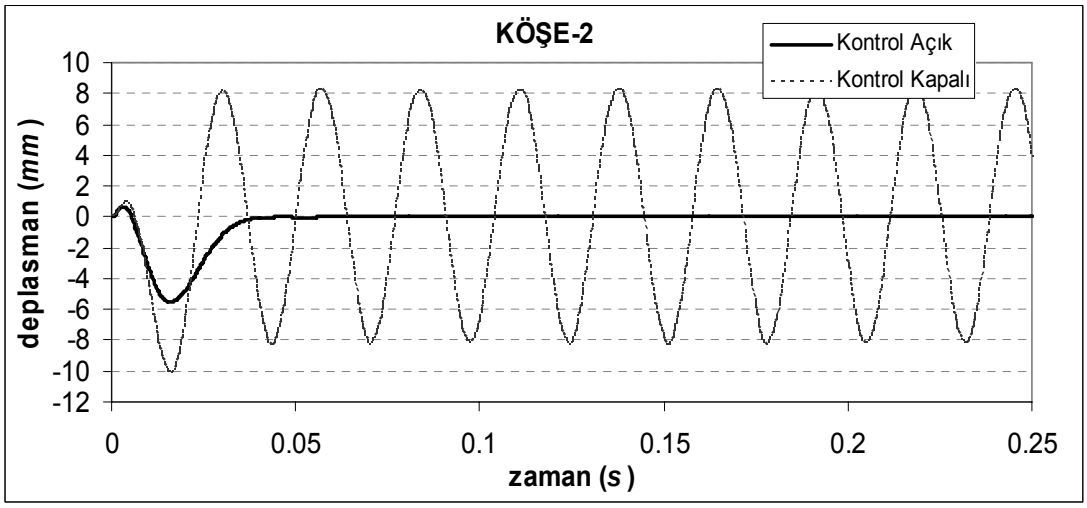


(h) 8 nci piezoelektrik eleman

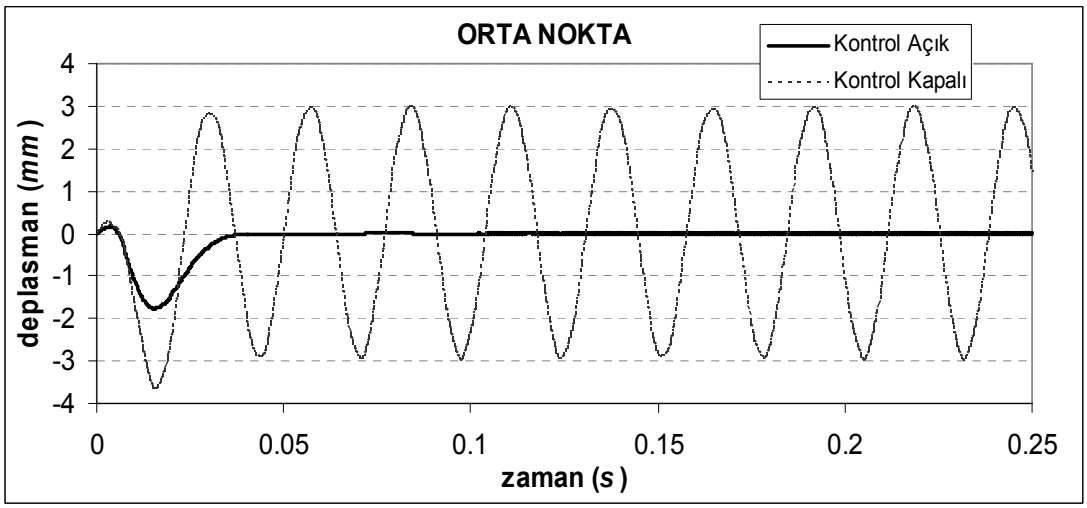
Şekil 5.37: Q=$10^5 \cdot \mathbf{I}_8$ ve **R**=$\mathbf{I}_4$ için piezoelektrik elemanlara uygulanan potansiyel farkları.



(a) Serbest kenar 1 nci köşe noktası



(b) Serbest kenar 2 nci köşe noktası

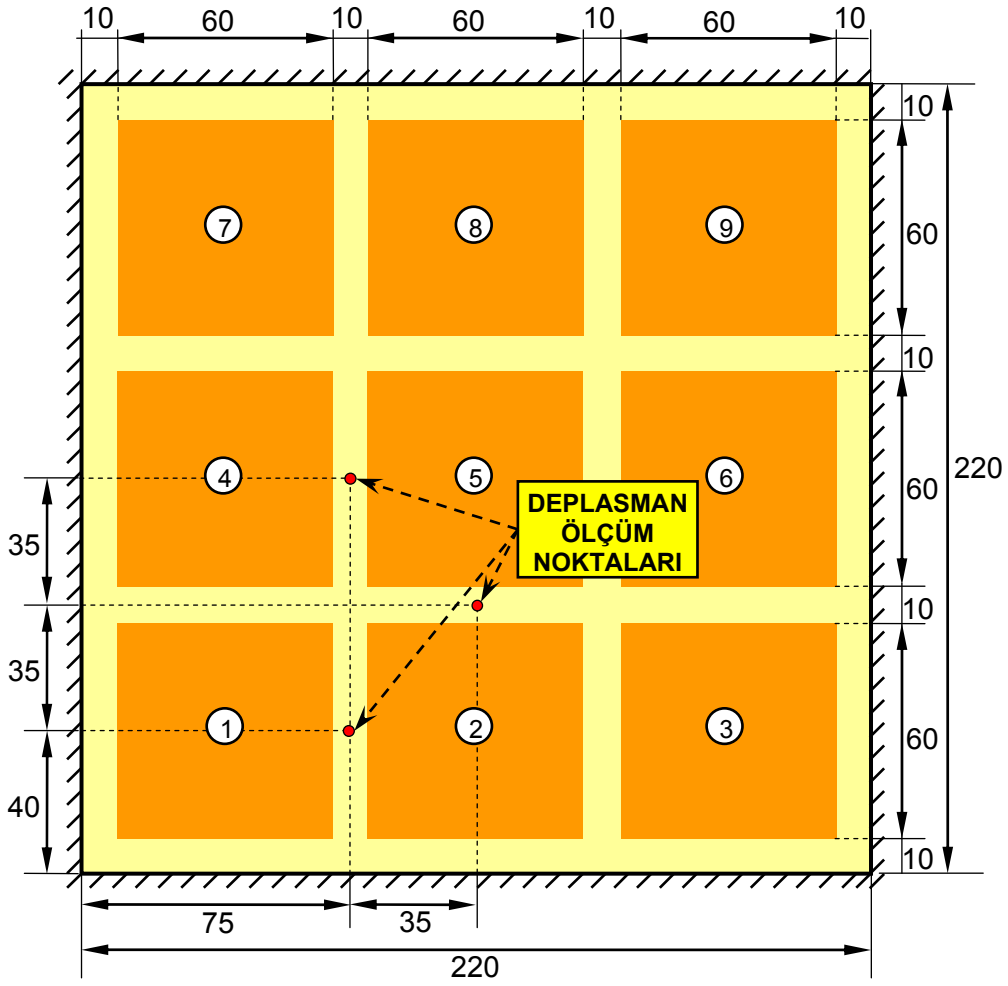


(c) Plak orta noktası

Şekil 5.38: $\mathbf{Q}=10^5\cdot\mathbf{I}_8$ ve $\mathbf{R}=\mathbf{I}_4$ için zamana bağlı deplasman değişimleri

5.5 Dördüncü Plak Modeli

Dördüncü plak modeli için daha önceki plak modelleriyle aynı ve Tablo 5.1'de verilen malzeme özelliklerine sahip, Şekil 5.39'da piezoelektrik eleman numaraları ve deplasman ölçüm noktaları gösterilen kenarları ankastre mesnetli kompozit plak modeli esas alınmıştır. Dördüncü plak semiloof kabuk sonlu eleman modeli kullanılarak 22×22 elemanla modellenmiş ve sonlu eleman matrislerinin boyutları 5963 olarak elde edilmiştir. Plak alt ve üst yüzeylerinde tamamı eyleyici olmak üzere toplam 9 çift piezoelektrik eleman kullanılmıştır.



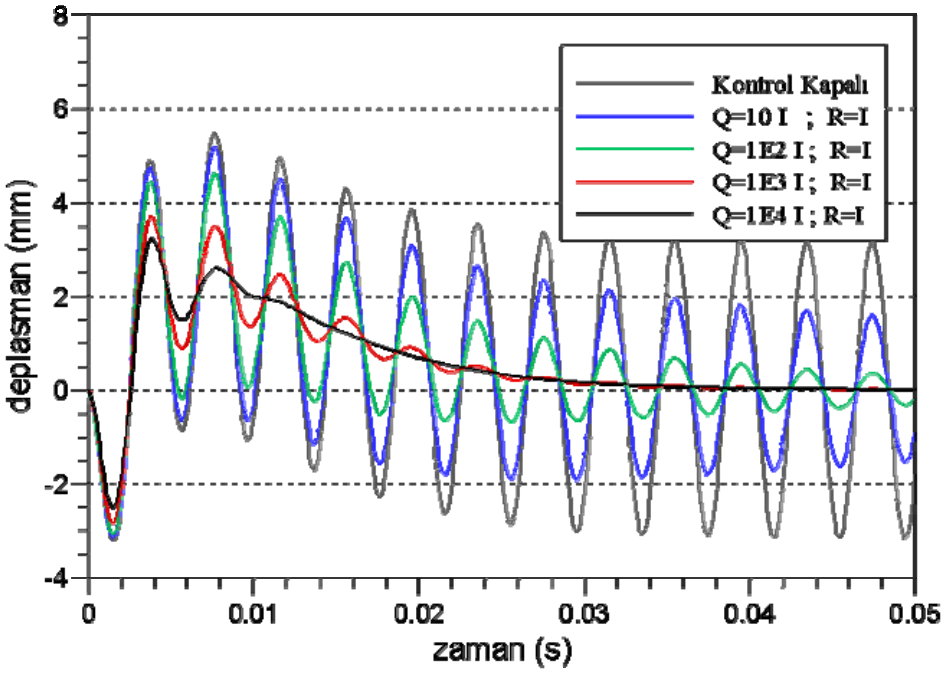
Şekil 5.39: Dördüncü plak modeli, deplasman ölçüm noktaları ve piezoelektrik eleman numaraları (boyutlar *mm*'dir).

