İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EĞRİ EKSENLİ DÜZLEMSEL ÇUBUKLARIN DÜZLEM DIŞI STATİK VE DİNAMİK PROBLEMLERİNİN ANALİTİK ÇÖZÜMÜ

DOKTORA TEZİ

Y. Müh. O. Yaşar DOĞRUER

Anabilim Dalı : MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ

Programı : KONSTRÜKSİYON VE İMALAT

OCAK 2006

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EĞRİ EKSENLİ DÜZLEMSEL ÇUBUKLARIN DÜZLEM DIŞI STATİK VE DİNAMİK PROBLEMLERİNİN ANALİTİK ÇÖZÜMÜ

DOKTORA TEZİ
Y. Müh. O. Yaşar DOĞRUER
(503992048)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 31 Ağustos 2005
Tezin Savunulduğu Tarih : 30 Ocak 2006

Tez Danışmanı :	**Y.Doç.Dr. Ekrem TÜFEKÇİ**
Diğer Jüri Üyeleri	**Prof.Dr. Alaeddin ARPACI (İ.T.Ü.)**
	Prof.Dr. Reha ARTAN (İ.T.Ü.)
	Prof.Dr. Necati TAHRALI (Y.T.Ü.)
	Prof.Dr. Uğur GÜVEN (Y.T.Ü.)

OCAK 2006

ÖNSÖZ

İnsanoğlunun doğal öğrenme ve bulma merakı; bildiğimiz teknik uygarlığın oluşmasına, bilgi dağarcığımızın alabildiğine zenginleşmesine yol açmıştır. Modern dünyada bilgiye olan bu tutku, kendini en güçlü bir biçimde bilimsel etkinlikte açığa vurmaktadır. Bilimsel düşünce ve deneyler, geçmişteki başarıların gözden geçirilmesi, düşünce ve davranışlardaki devrimsel değişikliklerin nasıl oluştuğunu göstermesi bakımından önemlidir. Bilim bir yandan teknolojik uygulama yoluyla yaşam koşullarını değiştirirken, öte yandan düşünmemizi biçimlemekte, dünya görüşümüzü etkilemektedir. Bilimle birlikte düşüncemizin daha rasyonel, olgulara daha saygılı bir nitelik kazandığı yadsınamaz.

Uygarlığın gelişmesinde bilim ile teknolojinin ilişkisi daima önemli rol oynamıştır. Günümüzde bilime dayanmayan bir teknoloji nasıl düşünülemezse, teknolojinin sağladığı büyük olanaklardan yararlanmayan bir bilimden de söz etmek güçtür. Bilimsel bilginin uygulamaya konması teknolojiye yol açmakta; teknoloji, insan yaşam biçimini, üretim araç ve yöntemlerini değiştiren makinalar ortaya koyarak endüstriye dönüşmektedir. Bilimsel bilgi ve bulguların teknoloji aracılığıyla endüstriye geçişi çağımızda büyük hız kazanmıştır.

Bilim dalları arasında önemli bir yeri olan Mekanik, kuvvetlerin etkisi altındaki cisimlerin hareketini inceler. Burada amaç, dış yüklerin etkisi altında elastik cisimlerde oluşan gerilme ve şekil değiştirmeleri, belirli bir diferansiyel denklem takımından hareket ederek kesin bir şekilde hesaplamaktır. Şekil değiştiren cisimlerin ve mühendislik yapılarının önemli bir grubunu oluşturan çubuklar, mühendisliğin bir çok alanında temel yapı elemanı olarak kullanılmaktadır.

Bu çalışmada, eğri eksenli düzlemsel çubukların düzlem dışı statik ve dinamik problemlerini ifade eden genel denklemler; kayma deformasyonu ve hem eğilme hem de burulmadan kaynaklanan dönme eylemsizliği etkileri ihmal edilmeden analitik olarak çözülmüştür. Bugüne kadar yapılan çalışmaların çoğu konuyu düzlemde incelemiş ve söz konusu etkileri ihmal ederek yaklaşık yöntemlerle çözüm önermişlerdir.

Çalışmalarım sırasında yakın ilgi ve desteğini gördüğüm, akademik ve yöneltici bilgilerinden yararlandığım sayın değerli hocam Y. Doç. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ ' ye, hiç bir yardımını ve desteğini esirgemeyen sayın Arş. Gör. Öznur ÖZDEMİRCİ 'ye, ve her an yanımda olan, sıkıntılarımı paylaşan sevgili eşim Nebile DOĞRUER' e içtenlikle teşekkür ederim.

Ağustos 2005 O. Yaşar DOĞRUER

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ **v**
ŞEKİL LİSTESİ **vii**
SEMBOL LİSTESİ **xii**
ÖZET **xiv**
SUMMARY **xvii**

1. GİRİŞ **1**
1.1. Çalışmanın Amacı 3

2. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLAR KONUSUNDA YAPILAN ÇALIŞMALAR **6**
2.1. Eğri Eksenli Düzlemsel Çubukların Statiği Konusunda Yapılan Çalışmalar 7
2.2. Eğri Eksenli Düzlemsel Çubukların Dinamiği Konusunda Yapılan Çalışmalar 11

3. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN GENEL DENKLEMLERİ **16**
3.1. Çubuk Statiğinin Genel Denklemleri 16
3.2. Çubuk Titreşimlerinin Genel Denklemleri 24

4. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN DÜZLEM DIŞI PROBLEMLERİNİN KESİN ÇÖZÜMÜ **28**
4.1. Başlangıç Değerleri Yöntemiyle Denklemlerin Çözümü 28
4.1.1. Çember Eksenli Sabit Kesitli Çubuğun Asal Matrisi 37
4.1.2. Parabol Eksenli Değişken Kesitli Çubuğun Asal Matrisi 38
4.2. Tekil Yüklerin Simetrik Olmayan Noktadan Etkidiği Çubukların Hesabı 40
4.2.1. Asal Matrisin Tersi (Çember Eksenli Sabit Kesitli Çubuk) 43
4.2.2. Asal Matrisin Tersi (Parabol Eksenli Değişken Kesitli Çubuk) 44
4.3. Sonlu Eleman Formülasyonu 46
4.4. Yayılı Yüklerin Etkidiği Çubukların Hesabı 51
4.5. Prizmatik Çubuklarda Çarpılma Etkisi 52

5. EĞRİ EKSENLİ DÜZLEMSEL ÇUBUKLARIN DÜZLEM DIŞI SERBEST TİTREŞİMLERİ **54**
5.1. Çember Eksenli Sabit Kesitli Çubukların Doğal Frekanslarının Hesabı 54
5.1.1. Problemin Tanımı 57
5.2. Kesiti Kademeli Değişen Çember Eksenli Çubuklar 58
5.2.1. Problemin Tanımı 62

6. SAYISAL ÖRNEKLER **66**
6.1. Eğri Eksenli Çubukların Düzlem Dışı Şekil Değiştirmeleri 66
6.1.1. İki Ucundan Ankastre Mesnetli ve Orta Noktasından Etkiyen F Yükünü Taşıyan Dairesel Sabit Kesitli Çember Eksenli Çubuk 66
6.1.2. Bir Ucundan Ankastre, Diğer Ucundan Sabit Mesnetli,Orta Noktasından Etkiyen F Tekil Yükünü Taşıyan Dairesel Sabit Kesitli Çember Eksenli Çubuk 68
6.1.3. Bir Ucundan Ankastre, Serbest Ucundan Etkiyen F Tekil Yükünü Taşıyan Sabit Kesitli Çember Eksenli Çubuk 69
6.1.4. Bir Ucundan Ankastre, Serbest Ucundan Etkiyen M Tekil Momenti Taşıyan Sabit Kutu Kesitli Çember Eksenli Çubuk 72
6.1.5. Uçlarından Etkiyen Burulma Momentleriyle Yüklü Ankastre-Ankastre Mesnetli Dairesel Sabit Kesitli Çember Eksenli Çubuk 73
6.1.6. Bir Ucundan Ankastre Bağlı Serbest Ucundan Tekil Kuvvet ve Tekil Moment Etkisindeki Dairesel Değişken Kesitli Çember Eksenli Çubuk 76
6.1.7. Bir Ucundan Ankastre, Serbest Ucundan Etkiyen F Tekil Yükünü Taşıyan Sabit Kare Kesitli Çember Eksenli Çubuk 78
6.1.8. Bir Ucundan Ankastre, Serbest Ucundan Etkiyen F Tekil Yükünü Taşıyan İnce Cidarlı Sabit Kutu Kesitli Çember Eksenli Çubuk 79
6.1.9. Bir Ucundan Ankastre, Serbest Ucundan Etkiyen F Tekil Yükünü Taşıyan Değişken Kesitli Spiral Eksenli Çubuk 79
6.1.10. İki Ucundan Ankastre ve Düzgün Yayılı Yük Etkisindeki Dairesel Sabit Kesitli Çember Eksenli Çubuk 82
6.1.11. İki Ucundan Ankastre ve Düzgün Yayılı Yük Etkisindeki Dikdörtgen Sabit Kesitli Çember Eksenli Çubuk 83
6.2. Eğri Eksenli Çubukların Düzlem Dışı Titreşimleri 84

7. DENEYSEL ÇALIŞMALAR ve DENEYSEL MODAL ANALİZ **93**
7.1. Deneysel Çalışmalar 93
7.1.1. Çember Eksenli Çubuğun Serbest Titreşimleri 94
7.2. Çember Eksenli Tek Kademeli Çubuğun Serbest Titreşimleri 99
7.3. Deneysel Modal Analiz 103
7.3.1. Deney Sonuçları ve Mod Şekilleri 106
7.3.1.1. 120^0 ve 160^0 Eksen Açıklığına Sahip Çember Eksenli Çubuk 111
7.3.1.2. 180^0 Eksen Açıklığına Sahip Çember Eksenli Çubuk 113

8. SONUÇLAR VE TARTIŞMA **115**

KAYNAKLAR **119**

EKLER **127**

ÖZGEÇMİŞ **155**

TABLO LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 3.1. α_n, α_b ve k_n, k_b sabitleri 21
Tablo 6.1. Bu çalışmada ve Pantazopoulou [37] tarafından yapılan çalışmada elde edilen sonuçların karşılaştırılması..... 68
Tablo 6.2. Örnek 6.1.2'ye ait $\phi = 0^0$ *ve* $\phi = 45^0$ deki değerler..... 69
Tablo 6.3. Elde edilen sonuçlar, ϕ=90^o, Şekil 6.3, (Kim ve Kim, K&K).... 71
Tablo 6.4. Elde edilen sonuçlar, Şekil 6.5, $\phi = 60^o$..... 72
Tablo 6.5. Elde edilen sonuçlar, ankastre-ankastre mesnet, Şekil 6.6, $\phi = 180^o$..... 74
Tablo 6.6. Elde edilen sonuçlar, basit mesnet, (Kang ve Bert, K&B)..... 75
Tablo 6.7. Üniform olmayan kesitli, basit mesnetli çubuğun yerdeğiştirme ve kesit dönmesi değerleri, (Malekzadeh ve Karami, M&K)..... 75
Tablo 6.8. Elde edilen sonuçlar, ankastre-ankastre mesnet, Şekil 6.7, $\phi = 180^o$ (Malekzadeh ve Karami, M&K)..... 77
Tablo 6.9. Serbest ucun yerdeğiştirme miktarı, Şekil 6.9, ($\phi = 90^o$)..... 79
Tablo 6.10. Bu çalışmada ve Sengupta-Dasgupta (S&D) tarafından elde edilen sonuçlar, klasik teori (CBT) ve kayma deformasyonu etkisi (SDBT), değişken kesitli spiral çubuk (α=0.4)..... 81
Tablo 6.11. Bu çalışmada, Sheikh [69] ve Dasgupta-Sengupta [48] tarafından yapılan çalışmalarda elde edilen sonuçların karşılaştırma tablosu..... 82
Tablo 6.12. Sonuçların, Boyutsuz Frekans Parametresine $\left[(\omega^2 R^4(\rho A/EI_n)\right]^{1/4}$ göre karşılaştırılması, ϕ_t=80^o ve λ=20..... 85
Tablo 6.13. Frekans katsayıları $\omega R^2\sqrt{\mu/(EI_n)}$, ankastre-ankastre mesnetli çember eksenli dairel kesitli çubuk (k_b=1/0.89 ve Poisson oranı ν=03)..... 86
Tablo 6.14. Frekans katsayıları $\omega R^2\sqrt{\mu/(EI_n)}$, ankastre-ankastre mesnetli çember eksenli dairel kesitli çubuk (k_b=1/0.85 ve Poisson oranı ν=03)..... 87
Tablo 6.15. Elde edilen frekanslar (Hz) (Bu çalışma ve E Silva [31])..... 88
Tablo 7.1. Ankastre-serbest mesnet durumu için frekans değerleri..... 96
Tablo 7.2. Ankastre-ankastre mesnet durumu için frekans değerleri..... 97
Tablo 7.3. Serbest-serbest mesnet durumu için frekans değerleri…..... 97
Tablo 7.4. Ankastre-sabit mesnet durumu için frekans değerleri…..... 98
Tablo 7.5. Sabit-sabit mesnet durumu için frekans değerleri…..... 98
Tablo 7.6. Ankastre-serbest mesnet durumu için, deneysel ve analitik frekans değerleri (η=0.8, tüm etkiler dikkate alınmıştır)…..... 100

Tablo 7.7. Ankastre-serbest mesnet durumu için frekans değerleri, $\phi_T = 120^0$ ve 160^0 112

Tablo 7.8. Çember eksenli çubuğun frekans değerleri, $\phi_T = 180^0$ 113

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 3.1. Çubuğun şekil değiştirmeden önceki ve sonraki durumları..... 17
Şekil 3.2. Çubuk elemana etki eden dış yükler ve kesit tesirleri..... 19
Şekil 4.1. Simetrik olmayan bir çubuğun en genel durumu..... 41
Şekil 4.2. Çubukların analitik formülasyonunda kullanılan pozitif yön anlaşması..... 47
Şekil 4.3. Çubukların matris yöntemlerle analizinde kullanılan pozitif yön anlaşması..... 48
Şekil 4.4. Her iki ucundan ankastre bağlı, eğri eksenli çubuk..... 50
Şekil 5.1. Eğri eksenli kiriş geometrisi ve koordinat sistemi..... 56
Şekil 5.2. Tek kademeli çember eksenli çubuk..... 58
Şekil 5.3. (a) $\eta = h_2 / h_1 < 1$ için kademenin ψ / ϕ_T 'a bağlı farklı konumları
(b) $\eta = h_2 / h_1 > 1$ için kademenin ψ / ϕ_T 'a bağlı farklı konumları... 64
Şekil 6.1. İki ucundan ankastre mesnetli ve orta noktasından etkiyen *F* tekil yükünü taşıyan dairesel sabit kesitli çember eksenli çubuk..... 66
Şekil 6.2. Bir ucundan ankastre diğer ucundan sabit mesnetli ve orta noktasından etkiyen *F* tekil yükünü taşıyan dairesel sabit kesitli çember eksenli çubuk..... 69
Şekil 6.3. Bir ucundan ankastre, serbest ucundan etkiyen *F* tekil yükünü taşıyan ince cidarlı sabit kutu kesitli çember eksenli çubuk..... 70
Şekil 6.4. Çubuk kesiti ve boyutları..... 71
Şekil 6.5. (a) Bir ucundan ankastre, serbest ucundan etkiyen *F* kuvvet çiftini taşıyan ince cidarlı sabit kutu kesitli çember eksenli çubuk, (b) çubuk kesiti..... 72
Şekil 6.6. Her iki ucundan ankastre bağlı, dairesel sabit kesitli çember eksenli çubuk..... 73
Şekil 6.7. Bir ucundan ankastre bağlı serbest ucundan tekil kuvvet ve tekil moment etkisindeki dairesel sabit kesitli çember eksenli çubuk..... 76
Şekil 6.8. Bir ucundan ankastre bağlı, serbest ucundan etkiyen *F* tekil yükünü taşıyan sabit kare kesitli çember eksenli çubuk..... 78
Şekil 6.9. (a) Bir ucundan ankastre, serbest ucundan etkiyen *F* tekil yükünü taşıyan ince cidarlı sabit kutu kesitli çember eksenli çubuk, (b) çubuk kesiti..... 79
Şekil 6.10. Bir ucundan ankastre bağlı, serbest ucundan tekil kuvvet etkisindeki değişken kesitli spiral eksenli çubuk..... 80
Şekil 6.11. İki ucundan ankastre bağlı düzgün yayılı yük etkisindeki dairesel sabit kesitli çember eksenli çubuk..... 82
Şekil 6.12. İki ucundan ankastre bağlı düzgün yayılı yük etkisindeki dikdörtgen sabit kesitli çember eksenli çubuk..... 83

Şekil 6.13. Birinci frekans katsayısının $c_i = \omega_i R^2 \phi_t^2 (\mu/EI_n)^{1/2}$ kiriş açısına gore değişimi, serbest-serbest mesnet, (narinlik oranı λ=50)..... 90
Şekil 6.14. Birinci frekans katsayısının $c_i = \omega_i R^2 \phi_t^2 (\mu/EI_n)^{1/2}$ kiriş açısına gore değişimi, ankastre-ankastre mesnet, (narinlik oranı λ=50)..... 90
Şekil 6.15. Beşinci frekans katsayısının $c_i = \omega_i R^2 \phi_t^2 (\mu/EI_n)^{1/2}$ kiriş açısına göre değişimi, ankastre-ankastre mesnet, (narinlik oranı λ=50)..... 91
Şekil 6.16. İlk beş frekans katsayısının $c_i = \omega_i R^2 \phi_t^2 (\mu/EI_n)^{1/2}$ kiriş açısına göre değişimi, ankastre-serbest mesnet, (narinlik oranı λ=50)..... 91
Şekil 7.1. Tasarlanan deney düzeneğinin şematik gösterimi..... 94
Şekil 7.2. Titreşim Analizörü (Brüel&Kjaer, 2515)..... 95
Şekil 7.3. Tasarlanan deney düzeneğinin şematik gösterimi..... 99
Şekil 7.4. Dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun verilen sınır şartlarındaki boyutsuz frekans değerleri, ($\lambda = 50, \eta = 0.8, \psi/\phi_T = 0^0$)..... 101
Şekil 7.5. Dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun boyutsuz frekans değerlerinin kademe oranı ile değişimi, ($\lambda = 50, \phi_T = 180^0.$)..... 102
Şekil 7.6. Dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun boyutsuz frekans değerlerinin kademe konumu ile değişimi, ($\lambda = 50, \phi_T = 180^0.$)..... 103
Şekil 7.7. Titreşim ölçümü ve deneysel modal analiz..... 104
Şekil 7.8. FRF fonksiyonu blok diyagramı..... 104
Şekil 7.9. Deney çubuğu ve analog signal üretimi..... 105
Şekil 7.10. Piezoelektrik eleman ve sinyal kondisyoneri..... 105
Şekil 7.11. Bir kirişin titreşimi ve titreşim modları..... 106
Şekil 7.12. Deney düzeneği ve kullanılan ölçme elemanları..... 106
Şekil 7.13. Deney sırasında kullanılan ölçme elemanları; (a),(b); analizör, (c) darbe çekici, (d) piezoelektrik ivme ölçer..... 107
Şekil 7.14. Deney çubuğu üzerine yapıştırılmış piezoelektrik ivme ölçer..... 108
Şekil 7.15. Serbest-serbest mesnetli eğri eksenli çubuğun düzlem dışı modal analiz deneyi..... 108
Şekil 7.16. 36 elemanlı, 4 nodlu çubuk kabuk modeli..... 109
Şekil 7.17. 72 elemanlı, 20 nodlu çubuk katı modeli..... 109
Şekil 7.18. En iyi çekiç ile darbe uygulama noktaları (Serbest-serbest)..... 110
Şekil 7.19. En iyi ivmeölçer yerleştirme noktaları (Serbest-serbest) 110
Şekil 7.20. Çubuğun en iyi asma noktaları (Serbest-serbest) 111
Şekil 7.21. Deney sırasında elde edilen Frf (Frequency Response Function) örneği..... 112
Şekil A.1. Çubuğun sonlu eleman katı modeli ($\phi_T = 120^0$, $\psi/\phi_T = 0.2$)..... 128
Şekil A.2. Tek kademeli ankastre –serbest mesnetli dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun birinci modu ($\phi_T = 120^0$, $\psi/\phi_T = 0.2$)... 128
Şekil A.3. Tek kademeli ankastre –serbest mesnetli dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun beşinci modu ($\phi_T = 120^0$, $\psi/\phi_T = 0.2$).. 129
Şekil A.4. Tek kademeli ankastre –serbest mesnetli dikdörtgen kesitli

çember eksenli çubuğun onuncu modu ($\phi_T = 120^0$, $\psi/\phi_T = 0.2$).. 129
Şekil A.5. Çubuğun sonlu eleman katı modeli ($\phi_T = 120^0$, $\psi/\phi_T = 0.0$)..... 130
Şekil A.6. Tek kademeli ankastre –serbest mesnetli dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun birinci modu ($\phi_T = 120^0$, $\psi/\phi_T = 0.0$).... 130
Şekil A.7. Tek kademeli ankastre –serbest mesnetli dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun beşinci modu ($\phi_T = 120^0$, $\psi/\phi_T = 0.0$)... 131
Şekil A.8. Tek kademeli ankastre –serbest mesnetli dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun onuncu modu ($\phi_T = 120^0$, $\psi/\phi_T = 0.0$)... 131
Şekil A.9. Çubuğun sonlu eleman katı modeli ($\phi_T = 120^0$, $\psi/\phi_T = -0.2$)..... 132
Şekil A.10. Tek kademeli ankastre –serbest mesnetli dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun birinci modu ($\phi_T = 120^0$, $\psi/\phi_T = -0.2$).. 132
Şekil A.11. Tek kademeli ankastre –serbest mesnetli dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun beşinci modu ($\phi_T = 120^0$, $\psi/\phi_T = -0.2$).. 133
Şekil A.12. Tek kademeli ankastre –serbest mesnetli dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun onuncu modu ($\phi_T = 120^0$, $\psi/\phi_T = -0.2$)..133
Şekil A.13. Çubuğun sonlu eleman katı modeli ($\phi_T = 180^0$, $\psi/\phi_T = 0.2$)..... 134
Şekil A.14. Tek kademeli ankastre –serbest mesnetli dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun birinci modu ($\phi_T = 180^0$, $\psi/\phi_T = 0.2$).... 134
Şekil A.15. Tek kademeli ankastre –serbest mesnetli dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun beşinci modu ($\phi_T = 180^0$, $\psi/\phi_T = 0.2$)... 135
Şekil A.16. Tek kademeli ankastre –serbest mesnetli dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun onuncu modu ($\phi_T = 180^0$, $\psi/\phi_T = 0.2$)... 135
Şekil A.17. Çubuğun sonlu eleman katı modeli ($\phi_T = 180^0$, $\psi/\phi_T = 0.0$)..... 136
Şekil A.18. Tek kademeli ankastre –serbest mesnetli dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun birinci modu ($\phi_T = 180^0$, $\psi/\phi_T = 0.0$).... 136
Şekil A.19. Tek kademeli ankastre –serbest mesnetli dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun beşinci modu ($\phi_T = 180^0$, $\psi/\phi_T = 0.0$)... 137
Şekil A.20. Tek kademeli ankastre –serbest mesnetli dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun onuncu modu ($\phi_T = 180^0$, $\psi/\phi_T = 0.0$)... 137
Şekil A.21. Çubuğun sonlu eleman katı modeli ($\phi_T = 180^0$, $\psi/\phi_T = -0.2$)..... 138
Şekil A.22. Tek kademeli ankastre –serbest mesnetli dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun birinci modu ($\phi_T = 180^0$, $\psi/\phi_T = -0.2$).. 138
Şekil A.23. Tek kademeli ankastre –serbest mesnetli dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun beşinci modu ($\phi_T = 180^0$, $\psi/\phi_T = -0.2$)..139
Şekil A.24. Tek kademeli ankastre –serbest mesnetli dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun onuncu modu ($\phi_T = 180^0$, $\psi/\phi_T = -0.2$). 139
Şekil B.1. Çubuğun sonlu eleman katı modeli, ($\phi = 180^0$)..... 140
Şekil B.2. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun birinci modu, ankastre-serbest, $\phi = 180^0$, (Ansys, Solid 95)..... 141
Şekil B.3. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun birinci modu, ankastre-serbest, $\phi = 180^0$, (FINES)..... 141

Şekil B.4. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun beşinci modu, ankastre-serbest, $\phi = 180^0$, (Ansys, Solid 95)……..... 142
Şekil B.5. Çember eksenli ikdörtgen sabit kesitli çubuğun beşinci modu, ankastre-serbest, $\phi = 180^0$, (FINES)…….. 142
Şekil B.6. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun onüçüncü modu, ankastre-serbest, $\phi = 180^0$, (Ansys, Solid 95)……... 143
Şekil B.7. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun onüçüncü modu, ankastre-serbest, $\phi = 180^0$, (FINES)……. 143
Şekil B.8. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun birinci modu, serbest-serbest, $\phi = 180^0$, (Ansys, Solid 95)……. 144
Şekil B.9. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun birinci modu, serbest-serbest, $\phi = 180^0$, (FINES)……... 144
Şekil B.10. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun beşinci modu, serbest-serbest, $\phi = 180^0$, (Ansys, Solid 95)…….. 145
Şekil B.11. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun beşinci modu, serbest-serbest, $\phi = 180^0$, (FINES)……... 145
Şekil B.12. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun yedinci modu, serbest-serbest, $\phi = 180^0$, (Ansys, Solid 95)……. 146
Şekil B.13. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun yedinci modu, serbest-serbest, $\phi = 180^0$, (FINES)…….. 146
Şekil B.14. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun birinci modu, ankastre-ankastre, $\phi = 180^0$, (Ansys, Solid 95)…… 147
Şekil B.15. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun birinci modu, ankastre-ankastre, $\phi = 180^0$, (FINES)…….. 147
Şekil B.16. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun beşinci modu, ankastre-ankastre, $\phi = 180^0$, (Ansys, Solid 95)…… 148
Şekil B.17. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun beşinci modu, ankastre-ankastre, $\phi = 180^0$, (FINES)……. 148
Şekil B.18. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun onuncu modu, ankastre-ankastre, $\phi = 180^0$, (Ansys, Solid 95)…… 149
Şekil B.19. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun onuncu modu, ankastre-ankastre, $\phi = 180^0$, (FINES)……. 149
Şekil B.20. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun onüçüncü modu, ankastre-ankastre, $\phi = 180^0$, (Ansys, Solid 95)…… 150
Şekil B.21. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun onüçüncü modu, ankastre-ankastre, $\phi = 180^0$, (FINES)……. 150
Şekil B.22. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun birinci modu, ankastre-serbest, $\phi = 120^0$, (FINES)…… 151
Şekil B.23. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun beşinci modu, ankastre-serbest, $\phi = 120^0$, (FINES)…… 151
Şekil B.24. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun onuncu modu, ankastre-serbest, $\phi = 120^0$, (FINES)…… 152

Şekil B.25. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun onbeşinci modu, ankastre-serbest, $\phi = 120^0$, (FINES)…….. 152
Şekil B.26. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun birinci modu, ankastre-serbest, $\phi = 160^0$, (FINES)…….. 153
Şekil B.27. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun beşinci modu, ankastre-serbest, $\phi = 160^0$, (FINES)…….. 153
Şekil B.28. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun onuncu modu, ankastre-serbest, $\phi = 160^0$, (FINES)…….. 154
Şekil B.29. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun onbeşinci modu, ankastre-serbest, $\phi = 160^0$, (FINES)…….. 154

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbf{A}$	: Diferansiyel denklem takımının katsayılar matrisi
A	: Kesit alanı
A_0	: Referans koordinatındaki kesit alanı
$\mathbf{C}$	: Kayma rijitliği matrisi
$\mathbf{D}$	: Eğilme rijitliği matrisi
$\mathbf{Q}$	: Ortogonal dönüşüm matrisi
$\mathbf{Z}$	: Asal matrisin tersi
$\mathbf{Y}$	: Asal matris
$\mathbf{K}$	: Rijitlik matrisi
E	: Elastiklik modülü
G	: Kayma modülü
δ_{ij}	: Birim matris
$\mathbf{e}_n^0, \mathbf{e}_b^0, \mathbf{e}_t^0$	: Şekil değiştirmemiş çubuğun kesitine bağlı eksen takımı
$\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_t$	: Şekil değiştirmiş çubuğun kesitine bağlı eksen takımı
I_n, I_b, I_p	: Kesite ait alan eylemsizlik momentleri
J	: Kesitin polar eylemsizlik momenti
I_{nb}, I_{bn}	: Kesite ait çarpım eylemsizlik momentleri
k_n, k_b	: Gerilmelerin kesite uniform yayılmadıklarını karakterize eden sabitler
$\mathbf{f}(x)$	: Yayılı dış yüklerin bileşke vektörü
$\mathbf{M}$	: Kesite etkiyen iç momentler vektörü
$\mathbf{m}$	: Yayılı dış momentler vektörü
$\mathbf{p}$	: Yayılı dış kuvvetler vektörü
$\mathbf{R}$	: Kesite etkiyen iç kuvvetler vektörü
$\mathbf{\Omega}$	: Kesitin dönme vektörü
$\boldsymbol{\omega}$	: Açısal değişim vektörü
$\boldsymbol{\omega}_I$	: Birim dönme vektörü
$\mathbf{y}$	: Diferansiyel denklem takımının değişkenler vektörü
$\mathbf{r}$	: Şekil değiştirmiş ve değiştirmemiş çubuğa ait konum vektörleri
$\mathbf{u} = (u, v, w)$	: Yer değiştirme vektörü ve bileşenleri
$\boldsymbol{\gamma}$	: Eksenel şekil değiştirme vektörü
$\alpha_n,\ \alpha_b$	: Kesite ait kayma faktörleri
α_i	: Boyutsuz katsayılar
λ_i	: Katsayılar matrisinin özdeğerleri
$\kappa_0,\ \kappa'_0$	: Çubuk ekseninin eğrilik bileşenleri
F	: Tekil kuvvet
p	: Yayılı yük
ϕ	: Yay açıklığı

s	: Yay uzunluğu
b	: Çubuk kesitinin genişliği
h	: Çubuk kesitinin derinliği
R	: Düzlemsel eğri eksenli çubuğun eğrilik yarıçapı
τ_0	: Çubuk ekseninin burulma açısı
ω	: Açısal frekans
β, θ, ψ	: Çeşitli açı ölçüleri
μ	: Çubuğun birim boyunun kütlesi

EĞRİ EKSENLİ DÜZLEMSEL ÇUBUKLARIN DÜZLEM DIŞI STATİK VE DİNAMİK PROBLEMLERİNİN ANALİTİK ÇÖZÜMÜ

ÖZET

Kirişler, bütün yapı elemanları için en yaygın ve en basit eleman olarak kullanılmaktadır. Kirişlerin analizi, bütün yüzyıl boyunca araştırmacıların ilgilendiği bir konu olmuştur. Bu konu günümüzde hala güncelliğini korumaktadır, çünkü kiriş elemanları çok sayıda modern mühendislik yapısının önemli elemanlarıdır. Bunlar; turbo makine pervaneleri, elektrik makinaları, yay tasarımları, makine mühendisliği'ndeki uzaysal yapılar, köprü kemerleri tasarımı, karayolları, uzun çatı yapı mesafeleri ve inşaat mühendisliği'ndeki depreme dayanıklı yapılar gibi son yıllarda önemi artan özel durumlardır. Bu nedenle, birçok araştırmacı kirişlerin davranış modeli ile ilgili çalışmaktadır. Kirişler düz veya eğri gibi farklı formlarda olabilir. Ve ayrıca değişken kesitli olabilirler. Eğri kirişler derin veya sığ eğriliğe sahiptirler ve açık veya kapalı olabilirler. Açık kirişler genellikle "yay" olarak adlandırılırlar.

Yapısal formlara örnek verilecek olursa; köprü kemerinde ve bina çatı iskeletindeki eğri elemanlar birleşiktir ve eğri kirişler çeşitli araştırmacılar tarafından değişik yollarla ele alınmasına rağmen, eğrilik hala karışık olarak görünmekte ve düşünülmektedir. Kirişler, sıkça karayolu yapılarında karşımıza çıkmaktadır. Bunun yanında özel durum olarak, araçların gidiş geliş yapabildiği çeşitli düzlemsel kent yolları ve dizayn edilen yükseltilmiş kavşaklarda ve gergin geometrik dayanımla inşa edilmiş yapılarda görülür.

Eğri eksenli düzlemsel çubukların düzlem dışı çözüm denklemleri yapı mühendisliği için temel oluşturur. Eğri kiriş elemanlarının formülü üzerindeki birçok çalışma düzlem içi ile ilişkilidir.

Bu çalışmanın temel amacı, eğri eksenli düzlemsel çubukların düzlem dışı statik ve dinamik problemlerini, başlangıç değerleri yöntemi ile, kayma deformasyonu ve hem eğilme hem de burulma dönme eylemsizliği etkilerini de dikkate alarak, analitik olarak çözmektir. Asal matris elemanlarının analitik ifadesi genel durum için elde edilmiştir. Bu diferansiyel denklemler düzlem dışındaki eğri kirişler için basitleştirilir. Başlangıç değerleri yönteminin üstünlüğü; yüksek mertebe statik belirsizliklerin problemin çözümüne ilave bir zorluk katmayışıdır. Bir yay için herhangi bir bilinen sınır şartı ile çözümler elde etmek mümkündür. Literatürdeki örnekler çözülerek sonuçlar birbiri ile karşılaştırılmış ve bazı pratik problemler detayları ile verilmiştir. Önemli sonuçların analitik ifadeleri ve özel koordinattaki yer değiştirmeler verilmekte, bunlar için sonuçlar elde edilmektedir.

İlk bölümde, eğri eksenli kirişler teorisine genel bir bakış ve çalışmanın amacı verilmektedir.

Literatürde eğri eksenli kirişler hakkında çok sayıda araştırma bulunmaktadır. İkinci bölümde, eğri eksenli kirişlerin statik ve dinamik problemleri konusunda yapılan araştırmalara yer verilmiştir. Eğri eksenli kirişlerin hem statik problemleri hem de titreşim problemleri üzerindeki çalışmalar sırasıyla incelenmektedir. Çalışmaların birçoğu verilen diferansiyel denklemleri kullanmakta, statik problem için kayma deformasyonu etkisi, dinamik problem için ise, eksen uzaması, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri ihmal edilmektedir. Bu sadeleştirilmiş diferansiyel denklemler, enerji metodları veya sonlu eleman gibi nümerik yöntemler kullanılarak çözülmektedir.

Sözü edilen araştırmalarda, sonlu eleman yöntemi en önemli araç olarak görülmektedir. Bilgisayar teknolojisinin ilerlemesiyle, kiriş problemleri sonlu eleman teorisini kullanarak daha geniş bir şekilde çözülmektedir. Bu amaç için geliştirilen birçok sonlu eleman bulunmaktadır. Eğer kirişin davranışı düzlemsel değilse, bu kirişin alışagelmiş sonlu eleman modeli, serbestlik dereceleri ile çok karmaşık olur. Bu durumlarda, model nispeten birkaç serbestlik derecesi ile kirişin davranışını ifade eden bir modele ihtiyaç duyar.

Üçüncü bölümde, statik ve dinamik problemler için kullanılan kirişler ve uzaysal eğrilerin diferansiyel denklemleri verilmektedir. Kiriş, her noktası sabit bir vektör ile birleştirilen uzay eğrisi ile ifade edilir. Başlangıç durumunda, vektörler uzay eğrilerinin teğet vektörüne diktir ve kirişin ters bölgesini ifade ederler.

Dördüncü bölümde, eğri eksenli düzlemsel çubukların düzlem dışı (kendi düzlemine dik doğrultu) problerini ifade eden diferansiyel denklemleri başlangıç değerleri yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Çubuk, değişken eğrilikli ve değişken kesitli olabilir. Çözüm, yüklemeye ve sınır şartlarına bağlı değildir. Asal matrisin analitik ifadeleri genel durumlar için elde edilmektedir. Asal matris yayılı yük etkisi altındaki çubuklar için de kullanılabilir. Yöntemin önceliği; yüksek mertebe statik belirsizlikler problemin çözümüne ilave zorluk getirmez. Burada, literatürde yer alan örnekler çözülmekte ve sonuçları karşılaştırılmaktadır. Düzlem dışı probleme ait çok sayıda sayısal örnek detayları ile çözülmüş ve sonuçların analitik ifadeleri verilmiştir. Çubuk kesiti iki yönden simetriktir. Bu simetri yüzünden düzlem içi ve düzlem dışındaki hareket ayrı olacaktır.

Beşinci bölümde, çember eksenli dairesel sabit kesitli çubukların düzlem dışı serbest titreşimlerinin kesin çözümü, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri dikkate alınarak verilmiştir. Burada, literatürde yer alan örneklere yer verilmiş, ortaya konan çözüm yönteminin doğruluğu araştırılmıştır.

Genel olarak, eğri eksenli bir çubuğun düzlem içi ve düzlem dışı titreşimi çifttir. Bunun yanında, Euler-Bernoulli hipotezine göre, eğer eğri kirişin çapraz bölgesi düzgün ve iki yönden simetrik ise, merkezi uyuşuyorsa, eksendeki ve eksen dışındaki vibrasyonlar birleşik değildir. Önceki çalışmalar klasik Bernoulli-Euler kiriş teorisini temel almaktaydı. Burada, ne kayma deformasyonu, ne de dönme eylemsizliği etkileri dikkate alınmamaktaydı. Timeshenko kiriş teorisi, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini dikkate almakta ve daha iyi sonuçlar vermektedir.

Bu bölümde, bütün bunlara ilave olarak, kesiti kademeli değişen eğri eksenli düzlem çubukların düzlem dışı titreşimleri, kayma deformasyonu ve hem eğilme hem de burulma dönme eysizliği etkileri dikkate alınarak incelenmiştir. Diferansiyel denklem takımının kesin çözümü, başlangıç değerleri yöntemi ile elde edilmiştir. Eğri eksenli çubuğun ilk beş modu için boyutsuz frekanslar elde edilmiştir. Kademe oranı, kademe konumu, sınır şartları ve kiriş açısının frekanslar üzerindeki etkileri araştırılmıştır. Mod geçişi olayı araştırılmış ve mod şekilleri grafikler halinde verilmiştir. Ansys sonlu eleman programı yardımıyla yapılan sayısal örneklere yer verilmiştir. Teorik ve sayısal sonuçların doğruluğunu görmek için deneysel çalışmalar yapılmıştır. Konu ile ilgili literatürde yer alan çalışmaların bazıları ele alınmıştır. Kesiti kademeli değişen eğri eksenli düzlem çubukların düzlem dışı titreşimleri konusunda, kayma deformasyonu ve hem eğilme hem de burulma dönme eysizliği etkileri dikkate alınarak yapılan bir çalışma bulunmamaktadır.

Statik ve dinamik problemler ile ilgili sayısal örneklerin çözümleri, altıcı bölümde verilmiştir. Diğer çalışmalarda yer alan örnekler çözülerek, elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Sonuçların birbiri ile uyumlu olduğu görülmüştür.

Yedinci bölümde, yapılan deneysel çalışmalara yer verilmiştir. Ankastre-ankastre, ankastre-serbest ve serbest-serbest şeklinde üç farklı sınır şartında ve farklı geometrideki çubuklar üzerinde deneysel çalışmalar yapılmıştır. Eğri eksenli çubukların serbest titreşimleri, Ansys sonlu eleman yöntemi ile de incelenmiştir. Farklı sınır şartlarındaki sonlu eleman çözümleri, teorik ve deneysel sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Teorik ve sonlu eleman yöntemi ile elde edilen ilk beş doğal frekans, deneysel sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Analitik ve sonlu eleman çözümleri arasında iyi bir uyum olduğu görülmektedir.

ANALYTICAL SOLUTIONS OF OUT- OF-PLANE STATIC AND DYNAMIC PROBLEMS OF PLANAR CURVED BEAMS

SUMMARY

Many engineering structures can be modeled as beam elements, since beams are the simplest and the most commonly used structural elements. Curved beam elements occur frequently in many engineering applications such as spring design, electrical machinery, turbo-machinery blades, circumferential stiffeners for shells and aerospace structures in mechanical engineering and the design of arch bridges, highway construction, long span roof structures and earthquake resistant structures in civil engineering. Therefore, the analysis of a curved beam is of great importance and has received considerable attention since the end of the nineteenth century.

In general, the in-plane and out-of-plane deformations of a planar curved beam are coupled. However, based on the Bernoulli-Euler hypothesis, if the cross-section of a curved beam is uniform and doubly symmetric, i.e., the shear center and centroid coincide, and then the in-plane and out-of-plane vibrations are uncoupled. However the out-of-plane bending and torsional responses will still be coupled.

The majority of the work in this field was restricted to the planar cases where deformations only include bending in the plane of the curved beam. Very little has been done concerning more general and more complicated problem on the non-planar behavior of curved beams. Lateral-torsional buckling of curved beams and coupled twist-bending vibrations of curved beams are two common areas where the out-of-plane problem can not be avoided.

The interest in efficient and reliable modeling of out-of-plane behavior of curved beams has been demonstrated by the significant body of literature. Various scientists have tried to solve the arch problem by different methods. In the literature, most of the theoretical work in this field included the application of different numerical methods to solve various arch problems.

It seems that finite elements have been the major tool in this research. With the advancement of computer technology, curved beam problems have been solved widely by using finite element method and many finite elements were developed for this purpose. If the behavior of the curved beam is non-planar, then a usual beam finite element model becomes very complicated with many degrees of freedom. In these cases, it is evident that a model, which, with a relatively few degrees of freedom, offers a good description of the behavior of the curved beam, is needed. A number of curved beam elements have been developed. In most of earlier elements, the effect of shear deformation was not considered. Again the beam geometry was

taken as circular in many cases. A few papers dealt with the curved beams of different geometries than circle. Arches with thin-walled cross-sections were also considered. The elements were developed by using finite-strain beam theory of Reissner and geometrically exact beam theory. The arches with elastic foundations and the stress analysis of thick curved beam were also studied.

It is often difficult and sometimes impossible to find general closed-form solution for the vibration problem of a curved beam, since the governing differential equations possess variable coefficients. The exact solution of the governing equations exists only for a circular beam of uniform cross-section. The previous studies are based upon the classical theory in which neither rotatory inertias nor shear deformation are taken into account. Timoshenko beam theory considers the effects of shear deformation and rotatory inertias due to both flexural and torsional vibrations and provides a better approximation to the actual arch behaviour. Many techniques have been considered in the papers on out-of-plane vibrations of arches. The Ritz method with different types of trial functions has often been applied in determining the natural frequencies of arches. With the advancement of computer technology and several programs, the finite element method has been used widely to solve for more general geometry and a number of curved elements have been developed. If the behaviour of the arch is non-planar, usual finite element or finite difference model becomes very complicated.

The purpose of the present study is to give the exact solution to the governing equations of the out-of-plane static and dynamic problems of a curved beam and also to exhibit the advantages of the solution. The problems in the literature are solved and the comparisons between the results are given in the tables and figures. The experiments are also performed to assess the theory. The mode transition phenomenon which is characterized by the sharp increase in frequencies of modes and occurs at certain combinations of curvature and length of the arch is studied.

In the static problems, the shear deformation effect is taken into account. The exact solution is obtained by using the initial value method. The solution does not depend on the boundary conditions and the geometry of the arch. The initial value method gives the values of the stress resultants and displacements throughout the beam once the initial stress resultants and displacements are known. Thus, it will be possible to avoid the errors arising from approximate methods and computational procedures. A priority of the method is that the higher degree of statically indeterminacy does not add any extra difficulty to the solution of the problem. The analytical expressions of fundamental matrix are given for a parabolic arch with variable cross-section. It is possible to obtain the solutions for an arch with any common boundary condition. The examples in the literature are also solved and the results are compared to each other. Some practical problems are given in details. The analytical expressions of the stress resultants and displacements at the specific coordinates are given.

In the dynamic problems, the effects of shear deformation and rotatory inertia due to the flexural and torsional vibrations are taken into account. But the warping deformation of the cross-section is neglected. The initial value method is used in order to solve the governing differential equations. The solution does not depend on the boundary conditions. The variations of the frequency coefficients with respect to

the opening angle are presented for a certain slenderness ratio and several boundary conditions. The examples given in the literature are solved and the results are compared.

For in-plane vibration of curved beams, a phenomenon of transition of modes from extensional into inextensional, which occurs with increase in beam curvature, has been observed by several authors. The similar phenomenon can also be observed for out-of-plane vibrations of arches. The transition phenomenon is characterized by the sharp increase in frequencies of modes that occurs at certain combinations of curvature and length of the curved beam. This increase in mode frequency is accompanied by a significant change in the mode shapes. There is still no comprehensive analysis of the transition phenomenon and there are no proper explanations and methods for prediction the frequencies of a curved beam. This is possibly due to the fact that numerical simulations, commonly employed for the analyses, provide little analytical insight into the vibrational problem. In this study, the analysis of the transition phenomenon in vibrational behaviour of a shallow circular curved beam with uniform cross-section is also presented by using the exact solution of the governing equations.

In the first chapter, a general concepts of the theory of curved beams and the aim of the present study are given.

In the second chapter, the studies in the literature on both static and dynamic problems of curved beams are reviwed. Reviewing the literature has shown that a few papers deal with the out-of-plane behavior of arches and there exist no method, which provides analytical expressions for the stress resultants and displacements of a curved beam with variable curvature and cross-section. It seems that finite elements were the major tool in this research. With the advancement of computer technology, arch problems are solved widely by using finite element method and many finite elements were developed for this purpose. If the behavior of the arch is non-planar, then a usual finite element model of this arch becomes very complicated with many degrees of freedom. In these cases, it is evident that a model, which, with a relatively few degrees of freedom, offers a good description of the behavior of the arch, is needed.

The governing differential equations of a planar curved beam are given for the static and dynamic problems in the third chapter. The beam is represented by a space curve whose every point is coupled with a rigid orthonormal vector diad. The vectors are chosen to be perpendicular to the tangent vector of the space curve in the initial state and they represent the cross-section of the beam. In the deformed configuration, these directors still remain unit and perpendicular each other because of the assumption of a rigid cross-section.

In the fourth chapter, the governing differential equations of planar arches loaded perpendicular to the initial plane are solved exactly by using initial value method. The curvature and the cross-section of the arch are considered as variable. The solution does not depend on the loading and boundary conditions. The analytical expressions of the fundamental matrix are obtained for general cases. It is possible to use these analytical expressions in order to obtain the displacements and the stress resultants for a curved beam with any loading and boundary conditions. The

fundamental matrix can also be used for a curved beam carrying any distributed loads. A priority of the method is that the higher degree of statically indeterminacy adds no extra difficulty to the solution of the problem. The examples given in the literature are solved and the results are compared. The effect of shear deformation is studied in some examples. Some numerical examples on the out-of-plane behavior are also solved in details and the analytical expressions of the results are given.

Exact solution of free out-of-plane vibrations of circular beams with uniform cross-section is given by considering transverse shear and rotatory inertia effects in the fifth chapter. The governing differential equations for the out-of-plane vibrations of curved uniform circular beams of constant radius are derived. The transverse shear and rotatory inertia effects due to both flexural and torsional vibrations are considered in the equations. The governing differential equations for the out-of-plane vibrations of stepped circular arches are solved exactly by using the initial value method. The same solution procedure is also used to obtain the results of other cases in which each effect is considered individually in order to assess its importance. The mode transition phenomenon is also investigated and the mode shapes are given in figures. Various vibration problems for circular curved beams have been analyzed in the literature. Comparisons of the present solution with published data are given in tables.

In this chapter, free out-of-plane vibrations of stepped circular arches are also investigated by taking into account the transverse shear and rotatory inertia effects due to both flexural and torsional vibrations. The same solution procedure is applied to the cases in which only one effect is considered in order to determine its contribution to the results. The frequency coefficients are obtained for the first five modes of arches. The effects of step ratio, location of the step, boundary condition and opening angle on the frequency coefficients are studied. The mode transition phenomenon is also investigated and the mode shapes are given in figures.

The free vibration of arches is also studied by using finite element method in order to compare the dynamic response of the arches with both the theoretical and experimental results. The finite element solutions are obtained by using ANSYS to analyze the frequencies and mode shapes corresponding to five different boundary conditions. The first ten natural frequencies from exact and finite element solutions are then compared with the experimental results. It is observed that the analytical and finite element solutions are closely in agreement with the experimental results. Experiments are also performed to verify the theoretical and numerical results. Some examples in the literature are solved and the results are compared.

In the sixth chapter, general information about the finite element analysis and ANSYS which is a commercially available finite element program are given. Modelling and the elements used in meshing are also explained.

In the seventh chapter, experimental studies and modal analysis of curved beams are given.

1. GİRİŞ

Şekil değiştiren cisimlerin ve mühendislik yapılarının önemli bir grubunu çubuklar oluşturmaktadır. Çubuk teorisi ve eğri eksenli çubukların davranışları, mühendislik problemleri içinde önemli bir yer tutmaktadır. Çubuklar, günümüzde, birçok mühendislik alanında ve makina, inşaat, otomotiv gibi önemli endüstri kollarında yapısal eleman olarak kullanılmaktadır. Bu nedenle, çubukların belirli bir yük etkisi altında eksenel şekil değiştirme, eğilme ve burulma problemleri, pek çok bilim adamı ve mühendis için temel araştırma konusu olup, konu ile ilgili bilimsel yayınlarda en doğru çözüm yöntemini bulma çalışmalarının yoğun bir şekilde devam ettiği görülmektedir. Bunlar yapılırken, çubuk yanal boyutlarının, çubuk uzunluğuna göre küçük olduğu ve şekil değiştirme sırasında eksene dik kesitlerin şekil değiştirmeden sonra da eksene dik kaldığı, yani kayma şekil değiştirmelerinin sıfır olduğu varsayılan Bernoulli-Euler-Navier çubuk teorisi kullanılmıştır.

Mukavemet, elastisite teorisi ve yapısal analiz gibi konuları içeren ders kitapları ve kaynaklarda çubuk teorisi ile ilgili temel çalışmaları bulmak mümkündür. Elastisite teorisi, dış kuvvetlerin etkisi altında bulunan elastik bir cismi, gerilme, şekil değiştirme ve yerdeğiştirme açısından sistematik bir şekilde inceleyen bir bilim dalıdır. Burada dikkat edilmesi gereken en önemli nokta, çarpılma şekil değiştirmelerinin serbestçe meydana geldiği ve tüm çubuk boyunca üniform olduğudur.

Lisans dersi olarak verilmekte olan ‘Cisimlerin Mukavemeti’ pratik uygulama için uygun formüllere daha fazla önem verir ve daha elemanter teoriye sahiptir. Elemanter cisimlerin mukavemeti her problemi ayrı ayrı inceler. Bununla beraber pratik öneme sahiptirler ve çıkartılmış formüller çok sınırlayıcı şartlar altında uygulanırlar. Böylece pek çok halde sadece yaklaşık olarak doğrudurlar ve elastisite teorisinin daha hassas araştırmalarıyla ortaya çıkan şartları çoğunlukla sağlamazlar. Öte yandan, ortaya çıkan sınır değer problemlerinin oldukça karmaşık olması nedeniyle, çok basit durumlar dışında, elastisite teorisi yardımı ile çubukların hesabı

hemen hemen imkansızdır. Bu yüzden, çubuk teorisinde iki değişik yöntem izlenmektedir:

-Birinci yöntem, çubuğun özelliklerini kullanarak üç boyutlu ortamda yazılan genel sınır değer problemine uygun yaklaşık çözüm aranmasıdır.

-İkinci yöntem ise, çubuğu bazı kısıtlamalara uyan bir parametreye bağlı yönlendirilmiş ortam olarak ele alıp sınır değer problemini bu ortamda kurmaktır.

Elemanter cisimlerin mukavemeti ve elastik çubuk teorisi, basitleştirici kabuller yapar ve problemleri parça parça ele alırlar. Bunlar, konunun başında bir yandan çubuk ekseni, öte yandan çubuk kesiti ile ilgili özel varsayımlar yapmakta ve sadece bu durumlara uygulanabilecek denklem ve çözümler vermektedir.

Basitleştirmeler, yalnız çubuk geometrisi ile ilgili değildir. Çubuğa etki eden dış kuvvetlerle ilgili çeşitli varsayımlar da yapılmaktadır. Özel yükleme durumları için ayrı ayrı yöntemler verilmektedir.

Eğri eksenli düzlemsel çubukların düzlem dışı statik ve dinamik problemleri; kayma deformasyonu ve hem eğilme hem de burulmadan kaynaklanan dönme eylemsizliği etkileri ihmal edilmeden analitik olarak elde edilmiştir. Analizler; Mathcad, Mathematica ve Matlab programları yardımıyla yapılmıştır.

Eğri eksenli düzlemsel çubukların düzlem dışı statik ve dinamik problemleri konusunda literatürde önemli çalışmalar yer almaktadır. Yapılan kaynak taramasında, çubuk teorisinin genel denklemlerine çeşitli billeştirici varsayımlarla ve yaklaşık yöntemlerle çözüm arandığı görülmüştür. Çubuğun geometrisi, mesnetleme şartları ve yükleme durumu ile ilgili basitleştirici varsayımlar yapan çalışmalarda, özellikle son yıllarda, sonlu eleman yöntemi başta olmak üzere çeşitli yaklaşık sayısal yöntemler kullanılarak çözümler verilmiştir. Bu çalışmada, çubuk eksen eğrisi, mesnetleme şartları ve yükleme durumu belirli olan değişken kesitli herhangi bir çubuğa uygulanabilecek genel bir çözüm elde edilmeye çalışılmıştır. Birinci mertebeden, değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem takımı olan genel deklemlerin kesin çözümü elde edilerek, özel hallere ait problemlerin hep aynı deklemlere dayanılarak çözülmesi sağlanmıştır. En genel durumdaki düzlemsel eğri

eksenli çubuğun, kendi düzlemi dışındaki eğilmelerine ait tüm büyüklüklerin, çubuk eksen eğrisi üzerindeki değişimlerinin belirlenebilmesi amaçlanmıştır.

Statik problemi ifade eden genel denklemler, kayma deformasyonu etkisi göz önüne alınarak, titreşim probleminin genel denklemleri ise, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri göz önüne alınarak verilmiştir.

Öte yandan, mevcut çalışmalardaki örnekler çözülerek, burada elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmış, yapılan deneyler ile desteklenmiştir. Statik problemin çözümünde, geometriye bağlı olarak, kayma deformasyonu etkisini ihmal etmenin getirdiği hatanın önem derecesi araştırılmış, titreşim probleminin çözümünde ise, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerinin ihmal edilmesinin, farklı modlardaki sonuçları irdelenmiştir.

1.1. Çalışmanın Amacı

Bu çalışmada, düzlemsel eğri bir çubuğun genel denklemleri elde edilmiştir. Çubuğun tekil yükleri taşıması halinde, bu genel denklemlerin kesin çözümü, başlangıç değerleri yöntemiyle elde edilmiştir. Sembolik hesap yapabilen Mathcad ve Mathematica gibi programlar yardımıyla, sonuçlar analitik olarak elde edilmiştir. Çubuk ekseni üzerindeki her noktada, yerdeğiştirme ve iç kuvvet büyüklükleri analitik olarak belirlenmiştir. Konu ile ilgili literatürdeki çalışmalarda yer alan örnekler ve sınır şartları, geometri ve yükleme durumu dikkate alınarak pratik önemi olan örneklerin analitik çözümleri elde edilmiş ve sonuçlar karşılaştırılarak yorumlanmıştır.

Statik problemlerin ikinci aşamasında, yayılı yükleri taşıyan çubuklara ait çözüm elde edilmiştir. Yayılı yükleri taşıyan çubuklar için elde edilen çözüm için de yine başlangıç değerleri yöntemi kullanılmıştır. Değişken eğrilik yarıçapı ve değişken kesidi olan bir çubuğun sonlu elemanı elde edilerek, buna ilişkin formülasyon verilmiştir. Diğer taraftan, tekil yüklerin simetrik olmayan noktadan etkidiği çubukların hesabı yapılmıştır.

Mühendislikte yaygın olarak kullanılan sonlu eleman paket programları kullanılarak, çubuğun düzlem dışı statik davranışları incelenmiştir. Tekil ve yayılı yükleri taşıyan

pratik örnekler tasarlanarak, bunlar ANSYS, I-DEAS gibi sonlu eleman paket programlarıyla analiz edilmiş, elde edilen sonuçlar, kesin çözümün sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır.

Statik problemi ifade eden genel denklemler kullanılarak, D'Alembert prensibi yardımıyla, dinamik kuvvetler de denklemlere katılarak, eğri eksenli düzlemsel çubukların dinamik davranışlarını ifade eden genel denklemler elde edilmiştir. Bu denklemler birinci mertebeden lineer diferansiyel denklem takımıdır. Bu denklemler elde edilirken, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri göz önüne alınmıştır. Bu denklem takımının kesin çözümü; ancak, katsayılar matrisinin sabit olması durumu olan, sabit eğrilikli (çember eksenli) ve sabit kesitli çubuk durumuna karşı gelmektedir.

Genel denklemlerin kesin çözümü başlangıç değerleri yöntemiyle elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar, konu ile ilgili yayınlanmış diğer sonuçlarla karşılaştırılmış, sonuçlar arasında iyi bir uyum olduğu görülmüştür. Bütün örnekler, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerinin kısa ve kalın çubukların doğal frekans değerleri üzerinde öneme haiz bir etkisi olduğunu göstermiştir. Öte yandan, bu etkiler, yüksek frekans değerlerinde de önem kazanmaktadır.

Dinamik analizin bir sonraki aşamasında, kesiti kademeli olarak değişen çember eksenli düzlemsel çubukların serbest titreşimleri incelenmiştir. Değişken kesitli dairesel çubukların düzlem dışı titreşimlerinin de analitik çözümü elde edilmiştir. Bu amaçla kesiti kademeli değişen çubuk yaklaşımı kullanılmıştır. Bu yaklaşımda; çubuk, kesiti belli bir bölgede sabit olan çeşitli kademelendirilmiş bölgelere ayrılarak, bu bölgeler için kesiti sabit olan çember eksenli çubuk çözümü kullanılmıştır. Burada, öncelikle bir kademenin bulunduğu çubuklar ele alınmıştır.

Çeşitli narinlik oranları, kiriş açıklıkları, kademe konumu, mesnet şekilleri, kademe oranları için sonuçlar elde edilmiştir. Değişkenlerin, boyutsuz frekans üzerindeki etkileri grafikler halinde verilmiş ve elde edilen sonuçlar yorumlanmıştır. Ayrıca, Ansys sonlu eleman paket programı yardımı ile çubuk en uygun eleman tipiyle modellenmiş, kademenin farklı konumlarına ait doğal frekanslar elde edilerek teorik

verilerle karşılaştırılmıştır. Kademe konumu değişiminin çubuğun mod şekli üzerindeki etkisi de ortaya konarak çalışmaya dahil edilmiştir.

Sözü edilen bütün bu çalışmalara paralel olarak, elde edilen teorik sonuçların gerçek durum ile karşılaştırılması amacıyla, eğri eksenli düzlemsel çubukların düzlem dışı dinamik davranışları konusunda deneysel çalışmalar da yapılmıştır. Bu amaca uygun olarak tasarlanmış deney düzeneği üzerinde yürütülen deneysel çalışmalarda, değişik sınır şartları için serbest titreşimler elde edilmiştir.

Yay açıklığı 120^0, 160^0 ve 180^0 olan dikdörtgen sabit kesitli çember eksenli çubuğa ait mod şekilleri elde edilmiştir. Serbest-serbest, ankastre-serbest ve ankastre-ankastre sınır şartlarındaki çubuklara ait mod şekilleri eksen eğrisi ile birlikte verilmiştir. Burada, diferansiyel denklem takımı, kayma deformasyonu ve hem eğilme hem de burulmadan kaynaklanan dönme eylemsizliği etkileri gözönüne alınarak verilmiştir.

Diferansiyel denklem takımının kesin çözümü, ifade edildiği gibi başlangıç değerleri yöntemi ile elde edilmiştir. Böylece, birçok çalışmada ancak yaklaşık hesabı yapılabilen serbest titreşimlerin frekanslarının kesin hesabı yapılmıştır. Burada, diferansiyel denklem takımının kesin çözümü verildiği için, mod şekli için herhangi bir fonksiyon seçilmesi gerekmemiştir. Dolayısıyla, kesin çözümü elde edilen bu frekanslar kullanılarak mod şekilleri de kesin olarak hesaplanmıştır. Çeşitli mesnetleme şartları için, farklı modlara ait yer değiştirme durumu elde edilmiştir. Özellikle bu sınır şartlarındaki çubukların mod şekilleriyle ilgilenen çalışmaya rastlanmamıştır.

2. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLAR KONUSUNDA YAPILAN ÇALIŞMALAR

Çubukların belirli bir yük etkisi altında eksenel şekil değiştirme, eğilme ve burulma problemleri, pek çok bilim adamı ve mühendis için temel araştırma konusu olup, konu ile ilgili bilimsel yayınlarda en doğru çözüm yöntemini bulma çalışmalarının yoğun bir şekilde devam ettiği görülmektedir. Eğri eksenli düzlemsel çubukların düzlem dışı statik ve dinamik davranışlarını inceleyen, günümüze kadar yapılan çalışmaların büyük bir kısmında, çubuk teorisi denklemlerinin çözümünde yaklaşık yöntemlerin kullanıldığı görülmektedir. Söz konusu çalışmalarda, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerinin ihmal edildiği, Euler-Bernoulli çubuk teorisi esas alınarak, Ritz, Galerkin ve sonlu elemanlar yöntemi gibi yaklaşık yöntemlerin kullanıldığı görülmektedir. Kesin çözüm, sadece basit durumlar söz konusu olduğunda elde edilmiştir.

Teorinin tarihsel gelişimi, bugün yaygın olarak kullanılmakta olan çubuk teorisinin Kirchoff tarafından ortaya konduğunu göstermektedir.

En yaygın eğilme teorisi, eğilmeden önce çubuk eksenine dik ve düzlem olan kesitin, şekil değiştirmeden sonra da şekil değiştirmiş çubuk eksenine dik ve düzlem kaldığını varsayan Bernoulli-Euler-Navier varsayımına dayanmaktadır. Eğri eksenli çubukların burulmasında ise Saint-Venant teorisi yaygın olarak kullanılmaktadır.

Çubukların uzaydaki tüm hareketlerini tarif etmek için günümüzde mevcut olan en anlaşılır matematiksel teori ise "Özel Cosserat Çubuk Teorisi"dir. Bu teori "Yönlendirilmiş Doğrultu Teorisi" olarak da bilinmektedir. Burada, çubuk eksen eğrisi üzerindeki her nokta, bir yer vektörü ve bu noktaya bağlı bir ortanormal vektör ikilisinin oluşturduğu sınırlı bir uzay eğrisi ile temsil edilmektedir. Böylece, çubuk, rijit kesitlerden oluşan bir boyutlu sürekli ortam olarak ele alınmaktadır. Dik kesitler rijit olarak varsayıldığı için, herhangi bir şekil değiştirme ya da çarpılma meydana gelmemektedir. Bu nedenle, teori, kapalı kesitli çubuklarla sınırlı kalmaktadır.

Kaynak taraması ile elde edilen çalışmaların önemli olanları, burada ele alınmış, analizlerde kullanılan yöntemleri ve sonuçları içeren özetlerinin ortaya konulması amaçlanmıştır. Tarihsel gelişimin açığa vurulabilmesi düşüncesi ile, çalışmalar, mümkün mertebe tarih sırasına göre ele alınmıştır.

Konu ile ilgili kaynak incelemesi, eğri eksenli düzlemsel çubukların düzlem dışı statiği ve düzlem dışı dinamiği olacak şekilde iki ayrı ana bölümde verilmiştir.

2.1. Eğri Eksenli Düzlemsel Çubukların Statiği Konusunda Yapılan Çalışmalar

Çubuk teorisi ile ilgili bilgilerin ilk kez Kirchoff tarafından ortaya konduğu görülmektedir. Teoriye göre, çubuk ekseninin uzamadığı ve kesitte kayma olmadığı varsayılmaktadır.

Love [1] tarafından ortaya konulan çalışma, eğri eksenli çubuklarla ilgili yapılan en önemli ve en eski çalışmalardan biridir. Bu çalışmada, çubuk bir parametreye bağlı yönlendirilmiş ortam olarak ele alınmış ve teori skaler büyüklüklerle verilmiştir. Ayrıca, çember eksenli, dairesel kesitli eğri eksenli çubukların ve tam halkaların çeşitli yükleme durumları ele alınarak çözülmüştür.

[2-12] sıra numarası ile verilen kaynaklarda, mukavemet, elastisite teorisi, çubuk teorisi, sonlu elemanlar yöntemi, titreşim ve modal analiz gibi konularda temel bilgileri bulmak mümkündür.

Çubuk teorisi hakkındaki önemli temel eserlerden birinin de İnan'a [3] ait olduğunu görüyoruz. Burada, çubuk, bazı kısıtlamaları sağlayan bir parametreye bağlı yönlendirilmiş ortam olarak ele alınmış ve sınır değer problemi bu ortamda tesis edilmiştir. Elde edilen denklemler, eksenleri herhangi bir eğri olan ve kesitleri keyfi olarak değişebilen çubuklara uygulanabilecek niteliktedir.

Çubuk teorisi, Antman [5] tarafından yapılan çalışmada, modern bir yaklaşımla ele alınmış ve matrisel yöntemlerle düzenlenmiştir. Çubuk teorisi hakkındaki önemli temel eserlerden biri olan bu çalışmada, çeşitli teoriler birlikte verilmiştir. Lineer olmayan sürekli ortamlar mekaniği problemleri konusunda bazı örneklere yer

verilmektedir. Eğri eksenli çubukların denge denklemleri, eksen uzaması ve kayma deformasyonu etkileri dikkate alınarak analiz edilmiştir. Diğer taraftan, non-lineer elastik kiriş teorisi üzerinde çalışılmıştır.

Cinemre [6], yer ve şekil değiştirme ilişkilerini geometrik yoldan elde etmiştir. Mühendisliğe dönük eserlerdeki kısıtlamalar olmaksızın, birim dönme vektörü yerine, açısal değişim vektörü, şekil değiştirme vektörü olarak seçilmiştir. Bu durum, hesapları güçleştirmekle birlikte, genelleştirmeye imkan vermesi, şekil değiştirmiş çubuğun geometrisi hakkında bilgi vermesi ve bazı ters problemlerin çözümünü kolaylaştırması bakımından önem taşımaktadır. Eksen uzaması ve kayma deformasyonu etkileri gözönüne alınarak, uzaysal eğri eksenli çubuklara ait genel denklemler elde edilmiştir.

Sundaramoorty ve Padmanabhan [33], ince cidarlı, eğri eksenli düzlemsel çubukların düzlem içi denklemlerini virtüel iş prensibi yardımı ile elde etmiştir.

Çökme hesabında 1968'lerden beri kullanılmakta olan, yapıların eşlenik sistem analojisi, çeşitli şekillerdeki genelleştirmelerle, konu ile ilgili çalışan araştırmacılar için ilgi çeken araştırma konusu olmuştur. Sözü edilen yöntemde, herbiri bir dış ortamda bulunan iki sistem arasındaki benzerlik kullanılarak, sistemin iç ve dış kuvvet ve deformasyonları, eşlenik olanın deformasyon ve kuvvetlerine dönüştürülmektedir. Arici [34], söz konusu analoji formülasyonunu genelleştirmiş ve bu konudaki mevcut çalışmaların farklı konuları sadece özel düşüncelerle ele aldığını göstermiştir.

Literatürde, eğri eksenli düzlemsel çubukların düzlem dışı eğilmeleri konusunda, sonlu elemanlar yönteminin kullanıldığı, Naganarayana ve Prathap [35] tarafından yapılan bir çalışma karşımıza çıkmaktadır. Bu çalışmada, üç nodlu izoparametrik quadratic kiriş eleman kullanılmış ve kayma deformasyonu etkisi yapılan hesaba dahil edilmiştir.

Pantazapoulou [37], küçük deformasyon teorisini kullanarak, üç boyutlu eğri eksenli çubukların sonlu elemanlar analizi ile polinom interpolasyon fonksiyonlarını elde etmiştir. Düzlemsel eğri eksenli çubuklardaki, burulma dönmesi ile çubuğun kendi düzlemine dik doğrultudaki yerdeğiştirmesi ve eksenel deformasyon ile çubuk

düzlemindeki enine ötelenme arasındaki ilişkileri dikkate alan bir formülasyon verilmiştir. Elde edilen sonuçlar, analitik yöntemlerin ve düşük mertebeli polinomları kullanan sonlu eleman yöntemlerinin verdiği sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Tüfekçi [39], eğri eksenli düzlemsel çubukların düzlem içi statik ve dinamik problemlerinin kesin çözümünü analitik olarak elde etmiştir. Öte yandan, Tüfekçi [61], değişken eğrilikli ve değişken kesitli eğri eksenli düzlemsel çubukların düzlem dışı statik problemini ifade eden diferansiyel denklemlerin kesin çözümünü, başlangıç değerleri yöntemini kullanarak elde etmiştir. Değişken kesitli, parabol eksenli bir kiriş için, asal matris ve tersi elde edilmiştir.

Sengupta ve Dasgupta [46] tarafından yapılan çalışmada, elastik zemine oturan, beş nodlu onüç serbestlik dereceli eğri eksenli düzlemsel bir kirişin sonlu elemanlar çözümü elde edilmiş ve hesaplarda kayma deformasyonu etkisi dikkate alınmıştır. Dairesel sabit kesitli çubuğa ait örnek problemlerin sayısal çözümü elde edilerek, analitik sonuçlarla ve diğer çalışmalarda elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmış, sonuçlar arasında oldukça iyi bir uyum olduğu ortaya konulmuştur. Ek olarak, üç nodlu izoparametrik eğri eksenli düzlemsel kiriş elemanın statik problemi, kayma deformasyonu etkisi dikkate alınarak çözülmüştür, Dasgupta ve Sengupta [48]. Burada, elastik zemine oturan kirişler için de çözüm elde edilmiştir. Yine bu çalışmada, bir kaç örnek problemin sayısal çözümü elde edilerek, analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Artan [47], değişken kesitli eğri eksenli düzlemsel çubukların dümlem içi gerilme ve yerdeğiştirme değerlerini başlangıç değerleri yöntemi kullanarak elde etmiştir. Asal matris ve tersi elde edilmiş, Mathematica programı yardımıyla yapılan iki farklı örneğin çözümüne yer verilmiştir. Yine, başlangıç değerleri yöntemi ile, eğri eksenli düzlemsel çubukların kendi düzlemlerine dik doğrultudaki yükleme durumları için genel asal matris elde edilmiştir, Artan [55]. Burada, bu tür önemli problemlerin çözümünde, başlangıç değerleri yönteminin değeri ve önemi ortaya konmuştur.

Kim [65], ince cidarlı, dikdörtgen kutu kesitli, eğri eksenli düzlemsel çubukların düzlem dışı eğilme ve burulma probleminin çözümünü vermiştir. Sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak yapılan çözümde, dikdörtgen kesit nedeni ile ortaya çıkan

çarpılma etkisi de dikkate alınmış, verilen sayısal örnekler ile teorinin doğruluğu gösterilmiştir.

Chen [66] tarafından ele alınan çalışmada, modern mühendislik tasarımlarında sıkça karşımıza çıkan, prizmatik olmayan eğri eksenli düzlemsel çubukların düzlem dışı eğilme problemi, diferansiyel quadratik eleman metodu (DQEM) ile çözülmüştür. Bu çalımada da, sayısal örneklere yer verilerek sonuçların doğruluğu ve yakınsaklığı irdelenmiştir.

Eğri eksenli, üç nodlu ve üç serbestlik dereceli düzlemsel bir kiriş elamanın statik probleminin çözümü, kayma deformasyonu etkisi de dikkate alınarak, Sheikh [69] tarafından ortaya konmuştur. Düzgün yayılı ve tekil yüklü çubuklara ait sayısal örneklere yer verilerek, elde edilen sonuçların analik sonuçlara yakınlığı irdelenmiştir.

Malekzadeh ve Karami [70], çeşitli sınır şartlarında, değişik eğri eksenli, dairesel sabit ve değişken kesitli düzlemsel çubukların düzlem dışı statik probleminin çözümünü ortaya koymuşlardır. Burada, çözüm yöntemi olarak diferansiyel quadratik metodu (DQM) kullanılmış ve farklı geometrideki ve farklı yükleme ve sınır şartlarındaki bir çok sayısal örneğin çözümü elde edilmiştir.

Zupan ve Saje [72], eksenel uzama ve kayma deformasyonu etkilerini de dikkate alarak, ekseni herhangi bir düzlemsel eğri olan elastik bir çubuğun sonlu deformasyon analizini vermiştir. Farklı mertebelerde çeşitli sonlu elemanlar incelenmiş, kullanılan sonlu eleman hassasiyetinin, eleman boyu ve sayısal integrasyon mertebesinden çok fazla etkilenmediği gösterilmiştir.

Bilgisayarların ve sayısal yöntemlerin gelişmesi ile birlikte, analizlerde, sonlu eleman yöntemine dayanan yapısal analiz paket programları kullanılmaya başlanmıştır. Bu gelişmeye paralel olarak, malzeme teknolojisindeki gelişmelerle ortaya çıkan, karma malzemeler gibi modern malzemelerin kullanımı gündeme gelmiştir. Malzeme özelliklerindeki değişikliklerin yanısıra, kayma deformasyonu, eksen uzaması ve burulma nedeni ile çarpılma gibi etkiler de, gelişen sayısal yöntemlerle yapılan analizlere dahil edilmiştir. Son yıllarda yapılan çalışmalar;

genellikle analizlerde ve yapılan kabullerde bir gelişme olmaksızın, sayısal yöntemlerde iyileştirme çalışmalarının olduğunu göstermektedir.

2.2. Eğri Eksenli Düzlemsel Çubukların Dinamiği Konusunda Yapılan Çalışmalar

Eğri eksenli düzlemsel çubukların statiği konusunda yapılan çalışmalara ek olarak, uzun yıllar araştırmacıların ilgisini çeken dinamiği konusunda da literatürde pek çok çalışma yer almaktadır. Burada, bu çalışmaların bir kısmına yer verilerek, analizlerde kullanılan yöntemlerin, sonuçların ve konu ile ilgili tüm dünyada ulaşılan seviyenin ortaya konulması amaçlanmıştır.

Konu ile ilgili en önemli ilk çalışmalardan biri olan, Love [1]'a ait çalışmada, statik konusunda da değinildiği gibi, eğri eksenli çubukların elastisite teorisi verilmiş ve daire kesitli tam çember halkasının titreşimleri incelenmiştir. Eksenel uzamanın ihmal edilebileceği varsayımı ile, genel denklemler oluşturulmuş ve halkanın kendi düzlemi içindeki titreşimleri incelenmiştir. Bu yapılırken, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri de ihmal edilmiştir. Diğer taraftan, halkanın kendi düzlemine dik doğrultudaki titreşim problemi de ele alınmış ve her iki tip titreşimin ilk mod frekanslarının birbirine yakın olduğu görülmüştür.

Volterra ve Morell [13], çember, catenary, sikloid ve parabol eksenli, dairesel kesitli çubukların düzlem dışı frekanslarını, Rayleigh-Ritz yöntemini kullanarak elde etmişlerdir.

Takahashi [14], çember eksenli bir çubuğun kendi düzlemine dik doğrultudaki serbest titreşimini incelemiştir. Serbest-serbest mesnetli böyle bir çubuğun frekans denklemleri ve frekansları, dönme eylemsizliği etkisi ve narinlik oranı dikkate alınarak elde edilmiştir. Sonuçlar, narinlik oranı büyük olduğunda, simetrik bir titreşim meydana geldiğini göstermiştir.

Eliptik bir çubuğun kendi düzlemine dik doğrultudaki titreşimleri, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri ihmal edilerek, Takahashi ve Suzuki [16] tarafından ortaya konmuştur. Benzer şekilde, ekseni; elips, sinüs, parabol, hiperbol, sikloid ve catenary eğri formlarında olan çubuklara ait sayısal örneklerde

doğal frekanslar ve mod şekilleri [17] no'lu referansta verilmiştir. Sayısal sonuçlar, deneysel sonuçlar ve diğer çalışmalarda elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmış, sonuçlar arasında iyi bir uyum olduğu görülmüştür.

Irie ve Yamada [20], ekseni çember olmayan değişken kesitli çubukların sönümlü, zorlanmış titreşimlerini incelemişlerdir. Serbest ucundan sinüzoidal değişen moment ve kuvvetlerle zorlanan, ankastre-serbest mesnetli bir çubuğun doğal frekansları incelenmiştir. Eksen uzaması, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerinin de dikkate alındığı denge denklemleri yazılarak, Runge-Kutta-Gill yöntemiyle sayısal olarak elde edilen transfer matrisi yöntemi ile çözüm aranmıştır. Belirgin kesit değişimlerinde frekansların arttığı görülmüştür.

Çember eksenli kalın çubukların düzlem-dışı titreşimlerine ait doğal frekansları, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri de dikkate alınarak, Bickford ve Maganty [26] tarafından yapılan çalışmada verilmektedir.

Literatür incelemesinde, kesiti kademeli değişen eğri eksenli çubukların düzlem-dışı titreşimi konusunda bir çalışmaya rastlanmamıştır. Var olan çalışmalar konuyu düzlemde incelemiş ve birçoğunda, sabit kesitli çubukta olduğu gibi, söz konusu etkileri ihmal eden Euler-Bernoulli Teorisi ve yaklaşık yöntemler kullanılmıştır. De Irassar ve Laura'ya ait olan çalışmada [29], iki kademeli değişken kesitli çember eksenli çubukların düzlem içi titreşimleri ele alınmaktadır. Kademenin ortada olması durumunda, çubukların serbest titreşimlerine ait ilk simetrik mod şekilleri, yaklaşık çözüm yöntemleri ile incelenmektedir. Ayrıca çalışmada, çubuğun konsantre kütle taşıması durumu da gözönüne alınmıştır.

Eğri eksenli çubukların kendi düzlemine dik doğrultudaki serbest titreşimleri, sonsuz küçük bir elemanın diferansiyel denge denklemleri yardımıyla, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri dikkate alınarak elde edilmiştir, E Silva ve Urgueria [31]. Teorik sonuçlar, yapılan deneylerle doğrulanmıştır.

Laura ve diğerleri [32], kesiti kademeli değişen çember eksenli çubuğun kendi düzlemindeki titreşimlerini, konsantre kütle olması durumunu dahil ederek Rayleigh-Ritz yöntemi ile incelemekte ve sonuçları sonlu eleman yönteminin sonuçları ile karşılaştırmaktadır. Eksenel deformasyon, kayma deformasyonu ve dönme

eylemsizliği etkileri ihmal edilerek, enerji ifadelerinde kütleye ait terimlere yer verilmiştir. Sabit-sabit, ankastre-ankastre ve ankastre-serbest sınır şartları için sonuçlar tablolar halinde sunularak. teorinin ve sonlu eleman yönteminin verdiği sonuçların uyumlu olduğu belirtilmektedir.

Auciello ve Rosa [40], çember eksenli çubukların titreşimlerini Euler-Bernoulli yardımıyla incelemekte, sonuçları diğer yöntemlerle elde edilen sonuçlarla karşılaştırmaktadır. Çalışmada, tek bölgeli ve iki bölgeli kesiti kademeli değişen çember eksenli çubuklar ve sürekli değişken kesite sahip çubuklar ankastre-ankastre, sabit-sabit ve sabit-ankastre sınır koşulları için incelenmektedir.

Rossi ve Laura [41], iki kademeli değişken kesitli çember eksenli çubukların titreşimlerini, eksenel deformasyon, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini gözönüne alarak, sonlu eleman yöntemi ile incelemektedir. Kademenin ortada bulunması durumunda, sabit-sabit ve ankastre-ankastre mesnet şartlarına sahip çubukları incelemekte, dinamik katılaşma olarak adlandırılan, frekans değişiminin kütle değişimine oranını da çalışmasında sunmaktadır.

Howson ve Jemah [42], eğri eksenli düzlemsel çubukların kendi düzlemine dik doğrultudaki doğal frekanslarını, sonlu elemanlar yöntemini kullanarak elde etmişlerdir. Çalışmada, eğriliği ve kesiti sabit olan, narin elastik bir kirişin düzlem dışı hareket denklemleri ortaya konmuş ve sayısal örneklere yer verilmiştir.

Kawakami ve Sakiyama [43], eğri eksenli, değişken kesitli düzlemsel çubukların düzlem-içi ve düzlem-dışı serbest titreşimlerini Green fonksiyonu yardımıyla elde etmişlerdir. Green fonksiyonları ve sayısal integrasyon kullanılarak, serbest titreşim için özdeğerler hesaplanmıştır.

Eğri eksenli, sabit kesitli düzlemsel çubukların düzlem-içi serbest titreşimlerinin kesin çözümü, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri dikkate alınarak Tüfekçi ve Arpacı [50] tarafından verilmektedir. Çalışmada, elde edilen doğal frekanslar ve mod şekilleri tablo ve grafiklerde gösterilmiştir.

Huang ve diğerleri [54] tarafından yapılan çalışmada, ekseni çember olmayan, değişken kesitli düzlemsel çubukların düzlem-dışı dinamik analizi “Dinamik Katılık Matrisi” metodu kullanılarak verilmekte, Laplace dönüşüm tekniği uygulanarak, eğri

eksenli çubuğun düzlem-dışı serbest titreşimlerinin kesin çözümü, farklı sınır şartları ve farklı yükleme durumları için genel bir ifade olarak verilmektedir.

Lee ve Chao tarafından [53,57]'de yapılan çalışmalarda, sabit eğrilikli, değişken kesitli düzlemsel çubukların düzlem-dışı serbest titreşimlerini ifade eden diferansiyel denge denklemleri verilmiştir. Analizi basitleştirmek için, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini içeren iki fiziksel parametre geliştirilmiş, çalışmanın sonunda verilen örneklerde, kiriş açıklığı ve kiriş uzunluğunun ilk iki doğal frekans üzerindeki etkileri incelenmiştir.

Yukarıda değinilen konu ile ilgili çalışmalara ilave olarak, özellikle son yıllarda, sonlu elemanlar yöntemini kullanan çalışmalarda, optimizasyon ve kullanılan elemanın geliştirilmesi konusundaki çabaların yer aldığı görülmektedir. Trigonometrik fonksiyonların kullanıldığı, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini de içeren çalışmalarda, hem doğru hem de eğri eksenli çubukların titreşimleri incelenmiş ve kullanılan yöntemlerin performansı belirlenmeye çalışılmıştır. Çeşitli çubuk geometrileri ve sınır şartları için elde edilen sonuçlar, diğer model ve deney sonuçları ile karşılaştırılmakta, sonuçların birbirine olan yakınsaklığı irdelenmektedir.

Tüfekçi, [51,59]'de sırayla tek kademeli ve iki kademeli değişken kesitli çember eksenli çubukların düzlem içi titreşimlerine ait, eksenel deformasyon, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerinin dahil edildiği genel denklemleri, kesin çözümleriyle birlikte sunmaktadır. Çalışmalarda, beş farklı sınır koşulu için, farklı narinlik oranlarına, kademe oranlarına ve kiriş açılarına sahip çubuklar incelenmiştir.

Liu and Wu [62], çember eksenli çubukların düzlemsel titreşimlerini, genelleştirilmiş diferansiyel kuadratür yöntemini (Generalized differential quadrature rule) kullanarak incelemekte, eksenel deformasyon, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini ihmal etmektedir. Sabit kesitli, sürekli değişken ve kademeli değişken kesitli çubukların titreşimlerini inceleyerek Rayleigh-Ritz, Rayleigh-Schmidt, Galerkin, sonlu eleman ve hücre ayrıklaştırma (cell discretization) yöntemleri ile elde edilen sonuçları karşılaştırmıştır.

Tüfekçi ve Özdemirci [64], iki kademeli değişken kesitli eğri eksenli çubuğu sabit kesit alanına sahip üç bölgeye ayırarak ele almaktadır. Çubuğun ilk beş moduna ait düzlem içi titreşimlerini, kesin çözümle incelemekte, dinamik katılaşma etkisini gözönüne almaktadır.

3. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN GENEL DENKLEMLERİ

3.1. Çubuk Statiğinin Genel Denklemleri

Çubuk teorisinin tarihsel gelişiminde, Euler-Bernoulli tarafından ortaya konulan denklemlerin önemli bir yer tuttuğu görülmektedir. Euler-Bernoulli, çubuk ekseninin uzamadığını ve kesitte kayma meydana gelmediğini kabul etmektedir.

Çubuk eksen eğrisi, üzerindeki, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(s)$ konum fonksiyonu ile belirlenen her noktaya, birbirine dik $\mathbf{e}_n^0(s)$ ve $\mathbf{e}_b^0(s)$ birim vektörleri bağlı, bir parametreli yönlendirilmiş ortam olarak ele alınmaktadır. s parametresi, başlangıç durumunda, yay uzunluğudur. Bu iki vektöre dik olan $\mathbf{e}_t^0(s)$ birim vektörü, başlangıçta, eğrinin teğeti ile çakışmaktadır ve;

$$\mathbf{e}_t^0(s) = \mathbf{e}_n^0 \times \mathbf{e}_b^0$$
$$\mathbf{e}_t^0(s) = \frac{d\mathbf{r}_0(s)}{ds} \tag{3.1}$$

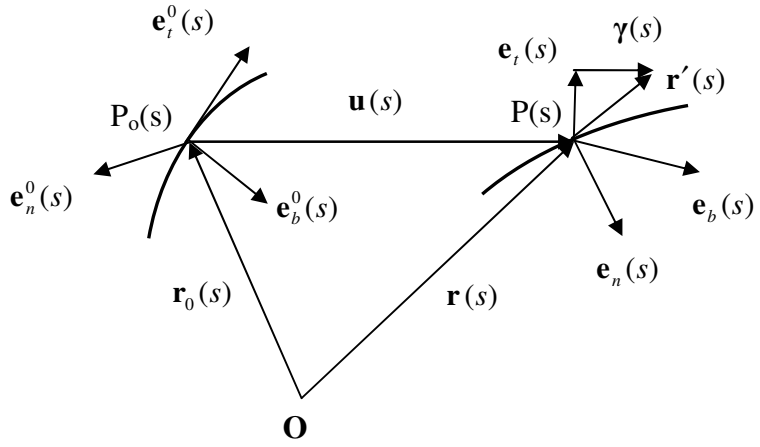
şeklinde tarif edilmektedir. $\mathbf{e}_n^0(s)$, $\mathbf{e}_b^0(s)$ kesit vektörleri, sırasıyla çubuk eksen eğrisinin normal ve binormal doğrultularıdır ve kesidin asal eksenleriyle çakışmayabilir. Bu durumda, aralarındaki ilişkiyi belirleyecek bir fonksiyona gerek duyulacaktır. Burada, bu doğrultuların çakıştığı durum gözönüne alınacaktır.

Çubuğun yüksüz ve gerilmesiz olduğu ve yer değiştirmeye başladığı başlangıç durumu için $\mathbf{r}_0(s)$, $\mathbf{e}_n^0(s)$ ve $\mathbf{e}_b^0(s)$ vektörleri bilinmektedir. Çubuk şekil değiştirdikten sonra, geometriyi $\mathbf{r}(s)$, $\mathbf{e}_n(s)$ ve $\mathbf{e}_b(s)$ vektörleri belirlemektedir. Şekil değiştirmeden sonraki kesit vektörleri $\mathbf{e}_n(s)$ ve $\mathbf{e}_b(s)$, yine birim vektörler olup birbirlerine diktirler. Ancak, başlangıçtaki teğet birim vektörü, $\mathbf{e}_n$ ve $\mathbf{e}_b$

vektörlerine dik kalmasına rağmen, artık ne şekil değiştirmiş eksen eğrisine teğet ne de birim vektör olma şartı vardır (Şekil 3.1). Böylece, çubuk dik kesitinin rijit olması varsayımı yapılmaktadır. Yani, dik kesit ötelenir ve döner; ancak, herhangi bir deformasyona uğramaz. Serbestçe dönebilme yeteneği nedeniyle,

$$\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} \neq \alpha.\mathbf{e}_t(s) \tag{3.2}$$

olacak, dik kesit şekil değişiminden sonra çubuk eksenine dik kalmayacaktır. Bu, kayma deformasyonu etkisiyle ortaya çıkan haldir. Ayrıca artık *s* parametresi yay uzunluğuna eşit olmadığından $\mathbf{r}'(s)$ vektörü şekil değiştirmiş eğriye teğet olmakla birlikte birim vektör olmayabilir.



Şekil 3.1. Çubuğun şekil değiştirmeden önceki ve sonraki durumları.

Şekil 3.1'de çubuğun şekil değiştirmeden önceki ve sonraki durumları, ilgili büyüklüklerle birlikte gösterilmiştir. Buradaki (^{0}) üst indisi, şekil değiştirmemiş durumu belirtmektedir.

Çubuğun şekil değiştirme durumu iki vektörle tanımlanabilir:

- Eksen üzerindeki noktanın yer değiştirme vektörü

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{r}(s) - \mathbf{r}_0(s) \tag{3.3}$$

- Rijit cisim gibi hareket ettiği varsayılan dik kesitin dönme vektörü

Aslında, rijit cismin sonlu dönmeleri, vektörle ifade edilemez. Fakat burada yer ve şekil değiştirmeler küçük varsayılarak dönme, bir vektörle belirlenecektir.

Ortogonal olan $\mathbf{e}_n^0$, $\mathbf{e}_b^0$, $\mathbf{e}_t^0$ vektör üçlüsü, yine kendisi gibi ortogonal olan $\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_t$ vektör üçlüsüne;

$$\mathbf{e}_i(s) = Q_{ji}\ \mathbf{e}_j^0(s) \tag{3.4}$$

şeklinde, Q ortogonal dönüşüm matrisi ile dönüşmektedir. Bu matrisin ;

$$Q_{ij} = \delta_{ij} + W_{ij} \qquad \delta_{ij} : \text{Birim matris} \tag{3.5}$$

olarak parçalanması durumunda, (3.4) eşitliği ;

$$\mathbf{e}_i(s) = \mathbf{e}_i^0(s) + W_{ji}\ \mathbf{e}_j^0(s) \tag{3.6}$$

biçiminde yazılabilir. Dönüşüm matrisinin ortogonalliğini kullanarak; yer ve şekil değiştirmelerin küçük olduğu varsayımıyla; W_{ij} bir antisimetrik matris olacaktır. Antisimetrik bir matris için;

$$W_{ij}\ \mathbf{e}_i^0 = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{e}_i^0 \tag{3.7}$$

özelliğini sağlayan bir $\mathbf{\Omega}$ vektörü bulunabilir. Çubuk kesitinin dönme vektörü olan $\mathbf{\Omega}(s)$ ile (3.6) eşitliği ;

$$\mathbf{e}_i(s) = \mathbf{e}_i^0(s) + \mathbf{\Omega}(s) \times \mathbf{e}_i^0(s) \tag{3.8}$$

şekline dönüşür. $\mathbf{\Omega}(s)$ dönme vektörü, ağırlık merkezinden geçen eksen etrafındaki dönmeyi belirten vektördür.

Çubuğun şekil değiştirme durumu aşağıdaki vektörle tanımlanabilir;

- Birincisi, $\boldsymbol{\gamma}$ eksenel şekil değiştirme vektörüdür. Kirchhoff çubuk teorisinde özdeş olarak sıfıra eşit sayılan bu vektör, eksen eğrisinin boy değişimini ve eksen eğrisi ile dik kesit arasındaki kaymaları belirlemektedir. $\boldsymbol{\gamma}$ eksenel şekil değiştirme vektörü,

şekil değiştirmeden sonraki yer vektörünün türevi ile dik kesit normali arasındaki farktır ve;

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} - \mathbf{e}_t^0 \tag{3.9}$$

şeklinde tarif edilmektedir.

Yer ve şekil değiştirme büyüklükleri tanımlandıktan sonra, çubuk teorisinin $\mathbf{M}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\omega}$ olarak bilinen altı bilinmeyeni, iki yer değiştirme-şekil değiştirme bağıntısı, iki denge denklemi ve iki bünye denklemi yardımıyla çözülebilir.

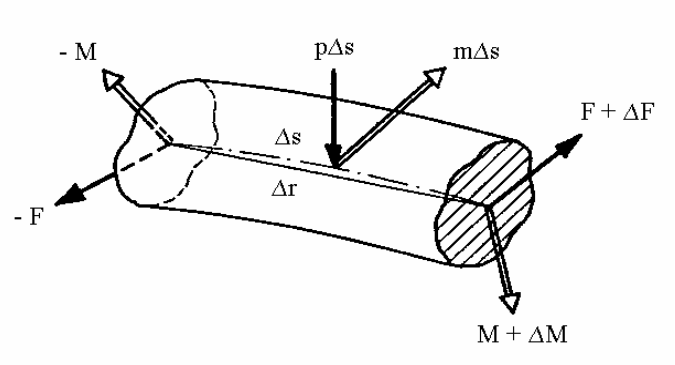
- Yer değiştirme - şekil değiştirme bağıntıları : Yer değiştirme vektörünü tanımlayan (3.3) ifadesi türetilerek,

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} - \frac{d\mathbf{r}_0}{ds} \tag{3.10}$$

elde edilir. (3.1), (3.8) ve (3.9) ifadelerinden faydalanılarak,

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_t^0 + \boldsymbol{\gamma} \tag{3.11}$$

şeklinde, ilk yer değiştirme-şekil değiştirme bağıntısı elde edilmiş olur.



Şekil 3.2. Çubuk elemanına etki eden dış yükler ve kesit tesirleri.

- Denge denklemleri : Birim uzunluktaki çubuğa etkiyen dış kuvvetler ve momentler sırasıyla $\mathbf{p}(s)$ ve $\mathbf{m}(s)$ şeklinde iki fonksiyonla belirlenmiştir. $\mathbf{F}$ ve $\mathbf{M}$

vektörleri, sırasıyla, kesite etkiyen iç kuvvetlerin ve momentlerin vektörel toplamını göstermek üzere, Şekil 3.2' deki elemana ait denge denklemleri,

$$
\begin{aligned}
&-\mathbf{F}+\mathbf{F}+\Delta\mathbf{F}+\mathbf{p}.\Delta s=0\\
&-\mathbf{M}+\mathbf{M}+\Delta\mathbf{M}+\mathbf{m}.\Delta s+\Delta\mathbf{r}\times(\mathbf{F}+\Delta\mathbf{F})=0
\end{aligned}
\qquad (3.12)
$$

olarak yazılabilir. Gereken sadeleştirmeler yapılır ve ($\Delta s \to 0$) için limit alınırsa,

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\mathbf{F}}{ds}+\mathbf{p}=0\\
&\frac{d\mathbf{M}}{ds}+\mathbf{e}_t^0\times\mathbf{F}+\mathbf{m}=0
\end{aligned}
\qquad (3.13)
$$

şeklinde denge denklemleri elde edilir.

- Bünye denklemleri : D ve **C** çubuğa ait dönme ve kayma rijitlik matrislerini göstermek üzere, bünye denklemleri, aşağıdaki eşitlikler ile ifade edilir;

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{M}=\mathbf{D}\,\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{ds}\\
&\mathbf{F}=\mathbf{C}\,\boldsymbol{\gamma}
\end{aligned}
\qquad (3.14)
$$

Böylece çubuk teorisinin genel denklemleri,

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\mathbf{u}}{ds}+\mathbf{e}_t^0\times\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{\gamma}=0\\
&\frac{d\mathbf{F}}{ds}+\mathbf{p}=0\\
&\frac{d\mathbf{M}}{ds}+\mathbf{e}_t^0\times\mathbf{F}+\mathbf{m}=0\\
&\mathbf{M}=\mathbf{D}\,\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{ds}
\end{aligned}
\qquad (3.15)
$$

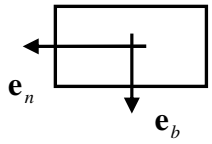
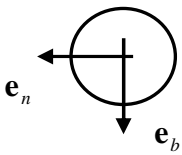
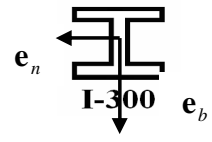
şeklinde yazılabilir. Çeşitli özelliklere sahip olan C ve D matrislerinin ikisi de simetriktir. Eğer, kesit simetrik ise ve $\mathbf{e}_n^0,\mathbf{e}_b^0$ eksenleri, kesidin simetri eksenleriyle çakışırsa, matrisler şu şekli alır;

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_n} GA & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_b} GA & 0 \\ 0 & 0 & EA \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} EI_n & 0 & 0 \\ 0 & EI_b & 0 \\ 0 & 0 & GJ \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

şeklinde gösterilebilir.

Burada, E ve G mazemenin elastiklik ve kayma modüllerini, I_n, I_b kesit eylemsizlik momentlerini, J kesidin polar eylemsizlik momentini, A kesit alanını ve k_n , k_b ise kayma gerilmelerinin kesite üniform olarak yayılmadıklarını karakterize eden sabitlerdir. Bu sabitler ; Tablo 3.1' de çeşitli kesitler için verilmiştir.

Tablo 3.1. α_n, α_b ve k_n, k_b sabitleri.

Kesit	α_n	α_b	k_n	k_b
	**3/2**	**3/2**	**6/5**	**6/5**
	**4/3**	**4/3**	**10/9**	**10/9**
	**2.6**	**2.5**	**2.10**	**2.20**

(3.14) denklemlerinden;

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{ds} = \mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{M}$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{C}^{-1}\,\mathbf{F} \tag{3.17}$$

eşitlikleri elde edilir.

Bunlar, (3.15) ifadelerinin ilk ikisinde yerine konursa;

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} + \mathbf{e}_t^0 \times \mathbf{\Omega} - \mathbf{C}^{-1}\mathbf{F} = 0$$

$$\frac{d\mathbf{\Omega}}{ds} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{M} = 0$$

$$\frac{d\mathbf{F}}{ds} = -\mathbf{p}$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{e}_t^0 \times \mathbf{F} = -\mathbf{m} \qquad (3.18)$$

denklemleri elde edilir. Buradaki **M, F, u, Ω, p** ve **m** vektörleri, şekil değiştirmelerin küçük olduğu varsayımıyla, şekil değiştirmemiş çubuk eksenine yerleştirilmiş $\mathbf{e}_n^0$, $\mathbf{e}_b^0$, $\mathbf{e}_t^0$ eksen takımında;

$$\mathbf{u} = u\ \mathbf{e}_n^0 + v\ \mathbf{e}_b^0 + w\ \mathbf{e}_t^0$$

$$\mathbf{\Omega} = \Omega_n\ \mathbf{e}_n^0 + \Omega_b\ \mathbf{e}_b^0 + \Omega_t\ \mathbf{e}_t^0$$

$$\mathbf{F} = F_n\ \mathbf{e}_n^0 + F_b\ \mathbf{e}_b^0 + F_t\ \mathbf{e}_t^0$$

$$\mathbf{M} = M_n\ \mathbf{e}_n^0 +; M_b\ \mathbf{e}_b^0 + M_t\ \mathbf{e}_t^0$$

$$\mathbf{p} = p_n\ \mathbf{e}_n^0 + p_b\ \mathbf{e}_b^0 + p_t\ \mathbf{e}_t^0$$

$$\mathbf{m} = m_n\ \mathbf{e}_n^0 + m_b\ \mathbf{e}_b^0 + m_t\ \mathbf{e}_t^0 \qquad (3.19)$$

şeklinde ifade edilebilirler.

Ekseni herhangi bir uzaysal eğri olan çubuk için, kesit asal eksenleri ile çubuk eksen eğrisinin normal ve binormal eksenlerinin çakışmaması durumunda, açısal değişim vektörünün,

$$\mathbf{\omega}_0 = \kappa_0\ \mathbf{e}_n^0 + \kappa_0^{'}\ \mathbf{e}_b^0 + \tau_0\ \mathbf{e}_t^0 \qquad (3.20)$$

olduğu bilinmektedir. Burada ; κ_0, $(\mathbf{e}_b^0 - \mathbf{e}_t^0)$ düzlemindeki eğrilik bileşeni, κ_0', $(\mathbf{e}_n^0 - \mathbf{e}_t^0)$ düzlemindeki eğrilik bileşeni, τ_0 ise eğrinin burulma açısıdır.

Böylece, (3.19) denklemlerindeki büyüklüklerin türevleri hesaplanırken,

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{ds} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{e}_i^0 \tag{3.21}$$

eşitliğinden faydalanılacaktır.

Eğer, kesit asal eksenleri, eksen eğrisinin normal ve binormal eksenleri ile çakışan düzlemsel eğri eksenli çubuk için;

$$\kappa_0 = 0 \qquad \kappa'_0 = 1/R_0 \qquad \tau_0 = 0 \tag{3.22}$$

şeklinde olacaktır.

Böyle bir çubuğun denklemleri;

$$\begin{aligned}
&\frac{du}{ds} + \frac{w}{R_0} - \Omega_b - \frac{F_n}{C_n} = 0 && \frac{dF_n}{ds} + \frac{F_t}{R_0} + p_n = 0 \\
&\frac{dv}{ds} + \Omega_n - \frac{F_b}{C_b} = 0 && \frac{dF_b}{ds} + p_b = 0 \\
&\frac{dw}{ds} - \frac{u}{R_0} - \frac{F_t}{C_t} = 0 && \frac{dR_t}{ds} - \frac{F_n}{R_0} + p_t = 0 \\
&\frac{d\Omega_n}{ds} + \frac{\Omega_t}{R_0} - \frac{M_n}{D_n} = 0 && \frac{dM_n}{ds} + \frac{M_t}{R_0} - F_b + m_n = 0 \\
&\frac{d\Omega_b}{ds} - \frac{M_b}{D_b} = 0 && \frac{dM_b}{ds} + F_n + m_b = 0 \\
&\frac{d\Omega_t}{ds} - \frac{\Omega_n}{R_0} - \frac{M_t}{D_t} = 0 && \frac{dM_t}{ds} - \frac{M_n}{R_0} + m_t = 0
\end{aligned} \tag{3.23}$$

şekline dönüşür. Burada; düzlem içindeki eğilmelerle ilgili büyüklüklerle, düzlem dışındaki eğilmelerle ilgili büyüklüklerin aynı denklemlerde birlikte bulunduğu görülmektedir. Dolayısıyla, düzlemsel eğri eksenli çubuğun düzlem dışındaki şekil değiştirmelerini (kendi düzlemine dik doğrultudaki) ifade eden denklemlerde, yay uzunluğu yerine $ds = R_0\, d\phi$ eşitliği konarak düzenlenirse;

$$\frac{dv}{d\phi} + R(\phi)\,\Omega_n - \frac{R(\phi)}{1/k_b\,GA} F_b = 0$$

$$\frac{d\Omega_n}{d\phi} + \Omega_t - \frac{R(\phi)}{EI_n} M_n = 0$$

$$\frac{d\Omega_t}{d\phi} - \Omega_n - \frac{R(\phi)}{GJ} M_t = 0$$

$$\frac{dM_n}{d\phi} + M_t - R(\phi)F_b + R(\phi)\,m_n = 0$$

$$\frac{dM_t}{d\phi} - M_n + R(\phi)\,m_t = 0$$

$$\frac{dF_b}{d\phi} + R(\phi)\,p_b = 0 \qquad (3.24)$$

şeklinde elde edilirler. Burada; v, binormal yerdeğiştirme, ϕ yay açıklığı, Ω_n , Ω_t , normal ve teğetsel eksen üzerindeki dönme açıları, $R_0(\phi)$ şekil değiştirmemiş çubuğun eksen eğrisinin eğrilik yarıçapı, C_n , kayma rijitliği, D_n ve D_t , eğilme ve burulma rijitlikleri, F_b , tekil binormal iç kuvvet, M_n ve M_t , normal ve teğetsel eksen üzerindeki iç momentler, p_b , yayılı dış yük, m_n ve m_t , normal ve teğetsel eksen üzerindeki yayılı dış momentler şeklinde tanımlanabilir.

3.2. Çubuk Titreşimlerinin Genel Denklemleri

Çubuk teorisinin genel denklemleri (3.23) denklemleri ile verilmiştir. Bu denklemler; ekseni, herhangi bir düzlemsel eğri olan, kesit asal doğrultularıyla eksen eğrisinin normal ve binormal doğrultuları çakışan, kesiti eksen eğrisi boyunca değişen bir çubuk için elde edilmiştir. Eksen eğrisinin uzaması ve kayma deformasyonu etkilerinin gözönüne alındığı çubuk teorisinin bu genel denklemleri kullanılarak çubuk statiğinde olduğu gibi çubuk titreşimlerini de incelemek mümkündür. Çubuk titreşimlerini ifade eden denklemleri D'Alambert prensibi yardımı ile çubuğun statik problemini ifade eden denklemleri kullanarak elde etmek mümkündür. Bu prensibe göre, maddesel bir sistemin hareketinden dolayı, bir t anında meydana gelen eylemsizlik kuvvetleri aktif dış kuvvetler olarak, sisteme etki eden gerçek kuvvetlerle

birlikte gözönüne alınırsa; sistem bütün bu kuvvetlerin etkisinde, t anındaki konumunda dengede bulunur. Böylece, **p** ve **m** dış yükleri;

$$p_n = -\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad p_b = -\mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \qquad p_t = -\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$m_n = -\frac{\mu}{A} I_n \frac{\partial^2 \Omega_n}{\partial t^2}$$

$$m_b = -\frac{\mu}{A} I_b \frac{\partial^2 \Omega_b}{\partial t^2}$$

$$m_t = -\frac{\mu}{A} I_p \frac{\partial^2 \Omega_t}{\partial t^2} \tag{3.25}$$

şeklinde eylemsizlik kuvvetleri ve kuvvet çiftleri olarak alınır. Burada, μ birim boyun kütlesi, A kesit alanı, I_n, I_b sırası ile kesitin normal ve binormal eksenlerine göre eylemsizlik momentlerini, I_p kesitin polar eylemsizlik momentini göstermektedir. Yer değiştirme büyüklükleri konum ve zamanın fonksiyonlarıdır. O halde tüm büyüklükler de konum ve zamanın fonksiyonları olacaktır. Bu büyüklükler, konum ve zaman fonksiyonlarının çarpımı olduğu varsayımı ile,

$$\mathbf{u}(s,t) = \mathbf{u}(s)e^{i\omega t} \qquad \mathbf{\Omega}(s,t) = \mathbf{\Omega}(s)e^{i\omega t}$$

$$\mathbf{F}(s,t) = \mathbf{F}(s)e^{i\omega t} \qquad \mathbf{M}(s,t) = \mathbf{M}(s)e^{i\omega t} \tag{3.26}$$

şeklinde elde edilebilir. Burada, ω açısal frekansı, t ise zamanı göstermekte olup, bu eşitlikler kullanılarak (3.25) denklemleri;

$$p_n = \mu\omega^2 u(s)e^{i\omega t} \qquad m_n = \frac{\mu}{A} I_n \Omega_n(s)\omega^2 e^{i\omega t}$$

$$p_b = \mu\omega^2 v(s)e^{i\omega t} \qquad m_b = \frac{\mu}{A} I_b \Omega_b(s)\omega^2 e^{i\omega t}$$

$$p_t = \mu\omega^2 w(s)e^{i\omega t} \qquad m_t = \frac{\mu}{A} I_p \Omega_t(s)\omega^2 e^{i\omega t} \tag{3.27}$$

şeklinde düzenlenebilir. Böylece, bu ifadeler (3.23) denklemlerinde yerine konarak ve zaman fonksiyonu sadeleştirilerek sadece konuma ve frekansa bağlı olarak elde edilirler.

Kesit asal doğrultularının, çubuk eksen eğrisinin normal ve binormal doğrultularıyla çakışması durumunda, düzlemsel eğri eksenli çubuğun serbest titreşimlerinin genel denklemleri aşağıdaki gibidir;

$$\frac{du}{ds}+\frac{w}{R}-\Omega_b-\frac{F_n}{C_n}=0 \qquad \frac{dF_n}{ds}+\frac{F_t}{R}+\mu\omega^2 u=0$$

$$\frac{dv}{ds}+\Omega_n-\frac{F_b}{C_b}=0 \qquad \frac{dF_b}{ds}+\mu\omega^2 v=0$$

$$\frac{dw}{ds}-\frac{u}{R}-\frac{F_t}{C_t}=0 \qquad \frac{dR_t}{ds}-\frac{F_n}{R}+\mu\omega^2 w=0$$

$$\frac{d\Omega_n}{ds}+\frac{\Omega_t}{R}-\frac{M_n}{D_n}=0 \qquad \frac{dM_n}{ds}+\frac{M_t}{R}-F_b+\mu\frac{I_n}{A}\omega^2\Omega_n=0$$

$$\frac{d\Omega_b}{ds}-\frac{M_b}{D_b}=0 \qquad \frac{dM_b}{ds}+F_n+\mu\frac{I_b}{A}\omega^2\Omega_t=0$$

$$\frac{d\Omega_t}{ds}-\frac{\Omega_n}{R}-\frac{M_t}{D_t}=0 \qquad \frac{dM_t}{ds}-\frac{M_n}{R}+\mu\frac{I_p}{A}\omega^2\Omega_t=0 \qquad (3.28)$$

Burada, düzlem içindeki titreşimlerle ilgili büyüklüklerle, düzlem dışındaki titreşimlerle ilgili büyüklüklerin ayrı denklemlerde bulunduğu görülmektedir. Dolayısıyla, düzlemsel eğri eksenli çubuğun kendi düzlemindeki titreşimlerini ifade eden denklemlerde yay uzunluğu yerine $ds = R\,d\phi$ eşitliği konarak düzenlenirse; çubuğun kendi düzlemine dik doğrultudaki serbest titreşimlerini ifade eden denklemler ise;

$$\frac{dv}{d\phi}+R\Omega_n-\frac{R}{GA/k_b}F_b=0$$

$$\frac{d\Omega_n}{d\phi}+\Omega_t-\frac{R}{EI_n}M_n=0$$

$$\frac{d\Omega_t}{d\phi} - \Omega_n - \frac{R}{GJ} M_t = 0$$

$$\frac{dM_n}{d\phi} + M_t - RF_b + R\mu \frac{I_n}{A} \omega^2 \Omega_n = 0$$

$$\frac{dM_t}{d\phi} - M_n + R\mu \frac{I_p}{A} \omega^2 \Omega_t = 0$$

$$\frac{dF_b}{d\phi} + R\mu\omega^2 v = 0 \qquad (3.29)$$

şeklinde yazılabilir.

4. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN DÜZLEM DIŞI PROBLEMLERİNİN KESİN ÇÖZÜMÜ

4.1. Başlangıç Değerleri Yöntemiyle Denklemlerin Çözümü

Eğri eksenli çubukların düzlem dışı eğilmelerini veren (3.24) denklemleri, birinci mertebeden lineer diferansiyel denklem takımıdır ve ;

$$\frac{d\mathbf{y}(\phi)}{d\phi} = \mathbf{A}(\phi)\,\mathbf{y}(\phi) + \mathbf{f}(\phi) \tag{4.1}$$

şeklinde, matrisel diferansiyel denklem takımı şeklinde ifade edilebilir. Burada, $\mathbf{y}$ 6 elemanlı değişkenler vektörünü, $\mathbf{A}(\phi)$ 6×6 elemanlı katsayılar matrisini ve $\mathbf{f}(\phi)$ 6 elemanlı yayılı dış yüklerin bileşke vektörünü göstermektedir. Böyle bir denklemin çözümü, $\mathbf{y}(\phi) = \mathbf{y}(\phi_0)$ başlangıç değeri bilinmek üzere;

$$\mathbf{y}(\phi) = \mathbf{Y}(\phi,\phi_o)\,\mathbf{y}_o + \mathbf{Y}(\phi,\phi_o)\int_{\phi_o}^{\phi} \mathbf{Y}^{-1}(\xi,\phi_o)\,\mathbf{f}(\xi)\,d\xi \tag{4.2}$$

olarak ifade edilmektedir. Burada, $\mathbf{Y}(\phi,\phi_o)$, ϕ_o referans koordinatındaki asal matristir. Eğer, $\mathbf{f}(\phi)$ vektörü özdeş olarak sıfır ise, yani çubuk üzerinde herhangi bir yayılı kuvvet veya eğilme momenti yok ise, çubuğun düzlem dışı eğilmelerini ifade eden denklemler;

$$\frac{d\mathbf{y}(\phi)}{d\phi} = \mathbf{A}(\phi)\,\mathbf{y}(\phi) \tag{4.3}$$

tipinde bir homojen matrisel diferansiyel denkleme dönüşür. Böyle bir çubuk, tekil kuvvet ve momentlerle yüklüdür. Bu durumda çözüm fonksiyonu ise;

$$\mathbf{y}(\phi) = \mathbf{Y}(\phi,\phi_0)\,\mathbf{y}_0 \tag{4.4}$$

şeklinde olacaktır.

$\mathbf{Y}(\phi,\phi_0)$ asal matrisi, en genel durumda, homojen ($\mathbf{f}(\phi)$ vektörünün bulunmadığı) denklemden elde edilir ve;

$$\frac{d\mathbf{Y}(\phi,\phi_0)}{d\phi} = \mathbf{A}(\phi)\mathbf{Y}(\phi,\phi_0) \qquad \mathbf{Y}(\phi_0,\phi_0) = \mathrm{I} \tag{4.5}$$

özelliklerini sağlar. Eksen eğrisinin normal ve binormal doğrultularının, kesitin asal doğrultularıyla çakıştığı durumu belirleyen (3.24)'da verilen denklem takımının homojen şekli;

$$\frac{d\nu}{d\phi} = -R(\phi)\,\Omega_n + \frac{R_0(\phi)}{GA(\phi)/k_b} F_b$$

$$\frac{d\Omega_n}{d\phi} = -\Omega_t + \frac{R(\phi)}{EI_n(\phi)} M_n$$

$$\frac{d\Omega_t}{d\phi} = \Omega_n + \frac{R(\phi)}{GJ(\phi)} M_t$$

$$\frac{dM_n}{d\phi} = -M_t + R(\phi)\,F_b$$

$$\frac{dM_t}{d\phi} = M_n$$

$$\frac{dF_b}{d\phi} = 0 \tag{4.6}$$

olarak ifade edilebilir. Bu denklem takımının beşinci denklemi bir kez türetilir ve dördüncü denklemde yerine konursa;

$$\frac{d^2 M_t}{d\phi^2} + M_t - R(\phi)\,F_b = 0 \tag{4.7}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bilindiği gibi bu denklemin homojen kısmının çözümü;

$$M_t = A\cos\phi + B\sin\phi \tag{4.8}$$

şeklindedir.

Buradan M_n ise;

$$M_n = -A\sin\phi + B\cos\phi \tag{4.9}$$

şeklinde elde edilir. Başlangıç noktası olarak $\phi_0 = 0$ alınır ve buradaki başlangıç değerleri M_{n0} ve M_{t0} bilinirse, sabitler bu değerler cinsinden ifade edilebilir;

$$A = M_{t0} \qquad\qquad B = M_{n0} \tag{4.10}$$

Böylece, (4.7) denkleminin homojen çözümü;

$$M_n = M_{n0}\cos\phi - M_{t0}\sin\phi$$

$$M_t = M_{n0}\sin\phi + M_{t0}\cos\phi \tag{4.11}$$

olarak elde edilebilirler. Matris gösterimi kullanılarak;

$$\mathbf{y}(\phi) = \mathbf{Y}(\phi,\phi_0)\,\mathbf{y}_0$$

$$\begin{Bmatrix} M_n \\ M_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{n0} \\ M_{t0} \end{Bmatrix} \tag{4.12}$$

şeklinde matrisel formda yazılabilir.