Dördüncü plak modeli daha önceki plak modellerinde yapıldığı gibi *Ansys* yazılımı ile de modellenmiş ve her iki modelin serbest titreşim analizleri sonucunda elde edilen ilk altı serbest titreşim frekans değerleri karşılaştırmalı olarak Tablo 5.5 gösterilmiştir.

Tablo 5.5: Dördüncü plağın semiloof kabuk sonlu eleman ve *Ansys* yazılımı ile elde edilen serbest titreşim frekanslarının karşılaştırılması (*Hz*).

Modlar	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Semiloof Plak	251.591	517.768	517.768	783.992	1010,215	1014,539
Ansys	252.39	517.48	517.48	731.46	994.90	997.49

İndirgeme işlemi için dördüncü plağın ilk 10 serbest titreşim frekansına karşılık gelen mod şekillerine ait özvektörlerden oluşan ağırlıklı modal dönüşüm matrisi kullanılmıştır. Böylece indirgenmiş sonlu eleman hareket denklemlerinde sisteme ait serbestlik derecesi 10 olmuştur. Hareket denklemleri durum değişkenleri formunda ifade edildiğinde serbestlik derecesi ikiye katlanarak 20 olmuştur. Plağın üç noktasından deplasman ölçümü yapıldığından ve toplam dokuz adet piezoelektrik eleman çifti bulunduğundan elde edilen kontrol sistemi 9 giriş değerine ve 3 çıkış değerine sahip Çok Giriş-Çok Çıkış'lı (Multi Input Multi Output, MIMO) bir kontrol sistemidir. Tüm kenarları ankastre mesnetli dördüncü plak modeline etkiyen ve (2.1) denklemi ile verilen anlık basınç yükü fonksiyonunda, basıncın zaman içindeki en büyük değeri için p_m=30 kN/m^2 olarak alınmıştır. Kontrol uygulaması ile plağın zamana bağlı hareketinin incelenmesinde kolaylık için performans göstergesinde farklı ağırlık matrisi değerlerine karşılık sadece plak orta noktasının zamana bağlı deplasman değişimi Şekil 5.40'ta gösterilmiştir.



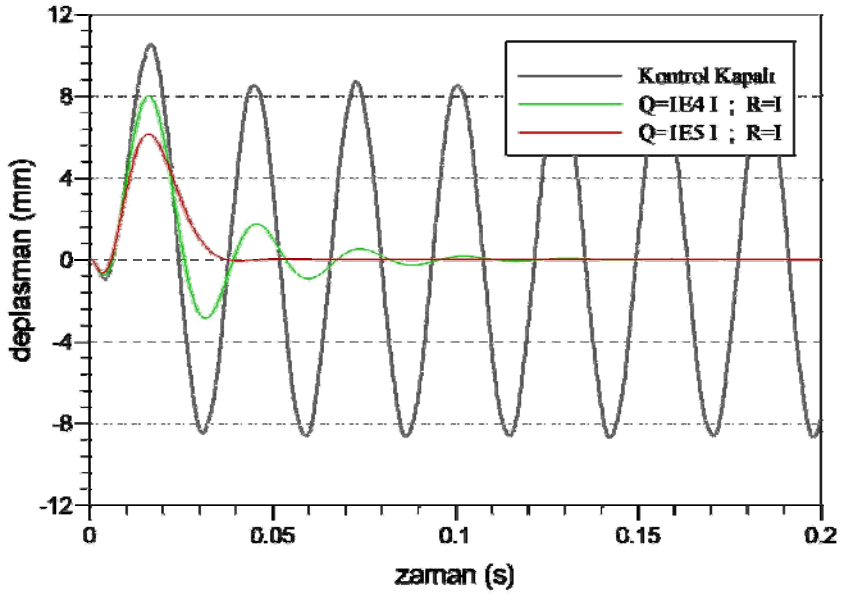
Şekil 5.40: Dördüncü plak orta noktasının zamana bağlı deplasman değişimi.

Dördüncü plak modeli uygulamasında kontrol için piezoelektrik elemanlara uygulanması tavsiye edilen en büyük potansiyel farkı değeri olan 1000 V değerinin aşılmaması için saturation uygulanmış ve uygulanan potansiyel farkı değerleri ± 1000 V aralığı ile sınırlandırılmıştır.

5.6 Hata Analizleri

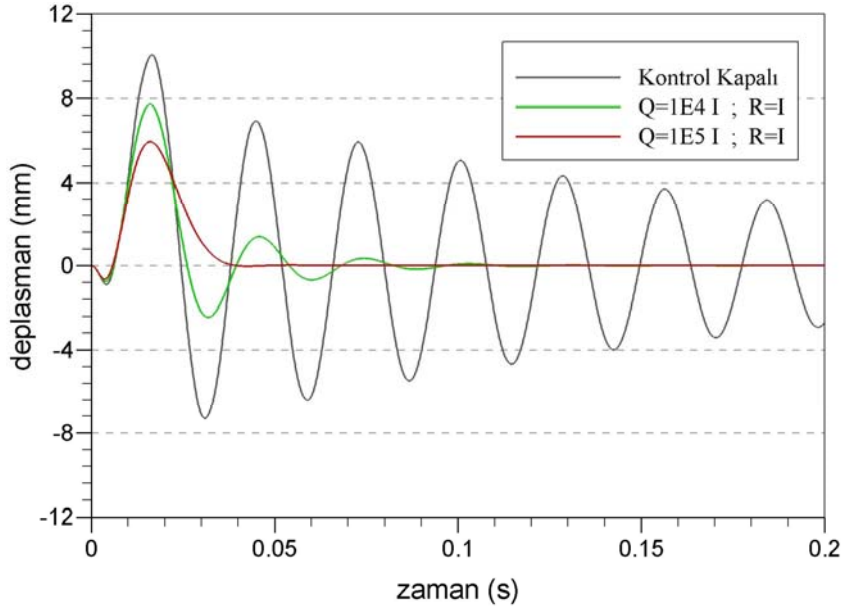
Bu çalışmada titreşim kontrolü için daha önceki bölümlerde anlatıldığı gibi durum gözleyicili kapalı çevrim kontrol sistemi kullanılmıştır. Şekil 5.20'de ayrıntılı olarak verilmiş olan bu tür bir kontrol sisteminde genellikle gerçek sistemin yapısal modeline ait özellikler, sistemin durumlarını tahmin etmek için kullanılan gözleyicinin modeli ile farklılıklar gösterir. Bu çalışmada kullanılan modeller gözönüne alındığında plağın elastisite modülündeki değişimler, yapısal sönüm etkisinin varlığı, uygulanan potansiyel farkı sonucunda piezoelektrik elemanların beklenenden daha az kuvvet ve moment etkisi oluşturmaları, gözleyicinin sistem durumlarını tahmin ederken girdi olarak kullandığı duyarga ölçümlerinin hatalı olması bu farklılıkların sebepleri arasındadır. Sistemin bu farklılıkları içermesi durumunda titreşim kontrolünün gerçekleşmesi için gözleyicinin sistemin durumlarını iyi şekilde tahmin edebilmesi gereklidir. Böylece ortaya çıkan titreşimler sönümlendirilebilecektir. Sayısal uygulama için kullanılan plak modellerinde sistem matrisleri ile gözleyici matrisleri aynı alınmış ve titreşimlerin başarılı bir şekilde kontrol edilerek sönümlendiği gösterilmiştir. Farklılıklar nedeniyle ortaya çıkan hata durumlarında kontrol sisteminin yeterliliğini incelemek için birinci plak modeli ele alınmıştır.

Sistem matrisleri ile gözleyici matrislerinin birbiriyle aynı alınmaları durumunda anlık basınç yükü etkisiyle ortaya çıkan titreşimlerin kontrolüne ait grafik, performans göstergesinde değişik ağırlık matrisi değerleri için plağın serbest kenar orta noktasının zamana bağlı hareketi için Şekil 5.41'de verilmiştir. Yapısal sönüm ihmal edilmiş olduğundan kontrol kapalı durumda anlık basınç yükünün etkisi bittikten sonra plağın sabit genlikli serbest titreşim hareketi yaptığı görülebilmektedir. Kontrol devreye girdiğinde piezoelektrik elemanların kuvvet ve moment etkisi ile titreşimlerin bastırılmasının yanında maksimum genliklerin ağırlık matrislerindeki değişimlere bağlı olarak yaklaşık %50 oranında azalmakta olduğu da dikkat çekmektedir.