(4.1) denklemi yardımıyla;

$$\frac{d\mathbf{y}(\phi)}{d\phi} = \mathbf{A}(\phi)\,\mathbf{y}(\phi) + \mathbf{f}(\phi)$$

$$\frac{d}{d\phi}\begin{bmatrix} M_n \\ M_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_n \\ M_t \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} RF_{b0} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.13}$$

matrisel diferansiyel denklemi elde edilir. (4.2) denkleminde;

$$\mathbf{y}(\phi) = \mathbf{Y}(\phi,\phi_o)\,\mathbf{y}_o + \mathbf{Y}(\phi,\phi_o)\int_{\phi_o}^{\phi} \mathbf{Y}^{-1}(\xi,\phi_o)\,\mathbf{f}(\xi)\,d\xi$$

$$\mathbf{Y}^{-1}(\phi,\phi_0)=\begin{bmatrix}\cos\phi & \sin\phi\\ -\sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix} \tag{4.14}$$

olacağından; (4.2) denklemi ;

$$\begin{Bmatrix}M_n\\ M_t\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}M_{n0}\\ M_{t0}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}\int_{\phi_0}^{\phi}\begin{bmatrix}\cos\phi & \sin\phi\\ -\sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}RF_{b0}\\ 0\end{Bmatrix}d\xi \tag{4.15}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemin çözümünden eğilme momenti değişimi;

$$M_n=\cos\phi\,M_{n0}-\sin\phi\,M_{t0}+\cos\phi\int_0^{\phi}R(\psi)\cos\psi\,d\psi\,F_{b0}+\sin\phi\int_0^{\phi}R(\psi)\sin\psi\,d\psi\,F_{b0}$$

$$M_t=\sin\phi\,M_{n0}+\cos\phi\,M_{t0}+\sin\phi\int_0^{\phi}R(\psi)\cos\psi\,d\psi\,F_{b0}-\cos\phi\int_0^{\phi}R(\psi)\sin\psi\,d\psi\,F_{b0} \tag{4.16}$$

şeklinde elde edilir.

Kesitin dönme miktarlarını ifade eden (4.6) homojen denklem takımının ikinci ve üçüncü denklemleri;

$$f_1(\phi)=\frac{R_0(\phi)}{EI_n(\phi)}M_n \qquad\qquad f_2(\phi)=\frac{R_0(\phi)}{GJ(\phi)}M_t$$

olmak üzere;

$$\frac{d\Omega_n}{d\phi}+\Omega_t=f_1(\phi) \qquad\qquad \frac{d\Omega_t}{d\phi}-\Omega_n=f_2(\phi) \tag{4.17}$$

denklem takımı şeklinde yazılabilir. Bu denklem takımının homojen çözümü, $\phi=\phi_0$ başlangıç noktasında, Ω_{t0} ve Ω_{n0} başlangıç değerleri olmak üzere;

$$\Omega_n=\Omega_{n0}\cos\phi-\Omega_{t0}\sin\phi$$

$$\Omega_t=\Omega_{n0}\sin\phi+\Omega_{t0}\cos\phi \tag{4.18}$$

şeklinde elde edilir.

Matris gösterimi kullanılarak;

$$\begin{Bmatrix} \Omega_n \\ \Omega_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Omega_{n0} \\ \Omega_{t0} \end{Bmatrix} \tag{4.19}$$

şeklinde matrisel formda yazılabilir. (4.17) denklemi matrisel olarak;

$$\frac{d}{d\phi}\begin{Bmatrix} \Omega_n \\ \Omega_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Omega_n \\ \Omega_t \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dfrac{R_0(\phi)}{EI_n(\phi)} M_n \\ \dfrac{R_0(\phi)}{GJ(\phi)} M_t \end{Bmatrix} \tag{4.20}$$

şeklinde yazılabilir. (4.18) denkleminde ;

$$\mathbf{Y}^{-1}(\phi,\phi_0) = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

olduğundan; (4.2) denklemi;

$$\begin{Bmatrix} \Omega_n \\ \Omega_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Omega_{n0} \\ \Omega_{t0} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \int_0^{\phi} \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{R_0(\psi)}{EI_n(\psi)} M_n \\ \dfrac{R_0(\psi)}{GJ(\psi)} M_t \end{Bmatrix} d\psi \tag{4.22}$$

şeklinde yazılabilir. Ve bu denklemin çözümünden, kesitin, çubuk eğrisinin normal ekseni doğrultusundaki dönme miktarı;

$$\Omega_n = \cos\phi\,\Omega_{n0} - \sin\phi\,\Omega_{t0} + \left\{ \cos\phi \int_0^{\phi} R(\psi) \left[\frac{\cos^2\psi}{EI_n(\psi)} + \frac{\sin^2\psi}{GJ(\psi)} \right] d\psi \right.$$

$$\left. + \sin(\phi) \int_0^{\phi} R(\psi) \cos\psi \sin\psi \left(\frac{1}{EI_n(\psi)} - \frac{1}{GJ(\psi)} \right) d\psi \right\} M_{n0}$$

$$+ \left\{ \cos(\phi) \int_0^{\phi} R(\psi) \sin\psi \cos\psi \left(\frac{1}{GJ(\psi)} - \frac{1}{EI_n(\psi)} \right) d\psi \right.$$

$$\left. - \sin\phi \int_0^{\phi} R(\psi) \left[\frac{\cos^2\psi}{GJ(\psi)} + \frac{\sin^2\psi}{EI_n(\psi)} \right] d\psi \right\} M_{t0}$$

$$+\left\{\cos\phi\left[\int_0^{\phi} R(\psi)\left[\frac{\cos^2\psi}{EI_n(\psi)}+\frac{\sin^2\psi}{GJ(\psi)}\right]\int_0^{\psi} R(\xi)\cos\xi\,d\xi\,d\psi\right.\right.$$

$$\left.+\int_0^{\phi} R(\psi)\sin\psi\cos\psi\left(\frac{1}{EI_n(\psi)}-\frac{1}{GJ(\psi)}\right)\int_0^{\xi} R(\xi)\sin\xi\,d\xi\,d\psi\right]$$

$$+\sin\phi\left[\int_0^{\phi} R(\psi)\sin\psi\cos\psi\left(\frac{1}{EI_n(\psi)}-\frac{1}{GJ(\psi)}\right)\int_0^{\xi} R(\xi)\cos\xi\,d\xi\,d\psi\right.$$

$$\left.\left.+\int_0^{\phi} R(\psi)\left[\frac{\cos^2\psi}{GJ(\psi)}+\frac{\sin^2\psi}{EI_n(\psi)}\right]\int_0^{\psi} R(\xi)\sin\xi\,d\xi\,d\psi\right]\right\} F_{b0} \qquad (4.23)$$

Kesitin, çubuk eğrisinin teğeti doğrultusundaki dönme miktarı;

$$\Omega_t=\sin\phi\,\Omega_{n0}+\cos\phi\,\Omega_{t0}+\left\{\cos\phi\int_0^{\phi} R(\psi)\cos\psi\sin\psi\left(\frac{1}{GJ(\psi)}-\frac{1}{EI_n(\psi)}\right)d\psi\right.$$

$$\left.+\sin\phi\int_0^{\phi} R(\psi)\left[\frac{\cos^2\psi}{EI_n(\psi)}+\frac{\sin^2\psi}{GJ(\psi)}\right]d\psi\right\}M_{n0}$$

$$+\left\{\cos\phi\int_0^{\phi} R(\psi)\left[\frac{\cos^2\psi}{GJ(\psi)}+\frac{\sin^2\psi}{EI_n(\psi)}\right]d\psi\right.$$

$$\left.+\sin\phi\int_0^{\phi} R(\psi)\cos\psi\sin\psi\left(\frac{1}{GJ(\psi)}-\frac{1}{EI_n(\psi)}\right)d\psi\right\}M_{t0}$$

$$+\left\{\cos\phi\left[\int_0^{\phi} R(\psi)\sin\psi\cos\psi\left(\frac{1}{GJ(\psi)}-\frac{1}{EI_n(\psi)}\right)\int_0^{\xi} R(\xi)\cos\xi\,d\xi\,d\psi\right.\right.$$

$$\left.-\int_0^{\phi} R(\psi)\left[\frac{\cos^2\psi}{GJ(\psi)}+\frac{\sin^2\psi}{EI_n(\psi)}\right]\int_0^{\psi} R(\xi)\sin\xi\,d\xi\,d\psi\right]$$

$$+\sin\phi\left[\int_0^{\phi} R(\psi)\left[\frac{\cos^2\psi}{EI_n(\psi)}+\frac{\sin^2\psi}{GJ(\psi)}\right]\int_0^{\psi} R(\xi)\cos\xi\,d\xi\,d\psi\right.$$

$$\left.\left.+\int_0^{\phi} R(\psi)\cos\psi\sin\psi\left(\frac{1}{EI_n(\psi)}-\frac{1}{GJ(\psi)}\right)\int_0^{\xi} R(\xi)\sin\xi\,d\xi\,d\psi\right]\right\} F_{b0} \qquad (4.24)$$

şeklinde elde edilebilir.

Çubuk eğrisinin normal ekseni doğrultusundaki yerdeğiştirme miktarı;

$$\frac{d\nu}{d\phi} = -R(\phi)\Omega_n + \frac{R(\phi)}{GA(\phi)/k_b} F_{b0} \qquad \text{ve} \qquad \nu = \nu_0 - \int_0^{\phi} R(\psi)\,\Omega_n\, d\psi + \int_0^{\phi} \frac{R(\psi)}{GA(\phi)/k_b} F_{b0}\, d\psi$$

denklemleri kullanılarak aşağıdaki şekilde elde edilir;

$$\nu = \nu_0 - \int_0^{\phi} R(\psi)\cos\psi\, d\psi\, \Omega_{n0} + \int_0^{\phi} R(\psi)\sin\psi\, d\psi\, \Omega_{t0}$$

$$-\left[\int_0^{\phi} R(\psi)\cos\psi \int_0^{\psi} R(\xi)\left(\frac{\cos^2\xi}{EI_n(\xi)} + \frac{\sin^2\xi}{GJ(\xi)} \right) d\xi\, d\psi \right.$$

$$\left. + \int_0^{\phi} R(\psi)\sin\psi \int_0^{\xi} R(\xi)\cos\xi\sin\xi \left(\frac{1}{EI_n(\psi)} - \frac{1}{GJ(\psi)} \right) d\xi\, d\psi \right] M_{n0}$$

$$+\left[-\int_0^{\phi} R(\psi)\cos\psi \int_0^{\xi} R(\xi)\sin\xi\cos\xi \left(\frac{1}{GJ(\psi)} - \frac{1}{EI_n(\psi)} \right) d\xi\, d\psi \right.$$

$$\left. + \int_0^{\phi} R(\psi)\sin\psi \int_0^{\psi} R(\xi)\left(\frac{\cos^2\xi}{GJ(\xi)} + \frac{\sin^2\xi}{EI_n(\xi)} \right) d\xi\, d\psi \right] M_{t0}$$

$$+\left\{ \int_0^{\phi} \frac{\rho(\psi)}{GA(\phi)/k_b}\, d\psi - \int_0^{\phi} R(\psi)\cos\psi \left[\int_0^{\psi} R(\xi)\left(\frac{\cos^2\xi}{EI_n(\xi)} + \frac{\sin^2\xi}{GJ(\xi)} \right) \int_0^{\xi} R(\theta)\cos\theta\, d\theta\, d\xi \right.\right.$$

$$\left. + \int_0^{\psi} R(\xi)\sin\xi\cos\xi \left(\frac{1}{EI_n(\xi)} - \frac{1}{GJ(\xi)} \right) \int_0^{\xi} R(\theta)\sin\theta\, d\theta\, d\xi \right] d\psi$$

$$- \int_0^{\phi} R(\psi)\sin\psi \left[\int_0^{\psi} R(\xi)\sin\xi\cos\xi \left(\frac{1}{EI_n(\xi)} - \frac{1}{GJ(\xi)} \right) \int_0^{\xi} R(\theta)\cos\theta\, d\theta\, d\xi \right.$$

$$\left.\left. + \int_0^{\psi} R(\xi) \left(\frac{\cos^2\xi}{GJ(\xi)} + \frac{\sin^2\xi}{EI_n(\xi)} \right) \int_0^{\xi} R(\theta)\sin\theta\, d\theta\, d\xi \right] d\psi \right\} F_{b0} \qquad (4.25)$$

Elde edilen bu eşitlikler bazı kısaltmalar yardımıyla aşağıdaki şekle dönüşür;

$$
\begin{aligned}
V &= \mathbf{Y}_{11}\nu_0 + \mathbf{Y}_{12}\Omega_{t0} + \mathbf{Y}_{13}\Omega_{n0} + \mathbf{Y}_{14}M_{t0} + \mathbf{Y}_{15}M_{n0} + \mathbf{Y}_{16}F_{b0} \\
\Omega_n &= \mathbf{Y}_{22}\Omega_{t0} + \mathbf{Y}_{23}\Omega_{n0} + \mathbf{Y}_{24}M_{t0} + \mathbf{Y}_{25}M_{n0} + \mathbf{Y}_{26}F_{b0} \\
\Omega_t &= \mathbf{Y}_{32}\Omega_{t0} + \mathbf{Y}_{33}\Omega_{n0} + \mathbf{Y}_{34}M_{t0} + \mathbf{Y}_{35}M_{n0} + \mathbf{Y}_{36}F_{b0} \\
M_n &= \mathbf{Y}_{44}M_{t0} + \mathbf{Y}_{45}M_{n0} + \mathbf{Y}_{46}F_{b0} \\
M_t &= \mathbf{Y}_{54}M_{t0} + \mathbf{Y}_{55}M_{n0} + \mathbf{Y}_{56}F_{b0} \\
F_b &= \mathbf{Y}_{66}F_{b0}
\end{aligned}
$$

Böylece, eksen eğri formu bilinen dairesel kesitli bir çubuk için eksen eğrisi ne olursa olsun Genel Asal Matris elde edilmiş olur;

$$
\mathbf{Y} = \begin{bmatrix}
\mathbf{Y}_{11} & \mathbf{Y}_{12} & \mathbf{Y}_{13} & \mathbf{Y}_{14} & \mathbf{Y}_{15} & \mathbf{Y}_{16} \\
0 & \mathbf{Y}_{22} & \mathbf{Y}_{23} & \mathbf{Y}_{24} & \mathbf{Y}_{25} & \mathbf{Y}_{26} \\
0 & \mathbf{Y}_{32} & \mathbf{Y}_{33} & \mathbf{Y}_{34} & \mathbf{Y}_{35} & \mathbf{Y}_{36} \\
0 & 0 & 0 & \mathbf{Y}_{44} & \mathbf{Y}_{45} & \mathbf{Y}_{46} \\
0 & 0 & 0 & \mathbf{Y}_{54} & \mathbf{Y}_{55} & \mathbf{Y}_{56} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{Y}_{66}
\end{bmatrix} \tag{4.26}
$$

Elde edilen çözüm, çubuk ekseninin eğrisi, mesnetleme şartları ve yükleme durumu belirli olan dairesel sabit kesitli her çubuğa uygulanabilecek genel bir çözümdür. Bir başka deyişle, birinci mertebeden, değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem takımı olan genel deklemlerin kesin çözümü elde edilmiş olmaktadır. Bu çözümün genel ifadesi olan asal matris elemanları aşağıdaki gibi elde edilmiş olur ;

$$
Y_{11} = 1, \qquad Y_{12} = -\int_0^{\phi} R\cos\psi\, d\psi, \qquad Y_{13} = \int_0^{\phi} R\sin\psi\, d\psi,
$$

$$
Y_{14} = -\left[\int_0^{\phi} R\cos\psi \int_0^{\psi} R\left(\frac{\cos^2\xi}{EI_n} + \frac{\sin^2\xi}{GJ}\right)d\xi\, d\psi + \int_0^{\phi} R\sin\psi \int_0^{\psi} R\cos\xi\sin\xi\left(\frac{1}{EI_n} - \frac{1}{GJ}\right)d\xi\, d\psi\right]
$$

$$
Y_{15} = \left[\int_0^{\phi} R\cos\psi \int_0^{\psi} R\cos\xi\sin\xi\left(\frac{1}{EI_n} - \frac{1}{GJ}\right)d\xi\, d\psi + \int_0^{\phi} R\sin\psi \int_0^{\psi} R\left(\frac{\cos^2\xi}{GJ} + \frac{\sin^2\xi}{EI_n}\right)d\xi\, d\psi\right]
$$

$$Y_{16} = \left[\int_0^{\phi} \frac{R}{GA/k_b} d\psi - \int_0^{\phi} R\cos\psi \int_0^{\psi} R \left(\frac{\cos^2\xi}{EI_n} + \frac{\sin^2\xi}{GJ} \right) \int_0^{\xi} R\cos\theta \, d\theta \, d\xi \, d\psi \right.$$
$$- \int_0^{\phi} R\cos\psi \int_0^{\psi} R\cos\xi \sin\xi \left(\frac{1}{EI_n} - \frac{1}{GJ} \right) \int_0^{\xi} R\sin\theta \, d\theta \, d\xi \, d\psi - \int_0^{\phi} R\sin\psi \int_0^{\psi} R\cos\xi \sin\xi$$
$$\left. \left(\frac{1}{EI_n} - \frac{1}{GJ} \right) \int_0^{\xi} R\cos\theta \, d\theta \, d\xi \, d\psi - \int_0^{\phi} R\sin\psi \int_0^{\psi} R \left(\frac{\cos^2\xi}{GJ} + \frac{\sin^2\xi}{EI_n} \right) \int_0^{\xi} R\sin\theta \, d\theta \, d\xi \, d\psi \right]$$

$$Y_{21} = 0, \qquad Y_{22} = \cos\phi, \qquad Y_{23} = -\sin\phi,$$

$$Y_{24} = \left[\cos\phi \int_0^{\phi} R \left(\frac{\cos^2\psi}{EI_n} + \frac{\sin^2\psi}{GJ} \right) d\psi + \sin\phi \int_0^{\phi} R\cos\psi \sin\psi \left(\frac{1}{EI_n} - \frac{1}{GJ} \right) d\psi \right]$$

$$Y_{25} = -\cos\phi \int_0^{\phi} R\cos\psi \sin\psi \left(\frac{1}{EI_n} - \frac{1}{GJ} \right) d\psi - \sin\phi \int_0^{\phi} R \left(\frac{\cos^2\psi}{GJ} + \frac{\sin^2\psi}{EI_n} \right) d\psi$$

$$Y_{26} = \cos\phi \left[\int_0^{\phi} R \left(\frac{\cos^2\psi}{EI_n} + \frac{\sin^2\psi}{GJ} \right) \int_0^{\psi} R\cos\xi \, d\xi \, d\psi + \int_0^{\phi} R\cos\psi \sin\psi \left(\frac{1}{EI_n} - \frac{1}{GJ} \right) \int_0^{\psi} R\sin\xi \, d\xi \, d\psi \right]$$
$$+ \sin\phi \left[\int_0^{\phi} R\cos\psi \sin\psi \left(\frac{1}{EI_n} - \frac{1}{GJ} \right) \int_0^{\psi} R\cos\xi \, d\xi \, d\psi + \int_0^{\phi} R \left(\frac{\cos^2\psi}{GJ} + \frac{\sin^2\psi}{EI_n} \right) \int_0^{\psi} R\sin\xi \, d\xi \, d\psi \right]$$

$$Y_{31} = 0, \qquad Y_{32} = \sin\phi, \qquad Y_{33} = \cos\phi$$

$$Y_{34} = \left[-\cos\phi \int_0^{\phi} R\cos\psi \sin\psi \left(\frac{1}{EI_n} - \frac{1}{GJ} \right) d\psi + \sin\phi \int_0^{\phi} R \left(\frac{\cos^2\psi}{EI_n} + \frac{\sin^2\psi}{GJ} \right) d\psi \right]$$

$$Y_{35} = Cos\phi \int_0^{\phi} R \left(\frac{Cos^2\psi}{GJ} + \frac{Sin^2\psi}{EI_n} \right) d\psi - Sin\phi \int_0^{\phi} R\,Cos\psi\,Sin\psi \left(\frac{1}{EI_n} - \frac{1}{GJ} \right) d\psi$$

$$Y_{36} = -\cos\phi \left[\int_0^{\phi} R \left(\frac{\cos^2\psi}{GJ} + \frac{\sin^2\psi}{EI_n} \right) \int_0^{\psi} R\sin\xi \, d\xi \, d\psi + \int_0^{\phi} R\cos\psi \sin\psi \left(\frac{1}{EI_n} - \frac{1}{GJ} \right) \int_0^{\psi} R\cos\xi \, d\xi \, d\psi \right]$$
$$+ \sin\phi \left[\int_0^{\phi} R\cos\psi \sin\psi \left(\frac{1}{EI_n} - \frac{1}{GJ} \right) \int_0^{\psi} R\sin\xi \, d\xi \, d\psi + \int_0^{\phi} R \left(\frac{\cos^2\psi}{EI_n} + \frac{\sin^2\psi}{GJ} \right) \int_0^{\psi} R\cos\xi \, d\xi \, d\psi \right]$$

$$Y_{41} = 0, \qquad Y_{42} = 0, \qquad Y_{43} = 0, \qquad Y_{44} = \cos\phi, \qquad Y_{45} = -\sin\phi$$

$$Y_{46} = \cos\phi \int_0^{\phi} R\cos\psi \, d\psi + \sin\phi \int_0^{\phi} R\sin\psi \, d\psi$$

$$Y_{51}=0\,,\qquad Y_{52}=0\,,\qquad Y_{53}=0\,,\qquad Y_{54}=\sin\phi\,,\qquad Y_{55}=\cos\phi$$

$$Y_{56}=\sin\phi\int_0^{\phi}R\cos\psi\,d\psi-\cos\phi\int_0^{\phi}R\sin\psi\,d\psi$$

$$Y_{61}=0\,,\quad Y_{62}=0\,,\quad Y_{63}=0\,,\quad Y_{64}=0\,,\quad Y_{65}=0\,,\quad Y_{66}=1 \tag{4.27}$$

Bu genel asal matris, eksen eğri formu bilinen değişken kesitli çubuklar için kullanılabilir.

4.1.1. Çember Eksenli Sabit Kesitli Çubuğun Asal Matrisi

Çember eksenli sabit kesitli çubuğun asal matrisinin elemanları aşağıdaki şekilde elde edilmiştir,

$$Y_{11}=1\,,\qquad Y_{12}=R\sin\phi\,,\qquad Y_{13}=R-R\cos\phi$$

$$Y_{14}=R^2\left[\frac{1}{GJ}-\frac{\cos(\phi/2)^2}{GJ}-\frac{\phi\cos(\phi/2)\sin(\phi/2)}{EI_n}-\frac{\phi\cos(\phi/2)\sin(\phi/2)}{GJ}+\frac{\sin(\phi/2)^2}{GJ}\right]$$

$$Y_{15}=\frac{R^2}{2}\left[-\frac{\phi\cos\phi}{EI_n}-\frac{\phi\cos\phi}{GJ}+\frac{\sin\phi}{EI_n}+\frac{\sin\phi}{GJ}\right]$$

$$Y_{16}=R\left[\frac{\phi k_b}{GA}+\frac{R^2\phi}{GJ}+\frac{R^2\phi\cos\phi}{2EI_n}+\frac{R^2\phi\cos\phi}{2GJ}-\frac{R^2\sin\phi}{2EI_n}-\frac{3R^2\sin\phi}{2GJ}\right]$$

$$Y_{21}=0\,,\qquad Y_{22}=\cos\phi\,,\qquad Y_{23}=-\sin\phi$$

$$Y_{24}=\frac{R}{2}\left[\frac{\phi\cos\phi}{EI_n}+\frac{\phi\cos\phi}{GJ}+\frac{\sin\phi}{EI_n}-\frac{\sin\phi}{GJ}\right]$$

$$Y_{25}=\frac{R}{2}\phi\sin\phi\left[-\frac{1}{EI_n}-\frac{1}{GJ}\right]$$

$$Y_{26}=R^2\left[-\frac{1}{GJ}+\frac{\cos(\phi/2)^2}{GJ}+\frac{\phi\cos(\phi/2)\sin(\phi/2)}{EI_n}+\frac{\phi\cos(\phi/2)\sin(\phi/2)}{GJ}-\frac{\sin(\phi/2)^2}{GJ}\right]$$

$$Y_{31}=0\ ,\qquad Y_{32}=\sin\phi\ ,\qquad Y_{33}=\cos\phi$$

$$Y_{34}=\frac{R}{2}\phi\sin\phi\left[\frac{1}{EI_n}+\frac{1}{GJ}\right]$$

$$Y_{35}=\frac{R}{2}\left[\frac{\phi\cos\phi}{EI_n}+\frac{\phi\cos\phi}{GJ}-\frac{\sin\phi}{EI_n}+\frac{\sin\phi}{GJ}\right]$$

$$Y_{36}=\frac{R^2}{2}\left[-\frac{\phi\cos\phi}{EI_n}-\frac{\phi\cos\phi}{GJ}+\frac{\sin\phi}{EI_n}+\frac{\sin\phi}{GJ}\right]$$

$$Y_{41}=0\ ,\quad Y_{42}=0\ ,\quad Y_{43}=0\ ,\quad Y_{44}=\cos\phi\ ,\quad Y_{45}=-\sin\phi\ ,\quad Y_{46}=R\sin\phi$$

$$Y_{51}=0\ ,\quad Y_{52}=0\ ,\quad Y_{53}=0\ ,\quad Y_{54}=\sin\phi\ ,\quad Y_{55}=\cos\phi\ ,\quad Y_{56}=R-R\cos\phi$$

$$Y_{61}=0\ ,\quad Y_{62}=0\ ,\quad Y_{63}=0\ ,\quad Y_{64}=0\ ,\quad Y_{65}=0\ ,\quad Y_{66}=1 \qquad (4.28)$$

4.1.2. Parabol Eksenli Değişken Kesitli Çubuğun Asal Matrisi

Burada, parabol eksenli değişken kesitli bir çubuğun asal matrisi elde edilmiştir. Parabolik bir çubuğun eğrilik yarıçapı;

$$R(\phi)=R_0/\cos^3\phi \qquad (4.29)$$

şeklinde ifade edilir. Burada, R_0 çubuğun tepe noktasındaki eğrilik yarıçapıdır ve dairesel kesit alanı ve kesit alanının eksen boyunca değişimi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir;

$$A(\phi)=A_o/\cos\phi \qquad I_n(\phi)=I_{no}/\cos\phi \qquad J(\phi)=J_o/\cos\phi \qquad (4.30)$$

Burada, A_o, I_{no} ve J_o ifadeleri sırası ile, çubuğun tepe noktasındaki, kesit alanını, kesit eylemsizlik momentini ve kesidin polar eylemsizlik momentini göstermektedir. k_b ise, kayma gerilmelerinin kesite üniform olarak yayılmadıklarını karakterize eden sabittir. Mathematica ve Mapple gibi sembolik hesap yapabilen programlar kullanılarak, asal matris elemanları aşağıdaki şekilde elde edilmiştir;

$$Y_{11} = 1, \qquad Y_{12} = -R_0 \tan\phi, \qquad Y_{13} = \tfrac{1}{2} R_0 \tan\phi$$

$$Y_{14} = -\frac{R_0^2}{2}\left(\frac{1}{EI_{no}} - \frac{1}{GJ_o}\right)\tan^2\phi - \frac{R_0^2(1-\sec\phi)}{GJ_o} + \frac{R_0^2 \tan\phi}{GJ_o}\left[\ln\left(\cos\tfrac{\phi}{2} - \sin\tfrac{\phi}{2}\right) - \ln\left(\cos\tfrac{\phi}{2} + \sin\tfrac{\phi}{2}\right)\right]$$

$$Y_{15} = \frac{R^2 \sec^2\phi}{8EI_{no}GJ_o}\left[(2EI_{no} + GJ_o + (2EI_{no} - 3GJ_o)\cos 2\phi\right)$$
$$\left(\ln(\cos\tfrac{\phi}{2} - \sin\tfrac{\phi}{2}) - \ln(\cos\tfrac{\phi}{2} + \sin\tfrac{\phi}{2})\right) + 2\left(-2EI_{no} + 3GJ_o + 4(EI_{no} - GJ_o)\cos\phi\right)\sin\phi\Big]$$

$$Y_{16} = \frac{R\sec^4\phi}{256AEI_{no}GJ_o}\Big[7A(4EI_{no} + GJ_o)R^2\left(\ln(\cos\tfrac{\phi}{2} - \sin\tfrac{\phi}{2}) - \ln(\cos\tfrac{\phi}{2} + \sin\tfrac{\phi}{2})\right)$$
$$+ 4A(12EI_{no} + GJ_o)R^2\cos 2\phi\left(\ln(\cos\tfrac{\phi}{2} - \sin\tfrac{\phi}{2}) - \ln(\cos\tfrac{\phi}{2} + \sin\tfrac{\phi}{2})\right)$$
$$+ A(20EI_{no} - 3GJ_o)R^2\cos 4\phi\left(\ln(\cos\tfrac{\phi}{2} - \sin\tfrac{\phi}{2}) - \ln(\cos\tfrac{\phi}{2} + \sin\tfrac{\phi}{2})\right)$$
$$- 10A(4EI_{no} + GJ_o)R^2\sin\phi + 64EI_{no}(I_{to}k_b + AR^2)\sin 2\phi$$
$$- 2A(20EI_{no} - 3GJ_o)R^2\sin 3\phi + 32EI_{no}(I_{to}k_b + AR^2)\sin 4\phi$$

$$Y_{21} = 0, \qquad Y_{22} = \cos\phi, \qquad Y_{23} = -\sin\phi$$

$$Y_{24} = -\frac{R\cos\phi}{GJ_o}\left(\ln(\cos\tfrac{\phi}{2} - \sin\tfrac{\phi}{2}) - \ln(\cos\tfrac{\phi}{2} + \sin\tfrac{\phi}{2})\right) - \frac{R}{GJ_o}\sin\phi + \frac{R}{EI_{no}}\sin\phi$$

$$Y_{25} = -R(1-\cos\phi)\left(\frac{1}{GJ_o} - \frac{2}{EI_{no}}\right) + \frac{R\sin\phi}{EI_{no}}\left(\ln(\cos\tfrac{\phi}{2} - \sin\tfrac{\phi}{2}) - \ln(\cos\tfrac{\phi}{2} + \sin\tfrac{\phi}{2})\right)$$

$$Y_{26} = \frac{R^2\sin\phi}{4}\left[\left(\frac{4}{GJ_o} - \frac{1}{EI_{no}} - \frac{4\cos\phi}{GJ_o} + \frac{\sec^2\phi}{EI_{no}}\right)\right.$$
$$\left. + \left(\ln(\cos\tfrac{\phi}{2} - \sin\tfrac{\phi}{2}) - \ln(\cos\tfrac{\phi}{2} + \sin\tfrac{\phi}{2})\right)\left(\frac{2}{GJ_o} - \frac{1}{EI_{no}}\right)\right]$$

$$Y_{31} = 0, \qquad Y_{32} = \sin\phi, \qquad Y_{23} = \cos\phi$$

$$Y_{34} = -R(1-\cos\phi)\left(\frac{1}{GJ_o} - \frac{1}{EI_{no}}\right) + \frac{R\sin\phi}{GJ_o}\left(\ln(\cos\tfrac{\phi}{2} - \sin\tfrac{\phi}{2}) - \ln(\cos\tfrac{\phi}{2} + \sin\tfrac{\phi}{2})\right)$$

$$Y_{35} = R\sin\phi\left(\frac{1}{GJ_o} - \frac{1}{EI_{no}}\right) - \frac{R\cos\phi}{EI_{no}}\left(\ln(\cos\tfrac{\phi}{2} - \sin\tfrac{\phi}{2}) - \ln(\cos\tfrac{\phi}{2} + \sin\tfrac{\phi}{2})\right)$$

$$Y_{36} = -\frac{R^2\cos\phi}{4}\left(\frac{2}{GJ_o}-\frac{1}{EI_{no}}\right)\left(\ln(\cos\tfrac{\phi}{2}-\sin\tfrac{\phi}{2})-\ln(\cos\tfrac{\phi}{2}+\sin\tfrac{\phi}{2})\right)$$
$$+\frac{R^2\sin\phi}{4GJ_o}+\frac{R^2}{4}\tan\phi\left(\frac{2}{GJ_o}+\frac{1}{EI_{no}}\right)$$

$Y_{41}=0$, $Y_{42}=0$, $Y_{43}=0$, $Y_{44}=\cos\phi$, $Y_{45}=-\sin\phi$

$Y_{46}=-\frac{1}{2}R\sin\phi(2+\tan^2\phi)$

$Y_{51}=0$, $Y_{52}=0$, $Y_{53}=0$, $Y_{54}=\sin\phi$, $Y_{55}=\cos\phi$,

$Y_{56}=\frac{1}{2}R\sin\phi\tan\phi$

$Y_{61}=0$, $Y_{62}=0$, $Y_{63}=0$, $Y_{64}=0$, $Y_{65}=0$, $Y_{66}=1$ (4.31)

4.2. Tekil Yüklerin Simetrik Olmayan Noktadan Etkidiği Çubukların Hesabı

Burada, simetrik olmayan geometri ve yükleme durumundaki çubuklar incelenmiştir. Böyle bir çubuğun, her iki uçtaki mesnetlerin de aynı olmadığı etkiyen tekil yüklerin, hem kuvvet hem de moment (F_b, M_n, M_t) olma durumu ele alınmıştır.

Şekil 4.1'de verilen çubuğun hesabı iki bölgede yapılmıştır. Birinci bölge AK yayı, ikinci bölge ise KB yayı boyuncadır.

1. Bölge $-\phi_A \le \phi_1 \le \phi_K$

2. Bölge $\phi_K \le \phi_2 \le \phi_B$ (4.32)

Birinci bölgede çözüm fonksiyonu;

$$\mathbf{y_1}(\phi_1) = \mathbf{Y}(\phi_1,0)\,\mathbf{y}_{10} \qquad -\phi_A \le \phi_1 \le \phi_K \tag{4.33}$$

İkinci bölgede çözüm fonksiyonu;

$$\mathbf{y}_2(\phi_2) = \mathbf{Y}(\phi_2,\phi_K)\,\mathbf{y}_{2K} \qquad \phi_K \le \phi_2 \le \phi_B \tag{4.34}$$

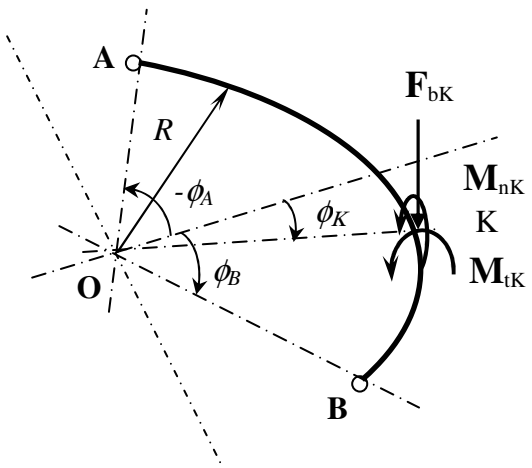
şeklinde olacaktır.

Burada, $\mathbf{Y}(\phi_1,0)$ matrisi $\phi_1 = 0$ konumundaki $\mathbf{y}_{10}$ başlangıç değerleri esas alınarak, $\mathbf{Y}(\phi_2,\phi_K)$ matrisi ise $\phi_2 = \phi_K$ konumundaki $\mathbf{y}_{2K}$ başlangıç değerleri esas alınarak elde edilmiş asal matrislerdir. Bu durumda, $\mathbf{y}_{10}$ ve $\mathbf{y}_{2K}$ vektörlerinin bilinmesine gerek vardır. 12 adet başlangıç değerini belirlemek için aynı sayıda deklem gerekmektedir. Söz konusu bu 12 adet denklem, sınır ve süreklilik şartlarından elde edilecektir.

Ankastre mesnet : $\nu(-\phi_A) = 0, \quad \Omega_n(-\phi_A) = 0, \quad \Omega_t(-\phi_A) = 0$

Serbest mesnet : $M_n(-\phi_A) = 0, \quad M_t(-\phi_A) = 0, \quad F_b(-\phi_A) = 0$ (4.35)

Mesnet tiplerinden her iki uç için gerekli olanlar seçilerek 6 adet denklem oluşturulur.



Şekil 4.1. Simetrik olmayan bir çubuğun en genel durumu.

K noktasında, her iki bölgenin çözüm fonksiyonları arasında aşağıdaki süreklilik şartı yazılabilir;

$$v_1(\phi_K) = v_2(\phi_K) \qquad M_{n1}(\phi_K) + M_{nK} = M_{n2}(\phi_K)$$

$$\Omega_{n1}(\phi_K) = \Omega_{n2}(\phi_K) \qquad M_{t1}(\phi_K) + M_{tK} = M_{n2}(\phi_K)$$

$$\Omega_{t1}(\phi_K) = \Omega_{t2}(\phi_K) \qquad F_{b1}(\phi_K) + F_{bK} = F_{b2}(\phi_K)$$

Bu süreklilik şartları vektörel gösterimle;

$$\mathbf{y}_1(\phi_K) + \mathbf{K} = \mathbf{y}_2(\phi_K) \tag{4.36}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada, K, kuvvet süreksizliğini ifade eden dış yükler vektörüdür ve,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_{nK} \\ M_{tK} \\ F_{bK} \end{bmatrix} \tag{4.37}$$

olarak bilinmektedir. Ayrıca, $\mathbf{y}_2(\phi_K) = \mathbf{y}_{2K}$ olduğu bilinmekte olup, $\mathbf{y}_1(\phi_K)$ yerine (4.33) eşitliği konularak,

$$\mathbf{Y}(\phi_K,0)\ \mathbf{y}_{10} + \mathbf{K} = \mathbf{y}_{2K} \tag{4.38}$$

elde edilir. Bu eşitlik kullanılarak ikinci bölgeye ait çözüm fonksiyonu;

$$\mathbf{y}_2(\phi_2) = \mathbf{Y}(\phi_2,\phi_K)\left[\mathbf{Y}(\phi_K,0)\,\mathbf{y}_{10} + \mathbf{K}\right]$$

$$\mathbf{y}_2(\phi_2) = \mathbf{Y}(\phi_2,\phi_K)\,\mathbf{Y}(\phi_K,0)\,\mathbf{y}_{10} + \mathbf{Y}(\phi_2,\phi_K)\,\mathbf{K} \tag{4.39}$$

olarak elde edilmektedir. Burada,

$$\mathbf{Y}(\phi_2,\phi_K)\,\mathbf{Y}(\phi_K,0) = \mathbf{Y}(\phi_2,0) \tag{4.40}$$

özelliğini kullanarak,

$$\mathbf{y}_2(\phi_2) = \mathbf{Y}(\phi_2,0)\,\mathbf{y}_{10} + \mathbf{Y}(\phi_2,\phi_K)\,\mathbf{K} \tag{4.41}$$

eşitliği elde edilir. $\mathbf{Y}(\phi_2,\phi_K)$ matrisi (4.40) özelliği yardımıyla,

$$\mathbf{Y}(\phi,\phi_0) = \mathbf{Y}^{-1}(\phi_0,0) \tag{4.42}$$

$$\mathbf{Y}(\phi_2,\phi_K) = \mathbf{Y}(\phi_2,0)\,\mathbf{Y}(0,\phi_K) \tag{4.43}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada,

$$\mathbf{Y}(0,\phi_K) = \mathbf{Y}^{-1}(\phi_K,0) \tag{4.44}$$

özelliğinden faydalanılarak,

$$\mathbf{Y}(\phi_2,\phi_K)=\mathbf{Y}(\phi_2,0)\,\mathbf{Y}^{-1}(\phi_K,0) \tag{4.45}$$

eşitliği elde edilir. Böylece $\mathbf{y}_2(\phi_2)$ çözüm fonksiyonu, bilinen değerler cinsinden,

$$\mathbf{y}_2(\phi_2)=\mathbf{Y}(\phi_2,0)\,\mathbf{y}_{10}+\mathbf{Y}(\phi_2,0)\,\mathbf{Y}^{-1}(\phi_K,0)\,\mathbf{K} \tag{4.46}$$

şeklinde ifade edilebilir. Sonuç olarak her iki bölge için çözüm fonksiyonları,

$$\mathbf{y}_1(\phi_1)=\mathbf{Y}(\phi_1,0)\,\mathbf{y}_{10}$$

$$\mathbf{y}_2(\phi_2)=\mathbf{Y}(\phi_2,0)\,\mathbf{y}_{10}+\mathbf{Y}(\phi_2,0)\,\mathbf{Y}^{-1}(\phi_K,0)\,\mathbf{K} \tag{4.47}$$

şeklinde elde edilmiş olur.

4.2.1. Asal Matrisin Tersi (Çember Eksenli Sabit Kesitli Çubuk)

Çember eksenli sabit kesitli çubuğun asal matrisinin tersi aşağıdaki şekilde elde edilmiştir,

$Y_{11}=1$, $\qquad Y_{12}=R\sin\phi$

$$Y_{13}=\frac{R}{\cos(\phi)^4+2\cos(\phi)^2\sin(\phi)^2+\sin(\phi)^4}\,(1-\cos\phi)$$

$$Y_{14}=\frac{R^2}{GJ}\left[1-\cos(\phi/2)^2-\phi\cos(\phi/2)\sin(\phi/2)+\sin(\phi/2)^2\right]-\frac{R^2}{EI_n}\left[\phi\cos(\phi/2)\sin(\phi/2)\right]$$

$$Y_{15}=\frac{R^2}{GJ}+\frac{R^2}{EI_n}\left[\frac{\phi\cos(\phi/2)^2}{2}-\frac{\phi\sin(\phi/2)^2}{2}-\cos(\phi/2)\sin(\phi/2)\right]$$

$$Y_{16}=\frac{R^3}{GJ}\left[-\phi-\frac{\phi\cos(\phi/2)^2}{2}+3\cos(\phi/2)\sin(\phi/2)+\frac{\phi\sin(\phi/2)^2}{2}\right]$$
$$+\frac{R^3}{EI_n}\left[-\frac{\phi\cos(\phi/2)^2}{2}+\cos(\phi/2)\sin(\phi/2)+\frac{\phi\sin(\phi/2)^2}{2}\right]-\frac{\phi R\,k_b}{GA}$$

$$Y_{21}=0\ ,\qquad Y_{22}=\cos\phi\,,\qquad Y_{23}=\sin\phi$$

$$Y_{24}=\frac{R}{EI_n}\left[-\frac{\phi\cos\phi}{2}-\frac{\sin\phi}{2}\right]+\frac{R}{GJ}\left[-\frac{\phi\cos\phi}{2}+\frac{\sin\phi}{2}\right]$$

$$Y_{25}=\frac{R\phi\sin\phi}{2}\left[-\frac{1}{EI_n}-\frac{1}{GJ}\right]$$

$$Y_{26}=\frac{R^2}{GJ}\left[\cos(\phi/2)^2+\phi\cos(\phi/2)\sin(\phi/2)-\sin(\phi/2)^2-1\right]$$
$$+\frac{R^2}{EI_n}\left[\phi\cos(\phi/2)\sin(\phi/2)\right]$$

$$Y_{31}=0\ ,\qquad Y_{32}=-\sin\phi\,,\qquad Y_{33}=\cos\phi$$

$$Y_{34}=\frac{R\phi\sin\phi}{2}\left[\frac{1}{EI_n}+\frac{1}{GJ}\right]$$

$$Y_{35}=\frac{R}{EI_n}\left[-\frac{\phi\cos\phi}{2}+\frac{\sin\phi}{2}\right]+\frac{R}{GJ}\left[-\frac{\phi\cos\phi}{2}-\frac{\sin\phi}{2}\right]$$

$$Y_{36}=\left[\frac{R^2}{EI_n}+\frac{R^2}{GJ}\right]\left[\frac{\phi\cos(\phi/2)^2}{2}-\frac{\phi\sin(\phi/2)^2}{2}-\cos(\phi/2)\sin(\phi/2)\right]$$

$$Y_{41}=0\ ,\quad Y_{42}=0\,,\quad Y_{43}=0\,,\quad Y_{44}=\cos\phi\,,\qquad Y_{45}=\sin\phi\,,\quad Y_{46}=-R\sin\phi$$

$$Y_{51}=0\ ,\quad Y_{52}=0\,,\quad Y_{53}=0\,,\quad Y_{54}=-\sin\phi\,,\qquad Y_{55}=\cos\phi$$

$$Y_{56}=R\,(1-\cos\phi)\left[\frac{1}{\cos(\phi)^4+2\cos(\phi)^2\sin(\phi)^2+\sin(\phi)^4}\right]$$

$$Y_{61}=0\ ,\quad Y_{62}=0\,,\quad Y_{63}=0\,,\quad Y_{64}=0\,,\quad Y_{65}=0\,,\quad Y_{66}=1 \qquad (4.48)$$

4.2.2. Asal Matrisin Tersi (Parabol Eksenli Değişken Kesitli Çubuk)

Parabol eksenli değişken kesitli çubuğun asal matrisinin tersi aşağıdaki şekilde elde edilmiştir,

$$Y_{11}=1\ ,\qquad Y_{12}=\frac{1}{4}R\left(3+\cos(2\phi)\right)\sec\phi\tan\phi\,,\qquad Y_{13}=\frac{1}{2}R\sin\phi\tan\phi$$

$$Y_{14} = \frac{1}{4EI_n GJ}\left[R^2 \begin{bmatrix} -4EI_n + GJ + 4EI_n \cos\phi - GJ \sec(\phi)^2 \\ +(2EI_n - GJ)[-\ln[\cos(\phi/2) - \sin(\phi/2)] + \ln[\cos(\phi/2) - \sin(\phi/2)]]\sin(\phi/2) \end{bmatrix}\right]$$

$$Y_{15} = \frac{1}{4EI_n GJ}\left[R^2 \begin{bmatrix} (2EI_n - GJ)\cos\phi\ [\ln[\cos(\phi/2) - \sin(\phi/2)] - \ln[\cos(\phi/2) + \sin(\phi/2)]] \\ +(-2EI_n - GJ + 4EI_n \cos\phi)\tan\phi \end{bmatrix}\right]$$

$$\begin{aligned} Y_{16} = &-[R\sec\phi^4 [7AR^2(4EI_n + GJ)[\ln[\cos(\phi/2) - \sin(\phi/2)] - \ln[\cos(\phi/2) + \sin(\phi/2)]] \\ &+ 4AR^2 \cos 2\phi(12EI_n + GJ)[\ln[\cos(\phi/2) - \sin(\phi/2)] - \ln[\cos(\phi/2) + \sin(\phi/2)]] \\ &+ AR^2 \cos 4\phi(20EI_n - 3GJ)[\ln[\cos(\phi/2) - \sin(\phi/2)] - \ln[\cos(\phi/2) + \sin(\phi/2)]] \\ &- 10AR^2 \sin\phi(4EI_n + GJ) + 64EI_n \sin 2\phi(k_b J + AR^2) + 2AR^2 \sin 3\phi(-20EI_n + 3GJ) \\ &+ 32EI_n \sin 4\phi(k_b J + AR^2)]] \Big/ 256AEI_n GJ \end{aligned}$$

$$Y_{21} = 0, \qquad Y_{22} = \cos\phi, \qquad Y_{23} = \sin\phi$$

$$Y_{24} = \frac{R}{EI_n GJ}[EI_n \cos\phi[(\ln[\cos(\phi/2) - \sin(\phi/2)] - \ln[\cos(\phi/2) + \sin(\phi/2)]) + (EI_n - GJ)\sin\phi]]$$

$$Y_{25} = \frac{1}{EI_n GJ}(-(EI_n R - GJ)(-1 + \cos\phi) + EI_n R(\ln[\cos(\phi/2) - \sin(\phi/2)] - \ln[\cos(\phi/2) + \sin(\phi/2)])\sin\phi)$$

$$Y_{26} = \frac{R^2 \sec\phi^2}{4EI_n GJ}\begin{pmatrix} EI_n + GJ - 4EI_n \cos\phi + (3EI_n - GJ)\cos 2\phi + \\ 2EI_n(-\ln[\cos(\phi/2) - \sin(\phi/2)] + \ln[\cos(\phi/2) + \sin(\phi/2)])\sin 2\phi \end{pmatrix}$$

$$Y_{31} = 0, \qquad Y_{32} = -\sin\phi, \qquad Y_{23} = \cos\phi$$

$$Y_{34} = \frac{1}{EI_n GJ}(-R(EI_n - GJ)(-1 + \cos\phi) + RGJ(-\ln[\cos(\phi/2) - \sin(\phi/2)] + \ln[\cos(\phi/2) + \sin(\phi/2)])\sin\phi)$$

$$Y_{35} = \frac{1}{EI_n GJ}(R(-EI_n \sin\phi + GJ(\cos\phi(-\ln[\cos(\phi/2) - \sin(\phi/2)] - \ln[\cos(\phi/2) + \sin(\phi/2)]) + \sin\phi))\ ]$$

$$Y_{36} = \frac{1}{8EI_n GJ}\begin{pmatrix} -R^2 \sec\phi^2((2EI_n + GJ + \cos 2\phi(2EI_n - 3GJ))\begin{pmatrix} \ln[\cos(\phi/2) - \sin(\phi/2)] \\ -\ln[\cos(\phi/2) + \sin(\phi/2)] \end{pmatrix} \\ +2(-2EI_n + 3GJ + 4\cos\phi(EI_n - GJ)\sin\phi) \end{pmatrix}$$

$$Y_{41} = 0, \quad Y_{42} = 0, \quad Y_{43} = 0, \quad Y_{44} = \cos\phi, \quad Y_{45} = \sin\phi, \quad Y_{46} = -R\tan\phi$$

$$Y_{51} = 0, \quad Y_{52} = 0, \quad Y_{53} = 0, \quad Y_{54} = -\sin\phi, \quad Y_{55} = \cos\phi, \quad Y_{56} = \frac{1}{2}R\tan\phi^2$$

$$Y_{61} = 0, \quad Y_{62} = 0, \quad Y_{63} = 0, \quad Y_{64} = 0, \quad Y_{65} = 0, \quad Y_{66} = 1 \qquad (4.49)$$

4.3. Sonlu Eleman Formülasyonu

Üzerine tekil yüklerin etkidiği bir çubuğun statik problemlerine ait genel çözüm,

$$\mathbf{y}(\phi) = \mathbf{Y}(\phi, \phi_0)\,\mathbf{y}_0 \tag{4.50}$$

şeklinde elde edilmiştir. Bu denklem açık olarak,

$$\begin{bmatrix} \nu \\ \Omega_n \\ \Omega_t \\ M_n \\ M_t \\ F_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11} & \mathbf{Y}_{12} & \mathbf{Y}_{13} & \mathbf{Y}_{14} & \mathbf{Y}_{15} & \mathbf{Y}_{16} \\ \mathbf{Y}_{21} & \mathbf{Y}_{22} & \mathbf{Y}_{23} & \mathbf{Y}_{24} & \mathbf{Y}_{25} & \mathbf{Y}_{26} \\ \mathbf{Y}_{31} & \mathbf{Y}_{32} & \mathbf{Y}_{33} & \mathbf{Y}_{34} & \mathbf{Y}_{35} & \mathbf{Y}_{36} \\ \mathbf{Y}_{41} & \mathbf{Y}_{42} & \mathbf{Y}_{43} & \mathbf{Y}_{44} & \mathbf{Y}_{45} & \mathbf{Y}_{46} \\ \mathbf{Y}_{51} & \mathbf{Y}_{52} & \mathbf{Y}_{53} & \mathbf{Y}_{54} & \mathbf{Y}_{55} & \mathbf{Y}_{56} \\ \mathbf{Y}_{61} & \mathbf{Y}_{62} & \mathbf{Y}_{63} & \mathbf{Y}_{64} & \mathbf{Y}_{65} & \mathbf{Y}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_0 \\ \Omega_{n0} \\ \Omega_{t0} \\ M_{n0} \\ M_{t0} \\ F_{b0} \end{bmatrix} \tag{4.51}$$

şeklinde ifade edilmiştir.

Bu çözümden faydalanılarak, eğri eksenli bir çubuk eleman formülasyonu ifade edilebilir. Söz konusu çözüm, değişken eğrilik yarıçaplı ve değişken kesitli çubuklar için verilmiştir. Dolayısıyla, değişken eğrilik yarıçapı ve değişken kesidi olan bir çubuk sonlu elemanı elde edilecektir. Yapılan literatür taraması, değişken eğrilik ve kesite sahip bir çubuk sonlu elemanının bulunmadığını göstermiştir.

Bu eşitliği, yerdeğiştirme

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \nu \\ \Omega_n \\ \Omega_t \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} \nu_0 \\ \Omega_{n0} \\ \Omega_{t0} \end{bmatrix} \tag{4.52}$$

ve kuvvet bileşenlerinden oluşan

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} M_n \\ M_t \\ F_b \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F}_0 = \begin{bmatrix} M_{n0} \\ M_{t0} \\ F_{b0} \end{bmatrix} \tag{4.53}$$

vektörler ve,

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{Y}_{11} & \mathbf{Y}_{12} & \mathbf{Y}_{13}\\ \mathbf{Y}_{21} & \mathbf{Y}_{22} & \mathbf{Y}_{23}\\ \mathbf{Y}_{31} & \mathbf{Y}_{32} & \mathbf{Y}_{33}\end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{Y}_{14} & \mathbf{Y}_{15} & \mathbf{Y}_{16}\\ \mathbf{Y}_{24} & \mathbf{Y}_{25} & \mathbf{Y}_{26}\\ \mathbf{Y}_{34} & \mathbf{Y}_{35} & \mathbf{Y}_{36}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}\mathbf{Y}_{41} & \mathbf{Y}_{42} & \mathbf{Y}_{43}\\ \mathbf{Y}_{51} & \mathbf{Y}_{52} & \mathbf{Y}_{53}\\ \mathbf{Y}_{61} & \mathbf{Y}_{62} & \mathbf{Y}_{63}\end{bmatrix} \qquad \mathbf{D}=\begin{bmatrix}\mathbf{Y}_{44} & \mathbf{Y}_{45} & \mathbf{Y}_{46}\\ \mathbf{Y}_{54} & \mathbf{Y}_{55} & \mathbf{Y}_{56}\\ \mathbf{Y}_{64} & \mathbf{Y}_{65} & \mathbf{Y}_{66}\end{bmatrix} \tag{4.54}$$

matrisleri yardımıyla,

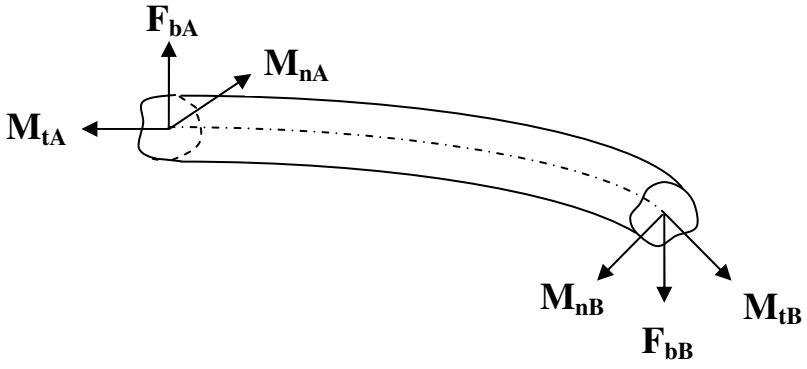
$$\begin{bmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{F}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{X}_0\\ \mathbf{F}_0\end{bmatrix} \tag{4.55}$$

şeklinde yazılabilir.

Bu aşamada, dikkat edilmesi gereken en önemli konu, çubuklarda işaret anlaşmasıdır. Burada verilen teoride kullanılan işaret anlaşması Şekil 4.2'de görülmektedir

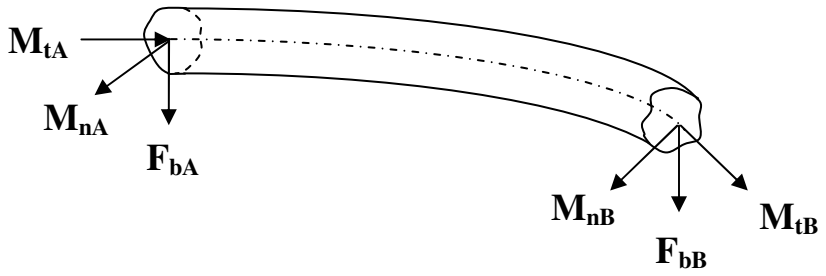
Yerdeğiştirme büyüklüklerinin pozitif yönleri, hem analitik formülasyonda hem de matris yöntemlerde kullanılan pozitif yön anlaşmalarında da aynıdır.

Çubukların analitik formülasyonundan elde edilen çözüm kullanıldığı için, A ucuna ait yerdeğiştirme ve kuvvet büyüklüklerini, bu çubuğa ait çözümden elde edilen **Y** asal matrisi ile çarparak, B ucuna ait büyüklükler elde edilmektedir.



Şekil 4.2. Çubukların analitik formülasyonunda kullanılan pozitif yön anlaşması.

Sonlu eleman analizinde ise, farklı bir işaret anlaşması kullanılmaktadır. Genellikle, çubukların matris yöntemlerle analizinde kullanılan bu işaret anlaşması Şekil 4.3'de verilmektedir. Burada, Şekil 4.1'de verilen A ucundaki tüm kuvvet ve moment bileşenlerinin yönleri değişirken, B ucundakiler aynı kalmaktadır. Diğer bir deyişle, çubuk ekseni üzerinde hep aynı yönlerde etkiyen büyüklükler esas alınmaktadır.