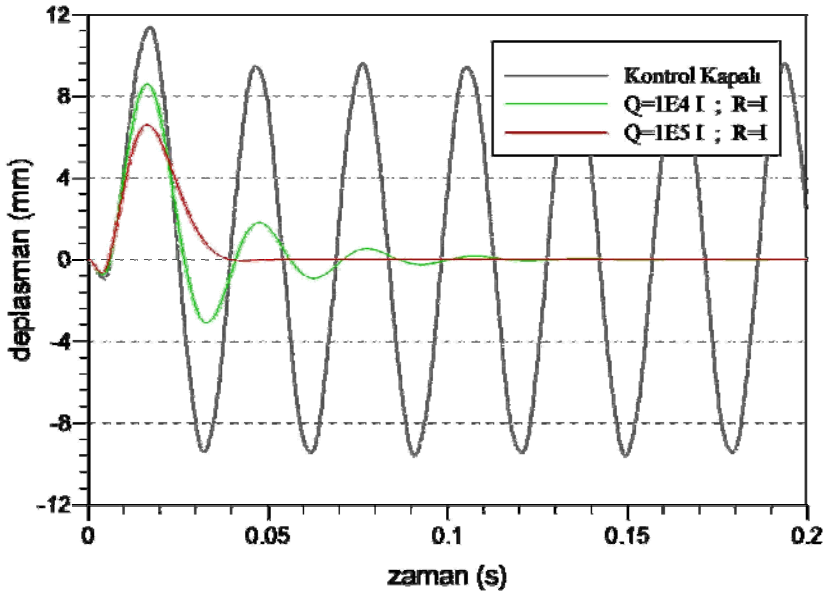
Şekil 5.41: Plağın serbest kenar orta noktasının zamana bağlı hareketi

Sistem matrislerinin gözleyici matrislerinden farklı olmasının nedenlerinin başında yapısal sönüm etkisi gelmektedir. Gözleyici matrislerini oluşturan sonlu eleman modelinde yapısal sönüm etkisinin ihmal edildiği ancak sistem matrislerinde bu etkinin gözönüne alındığı durumda (4.14) ifadesinde verilmiş olan **A** sistem matrisi **ΔA** kadar farklılık gösterecek ve yeni sistem matrisi **A+ΔA** şeklinde olacaktır. Sisteme ait matrislerde modal sönüm oranı 0.05 olarak alınacak olursa plağın anlık basınç yükü etkisinde titreşimlerinin bastırılmasına ait grafik Şekil 5.42'de gösterilmiştir. Yapısal sönüm etkisinin varlığı titreşimlerin kontrolünü kolaylaştırıcı bir etki oluşturmaktadır.



Şekil 5.42: Yapısal sönümün titreşim kontrolüne etkisi.

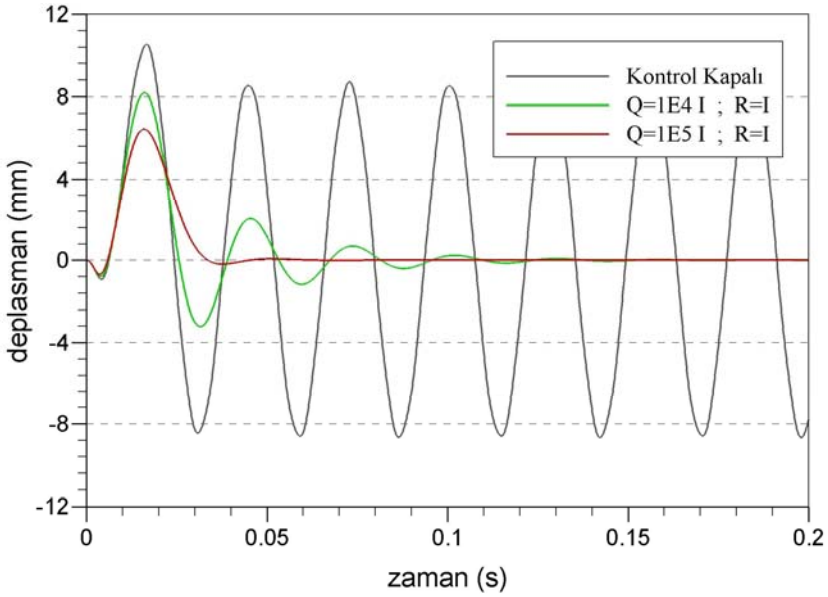
Sistem matrislerinin farklılığının diğer bir nedeni anlık basınç yükü etkisini oluşturan patlama gazlarının sıcaklık etkisi nedeniyle plağın elastisite modülünde meydana gelen azalmadır. Elastisite modülündeki bu azalma plağın sonlu elemanlar modelinde katılık matrisinin değişmesi dolayısıyla **A** ile verilen sistem matrisinin **ΔA** miktarı kadar değişmesi anlamına gelmektedir. Sistem modelinde elastisite modülünün %10 oranında azaldığı kabul edildiği durumda gözleyici bu etkiyi içermemesine rağmen sistemin durumlarını başarılı bir şekilde tahmin etmiş ve Şekil 5.43'te gösterildiği gibi titreşimler kontrol edilerek bastırılmıştır. Elastisite modülünün azalması beklendiği gibi titreşim frekanslarının azalmasına ve titreşimin genliğinin artmasına neden olmaktadır.



Şekil 5.43: Elastisite modülündeki azalmanın titreşim kontrolüne etkisi.

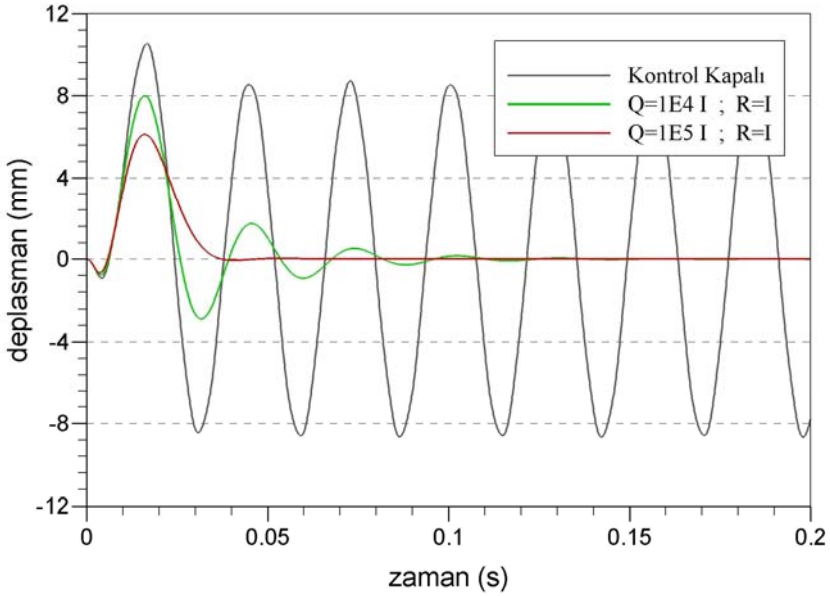
Sistem matrislerinin farklılığına yol açan bir diğer önemli etken piezoelektrik elemanların uygulanan potansiyel farkı sonucunda beklenenden daha az kuvvet ve moment etkisi oluşturmalarıdır. Bu durum (4.14) ifadesinde yer alan ve piezoelektrik elemanların oluşturduğu kuvvet ve moment vektörlerini içeren **B** kontrol matrisinin değişiyor olması ve sistem modeline ait kontrol matrisinin **ΔB** miktarı kadar değişmesi anlamına gelmektedir. Piezoelektrik eleman bünye denklemlerine göre uygulanan potansiyel farkı ile piezoelektrik elemanların ürettiği kuvvet ve momentlerin değişimi lineer kabul edilmektedir. Bu çalışmada piezoelektrik elemanlara uygulanan potansiyel farkının en büyük değeri 1000 V ile sınırlandırılmış olup bu değere karşılık piezoelektrik elemanların beklenenden %10 daha az kuvvet ve moment ürettikleri kabul edilmiştir. Ayrıca potansiyel farkı ile üretilen kuvvet ve

momentlerin değişiminin ikinci dereceden bir polinomla ifade edilebileceği kabul edilmiştir. Sistem modelinde **B** kontrol matrisinin anlatıldığı gibi farklı olduğu ancak gözleyici modelinde ideal olarak ele alındığı durumda kontrol uygulamasının başarılı olduğu ve titreşimlerin bastırılabildiği Şekil 5.44'te görülmektedir.



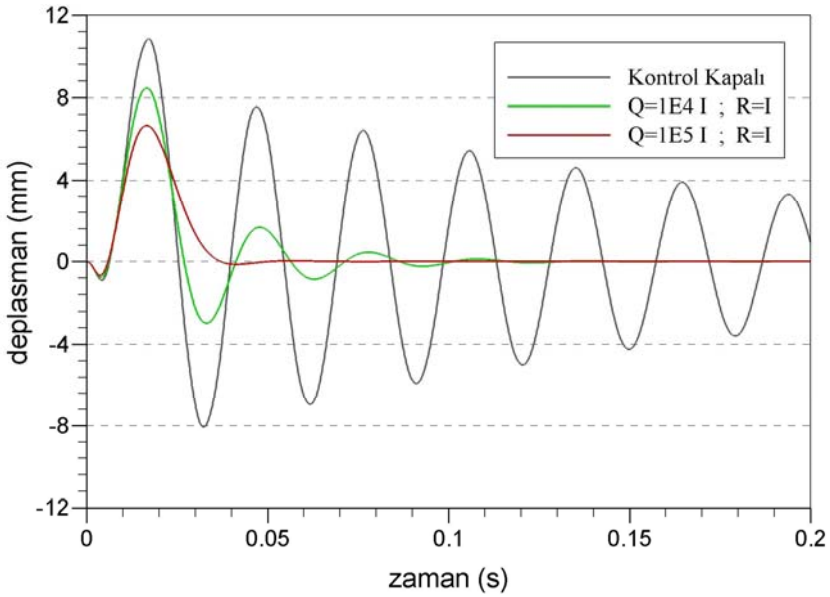
Şekil 5.44: Piezoelektrik kuvvet ve momentteki azalmanın titreşim kontrolüne etkisi.

Gözleyicili kontrol sistemlerinde kontrolü etkileyen önemli konulardan birisi de gözleyicinin sistemin durumlarını tahmin ederken girdi olarak kullandığı duyargalardan elde edilen değerlerin farklı olması yani duyarga ölçüm hatalarıdır. Gözleyici duyarga ölçüm hatalarına karşı çok hassastır. Bu durum sistem modelinde çıkış matrisi olarak verilen $\mathbf{C_x}$ matrisinin farklılığı anlamına gelmektedir. Duyarga ölçüm hatalarını modellemek için deplasman ölçümü yaptığı kabul edilen duyargaların her ölçüm değerinde rasgele olarak ±%2 hata aralığında hatalı ölçüm yaptıkları kabul edilmiştir. %2 hata değeri günümüz duyargaları için oldukça büyük bir hata değeridir. Sistem modelinde hatalı duyarga ölçümünün gözönüne alınması sonucunda çıkış matrisinin değeri her bir ölçüm işlem adımında değeri değişen $\mathbf{\Delta C_x}$ fark matrisini ortaya çıkartacak olup gözleyici çıkış matrisinin ölçüm hatalarını içermeyen ideal durumu modellemesi halinde de kontrol sistemi işlevini başarılı olarak yerine getirmiş ve anlık basınç yükü etkisinde ortaya çıkan plak titreşimlerinin bastırılması sağlanmıştır. Ölçüm hataları nedeniyle çıkış matrislerinin farklılığı durumuna ait kontrol grafiği Şekil 5.45'te gösterilmiştir. Grafikte karşılaştırmanın kolay yapılabilmesi için yine plağın serbest kenar orta noktasının zamana bağlı deplasman değişimi yer almaktadır.



Şekil 5.45: Duyarga ölçüm hatasının titreşim kontrolüne etkisi.

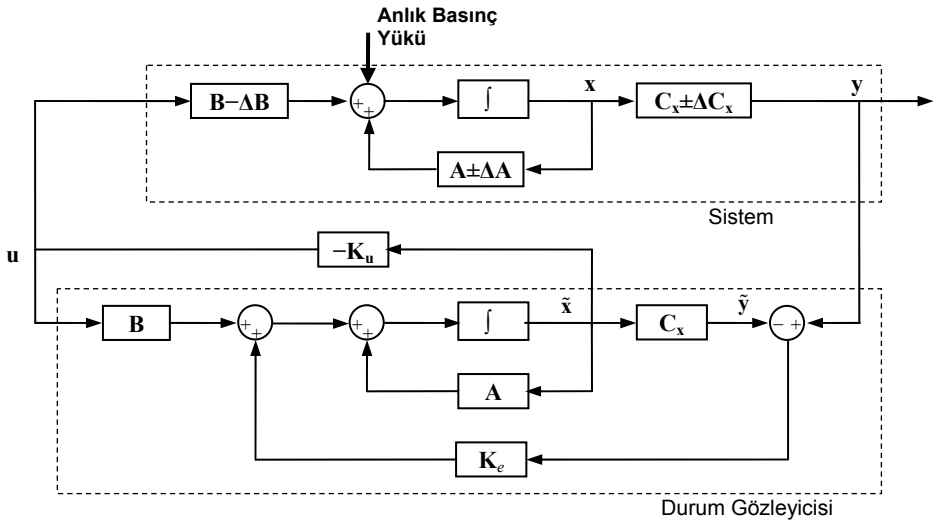
Yukarıda sözü edilen sistem matrislerindeki farklılıklara neden olan tüm etkiler aynı anda gözönüne alındığında sistem modelindeki matrislerin tamamı gözleyici modelinden farklı olacaktır. Bu durumda da gözleyicinin sistemin tüm durumlarını iyi şekilde tahmin edebildiği ve kontrol sisteminin kendisinden beklendiği şekilde titreşimleri bastırabildiği görülmüş ve bu duruma ait grafik Şekil 5.46'da verilmiştir.



Şekil 5.46: Sistem matrislerinin tümünün farklılığının titreşim kontrolüne etkisi.

Bu bölümde sistem matrislerinin değişimine neden olan parametrelerin kabul edilebilir makul seviyelerin dışında değişim yapmalarının titreşim kontrolüne olan etkileri ayrıca incelenmiş ve sistemi kararsızlaştıran değişim değerleri de

araştırılmıştır. Bu amaçla önce **A** matrisinin değişmesine neden olan elastisite katsayısındaki azalma miktarı gözönüne alınarak bu değer kademeli olarak azaltılmıştır. Elastisite modülünün %70 oranından daha fazla azalması halinde kontrol sisteminin kararsızlaştığı görülmüştür. Elastisite modülü azaltıldıkça beklendiği üzere plak titreşimlerinin genliğinde artış olmuş ve titreşim frekanslarında da azalma gözlenmiştir. **A** matrisinin değişimine neden olan diğer parametre yapısal sönüm değeri olup yapısal sönüm değerindeki artış kontrol uygulamasına yardımcı olmuştur. Çok büyük yapısal sönüm değerlerinde yine beklendiği üzere plağın titreşimlerinin doğal olarak kontrol uygulamasına ihtiyaç kalmadan hızlı bir şekilde sönümlendiği izlenmiştir. Sistem matrislerinden **B** matrisinin gözleyici modelinden farklı olmasına neden olan piezoelektrik elemanların daha az kuvvet ve moment oluşturması durumu incelendiğinde, beklendiği gibi piezoelektrik kuvvet ve momentlerin küçüldükçe titreşimlerin daha uzun sürelerde sönümlendiği ve titreşim genliklerinin de kontrol kapalı durumdaki genlik değerlerine yaklaştığı gözlenmiştir. Piezoelektrik kuvvet ve momentlerin %50 azalması durumunda titreşimlerin sönümleme süresi yaklaşık olarak iki katına çıkmıştır. Sistem matrislerinden çıkış matrisinin gerçek sistemde farklılığına ölçüm hatalarının yol açtığı daha önce ifade edilmişti. Duyargaların her ölçüm değerinde yaptıkları ölçüm hatasının rasgele olarak ±%50 aralığında kaldığı durumda da anlık basınç yükü etkisinde titreşim yapan plağın titreşimleri sönümlenebilmiştir. Sistem matrislerindeki değişimlerin gözönüne alındığı gözleyicili kontrol sistemine ait diyagram Şekil 5.47'de verilmiştir.



Şekil 5.47: Gerçek sisteme ait değişiklikler ve gözleyicili kontrol sistemi.

6 DEĞERLENDİRME ve SONUÇ

Anlık basınç yükleri etkisiyle oluşan yapısal titreşimlerin kontrol edilerek sönümlendirilmesi konusu bu çalışmada araştırılmıştır. Titreşimlerin kontrolü ve sönümlendirilmesi için yapıların titreşimlerinin sönümlendirilmesi ve statik şekil kontrolü gibi çalışmalarda son yıllarda yaygın olarak kullanılan piezoelektrik malzemelerden yapılmış elemanlar kullanılmıştır. Havacılıkta yaygın olarak kullanılan kompozit katmanlı malzemeler modellenen plak malzemesi olarak seçilmiştir.

Literatürde yer alan pek çok çalışmada piezoelektrik eleman çiftlerinden biri eyleyici olarak kullanılırken diğeri algılayıcı olarak kullanılmakta ve algılayıcı elemandan elde edilen potansiyel farkı bir kazanç değeri ile yükseltilip eyleyici elemana uygulanmaktadır. Bu çalışmada piezoelektrik eleman çiftlerinin her ikisinin aynı anda eyleyici olarak kullanılmasının avantajı değerlendirilmiştir. Bu durumda piezoelektrik elemanlara uygulanan potansiyel farklarının belirlenmesi için gözleyici tarafından tahmin edilen durum vektöründen yararlanılmıştır. Gözleyicinin tüm durumları tahmin edebilmesi için de plağın belli noktalarından elde edilen deplasman değerleri kullanılmıştır.

Plak sonlu eleman modeli oluşturulurken iki tipte semiloof kabuk eleman modeli kullanılmıştır: i) geleneksel kompozit katman için bilinen semiloof kabuk eleman, ii) piezoelektrik özelliklerin ilave edildiği semiloof kabuk eleman. Plak sonlu eleman modelleri oluşturulmuş ve hem statik yükleme durumlarında hem de anlık basınç yüküne dinamik cevabında gerek literatürde yapılan çalışmalarla gerekse *Ansys* programı ile yapılan analiz sonuçları ile yapılan karşılaştırmalarda büyük bir uym bulunduğu gözlenmiştir. Sistemin serbestlik derecesinin mod toplama yöntemi ile azaltılması ile elde edilen analiz sonuçlarının da uyumlu oldukları gösterilmiştir. Plağın *Ansys* yazılımı modelinde SOLID elemanlar kullanma zorunluluğu olduğundan semiloof kabuk elemanın daha az sayıda serbestlik içermesi bir avantaj oluşturmaktadır.

İndirgenmiş plak hareket denklemlerinden durum denklemleri elde edilmiş ve kararlılık sınırında bulunan sistemin kararlılığını garantilemek için doğrusal regülatör problemi ele alınmıştır. Sistemin kazanç matrisini belirlemede doğrusal regülatör probleminde yer alan performans göstergesinden yararlanılmış ve değişik ağırlık matrisi değerleri için elde edilen sistem kazanç matrisi ile piezoelektrik elemanlara uygulanan potansiyel farkları, gözleyici tarafından tahmin edilen durum değişkenleri de kullanılarak belirlenmiştir. Potansiyel farkının piezoelektrik elemanlara uygulanması tavsiye edilen en yüksek değere ulaşmadığına dikkat edilmiştir. Ağırlık matrislerinin değiştirilmesi ile beklendiği üzere titreşimlerin daha kısa sürede sönümlendiği ve en büyük titreşim genliğinin de azaldığı gözlenmiştir. İlave olarak piezoelektrik elemanların konsol plak üzerinde mesnet noktasına yakın yerleştirilmesinin titreşimlerin sönümlenmesinde daha etkin olduğu, buralara yerleştirilen piezoelektrik elemanlara uygulanan potansiyel farkları nedeniyle oluşan şekil değişimlerinin plak serbest kenarının deplasmanına daha çabuk etki ettiği ve kontrol ile mesnede yakın olan bu elemanlara daha büyük potansiyel farklarının uygulandığı da görülebilmektedir.