Şekil 4.3. Çubukların matris yöntemlerle analizinde kullanılan pozitif yön anlaşması.

Bu durumda,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_B \\ \mathbf{F}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_A \\ \mathbf{F}_A \end{bmatrix} \tag{4.56}$$

eşitliğinde, sonlu eleman formülasyonu için kullanılan işaret anlaşması uyarınca,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_B \\ \mathbf{F}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_A \\ -\mathbf{F}_A \end{bmatrix} \tag{4.57}$$

olması gerektiği açıktır. Burada, F_A vektörünün önündeki negatif işaret, matrise aktarılabilir. Böylece,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_B \\ \mathbf{F}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & -\mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_A \\ \mathbf{F}_A \end{bmatrix} \tag{4.58}$$

ifadesi elde edilir. Sonlu eleman formülasyonu için,

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\,\mathbf{X} \tag{4.59}$$

eşitliği kullanılmaktadır. Burada, **F**, kuvvet vektörü, **K**, rijitlik matrisi, **X** ise yerdeğiştirme vektörüdür.

(4.58) denklemi açılırsa,

$$\mathbf{X}_B = \mathbf{A}\,\mathbf{X}_A - \mathbf{B}\,\mathbf{F}_A$$

$$\mathbf{F}_B = \mathbf{C}\,\mathbf{X}_A - \mathbf{D}\,\mathbf{F}_A \tag{4.60}$$

elde edilir. Denklemler düzenlendiğinde,

$$\mathbf{B}\,\mathbf{F}_A = \mathbf{A}\,\mathbf{X}_A - \mathbf{X}_B$$

$$\mathbf{D}\,\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B = \mathbf{C}\,\mathbf{X}_A \tag{4.61}$$

ifadeleri elde edilir. Denklemler matris ifadelerle düzenlendiğinde,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{O} \\ \mathbf{D} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_A \\ \mathbf{F}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{C} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_A \\ \mathbf{X}_B \end{bmatrix} \tag{4.62}$$

eşitliği elde edilir. Böylece;

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_A \\ \mathbf{F}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{O} \\ \mathbf{D} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{C} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_A \\ \mathbf{X}_B \end{bmatrix} \tag{4.63}$$

denklemine ulaşılır. Burada, eğri eksenli çubuk elemana ait rijitlik matrisi,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{O} \\ \mathbf{D} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{C} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \tag{4. 64}$$

olarak elde edilir. Böylece, her bir eleman için $\mathbf{F}^e = \mathbf{K}^e\,\mathbf{X}^e$ eşitliği oluşturulur.

Bir sonlu eleman bilgisayar programında, esas amaç, elde edilen eleman rijitlik matrisi yardımıyla, sisteme ait global rijitlik matrisinin elde edilmesidir. Elemanların sınırlarında, etki tepki prensibi gereğince, kuvvetler birbirine eşit olacaktır.

1 no'lu elemanda,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{A1} \\ \mathbf{F}_{B1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1^1 & \mathbf{K}_2^1 \\ \mathbf{K}_3^1 & \mathbf{K}_4^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_A \\ \mathbf{X}_B \end{bmatrix} \tag{4.65}$$

2 no'lu elemanda,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{B2} \\ \mathbf{F}_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1^2 & \mathbf{K}_2^2 \\ \mathbf{K}_3^2 & \mathbf{K}_4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_B \\ \mathbf{X}_C \end{bmatrix} \tag{4.66}$$

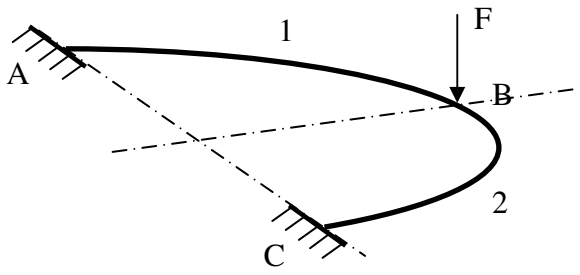
şeklinde olacaktır. Bu şekilde, n adet eleman kullanılan bir sistem düşünüldüğünde kuvvet dengesi gereğince,

$$\mathbf{F}_{B1} = -F_{B2} \qquad \mathbf{F}_{C2} = -F_{C3} \,, ... \tag{4.67}$$

eşitlikleri elde edilecektir. Böylece, global rijitlik matrisi oluşturulduğunda,

$$\mathbf{K}^g = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1^1 & \mathbf{K}_2^1 & 0 & 0 & \\ \mathbf{K}_3^1 & \mathbf{K}_4^1 + \mathbf{K}_1^2 & \mathbf{K}_2^2 & 0 & \\ 0 & \mathbf{K}_3^2 & \mathbf{K}_4^2 + \mathbf{K}_1^3 & \mathbf{K}_2^3 & \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_3^3 & \mathbf{K}_4^3 + \mathbf{K}_1^4 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \tag{4.68}$$

şeklinde blok diagonal bir matris elde edilecektir. Sisteme etkiyen dış yükler vektörü ise, nodlara etkiyen dış yüklerin oluşturduğu bir vektör olarak ifade edilecektir.



Şekil 4.4. Her iki ucundan ankastre bağlı, eğri eksenli çubuk.

Örnek olarak Şekil 4.4'de verilen eğri eksenli çubuk gözönüne alınsın. Bu problem, iki çubuk sonlu eleman kullanılarak modellensin. Birici eleman AB elemanı, ikinci eleman ise BC elemanıdır.

Global rijitlik matrisi;

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1^1 & \mathbf{K}_2^1 & 0 \\ \mathbf{K}_3^1 & \mathbf{K}_4^1 + \mathbf{K}_1^2 & \mathbf{K}_2^2 \\ 0 & \mathbf{K}_3^2 & \mathbf{K}_4^2 \end{bmatrix} \tag{4.69}$$

şeklinde olacaktır.

Dış yükler vektörü ise,

$$\mathbf{F}^T = [\, F_{bA}, M_{nA}, M_{tA}, F_{bB}, M_{bB}, M_{tB}, F_{bC}, M_{bC}, M_{tC} \,] \tag{4.70}$$

şeklinde olacaktır. Verilen örnek için sadece B noktasına etkiyen kuvvet, $\mathbf{F}_{bB} = \mathbf{F}_b$ olacak ve diğer tüm dış kuvvet büyüklükleri sıfır olacaktır. Bu durumda, dış yükler vektörü;

$$\mathbf{F}^T = [\, 0,\ 0,\ 0,\ F_b,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0 \,] \tag{4.71}$$

şeklinde elde edilecektir.

Böylece, verilen örnek için, düğüm noktalarındaki yerdeğiştirme büyüklükleri;

$$\mathbf{K}\,\mathbf{X} = \mathbf{F} \tag{4.72}$$

denklem takımından, **X** vektörünün çözülmesi ile bulunabilecektir.

4.4. Yayılı Yüklerin Etkidiği Çubukların Hesabı

Statik problemin ikinci aşamasında, yayılı yükleri taşıyan çubuklara ait çözüm elde edilmiştir. Yayılı yükleri taşıyan çubuklar için elde edilen çözüm için de yine başlangıç değerleri yöntemi kullanılmıştır.

Eğri eksenli çubukların düzlem dışı eğilmelerini veren birinci mertebeden, lineer diferansiyel (4.1) denklem takımında, daha önceden de belirtildiği üzere; $\mathbf{y}(\phi)$, 6 elemanlı değişkenler vektörünü, $\mathbf{A}(\phi)$, 6×6 elemanlı katsayılar matrisini ve $\mathbf{f}(\phi)$, 6 elemanlı yayılı dış yüklerin bileşke vektörünü göstermektedir. Çubuk üzerinde

düzgün yayılı bir kuvvet var olduğundan, böyle bir denklemin çözümü, $\mathbf{y}(\phi_0) = \mathbf{y}_0$ başlangıç değeri bilinmek üzere (4.2) denklemi ile;

$$\mathbf{y}(\phi) = \mathbf{Y}(\phi, \phi_o)\,\mathbf{y}_o + \mathbf{Y}(\phi, \phi_o) \int_{\phi_o}^{\phi} \mathbf{Y}^{-1}(\xi, \phi_o)\,\mathbf{f}(\xi)\,d\xi \qquad (4.73)$$

ifade edilmektedir. Burada, $\mathbf{Y}(\phi, \phi_o)$, ϕ_0 referans koordinatındaki asal matristir. $\mathbf{Y}^{-1}(\phi, \phi_o)$ ise bu asal matrisin tersidir. (4.73) eşitliğindeki ikinci terim dört katlı integral gerektiren ifadeler içermektedir. Çok katlı integralin hesaplanmasındaki güçlüğün yanısıra, çok katlı integral ifadelerinden oluşan asal matrisin tersi hesaplanarak dış yükler vektörü ile çarpıldığında tekrar integre edilme zorunluluğu büyük bir hesaplama yükü getirmektedir. Ayrıca, asal matrisin her durum için analitik olarak hesaplanması da mümkün olamamaktadır. Asal matrisin ve tersinin analitik olarak elde edilmesinin mümkün olmadığı örnekler için, sayısal integrasyon yöntemlerinin kullanıldığı bilgisayar programları yazılmıştır.

4.5. Prizmatik Çubuklarda Çarpılma Etkisi

Bilindiği gibi, Coulomb teorisi; burulma zorlaması etkisi altındaki dairesel kesitli çubukların kesin çözümünü vermektedir. Burada, şekil değiştirme sonrası, kesitin düzlem kaldığı ve çarpılma-deformasyon olmaksızın ekseni etrafında döndüğü kabul edilir. Bir başka deyişle, kesitin herhangi bir noktasındaki kayma gerilmesi kesit yarıçapına diktir. O halde; burulma sabiti, kesitin polar eylemsizlik momenti olarak alınır.

Bu teori, kesiti dairesel olmayan prizmatik çubuklara Navier tarafından uygulanmış ve maksimum kayma gerilmesinin kesitin sentroidine en uzak noktada meydana geldiği sonucuna varılmıştır.

Prizmatik çubukların burulma probleminin çözümü, Saint-Venant tarafından verilmiştir. Burada, kesit dönmesi ve kesit çarpılması dikkate alınarak, burulma eylemsizlik momenti aşağıdaki gibi verilmektedir ;

$$J = \iint_{alan} \left(x^2 + y^2 + x\frac{\partial \psi}{\partial y} - y\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dA \tag{4.74}$$

Kesitte çarpılma olmaması durumunda, prizmatik çubukların burulma eylemsizlik momentleri;

$$J = \frac{WH^3}{3}\left[1 - \frac{192H}{\pi^5 W} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^5} \tanh \frac{\pi(2n-1)W}{2H} \right] \qquad W \geq H \tag{4.75}$$

Yaklaşık bağıntı aşağıdaki gibi verilmektedir ;

$$J = \frac{WH^3}{3}\left[1 - 0.63\frac{H}{W}\left(1 - \frac{H^4}{12W^4} \right) \right] \qquad W \geq H \tag{4.76}$$

5. EĞRİ EKSENLİ DÜZLEMSEL ÇUBUKLARIN DÜZLEM DIŞI SERBEST TİTREŞİMLERİ

5.1. Çember Eksenli Sabit Kesitli Çubukların Doğal Frekanslarının Hesabı

Eğri eksenli çubukların titreşimi konusu, mühendislik çalışmalarında önemli bir yer tutmaktadır. Eğri eksenli dairesel sabit kesitli düzlem çubukların düzlem dışı serbest titreşimleri, önceki bölümlerde de belirtildiği üzere, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri gözönüne alınarak incelenmiştir. Diferansiyel denklem takımının kesin çözümü, başlangıç değerleri metodu kullanılarak elde edilmiştir. Eğri eksenli çubukların titreşim problemi diğer birçok çalışmada da ele alınmış ve buna ilişkin sonuçlar tablolar halinde verilmiştir.

Eksen eğrisinin normal ve binormal doğrultularının, kesitin asal doğrultularıyla çakıştığı durumu belirleyen (3.29)'da verilen denklem takımının homojen şekli;

$$\frac{dv}{d\phi} = -R\Omega_n + \frac{R}{GA/k_b} F_b$$

$$\frac{d\Omega_n}{d\phi} = -\Omega_t + \frac{R}{EI_n} M_n$$

$$\frac{d\Omega_t}{d\phi} = \Omega_n + \frac{R}{GJ} M_t$$

$$\frac{dM_n}{d\phi} = -M_t + RF_b - R\mu \frac{I_n}{A} \omega^2 \Omega_n$$

$$\frac{dM_t}{d\phi} = M_n - R\mu \frac{I_p}{A} \omega^2 \Omega_t$$

$$\frac{dF_b}{d\phi} = -R\mu\omega^2 v \qquad (5.1)$$

şeklinde elde edilebilir. Burada; v, binormal yerdeğiştirme, ϕ, yay açıklığı, Ω_n , Ω_t, normal ve teğetsel eksen üzerindeki dönme açıları, R şekil değiştirmemiş çubuğun eksen eğrisinin eğrilik yarıçapı, E, elastiklik modülü, G, kayma modülü, F_b, tekil binormal iç kuvvet, M_n ve M_t, normal ve teğetsel eksen üzerindeki iç momentler, p_b, yayılı dış yük, m_n ve m_t, normal ve teğetsel eksen üzerindeki yayılı dış momentler, μ, çubuğun birim boyunun kütlesi, I_n ve I_p, alan eylemsizlik momentleri ve ω, açısal frekans şeklinde tanımlanabilir.

Eğri eksenli kirişin, kendi düzlemine dik doğrultudaki (düzlem-dışı) titreşimlerine ait (3.29) denklemleri, birinci dereceden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem takımıdır ve denklemler, (4.3) denklemi ile;

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\phi} = \mathbf{A}(\phi)\mathbf{y}(\phi)$$

şeklinde, matrisel diferansiyel denklem takımı şeklinde ifade edilebilir. Burada, $\mathrm{y}(\phi)$ 6 elemanlı değişkenler vektörünü ve $\mathrm{A}(\phi)$ 6×6 elemanlı katsayılar matrisini ifade etmek üzere ;

$$\mathbf{y}(\phi) = \begin{bmatrix} v \\ \Omega_n \\ \Omega_t \\ M_n \\ M_t \\ F_b \end{bmatrix} \quad \text{ve,}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -R & 0 & 0 & 0 & Rk_b/GA \\ 0 & 0 & -1 & R/EI_n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & R/GJ & 0 \\ 0 & -R\mu\omega^2 \dfrac{I_n}{A} & 0 & 0 & -1 & R \\ 0 & 0 & -R\mu\omega^2 \dfrac{I_p}{A} & 1 & 0 & 0 \\ -R\mu\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

şeklinde tanımlanır.

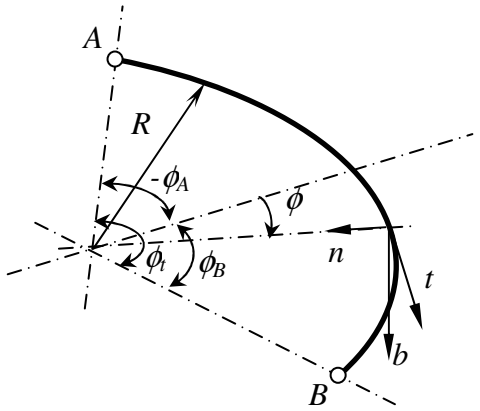
Diferansiyel denklem takımının kesin çözümü, sadece **A** katsayılar matrisinin tüm elemanlarının sabit sayılar olması durumunda mevcuttur. Bu durum; sabit kesitli çember eksenli çubukları ifade eder. Yukarıdaki denklemler, matrisel diferansiyel denklem şeklinde aşağıdaki gibi ifade edilebilir;

$$d\mathbf{y}(\phi)/d\phi = \mathbf{A}\mathbf{y}(\phi)$$

Denklem takımının çözümü aşağıdaki denklem yardımıyla bulunabilir;

$$\mathbf{y}(\phi) = e^{\mathbf{A}\phi}\mathbf{y_0} \tag{5.3}$$

Burada, $\mathbf{y}(\phi_0)$, bilinen $\phi = \phi_0$ referans kordinatındaki başlangıç değerleri vektörünü ifade etmektedir. $e^{\mathbf{A}\phi}$ terimi; Tüfekçi ve Arpacı [50] tarafından verilen yöntemle ifade edilebilir. Asal matrisin 6 elemanı, A ve B uçlarındaki sınır şartları kullanılarak elde edilebilir (Şekil 5.1).



Şekil 5.1. Eğri eksenli kiriş geometrisi ve koordinat sistemi.

Sınır şartlarından elde edilen 6 denklem homojen denklem takımı oluşturduğundan, sistemin sıfırdan farklı tek bir çözümünün olması katsayılar matrisinin determinantının sıfıra eşit olması durumunda mevcuttur.

Ankastre mesnet ve serbest uç için sınır şartları aşağıdaki gibidir;

Ankastre mesnet : $v(\phi) = 0$, $\Omega_n(\phi) = 0$, $\Omega_t(\phi) = 0$

Serbest uç : $F_b(\phi) = 0$, $M_n(\phi) = 0$, $M_t(\phi) = 0$

Yukarıda elde edilen **A** katsayılar matrisi, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerinin gözönüne alınması durumunda kullanılan matristir. Etkiler ayrı ayrı ele alınarak da çözüm yapılıp, doğal frekansları elde edilebilir.

5.1.1. Problemin Tanımı

Eğri eksenli dairesel sabit kesitli düzlem çubukların düzlem dışı serbest titreşimlerini ifade eden diferansiyel denklem takımının kesin çözümü; kayma deformasyonu ve hem eğilme hem de burulmadan kaynaklanan dönme eylemsizliği etkileri dikkate alınarak elde edilmiş, kesit çarpılması ihmal edilmiştir. Diferansiyel denklem takımının çözümünde başlangıç değerleri yöntemi kullanılmıştır. Aynı çözüm yöntemi, Tüfekçi and Arpacı [50] tarafından, eğri eksenli dairesel sabit kesitli düzlem çubukların düzlem içi serbest titreşimlerinin hesabında kullanılmıştır.

Burada, sabit kesitli çember eksenli çubukların düzlem-dışı serbest titreşimlerinde frekanslar hesaplanırken gözönüne alınan değişken büyüklükler, kullanılan tanımlar ve hesaplarda kullanımı olan, kayma deformasyonu ve hem eğilme hem de burulma dönme eylemsizliği etkilerine yer verilmiştir. Frekanslar, ankastre-ankastre, ankastre-serbest ve serbest-serbest olmak üzere, üç farklı mesnetleme durumu için elde edilmektedir.

a). Tüm etkiler : Bu kabulde Euler-Bernoulli çubuk teorisinde ihmal edilen bütün etkiler, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri gözönüne alınarak frekans değerleri hesaplanır.

b). Etkiler ihmal : Euler-Bernoulli çubuk teorisine uygun olarak çubuğa etkiyen kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri ihmal edilerek frekans değerleri hesaplanır.

c). Kayma deformasyonu : Sadece kayma deformasyonu etkisi gözönüne alınarak frekans değerleri hesaplanır.

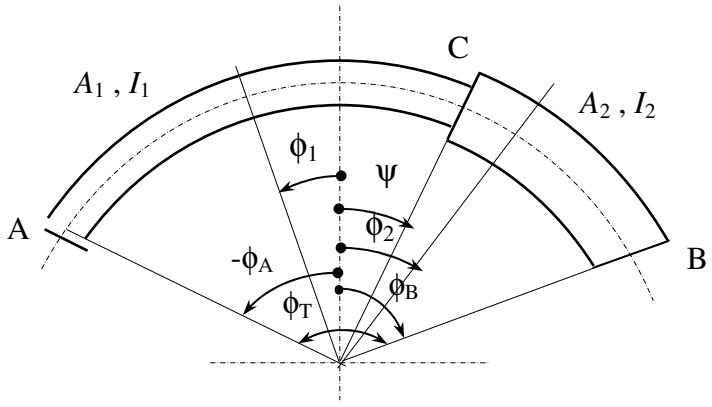
d). Dönme eylemsizliği : Sadece eğilme nedeni ile ortaya çıkan dönme eylemsizliği etkisi gözönüne alınarak frekans değerleri hesaplanır.

e). Dönme eylemsizliği : Sadece burulmadan ortaya çıkan dönme eylemsizliği etkisi gözönüne alınarak frekans değerleri hesaplanır.

Eğri eksenli çubukların düzlem içi titreşimlerinde, çubuk eğriliğine etki eden mod geçişi olayı, bazı araştırmacılar tarafından ele alınmıştır. Bu durum, eğri eksenli çubukların düzlem dışı titreşimleri sırasında da meydana gelmektedir. Mod geçişi, frekanslara ait modlardaki keskin artışlarda ortaya çıkmaktadır. Modal frekanslardaki söz konusu bu artış, çubuğun mod şeklini önemli ölçüde değiştirmektedir. Mod geçişi konusunda, günümüzde kayda değer bir çalışma da bulunmamaktadır. Burada, eğri eksenli sabit kesitli çubukların düzlem dışı titreşimlerinde, mod geçişi olayı da, diferansiyel denklem takımının kesin çözümü yardımı ile incelenmiştir.

5.2. Kesiti Kademeli Değişen Çember Eksenli Çubuklar

Bu bölümde; kesiti kademeli değişen, tek kademeli çember eksenli çubuğun kendi düzlemine dik doğrultudaki serbest titreşimleri incelenmiştir. Kesiti kademeli değişen çember eksenli çubuk üzerindeki sabit kesit alanına sahip her bölge, düzlemsel eğri eksenli çubuğun kendi düzlemindeki titreşimlerini veren ifadeler (3.29) ve değinilen çözüm yolu kullanılarak incelenmektedir. Yapılan hesaplarda, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri de gözönüne alınmıştır.



Şekil 5.2. Tek kademeli çember eksenli çubuk.

Sabit kesit alanına sahip iki farklı bölgeden oluşan, tek kademeli çember eksenli çubukta, hareket denklemleri, iki bölge için ayrı ayrı ele alınarak çözüm yapılır.

Çubuk üzerindeki sabit kesit alanına sahip bölgeler;

Birinci Bölge : $-\phi_A \le \phi_1 \le \psi,$

İkinci Bölge: $\psi \le \phi_2 \le \phi_B$

şeklinde sınırlandırılır. Birinci sabit kesit alanına sahip bölge için,

$$\frac{dv_1}{d\phi_1} = -R\Omega_{n1} + \frac{R}{GA_1 / k_b} F_{b1}$$

$$\frac{d\Omega_{n1}}{d\phi_1} = -\Omega_{t1} + \frac{R}{EI_{n1}} M_{n1}$$

$$\frac{d\Omega_{t1}}{d\phi_1} = \Omega_{n1} + \frac{R}{GJ_1} M_{t1}$$

$$\frac{dM_{n1}}{d\phi_1} = -M_{t1} + RF_{b1} - R\mu_1 \frac{I_{n1}}{A_1} \omega^2 \Omega_{n1}$$

$$\frac{dM_{t1}}{d\phi_1} = M_{n1} - R\mu_1 \frac{I_{p1}}{A_1} \omega^2 \Omega_{t1}$$

$$\frac{dF_{b1}}{d\phi_1} = -R\mu_1 \omega^2 v_1 \qquad (5.4)$$

İkinci sabit kesit alanına sahip bölge için,

$$\frac{dv_2}{d\phi_2} = -R\Omega_{n2} + \frac{R}{GA_2 / k_b} F_{b2}$$

$$\frac{d\Omega_{n2}}{d\phi_2} = -\Omega_{t2} + \frac{R}{EI_{n2}} M_{n2}$$

$$\frac{d\Omega_{t2}}{d\phi_2} = \Omega_{n2} + \frac{R}{GJ_2} M_{t2}$$

$$\frac{dM_{n2}}{d\phi_2} = -M_{t2} + RF_{b2} - R\mu_2 \frac{I_{n2}}{A_2} \omega^2 \Omega_{n2}$$

$$\frac{dM_{t2}}{d\phi_2} = M_{n2} - R\mu_2 \frac{I_{p2}}{A_2} \omega^2 \Omega_{t2}$$

$$\frac{dF_{b2}}{d\phi_2} = -R\mu_2 \omega^2 v_2 \qquad (5.5)$$

diferansiyel denge denklemleri yazılabilir. Burada; kullanılan 1 ve 2 indisleri, kirişin bölgelerini temsil etmektedir. Diferansiyel denklem takımları, Bölüm 5.1'de belirtildiği gibi, matrisel diferansiyel denklem takımları şeklinde ifade edildiğinde;

$$\frac{d\mathbf{y_1}}{d\phi_1} = \mathbf{A}_1(\phi_1)\mathbf{y}_1(\phi_1) \qquad \text{ve} \qquad \frac{d\mathbf{y_2}}{d\phi_2} = \mathbf{A}_2(\phi_2)\mathbf{y}_2(\phi_2) \tag{5.6}$$

elde edilir. Burada, birinci sabit kesit alanına sahip bölge için,

$$\mathbf{y_1}(\phi) = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \Omega_{n1} \\ \Omega_{t1} \\ M_{n1} \\ M_{t1} \\ F_{b1} \end{bmatrix} \quad \text{ve,}$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -R & 0 & 0 & 0 & Rk_b/GA_1 \\ 0 & 0 & -1 & R/EI_{n1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & R/GJ_1 & 0 \\ 0 & -R\mu_1\omega^2 \dfrac{I_{n1}}{A_1} & 0 & 0 & -1 & R \\ 0 & 0 & -R\mu_1\omega^2 \dfrac{I_{p1}}{A_1} & 1 & 0 & 0 \\ -R\mu_1\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

ikinci sabit kesit alanına sahip bölge için,

$$\mathbf{y_2}(\phi) = \begin{bmatrix} \nu_2 \\ \Omega_{n2} \\ \Omega_{t2} \\ M_{n2} \\ M_{t2} \\ F_{b2} \end{bmatrix} \quad \text{ve,}$$

$$\mathbf{A_2}=\begin{bmatrix} 0 & -R & 0 & 0 & 0 & Rk_b/GA_2 \\ 0 & 0 & -1 & R/EI_{n2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & R/GJ_2 & 0 \\ 0 & -R\mu_2\omega^2\dfrac{I_{n2}}{A_2} & 0 & 0 & -1 & R \\ 0 & 0 & -R\mu_2\omega^2\dfrac{I_{p2}}{A_2} & 1 & 0 & 0 \\ -R\mu_2\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

şeklinde tanımlanabilir. Elde edilen A_1 ve A_2 matrisleri, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerinin hesaba katıldığı durumu ifade etmektedir. Sözü edilen etkiler, ayrı ayrı ele alınarak da katsayılar matrisleri oluşturulabilir.

Kinematik ve kinetik süreklilik şartları :

(5.6) eşitliğinin, tek kademeli çember eksenli çubuk için çözümü, $\phi=\phi_{01}$ ve $\phi=\phi_{02}$ referans koordinatlarındaki başlangıç değerleri vektörleri $\mathbf{y_1}(\phi_{01})$ ve $\mathbf{y_2}(\phi_{02})$ 'nin bilinmesi ile elde edilir.

$$\mathbf{y}_1(\phi_1)=e^{\mathbf{A}_1\phi_1}\mathbf{y}_1(\phi_{01}) \qquad \mathbf{y}_2(\phi_2)=e^{\mathbf{A}_2\phi_2}\mathbf{y}_2(\phi_{02}) \qquad (5.9)$$

Başlangıç değerleri vektörlerinin 12 elemanı, A ve B uçlarındaki sınır şartları, $\phi_1=\psi$ ve $\phi_2=\psi$ koordinatlarındaki süreklilik ve denge şartlarından elde edilen 12 denklem kullanılarak bulunabilir. Farklı mesnetleme şekilleri için sınır şartları bu bölümde verilmişti. Şekil 5.2'deki çubuğun A ucu için, farklı mesnetleme durumlarını ifade eden aşağıdaki sınır şartları yazılabilir;

Ankastre mesnet : $\nu(-\phi_A)=0$; $\Omega_n(-\phi_A)=0$; $\Omega_t(-\phi_A)=0$

Serbest uç : $M_t(-\phi_A)=0$; $M_n(-\phi_A)=0$; $F_b(-\phi_A)=0$

Süreklilik şartları ise aşağıda şekilde ifade edilir;

$$\begin{aligned} \nu_1(\psi) &= \nu_2(\psi) & \Omega_{n1}(\psi) &= \Omega_{n2}(\psi) \\ \Omega_{t1}(\psi) &= \Omega_{t2}(\psi) & M_{n1}(\psi) &= M_{n2}(\psi) \\ M_{t1}(\psi) &= M_{t2}(\psi) & F_{b1}(\psi) &= F_{b2}(\psi) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Matrisel formda gösterimi;

$$\mathbf{y_1}(\psi) = \mathbf{y}_2(\psi) \qquad \text{veya} \qquad e^{\mathbf{A_1}\psi}\mathbf{y_1}(\phi_{01}) = e^{\mathbf{A_2}\psi}\mathbf{y}_2(\phi_{02}) \tag{5.11}$$

şeklindedir. Sınır şartlarından elde edilen 6 eşitlik ve süreklilik şartlarından elde edilen 6 eşitlik, aşağıda, (5.12) eşitliğinde gösterildiği gibi matris formunda yazılabilir;

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X1} & \mathbf{0} \\ e^{A_1\psi} & -e^{A_2\psi} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X2} \end{bmatrix}_{12\times 12} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{01} \\ \mathbf{y}_{02} \end{bmatrix}_{12\times 1} = [0]_{12\times 1} \tag{5.12}$$

Burada X1, 3×6 boyutunda eğri eksenli çubuğun A ucundaki sınır şartlarından elde edilen matris; X2 ise 3×6 boyutunda B ucundaki sınır şartlarından elde edilen matristir. 0, 3×6 boyutunda sıfır matrisidir. $\mathbf{y_{01}} = \mathbf{y_1}(\phi_{01})$ ve $\mathbf{y_{02}} = \mathbf{y_{02}}(\phi_{02})$ olarak tanımlanırlar. Elde edilen 12 eşitlik, homojen denklem takımı oluşturduklarından, $\mathbf{y_{01}}$ ve $\mathbf{y_{02}}$'nin sıfırdan farklı çözümleri ancak katsayılar matrisinin determinantının sıfıra eşit olması durumunda mevcuttur. Determinant ifadesi, ω ile simgelenen doğal frekansa bağlı bir ifadedir. Böylece doğal frekanslar elde edilir. Aynı çözüm yolu diğer kabuller için de uygulanabilir.

5.2.1. Problemin Tanımı

Eğri eksenli çubukların titreşimi konusunda yapılan araştırmalar, değişken kesitli eğri eksenli düzlemsel çubukların doğal frekanslarının hesabında, sonlu eleman, diferansiyel kuadratik ve Galerkin, Rayleigh-Ritz yöntemi gibi yaklaşık yöntemler kullanıldığını göstermektedir. Yaklaşık sonuçlar, bazı özel durumlar ve sınır şartları için elde edilmiştir. Çalışmaların bir çoğunda, eksen uzaması, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini ihmal eden, Euler-Bernoulli çubuk teorisi esas alınmıştır. Bilgisayar kullanımı ve ticari yazılımların gelişmesi ile birlikte de, özellikle karmaşık problemlerin çözümünde, sonlu eleman yöntemi uygulamalarının yaygınlaştığı görülmektedir.

Burada, kesiti kademeli değişen çember eksenli çubukların düzlem dışı serbest titreşimleri, çember eksenli sabit kesitli çubukların serbest titreşimlerini ifade eden denklemlerin kesin çözümü yardımı ile incelenmiştir. Takip eden bölümlerde, kademeli çubukların serbest titreşimlerinin incelenmesinde kullanılan sistematik yaklaşım hakkında bilgi verilmiştir.

Kesiti kademeli değişen çember eksenli çubukların düzlem dışı serbest titreşimlerinin genel çözümü, sınır şartları, süreklilik ve denge şartları dikkate alınarak verilmiştir. Sınır şartları, eksen eğrisi açıklığı, narinlik oranı, kademe oranı, kademe konumunun frekans katsayısı üzerindeki etkisi grafikler halinde verilmiştir. Burada da, kayma deformasyonu ve hem eğilme hem de burulmadan kaynaklanan dönme eylemsizliği etkileri dikkate alınmıştır.

Diğer taraftan, tek kademeli sabit kesitli çember eksenli çubukların düzlem-dışı serbest titreşimlerinde boyutsuz frekanslar hesaplanırken gözönüne alınan değişken büyüklükler, kullanılan tanımlar ve hesaplarda kullanımı olan, kayma deformasyonu ve hem eğilme hem de burulma dönme eylemsizliği etkilerine yer verilmiştir. Frekanslar, ankastre-ankastre, ankastre-serbest ve serbest-serbest olmak üzere, üç farklı mesnetleme durumu için elde edilmektedir.

Yapılan çalışmalarda, dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuklar gözönüne alınmaktadır. Şekil 5.2'de gösterilen tek kademeli sabit kesitli çubukta, h_1 ve h_2 sırasıyla birinci ve ikinci bölgelerdeki kesit yükseklikleri, b_1 ve b_2 de kesit genişlikleridir. Burada verilen tüm örneklerde $h_1 = h_2$ olarak alınmaktadır. A_1 ve A_2 bölgelerin kesit alanlarını I_1 ve I_2 ise binormal eksene göre alan eylemsizlik momentlerini gösteren büyüklüklerdir ve aşağıdaki gibi tanımlanırlar;

$$\begin{aligned} A_1 &= b_1 h_1 & I_1 &= \frac{b_1 h_1^{\,3}}{12} \\ A_2 &= b_2 h_2 & I_2 &= \frac{b_2 h_2^{\,3}}{12} \end{aligned} \qquad (5.13)$$

Aşağıda, çember eksenli çubuğa ait boyutsuz frekanslar hesaplanırken gözönüne alınan değişken büyüklükler başlıklar halinde verilmektedir;

Mesnet Şartları:

Sistem, ankastre-ankastre, ankastre-serbest ve serbest-serbest olmak üzere üç farklı mesnetleme durumu ele alınarak incelenmektedir.

Kademe Oranı:

Birinci ve ikinci bölgelerin kesitlerinin yükseklikleri arasındaki oran η ile gösterilmekte ve kademe oranı olarak adlandırılmaktadır. Kademe oranı,

$$\eta = \frac{b_2}{b_1} \tag{5.14}$$

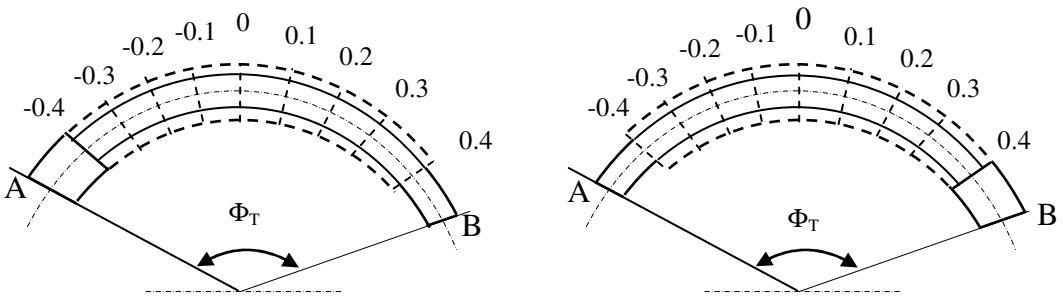
şeklindedir. Tek kademeli çember eksenli çubuk 8 farklı kademe oranı ile incelenmiştir. Bu değerler;

$\eta =$ 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2 ve 1.3

olarak değişmektedir.

Kademe Konumu:

Üç farklı mesnet tipinde, ilk beş moda ait frekanslar, yukarıda belirtilen kiriş açısı, narinlik oranı ve kademe oranı değişkenleri ile dokuz farklı kademe konumu için incelenmekte ve elde edilen sonuçlar farklı kabuller için grafikler halinde sunulmaktadır.



(a) (b)

Şekil 5.3. (a) $\eta = h_2 / h_1 < 1$ için kademenin ψ / ϕ_T 'a bağlı farklı konumları
(b) $\eta = h_2 / h_1 > 1$ için kademenin ψ / ϕ_T 'a bağlı farklı konumları.

Literatürdeki çalışmalarda, simetrik durumlar gözönüne alınırken, bu çalışmada kademenin hareketinin boyutsuz frekansa olan etkisi de hesaplara dahil edilmekte, asimetrik durumlar incelenmektedir. Literatür incelemesi, kesit süreksizliği ve kademe konumunun frekanslar üzerindeki etkilerinin de dikkate alınmadığını göstermektedir.

Kademenin konumu, Şekil 5.2'de gösterildiği gibi, ψ açısıyla tanımlanmakta ve,

$$\frac{\psi}{\phi_T} = \text{-0.4, -0.3, -0.2, -0.1, 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4}$$

değerlerini almaktadır.

Boyutsuz frekans değeri ;

$$c_i = \omega_i R^2 \phi_T{}^2 \sqrt{\frac{\mu_1}{EI_1}} \tag{5.15}$$

ifadesi yardımı ile elde edilir.

Kiriş Açısı:

ϕ_T kiriş açısı, ϕ_A ve ϕ_B çubuğun A ve B uç noktalarının koordinatlarını belirten açı değerleri olmak üzere,

$$\phi_T = \phi_B - \phi_A \tag{5.16}$$

Narinlik Oranı:

Narinlik oranı ;

$$\lambda = \frac{R}{i_1} = \frac{R}{\sqrt{\frac{I_{b1}}{A_1}}} \tag{5.17}$$

olarak tanımlanır. Eşitlikte, R kiriş ekseninin eğrilik yarıçapını ve i jirasyon yarıçapını ifade eder. λ'nın 50, 100 ve 150 olması durumları incelenmektedir.

6. SAYISAL ÖRNEKLER

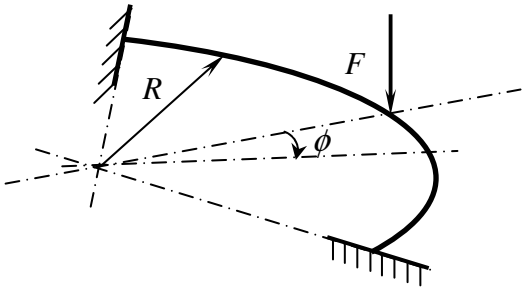
6.1. Eğri Eksenli Çubukların Düzlem Dışı Şekil Değiştirmeleri

Buraya kadar olan çalışmalardan görüleceği üzere, birinci mertebeden, değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem takımı olan genel deklemlerin kesin çözümü; özel hallere ait problemlerin hep aynı deklemlere dayanılarak çözülebilmesini sağlayacak şekilde yapılmıştır. Bu bölümde, literatürde yer alan konu ile ilgili diğer çalışmalardaki örnekler ve ilave olarak sınır şartları, geometri ve yükleme durumu dikkate alınarak özel tasarlanan örneklerin analitik çözümleri elde edilmiş ve sonuçlar karşılaştırılarak yorumlanmıştır.

Diğer taraftan, yayılı yükleri taşıyan çubuklar ile ilgili, literatürdeki çalışmalarda yer alan örnekler de çözülmüş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır.

6.1.1. İki Ucundan Ankastre Mesnetli ve Orta Noktasından Etkiyen F Tekil Yükünü Taşıyan Dairesel Sabit Kesitli Çember Eksenli Çubuk

Aşağıdaki şekilde yükleme ve mesnet durumu gösterilen, iki ucundan ankastre mesnetli ve orta noktasından etkiyen F tekil yükünü taşıyan dairesel sabit kesitli çember eksenli çubuk için statik hesap yapılmıştır. Çubuk eksen eğrisinin açıklığı 90^o dir.



Şekil 6.1. İki ucundan ankastre mesnetli ve orta noktasından etkiyen F tekil yükünü taşıyan dairesel sabit kesitli çember eksenli çubuk.

Kuvvetin etkidiği noktadaki düşey doğrultuda yerdeğiştirme miktarı;

$$v_o = \frac{0.0560378EI_{no}}{GA(-0.142699EI_{no} - 0.642699GJ_0)}FR + \frac{0.252387I_{to}k_b}{A(-0.142699EI_{no} - 0.642699GJ_0)}FR + \frac{0.00391972}{-0.142699EI_{no} - 0.642699GJ_0}FR^3 + \frac{0.0000706803EI_{no}}{GI_{to}(-0.142699EI_{no} - 0.642699GJ_0)}FR^3 + \frac{0.0146063GJ_0}{EI_{no}(-0.142699EI_{no} - 0.642699GJ_0)}FR^3$$

Bu noktadaki kesitin teğet eksen etrafında dönme açısı;

$$\Omega_{to} = -\frac{0.0153725}{-0.142699EI_{no} - 0.642699GJ_0}FR^2 - \frac{0.000766193EI_{no}}{GI_{to}(-0.142699EI_{no} - 0.642699GJ_0)}FR^2 - \frac{0.0146063GJ_0}{EI_{no}(-0.142699EI_{no} - 0.642699GJ_0)}FR^2$$

ve eğilme momenti;

$$M_{no} = -\frac{0.150293EI_{no}}{EI_{no} + 4.50388GJ_0}FR - \frac{0.875969GJ_0}{EI_{no} + 4.50388GJ_0}FR$$

şeklinde elde edilebilir.

Pantazopoulou [37], aynı örneğin çözümünü sonlu eleman yöntemini kullanarak elde etmiştir. Burada, eğrilik yarıçapı *9 ft (108 in. veya 2745 mm)* ve çubuk eksen eğrisinin açıklığı 90^o dir. *F = 11 kips (48 kN)*, çubuk malzemesinin özellikleri *E = 4240 psi (29 MPa)*, *G = 1760 psi (12 Mpa)*, kesit eylemsizlik momentleri $I_3 = I_n = 354\ in^4$ $(147\times10^6\ mm^4)$, $I_2 = 216\ in^4$ $(90\times10^6\ mm^4)$, $J = I_t = 24.5\ in^4$ $(10\times10^6\ mm^4)$ şeklinde verilmektedir.

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar ve Pantazopoulou [37] tarafından elde edilen sonuçlar, karşılaştırmalı olarak Tablo 6.1'de verilmektedir. Bu tabloda, beş farklı sonlu eleman kullanılarak elde edilen sonuçların birbirine göre yakınsaklığı ve hesaplarda kullanılan elemanların performansı da ortaya konmaktadır. Tablonun ilk kolonunda kullanılan eleman tipleri, diğer kolonlarında ise elde edilen sonuçlar

verilmektedir. Bu çalışmada elde edilen ve parantez içinde verilen yerdeğiştirme değeri, kayma deformasyonunun ihmal edilmesi durumunda elde edilen değerdir. Üç nodlu eleman dışında, hesaplarda yirmi eleman kullanılmıştır.

Tablo 6.1. Bu çalışmada ve Pantazopoulou [37] tarafından yapılan çalışmada elde edilen sonuçların karşılaştırılması ($\Omega_t = \sqrt{q_x^2 + q_y^2}$).

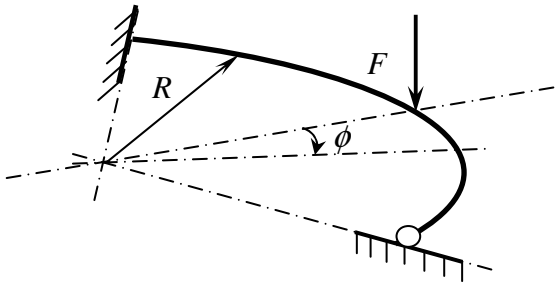
	v (in)	q_x q_y	Ω_t (rad)	M_t (ϕ=0°) (kip-in)	M_n (ϕ=0°) (kip-in)	M_t (ϕ=45°) (kip-in)	M_t (ϕ=45°) (kip-in)
"Kesin" Eleman	-0.39859	0.016080 0.015895	0.0226101	-1.3	-191.2	38.1	277.4
Yerine koyma	-0.39356	0.015992 0.015809	0.022487	-1.3	191.1	38.1	277.2
İndirgenmiş Int.	-0.39356	0.015992 0.015809	0.022487	-1.3	191.1	38.1	277.2
Tam Integrasyon	0.39342	0.015982 0.015799	0.022473	-1.3	191.1	38.1	277.2
3-nodlu Eleman	0.38851	0.015915 0.015905	0.022500	0.0	184.0	43.0	290.0
Bu çalışma	-0.39392 (-0.38950)	-	0.022297	0.0	184.563	43.4726	289.515

Tablo 6.1'den görüleceği üzere, birbirine en yakın sonuçlar, 3 nodlu eleman için elde edilmiştir ve genel olarak sonuçlar arasında iyi bir uyum söz konusudur.

6.1.2. Bir Ucundan Ankastre, Diğer Ucundan Sabit Mesnetli,Orta Noktasından Etkiyen F Tekil Yükünü Taşıyan Dairesel Sabit Kesitli Çember Eksenli Çubuk

Bir ucundan ankastre, diğer ucundan sabit mesnetli ve orta noktasından etkiyen *F* tekil yükünü taşıyan, Şekil 6.2'deki dairesel sabit kesitli çember eksenli çubuk için yapılan statik hesap ve elde edilen sonuçlar aşağıda verilmektedir. Sabit mesnetli uçta, düşey yerdeğiştirme değeri, eğilme momenti ve burulma momenti değerleri sıfır olarak alınmıştır.

Bu örnek, Şekil 6.1'de verilen örneğin farklı mesnet şartında dikkate alındığı durumu ifade etmektedir. Burada, bir önceki örnekte olduğu gibi, eğrilik yarıçapı *9 ft (108in. veya 2745 mm)* ve çubuk eksen eğrisinin açıklığı 90^o dir. *F = 11 kips (48 kN)*, çubuk malzemesinin özellikleri *E = 4240 psi (29 MPa)*, *G = 1760 psi (12 Mpa)*, kesit atalet momentleri $I_3 = I_n = 354\ in^4$ $(147\times10^6\ mm^4)$, $I_2 = 216\ in^4$ $(90\times10^6\ mm^4)$, $J = I_t = 24.5\ in^4$ $(10\times10^6\ mm^4)$ şeklinde verilmektedir.



Şekil 6.2.Bir ucundan ankastre diğer ucundan sabit mesnetli ve orta noktadan etkiyen *F* tekil yükünü taşıyan dairesel sabit kesitli çember eksenli çubuk.

Tablo 6.2. Örnek 6.1.2'ye ait $\phi = 0^0$ *ve* $\phi = 45^0$ deki değerler.

	v (in.)	Ω_t (rad)	M_t (ϕ=0°) (kip-in.)	M_n (ϕ=0°) (kip-in.)	M_t (ϕ=45°) (kip-in.)	M_n (ϕ=45°) (kip-in.)
Sonuç	-0.39859	0.016080	-1.3	-191.2	38.1	277.4

6.1.3. Bir Ucundan Ankastre, Serbest Ucundan Etkiyen F Tekil Yükünü Taşıyan Sabit Kesitli Çember Eksenli Çubuk

Aşağıdaki şekilde yükleme ve mesnet durumu gösterilen, bir ucundan ankastre, serbest ucundan etkiyen *F* tekil yükünü taşıyan sabit kesitli çember eksenli çubuk için statik hesap yapılmıştır. Benzer örnek, Rattanawangcharoen [73], ve MacNeal ve Harder [25] tarafından sonlu eleman yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Eksen eğrisi açıklığı 45^0 olan ankastre-serbest mesnetli bir çubuğun statik problemi, üç boyutlu kiriş teorisi (Kapania ve Li [71], Zupan ve Saje [72]) ve non-lineer Reissner kiriş teorisi (Ibrahimbegovic [44]) dikkate alınarak ele alınmıştır. Aynı örnek, aynı

zamanda, Zivkovic [63] tarafından sonlu eleman yöntemi kullanılarak, Kim ve Kim [65] tarafından ince cidarlı eğrisel kiriş eleman kullanılarak çözülmüştür. Serbest uçtaki yerdeğiştirme, eğim ve burulma açılarının analitik ifadeleri aşağıdaki şekilde elde edilmiştir;

$$v_A = -\frac{\pi F k_b R}{2GA} - \frac{\pi F R^3}{4EI_n} + \frac{FR^3}{GJ}\left(2 - \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\Omega_{nA} = -\frac{FR^2}{2EI_n} - \frac{FR^2}{2GJ}$$

$$\Omega_{tA} = \frac{\pi FR^2}{4EI_n} - \frac{FR^2}{GJ}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

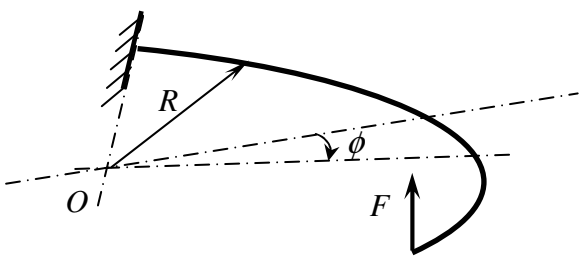
Ayrıca, çökme, eğim ve burulma açılarının tüm çubuk ekseni boyunca değişimini ifade eden denklemler de aşağıda verilmektedir;

$$v = -\frac{\pi F k_b R}{2GA} + \frac{FR^3}{EI_n}\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right)\frac{\cos\phi}{2} + \frac{FR^3}{GJ}\left[1 - \frac{\pi}{2} + \left(1 - \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)\cos\phi + \phi - \sin\phi\right]$$

$$\Omega_n = \frac{FR^2}{EI_n}\left[\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right)\frac{\sin\phi}{2} - \frac{\cos\phi}{2}\right] + \frac{FR^2}{GJ}\left[\left(1 - \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)\sin\phi + \frac{\cos\phi}{2} - 1\right]$$

$$\Omega_t = \frac{FR^2}{EI_n}\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)\cos\phi + \frac{FR^2}{GJ}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} - 1\right)\cos\phi$$

Rattanawangcharoen, MacNeal ve Harder tarafından yapılan çalışmalarda, bu örneğe ait sayısal değerler; eğrilik iç yarıçapı 4.12, eğrilik dış yarıçapı 4.32, et kalınlığı 0.1 ve malzeme özellikleri, $E = 10^7$ ve $\nu = 0.25$ şeklinde alınmıştır. Tekil kuvvetin etki ettiği serbest ucun yerdeğiştirme miktarı 5.022 şeklinde analitik olarak hesaplanmıştır. Bu çalışmada elde edilen sonuç ise, 0.500576'dır.



Şekil 6.3. Bir ucundan ankastre, serbest ucundan etkiyen F tekil yükünü taşıyan ince cidarlı sabit kutu kesitli çember eksenli çubuk.

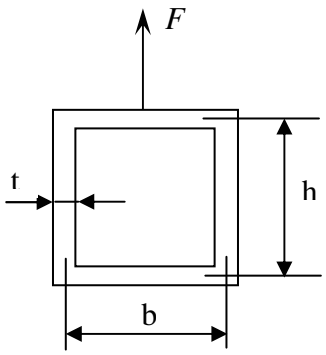
Bu problem, bir ucu ankastre diğer ucu serbest mesnetli ince cidarlı kutu kesitli bir çubuk için Kim ve Kim [65] tarafından incelenmiştir. Söz konusu çalışmada, hesaplamalarda kullanılan sayısal veriler aşağıda verilmektedir;

Burada, eğrilik yarıçapı *R=1m* ve çubuk eksen eğrisinin açıklığı *90^o, serbest uca etki eden tekil kuvvet F=100 N, çubuk kesitinin boyutları b=50 mm, h=100 mm, t=2 mm* ve çubuk malzemesinin özellikleri *E=200 GPa,* $\nu = 0.3$ şeklinde verilmektedir. Çubuğun serbest ucunun rijit olduğu kabul edilmiştir.

Burada, burulma sabiti için aşağıdaki formülasyon dikkate alınmıştır (Timoshenko ve Goodier, [10]);

$$J = \frac{4A_o}{\sum \frac{s}{\delta}} \tag{6.1}$$

denklemde yer alan, A_o kutunun kesit alanı, s uzunluk ve δ kesitin et kalılığı olarak tanımlanmaktadır. Şekil 6.4'de çubuk kesiti ve boyutları verilmektedir.



Şekil 6.4. Çubuk kesiti ve boyutları.

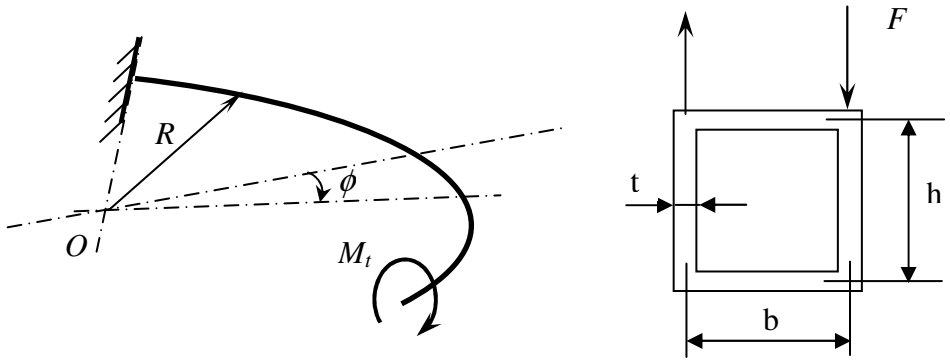
Tablo 6.3. Elde edilen sonuçlar, $\phi=90^o$, Şekil 6.3, (Kim ve Kim, K&K).

	ν (m)	Ω_t	Ω_n
Y.Y. Kim, Y. Kim [65]	$1.830\text{x}10^{-3}$	$-7.041\text{x}10^{-3}$	$1.808\text{x}10^{-3}$
Klasik çubuk teorisi, K&K	$1.041\text{x}10^{-3}$	$-6.007\text{x}10^{-5}$	$1.126\text{x}10^{-3}$
Bu çalışma	$1.172\text{x}10^{-3}$	$5.237\text{x}10^{-5}$	$1.275\text{x}10^{-3}$

Tablo 6.3, klasik çubuk teorisi, Kim ve Kim [65] ve bu çalışmada, çubuğun serbest ucu için elde edilen, çökme ve kesit dönmesi değerlerini vermektedir.

6.1.4. Bir Ucundan Ankastre, Serbest Ucundan Etkiyen M Tekil Momenti Taşıyan Sabit Kutu Kesitli Çember Eksenli Çubuk

Bir ucundan ankastre, serbest ucundan etkiyen F kuvvet çiftini taşıyan, aşağıdaki şekilde gösterilen ince cidarlı sabit kutu kesitli çember eksenli çubuğun statik hesabı yapılmıştır. Burada, eğrilik yarıçapı $R=600\ mm$ ve çubuk eksen eğrisinin açıklığı $\phi=90^o$, $F=10\ N$, $b=40\ mm$, $h=50\ mm$, $t=1\ mm$ ve çubuk malzemesinin özellikleri $E=200\ GPa$, $\nu=0.3$ şeklinde verilmektedir.



(a) (b)

Şekil 6.5. **(a)** Bir ucundan ankastre, serbest ucundan etkiyen F kuvvet çiftini taşıyan ince cidarlı sabit kutu kesitli çember eksenli çubuk, **(b)** çubuk kesiti.

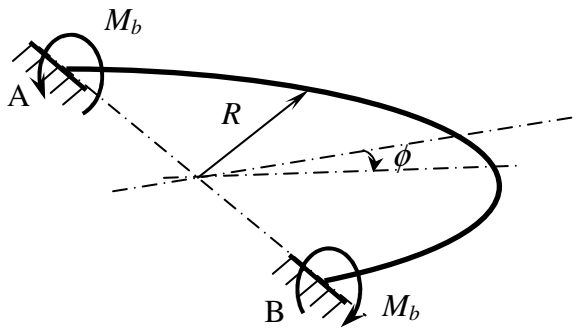
Tablo 6.4. Elde edilen sonuçlar, Şekil 6.5, $\phi = 90^o$.

	ν (m)	Ω_t	Ω_n
Kayma Def.	$-5.10152\text{x}10^{-4}$	$1.246\text{x}10^{-4}$	$-7.22\text{x}10^{-4}$
Klasik Teori	$-4.95021\text{x}10^{-44}$	$1.246\text{x}10^{-4}$	$-7.22\text{x}10^{-4}$

Kayma deformasyonu etkisi ihmal edilmeden ve klasik çubuk teorisi kullanılarak elde edilen sonuçlar Tablo 6.4'de verilmektedir. Burada, çubuğun serbest ucu için her iki yöntemle de elde edilen, çökme ve kesit dönmesi değerleri vermektedir.

6.1.5. Uçlarından Etkiyen Burulma Momentleriyle Yüklü Ankastre-Ankastre Mesnetli Dairesel Sabit Kesitli Çember Eksenli Çubuk

Burada, aşağıdaki şekilde mesnet durumu gösterilen çember eksenli çubuk için yapılan statik hesap ve elde edilen sonuçlar verilmektedir.



Şekil 6.6. Her iki ucundan ankastre bağlı, dairesel sabit kesitli çember eksenli çubuk.

Şekil 6.6'dan görüldüğü gibi, ankastre-ankastre mesnetli dairesel sabit kesitli çubuk, uçlarından etkiyen burulma momentlerinin etkisi altında bulunmaktadır. Çubuğun düzlem dışı statik problemi, Kang [45], Malekzadeh ve Karami [70] tarafından incelenmiştir. Kang [45] çalışmasında, kapalı form çözüm ve klasik teoriye dayanan diferansiyel kuadratik yöntemini kullanmıştır. Her iki yöntemle de, yerdeğiştirmeler, dönme açıları, eğilme ve burulma momentleri, basit ve ankastre mesnetli çubuk için elde edilmiştir. Tablo 6.5 ankastre-ankastre mesnetli, Tablo 6.6 basit mesnetli durum için elde edilen sonuçları vermektedir. Tablolar incelendiğinde, bu çalışmada ve sözü edilen diğer çalışmalarda elde edilen sonuçlar arasında oldukça iyi bir uyum olduğu görülmektedir.