Sonuç olarak bu çalışmada bir kenarından ankastre olarak mesnetlenmiş kompozit katmanlı çeşitli plakların, anlık basınç yükü etkisindeki titreşimleri alt ve üst yüzeylerine yerleştirilmiş ve tamamı eyleyici olan piezoelektrik elemanlar kullanılarak, durum gözleyicili bir kapalı çevrim kontrol sistemi ile başarılı bir şekilde kontrol edilmiş ve sönümlenmiştir. Bu çalışmanın bu konuda ileride yapılacak deneysel çalışmalara büyük bir destek sağlayacağı, yapılacak sayısal ve deneysel çalışmalarda tekrarlı ve rasgele yük etkilerindeki titreşimlerin farklı kontrol stratejileri de kullanılarak sönümlendirilmesi konularının araştırılabileceği, sınır şartlarındaki değişikliklerin, yapıya takviyeler eklenmesinin yapının titreşimlerine ve kontrolüne olan etkilerinin incelenebileceği değerlendirilmektedir. Yine bu çalışmanın plak için yapısal sönüm ve nonlineer etkilerin de gözönüne alındığı titreşim kontrolü çalışmalarına katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

[1] **Dökmeci, M. C.,** 1980. Recent advances vibration of piezoelectric crystals, *International Journal of Engineering Science*, **18**, 431-448

[2] **Sunar, M., Rao, S. S.,** 1999. Recent advances in sensing and control of flexible structures via piezoelectric materials technology, *Applied Mech Rev*, **52**, No. 1, 1-16.

[3] **Benjeddou, A.**, 2000. Advances in piezoelectric finite element modelling of adaptive structural elements: a survey, *Computers and Structures*, **72**, 347-363.

[4] **Gopinathan, S. V., Varadan, V. V., Varadan, V. K.,** 2000. A review and critique of theories for piezoelectric laminates, *Smart Materials and Structures*, **9**, 24-48.

[5] **Loewy, R. G.**, 1997. Recent developments in smart structures with aeronautical applications, *Smart Materials and Structures*, **6**, R11-R42.

[6] **Tauchert, T. R., Ashida, F.,Noda, N., Adali, S., Verijenko, V.,** 2000. Developments in thermopiezoelasticity with relevance to smart composite structures, *Composite Structures*, **48**, 31-38.

[7] **Hopkinson, B.,** 1915. British ordnance board minutes, Report No: 13565.

[8] **Beshara, F. B. A.,** 1994. Modelling of Blast Loading on Aboveground Structures-I. General Phenomenology and External Blast, *Computers and Structures*, **51**, No. 5, 585-596.

[9] **Beshara, F. B. A.,** 1994. Modelling of Blast Loading on Aboveground Structures-II. Internal Blast and Ground Shock, *Computers and Structures*, **51**, No. 5, 597-606.

[10] **Singhal, A. C. and Larson, D. S.,** 1991. Computer Simulation of Weapon Blast Pressures on Flexible Surfaces, *Computers and Structures*, **41**, No. 2, 325-330.

[11] **Chapman, T. C., Rose, T. A. and Smith, P. D.,** 1995. Blast Wave Simulation Using Autodyn2D: A Parametric Study, *International Journal of Impact Engineering*, **16**, No. 5/6, 777-787.

[12] **Houlston, R, Slater, J. E., Pegg, N. and DesRochers, C. G.,** 1985. On Analysis of Structural Response of Ship Panels Subjected to Air Blast Loading, *Computers and Structures*, **21**, No. 1/2, 273-289.

[13] **Houlston, R and DesRochers, C. G.,** 1987. Nonlinear Structural Response of Ship Panels Subjected to Air Blast Loading, *Computers and Structures*, **26**, No.1/2, 1-15.

[14] **Gupta, Aaron. D., Gregory, Frederick. H., Bitting, Robert. L. and Bhattacharya, Sujan,** 1987. Dynamic Analysis of an Explosively Loaded Hinged Rectangular Plate, *Computers and Structures*, **26**, No.1/2, 339-344.

[15] **Nurick, G. N., Olson, M. D., Fagnan, J. R., and Levin, A.,** 1995. Deformation and Tearing of Blast-Loaded Stiffened Square Plates, *International Journal of Impact Engineering*, **16**, No.2, 273-291.

[16] **Singhal, C. and Larson, D., Govil, S. ve Karmakar, V.,** 1994. Simulation of Blast Pressure on Flexible Panel, *Journal of Structural Engineering*, **120**, No.7, 2011-2020.

[17] **Redekop, D. and Azar, P.,** 1991. Dynamic Response of a Cylindrical Shell Panel to Explosive Loading, *Journal of Vibration and Acoustics*, **113**, 273-278.

[18] **Redekop, D.,** 1994. Dynamic Response of A Toroidal Shell Panel, *Computers and Structures*, **51**, No. 3, 126-133.

[19] **Olson, M. D.,** 1991. Efficient Modelling of Blast Loaded Stiffened Plate and Cylindrical Shell Structures, *Computers and Structures*, **40**, No. 5, 1139-1149.

[20] **Jiang, J. ve Olson, M. D.,** 1991. Nonlinear Dynamic Analysis of Blast Loaded Cylindrical Shell Structures, *Computers and Structures*, **41**, No. 1, 41-52.

[21] **Wiernicki, C. J., Liem, F., Woods, G. D., Furio, A. J.,** 1990. Structural Analysis Methods for Lightweight Metallic Corrugated Core Sandwich Panels Subjected to Blast Loads, *Naval Engineers Journal*, 192-203.

[22] **Librescu, L. and Nosier, A.,** 1990. Response of Laminated Composite Flat Panels to Sonic Boom and Explosive Blast Loadings, *AIAA Journal*, **28**, No. 2, 345-352.

[23] **Türkmen, H. S. and Mecitoğlu, Z.,** 1995. Dynamic Behavior of Laminated Composite Plate Subjected to Shock Loading, *First International Aerospace and Advanced Technologies Symposium*, ITU, Istanbul, March 1995, 475-484.

[24] **Türkmen, H.S. and Mecitoğlu, Z.,** 1998. Structural Response of Laminated Composite Shells Subjected to Blast Loadings, *35th Annual Technical Meeting of the Society of Engineering Science*, Washington State University, Pullman, Washington, U.S.A.

[25] **Türkmen, H.S. and Mecitoğlu.,** 1999. Nonlinear Structural Response of Laminated Composite Plates Subjected to Blast Loading, *AIAA Journal*, **37**, 1639-1647.

[26] **Takawa, T., Fukuda, T., Takada, T.,** 1997. Flexural-torsion coupling vibration control of fiber composite cantilevered beam by using piezeceramic actuators, *Smart Materials and Structures*, **6**, 477-484.

[27] **Gaudenzi, P., Carbonaro, R., Barboni, R.,** 1997. Vibration control of an active laminated beam, *Composite Structures*, **38**, No. 1-4, 413-420.

[28] **Sun, B., Huang, D.,** 2000. Analytical vibration suppression analysis of composite beams with piezoelectric laminae, *Smart Materials and Structures*, **9**, 751-760.

[29] **Sun, B., Huang, D.,** 2001. Vibration suppression of laminated composite beams with a piezo-electric damping layer, *Composite Structures*, **53**, 437-447.

[30] **Han J.-H., Lee, I.,** 1998. Analysis of composite plates with piezoelectric actuators for vibration control using layerwise displacement theory, *Composites Part B*, **29B**, 621-632.

[31] **Lam, K. Y., Ng, T. Y.,** 1999. Active control of composite plates with integrated piezoelectric sensors and actuators under various dynamic loading conditions, *Smart Materials and Structures*, **8**, 223-237.

[32] **Varadarajan, S., Chandrashekhara, K., Agarwal, S.,** 2000. LQG/LTR-Based Robust Control of Composite Beams with Piezoelectric Devices, *Journal of Vibration and Control*, **6**, 607-630.

[33] **Valoor, M. T., Chandrashekhara, K., Agarwal, S.,** 2000. Active vibration control of smart composite plates using self-adaptive neuro-controller, *Smart Materials and Structures*, **9**, 197-204.

[34] **Hwu, C., Chang, W. C., Gai, H. S.,** 2004. Vibration suppression of composite sandwich beams, *Journal of Sound and Vibration*, **272**, 1-20.

[35] **Librescu, L., Na, S.,** 1998. Dynamic response control of thin-walled beams to blast pulses using structural tailoring and piezoelectric actuation, *Journal of Applied Mechanics*, **65**, No. 2, 497-504.

[36] **Na, S., Librescu, L.,** 2000. Dynamic response of adaptive cantilevers carrying external stores and sunjected to blast loading, *Journal of Sound and Vibration*, **231**, No. 4,1039-1055.

[37] **Librescu, L., Na, S.,** 2000. Optimal vibration control of thin-walled anisotropic cantilevers exposed to blast loadings, *Journal of Guidance Control and Dynamics*, **23**, No. 3, 491-500.

[38] **Türkmen, H.S., and Mecitoğlu, Z.,** 1999. Dynamic Response of A Stiffened Laminated Composite Plate Subjected to Blast Loading, *Journal of Sound and Vibration*, **221**(3), 371-389.

[39] **Türkmen, H. S.,** 1998. Dynamic response of laminated composite panels subjected to blast loading, *Ph.D. Thesis*, Istanbul Technical University

[40] **Türkmen, H.S.,** 1999. Structural Response of Cylindrically Curved Laminated Composite Shells Subjected to Blast Loading, *ARI*, **51**, 175-180.

[41] **Türkmen, H.S.,** 2002. Structural Response of Laminated Composite Shells Subjected to Blast Loading: Comparison of Experimental and Theoretical Methods, *Journal of Sound and Vibration*, **249**(4), 663-678.

[42] **Viladkar, M., N., Godbole, P., N., Krishna, P.,** 1998. Finite element analysis of column supported hyperbolic cooling towers using semi-loof shell and beam elements, *Engineering Structures,* Vol. 20, Nos 1-2, 75-85.

[43] **Kazancı, Z.,** 2000. Malzeme Özellikleri Sıcaklığa Bağlı Olan Katmanlı Kompozit Bir Plağın Çırpınma Analizi, *Yüksek Lisans Tezi*, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

[44] **Uyanık, H. ve Kazancı, Z.,** 2004. Anlık Basınç Yükü Etkisi Altındaki Konsol Bir Plağın Dinamik Analizi, *Havacılık ve Uzay Teknolojileri Dergisi*, Cilt **1**, Sayı 3, 9-17.

[45] **Uyanık H., Kazancı Z.,** 2004. Anlık Basınç Yükü Altındaki Kompozit Bir Plağın Dinamik Davranışının Sonlu Eleman Analizi, *Kayseri V. Havacılık Sempozyumu*, 13-14 Mayıs, Kayseri

[46] **Uyanık H., Kazancı Z., Mecitoğlu Z.,** 2004. Semiloof Kabuk Elemanlar Kullanılarak Akıllı Kompozit Bir Plağın Statik Analizi, *Havacılıkta İleri Teknolojiler ve Uygulamaları Sempozyumu*, 9-10 Aralık, İstanbul

[47] **Jacinto, A.C., Ambrosini, R.D., Danesi, R.F.,** 2001. Experimental and Computational Analysis of Plates under Air Blast Loading, *International Journal of Impact Engineering*, **25**, 927-947.

[48] **Jacob, N., Yuen, S.C.K., Nurick, G.N., Bonorchis, D., Desai, S.A., Tait, D.,** 2004. Scaling Aspects of Quadrangular Plates Subjected to Localised Blast Loads-Experiments And Predictions, *International Journal of Impact Engineering*, **30**, 1179-1208.

[49] **Yuen, S. C. K., Nurick, G.N.,** 2005. Experimental and numerical studies on the response of quadrangular stiffened plates. Part I: subjected to uniform blast load, *International Journal of Impact Engineering*, **31**, 55-83

[50] **Langdon, G., S., Yuen, S. C. K., Nurick, G.N.,** 2005. Experimental and numerical studies on the response of quadrangular stiffened plates. Part II: localised blast loading, *International Journal of Impact Engineering*, **31**, 85-111

[51] **Lam, N., Mendis, P., Ngo, T.,** 2004. Response Spectrum Solutions for Blast Loading, *Electronic Journal of Structural Engineering*, **4**, 28-44

[52] **Kotzialis, C., Derdas, C. and Kostopoulos, V.,** 2005. Blast Behavior of Plates with Sacrificial Cladding, *5th GRACM International Congress on Computational Mechanics*, Limassol, 29 June - 1 July, 2005

[53] **Gantes, C. J., Pnevmatikos, N. G.,** 2004. Elastic-plastic response spectra for exponential blast loading, *International Journal of Impact Engineering*, **30**, 323–343

[54] **Guruprasad, S., Mukherjee, A.,** 2000. Layered sacrificial claddings under blast loading Part I analytical studies, *International Journal of Impact Engineering*, **24**, 957-973

[55] **Marzocca, P., Librescu, L., Chiocchia, G.,** 2001. Aeroelastic response of 2-D lifting surfaces to gust and arbitrary explosive loading signatures, *International Journal of Impact Engineering*, **25**, 41-65.

[56] **Mosalam, K. M., Mosallam, A. S.,** 2001. Nonlinear transient analyses of reinforced concrete slubs subjected to blast loading and retrofitted with CFRP composites, *Composites*, Part B **32**, 623-636.

[57] **Marzocca, P., Librescu, L., Chiocchia, G.,** 2002. Aeroelastic response of a 2-D airfoil in a compressible flow field and exposed to blast loading, *Aerospace Science and Technology*, **6**, 259-272

[58] **Hause, T., Librescu, L.,** 2005. Dynamic response of anisotropic sandwich flat panels to explosive pressure pulses, *International Journal of Impact Engineering*, **31**, 607-628.

[59] **Irons, B.M.,** 1976. The Semiloof Shell Element, In Finite Elements for Thin Shells and Curved Members, Willey, New York.

[60] **Ergatoudis, J. G.,** 1968. Isoparametric Finite Elements in Two and Three Dimensional Analysis, *PhD Thesis*, University of Wales, Swansea.

[61] **Ahmad, S.,** 1969. Curved Finite Elements in The Analysis of Solid Shell and Plate Structures, *PhD Thesis*, University of Wales, Swansea.

[62] **Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., and Too, J. M.,** 1974. Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **13**, 275-290.

[63] **Irons, B. M.,** 1973. A Further Modification of the Ahmad Shell element, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **6**, 305-309.

[64] **Baldwin, J. T., Razzaque, A., and Irons, B. M.,** 1973. Shape Functions Subroutine for an Isoparametric Thin Plate Element, *Internal Report of Civil Eng. Dept*., University of Wales, Swansea.

[65] **Mecitoğlu, Z.,** 1997. Governing Equations of a Stiffened Laminated Inhomogeneous Conical Shell, *AIAA Journal*, **35**, No. 6,.

[66] **Stein, M.,** 1986. Nonlinear Theory for Plates and Shells Including the Effects of Transverse Shearing, *AIAA Journal*, **24**, No. 9, 1537-1544.

[67] **Albuquerque, F.,** 1973. A Beam Element for Use with the Semiloof Shell Element, *MSc Thesis*, University of Wales, Swansea,

[68] **Martins, R. A. F.,** 1974. Finite Element Eigenvalue Solution Employing the Semiloof Shell Element, *MSc Thesis*, Universitiy of Wales, Swansea.

[69] **Martins, R. A. F., and Owen, R. J.,** 1977. Structural Stability and Natural Vibration Analysis of thin Arbitrary Shells by Use of the Semilof Shell Element, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **11**, 481-498.

[70] **Owen, D. R. J., and Dinis, L. M. S.**, 1978. Transient Dynamic Analysis of Thin Shells, Including Visco-Plastic and Large Displacement Effects, *In the Mathematics of Finite Elements and Applications*, Brunel University.

[71] **Mecitoğlu, Z.,** 1988. Takviyeli Silindirik Kabuk Yapıların Serbest Titreşimlerinin İncelenmesi, *Doktora Tezi*, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul,

[72] **Mecitoğlu, Z.,** 1990. Vibration Analysis of Stiffened Cylindrical Thin Shells, *Proc. 17th Congress of the International Council of Aeronautical Sciences*, Stockholm, 986-993.

[73] **Piefort, V.,** 2001. Finite Element Modelling of Piezoelectric Active Structures, *PhD Thesis*, Université Libre de Bruxelles.

[74] **Seeger, F., Köppe, H., Gabbert, U.,** 2001. Comparison of Different Shell Elements for the Analysis of Smart Structures, *Journal of Mathematics and Mechanics*, Section 1-24 Additional Issue 81, S4, S887-S888.

[75] **Thomson, W., T.,** 1988. Theory of Vibration with Applications, 170-178, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

[76] **Kuo, B., C.,** 2002. Automatic Control Systems, John Wiley and Sons,

[77] **Ogata, K.,** 1990. Modern Control Engineering, Second Edition, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

[78] **Preumont, A.,** 2002. Vibration Control of Active Structures, An Introduction, 2nd Edition, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London.

[79] **Lam, K. Y., Peng, X. Q., Liu, G. R. and Reddy, J. N.,** 1997. A Finite-Element Model For Piezoelectric Composite Laminates, *Smart Materials and Structures*, **6**, No. 5, 583-591.

EK−A

DOĞRUDAN İNTEGRASYON YÖNTEMLERİ

Bu bölümde sonlu elemanlar dinamik hareket denklemi en genel haliyle, **M** kütle matrisi, **K** katılık matrisi, **C** sönüm matrisi, **R**(t) zamana bağlı dış yük vektörü, **U** konum vektörü, $\dot{\mathbf{U}}$ hız vektörü, $\ddot{\mathbf{U}}$ ivme vektörü olmak üzere

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{R}(t) \tag{A.1}$$

şeklinde ifade edilen dinamik bir sistemin çözümüne ait doğrudan integrasyon yöntemlerinden kısaca bahsedilecektir. Doğrudan integrasyon ifadesi, denklemlerin başka bir forma dönüştürülerek çözülmesi anlamında olmayıp sayısal olarak zaman adımlarında integrasyon yapılması anlamındadır. Doğrudan sayısal integrasyon yöntemi temelde iki ana düşünceye dayanmaktadır. Bunlardan birincisi (A.1) ile verilen hareket denkleminin her t anında çözümünün elde edilmesine çalışılmayarak incelenen başlangıç ve bitiş zaman aralığında belirli Δt zaman adımlarında bu denklemin sağlanmasıdır. İkincisi ise her bir Δt zaman adımı aralığında konum, hız ve ivme değişimleri için bir kabul yapılmasıdır.