Malekzadeh ve Karami [70] de bu örnek üzerinde çalışmıştır. Değişken kesitli, her iki ucundan burulma momenti etkisindeki ankastre-ankastre mesnetli çubuk problemi, klasik kiriş teorisi yardımı ile incelenmiştir. Çubuk kesitine ait özellikler aşağıda verilmektedir;

$$A = A_0\left(1+\alpha\Phi\right)^2 \qquad I_n = I_{n0}\left(1+\alpha\Phi\right)^4 \qquad J = J_0\left(1+\alpha\Phi\right)^4$$

Burada, ($_0$) indisi referans koordinatındaki değerleri, α kesit değişim parametresini ve $\Phi = \phi / \phi_t$ ise açısal koordinatı göstermektedir. α = 0.2 ve 0.4 olarak alınmıştır.

Tablo 6.5. Elde edilen sonuçlar, ankastre-ankastre mesnet, Şekil 6.6, $\phi = 180^o$.

		ϕ (^{0})					
		0	**18**	**36**	**54**	**72**	**90**
V^*	K&B CBT	0.00	-0.009935	-0.02435	-0.02863	-0.01897	0.0
	Bu çalışma CBT	0.0	-0.009934	-0.024348	-0.028634	-0.018967	0.0
	K&B SDBT	0.0	-0.004602	-0.01697	-0.02201	-0.01512	0.0
	Bu çalışma SDBT	0.0	-0.004602	-0.01697	-0.022005	-0.015119	0.0
Ω_t^*	K&B CBT	-0.8511	-0.5623	-0.3359	-0.1767	-0.07281	0.0
	Bu çalışma CBT	-0.851139	-0.562268	-0.335915	-0.17668	-0.072805	0.0
	K&B SDBT	-0.8865	-0.5958	-0.3645	-0.1974	-0.08371	0.0
	Bu çalışma SDBT	-0.886438	-0.595839	-0.364472	-0197428	-0.083713	0.0
M_n^*	K&B	-0.7197	-0.6844	-0.5822	-0.4230	-0.2224	0.0
	Bu çalışma	-0.719657	-0.684435	-0.582215	-0.423004	-0.222386	0.0
M_t^*	K&B	1.0	0.7776	0.5770	0.4178	0.3156	0.2804
	Bu çalışma	1.0	0.777614	0.576996	0.417785	0.315565	0.280343

Çubuk eksen eğrisinin açıklığı 180^o, eğrilik yarıçapı R ile çubuk kesiti yarıçapı r arasındaki oran $R/r = 5$ şeklinde verilmektedir. Çubuk malzemesinin özellikleri $E=200\ GPa,\ \nu = 0.3$ şeklindedir. Hesaplamalarda, çökme, kesit dönmesi ve momentler için aşağıdaki boyutsuz büyüklükler verilmiştir;

$$v^* = v\frac{GJ}{M_b R^2}, \quad \Omega_b{}^* = \Omega_b \frac{GJ}{M_b R}, \quad M_n{}^* = \frac{M_n}{M_b}, \quad M_t{}^* = \frac{M_t}{M_b}$$

Çubuğa ait sınır şartları;

$$v_A = 0, \qquad v_B = 0, \qquad v'_A = 0, \qquad v'_B = 0$$
$$M_{tA} = -M_b, \quad M_{tB} = M_b$$

şeklinde verilmektedir.

Tablo 6.6. Elde edilen sonuçlar, basit mesnet, (Kang ve Bert, K&B).

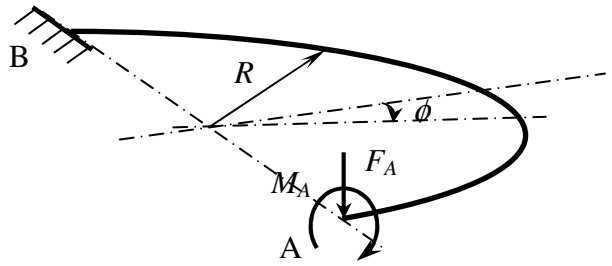
		ϕ (^{0})					
		0	**18**	**36**	**54**	**72**	**90**
V^*	K&B CBT	0.00	0.2373	0.3283	0.2950	0.1712	0.0
	Bu çalışma CBT	0.0	0.237279	0.328323	0.294972	0.171243	0.0
	K&B SDBT	0.0	0.2426	0.3357	0.3016	0.1751	0.0
	Bu çalışma SDBT	0.0	0.242611	0.335701	0.301601	0. 175092	0.0
Ω_τ^*	K&B CBT	-1.571	-1.494	-1.271	-0.9233	-0.4854	0.0
	Bu çalışma CBT	-1.5708	-1.49392	-1.2708	-0.923291	-0.485403	0.0
	K&B SDBT	-1.606	-1.528	-1.300	-0.9440	-0.4963	0.0
	Bu çalışma SDBT	-1.6061	-1.52749	-1.29936	-0.944031	-0.496311	0.0
M_n^*	K&B	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	Bu çalışma	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
M_t^*	K&B	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
	Bu çalışma	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

Tablo 6.7. Üniform olmayan kesitli, basit mesnetli çubuğun yerdeğiştirme ve kesit dönmesi değerleri, (Malekzadeh ve Karami, M&K).

			ϕ (^{0})					
	α		**0**	**18**	**36**	**54**	**72**	**90**
V^*	**0.2**	M&K, CBT	0.00	0.1459	0.1977	0.1747	0.1003	0.0
		Bu çalışma, CBT	0.0	0.145927	0.197713	0.174734	0.100313	0.0
	0.4	M&K, SDBT	0.0	0.09689	0.1287	0.1121	0.0.0638	0.0
		Bu çalışma, SDBT	0.0	0.096887	0.128706	0.112138	0.063802	0.0
Ω_τ^*	**0.2**	M&K, CBT	-1.1030	-0.9583	-0.7609	-0.5231	-0.2625	0.0
		Bu çalışma, CBT	-1.10295	-0.95827	-0.760918	-0.52312	-0.26250	0.0
	0.4	M&K, SDBT	-0.83196	-0.6590	-0.4903	-0.3217	-0.1559	0.0
		Bu çalışma, SDBT	-0.8319	-0.65897	-0.490286	-0.32165	-0.15590	0.0

6.1.6. Bir Ucundan Ankastre Bağlı Serbest Ucundan Tekil Kuvvet ve Tekil Moment Etkisindeki Dairesel Değişken Kesitli Çember Eksenli Çubuk

Bu örnekte, Şekil 6.7'de mesnetleme durumu gösterilen, bir ucundan ankastre bağlı, serbest ucundan tekil kuvvet ve tekil moment etkisindeki dairesel sabit kesitli çember eksenli çubuk ele alınmıştır.



Şekil 6.7. Bir ucundan ankastre bağlı serbest ucundan tekil kuvvet ve tekil moment etkisindeki dairesel sabit kesitli çember eksenli çubuk.

Dairesel sabit kesitli çember eksenli çubuk için, yerdeğiştirme ve kesit dönmelerinin analitik ifadeleri aşağıdaki şekilde elde edilmiştir;

$$v_A = -\frac{\pi F_A k_b R}{GA} - \frac{\pi F_A R^3}{2EI_n} - \frac{3\pi F_A R^3}{2GJ} + \frac{\pi M_A R^2}{2EI_n} + \frac{\pi M_A R^3}{2GJ}$$

$$\Omega_{nA} = -\frac{2F_A R^2}{GJ}$$

$$\Omega_{tA} = \frac{\pi F_A R^2}{2EI_n} + \frac{\pi F_A R^2}{2GJ} - \frac{\pi M_A R}{2EI_n} - \frac{\pi M_A R}{2GJ}$$

Burada, F_A ve M_A ifadeleri, sırasıyla, çubuğun serbest A ucuna etki eden tekil kuvvet ve tekil momenti belirtmektedir. Asal matris kullanılarak, Şekil 6.7'de verilen örneğe ait, yerdeğiştirme ve kesit dönmelerinin analitik ifadelerini elde etmek mümkündür;

$$v = \frac{F_A k_b R}{GA}(\phi - \pi) + \frac{F_A R^3}{2EI_n}\left[(\phi - \pi)\cos\phi - \sin\phi\right] + \frac{F_A R^3}{2GJ}\left[(\phi - \pi)(2 + \cos\phi) + \sin\phi\right]$$
$$+ \frac{M_A R^2}{2EI_n}\left[(\pi - \phi)\cos\phi + \sin\phi\right] + \frac{M_A R^2}{2GJ}\left[(\pi - \phi)\cos\phi + \sin\phi\right]$$

$$\Omega_n = \frac{F_A R^2}{2EI_n}(\phi-\pi)\sin\phi + \frac{F_A R^2}{2GJ}\left[(\phi-\pi)\sin\phi - 2 - 2\cos\phi\right]$$
$$+ \frac{M_A R}{2EI_n}(\pi-\phi)\sin\phi + \frac{M_A R}{2GJ}(\pi-\phi)\sin\phi$$

$$\Omega_t = \frac{F_A R^2}{2EI_n}\left[(\pi-\phi)\cos\phi + \sin\phi\right] + \frac{F_A R^2}{2GJ}\left[(\pi-\phi)\cos\phi - 3\sin\phi\right]$$
$$+ \frac{M_A R}{2EI_n}\left[(\phi-\pi)\cos\phi - \sin\phi\right] + \frac{M_A R}{2GJ}\left[(\phi-\pi)\cos\phi + \sin\phi\right]$$

Tablo 6.8. Elde edilen sonuçlar, ankastre-ankastre mesnet, Şekil 6.7, $\phi = 180^o$ (Malekzadeh ve Karami, M&K).

			ϕ (^{0})						
	α		**0**	**36**	**72**	**90**	**108**	**154**	**180**
V^*	0.0	M&K	0.0000	-0.1181	-1.3012	-2.3400	-3.6471	-6.5628	-8.6998
		CBT	0.0000	-0.181125	-1.30119	-2.34003	-3.64708	-6.56276	-8.6997
	-0.2	M&K	0.0000	-0.1913	-1.4529	-2.6861	-4.3011	-8.1328	-11.168
		CBT	0.0000	-0.19129	-1.45292	-268614	-4.30112	-8.13278	-11.168
	-0.4	M&K	0.0000	-0.2026	-1.6414	-3.1419	-5.2148	-10.594	-15.377
		CBT	0.0000	-0.202575	-1.6414	-3.14192	-5.21488	-10.59400	-15.376
Ω_t^*	0.0	M&K	0.0000	-1.6228	-1.8576	-1.2308	-1.3998	2.8739	5.5582
		CBT	0.0000	-1.62276	-1.85756	-1.23077	-1.39984	2.87392	5.5582
	-0.2	M&K	0.0000	-1.7636	-2.2284	-1.5942	-0.3217	3.7078	7.9646
		CBT	0.0000	-1.76355	-2.22835	-1.59417	-0.321709	3.70776	7.96455
	-0.4	M&K	0.0000	-1.9256	-2.7294	-2.1350	-0.6387	5.1972	13.344
		CBT	0.0000	-1.92557	-2.72935	-2.13499	-0.638601	5.19741	13.3445
M_t^*	α	M&K	-3.0000	-2.6180	-1.6180	-1.0000	-0.3820	0.6180	1.0000
		CBT	-3.0000	-2.61803	-1.61803	-1.0000	-0.381966	0.618034	1.0000
M_n^*	α	M&K	0.0000	1.1756	1.9021	2.0000	1.9021	1.1756	0.0000
		CBT	0.0000	1.17557	1.90211	2.0000	1.90211	1.17557	0.0000

Verilen örneğin sayısal çözümü için, çubuk eksen eğrisinin açıklığı 180^o ve çubuk malzemesinin özellikleri $E=200\ GPa,\ \nu=0.3$ dir. Kesit eylemsizlik momentleri aşağıdaki şekilde verilmektedir;

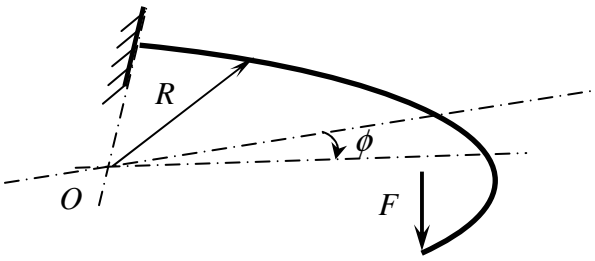
$$J = \frac{\pi}{2} r_0^{\,4}(1+\alpha\Phi)^4 = J_0(1+\alpha\Phi)^4 = J_0 H \quad I = \frac{\pi}{4} r_0^{\,4}(1+\Phi)^4 = I_0(1+\alpha\Phi)^4 = I_0 H$$

Burada; r_0, $\theta = 0$ noktasındaki çubuk kesitinin yarıçapı, α ise, kesit değişim parametresidir.

Bu problem, Malekzadeh ve Karami [70] tarafından, kayma deformasyonu etkisi ihmal edilerek incelenmiştir. Bu nedenle, bu çalışmada da kayma deformasyonu etkisi ihmal edilerek sonuçlar elde edilmiştir. Tablo 6.8'de, sözü edilen çalışmada ve bu çalışmada elde edilen sonuçlar karşılaştırılmaktadır. Sonuçların birbirleri ile oldukça uyumlu olduğu tablodan da açıkça görülmektedir.

6.1.7. Bir Ucundan Ankastre, Serbest Ucundan Etkiyen F Tekil Yükünü Taşıyan Sabit Kare Kesitli Çember Eksenli Çubuk

Aşağıdaki şekilde, yükleme ve mesnet durumu gösterilen çember eksenli çubuk için statik hesap yapılmıştır. Çubuk eksen eğrisinin açıklığı 45^o dir. Burada, eğrilik yarıçapı $R=100,\ F=300,\ b=1,\ h=1$ ve çubuk malzemesinin özellikleri $E=1.0x10^7$, $\nu=0.3$ şeklinde verilmektedir.



Şekil 6.8. Bir ucundan ankastre bağlı, serbest ucundan etkiyen *F* tekil yükünü taşıyan sabit kare kesitli çember eksenli çubuk.

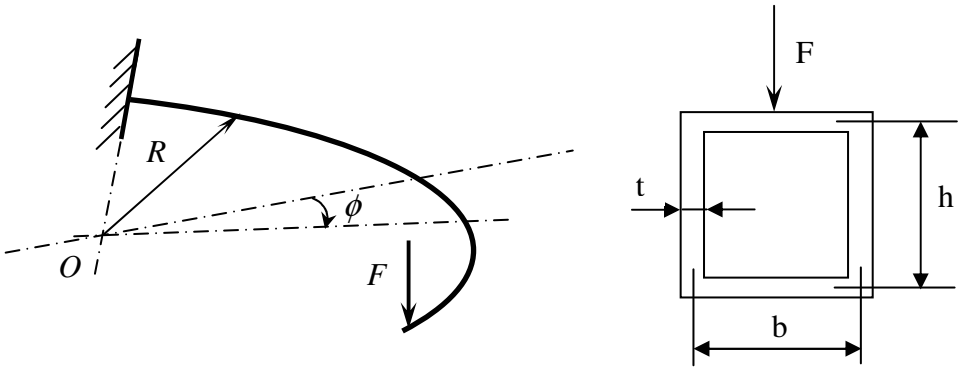
Serbest uçtaki çökme ve kesit dönmelerinin analitik ifadeleri ;

$$v_A = \frac{FR^3}{EI_n}\left(\frac{1}{4}-\frac{\pi}{8}\right)-\frac{FR^3}{GJ}\left(\frac{1}{4}+\frac{3\pi}{8}\right)-\frac{FR\pi k_b}{4GA}$$

$$\Omega_{nA} = -\frac{FR^2}{4EI_n}-\frac{FR^2}{GJ}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \Omega_{tA} = \frac{FR^2}{EI_n}\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)+\frac{FR^2}{GJ}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}\right)$$

6.1.8. Bir Ucundan Ankastre, Serbest Ucundan Etkiyen F Tekil Yükünü Taşıyan İnce Cidarlı Sabit Kutu Kesitli Çember Eksenli Çubuk

Aşağıdaki şekilde yükleme ve mesnet durumu gösterilen çember eksenli çubuk için statik hesap yapılmıştır. Çubuk eksen eğrisinin açıklığı 90^o dir. Burada, eğrilik yarıçapı $R=4.22$, $F=1$, $b=0.2$, $h=0.1$ ve çubuk malzemesinin özellikleri $E=1.0x10^7$, $\nu=0.25$ şeklinde verilmektedir.



(a) (b)

Şekil 6.9. **(a)** Bir ucundan ankastre, serbest ucundan etkiyen F tekil yükünü taşıyan ince cidarlı sabit kutu kesitli çember eksenli çubuk,
(b) çubuk kesiti.

Tablo 6.9. Serbest ucun yerdeğiştirme miktarı, Şekil 6.9, ($\phi=90^o$).

	ν
Sonlu Eleman [73]	0.9667
Analitik çözüm [73]	0.5022
Bu çalışma	0.500576
Kayma Def. ihmal	0.500463

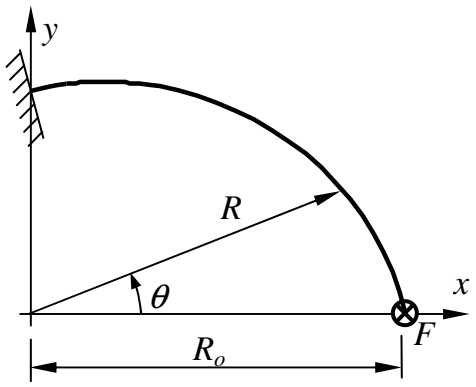
6.1.9. Bir Ucundan Ankastre, Serbest Ucundan Etkiyen F Tekil Yükünü Taşıyan Değişken Kesitli Spiral Eksenli Çubuk

Bu örnekte, Şekil 6.10'da mesnetleme durumu gösterilen, bir ucundan ankastre bağlı, serbest ucundan tekil kuvvet etkisindeki değişken kesitli spiral eksenli çubuk ele alınmıştır.

Kesit formu dairesel olmayan çubuğun kesiti, çubuk eksen eğrisi boyunca, aşağıda verilen fonksiyona göre değişmektedir;

$$r = R_o\,(1-\mu\,\theta) \qquad (0 \le \theta \le \pi/2)$$

Burada, μ bir sabit, θ ise açısal koordinattır. μ =0 değeri, çubuk kesitinin dairesel olması durumuna karşılık gelmektedir.



Şekil 6.10. Bir ucundan ankastre bağlı, serbest ucundan tekil kuvvet etkisindeki değişken kesitli spiral eksenli çubuk.

Şekil 6.10'dan da görüldüğü gibi, bir ucundan ankastre bağlı (θ=π/2) çubuğun serbest ucundan (θ =0^o) F=1000 N değerinde tekil kuvvet etki etmektedir. Bu problem, R_o = 1 m, A_o = 0.01 m^2, I_{no}= 8.333x10^{-6} m^4, J_o = 1.406 x10^{-5} m^4, E = 2x10^{10} N/m^2, ν=0.15 ve k_n=5/6 değerleri kullanılarak, Sengupta ve Dasgupta [46] tarafından çözülmüştür. Ayrıca, bu problem Sheikh [69] tarafından da ele alınarak μ = 0.2 değeri için çözüm elde edilmiştir. Sengupta ve Dasgupta tarafından elde edilen sonuçlar, Sheikh'in sonuçlarına göre daha iyidir.

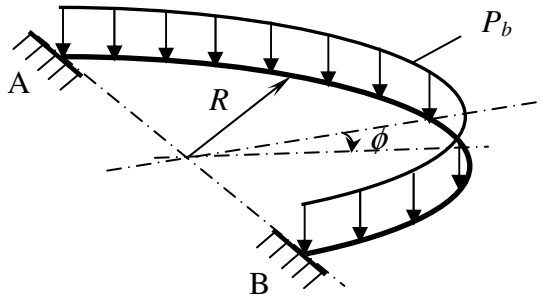
Bu çalışmada elde edilen ve Sengupta ve Dasgupta [46] tarafından elde edilen sonuçlar karşılaştırmalı olarak Tablo 6.10'da verilmektedir. Sonuçların birbirleri ile oldukça uyumlu olduğu tablodan açıkça görülmektedir. Sonuçlar, μ = 0.4 ve α = 0.4 değerleri için verilmiştir.

Tablo 6.10. Bu çalışmada ve Sengupta-Dasgupta (S&D) tarafından elde edilen sonuçlar, klasik teori (CBT) ve kayma deformasyonu etkisi (SDBT), değişken kesitli spiral çubuk (α=0.4).

		ϕ (^{o})									
		0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
v (mm)	S&D (SDBT)	3.952	3.088	2.273	1.561	0.984	0.553	0.263	0.095	0.018	0.0000
	Bu çalışma	3.95217	3.08777	2.27336	1.5615	0.9841	0.55315	0.26316	0.09463	0.01837	0.0000
	S&D (CBT)	3.935	3.073	2.261	1.551	0.976	0.547	0.259	0.092	0.017	0.0000
	Bu çalışma	3.93484	3.07295	2.2609	1.55125	0.97591	0.54688	0.25866	0.09176	0.01700	0.0000
Ω_n (10^{-2}) (rad)	S&D	-0.4598	-0.4795	-0.4637	-0.4178	-0.3494	-0.2673	-0.1814	-0.1018	-0.0384	0.0000
	Bu çalışma	-0.45978	0.479523	-0.463708	-0.41782	349366	0.267282	-0.18139	-0.10183	0.038413	0.0000
Ω_t (10^{-2}) (rad)	S&D	-1.951	-0.1013	-0.0107	0.0667	0.1226	0.1519	0.1522	0.1240	0.0709	0.0000
	Bu çalışma	-1.95053	-0.10132	-0.010656	0.066653	122619	0.151935	0.15218	0.12396	0.070946	0.0000
M_n (Nm)	S&D	0.0000	-181.10	-343.58	-480.21	-584.02	-648.40	-667.37	-635.81	-549.98	-408.42
	Bu çalışma	0.0000	-18.102	-343.58	480.213	584.016	648.40	-663.372	-635.812	-549.977	-408.42
M_t (Nm)	S&D	0.0000	-18.42	-72.26	-158.40	-272.31	-408.00	-557.85	-712.34	-859.72	-985.57
	Bu çalışma	0.0000	-18.4205	-72.2632	158.399	272.311	-408.005	-557.849	-712.336	-859.717	-985.56

6.1.10. İki Ucundan Ankastre ve Düzgün Yayılı Yük Etkisindeki Dairesel Sabit Kesitli Çember Eksenli Çubuk

Aşağıda, iki ucundan ankastre bağlı, düzgün yayılı yük etkisindeki dairesel sabit kesitli çember eksenli çubuk örneği verilmektedir. Aynı problem, Sheikh [69] ve Dasgupta-Sengupta [48] tarafından da çözülmüş ve bütün sonuçlar karşılaştırmalı olarak Tablo 6.11'de verilmiştir.



Şekil 6.11. İki ucundan ankastre bağlı düzgün yayılı yük etkisindeki dairesel sabit kesitli çember eksenli çubuk.

Burada, eğrilik yarıçapı $R=10\ m$ ve çubuk eksen eğrisinin açıklığı 180^o dir, $p_b = 10\,kN/m$, kesit atalet momentleri $I_n = 4.9x10^{-3}\,m^4$, $I_p = 8.944x10^{-3}\,m^4$, çubuk malzemesinin özellikleri $E = 2x10^{11}\,N/m^2$, $G = 9.1673x10^{10}\,N/m^2$ ve kesit alanı $A = 0.7854\ m^2$ şeklinde verilmektedir.

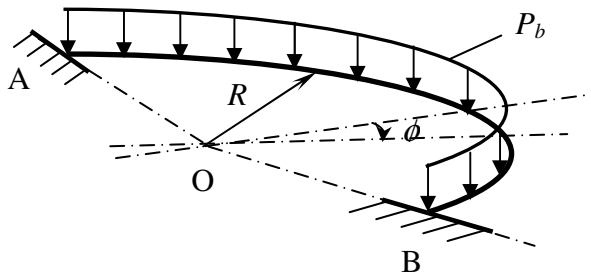
Tablo 6.11. Bu çalışmada, Sheikh [69] ve Dasgupta-Sengupta [48] tarafından yapılan çalışmalarda elde edilen sonuçların karşılaştırma tablosu.

	v **(m)**	M_n (ϕ=0°) **(Nm)**	M_n (ϕ=90°) **(Nm)**	M_t (ϕ=0°) **(Nm)**	M_t (ϕ=90°) **(Nm)**	F (ϕ=90°) **(N)**
Sheikh [69]	0.0404	27.372	-99.904	0	29.609	15.708
Dasgupta-Sengupta [48]	0,0404	27.585	-99.981	0	29.489	15.707
Bu çalışma	0.0403	27.324	-100	0	29.755	15.708

Burada, çubuğun orta noktası ve ankastre mesnetteki moment, kesit dönmesi ve çökme değerleri elde edilmiştir. Tablodan görüleceği üzere, sonuçlar arasında iyi bir uyum söz konusudur.

6.1.11. İki Ucundan Ankastre ve Düzgün Yayılı Yük Etkisindeki Dikdörtgen Sabit Kesitli Çember Eksenli Çubuk

Aşağıdaki Şekil 6.12'de yükleme ve mesnet durumu gösterilen çember eksenli çubuk için statik hesap yapılmıştır. Burada, eğrilik yarıçapı *10 ft*, çubuk eksen eğrisinin açıklığı 120^o ve p_b = *25 ton/ft* dir. Çubuk malzemesinin özellikleri $E=23x10^6$ *psi*, kesit genişliği *b=20 in*, kesit yüksekliği *h= 12 in* ($A=240\ in^2$) şeklinde verilmektedir.



Şekil 6.12. İki ucundan ankastre bağlı düzgün yayılı yük etkisindeki dikdörtgen sabit kesitli çember eksenli çubuk.

Orta noktadaki; çökme, kesit dönmesi ve moment ifadelerinin analitik değerleri aşağıda verilmiştir ;

$$v = -\frac{0.168382EI_n k_b p_b R^3}{AG\left(-0.307092EI_n R - 0.740105GJR\right)} - \frac{0.405808Jk_b p_b R^3}{A\left(-0.307092EI_n R - 0.740105GJR\right)}$$

$$-\frac{0.021542 p_b R^5}{\left(-0.307092EI_n R - 0.740105GJR\right)} - \frac{0.000623EI_n p_b R^5}{GJ\left(-0.307092EI_n R - 0.740105GJR\right)}$$

$$-\frac{0.045293GJp_b R^5}{EI_n\left(-0.307092EI_n R - 0.740105GJR\right)}$$

$$\Omega_t = \frac{0.048747 p_b R^4}{\left(-0.307092EI_n R - 0.740105GJR\right)} + \frac{0.003454EI_n p_b R^4}{GJ\left(-0.307092EI_n R - 0.740105GJR\right)}$$

$$+\frac{0.045293GJp_bR^4}{EI_n\left(-0.307092EI_nR-0.740105GJR\right)}$$

$$M_n=-\frac{0.035334EI_np_bR^3}{\left(-0.307092EI_nR-0.740105GJR\right)}-\frac{0.12592GJp_bR^3}{\left(-0.307092EI_nR-0.740105GJR\right)}$$

6.2. Eğri Eksenli Çubukların Düzlem Dışı Titreşimleri

Bu bölümde, mühendislik çalışmalarında önemli bir yeri bulunan, eğri eksenli dairesel sabit kesitli düzlemsel çubukların düzlem dışı titreşimleri, kayma deformasyonu ve hem eğilme hem de burulmadan kaynaklanan dönme eylemsizliği etkileri dikkate alınarak incelenmiştir. Diferansiyel denklem takımının kesin çözümü, başlangıç değerleri yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Farklı narinlik oranları ve farklı eksen eğrisi açıklık değerlerinde, çubuğun ilk beş modu için boyutsuz frekans katsayıları belirlenmiştir. Elde edilen sonuçlar, narin ve sığ çubuklarda da olduğu gibi, kayma deformasyonu ve hem eğilme hem de burulmadan kaynaklanan dönme eylemsizliği etkilerinin rezonans frekansları üzerinde öneme haiz bir etkisi olduğunu göstermiştir. Burulmadan kaynaklanan dönme eylemsizliği etkisi, eğri eksenli düzlem çubukların düzlem dışı titreşimleri konusunda en önemli etki olarak karşımıza çıkmaktadır.

Eğri eksenli düzlemsel çubukların düzlem dışı titreşimlerinde, çubuk eğriliğine etki eden mod geçişi olayı da incelenmiş ve verilen grafiklerde gösterilmiştir. Yapılan literatür incelemesi sırasında, mod geçişi konusunu ele alan bir çalışmaya rastlanmamıştır. Eğri eksenli çubukların titreşim problemi, diğer birçok çalışmaya da araştırma konusu olmuş ve bu çalışmalarda verilen örneklere ilişkin karşılaştırmalı sonuçlar tablolar halinde verilmiştir. Yapılan hesaplarda, sözü edilen etkiler dikkate alınmış, kesitin çarpılma etkisi ihmal edilmiştir. Elde edilen sonuçlar arasında iyi bir uyum olduğu görülmektedir.

Frekanslar, ankastre-ankastre, ankastre-serbest ve serbest-serbest olmak üzere, üç farklı mesnetleme durumu için elde edilmektedir. Farklı sınır şartlarında, ϕ_T kiriş açısı ve narinlik oranının ($\lambda=R/i$) doğal frekanslar üzerindeki etkisi tespit edilmiş, ilk beş mod için boyutsuz frekans katsayıları hesaplanmıştır.

Dairesel sabit kesitli çubuğun, farklı sınır şartlarında, ilk dört moduna ait doğal frekanslar, Tablo 6.12'de verilmiştir.

Tablo 6.12. Sonuçların, Boyutsuz Frekans Parametresine $\left[(\omega^2 R^4(\rho A/EI_n))\right]^{1/4}$ göre karşılaştırılması, ϕ_t=80^o ve λ=20.

	Mod	Bu çalışma		Huang [54]	Irie [20]
		Tüm Etkiler	Etkiler İhmal		
Ankastre-Ankastre	1	3.13528	3.27492	3.13412	3.134
	2	5.02582	5.51882	5.02223	5.022
	3	5.58453	7.79057	5.58418	5.584
	4	6.74026	10.05558	6.73358	6.734
Ankastre-Serbest	1	1.34419	1.35234	-	-
	2	2.87101	3.03643	-	-
	3	4.18663	5.38838	-	-
	4	5.17470	7.69722	-	-
Serbest-Serbest	1	3.91199	5.36323	-	-
	2	4.78299	7.41128	-	-
	3	5.71670	9.95893	-	-
	4	6.90764	12.09519	-	-

Burada, çubuk eksen eğrisinin açıklığı 80^o ve narinlik oranı $\sqrt{AR^2/I_n} = 20$ dir. Her iki ucundan sabit mesnetli dairesel sabit kesitli çubuk için elde edilen doğal frekans değerleri, Huang [54] ve Irie [20] tarafından elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Huang [54], dinamik rijitlik matrisi metodunu, Irie [20] ise transfer matris metodunu kullanarak çözüm elde etmişlerdir. Tablo 6.12'dan da görüleceği üzere elde edilen sonuçlar birbirine oldukça yakındır.

Ankastre-ankastre mesnetli, dairesel ve kare kesitli çubukların, ilk dört moduna ait doğal frekansları, sırasıyla Tablo 6.13 ve Tablo 6.14'de verilmiştir. Kiriş açısı 60^o-120^o-180^o olarak seçilmiş ve narinlik oranı λ=20 ve 100 şeklinde verilmiştir.

Tablo 6.13. Frekans katsayıları $\omega R^2\sqrt{\mu/(EI_n)}$, ankastre-ankastre mesnetli çember eksenli dairel kesitli çubuk (k_b=1/0.89 ve ν=0.3).

λ	ϕ (°)	Mod	Bu çalışma	Kang [45]	Irie [20]	Howson [52]
20	60	1	16.88495	16.885	16.88	16.885
		2	39.70036	-	39.70	39.700
		3	40.93407	-	40.90	40.934
		4	70.58051	-	70.51	70.581
	120	1	4.309414	4.3094	4.309	4.3094
		2	11.79597	-	11.79	11.796
		3	22.51022	-	22.50	22.510
		4	23.30273	-	23.30	23.303
	180	1	1.790849	1.7908	1.791	1.7908
		2	5.032438	-	5.032	5.032
		3	10.23228	-	10.23	10.232
		4	16.91733	-	16.91	16.917
100	60	1	19.45376	19.454	19.45	19.454
		2	54.14767	-	54.14	54.148
		3	105.86088	-	105.9	105.86
		4	173.15822	-	173.1	173.16
	120	1	4.473080	4.4731	4.473	4.4731
		2	12.89161	-	12.89	12.892
		3	26.08059	-	26.08	26.081
		4	43.68398	-	43.68	43.684
	180	1	1.818173	1.8182	1.818	1.8182
		2	5.241521	-	5.242	5.2415
		3	10.988907	-	10.99	10.989
		4	18.813360	-	18.81	18.813

Bu çalışmada, daha önce de belirtildiği gibi, eğri eksenli çubukların düzlem-dışı titreşimlerini ifade eden diferansiyel denklem takımının kesin çözümü, başlangıç değerleri yöntemi kullanılarak elde edilmiş, Howson [52], aynı hesabı dinamik rijitlik yöntemini kullanarak yapmış, teorik sonuçların doğruluğunu göstermek için, burada değinilen sayısal örneklere yer vermiştir. Örneklerde, kayma gerilmelerinin kesite üniform olarak yayılmadıklarını karakterize eden k_b sabiti, dairesel kesit için k_b = 1/0.89 ve kare kesit için k_b = 1/0.85 şeklinde alınmıştır.

Tablo 6.14. Frekans katsayıları $\omega R^2\sqrt{\mu/(EI_n)}$, ankastre-ankastre mesnetli çember eksenli kare kesitli çubuk (k_b=1/0.85 ve ν=0.3).

λ	ϕ (°)	Mod	Bu çalışma	Kang [45]	Irie [20]	Howson [52]
20	60	1	16.74397	16.744	16.74	16.743
		2	36.94631	-	36.92	36.921
		3	40.45051	-	40.45	40.449
		4	69.61974	-	69.62	69.618
	120	1	4.282547	4.2827	4.282	4.2823
		2	11.69060	-	11.69	11.690
		3	22.05355	-	22.05	22.045
		4	22.38193	-	22.38	22.379
	180	1	1.776521	1.7766	1.776	1.7764
		2	4.981896	-	4.982	4.9814
		3	10.13400	-	10.13	10.133
		4	16.76278	-	16.76	16.762
100	60	1	19.40190	19.402	19.40	19.401
		2	54.02958	-	54.03	54.029
		3	105.6482	-	105.6	105.65
		4	172.7735	-	172.8	172.77
	120	1	4.451450	4.4516	4.451	4.4512
		2	12.82629	-	12.83	12.826
		3	25.98937	-	25.99	26.988
		4	43.57053	-	43.57	43.570
	180	1	1.804340	1.8045	1.804	1.8042
		2	5.197995	-	5.198	5.1975
		3	10.91819	-	10.92	10.917
		4	18.72548	-	18.72	18.725

Tablo 6.13 ve Tablo 6.14, ankastre-ankastre mesnetli çember eksenli dairesel ve kare kesitli çubuklar için, bu çalışmada ve Irie [20], Kang [45] ve Howson [52] tarafından yapılan çalışmalarda elde edilen frekans katsayılarını vermektedir. Tablolardan görüleceği üzere elde edilen sonuçlar birbirine oldukça yakındır.

Eğri eksenli çubukların düzlem dışı titreşim probleminin çözümü konusunda, E Silva [31] tarafından yeni bir analitik model ortaya konmuştur. Bu çalışmada, ayrıca, teorik hesapların doğruluğunu göstermek için Tablo 6.15'de sonuçları verilen deneysel çalışmalarda da yapılmıştır.

Tablo 6.15. Elde edilen frekanslar (Hz) (Bu çalışma ve E Silva [31]).

Mod	ϕ (°)	Bu çalışma				E Silva ve diğerleri [31]				
		A Hali	B Hali	C Hali	D Hali	A Hali	B Hali	C Hali	D Hali	Deney
1	30	786.673	800.647	514.74	513.26	782.87	796.75	634.21	632.36	-
	60	719.062	730.805	707.89	703.05	715.46	727.2	712.36	707.29	-
	90	633.293	642.638	617.91	614.83	630.2	639.18	623.42	620.25	-
	180	402.524	407.203	394.43	393.67	400.2	400.3	395.81	391.05	387.5
	270	256.575	259.112	254.03	253.74	255.0	254.2	253.7	250.8	250.5
2	30	1425.55	1474.05	786.95	779.92	1418.6	1466.1	786.33	779.6	-
	60	1382.72	1428.2	848.47	845.29	1376.0	1421.2	1053.5	1046.4	-
	90	1317.30	1358.46	1072.9	1065.6	1310.7	1351.8	1203.4	1190.2	-
	180	1053.20	1080.20	998.84	991.50	1047.8	1067.2	1023.4	1007.2	967.6
	270	788.136	805.047	762.26	759.17	784.1	792.9	771.19	760.4	747.1
3	30	2508.81	2651.78	1597.8	1565.7	2494.2	2642.5	1605.1	1570.7	-
	60	2435.99	2571.17	1612.8	1584.1	2424.8	2562.5	1700.8	1671.2	-
	90	2339.53	2464.67	1734.4	1711.7	2328.8	2456.0	2045.6	2022.2	-
	180	2002.42	2094.98	1831.3	1804.3	1992.5	2074.1	1927.9	1882.2	1717.5
	270	1646.99	1711.59	1551.6	1534.5	1638.2	1690.5	1596.9	1564.2	1487.5
4	30	3572.73	3868.85	1639.5	1637.2	3675.0	3458.5	2162.4	2153.4	-
	60	3529.95	3818.44	1753.1	1744.	3459.3	3550.6	2197.8	2167.4	-
	90	3462.53	3739.28	1861.6	1844.9	3451.3	3614.2	2180.2	2136.2	-
	180	3155.90	3383.38	2524.1	2489.8	3143.4	3370.4	2864.3	2818.0	2763.0
	270	2766.24	2940.69	2510.8	2465.5	2752.0	2910.3	2657.8	2580.0	2460.2

Aynı kesite sahip, farklı eksen açıklıklarındaki kiriş titreşimleri üzerine çalışmalar yapılmış ve elde edilen sonuçlar, E Silva [31] tarafından elde edilen sonuçlar ile karşılaştırmalı olarak Tablo 6.15'de verilmiştir.

Hesaplarda dikkate alınan etkiler aşağıdaki gibi gruplandırılmıştır;

A Hali : Kayma deformasyonu ve burulma nedeni ile ortaya çıkan dönme eylemsizliği etkileri dikkate alınmaktadır.

B Hali : Bütün etkilerin ihmal edildiği klasik kiriş teorisi.

C Hali : Sadece kayma deformasyonu etkisi ihmal edilmektedir. Hem eğilme hem de burulma nedeni ile ortaya çıkan dönme eylemsizliği etkileri dikkate alınmaktadır.

D Hali : Bütün etkiler dikkate alınmaktadır.

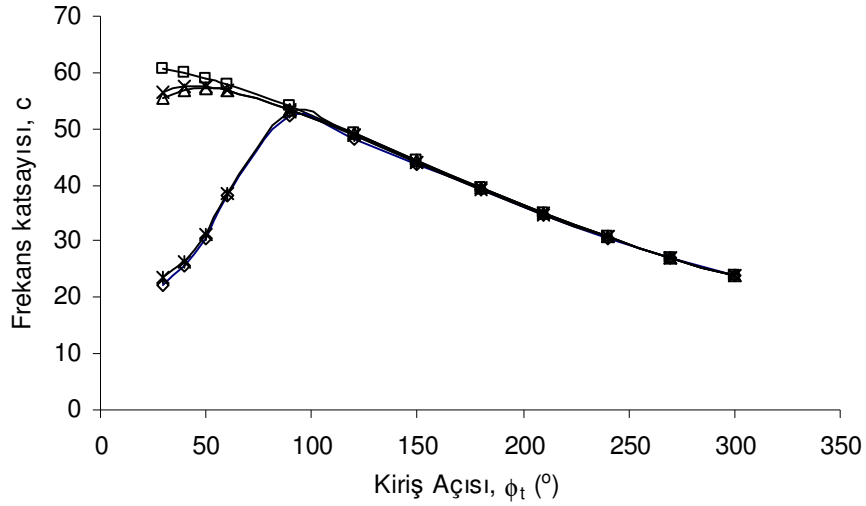
Genel olarak sonuçlar arasında iyi bir uyum olduğunu söylemek mümkündür. Ancak, her iki çalışmada da, dördüncü doğal frekansların kendi içindeki birbirine göre olan farkları, ilk üç moda göre daha fazladır. Deneysel sonuçlarla karşılaştırıldığında, bu çalışmada elde edilen sonuçların, E Silva [31] tarafından elde edilen sonuçlardan daha iyi olduğu görülmektedir. Fakat, özellikle dördüncü modda, teorik ve deneysel frekanslar arasındaki fark daha büyüktür. $\phi_t=180^o$ kiriş açıklığı için, elde edilen deneysel frekanslar, teorik sonuçlara göre %10 daha fazladır.

Aşağıda verilen örneklerde, boyutsuz frekans katsayısı ($c_i = \omega_i R^2 \phi_t^2 (\mu/EI_n)^{1/2}$ beş farklı durum için hesaplanmış ve elde edilen sonuçlar grafikler halinde verilmiştir.

Durum 1: Etkiler ihmal
Durum 2: Tüm etkiler
Durum 3: Kayma deformasyonu
Durum 4: Eğilme nedeni ile ortaya çıkan dönme eylemsizliği
Durum 5: Burulma nedeni ile ortaya çıkan dönme eylemsizliği

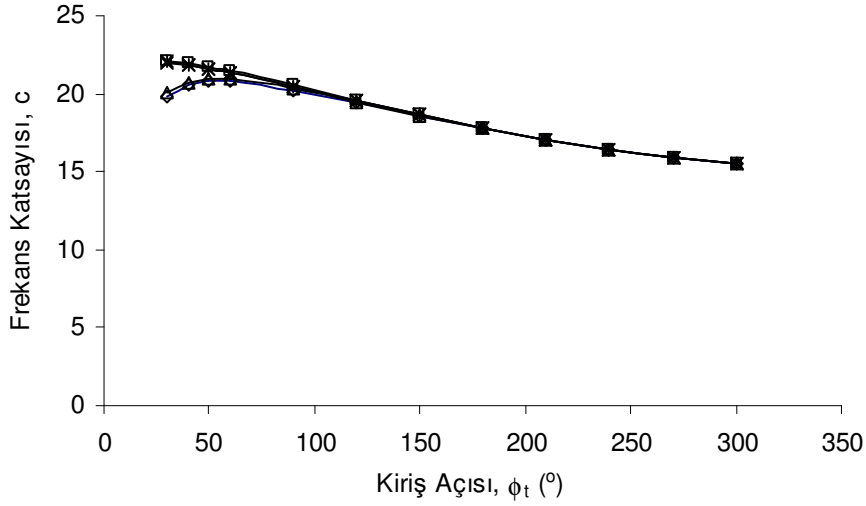
Şekil 6.13'de , serbest-serbest mesnet durumunda, narinlik oranı $\lambda=50$ için, birinci frekans katsayısının kiriş açısına göre değişimi verilmektedir.

Küçük kiriş açılarında, sonuçların birbirinden oldukça farklı, büyük kiriş açılarında ise birbirine yakın olduğu görülmektedir. Ikinci halde, frekans katsayısı keskin bir şekilde yükselmekte ve sonra yavaşça düşmektedir. Frekans değerinde ortaya çıkan bu ani ve keskin artış mod geçişi nedeniyle meydana gelmektedir. Şekil 6.13'de verilen grafikten kolayca görüleceği üzere, burulma nedeni ile ortaya çıkan dönme eylemsizliği etkisi en önemli etki olarak karşımıza çıkmaktadır.



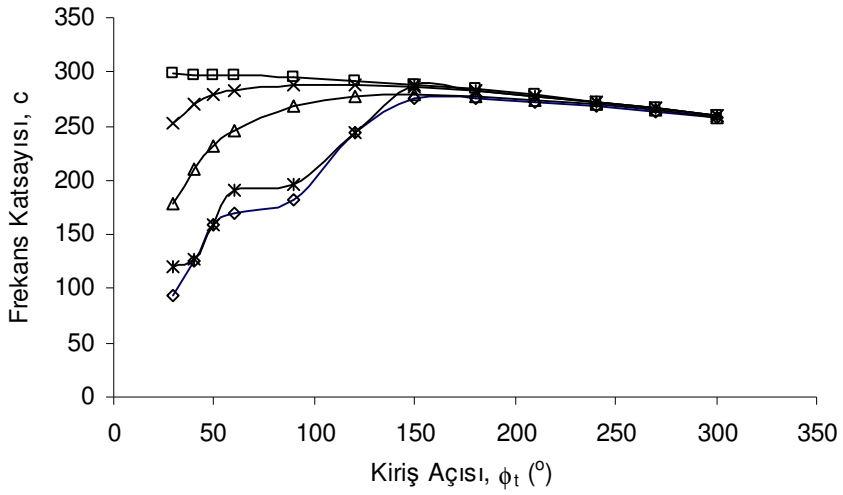
Şekil 6.13. Birinci frekans katsayısının $c_i = \omega_i R^2 \phi_t^2 (\mu / EI_n)^{1/2}$ kiriş açısına göre değişimi, serbest-serbest mesnet, (narinlik oranı λ=50).
□ durum 1; ◊ durum 2; △ durum 3; × durum 4; ∗ durum 5.

Ankastre-ankastret mesnet durumunda, kiriş açısının, birinci frekans katsayısı üzerindeki etkisi Şekil 6.14'de verilmektedir (narinlik oranı λ=50). Farklı etki durumlarına göre elde edilen eğrilerin, serbest-serbest mesnet durumunda elde edilen eğrilere göre, birbiri ile daha uyumlu olduğu görülmektedir.



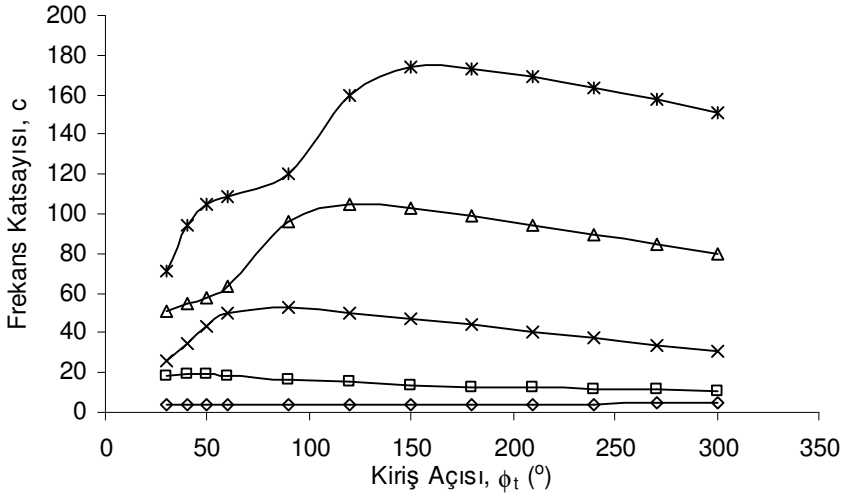
Şekil 6.14. Birinci frekans katsayısının $c_i = \omega_i R^2 \phi_t^2 (\mu / EI_n)^{1/2}$ kiriş açısına göre değişimi, ankastre-ankastre mesnet, (narinlik oranı λ=50).
□ durum 1; ◊ durum 2; △ durum 3; × durum 4; ∗ durum 5.

Şekil 6.15, ankastre-ankastre mesnet durumunda beşinci frekans katsayısının değişimini göstermektedir. Beş değişik etki durumuna göre elde edilen sonuçlar, sığ çubuklarda birbirine göre belirgin farklılık göstermektedir (ϕ_t=150^o kadar).



Şekil 6.15. Beşinci frekans katsayısının $c_i = \omega_i R^2 \phi_t^2 (\mu/EI_n)^{1/2}$ kiriş açısına göre değişimi, ankastre-ankastre mesnet, (narinlik oranı λ=50).
□ durum 1; ◊ durum 2; △ durum 3; × durum 4; ∗ durum 5.

Öte yandan, kayma deformasyonu ve eğilme nedeni ile ortaya çıkan dönme eylemsizliği etkilerinin önemi, yüksek mod sayıları ve küçük kiriş açılarında ortaya çıkmaktadır.



Şekil 6.16. İlk beş frekans katsayısının $c_i = \omega_i R^2 \phi_t^2 (\mu/EI_n)^{1/2}$ kiriş açısına göre değişimi, ankastre-serbest mesnet, (narinlik oranı λ=50).
□ durum 1; ◊ durum 2; △ durum 3; × durum 4; ∗ durum 5.

Ankastre-serbest bir kirişin ilk beş moduna ait frekans katsayıları narinlik oranı $\lambda=50$ olmak üzere Şekil 6.16'da verilmektedir. Kayma deformasyonu ve hem eğilme hem de burulmadan kaynaklanan dönme eylemsizliği etkileri dikkate alınmıştır. Mod geçişi nedeni ile ortaya çıkan, frekanslardaki ani ve keskin değişimler, grafiklerden rahatlıkla görülebilmektedir. Frekans eğrilerinin birbirine yaklaştığı noktalarda, mod şekilleri, burulmadan eğilmeye doğru değişim göstermektedir.

7. DENEYSEL ÇALIŞMALAR ve DENEYSEL MODAL ANALİZ

7.1. Deneysel Çalışmalar

Bilindiği gibi, doğada meydana gelen olaylar, etkilendiği bir çok faktör sebebi ile oldukça karmaşık bir yapıya sahiptir. Bu faktörlerin bir tanesinde bile olabilecek değişim, mevcut durumun da değişikliğe uğraması anlamına gelmektedir. Teorik hesaplarda ve buna bağlı inceleme sonuçlarında, bu faktörlerin hepsinin gözönüne alınması mümkün değildir. Bu nedenle, olayın karmaşık yapısı, olayı etkileyen faktörlerin vazgeçilmez olanlarının dikkate alınması, diğerlerinin gözardı edilmesi yolu ile basitleştirilir. Sonuçta, olayı ifade eden matematiksel bir model kurulur.

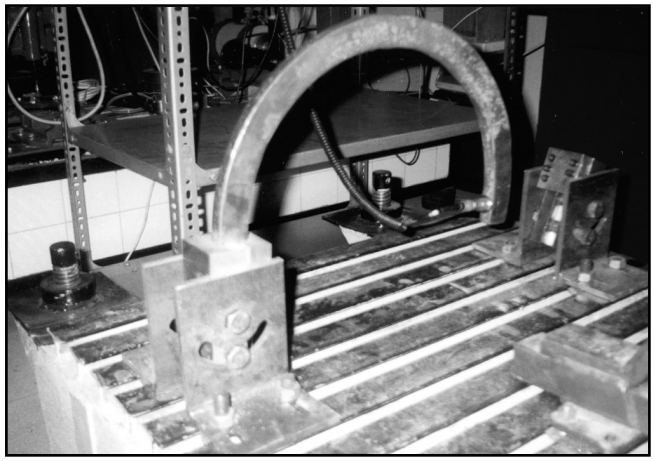
Deneysel çalışmalar, olayın fiziksel yapısını gözleyerek, teorik çalışmanın gerçeğe ne kadar yaklaşabildiğini gösterir. Ancak, deneyin de kendi içinde ölçme hataları gibi birtakım hataları mevcuttur. Çünkü, fiziksel bir büyüklüğün gerçek değerini ölçebilmek mümkün değildir. Ölçme hatalarının büyüklüğü, deneyi yapan kişinin dikkati, ölçme becerisi, kullanılan deney teçhizatı, deney teçhizatının hassasiyeti ve deney ortamındaki çevresel etkilere bağlı olarak değişmektedir. Diğer taraftan, deneyde kullanılan parçaların malzemeleri, malzemenin mekanik özellikleri ve kaide, mesnet, bağlantı elemanları gibi diğer yardımcı ekipmanların durumu da, deney sonuçlarına etki eden faktörler arasında yer almaktadır.

Bu bölümde, teorik ve sayısal sonuçların karşılaştırılması amacı ile, çember eksenli sabit kesitli çubuk deneysel olarak incelenmiştir. Deney düzeneği, çubuğun statik ve dinamik deneylerinin yapılmasına imkan verecek şekilde üniversal bir yapıda özel olarak tasarlanmıştır. Deney düzeneği; ana kaide, açısal ayarlanabilir ankastre mesnet, bağlantı elemanları, titreşim sönümleyici lastik takozlar, ölçme elemanı ve ölçme ekipmanlarından oluşmaktadır. Şekil 7.1'de, sözü edilen amaç için kullanılan deney düzeneğinin fotoğrafı görülmektedir.

Çalışmanın deneysel kısmında, amaca uygun olarak, çeşitli sınır şartları altında çubuğun serbest titreşimi incelenmiş, elde edilen teorik sonuçların, deneysel sonuçlara ne kadar yakın olduğu ortaya konmuştur. İlk olarak, çember eksenli sabit kesitli çubuğun çeşitli sınır şartlarındaki düzlem-dışı serbest titreşimleri incelenmiş, bir sonraki bölümde, tek kademeli sabit kesitli çember eksenli çubukların düzlem-dışı serbest titreşimlerinin frekans değerleri detaylı bir çalışmayla ele alınmıştır. Son olarak da, yine çember eksenli sabit kesitli çubuğun, ankastre-ankastre, ankastre-serbest ve serbest-serbest sınır şartlarında titreşim ölçümleri yapılmıştır. 180^0 eksen açıklığına sahip deney çubuğunun, sözü edilen sınır şartlarındaki mod şekilleri ortaya konmuştur.

7.1.1. Çember Eksenli Çubuğun Serbest Titreşimleri

Bu bölümde, çember eksenli sabit kesitli çubuğun çeşitli sınır şartlarındaki düzlem-dışı serbest titreşimleri incelenmiştir. Belirli durumlara ilişkin elde edilmiş olan teorik sonuçların gerçeğe ne derece yaklaştığı yapılan deneylerle ortaya konmuştur.



Şekil 7.1. Tasarlanan deney düzeneğinin şematik gösterimi.

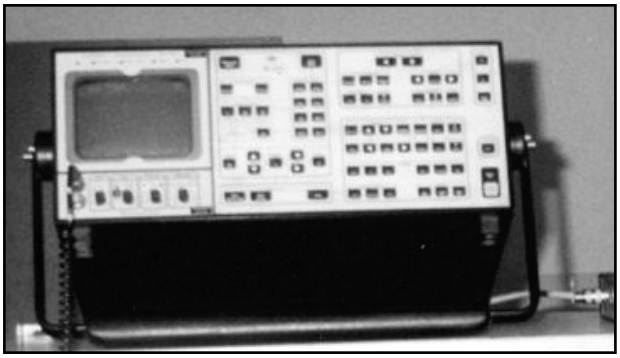
Deneyler; ankastre-ankastre, ankastre-serbest ve serbest-serbest olacak şekilde üç farklı sınır şartı altında yapılmıştır. Serbest-serbest mesnet durumu, çubuğun lastik bir malzeme ile ana kaideye asılması ile sağlanmıştır. Kayma deformasyonu ve hem eğilme hem de burulma dönme eylemsizliği etkilerinin sonuçlara yansıması amacı ile çubuk boyutu kalın seçilmiştir. Deney çubuğunun eksen eğrisi açıklığı 180^0 dir.

Deney sırasında kullanılan ölçme cihazları ve özellikleri aşağıda verilmektedir ;

Analizör ; Marka : Brüel&Kjaer Tip : 2515

İvme ölçer ; Marka : Brüel&Kjaer Tip : 4391

Piezoelektrik ivme ölçer, çubuğun düzlemi ve kendi düzlemine dik doğrultudaki titreşimlerini ölçebilmek amacı ile çubuk düzlemi ve bu düzleme dik olacak şekilde çubuk yüzeyine yerleştirilmiştir. Titreşim sinyalleri ivme ölçer tarafından alınmakta ve Şekil 7.2'de gösterilen analizör tarafından işlenmektedir. Mesnetlerine bağlanan çubuk üzerinde herhangi bir noktadan çubuk düzleminde ve çubuk düzlemine dik doğrultuda olacak şekilde titreşim meydana getirecek bir etki yaratılmış ve bu etkinin çubuk üzerinde yarattığı titreşim sensör tarafından algılanmıştır.



Şekil 7.2. Titreşim Analizörü (Brüel&Kjaer, 2515).

Deney sırasında kullanılan deney çubuğu, dökme demir malzemeden imal edilmiş olup, çubuğun boyut değerleri ve malzeme özellikleri aşağıda verilmektedir;

$E = 9.0 \times 10^{10}\ N/m^2$ $G = 3.46 \times 10^{10}\ N/m^2$ $\nu = 0.3$

$\rho = 7850\ Kg/m^3$ $b \times h = (21 \times 34)\ mm$ $R = 200\ mm$

Deney sonuçları, üç farklı sınır şartlarında elde edilmiştir. Deneyler, çubuğun hem düzlem-içi ve hem de düzlem-dışı titreşimlerini elde edecek şekilde yapılmıştır. Her bir deney, sonuçlar arasındaki uygunsuzluğu azaltacak seviyede bir çok kez tekrar edilmiştir. Frekans aralığı, deney çubuğunun ilk on rezonans frekansını ölçebilecek şekilde 0-2 kHz. olarak seçilmiştir. Ölçülen bütün değerler tablolarda Hertz biriminde verilmiş, düzlem içi titreşim değerleri koyu rakamlarla yazılmıştır.

Sonlu eleman yöntemiyle frekanslar hesaplanmıştır. Bu amaçla, Ansys sonlu eleman paket programı kullanılmıştır. Çubuğun sonlu eleman analizinde, hem çubuk eleman hem de üç boyutlu katı eleman kullanılmıştır.