Sayısal integrasyon ile çözüme ulaşmak için incelenen zaman aralığı, yani başlangıç zamanı t=0 ve bitiş zamanı T olmak üzere, n tane zaman aralığına bölünür (yani Δt=T/n) ve başlangıç anında konum, hız ve ivme vektörleri sırasıyla $\mathbf{U}_0$, $\dot{\mathbf{U}}_0$, $\ddot{\mathbf{U}}_0$ olarak bilindiği kabul edilerek $0,\Delta t,2\Delta t,3\Delta t,\ldots,t,t+\Delta t,\ldots,T$ zaman aralıklarında sayısal integrasyon işlemi uygulanır. Burada herhangi bir zaman adımına ait değerlerin hesaplanması için daha önceki zaman adımlarında elde edilen değerlerin kullanıldığı algoritmalardan yararlanılır. Yani $t+\Delta t$ zamanına ait konum, hız ve ivme vektörlerinin bulunması için daha önceki $0,\Delta t,2\Delta t,3\Delta t,\ldots,t$ zaman adımlarındaki değerlerinin çözülmüş olması gereklidir.

Çözüme ulaşmak için Merkezi Farklar Metodu, Houbolt Metodu, Wilson θ Metodu, Newmark Metodu yaygın olarak kullanılan algoritmalardır.

Merkezi Farklar Metodu

Bu yöntemde ivme ve hız vektörlerinin değişimi için konum vektörlerinin sonlu fark ifadeleri kullanılır. Yani herhangi bir *t* anında ivme için konum vektörleri cinsinden

$$\ddot{\mathbf{U}}_t = \frac{1}{\Delta t^2}\left\{\mathbf{U}_{t-\Delta t} - 2\mathbf{U}_t + \mathbf{U}_{t+\Delta t}\right\} \tag{A.2}$$

ifadesini yazmak mümkündür. Benzer şekilde hız vektörü için

$$\dot{\mathbf{U}}_t = \frac{1}{2\Delta t}\left(-\mathbf{U}_{t-\Delta t} + \mathbf{U}_{t+\Delta t}\right) \tag{A.3}$$

ifadesi yazılabilir. (A.1) hareket denkleminin *t* anında sağlanacağı dikkate alınarak

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_t + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_t + \mathbf{K}\mathbf{U}_t = \mathbf{R}_t \tag{A.4}$$

yazmak mümkündür. $t+\Delta t$ anındaki konum vektörünü bulmak için (A.2) ve (A.3) ifadeleri (A.4) denkleminde kullanılarak

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{C}\right)\mathbf{U}_{t+\Delta t} = \mathbf{R}_t - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2}\mathbf{M}\right)\mathbf{U}_t - \left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{C}\right)\mathbf{U}_{t-\Delta t} \tag{A.5}$$

şeklinde $\mathbf{U}_{t+\Delta t}$ konum vektörünün hesaplanabileceği bir ifade elde edilir. Bu ifadeden görüldüğü gibi $\mathbf{U}_{t+\Delta t}$ vektörü $\mathbf{U}_t$ ile $\mathbf{U}_{t-\Delta t}$ vektörlerine bağlı olduğundan başlangıçtaki konum, hız ve ivme vektörlerine ilave olarak başlangıçtan bir önceki adıma ait konum vektörüne ihtiyaç duyulur. Bu özel başlangıç şartı ise konum fonksiyonunun t=0 civarında Taylor serine açılımı ile (yüksek mertebeli terimler ihmal edilerek)

$$\mathbf{U}_{-\Delta t} = \mathbf{U}_0 - \Delta t\dot{\mathbf{U}}_0 + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{\mathbf{U}}_0 \tag{A.6}$$

ifadesinden elde edilir.

Bu yöntemde zaman adım aralığı değerinin doğru seçilmesi çözümün kararlılığı ve doğruluğu açısından oldukça önemlidir. Geçerli bir çözüme elde edebilmek için Δt zaman adımı, Δt_{cr} kritik bir zaman adımı değerinden küçük olmalıdır. Yani

$$\Delta t \le \Delta t_{\text{cr}} = \frac{T_n}{\pi} \tag{A.7}$$

şeklinde olmalıdır. Bu ifadede yer alan T_n sonlu elemanlar ile ifade edilmiş sistemin hesaplanmış en düşük periyodunu temsil etmektedir.

Houbolt Metodu

Houbot metodu bir önceki konuda söz edilen Merkezi Farklar metodu ile bağlantılı olup $t+\Delta t$ anındaki ivme vektörü konum vektörleri cinsinden

$$\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t^2}\left\{2\mathbf{U}_{t+\Delta t} - 5\mathbf{U}_t + 4\mathbf{U}_{t-\Delta t} - \mathbf{U}_{t-2\Delta t}\right\} \tag{A.8}$$

şeklinde verilir. Hız vektörü için

$$\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{6\Delta t}\left\{11\mathbf{U}_{t+\Delta t} - 18\mathbf{U}_t + 9\mathbf{U}_{t-\Delta t} - 2\mathbf{U}_{t-2\Delta t}\right\} \tag{A.9}$$

ifadesi kullanılır. $t+\Delta t$ anında (A.1) hareket denklemi için

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{U}_{t+\Delta t} = \mathbf{R}_{t+\Delta t} \tag{A.10}$$

eşitliği yazılabilir. (A.8) ve (A.9) ifadeleri (A.10) eşitliğinde yerlerine yazılır ve düzenlenirse $t+\Delta t$ anındaki konum vektörü

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{11}{6\Delta t}\mathbf{C} + \mathbf{K}\right)\mathbf{U}_{t+\Delta t} = \mathbf{R}_{t+\Delta t} &+ \left(\frac{5}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{3}{\Delta t}\mathbf{C}\right)\mathbf{U}_t \\ &- \left(\frac{4}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{3}{2\Delta t}\mathbf{C}\right)\mathbf{U}_{t-\Delta t} + \left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{1}{3\Delta t}\mathbf{C}\right)\mathbf{U}_{t-2\Delta t}\end{aligned} \tag{A.11}$$

ifadesi ile hesaplanabilir. Bu ifadelerden kolayca görüleceği üzere $t+\Delta t$ anına ait konum vektörü t, $t-\Delta t$ ve $t-2\Delta t$ anına ait konum vektörlerine bağlıdır. Bu durumda Houbolt metodunun kullanılabilmesi için başlangıçta bilinen $\mathbf{U}_0$, $\dot{\mathbf{U}}_0$, $\ddot{\mathbf{U}}_0$ vektörlerine ilave olarak $\mathbf{U}_{-\Delta t}$ ile $\mathbf{U}_{-2\Delta t}$ konum vektörlerinin hesaplanmasına ihtiyaç vardır. Bu vektörler genellikle Merkezi Farklar Metodu kullanılarak ya da başka özel yöntemlerle hesaplanırlar. Bu yöntemde Δt zaman adımının kritik zaman adımından daha küçük olma zorunluluğu yoktur.

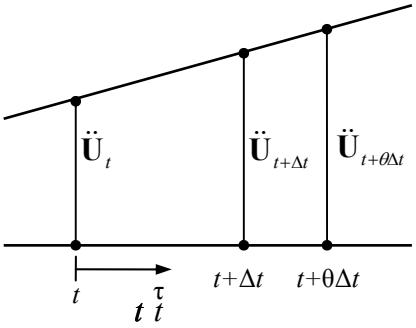
Wilson θ Metodu

Wilson θ metodu lineer ivmelenme metodunun geliştirilmesi ile elde edilmiş bir metot olup Şekil A.1 de görüldüğü gibi $\theta \geq 1$ olmak üzere ivmenin t zamanı ile $t+\theta\Delta t$

zaman aralığında lineer değiştiği kabul edilir. Kararlılık için $\theta \geq 1.37$ olmalıdır ve genelde $\theta=1.4$ değeri kullanılmaktadır.

İvmenin lineer değişim kabulünden dolayı t ile $t+\Delta t$ zaman aralığında $0 \leq \tau \leq \theta \Delta t$ olmak üzere herhangi bir τ anında ivme vektörü için aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\ddot{\mathbf{U}}_{t+\tau} = \ddot{\mathbf{U}}_t + \frac{\tau}{\theta \Delta t}\left(\ddot{\mathbf{U}}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{\mathbf{U}}_t\right) \tag{A.12}$$



Şekil A.1: Wilson θ metodu için lineer ivme değişimi.

(A.12) ifadesi zaman değişkeni τ cinsinden bir kez integre edilerek hız vektörü için

$$\dot{\mathbf{U}}_{t+\tau} = \dot{\mathbf{U}}_t + \ddot{\mathbf{U}}_t \tau + \frac{\tau^2}{2\theta \Delta t}\left(\ddot{\mathbf{U}}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{\mathbf{U}}_t\right) \tag{A.13}$$

ifadesi elde edilebilir. Hız vektörü de yine τ cinsinden bir kez integre edilerek

$$\mathbf{U}_{t+\tau} = \mathbf{U}_t + \dot{\mathbf{U}}_t \tau + \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{U}}_t \tau^2 + \frac{\tau^3}{6\theta \Delta t}\left(\ddot{\mathbf{U}}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{\mathbf{U}}_t\right) \tag{A.14}$$

şeklinde konum vektörü ifadesini elde etmek mümkün olur. $\tau=t+\theta\Delta t$ anı için (A.13) ve (A.14) denklemleri yazılacak olursa hız ve konum vektörleri

$$\dot{\mathbf{U}}_{t+\theta\Delta t} = \dot{\mathbf{U}}_t + \frac{\theta \Delta t}{2}\left(\ddot{\mathbf{U}}_{t+\theta\Delta t} + \ddot{\mathbf{U}}_t\right) \tag{A.15}$$

$$\mathbf{U}_{t+\theta\Delta t} = \mathbf{U}_t + \theta \Delta t \dot{\mathbf{U}}_t + \frac{\theta^2 \Delta t^2}{6}\left(\ddot{\mathbf{U}}_{t+\theta\Delta t} + 2\ddot{\mathbf{U}}_t\right) \tag{A.16}$$