Dairesel eğri eksenli çubuğun ankastre-serbest mesnet durumu için analitik, deneysel ve Ansys sonuçları Tablo 7.1' de verilmiştir. Deneysel ve analitik sonuçlar arasındaki hata oranı %0.25 ile %16.8 arasında, sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen sonuçlar arasındaki hata oranı ise %0.38 ile %12.2 arasında değişmektedir. Sonlu eleman sonuçlarından, katı eleman kullanılarak elde edilen sonuçların analitik çözümün sonuçlarına daha yakın olduğu görülmektedir. Çubuk eleman kullanılarak elde edilen sonuçlar, analitik sonuçlardan bir miktar farklıdır. Deneysel sonuçların analitik çözümün sonuçlarıyla oldukça uyumlu olduğu görülmektedir.

Tablo 7.1. Ankastre-serbest mesnet durumu için frekans değerleri.

Mod No	Deneysel Sonuçlar	Analitik Sonuçlar	ANSYS (Beam4)	ANSYS (Solid95)
1	40	34.89	38.85	35.14
2	56	57.40	57.09	57.45
3	104	110.74	115.34	110.79
4	168	178.97	177.68	179.71
5	344	373.00	385.98	372.51
6	601	591.11	591.43	598.67
7	856	814.74	832.69	810.88
8	1152	1290.76	1275.10	1293.30
9	1384	1310.27	1352.90	1308.10
10	1544	1617.42	1651.20	1612.90

Ankastre-ankastre mesnet durumu için, analitik, deneysel ve Ansys sonlu eleman doğal frekans sonuçları Tablo 7.2 'de verilmiştir.

Sonuçlardan görüleceği üzere, analitik ve ölçülen frekanslar arasındaki hata, %3.34 ile %17.6 arasında, sonlu elemanlar yöntemi ve ölçülen frekanslar arasındaki hata ise %3.8 to %15.7 arasında değişmektedir. Analitik ve Ansys (Solid95) sonuçları arasında iyi bir uyum olduğu görülmektedir.

Tablo 7.2. Ankastre-ankastre mesnet durumu için frekans değerleri.

Mod No	Deneysel Sonuçlar	Analitik Sonuçlar	ANSYS (Beam4)	ANSYS (Solid95)
1	144	148.84	149.78	149.47
2	464	425.52	428.85	425.09
3	**640**	**549.30**	**546.77**	**554.73**
4	928	880.73	883.47	877.36
5	**1256**	**1129.20**	**1124.90**	**1142.50**
6	1688	1486.04	1484.00	1476.70
7	1760	1974.46	2036.20	1998.00
8	**1960**	**2043.50**	**2187.70**	**2067.80**
9	2033	2226.43	2215.70	2207.50
10	**2256**	**2399.50**	**2397.60**	**2415.60**

Dairesel eğri eksenli çubuğun serbest-serbest mesnet durumu için analitik, deneysel ve Ansys doğal frekans sonuçları Tablo 7.3'de verilmiştir. Bu örnekte, analitik sonuçlar ve sonlu eleman yöntemi ile elde edilen sonuçlar arasında iyi bir uyum olduğu görülmektedir.

Tablo 7.3. Serbest-serbest mesnet durumu için frekans değerleri.

Mod No	Deneysel Sonuçlar	Analitik Sonuçlar	ANSYS (Beam4)	ANSYS (Solid95)
1	**260**	**240.52**	**239.30**	**241.24**
2	340	346.64	370.38	345.63
3	**680**	**681.12**	**677.81**	**685.60**
4	760	715.93	734.15	712.11
5	1080	1314.76	1337.60	1308.50
6	1380	1332.74	1378.50	1331.50
7	**1520**	**1388.50**	**1382.10**	**1399.50**
8	2140	1929.63	2098.60	1934.10
9	2340	2232.14	2250.20	2213.70
10	**2480**	**2298.80**	**2289.10**	**2319.50**

Eğri eksenli çubuğun ankastre-sabit mesnet durumu için rezonans frekans değerleri Tablo 7.4 'de verilmiştir. Deneysel sonuçlar ile karşılaştırıldığında, analitik çözümde maksimum hata değeri %22.2, sonlu eleman çözümünde ise %22.6 olarak gerçekleşmiştir.

Tablo 7.4. Ankastre-sabit mesnet durumu için frekans değerleri.

Mod No	Deneysel Sonuçlar	Analitik Sonuçlar	ANSYS (Beam4)	ANSYS (Solid95)
1	140	148.84	149.78	148.82
2	**440**	**414.07**	**412.10**	**425.65**
3	476	425.52	428.85	558.04
4	1072	880.73	883.47	885.07
5	**1288**	**1001.01**	**996.79**	**1159.06**
6	1752	1486.04	1484.00	1503.44
7	**1872**	**1866.16**	**1859.00**	**1805.05**
8	-	1974.46	2187.70	2115.62
9	-	2226.43	2215.70	2271.86
10	**-**	**2396.99**	**2394.70**	**2438.68**

Sabit kesitli eğri eksenli çubuğun sabit-sabit mesnet durumu için analitik, deneysel ve Ansys programı ile elde edilen doğal frekans sonuçları Tablo 7.5' de verilmiştir.

Tablo 7.5. Sabit-sabit mesnet durumu için frekans değerleri.

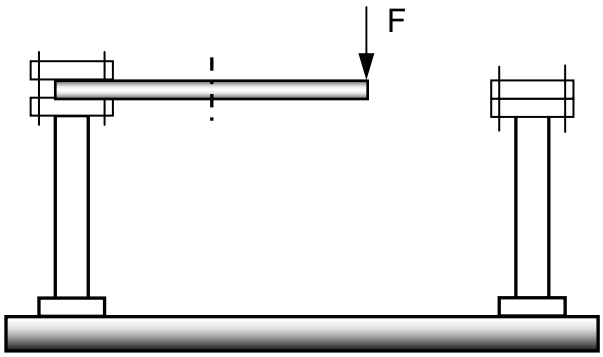
Mod No	Deneysel Sonuçlar	Analitik Sonuçlar	ANSYS (Beam4)	ANSYS (Solid95)
1	142	148.84	149.84	145.55
2	**264**	**292.82**	**291.61**	**294.85**
3	468	425.52	429.03	416.10
4	**864**	**865.21**	**862.02**	**860.55**
5	1064	880.73	883.89	872.41
6	1248	1486.04	1484.80	1450.50
7	**1784**	**1696.16**	**1690.60**	**1707.90**
8	-	1974.46	2188.70	1996.00
9	-	2226.43	2217.30	2170.90
10	**-**	**2390.11**	**2388.60**	**2303.80**

Bu deneylerde, çubuk, düzlem içinde mafsal düzleme dik doğrultuda ise, ankastre davranacak şekilde mesnetlenmiştir. Bu mesnetleme şekli, analitik çözümde de modellenmiştir. Sonuçlardan, analitik ve ölçülen frekanslar arasındaki hatanın, %0.14 ile %18.16 arasında, sonlu eleman yöntemi ve ölçülen frekanslar arasındaki hatanın ise %0.22 ile %18 arasında değiştiği görülmektedir.

Hata; $hata = 1 - \omega/\omega(deney)$ şeklinde tanımlanmaktadır. Analitik sonuçlar ve sonlu eleman yöntemi ile elde edilen sonuçlar arasında oldukça iyi bir uyum olduğu, tablolarda verilen sonuçlardan görülmektedir.

7.2. Çember Eksenli Tek Kademeli Çubuğun Serbest Titreşimleri

Bu bölümde, tek kademeli sabit kesitli çember eksenli çubukların düzlem-dışı serbest titreşimlerinin frekans değerleri detaylı bir çalışmayla ele alınmaktadır. Boyutsuz frekanslar; mesnet durumu ankastre-serbest olacak şekilde, farklı kiriş açıları, farklı kademe konumları ve farklı kademe oranları için ilk beş mod gözönüne alınarak hesaplanmaktadır. Literatürde, tek kademeli sabit kesitli çember eksenli çubukların düzlem-dışı serbest titreşimlerini inceleyen bir çalışmaya rastlanmamıştır.



Şekil 7.3. Tasarlanan deney düzeneğinin şematik gösterimi.

Deneyler, Şekil 7.3'de şematik çizimi gösterilen deney düzeneği kullanılarak yapılmıştır. Deney düzeneği, bir önceki bölümde olduğu gibi, çubuğun statik ve dinamik deneylerinin yapılmasına imkan verecek şekilde üniversal bir yapıda özel olarak tasarlanmış olup, ana kaide, iki adet mesnet, bağlantı elemanları, titreşim sönümleyici lastik takozlar, ölçme elemanı ve ekipmanlarından oluşmaktadır.

Deney sırasında kullanılan ölçme cihazları ve özellikleri aşağıda verilmektedir ;

Analizör ; Marka : Brüel&Kjaer Tip : Pulse

İvme ölçer ; Marka : Brüel&Kjaer Tip : 4507 B

Deney sırasında kullanılan deney çubukları, sıcak çekme levha malzemeden lazer yöntemi ile kesilerek imal edilmiş olup, çubuğun boyut değerleri ve malzeme özellikleri aşağıda verilmektedir;

$E = 2.1 \times 10^{11}\ N/m^2$ $G = 8.077 \times 10^{10}\ N/m^2$ $\nu = 0.3$

$\rho = 7715\ Kg/m^3$ $bxh = (20x10)\ mm$ $R = 200\ mm$

Yapılan çalışmada, dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuklar gözönüne alınmıştır. Şekil 5.2'de gösterilen tek kademeli değişken kesitli çubukta, h_1 ve h_2 sırasıyla birinci ve ikinci bölgelerdeki kesit yükseklikleri, b_1 ve b_2 de kesit genişlikleridir.

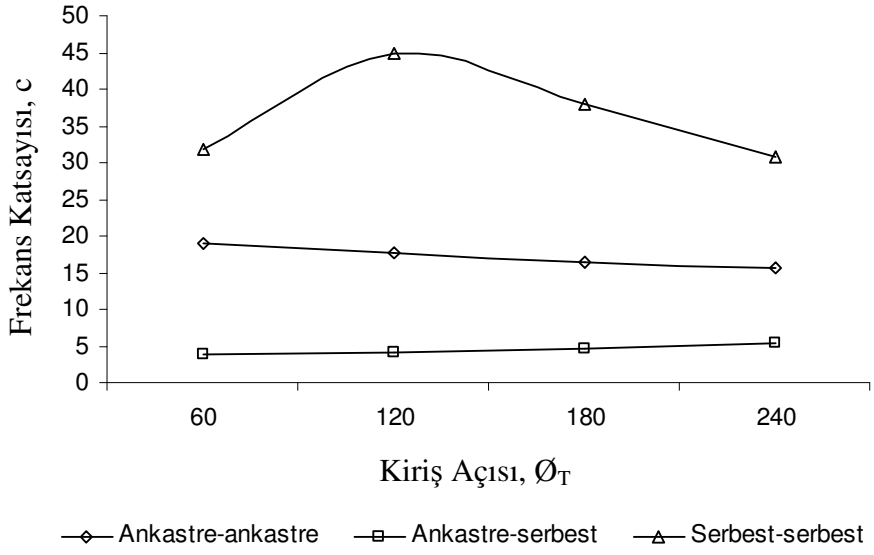
Tablo 7.6. Ankastre-serbest mesnet durumu için, deneysel ve analitik frekans değerleri (η=0.8, tüm etkiler dikkate alınmıştır).

	Mod	ϕ_T=120°			ϕ_T=180°		
		Deneysel	Analitik	Ansys (Solid 95)	Deneysel	Analitik	Ansys (Solid 95)
ψ/ϕ_T = -0.2	1	50	57.255	57.548	28	28.446	28.580
	2	214	230.596	230.990	76	87.593	87.753
	3	672	718.419	719.250	266	281.419	281.720
	4	1466	1477.495	1478.000	582	619.953	620.010
	5	2384	2389.728	2396.700	1008	1082.819	1083.400
ψ/ϕ_T = 0.0	1	52	58.427	58.778	28	29.197	29.351
	2	210	227.730	227.920	78	86.457	86.570
	3	654	724.514	725.610	266	283.348	283.630
	4	1348	1480.722	1480.000	584	621.202	620.910
	5	2144	2348.291	2354.900	1002	1078.046	1078.400
ψ/ϕ_T = 0.2	1	52	57.513	57.877	28	28.739	28.900
	2	208	226.845	226.960	64	85.690	85.770
	3	652	728.662	729.110	270	286.737	286.880
	4	1372	1502.867	1504.000	590	631.396	631.480
	5	2152	2347.900	2354.200	1012	1089.225	1089.100

Burada verilen tüm örneklerde $h_1 = h_2$ olarak alınmaktadır. A_1 ve A_2 bölgelerin kesit alanlarını I_1 ve I_2 ise binormal eksene göre alan eylemsizlik momentlerini gösteren büyüklüklerdir.

Frekanslar; ankastre-serbest mesnet durumu için çeşitli kabuller gözönüne alınarak hesaplanmış, kayma deformasyonu ve hem eğilme hem de burulmadan kaynaklanan dönme eylemsizliğinin sonuca olan etkileri de incelenmiştir. Frekans değerleri, Matlab programı kullanılarak hesaplanmıştır. Tablo 7.6'da, kiriş açıklığı 120^0 ve 180^0 olan dikdörtgen kesitli çember eksenli çubukların, deneysel, analitik ve sonlu eleman yöntemi ile elde edilen frekans değerleri verilmektedir.

Şekil 7.4'de verilen grafikte, dikdörtgen kesitli çember eksenli çubukların, ankastre-ankastre, ankastre-serbest ve serbset-serbest sınır şartlarında, boyutsuz frekans değerlerinin kiriş açısı ile değişimi verilmektedir. Grafikte yatay eksen, kiriş açısını gösterirken, düşey eksen, boyutsuz frekans değerlerini vermektedir.

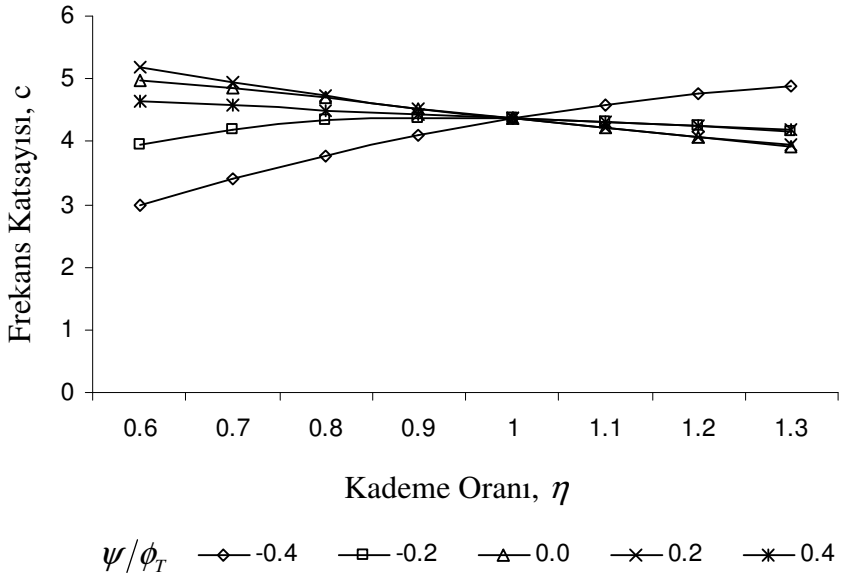


Şekil 7.4. Dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun verilen sınır şartlarındaki boyutsuz frekans değerleri, ($\lambda = 50, \eta = 0.8, \psi/\phi_T = 0^0$).

Serbest-serbest sınır şartında elde edilen boyutsuz frekans değerlerinin, diğer sınır şartlarında elde edilen boyutsuz frekans değerlerinden daha büyük olduğu görülmektedir.

Kademenin konumu ψ/ϕ_T ile tanımlanmaktadır. Kademe oranın birden küçük değerleri için (η<1); kademe yatay eksen üzerinde sağa doğru ilerlerken, yani ψ/ϕ_T büyüklüğü, -0.2 değerinden +0.2 değerine yaklaşırken gerçek sistemde kademe, kütle artışıyla birlikte sağa doğru ilerlemektedir. Kademe oranının 1'den büyük değerleri için (η>1) ise ψ/ϕ_T 'nin artmasıyla kütle azalmaktadır.

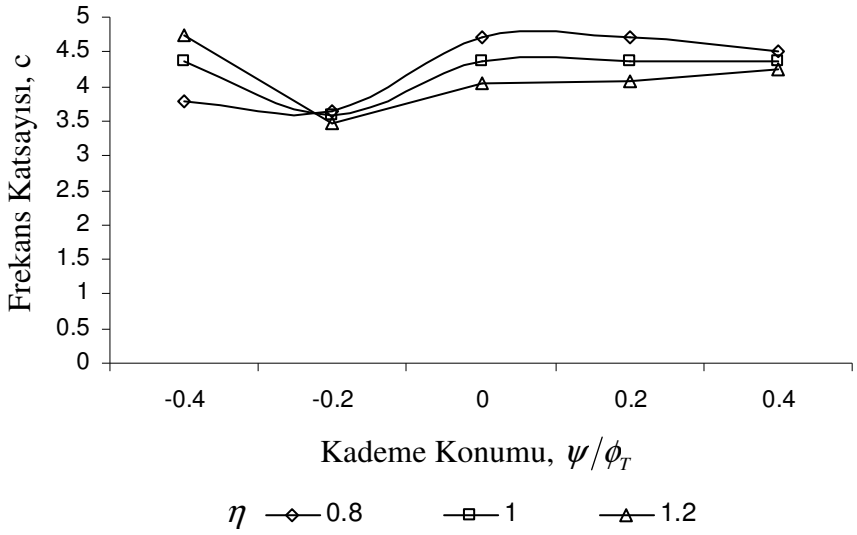
Şekil 7.5'de verilen grafikte, dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun, ankastre-serbest sınır şartında ve farklı kademe konumlarında, boyutsuz frekans değerlerinin kademe oranı ile değişimi verilmektedir.



Şekil 7.5. Dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun boyutsuz frekans değerlerinin kademe oranı ile değişimi, ($\lambda = 50$, $\phi_T = 180^0$.).

Grafikten görüldüğü gibi, kademe oranının bire eşit olduğu durumda, farklı kademe konumundaki boyutsuz frekans değerleri birbirine eşit olmaktadır. ψ/ϕ_T = - 0.4 kademe konumunda elde edilen boyutsuz frekanslar, kademe oranının artması ile birlikte artmaktadır. Kademe konumu ve kademe oranı değeri artıkça, boyutsuz frekans değerleri azalmaktadır. Kayma deformasyonu ve hem eğilme hem de burulma dönme eylemsizliklerinin boyutsuz frekansa olan etkilerini de elde etmek mümkündür. Burada verilen sonuçlarda, söz konusu etkiler yapılan hesaplarda gözönüne alınmıştır.

Şekil 7.6'da verilen grafikte, dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun, ankastre-ankastre sınır şartında ve farklı kademe oranlarında, boyutsuz frekans değerlerinin kademe konumu ile değişimi verilmektedir.



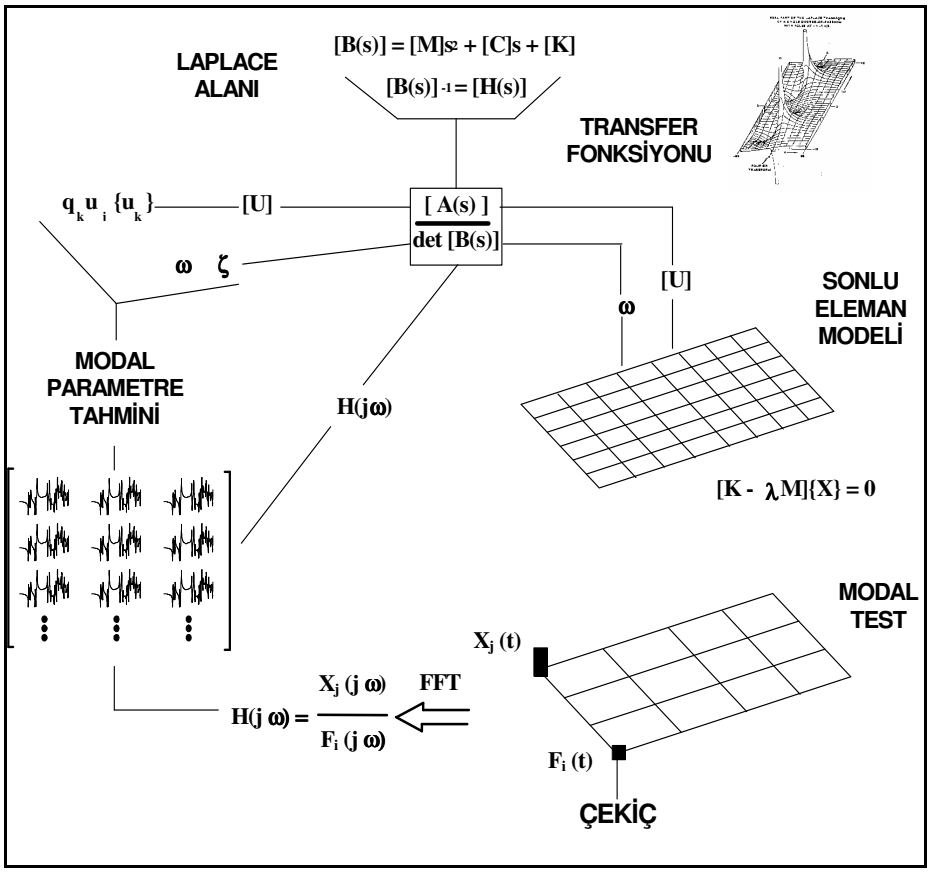
Şekil 7.6. Dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun boyutsuz frekans değerlerinin kademe konumu ile değişimi, ($\lambda = 50$, $\phi_T = 180^0$.).

ψ/ϕ_T = - 0.2 kademe konumunda elde edilen boyutsuz frekanslar, bütün kademe oranlarında birbirine eşit olmuştur.

7.3. Deneysel Modal Analiz

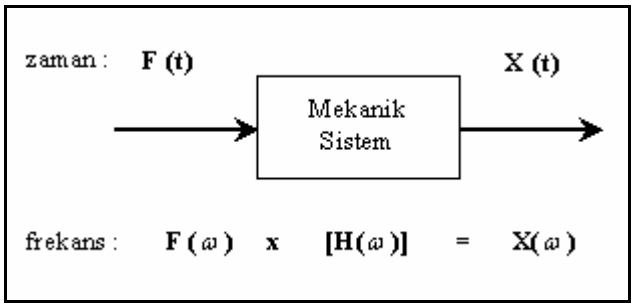
Makina ve yapıların doğal frekansları, sistemin dinamik davranışını önceden tahmin etmek ve anlamak için oldukça önem taşır. Bundan dolayı, titreşim ölçümü ya da titreşim testi, sistemin doğal frekanslarını tespit etmek ve sistemin analitik modelini doğrulamak amacı ile yapılır.

Ölçülen frekanslar ve mod şekilleri, analitik model yardımı ile ortaya konan frekanslar ve mod şekilleri ile birbirine yakın olursa, analitik model, tasarım ve diğer amaçlar için kullanılabilir. Titreşim testleri, makina ve yapıların dinamik dayanımları ve bakım planlamasında da önemli ölçüde kullanılmaktadır. Şekil 7.7'de titreşim ölçümü ve deneysel modal analiz yönteminin aşamaları gösterilmektedir.



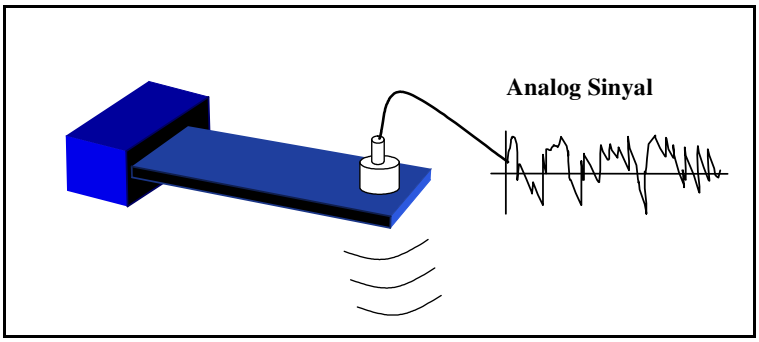
Şekil 7.7. Titreşim ölçümü ve deneysel modal analiz.

Deneysel modal analiz, 1970'li yılların başında dijital FFT (Fast Fourier Transform) spektrum analizörü kullanımı ile birlikte bugüne kadar düzenli bir şekilde gelişme göstermiştir. Bugün ise, bu amaçla geliştirilen makina ve sistemler kullanılmaktadır. Deneysel modal analiz yöntemi, deney parçasında titreşim etkisi yaratılarak FFT analizörü yardımı ile FRF (Frequency Response Function) değerlerinin ölçümü temeline dayanmaktadır. Bir FRF fonksiyonunun blok diyagramı, aşağıda Şekil 7.8'de gösterilmektedir.



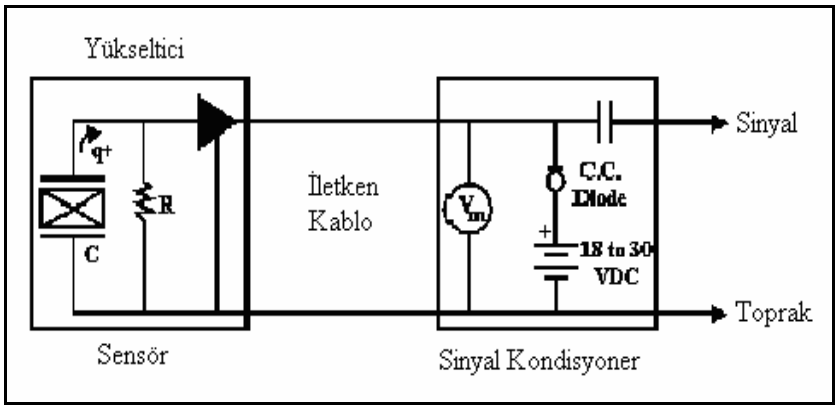
Şekil 7.8. FRF fonksiyonu blok diyagramı.

Mod ya da rezonans, bir yapının var olan doğal özelliğidir. Rezonans; kütle, rijitlik ve sönümleme özelliği gibi malzeme özellikleri ile yapının sınır şartları kullanılarak belirlenir. Her bir mod, doğal frekans ya da mod şekli olarak tanımlanabilir.



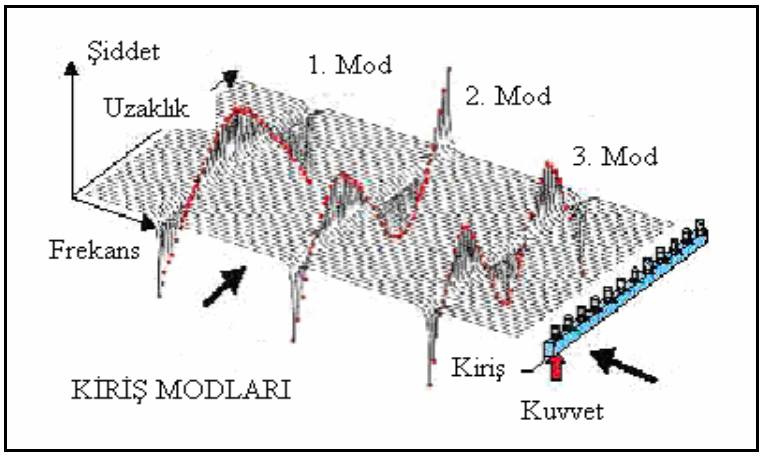
Şekil 7.9. Deney çubuğu ve analog signal üretimi.

Titreşim ölçümü ve titreşim testi, modal test, modal analiz ve deneysel modal analiz gibi yöntemlerle yapılmaktadır. Deneysel modal analiz çalışmasında, ivme ölçer, titreşim analizörü ve çekiç gibi temel ölçüm elemanları kullanılır. Şekil 7.9'de bir deney çubuğunda ivmeölçer yardımı ile titreşim ölçümü ve sinyal üretimi şematik olarak gösterilmektedir.



Şekil 7.10. Piezoelektrik eleman ve sinyal kondisyoneri.

Titreşim ölçümü için kullanılan ve transduser adı verilen ivmeölçerler, küçük boyutlu, geniş frekans ve dinamik aralıklara sahip piezoelektrik elemanlardır. Titreşim analizörü, piezoelektrik ivme ölçer ile titreşim sinyallerini alan, bunları işyen ve bu sinyalleri ekranında frekans spektrumu olarak gösterir. Piezoelektrik eleman ve sinyal kondisyonerinin şematik gösterimi Şekil 7.10'da verilmektedir.

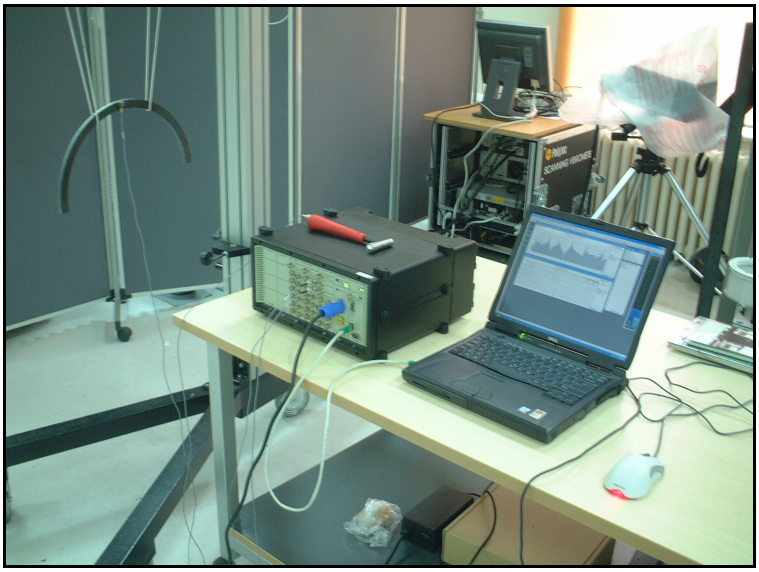


Şekil 7.11. Bir kirişin titreşimi ve titreşim modları.

Ölçüm yapılacak deney çubuğunda titreşim hareketini başlatmak için ise, darbe uygulanan ucunda kuvvet transduseri bulunan çekiç kullanılır. Bir kirişin titreşimi ve titreşim modlarına ait şematik gösterim Şekil 7.11'da verilmektedir.

7.3.1. Deney Sonuçları ve Mod Şekilleri

Deneysel modal analiz çalışmasında da Şekil 7.12'de verilen deney düzeneği ve diğer ölçme elemanları kullanılmıştır. Çember eksenli düzlemsel eğri eksenli çubuğun, ankastre-ankastre, ankastre-serbest ve serbest-serbest sınır şartlarında titreşim ölçümleri yapılmış ve mod şekilleri elde edilmiştir.



Şekil 7.12. Deney düzeneği ve kullanılan ölçme elemanları.

Deney sırasında kullanılan ölçme cihazları ve özellikleri aşağıda verilmektedir ;

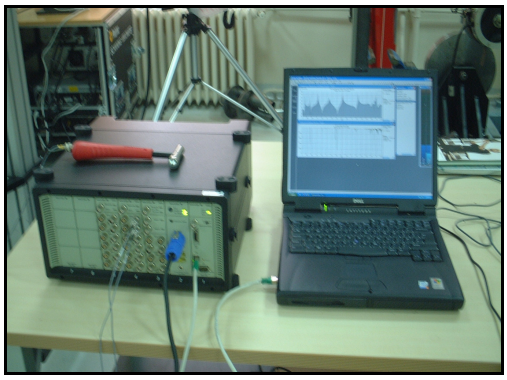
Analizör ;	Marka : Brüel&Kjaer,	Tip : PULSE data acquisition modülü.
İvme ölçer ;	Marka : Brüel&Kjaer	Tip : 4507 B
Çekiç ;	Marka : Endevco	Tip : 2302-10

Mevcut deney düzeneğinde, yapılan testlerden elde edilen titreşimlerin ölçümünü yapmak, verileri depolamak, toplanan veriler ile karşılaştırma ve yorumlar yapabilmek amacı ile ivme ölçer ve titreşim analizörü kullanılmıştır.

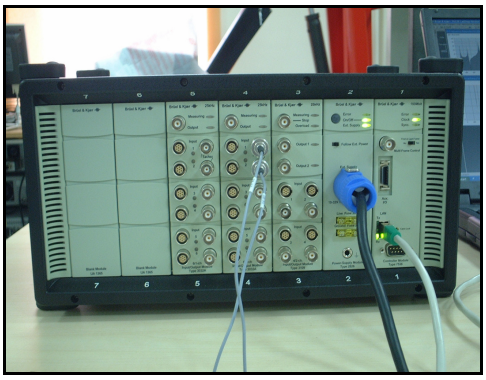
Deney sırasında kullanılan deney çubukları, sıcak çekme levha malzemeden lazer yöntemi ile kesilerek imal edilmiş olup, çubuğun boyut değerleri ve malzeme özellikleri aşağıda verilmektedir;

$E = 2.1 \times 10^{11}\ N/m^2$ $G = 8.077 \times 10^{10}\ N/m^2$ $\nu = 0.3$

$\rho = 7715\ Kg/m^3$ $b \times h = (20 \times 10)\ mm$ $R = 200\ mm$



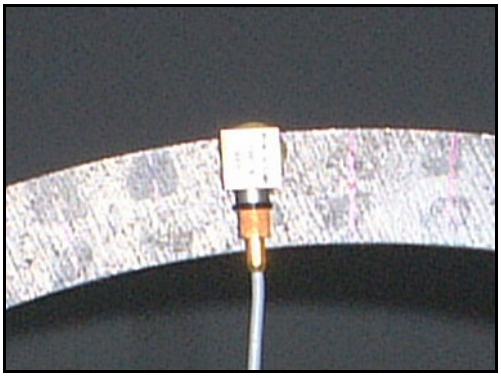
(a)



(b)



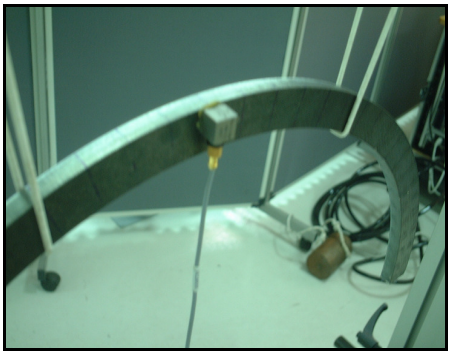
(c)



(d)

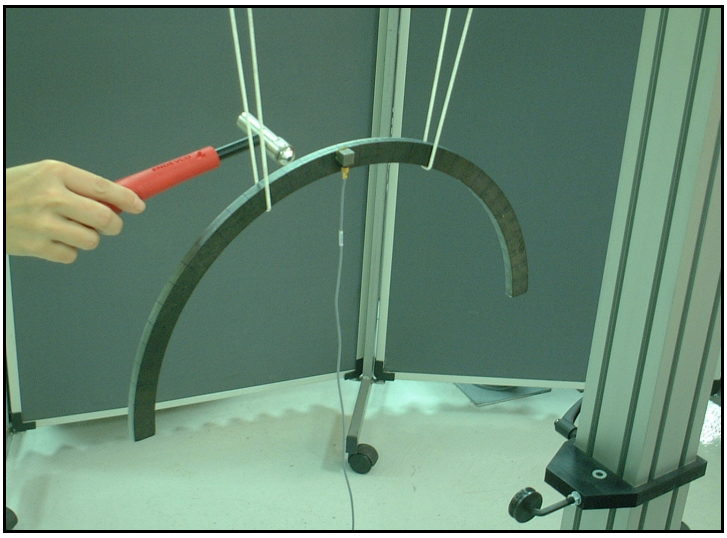
Şekil 7.13. Deney sırasında kullanılan ölçme elemanları; (a),(b); analizör, (c) darbe çekici, (d) piezoelektrik ivme ölçer.

Deneysel modal analiz çalışması, 120^0, 160^0 ve 180^0 eksen açıklığına sahip çember eksenli deney çubukları üzerinde yapılmıştır. 120^0 ve 160^0 eksen açıklığına sahip düzlemsel eğri eksenli çubuğun, ankastre-serbest sınır şartında, 180^0 eksen açıklığına sahip düzlemsel eğri eksenli çubuğun, ankastre-ankastre, ankastre-serbest ve serbest-serbest sınır şartlarında titreşim ölçümleri yapılmıştır.

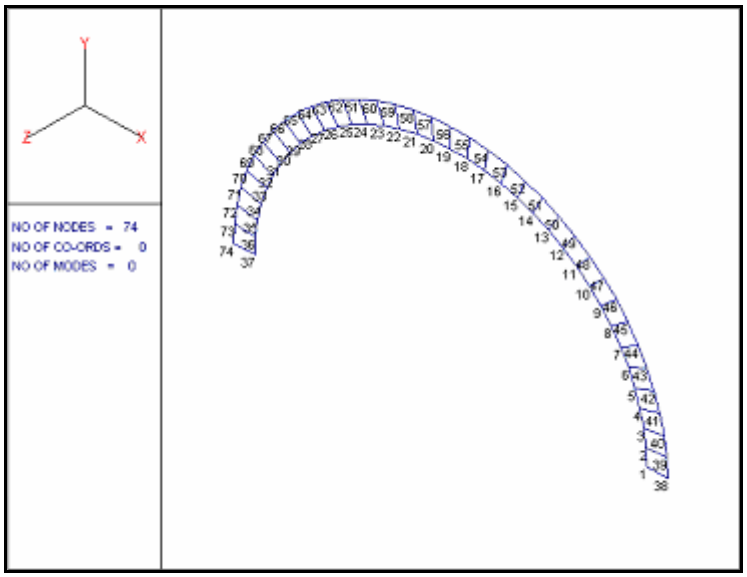


Şekil 7.14. Deney çubuğu üzerine yapıştırılmış piezoelektrik ivme ölçer.

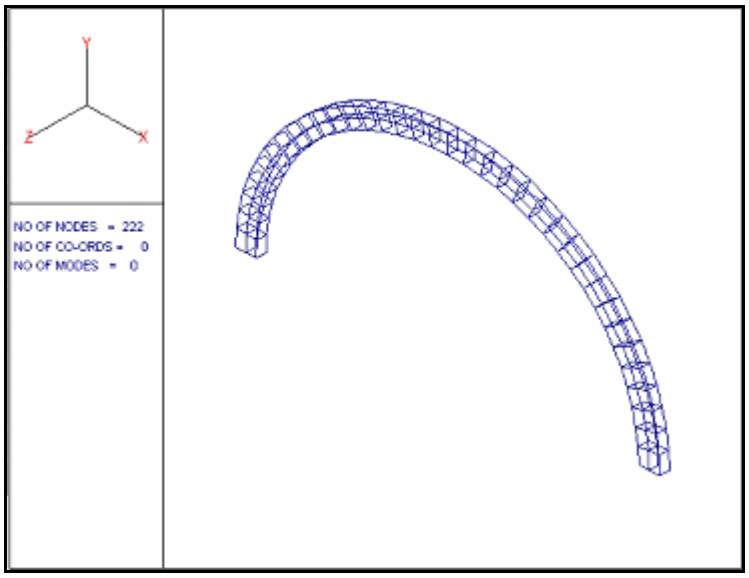
Deney çubukları, her bir parçası 5^0 olacak şekilde parçalara ayrılarak, çubuğun, 36 elemanlı 4 nodlu kabuk modeli (Şekil 7.16) ve 72 elemanlı 20 nodlu katı modeli (Şekil 7.17) oluşturulmuştur.



Şekil 7.15. Serbest-serbest mesnetli eğri eksenli çubuğun düzlem dışı modal analiz deneyi.

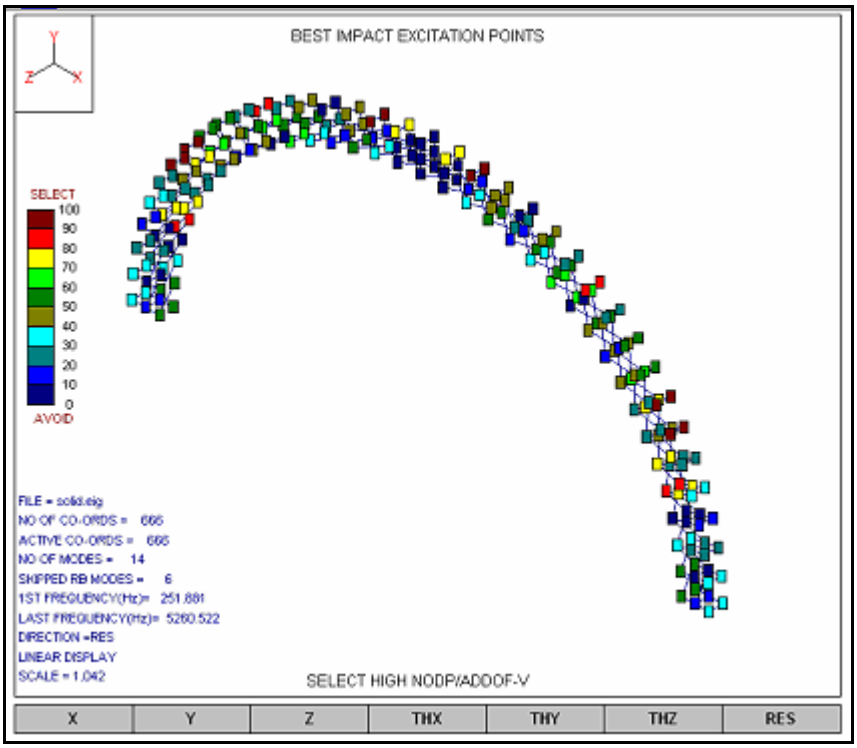


Şekil 7.16. 36 elemanlı, 4 nodlu çubuk kabuk modeli.

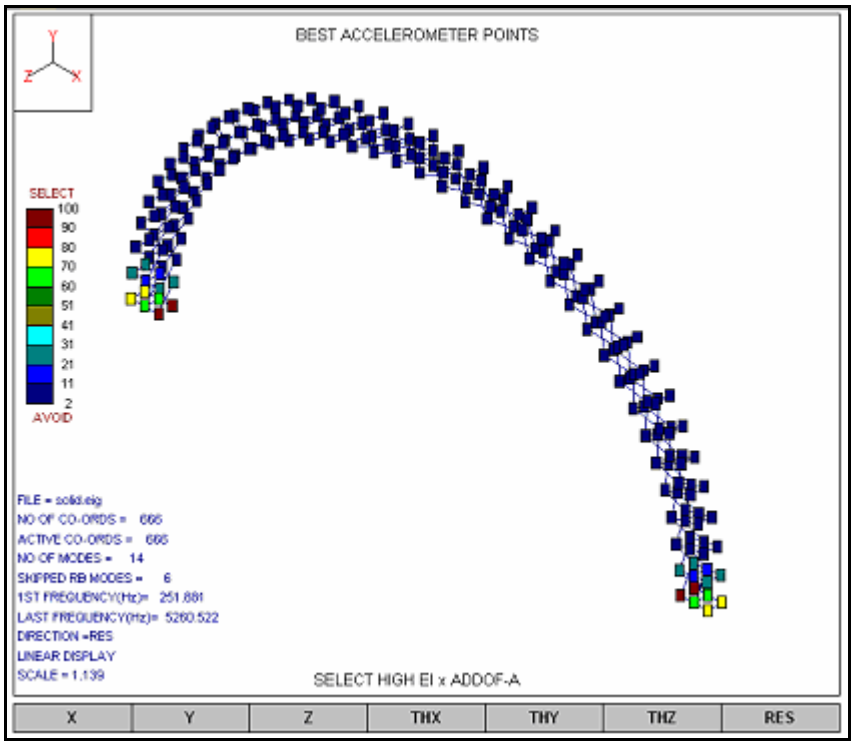


Şekil 7.17. 72 elemanlı, 20 nodlu çubuk katı modeli.

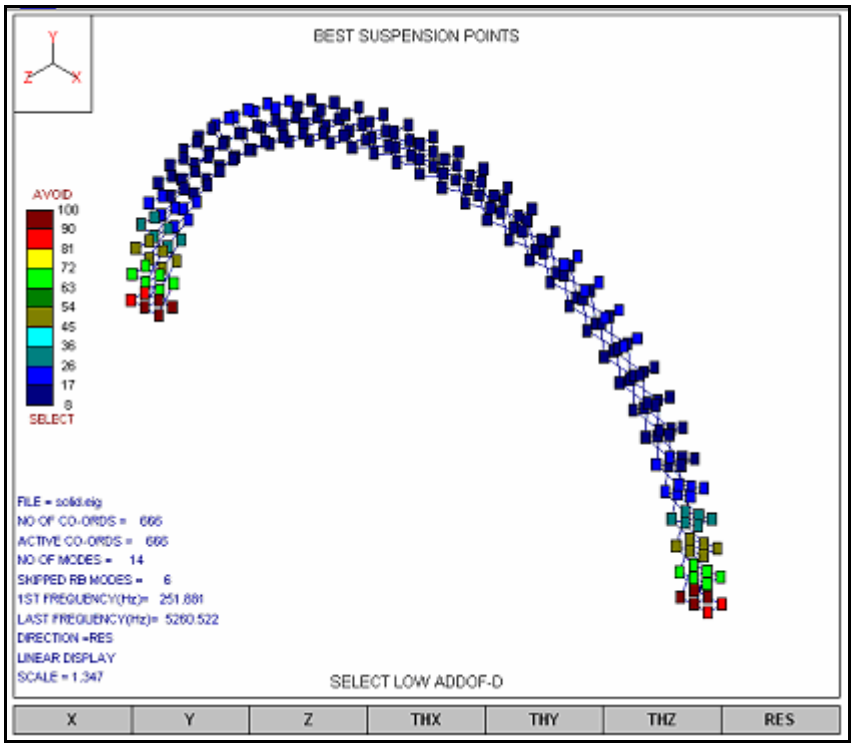
Çubuğun mesnetleme şekline bağlı olarak, çubuk üzerinde en iyi vurma noktaları tespit edilmiş, bu noktalar aynı olacak şekilde, ivme ölçer yardımı ile her noktadan frekans ölçümü yapılarak kaydedilmiştir.



Şekil 7.18. En iyi çekiç ile darbe uygulama noktaları (Serbest-serbest).



Şekil 7.19. En iyi ivmeölçer yerleştirme noktaları (Serbest-serbest).



Şekil 7.20. Çubuğun en iyi asma noktaları (Serbest-serbest).

Toplanan bu veriler (frekans değerleri) ICATS programı yardımı ile işlenerek, çubuğun her bir doğal frekansına karşılık gelen mod şekilleri elde edilmiştir. FINES programı ve çubuğun katı modeli (72 elemanlı 20 nodlu) kullanılarak da sonlu eleman hesabı yapılmıştır. Buna ilave olarak, ANSYS programı ile de frekans değerleri ve mod şekilleri elde edilmiştir.

7.3.1.1. 120^0 ve 160^0 Eksen Açıklığına Sahip Çember Eksenli Çubuk

Burada, 120^0 ve 160^0 eksen açıklığına sahip çember eksenli çubukların yapılan deneysel modal analiz çalışması ve elde edilen sonuçlar verilmektedir. Sözü edilen düzlemsel eğri eksenli çubukların, ankastre-serbest sınır şartında titreşim ölçümleri yapılarak, doğal frekansları ve mod şekilleri belirlenmiştir.

Deney çubuğunun malzeme özellikleri ve geometrik boyutları giriş bölümünde verildiği gibidir.



Şekil 7.21. Deney sırasında elde edilen Frf (Frequency Response Function) örneği.

Tablo 7.7. Ankastre-serbest mesnet durumu için frekans değerleri, $\phi_T = 120^0$ *ve* 160^0 .

ϕ_T	Mod No	Deneysel Sonuçlar	Analitik Sonuçlar	ANSYS (Solid 95)	FINES (Solid 20)
$\phi_T = 120^0$	1	46.445	52.970	53.366	53.875
	2	205.440	219.740	220.250	221.991
	3	652.837	717.769	719.590	724.226
	4	1308.350	1472.810	1475.000	1485.420
	5	1693.997	-	-	-
	6	2102.782	2162.289	2172.800	2196.142
	7	2520.022	2671.460	2676.600	2696.297
	8	3640.580	3861.836	3873.100	3911.409
	9	4597.335	4635.080	4680.100	4784.645
	10	5270.798	5401.260	5420.400	5488.813
$\phi_T = 160^0$	1	29.297	32.096	32.327	32.794
	2	102.410	109.936	110.160	111.161
	3	346.506	373.357	374.070	377.046
	4	741.162	807.817	808.460	813.909
	5	1244.391	1375.336	1377.000	1386.961
	6	1874.739	1937.086	1940.600	1956.519
	7	2171.588	2271.420	2276.600	2292.478
	8	2850.625	3040.441	3044.200	3071.579
	9	3466.707	3657.382	3687.600	3759.218
	10	3877.673	4082.105	4089.900	4134.863

7.3.1.2. 180^0 Eksen Açıklığına Sahip Çember Eksenli Çubuk

Burada, 180^0 eksen açıklığına sahip çember eksenli deney çubukların yapılan deneysel modal analiz çalışması ve elde edilen sonuçlar verilmektedir.

Tablo 7.8. Çember eksenli çubuğun frekans değerleri, $\phi_T = 180^0$.

Mesnet Durumu	Mod No	Deneysel Sonuçlar	Analitik Sonuçlar	ANSYS (Solid 95)	FINES (Solid 20)
Ankastre-ankastre	1	102.271	110.093	110.620	111.304
	2	292.722	317.304	318.220	320.567
	3	601.571	661.813	663.390	668.352
	4	1107.368	1127.279	1129.800	1138.737
	5	1427.322	1708.030	1712.000	1726.928
	6	2291.072	2399.962	2405.900	2429.724
	7	2554.468	2662.156	2683.000	2721.391
	8	2955.959	3199.224	3208.000	3244.348
	9	3953.762	4101.897	4083.900	4087.691
	10	4072.542	4248.032	4296.400	4392.157
Ankastre-serbest	1	25.179	26.507	26.689	27.119
	2	80.560	82.768	82.938	83.514
	3	270.341	281.784	282.270	284.125
	4	591.168	624.168	624.520	627.751
	5	1016.274	1079.980	1080.700	1086.415
	6	1488.125	1623.020	1624.100	1634.114
	7	1981.025	2001.874	2006.800	2019.365
	8	2361.317	2432.606	2434.500	2449.800
	9	3033.311	3155.920	3164.600	3195.986
	10	-	3413.630	3433.400	3490.920
Serbest-serbest	1	262.219	263.841	263.790	266.308
	2	561.112	566.824	566.070	568.600
	3	1040.852	1054.107	1052.900	1058.641
	4	1449.476	1471.630	1470.700	1475.232
	5	1902.611	1928.182	1928.100	1931.810
	6	2163.492	2185.054	2186.400	2208.095
	7	2669.678	2709.119	2714.700	2741.815
	8	3146.360	3188.051	3186.400	3207.896
	9	4083.180	4132.340	4131.500	4163.322
	10	-	5160.683	5162.900	5212.750

Elde edilen bu frekans değerleri ile sınır şartlarının oluşturduğu denklemler kullanılarak mod şekilleri elde edilmiştir. Sözü edilen düzlemsel eğri eksenli çubuğun, ankastre-ankastre, ankastre-serbest ve serbest-serbest sınır şartlarında titreşim ölçümleri yapılarak, doğal frekansları ve mod şekilleri belirlenmiştir. Deney çubuğunun malzeme özellikleri ve geometrik boyutları giriş bölümünde verildiği gibidir.

Bu bölümde yer verilen bütün çubulara ait, deneysel olarak ve Ansys yardımı ile elde edilen mod şekilleri ekler bölümünde verilmiştir.

8. SONUÇLAR ve TARTIŞMA

Bu çalışmada, eğri eksenli düzlemsel çubukların düzlem dışı statik ve dinamik problemleri; kayma deformasyonu ve hem eğilme hem de burulmadan kaynaklanan dönme eylemsizliği etkileri ihmal edilmeden analitik olarak elde edilmiştir. Temel diferansiyel denklem takımı, en genel durum için verilmiş, diferansiyel denklem takımının kesin çözümü, başlangıç değerleri yöntemiyle elde edilmiştir. Böylece, birçok çalışmada ancak yaklaşık hesabı yapılabilen eğri eksenli düzlemsel çubukların, düzlem dışı statik ve dinamik problemlerinin kesin hesabı yapılmıştır.

Eğri eksenli düzlemsel çubukların düzlem dışı statik ve dinamik problemleri konusunda literatürde önemli çalışmalar bulunmaktadır. Yapılan kaynak taramasında çubuk teorisinin genel denklemlerine çeşitli birleştirici varsayımlarla ve yaklaşık yöntemlerle çözüm arandığı görülmüştür. Çubuğun geometrisi, mesnetleme şartları ve yükleme durumu ile ilgili basitleştirici varsayımlar yapan çalışmalarda, özellikle son yıllarda, sonlu eleman yöntemi başta olmak üzere, çeşitli yaklaşık sayısal yöntemler kullanılarak çözümler verilmiştir. Dolayısıyla sonuçlarda, yöntemin yaklaşık olmasından kaynaklanan hatanın yanısıra, kullanılan elemandan kaynaklanan hatanın da bulunacağı söylenebilir.

Düzlemsel eğri eksenli çubuğun statik probleminin çözümünde, eksen eğri tipi bilinen dairesel sabit kesitli bir düzlemsel çubuğun, herhangi bir noktasından ve herhangi bir doğrultuda tekil kuvvetle yüklenmesi durumu için çözüm elde edilmiştir. Düzlemsel eğri eksenli çubuğun statik problemini karakterize eden büyüklükleri belirlerken ortaya çıkan denklem ve bünyesindeki integrallerin karmaşıklığı, bunların çözümünde bilgisayar kullanımı gereğini ortaya koymuştur. Bu amaçla, diferansiyel denklem takımları bünyesinde yer alan bütün integraller Mathematica, Mathcad ve Matlab programları yardımıyla çözülmüştür. Elde edilen integral çözümleri analitik olarak birleştirilerek genel çözüme ulaşılmıştır.

Eğri eksenli düzlemsel çubukların düzlem dışı statik probleminin çözümünde kullanılan, kayma deformasyonu etkisinin ihmal edildiği ve eksen eğrisinin sadece çember olarak ele alındığı yaklaşık analitik yöntemler, basit durumların analizi için uygun olmaktadır. Öte yandan, sınır şartlarına ve çubuk eksen eğrisine bağlı yerdeğiştirme fonksiyonları nedeniyle her bir problem için ayrı bir formülasyon verilmektedir. Burada ise, eğri eksenli düzlemsel çubukların düzlem dışı statik probleminin kesin çözümü, çubuk eksen eğrisi ve kesidi ne olursa olsun, yerdeğiştirme, eğim, kesit dönmesi ve gerilme değerlerinin çubuk eksen eğrisi boyunca belirlenmesine imkan verecek şekilde, kayma deformasyonu etkisi de dikkate alınarak, başlangıç değerleri yöntemi yardımı ile elde edilmiştir. Asal matris analitik olarak belirlenmiş, çember eksenli sabit kesitli ve parabol eksenli değişken kesitli çubuklar için, asal matrisler ve asal matrislerin tersinin analitik ifadeleri elde edilmiştir. Tekil yüklerin simetrik olmayan noktadan etkidiği çubukların hesabında, simetrik olmayan geometri ve yükleme durumundaki çubuklar için hesap yöntemi verilmiştir.

Literatürde verilen birçok sayısal örneğin çözümü yapılarak, elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Sonuçlar arasında oldukça iyi bir uyum olduğu görülmüştür.

Çalışmanın titreşim ile ilgili bölümünde, eğri eksenli dairesel sabit kesitli düzlemsel çubukların düzlem dışı titreşimleri, kayma deformasyonu ve hem eğilme hem de burulmadan kaynaklanan dönme eylemsizliği etkileri dikkate alınarak incelenmiştir. Diferansiyel denklem takımının kesin çözümü, başlangıç değerleri yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Frekanslar, ankastre-ankastre, ankastre-serbest ve serbest-serbest olmak üzere, üç farklı mesnetleme durumu için elde edilmektedir.

Farklı narinlik oranları ve farklı eksen eğrisi açıklık değerlerinde, çubuğun ilk beş modu için boyutsuz frekans katsayıları belirlenmiştir. Elde edilen sonuçlar, narin ve sığ çubuklarda da olduğu gibi, kayma deformasyonu ve hem eğilme hem de burulmadan kaynaklanan dönme eylemsizliği etkilerinin rezonans frekansları üzerinde öneme haiz bir etkisi olduğunu göstermiştir. Burulmadan kaynaklanan dönme eylemsizliği etkisi, eğri eksenli düzlem çubukların düzlem dışı titreşimleri konusunda en önemli etki olarak karşımıza çıkmaktadır.

Eğri eksenli düzlemsel çubukların düzlem dışı titreşimlerinde, çubuk eğriliğine etki eden mod geçişi olayı da incelenmiş ve bu durum verilen grafiklerde gösterilmiştir. Yapılan literatür incelemesi sırasında, mod geçişi konusunu ele alan bir çalışmaya rastlanmamıştır. Öte yandan, kayma deformasyonu ve eğilme nedeni ile ortaya çıkan dönme eylemsizliği etkilerinin önemi, yüksek mod sayıları ve küçük kiriş açılarında ortaya çıktığı görülmüştür. Eğri eksenli çubukların titreşim problemi, diğer birçok çalışmaya da araştırma konusu olmuş ve bu çalışmalarda verilen örneklere ilişkin karşılaştırmalı sonuçlar tablolar halinde verilmiştir. Yapılan hesaplarda, sözü edilen etkiler dikkate alınmış, kesitin çarpılma etkisi ihmal edilmiştir. Elde edilen sonuçlar arasında iyi bir uyum olduğu görülmektedir.