şeklinde olur. Yukarıdaki iki ifadede yer alan $\ddot{\mathbf{U}}_{t+\theta\Delta t}$ ve $\dot{\mathbf{U}}_{t+\theta\Delta t}$ vektörleri konum vektörü $\mathbf{U}_{t+\theta\Delta t}$ cinsinden düzenlenirse

$$\ddot{\mathbf{U}}_{t+\theta\Delta t} = \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2}\left(\mathbf{U}_{t+\theta\Delta t} - \mathbf{U}_t\right) - \frac{6}{\theta \Delta t}\dot{\mathbf{U}}_t - 2\ddot{\mathbf{U}}_t \tag{A.16}$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{t+\theta\Delta t} = \frac{3}{\theta\Delta t}\left(\mathbf{U}_{t+\theta\Delta t} - \mathbf{U}_t\right) - 2\dot{\mathbf{U}}_t - \frac{\theta\Delta t}{2}\ddot{\mathbf{U}}_t \tag{A.17}$$

olacaktır. (A.1) ile verilmiş olan genel dinamik hareket denkleminin $t+\theta\Delta t$ anında geçerli olacağından yola çıkarak

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{t+\theta\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_{t+\theta\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{U}_{t+\theta\Delta t} = \overline{\mathbf{R}}_{t+\theta\Delta t} \tag{A.18}$$

ifadesini yazmak mümkün olur. Burada

$$\overline{\mathbf{R}}_{t+\theta\Delta t} = \mathbf{R}_t + \theta(\mathbf{R}_{t+\Delta t} - \mathbf{R}_t) \tag{A.19}$$

şeklinde olup t ile $t+\Delta t$ zaman aralığında lineer ivme değişimine neden olan yüklerin değişiminin de lineer olduğu anlamını taşır. (A.17) ve (A.18) ifadeleri (A.1)'de yerlerine yazılarak $\mathbf{U}_{t+\theta\Delta t}$ çözülür ve (A.16)'da kullanılarak $\ddot{\mathbf{U}}_{t+\theta\Delta t}$ hesaplanabilir. İçinde $\ddot{\mathbf{U}}_{t+\theta\Delta t}$ ifadesi geçen (A.12), (A.13) ve (A.14) denklemlerinde hesaplanan bu ifade kullanılarak ve $\tau=\Delta t$ alınarak $\ddot{\mathbf{U}}_{t+\theta\Delta t}$, $\dot{\mathbf{U}}_{t+\theta\Delta t}$ ve $\mathbf{U}_{t+\Delta t}$ şeklinde $t+\Delta t$ anına ait ivme, hız ve konum vektörleri elde edilir.

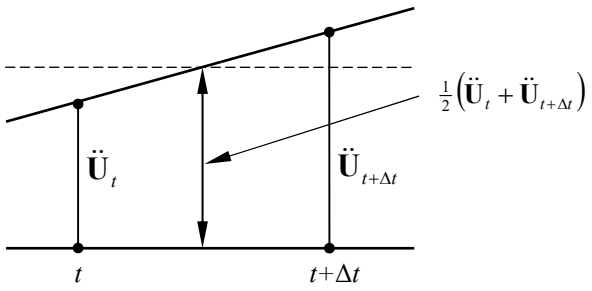
Newmark Zaman İntegrasyonu

Newmark integrasyonunu lineer ivmelenme metodunun genişletilmiş bir uygulaması olarak düşünmek anlaşılmasını kolaylaştırır. Bu yöntemde $t+\Delta t$ anına ait hız ve konum vektörleri için

$$\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{U}}_t + \left[(1-\delta)\ddot{\mathbf{U}}_t + \delta\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}\right]\Delta t \tag{A.20}$$

$$\mathbf{U}_{t+\Delta t} = \mathbf{U}_t + \dot{\mathbf{U}}_t\Delta t + \left[\left(\tfrac{1}{2}-\alpha\right)\ddot{\mathbf{U}}_t + \alpha\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}\right]\Delta t^2 \tag{A.21}$$

kabulleri yapılır. Bu ifadelerde yer alan α ve δ parametreleri integrasyonun doğruluğu ve kararlılığını sağlamak için $\delta\geq 0.5$ ve $\alpha\geq 0.25(0.5+\delta)^2$ olacak şekilde seçilir. $\delta=\frac{1}{2}$ ve $\alpha=\frac{1}{6}$ seçilmesi halinde bu durum lineer ivmelenme metoduna (Wilson θ metodunda θ=1 durumuna) karşılık gelir. Newmark integrasyon metodunun kesin kararlılığı için $\delta=\frac{1}{2}$ ve $\alpha=\frac{1}{4}$ değerlerine karşılık gelen ve aşağıdaki Şekil A.2'de verilen sabit-ortalama-ivmelenme metodu önerilmektedir.



Şekil A.2: Newmark sabit-ortalama-ivmelenme şeması.

Yukarıda bahsedilenlere ilave olarak $t+\Delta t$ anına ait konum, hız ve ivme vektörlerinin çözümü için (A.1) ifadesi $t+\Delta t$ anı için düzenlenerek

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{U}_{t+\Delta t} = \mathbf{R}_{t+\Delta t} \tag{A.22}$$

şeklinde yazılır. (A.21) ifadesindeki $\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$ ivme vektörü $\mathbf{U}_{t+\Delta t}$ terimleri cinsinden düzenlenir ve (A.20)'de yazılırsa sadece bilinmeyen $\mathbf{U}_{t+\Delta t}$ yer değiştirme vektörü ifadesine bağlı $\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$ ivme vektörü ve $\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$ hız vektörü ifadeleri bulunur. Bulunan ifadeler (A.22) denkleminde kullanılarak $t+\Delta t$ anına ait $\mathbf{U}_{t+\Delta t}$ konum vektörü çözülür ve ardından (A.20) ile (A.21) denklemleri kullanılarak o andaki ivme ve hız vektörleri elde edilir.

Newmark zaman integrasyonu yöntemine ait işlem adımlarını aşağıdaki şekilde özetlemek mümkündür:

A. Başlangıç Hesaplamaları :

1. Sistemin **K** katılık matrisi, **M** kütle matrisi ve **C** sönüm matrisinin hesaplanması,
2. Başlangıç anı t=0 için $\mathbf{U}_0$ konum, $\dot{\mathbf{U}}_0$ hız ve $\ddot{\mathbf{U}}_0$ ivme vektörlerinin tanımlanması,
3. Zaman adımı Δt, integrasyon parametreleri δ ile α'nın seçilerek integrasyon sabitlerinin hesaplanması,

$$\delta \geq 0.5 \; ; \qquad \alpha \geq 0.25(0.5+\delta)^2$$

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}; \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}; \quad a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}; \quad a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1;$$

$$a_4 = \frac{\delta}{\alpha}; \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\delta}{\alpha} - 2\right); \quad a_6 = \Delta t(1-\delta); \quad a_7 = \delta \Delta t$$

4. Efektif katılık matrisi $\widehat{\mathbf{K}}$ hesabı : $\widehat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C}$

B. Her bir zaman adımında yapılacak hesaplamalar :

1. $t+\Delta t$ anına ait efektif yük vektörünün hesaplanması

$$\widehat{\mathbf{R}}_{t+\Delta t} = \mathbf{R}_{t+\Delta t} + \mathbf{M}(a_0\mathbf{U}_t + a_2\dot{\mathbf{U}}_t + a_3\ddot{\mathbf{U}}_t) + \mathbf{C}(a_1\mathbf{U}_t + a_4\dot{\mathbf{U}}_t + a_5\ddot{\mathbf{U}}_t)$$

2. $t+\Delta t$ anındaki yer değiştirmenin çözülmesi : $\widehat{\mathbf{K}}\mathbf{U}_{t+\Delta t} = \widehat{\mathbf{R}}_{t+\Delta t}$

3. $t+\Delta t$ anındaki ivme ve hız vektörlerinin hesaplanması:

$$\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = a_0(\mathbf{U}_{t+\Delta t} - \mathbf{U}_t) - a_2\dot{\mathbf{U}}_t - a_3\ddot{\mathbf{U}}_t$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{U}}_t + a_6\dot{\mathbf{U}}_t + a_7\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$$

Bathe[1] tarafından yapılan analizde doğrudan integrasyon yöntemleri, örnek bir problem gözönüne alınarak çözüme ulaşabilme kararlılığı açısından test edilmiş ve doğrudan integrasyon yöntemleri arasında Newmark Zaman İntegrasyonu Metodu'nun en iyi kararlılık özelliğine sahip olduğu gösterilmiştir.

[1] **Bathe, K., J., Wilson, E., L.,** 1976. Numerical methods in finite element analysis. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

ÖZGEÇMİŞ

Haydar UYANIK 1968 Konya doğumludur. İlkokul, ortaokul ve liseyi burada bitirmiş ve daha sonra 1993 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi'nden Uçak Mühendisi olarak mezun olmuştur. Aynı üniversitede yüksek lisans çalışmasına devam ederken 1994 yılında Hava Kuvvetleri'nde muvazzaf subay olarak göreve başlamış ve 1997 yılında yüksek lisansını tamamlamıştır. Halen Hava Harp Okulu Dekanlığı Havacılık Mühendisliği Bölümü'nde öğretim elemanı olarak görev yapmaktadır. yapıların sonlu elemanlar yöntemiyle analizi, titreşimlerin kontrolü ve akıllı yapılar konularında çalışmalarına devam eden Haydar UYANIK evli ve üç çocuk babası olup İngilizce bilmektedir.