Deneysel modal analiz çalışması, 120^0, 160^0 ve 180^0 eksen açıklığına sahip çember eksenli deney çubukları üzerinde yapılmıştır. Elde edilen frekans değerleri ile sınır şartlarının oluşturduğu denklemler kullanılarak mod şekilleri elde edilmiştir. 120^0 ve 160^0 eksen açıklığına sahip düzlemsel eğri eksenli çubuğun, ankastre-serbest sınır şartında titreşim ölçümleri yapılarak, doğal frekansları ve mod şekilleri belirlenmiştir. 180^0 eksen açıklığına sahip düzlemsel eğri eksenli çubuğun, ankastre-ankastre, ankastre-serbest ve serbest-serbest sınır şartlarında titreşim ölçümleri yapılmıştır. 180^0 eksen açıklığına sahip düzlemsel eğri eksenli çubuğun, ankastre-ankastre, ankastre-serbest ve serbest-serbest sınır şartlarında elde edilen deneysel ve Ansys programı ile elde edilen mod şekilleri grafikler halinde karşılaştırmalı olarak ekler bölümünde verilmiştir.

Çalışmanın diğer bir bölümünde de, tek kademeli sabit kesitli çember eksenli çubukların düzlem-dışı serbest titreşimleri incelenmiştir. Boyutsuz frekanslar; mesnet durumu ankastre-serbest olacak şekilde, farklı kiriş açıları, farklı kademe konumları ve farklı kademe oranları için ilk beş mod gözönüne alınarak hesaplanmaktadır. Literatürde, tek kademeli sabit kesitli çember eksenli çubukların düzlem-dışı serbest titreşimlerini inceleyen bir çalışmaya rastlanmamıştır.

Frekanslar; ankastre-serbest mesnet durumu için çeşitli kabuller gözönüne alınarak hesaplanmış, kayma deformasyonu ve hem eğilme hem de burulmadan kaynaklanan dönme eylemsizliğinin sonuca olan etkileri de incelenmiştir. Hazırlanan bilgisayar programı ile, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini ihmal eden ve etmeyen kabullerin yanısıra, sadece kayma deformasyonunu ve sadece dönme

eylemsizliğini hesaba katan teorilere yer verilmiş böylece herbir kabulün boyutsuz frekans üzerindeki etkisi ayrı ayrı incelenmiştir. Kiriş açıklığı 120^0 ve 180^0 olan dikdörtgen kesitli tek kademeli çember eksenli çubukların, deneysel, analitik ve sonlu eleman yöntemi ile elde edilen frekans değerleri elde edilmiştir.

Literatürdeki kesiti kademeli değişen eğri eksenli çubuklarla ilgili mevcut çalışmalardan farklı olarak bu çalışmada, kademe konumunun frekans üzerindeki etkisi ayrıntılı olarak incelenmiştir. Literatürde, kademenin yalnızca ortada bulunması durumu ele alınmakta iken, bu çalışmada, kademe konumunun değişiminin frekansa etkisi, kademe oranı, kiriş açısı, mod sayısı ve narinliğe bağlı olarak ayrıntılı şekilde incelenmiştir. Bunun yanında, kabullerin hesaba dahil edilmesi ve ihmal edilmesi durumlarında da çubuk farklı mod şekillerine sahip olmaktadır. Literatürde incelenen çalışmaların hiçbirinde mod şeklinin hesabına ya da çizilmiş yerdeğiştirme durumuna rastlanmamıştır.

Günümüzde bilgisayar teknolojisinin ve paket programların gelişmesiyle birlikte, sonlu eleman yöntemi, mühendislik problemlerinde en sık kullanılan yaklaşık çözüm yöntemlerinden biri durumuna gelmiştir. Bu çalışmada sonlu eleman yönteminden de faydalanılmış, kiriş açıklığı 120^0 ve 180^0 olan iki tip çubuk geometrisi için de üç boyutlu elastik çubuk eleman kullanılarak sonlu eleman modelleri hazırlanmıştır. Kademenin değişken konumları için elde edilen düzlem dışı titreşime ait frekanslar kesin çözüm sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Kesin çözüm ve yaklaşık çözümün birbirlerine oldukça yakın sonuçlar verdiği görülmüştür.

KAYNAKLAR

[1] **Love, A. E. H.**, 1944. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, *Dover Publication*, Newyork.

[2] **Den Hartog, J.P**, 1952. Advanced Strenght of Materials, McGraw-Hill Book Co., Newyork.

[3] **İnan, M.**, 1966. Elastik Çubukların Genel Teorisi, *İTÜ Yayını*, İstanbul.

[4] **İnan, M.**, 1967. Cisimlerin Mukavemeti, *İTÜ Yayını*, İstanbul.

[5] **Antman, S.S.**, 1972. The Theory of Rods, Handbuch Der Physik, *C. Truesdell, ed. Springer Verlag*, **6 a/2**, 641-703.

[6] **Cinemre, V.**, 1982. Çubuk Teorisinde Yer ve Şekil Değiştirme İlişkileri, *İTÜ Dergisi*, Cilt 40, No:3-6.

[7] **Rosen, A. and Abromovich, H.,** 1984. Galerkin Method as a Tool to Investigate the Planar and Non-Planar Behavior of Curved Beams, *Computers and Structures*, **18**(1), 165-174.

[8] **Tameroğlu, S.**, 1991. Elastisite Teorisi, *İTÜ Yayını*, İstanbul.

[9] **Toprak, T.**, 1999. Mekanik Titreşimler, *İTÜ Yayını*, İstanbul.

[10] **Timeshenko, S.P. and Goodier, J.N.,** 1970. Theory of Elasticity, McGraw-Hill Book Co., Newyork.

[11] **Sas, P. and Heylen, W.,** 1993. Modal Analysis Theory and Practice, *ISMA 18 International Seminar on Modal Analysis*, Belgium.

[12] **Petyt, M.,** 1996. Finite Element Vibration Analysis, *Institute of Sound and Vibration Research*, Newyork.

[13] **Volterra, E. and Morel, J. D.,** 1961. Lowest Natural Frequency of Elastic Arc for Vibrations Outside the Plane of Initial Curvature, *Journal of Applied Mechanics*, 624-627.

[14] **Takahashi, S.,** 1962. Vibration of a Circular Arch (Perpendicular to its Plane), *Bulletin of the JSME,* **6 (24)**, 674-681.

[15] **Endo, M. and Taniguchi, O.,** 1969. Flexural Vibration of a Ring of Rectangular Cross Section, *Bulletin of the JSME,* **12 (52)**, 747-755.

[16] **Takahashi, S. and Suzuki, K.,** 1977. Vibrations of Elliptic Arch Bar Perpendicular to its Plane, *Bulletin of the JSME,* **20 (149)**, 1409-1416.

[17] **Suzuki, K., Aida, H. and Takahashi, S.,** 1978. Vibrations of Curved Bars Perpendicular to Their Planes, *Bulletin of the JSME,* **21 (162)**, 1685-1695.

[18] **Nagaya, K. and Hirano, Y.,** 1977. In-Plane Vibration of Viscoelastic Circular Rod with Consideration of Shearing Deformation and Rotatory Inertia, *Bulletin of the JSME,* **20 (143)**, 539-547.

[19] **Suzuki, K. and Takahashi, S.,** 1979. Vibration of a Connecting System of Curved Bar (Out-of- Plane), *Bulletin of the JSME,* **22 (172)**, 1448-1455.

[20] **Irie, T., Yamada, G. and Takahashi, I.,** 1980. The Steady State Out-of-Plane Response of a Timoshenko Curved Beam with Internal Damping, *Journal of Sound and Vibration*, **55**, 145-156.

[21] **Markus, S. and Nanasi, T.,** 1981. Exact Solution of In-Plane Vibrations of Curved Beams, *The Shock and Vibration Digest*, **13**, 3-14.

[22] **Wang, T. M. and Guilbert, M. P.,** 1982. Effects of Rotatory Inertia and Shear on Natural Frequencies of Continuous Circular Curved Beams, *International Journal of Solids and Structures,* **17**, 281-289.

[23] **Wang, T. M., Laskey, A. and Ahmad, M.,** 1984. Natural Frequencies for Out-of-Plane Vibrations of Continuous Curved Beams Considering

Shear and Rotatory Inertia, *International Journal of Solids and Structures,* **20**, 257-265.

[24] **Gardner, T.G. and Bert, C.W.,** 1985. Vibration of Shear Deformable Rings: Theory and Experiment, *Journal of Sound and Vibration*, **103**, 549-565.

[25] **MacNeal, R.H. and Harder, R.L.,** 1985. A Proposed Standard Set of Problems to Test Finite Element Accuracy, *Finite element Analysis Des.,* **1**, 3-20.

[26] **Bickford, L. and Maganty, S.P.,** 1986. On the Out-of-Plane Vibrations of Thick Rings, *Journal of Sound and Vibration*, **108**, 503-507.

[27] **Suzuki, K., Sugi, K., Kosawada, T. and Takahashi, S.,** 1986. The Out-Plane Impulse Response of a Curved Bar with Varying Cross-Sections, *Bulletin of the JSME,* **29 (258)**, 4312-4317.

[28] **Tang, C. S. and Bert, C. W.,** 1986. Out-of-Plane Vibrations of Thick Rings, *International Journal of Solids and Structures,* **23**, 175-185.

[29] **Verniere De Irassar, P.L. and Laura, P.A.A.,** 1986. A Note on the Analysis of the First Symmetric Mode of Vibration of Circular Arches of Non-Uniform Cross-Section, *Journal of Sound and Vibration,* **116,** 580-584.

[30] **Ercoli, L., Cortinez, V.H., Laura, P.A.A. and Gil, R.,** 1987. Analytical and Experimental Investigation on a Vibrating Arc Clamped at One End Carrying a Concentrated Mass at the Free End and with an Intermediate Support, *Journal of Sound and Vibration*, **114**, 389-391.

[31] **E Silva, J.M.M. and Urgueria, A.P.V.,** 1988. Out-of-Plane Dynamic Response of Curved Beams – An Analytical Model, *International Journal of Solids and Structures,* **24**, 271-284.

[32] **Laura, P.A.A., Verniere De Irassar, P.L., Carnicer, R., Berteo, R.,** 1988. A Note on Vibrations of a Circumferential Arch with Thickness

Varying in a Discontinuous Fashion, *Journal of Sound and Vibration,* **120,** 95-105.

[33] **Sundaramoorty, R. and Padmanabhan, S.**, 1989. Equations of Curved Beams, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, **115**, 1094.

[34] **Arici, M.,** 1989. Reciprocal Conjugate Method for Curved Beams, *Journal of Structural Engineering,* **113**, 560-575.

[35] **Naganarayana, B. P. and Prathap, G.**, 1990. Consistency Aspects of Out-of-Plane Bending, Torsion and Shear in a Quadratic Curved Beam Element, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **30**, 431-443.

[36] **Wang, T. M., Ahmad, M. F. and Hsiao, B. T.,** 1992. Out-of-Plane Forced Vibrations of Multispan Circular Curved Beams, *Computer & Structures*, **45**, 543-551.

[37] **Pantazopoulou, S.J**., 1992. Low Order Interpolation Functions for Curved Beams, *Journal of Engineering Mechanics*, **118**, 329-350.

[38] **Chidamparam, P. and Leissa, A.W.,** 1993. Vibrations of a Planar Curved Beams, Rings and Arches, *Applied Mechanics Reviews,* **46**, 467-483.

[39] **Tüfekçi, E.**, 1994. Eğri Eksenli Düzlemsel Çubukların Statik ve Dinamik Problemlerinin Analitik Çözümü, *Doktora Tezi*, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

[40] **Auciello, N.M. and Rosa, M.A.,** 1994. Free Vibrations of Circular Arches: A Review, *Journal of Sound and Vibrations,* **176**, 433-458.

[41] **Rossi, R.E. and Laura, P.A.A.,** 1995. Numerical Experiments on Dynamic Stiffening of a Circular Arch Executing In-Plane Vibrations, *Journal of Sound and Vibrations,* **187**, 897-909.

[42] **Howson, W.P. and Jemah, A.K.,** 1995. Exact Natural Frequencies for Out-of-Plane Motion of Plane Structures Composed of Curved Beam Members, *Computer & Structures*, **55**, 989-995.

[43] **Kawakami, M., Sakiyama, T., Matsuda, H. and Morita, C.,** 1995. In Plane and Out-of-Plane Free Vibrations of Curved Beams With Variable Sections, *Journal of Sound and Vibrations,* **187**, 381-401.

[44] **Ibrahimbegovic, A.,** 1995. On Finite Element Implementation of Geometrically Non-Linear Reissner's Beam Theory: Three-Dimensional Curved Beam Elements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **122**, 11-26.

[45] **Kang, K., Bert, C.W. and Striz, A.W.,** 1996. Static Analysis of a Curved Shaft Subjected to End Torques, *International Journal of Solids and Structures*, **33**, 1587-1596.

[46] **Sengupta, D. and Dasgupta, S.,** 1997. Static and Dynamic Applications of a Five Noded Horizontally Curved Beam Element with Shear Deformation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **40**, 1801-1819.

[47] **Artan, R.**, 1997. The Analytical Calculation of Circular Rods of Variable Cross-Section by the Initial Values Method, *Computers and Structures*, **62**, 445-461.

[48] **Dasgupta, S. and Sengupta, D.,** 1998. Horizontally Curved Isoparametric Beam Element with or without Elastic Foundation Including Effect of Shear Deformation, *Computers and Structures,* **29**, 967-973.

[49] **Silva, M.E.,** 1998. Out-of-Plane Dynamic Response of Curved Beams-An Analytical Model, I*nternational Journal of Solids and Structures*, **24**, 271-284.

[50] **Tüfekçi, E. ve Arpacı, A.,** 1998. Exact Solution of In Plane Vibrations of Circular Arches with Account Taken of Axial Extension, Transverse Shear and Rotatory Inertia Effects, *Journal of Sound and Vibration*, **209**, 845-856.

[51] **Tüfekçi, E.,** 1999. Exact Solution of In-Plane Vibrations of Stepped Circular Arches, *Asia-Pasific Vibration Conference*, Singapore, **99**, 1158-1163.

[52] **Howson, W.P. and Jemah, A.K.,** 1999. Exact Out-of-Plane Natural Frequencies of Curved Timeshenko Beams, *Journal of Engineering Mechanics*, **125**, 19-25.

[53] **Lee, S.Y. and Chao, J.C.,** 1999. Exact Solution for Out-of-Plane Vibration of Curved Non-Uniform Beams, *Journal of Applied Mechanics*, 68, 186-191.

[54] **Huang, C.S., Tseng, Y.P., Chang, S.H. and Hung, C.L.,** 2000. Out-of-Plane Dynamic Analysis of Beams with Arbitrarily Varying Curvature and Cross-Section by Dynamic Stiffness Matrix Method, *International Journal of Solids and Structures,* **37**, 495-513.

[55] **Artan, R.**, 2000. General Carryover Matrix of Plane Rod Loaded Perpendicular to Its Plane, *Journal of Engineering Mechanics*, **126**, 875-878.

[56] **Chackraborty, S. and Sarkar, S. K.,** 2000. Analysis of a Curved Beam on Uncertain Elastic Foundation, *Finite Elements in Analysis and Design*, **86**, 73-82.

[57] **Lee, S.Y. and Chao, J.C.,** 2000. Out-of-Plane Vibrations of Curved Non-Uniform Beams of Constant Radius, *Journal of Sound and Vibration*, **238**, 443-458.

[58] **Raveendranath, P., Singh, G. and Pradhan, B.,** 2000. Free Vibration of Arches Using a Curved Beam Elemant Based on a Coupled Polynomial Displacement Field, *Computers & Structures*, **78**, 583-590.

[59] **Tüfekçi, E.,** 2001. In-Plane Vibrations of a Circular Arch of Discontinuously Varying Cross-Section, Proceeding of IMAC XIX, *Conference of Structural Dynamics*, ABD, **2**, 1688-1694.

[60] **Lee, S.Y. and Chao, J.C.,** 2001. Exact Solutions for Out-of-Plane Vibration of Curved Non-Uniform Beams, *Journal of Applied Mechanics*, **68**, 186-191.

[61] **Tüfekçi, E.**, 2001. Out-of-Plane Behavior of Curved Beams : Exact Solution, *American Institute of Aeronautics and Astronautics* .

[62] **Liu, G.R. and Wu, T.Y.,** 2001. In-Plane Vibration Analysis of Circular Arches by the Generalized Differential Quadrature Rule, *International Journal of Mechanical Sciences*, **43**, 2597-2611.

[63] **Zivkovic, M., Kojic, M., Slavkovic, R. and Grujovic, N.,** 2001. A General Beam Finite Element with Deformable Cross-Section, C*omputer Methods in Applied Mechanics,* **190**, 2651-2680.

[64] **Tüfekçi, E. ve Özdemirci, Ö.,** 2002. On the Dynamic Stiffening of a Stepped Circular Arch: Exact Solution, *6th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis*, İstanbul, Türkiye, Paper No : APM-067.

[65] **Kim, Y.Y. and Kim, Y.,** 2002. A One-Dimensional Theory of Thin-Walled Curved Rectangular Box Beams Under Torsion and Out-of-Plane Bending, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **53**, 1675-1693.

[66] **Chen, C.N.,** 2002. Out-of-Plane Deflection of Nonprismatic Curved Beam Structures Solved by DQEM, *Advances in Engineering Software*, **34**, 297-306.

[67] **Tüfekçi, E., Doğruer, O.Y. ve Koçaş, M.**, 2002. Numerical Experiments on Out-of-Plane Behaviour of an Arch with Varying Curvature and Cross-Section, *ESDA 6th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis,* **APM-060**, İstanbul.

[68] **Tüfekçi, E. ve Doğruer, O.Y.**, 2002. Exact Solution of Out-of-Plane Free Vibrations of a Circular Beam with Uniform Cross-Section, *ICSSD The 2nd International Conference on Structural Stability and Dynamics,* December 16-18, Singapore.

[69] **Sheikh, A.H.,** 2002. New Concept to Include Shear Deformation in a Curved Beam Element, *Journal of Structural Engineering*, **128**, 406-410.

[70] **Malekzadeh, P. and Karami, G.,** 2003. Out-of-Plane Static Analysis of Circular Arches by DQM, *International Journal of Solids and Structures*, **40**, 6527-6545.

[71] **Kapania, R. K., and Li, J.,** 2003. A Formulation and Implementation of Geometrically Exact Curved Beam Elements Incorporating Finite Strains and Finite Rotations, *Computational Mechanics*, **30**, 444-459.

[72] **Zupan, D. and Saje, M.,** 2003. Finite Element Formulation of Geometrically Exact Three-Dimensional Beam Theories Based on Interpolation of Strain Measures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **192**, 5209-5248.

[73] **Rattanawangcharoen, N., Bai, H. and Shah, A.H.,** 2004. A 3D Cylindrical Finite Element Model for Thick Curved Beam Stress Analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **59**, 511-531.

[74] **Tüfekçi, E., Doğruer, O.Y. ve Özdemirci, Ö.**, 2004. Experimental Verification of Analytical and Numerical Solutions of In-Plane and Out-of-Plane Free Vibrations of Circular Arches, *IMAC-XXII: Conference and Exposition on Structural Dynamics,* Michigan, ABD, January 22-24, Paper No: 228.

[75] **Tüfekçi, E., Doğruer, O.Y.,** 2004. Out-of-Plane Free Vibration of a Circular Arch with Uniform Cross-Section: Exact Solution, *Journal of Sound and Vibration*, kabul edildi.

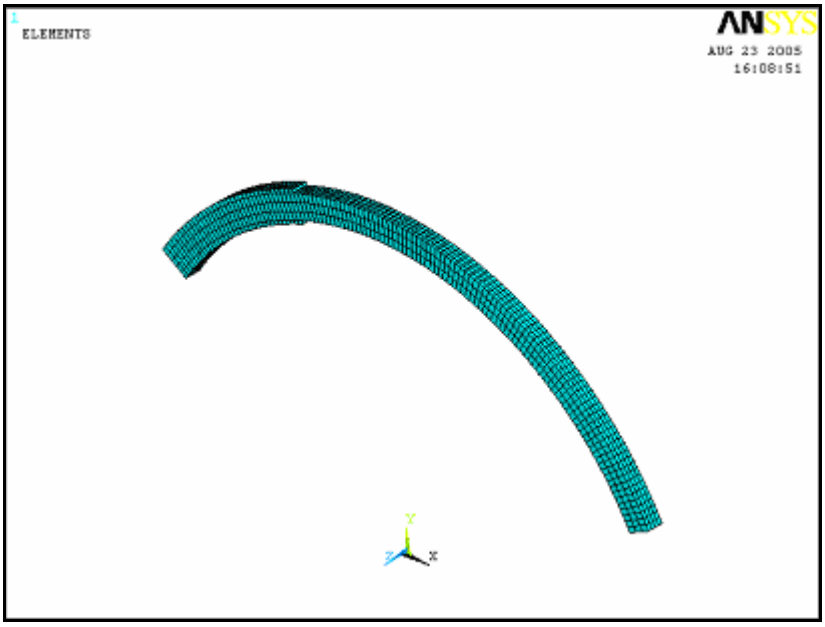
[76] **Tüfekçi, E., Doğruer, O.Y.,** 2005. Exact Solution of Out-of-Plane Problems of an Arch with Varying Curvature and Cross-Section, *Journal of Engineering Mechanics*, kabul edildi.

EKLER

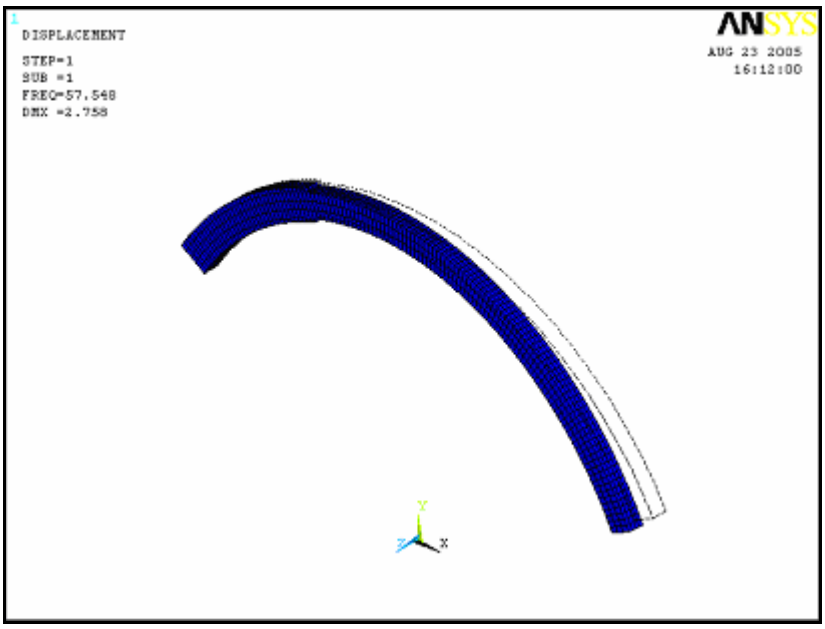
EK A. Tek Kademeli Dikdörtgen Kesitli Çember Eksenli Çubuğun Mod Şekilleri.

EK B. Dikdörtgen Sabit Kesitli Çember Eksenli Çubuğun Mod Şekilleri.

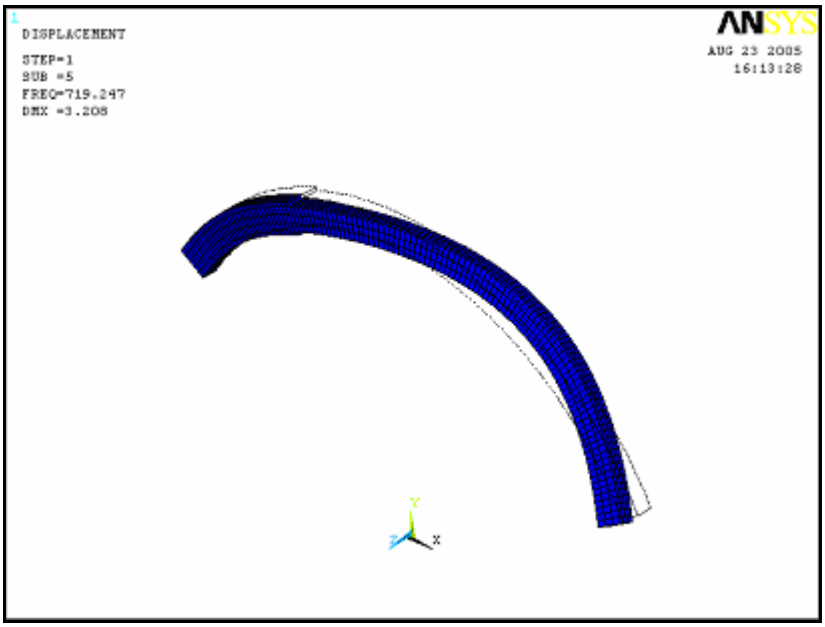
EK A. Tek Kademeli Dikdörtgen Kesitli Çember Eksenli Çubuğun Mod Şekilleri.



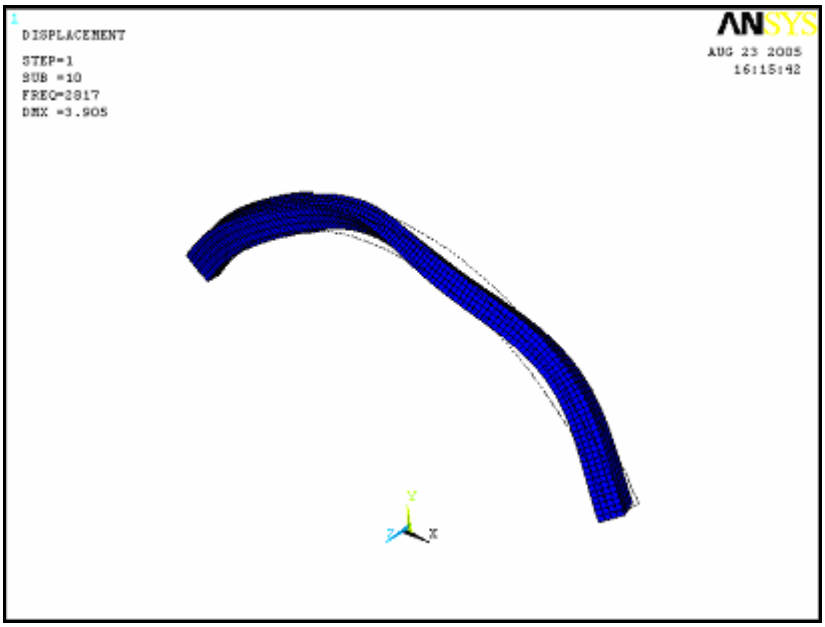
Şekil A.1. Çubuğun sonlu eleman katı modeli ($\phi_T = 120^0$, $\psi/\phi_T = 0.2$).



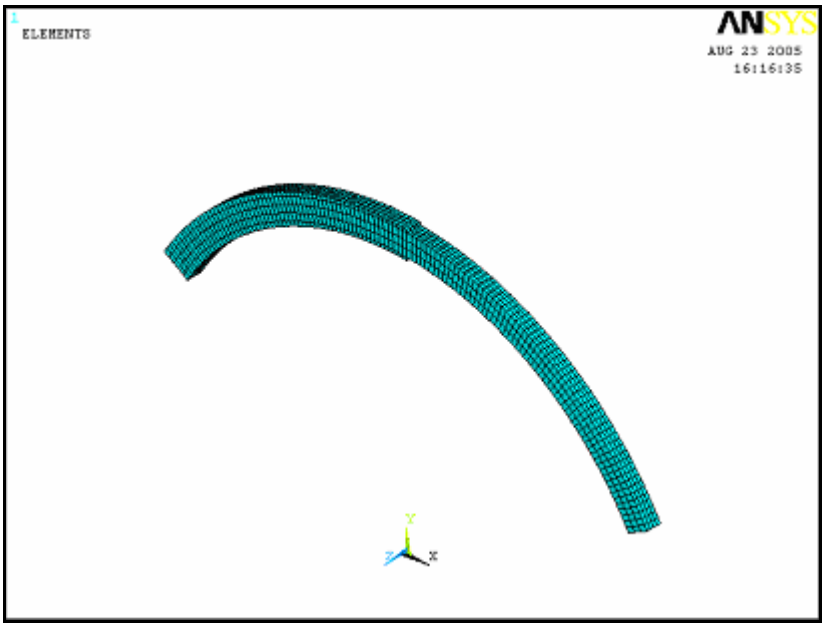
Şekil A.2. Tek kademeli ankastre –serbest mesnetli dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun birinci modu ($\phi_T = 120^0$, $\psi/\phi_T = 0.2$).



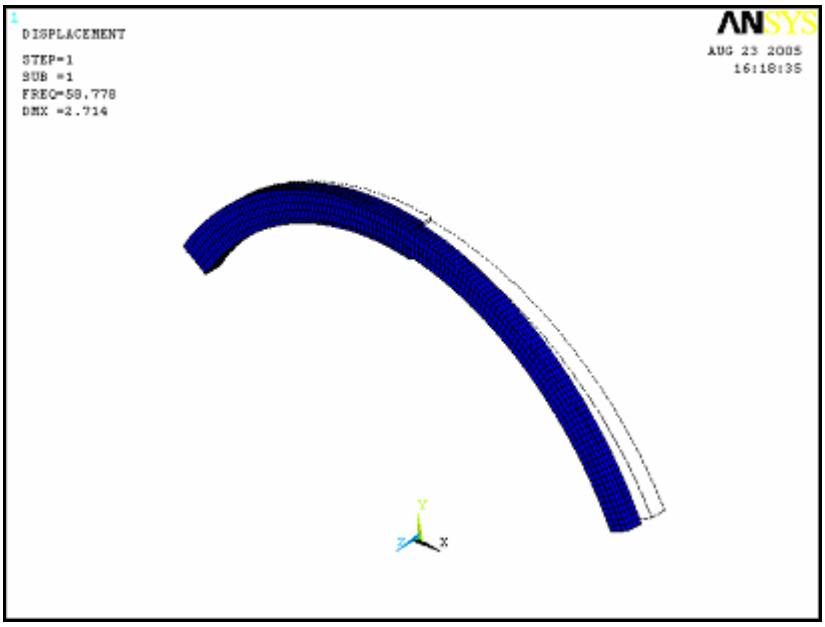
Şekil A.3. Tek kademeli ankastre–serbest mesnetli dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun beşinci modu ($\phi_T = 120^0$, $\psi/\phi_T = 0.2$).



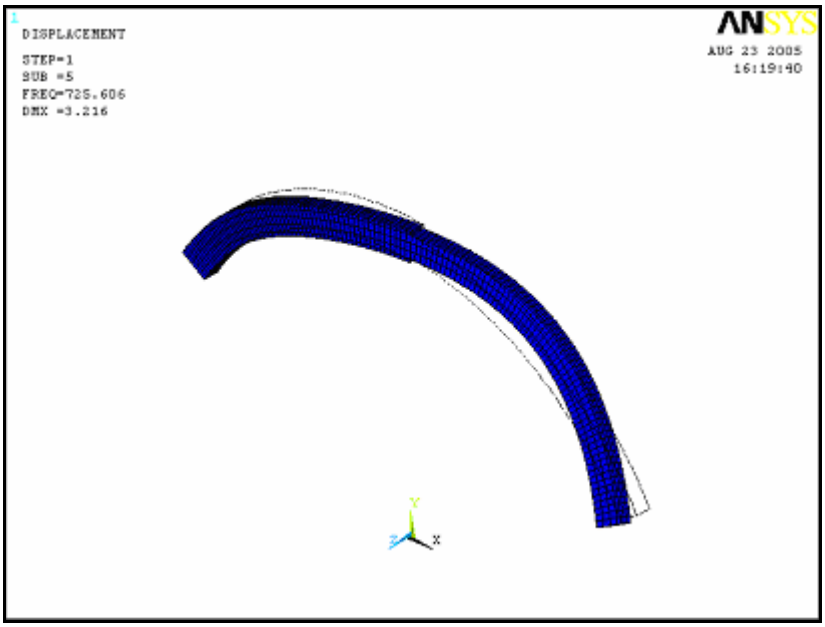
Şekil A.4. Tek kademeli ankastre–serbest mesnetli dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun onuncu modu ($\phi_T = 120^0$, $\psi/\phi_T = 0.2$).



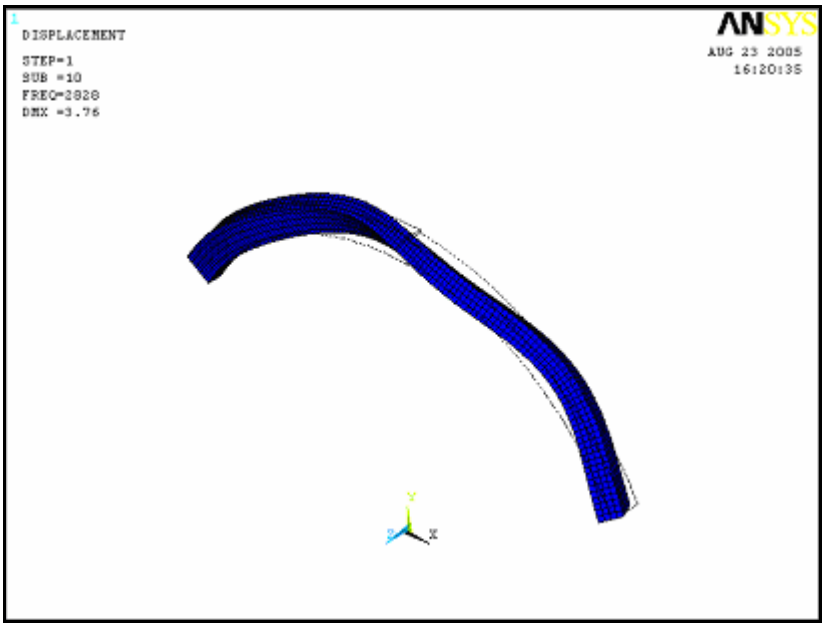
Şekil A.5. Çubuğun sonlu eleman katı modeli ($\phi_T = 120^0$, $\psi/\phi_T = 0.0$).



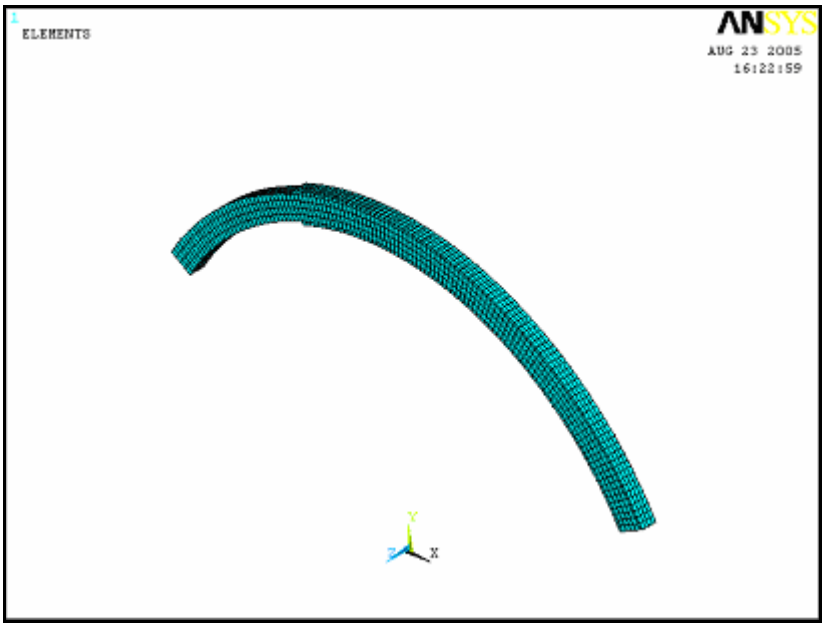
Şekil A.6. Tek kademeli ankastre–serbest mesnetli dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun birinci modu ($\phi_T = 120^0$, $\psi/\phi_T = 0.0$).



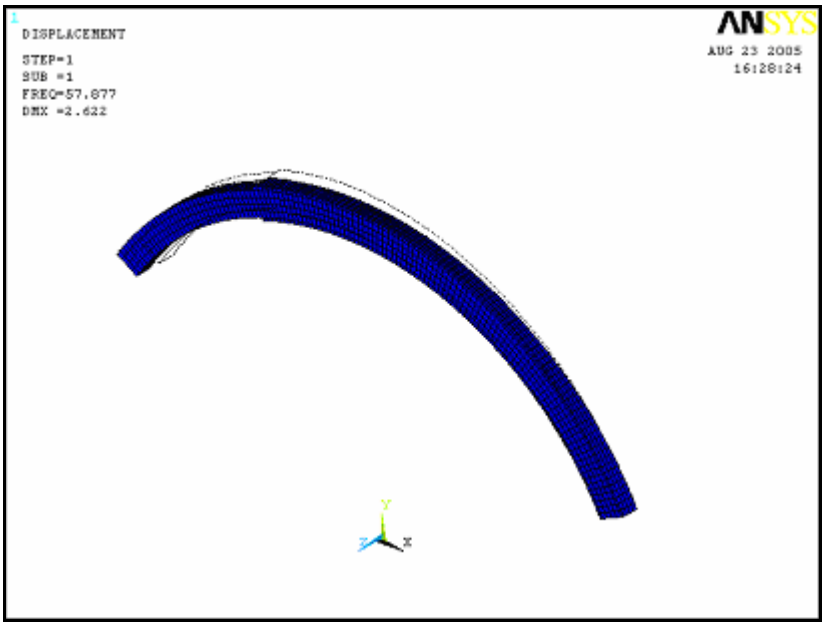
Şekil A.7. Tek kademeli ankastre–serbest mesnetli dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun beşinci modu ($\phi_T = 120^0$, $\psi/\phi_T = 0.0$).



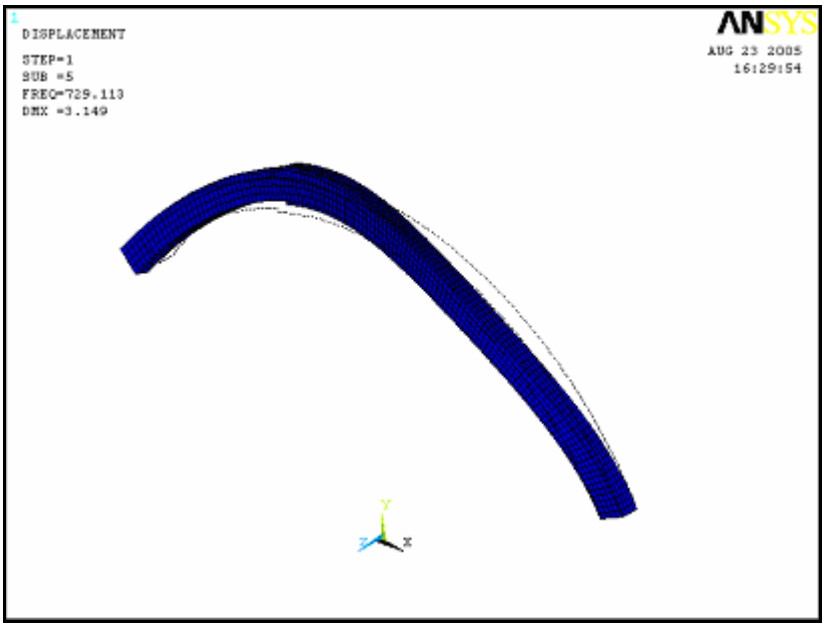
Şekil A.8. Tek kademeli ankastre–serbest mesnetli dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun onuncu modu ($\phi_T = 120^0$, $\psi/\phi_T = 0.0$).



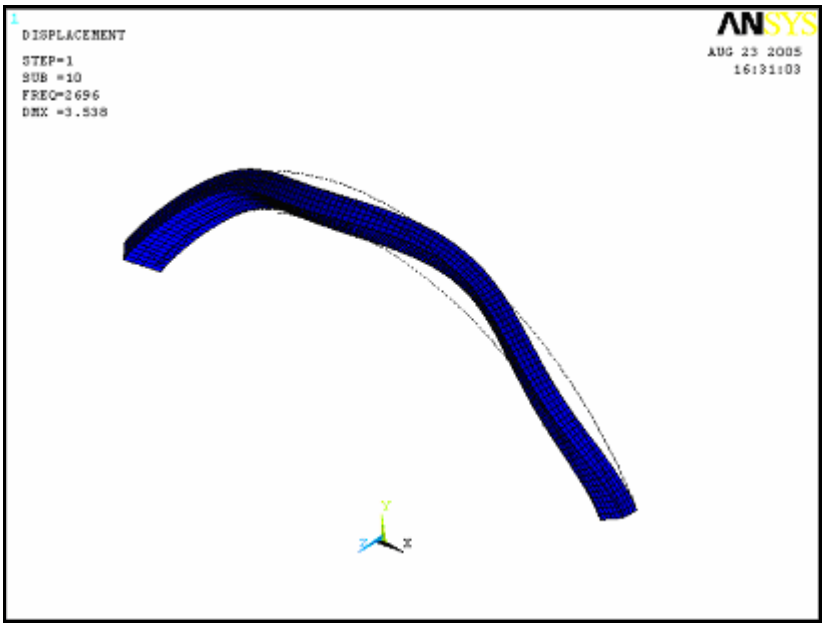
Şekil A.9. Çubuğun sonlu eleman katı modeli ($\phi_T = 120^0$, $\psi/\phi_T = -0.2$).



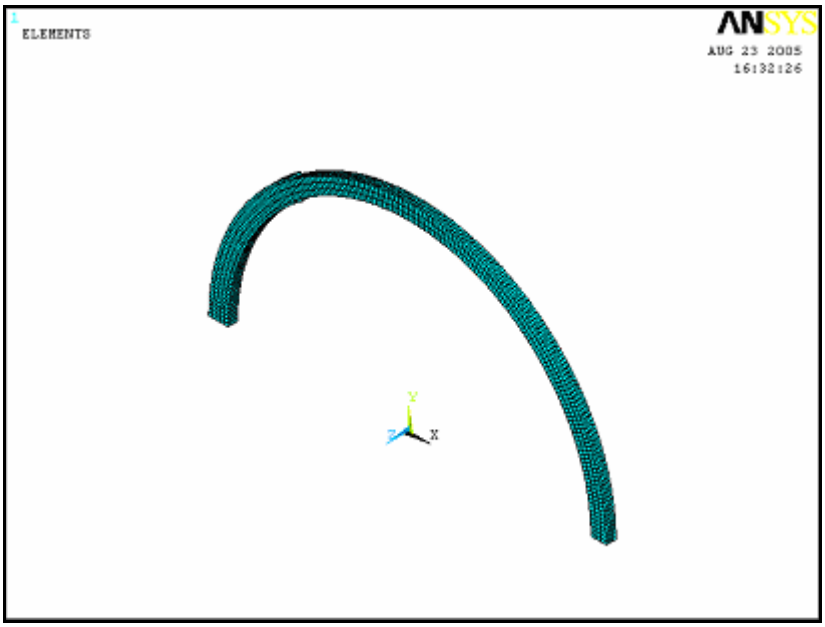
Şekil A.10. Tek kademeli ankastre–serbest mesnetli dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun birinci modu ($\phi_T = 120^0$, $\psi/\phi_T = -0.2$).



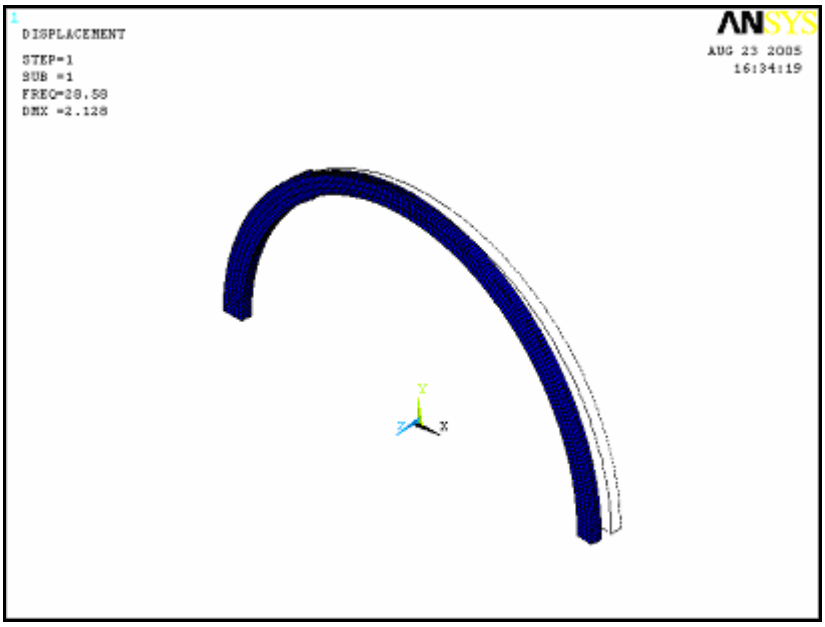
Şekil A.11. Tek kademeli ankastre–serbest mesnetli dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun beşinci modu ($\phi_T = 120^0$, $\psi/\phi_T = -0.2$).



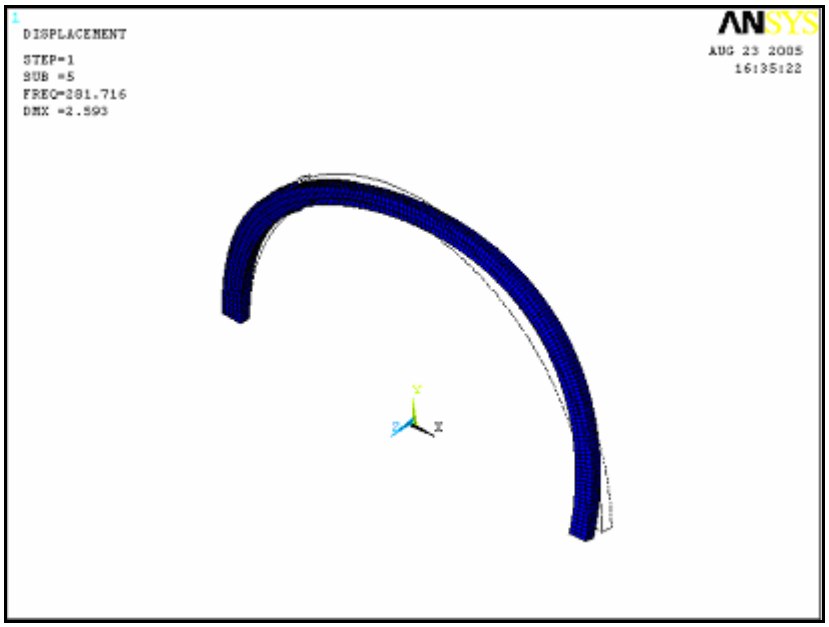
Şekil A.12. Tek kademeli ankastre–serbest mesnetli dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun onuncu modu ($\phi_T = 120^0$, $\psi/\phi_T = -0.2$).



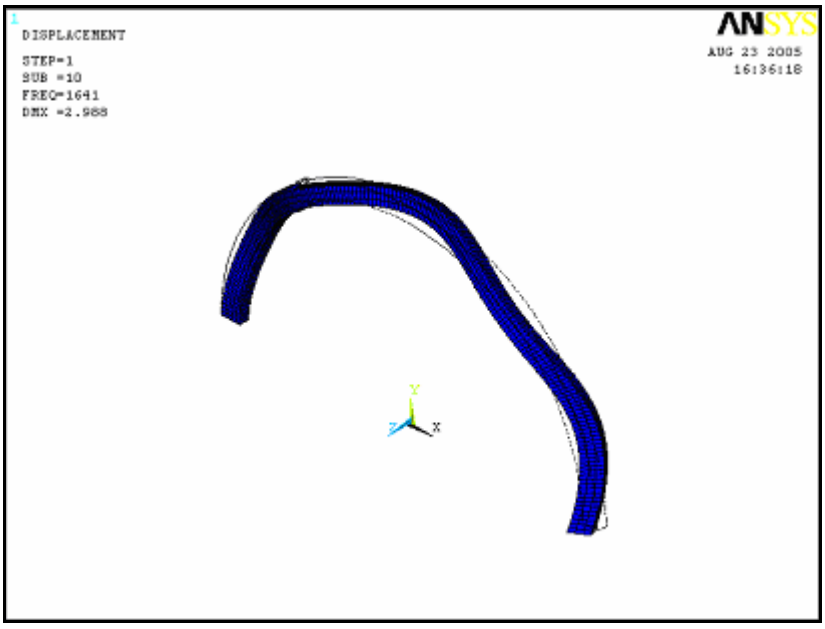
Şekil A.13. Çubuğun sonlu eleman katı modeli ($\phi_T = 180^0$, $\psi/\phi_T = 0.2$).



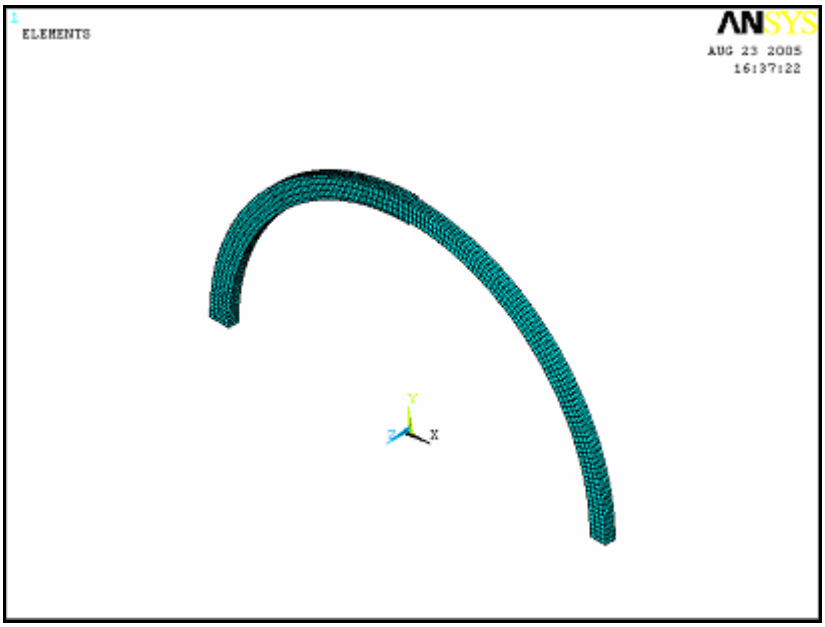
Şekil A.14. Tek kademeli ankastre–serbest mesnetli dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun birinci modu ($\phi_T = 180^0$, $\psi/\phi_T = 0.2$).



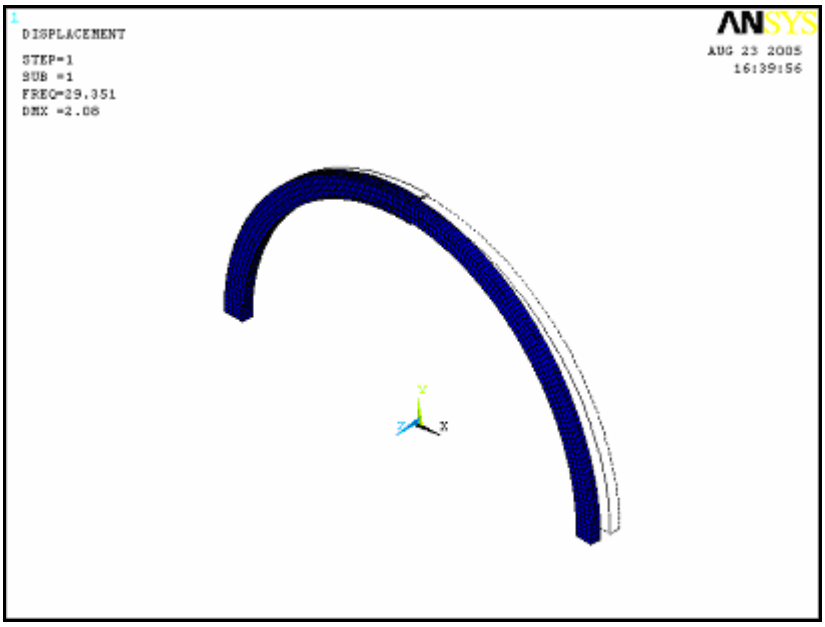
Şekil A.15. Tek kademeli ankastre–serbest mesnetli dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun beşinci modu ($\phi_T = 180^0$, $\psi/\phi_T = 0.2$).



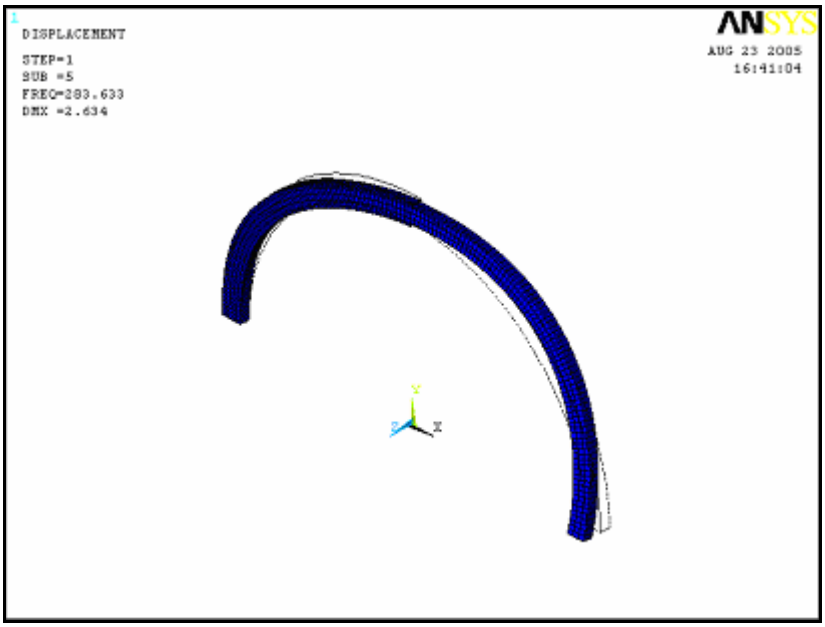
Şekil A.16. Tek kademeli ankastre–serbest mesnetli dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun onuncu modu ($\phi_T = 180^0$, $\psi/\phi_T = 0.2$).



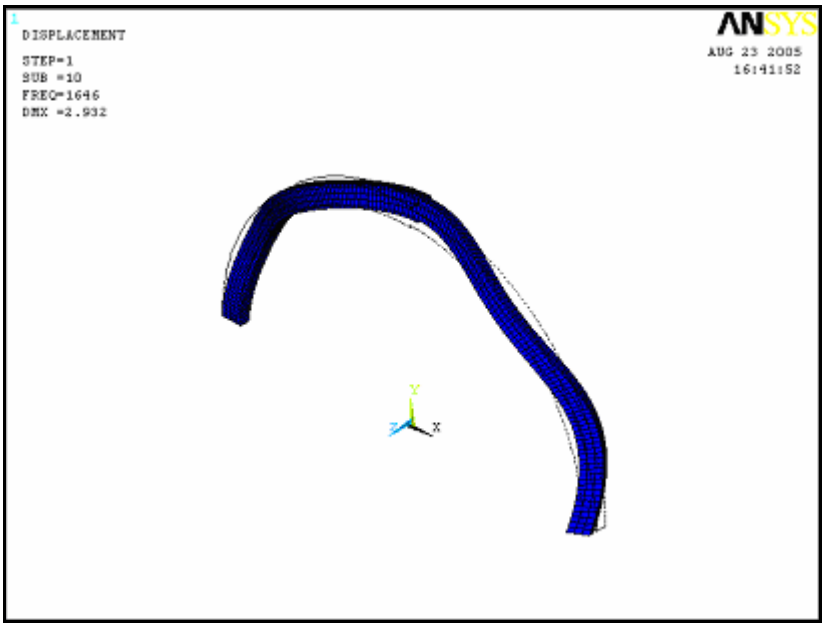
Şekil A.17. Çubuğun sonlu eleman katı modeli ($\phi_T = 180^0$, $\psi/\phi_T = 0.0$).



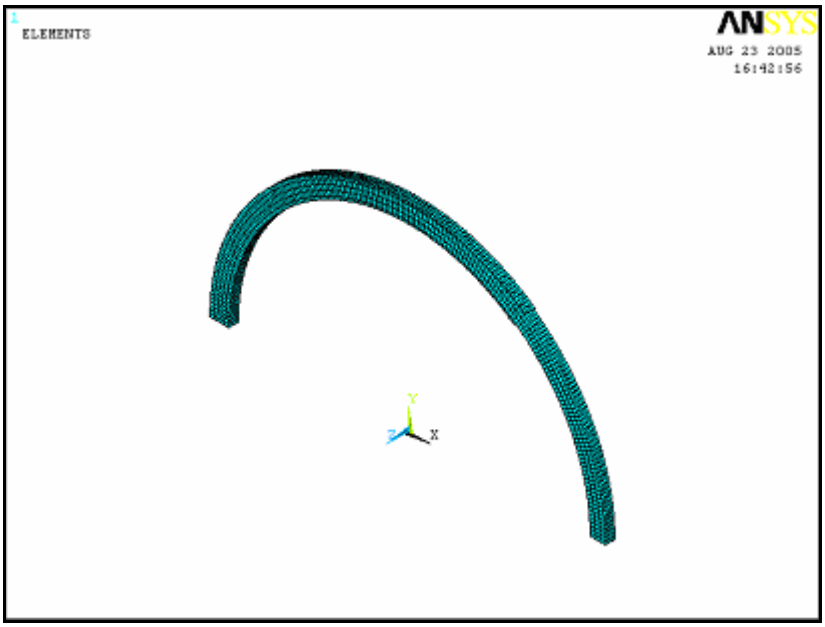
Şekil A.18. Tek kademeli ankastre–serbest mesnetli dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun birinci modu ($\phi_T = 180^0$, $\psi/\phi_T = 0.0$).



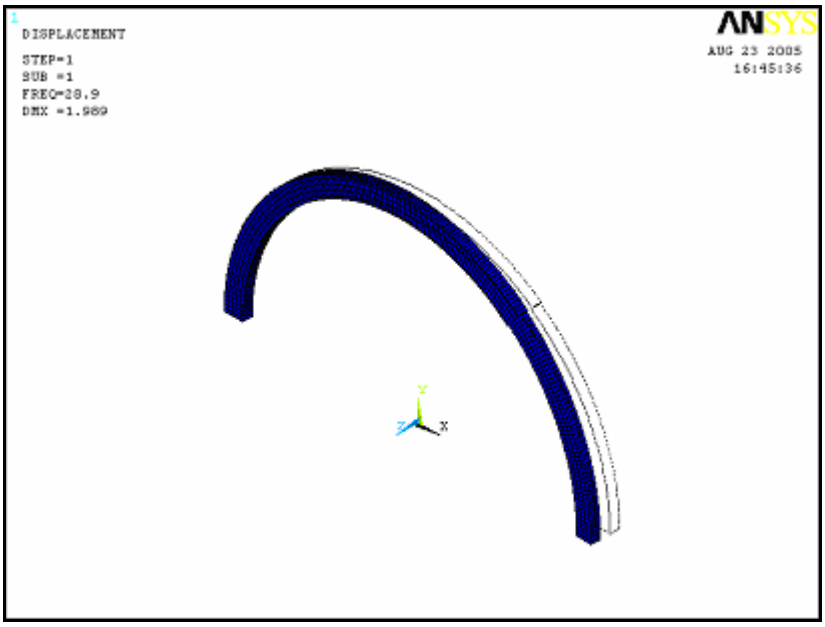
Şekil A.19. Tek kademeli ankastre–serbest mesnetli dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun beşinci modu ($\phi_T = 180^0$, $\psi/\phi_T = 0.0$).



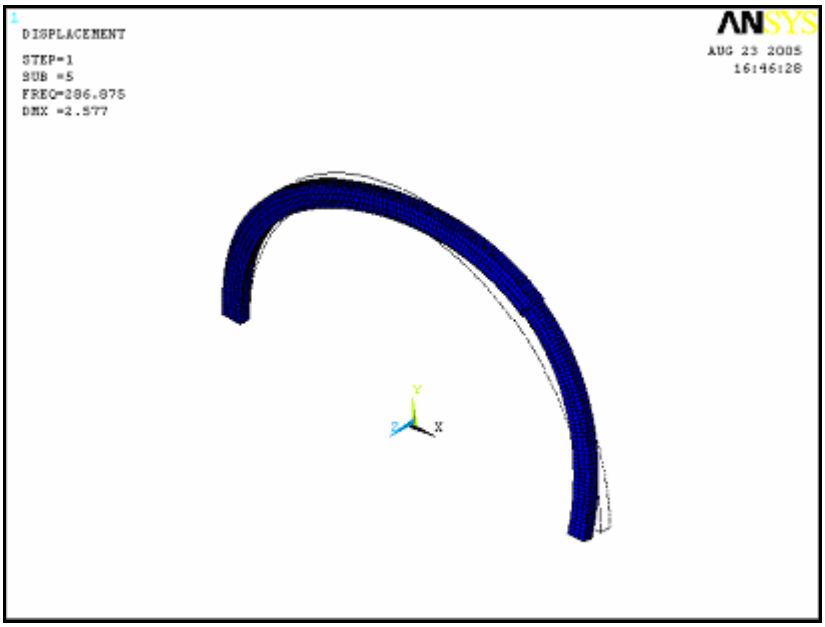
Şekil A.20. Tek kademeli ankastre–serbest mesnetli dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun onuncu modu ($\phi_T = 180^0$, $\psi/\phi_T = 0.0$).



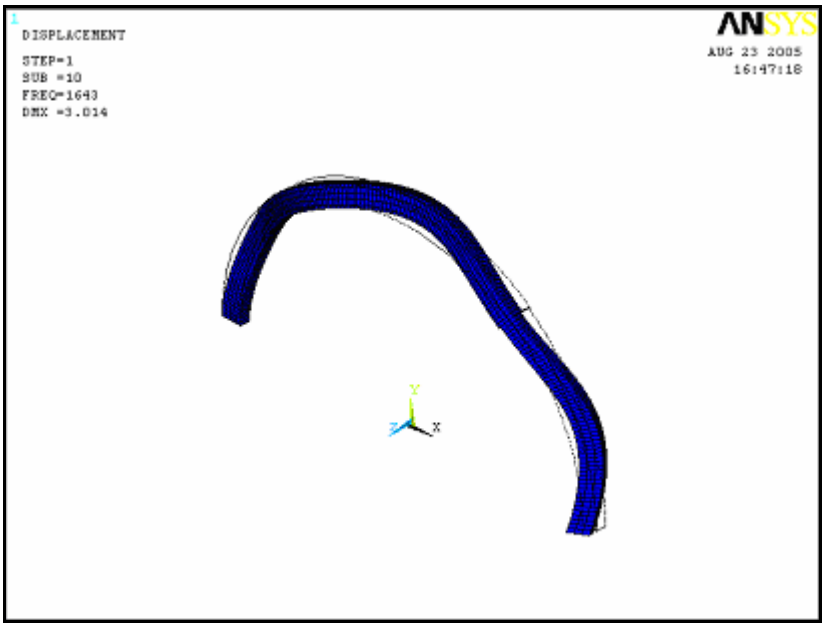
Şekil A.21. Çubuğun sonlu eleman katı modeli ($\phi_T = 180^0$, $\psi/\phi_T = -0.2$).



Şekil A.22. Tek kademeli ankastre–serbest mesnetli dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun birinci modu ($\phi_T = 180^0$, $\psi/\phi_T = -0.2$).

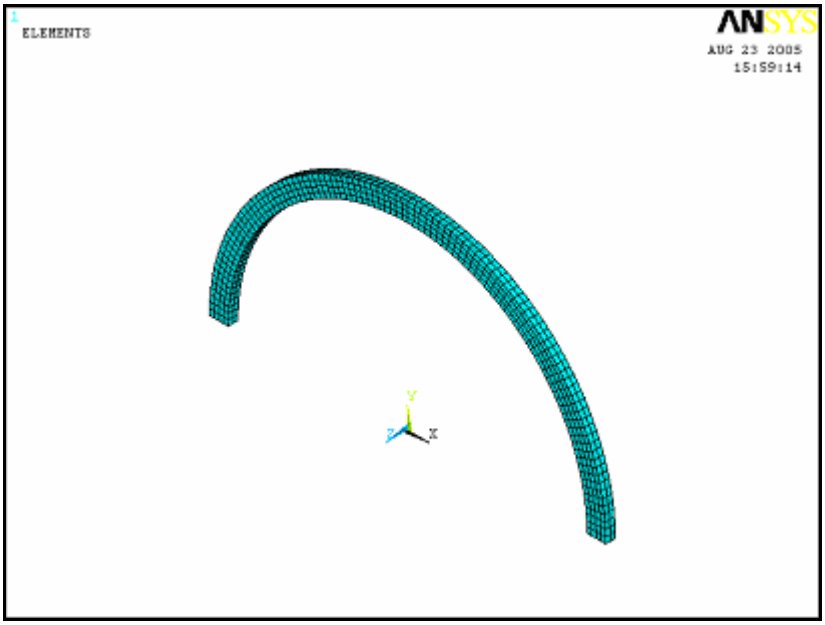


Şekil A.23. Tek kademeli ankastre–serbest mesnetli dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun beşinci modu ($\phi_T = 180^0$, $\psi/\phi_T = -0.2$).

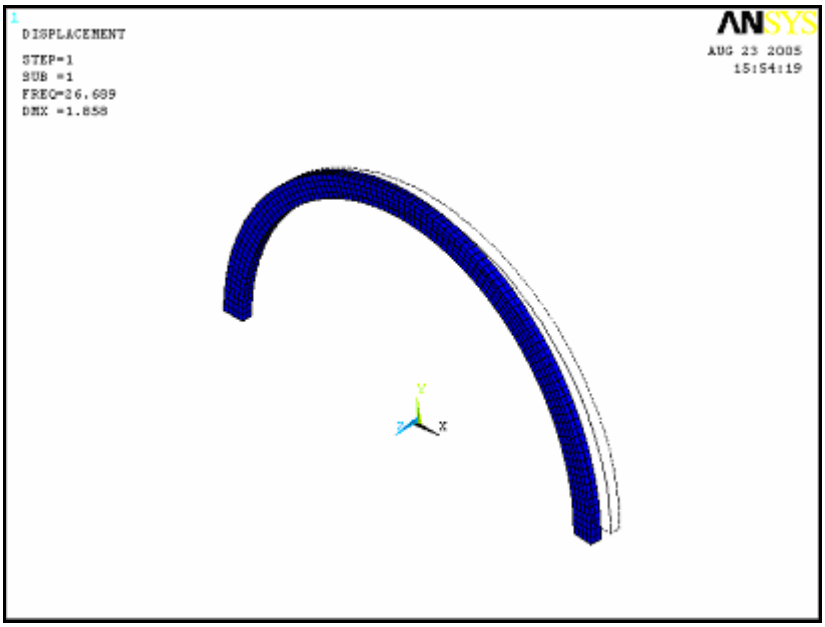


Şekil A.24. Tek kademeli ankastre–serbest mesnetli dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuğun onuncu modu ($\phi_T = 180^0$, $\psi/\phi_T = -0.2$).

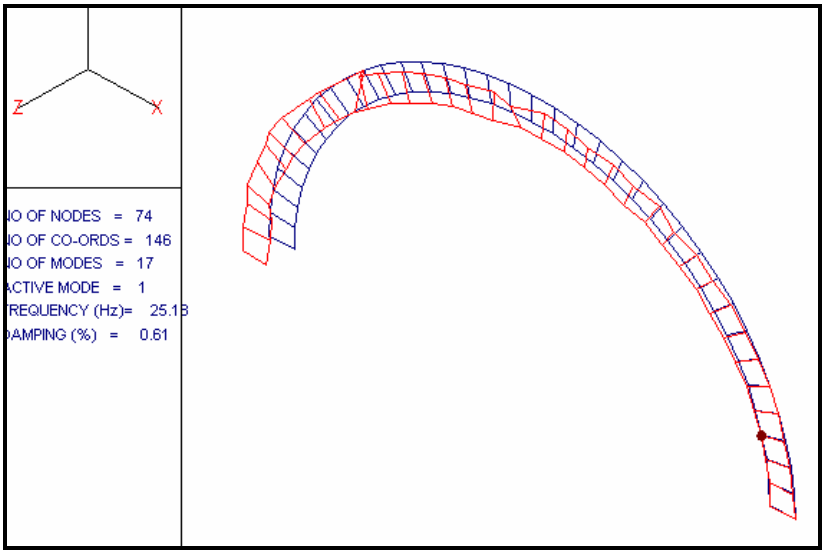
EK B. Dikdörtgen Sabit Kesitli Çember Eksenli Çubuğun Mod Şekilleri.



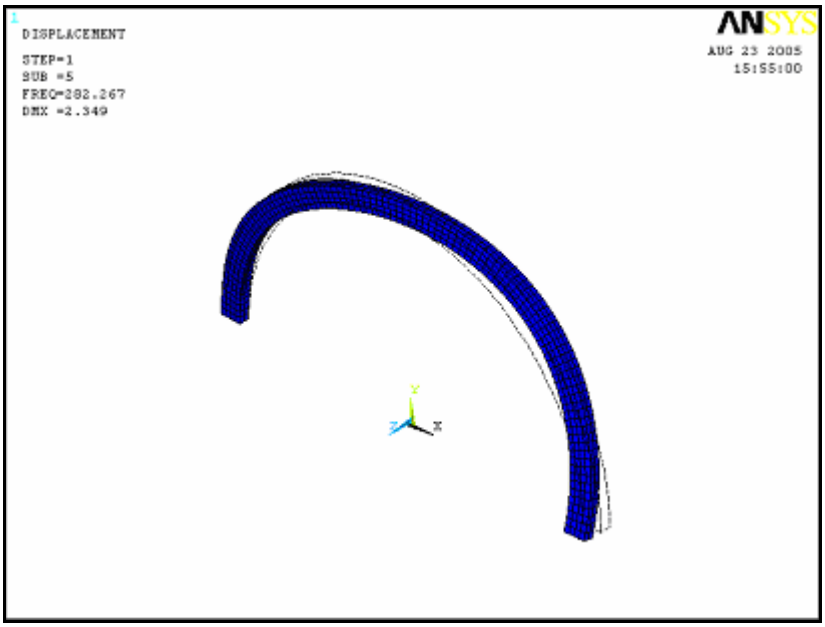
Şekil B.1. Çubuğun sonlu eleman katı modeli, ($\phi = 180^0$).



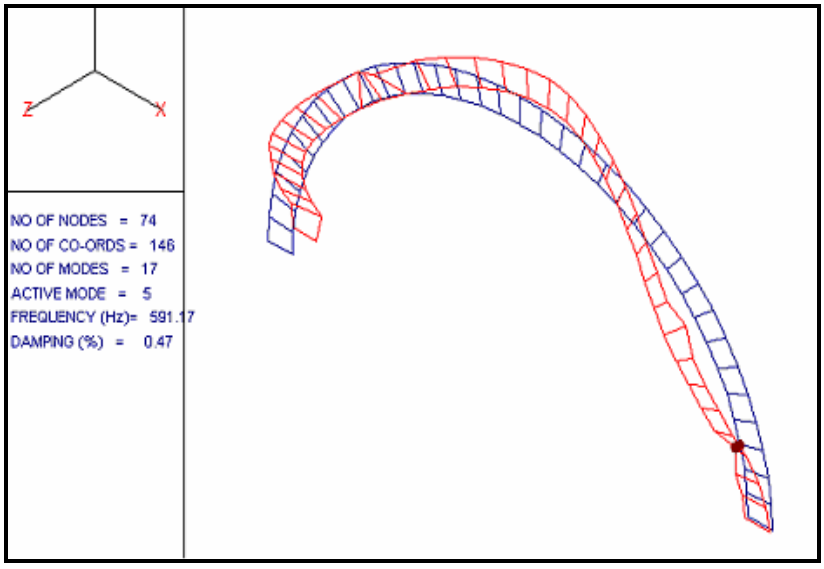
Şekil B.2. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun birinci modu, ankastre-serbest, $\phi = 180^0$, (Ansys, Solid 95).



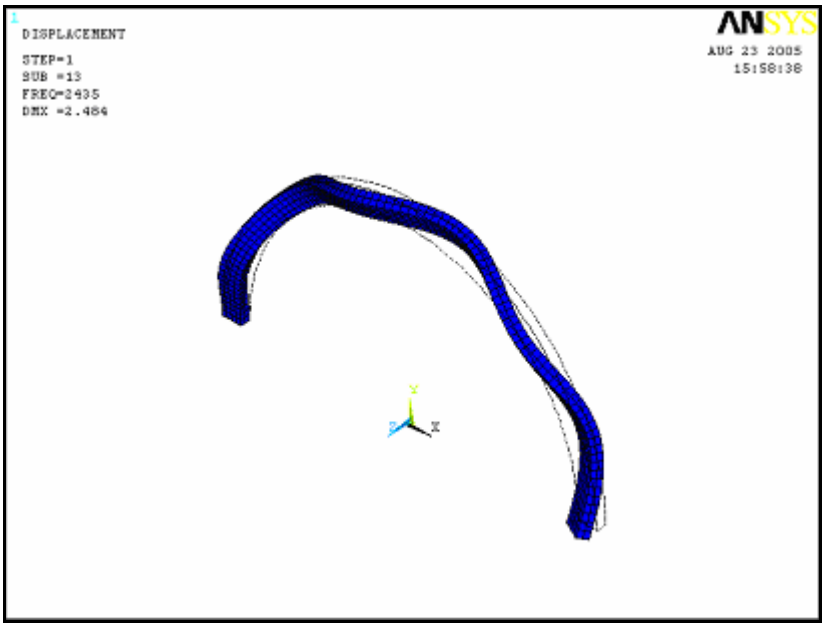
Şekil B.3. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun birinci modu, ankastre-serbest, $\phi = 180^0$, (FINES).



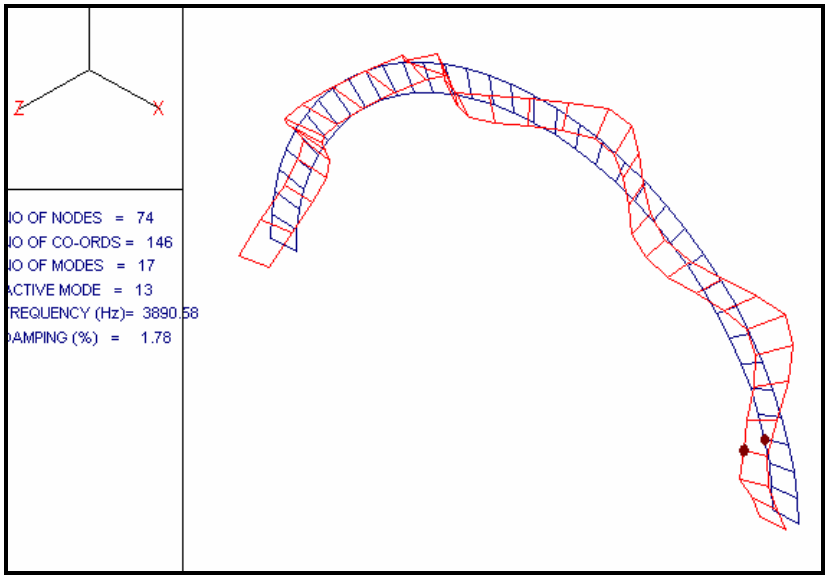
Şekil B.4. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun beşinci modu, ankastre-serbest, $\phi = 180^0$, (Ansys, Solid 95).



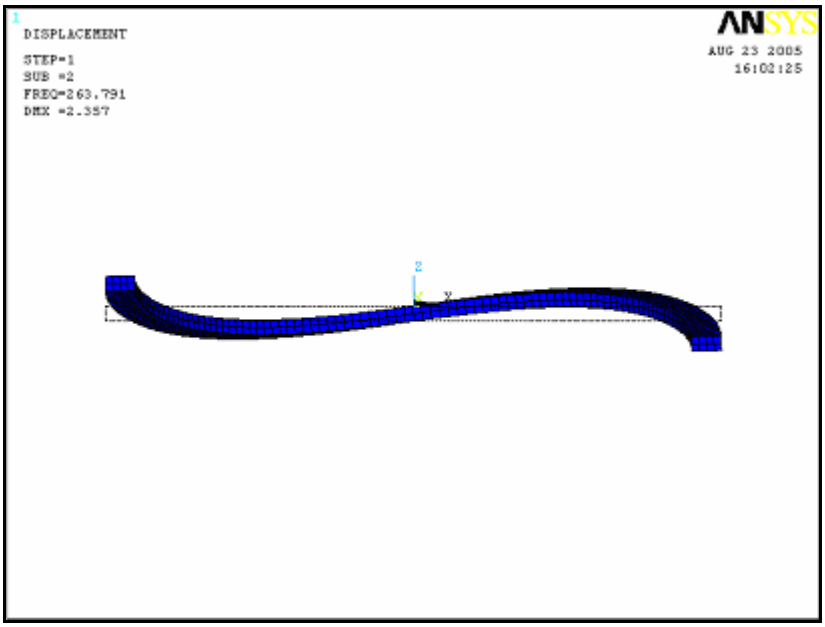
Şekil B.5. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun beşinci modu, ankastre-serbest, $\phi = 180^0$, (FINES).



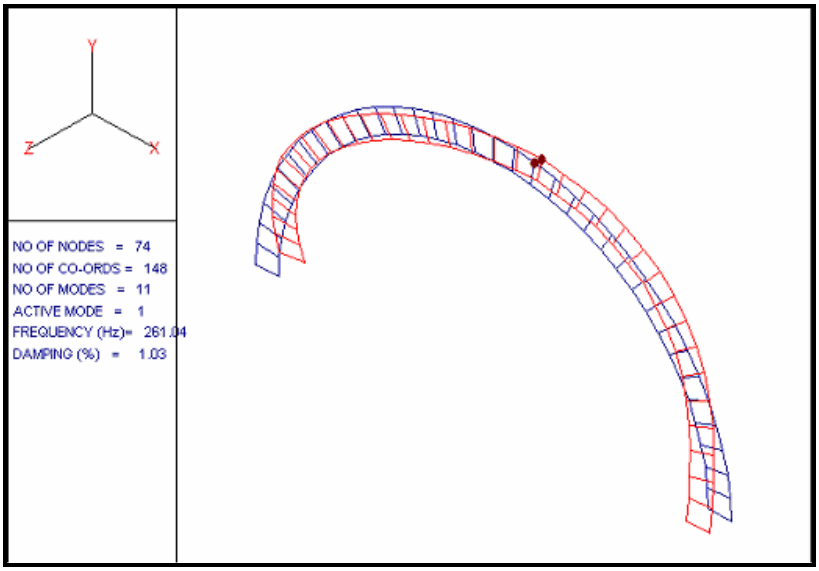
Şekil B.6. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun onüçüncü modu, ankastre-serbest, $\phi = 180^0$, (Ansys, Solid 95).



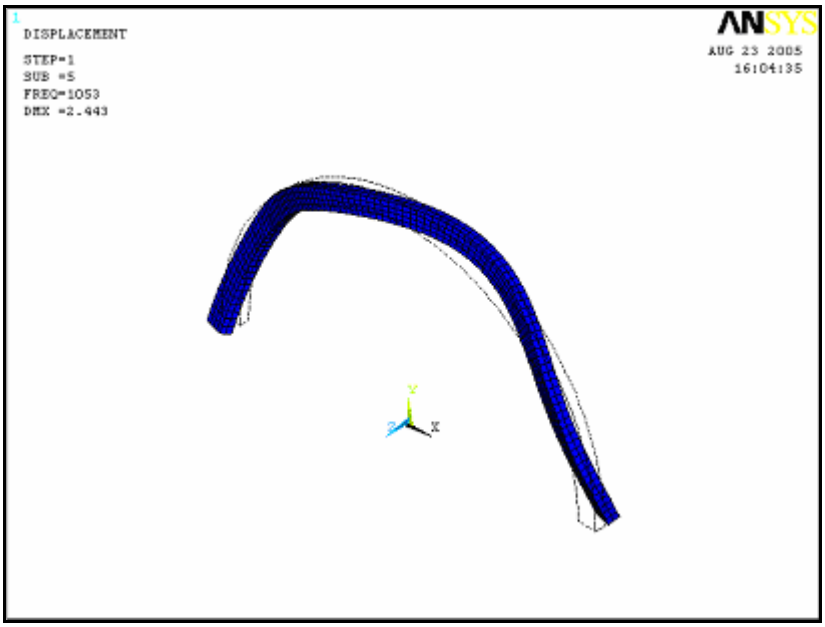
Şekil B.7. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun onüçüncü modu, ankastre-serbest, $\phi = 180^0$, (FINES).



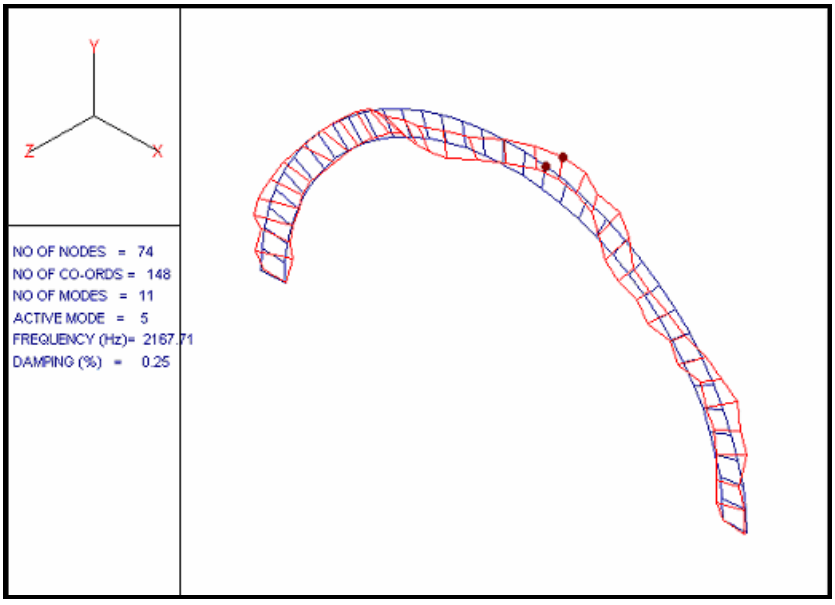
Şekil B.8. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun birinci modu, serbest-serbest, $\phi = 180^0$, (Ansys, Solid 95).



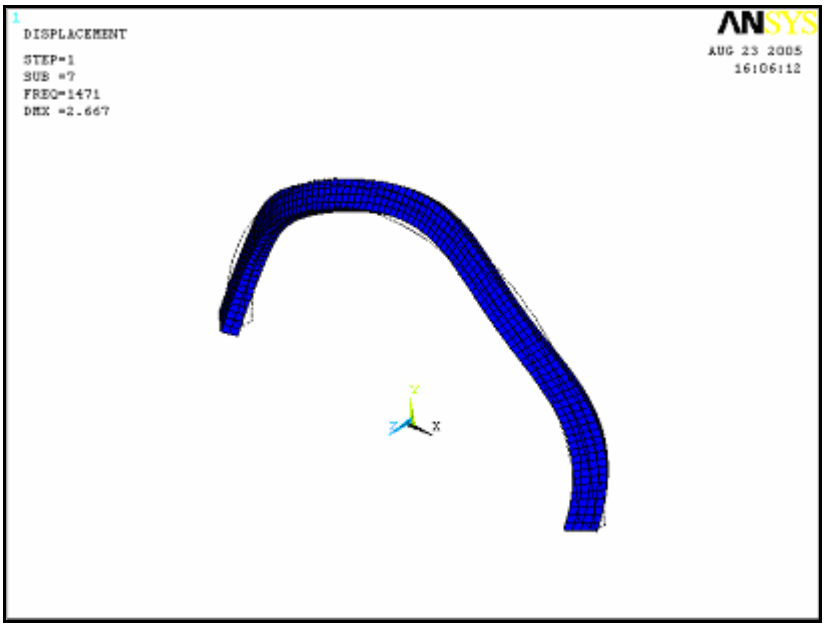
Şekil B.9. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun birinci modu, serbest-serbest, $\phi = 180^0$, (FINES).



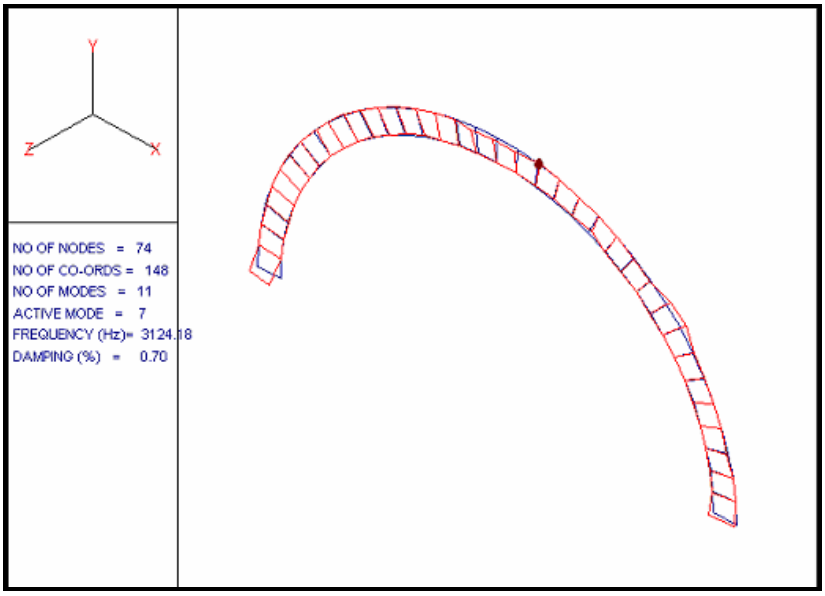
Şekil B.10. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun beşinci modu, serbest-serbest, $\phi = 180^0$, (Ansys, Solid 95).



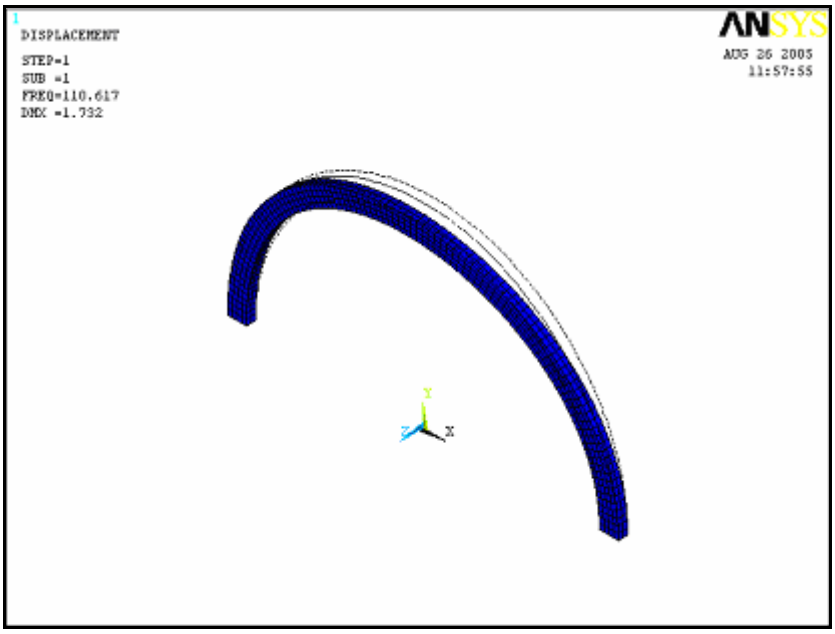
Şekil B.11. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun beşinci modu, serbest-serbest, $\phi = 180^0$, (FINES).



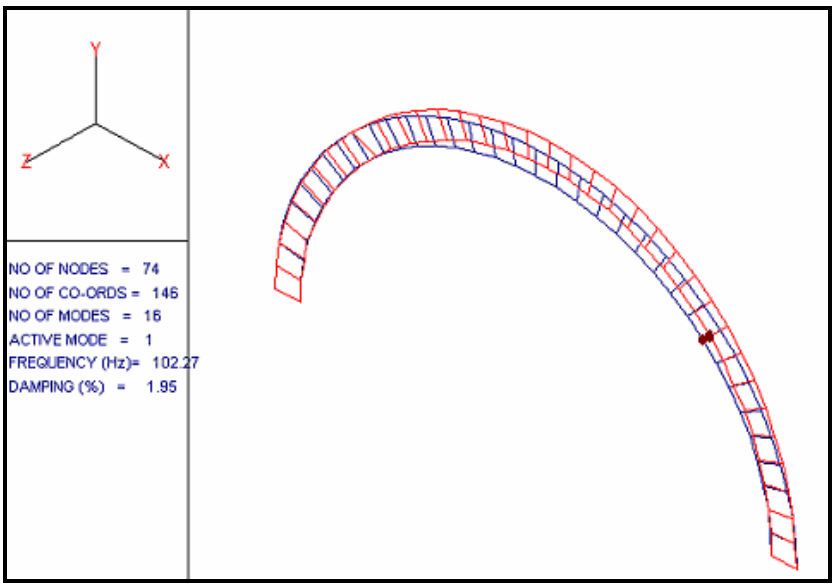
Şekil B.12. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun yedinci modu, serbest-serbest, $\phi = 180^0$, (Ansys, Solid 95).



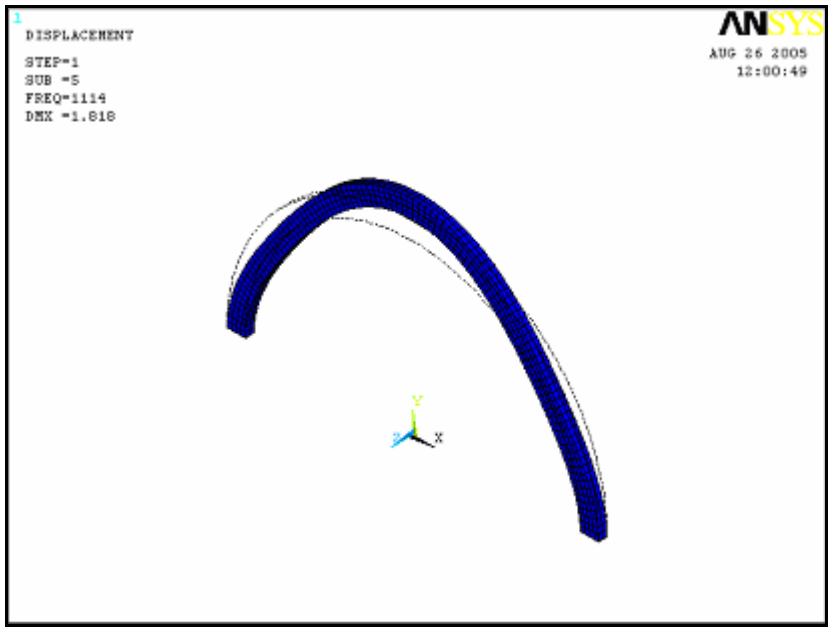
Şekil B.13. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun yedinci modu, serbest-serbest, $\phi = 180^0$, (FINES).



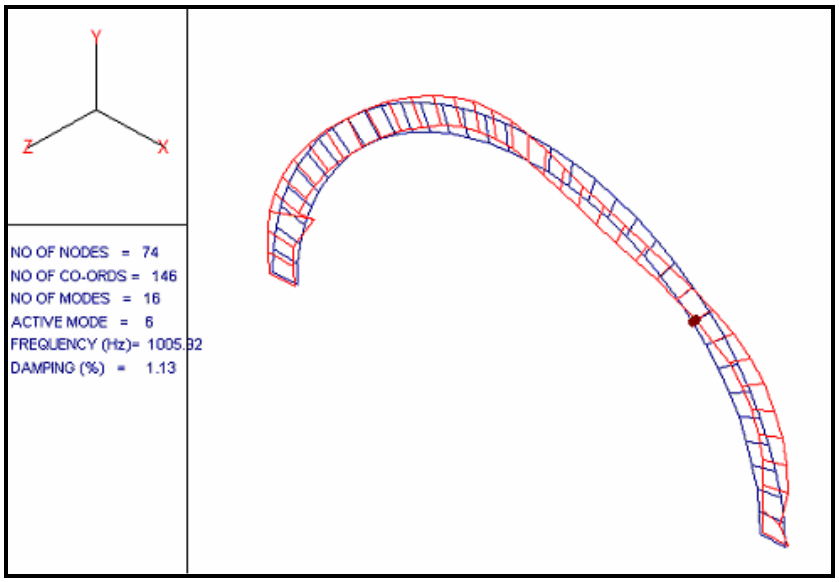
Şekil B.14. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun birinci modu, ankastre-ankastre, $\phi = 180^0$, (Ansys, Solid 95).



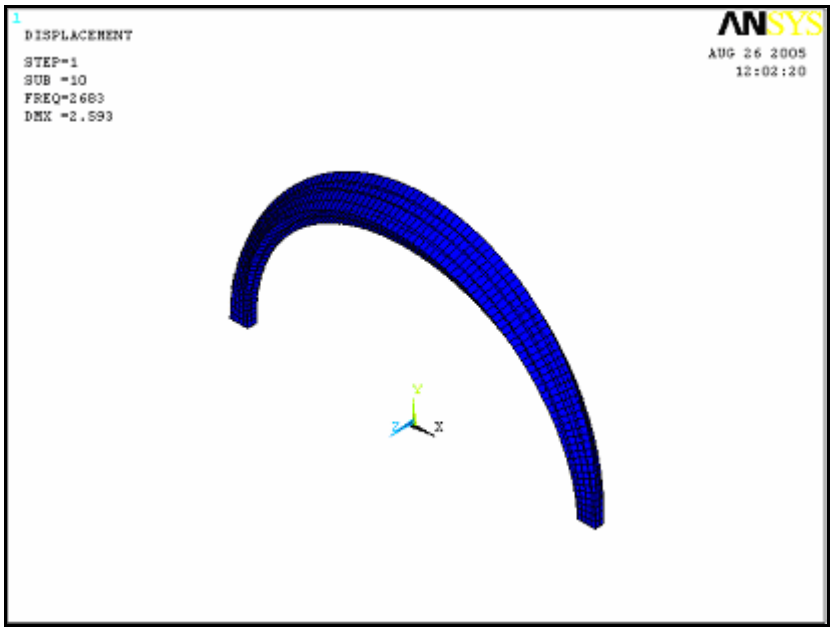
Şekil B.15. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun birinci modu, ankastre-ankastre, $\phi = 180^0$, (FINES).



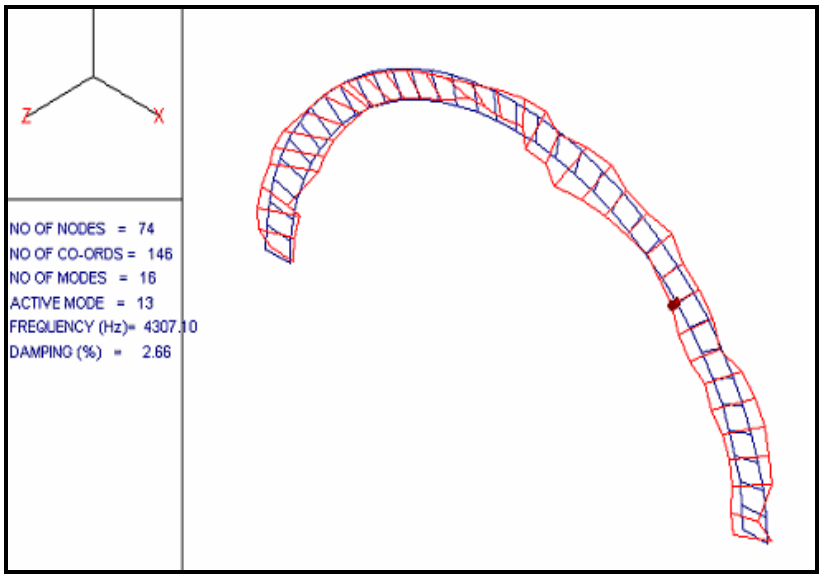
Şekil B.16. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun beşinci modu, ankastre-ankastre, $\phi = 180^0$, (Ansys, Solid 95).



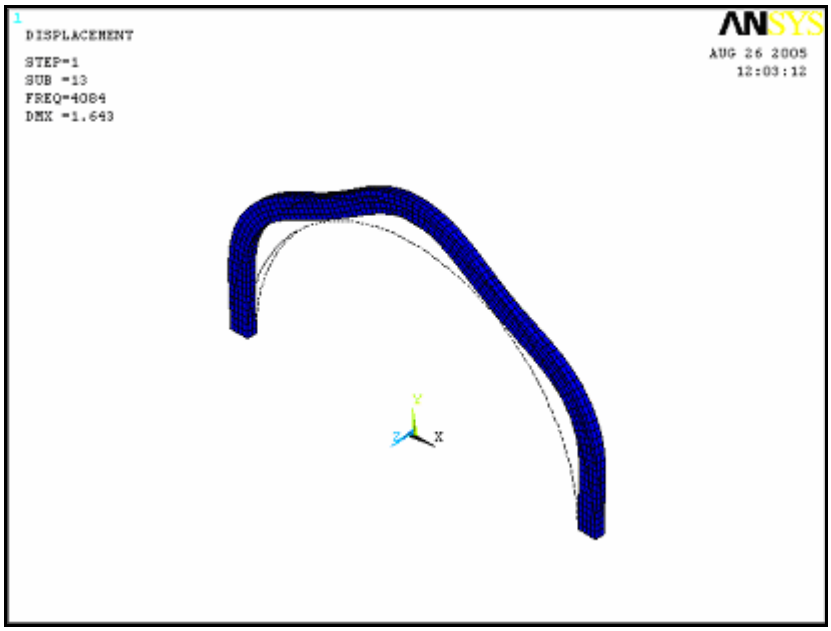
Şekil B.17. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun beşinci modu, ankastre-ankastre, $\phi = 180^0$, (FINES).



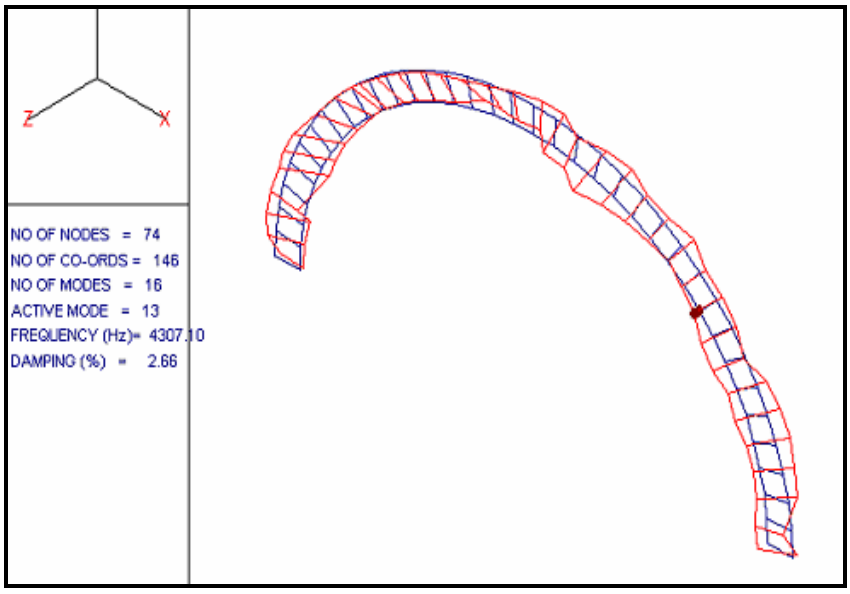
Şekil B.18. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun onuncu modu, ankastre-ankastre, $\phi = 180^0$, (Ansys, Solid 95).



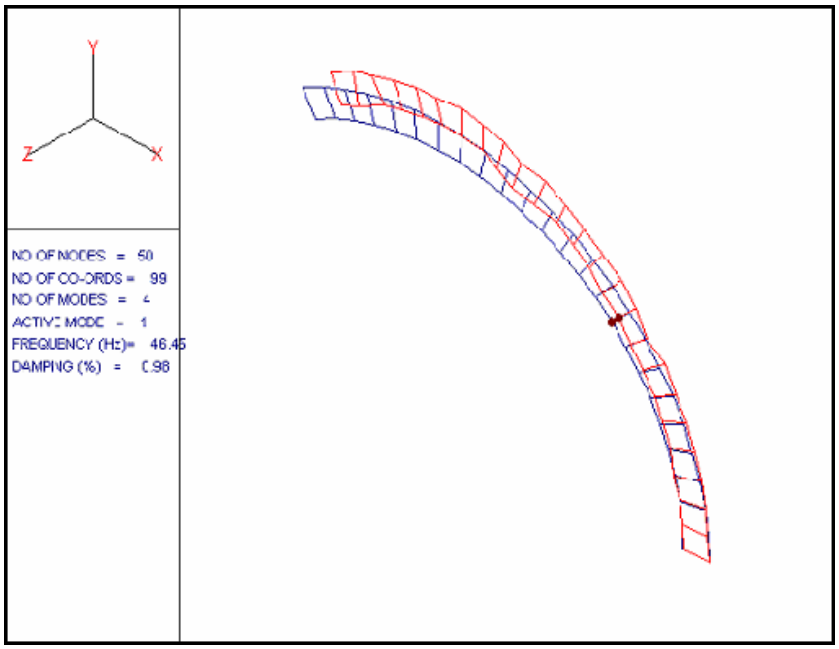
Şekil B.19. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun onuncu modu, ankastre-ankastre, $\phi = 180^0$, (FINES).



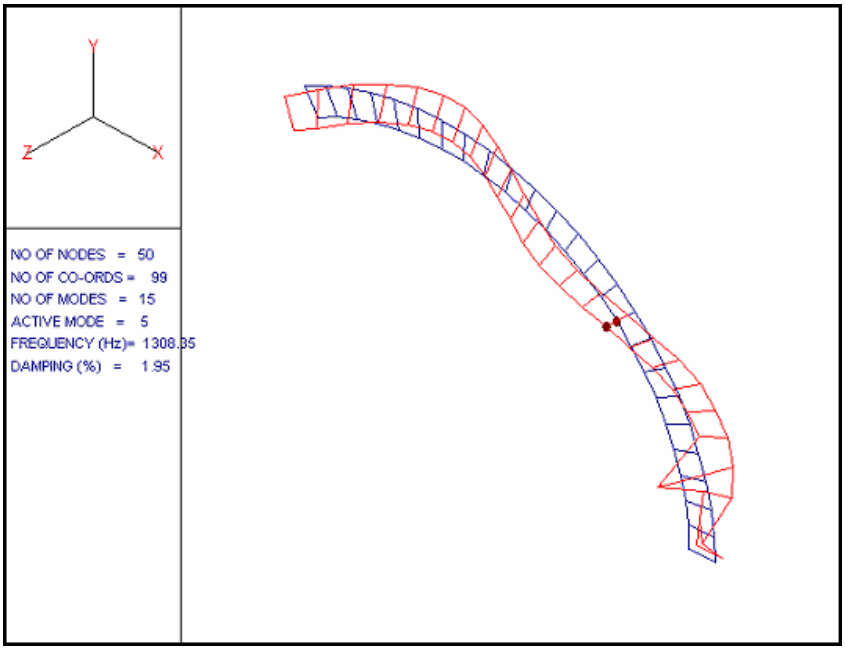
Şekil B.20. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun onüçüncü modu, ankastre-ankastre, $\phi = 180^0$, (Ansys, Solid 95).



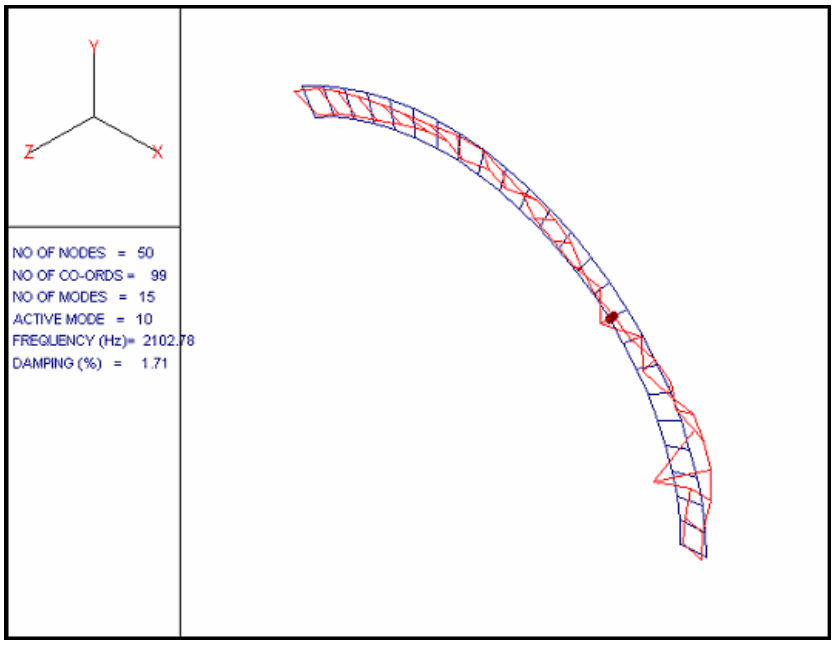
Şekil B.21. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun onüçüncü modu, ankastre-ankastre, $\phi = 180^0$, (FINES).



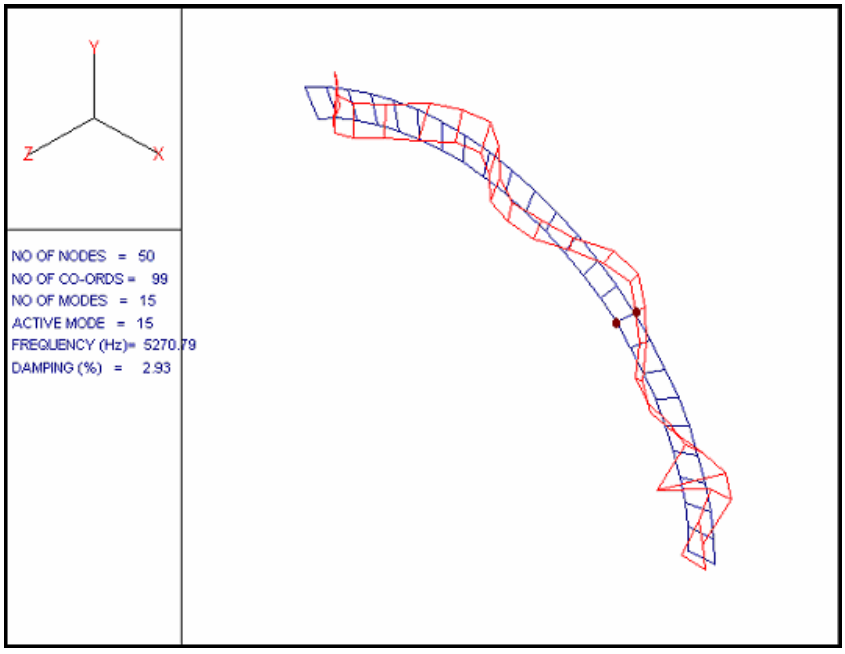
Şekil B.22. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun birinci modu, ankastre-serbest, $\phi = 120^0$, (FINES).



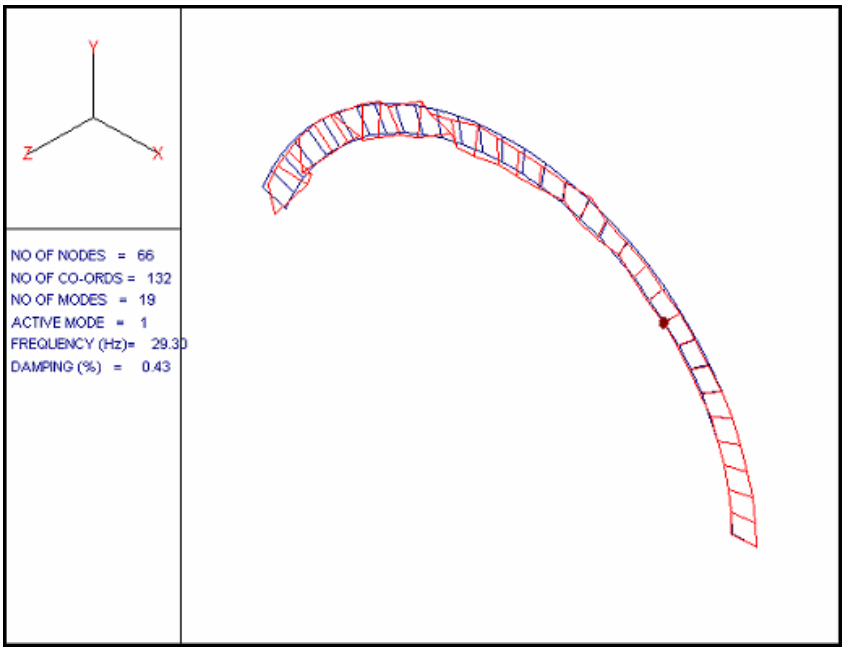
Şekil B.23. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun beşinci modu, ankastre-serbest, $\phi = 120^0$, (FINES).



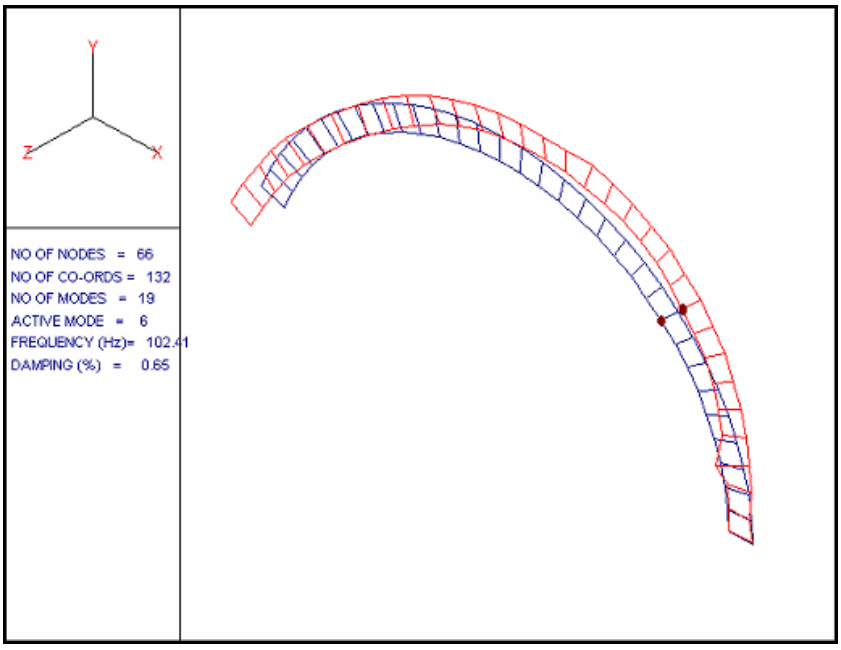
Şekil B.24. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun onuncu modu, ankastre-serbest, $\phi = 120^0$, (FINES).



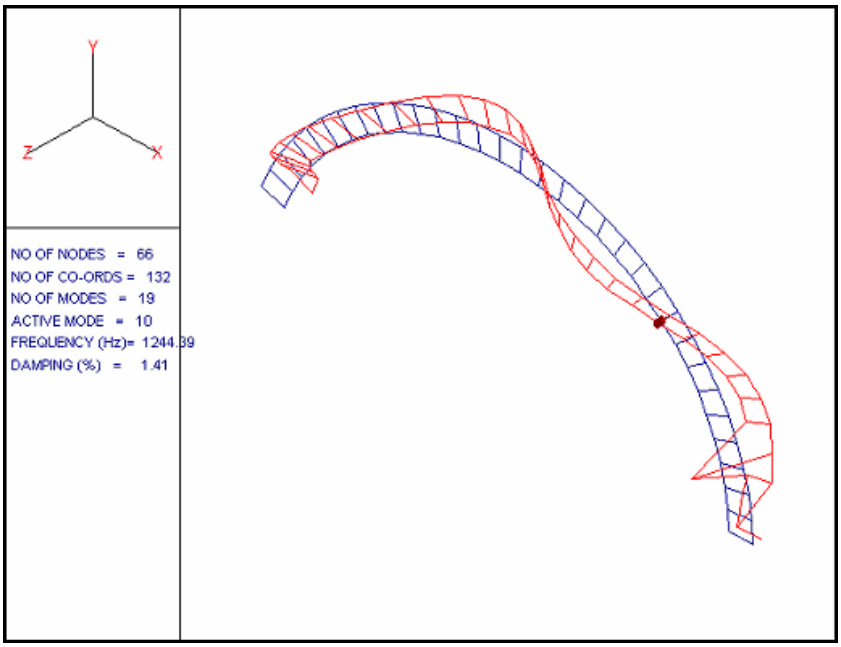
Şekil B.25. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun onbeşinci modu, ankastre-serbest, $\phi = 120^0$, (FINES).



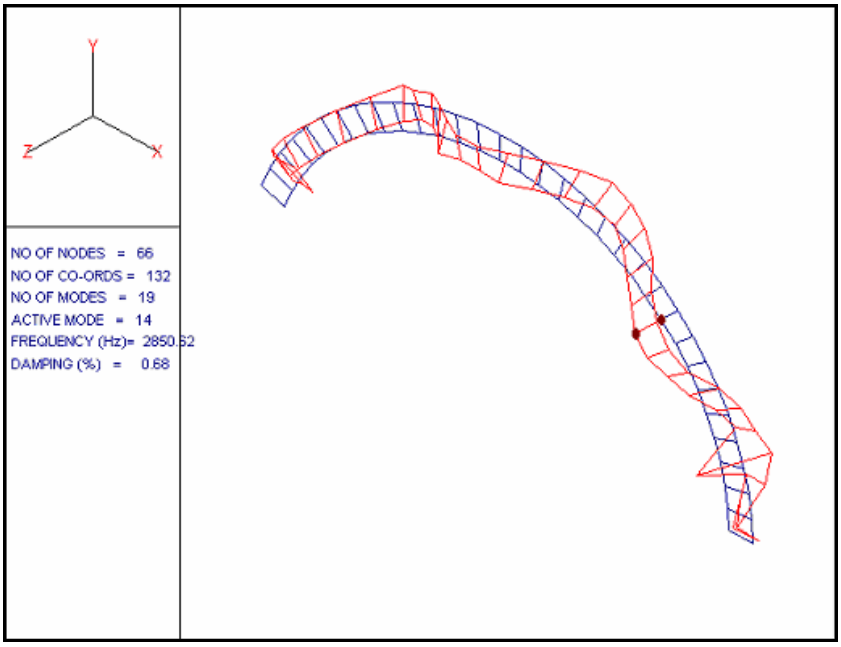
Şekil B.26. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun birinci modu, ankastre-serbest, $\phi = 160^0$, (FINES).



Şekil B.27. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun beşinci modu, ankastre-serbest, $\phi = 160^0$, (FINES).



Şekil B.28. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun onuncu modu, ankastre-serbest, $\phi = 160^0$, (FINES).



Şekil B.29. Çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli çubuğun onbeşinci modu, ankastre-serbest, $\phi = 160^0$, (FINES).

ÖZGEÇMİŞ

O. Yaşar DOĞRUER, 1969 yılında Aksaray'da doğdu. İlk, Orta ve Lise öğrenimini Ankara'da tamamladı. 1987 yılında Ankara Lisesi'nden, 1991 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Makina Mühendisliği Bölümü'nden mezun oldu. 1993 yılında Askerlik hizmetini tamamladı.

1998 yılında İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Makina Mühendisliği Anabilim Dalı, İmalat Programı'nda Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı. Doktora çalışmasına 1999 yılında başlayan O. Yaşar DOĞRUER halen özel bir kuruluşta Dizayn Şefi olarak çalışmaktadır.