İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MİKRODALGA GÖRÜNTÜLEMEDE SEYREKLİK YAKLAŞIMI YÖNTEMLERİNİN UYGULANMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emre YALÇIN

Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Anabilim Dalı

Telekomünikasyon Mühendisliği Programı

ARALIK 2016

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MİKRODALGA GÖRÜNTÜLEMEDE SEYREKLİK YAKLAŞIMI YÖNTEMLERİNİN UYGULANMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emre YALÇIN
(504121341)

Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Anabilim Dalı

Telekomünikasyon Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Özgür ÖZDEMİR

ARALIK 2016

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 504121341 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi Emre YALÇIN, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "MİKRODALGA GÖRÜNTÜLEMEDE SEYREKLİK YAKLAŞIMI YÖNTEMLERİNİN UYGULANMASI" başlıklı tezini aşağıdaki imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı :	**Doç. Dr. Özgür ÖZDEMİR** İstanbul Teknik Üniversitesi	.....
Jüri Üyeleri :	**Doç. Dr. Ender Mete EKŞİOĞLU** İstanbul Teknik Üniversitesi	.....
	Yrd. Doç. Dr. Ahmet Öncü Boğaziçi Üniversitesi	.....
		.....

Teslim Tarihi : **25 Kasım 2016**
Savunma Tarihi : **23 Aralık 2016**

ÖNSÖZ

Bu bitirme çalışmasında benden hiçbir zaman emeğini esirgemeyen ve bana her zaman yardımcı olan tez danışmanı hocam Sayın Özgür ÖZDEMİR'e çok teşekkür ederim. Tüm çalışmalarım boyunca yanımda olup beni destekleyen ailem ve arkadaşlarıma saygı ve sevgilerimi sunarım.

Aralık 2016

Emre YALÇIN
(Telekomünikasyon Mühendisi)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ ..... **v**
İÇİNDEKİLER ..... **vii**
KISALTMALAR ..... **ix**
SEMBOLLER ..... **xi**
ÇİZELGE LİSTESİ ..... **xiii**
ŞEKİL LİSTESİ ..... **xv**
ÖZET ..... **xvii**
SUMMARY ..... **xix**
1. GİRİŞ **1**
1.1 Tezin Amacı 1
1.2 Literatür Araştırması 1
1.3 Tezin İçeriği 3
2. TERS SAÇILMA PROBLEMİ **5**
2.1 Ters Saçılma Problemi Modeli 5
2.2 Born yaklaşıklığı 6
2.3 Born İteratif Yöntemi 7
3. SEYREKLİK YAKLAŞIMI ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ **11**
3.1 Temel Bilgiler 11
3.1.1 Seyreklik modeli 11
3.1.2 Lineer denklemlerin incelenmesi 13
3.1.3 Sıkıştırılmış algılama 16
3.2 l_1 Normunu Kullanan Seyreklik Yaklaşımı Çözüm Yöntemleri 17
3.2.1 NESTA 17
3.2.2 İki adımlı iteratif kısaltarak eşikleme-TWIST 19
3.2.3 Hızlandırılmış iteratif kısaltarak eşikleme-FISTA 23
3.2.4 Seyrek yaklaşıklıkta gradyen izdüşümü yöntemi-GPSR 24
3.3 l_0 Normunu Kullanan Seyreklik Yaklaşımı Çözüm Yöntemleri 27
3.3.1 Seyrek yaklaşıklıkta yinelemeli ve l_2 norm ile regülarize edilmiş uyarlamalı sert eşikleme yöntemi-L2IMAT 27
3.4 l_1 ve l_0 Norm Yöntemlerinin BİY İçerisinde Kullanımı 29
3.4.1 BİY-NESTA yöntemi 30
3.4.2 BİY-TWIST yöntemi 30
3.4.3 BİY-FISTA-YE yöntemi 31
3.4.4 BİY-FISTA-SE yöntemi 31
3.4.5 BİY-GPSR yöntemi 32
3.4.6 BİY-L2IMAT yöntemi 32

4. SEYREKLİK YAKLAŞIMI SAYISAL SONUÇLARI 33
4.1 Gürültü Analizi 34
4.2 Birbirine Yakın Konumlandırılmış Cisimlerin Görüntülenmesi 37
4.3 Sıkıştırılmış Algılama 38
4.4 Yöntemlerin Yakınsama Hızı 40
4.5 Seyreklik Koşulunun Sağlanmadığı Durumda Görüntü Analizi 41
5. SONUÇ VE ÖNERİLER 43
KAYNAKLAR 45
ÖZGEÇMİŞ 49

KISALTMALAR

CS : Compressive Sensing
MM : Majorization Minimization
BİY : Born İteratif Yöntemi
GPSR : Gradient Projection for Sparse Recovery
ISTA : Iterative Shrinkage Thresholding Algorithm
FISTA : Fast Iterative Shrinkage Thresholding
TWIST : Two Way Iterative Shrinkage Thresholding
L2IMAT : L2 regularized Iterative Method with Adaptive Thresholding
BİY-FISTA : Born İteratif ile FISTA'dan elde edilen yöntem
BİY-GPSR : Born İteratif ile GPSR'dan elde edilen yöntem
BİY-NESTA : Born İteratif ile NESTA'dan elde edilen yöntem
BİY-TWIST : Born İteratif ile TWIST'den elde edilen yöntem
BİY-L2IMAT: Born İteratif ile L2IMAT'dan elde edilen yöntem

SEMBOLLER

E	**:** Elektrik alan
G	**:** Green fonksiyonu
$\mathbf{k_0}$	**:** Boşluğun dalga sayısı
T	**:** Eşikleme fonksiyonu
α	**:** Tikhonov regülarizasyonu parametresi
ε	**:** Dielektrik sabiti
Γ	**:** Ölçüm bölgesi
Ω	**:** Araştırma bölgesi
χ	**:** Cisim fonksiyonu

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 4.1: Yöntemlerin yakınsaması için gereken iterasyon sayısı. 41

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 : Problem geometrisi..... 6
Şekil 3.1 : NESTA algoritması..... 20
Şekil 3.2 : Yumuşak eşikleme fonksiyonu. 21
Şekil 3.3 : TWIST algoritması. 23
Şekil 3.4 : FISTA algoritması. 25
Şekil 3.5 : GPSR algoritması. 27
Şekil 3.6 : Sert eşikleme fonksiyonu..... 28
Şekil 3.7 : L2IMAT algoritması. 30
Şekil 4.1 : Ölçüm sistemi geometrisi. 34
Şekil 4.2 : %25 gürültü için yöntemlere ait sayısal sonuçlar: a) Cisim, b) BİY, c) BİY-L2IMAT, d) BİY-FISTA-YE, e) BİY-GPSR, f) BİY-FISTA-SE, g) BİY-TWIST, h) BİY-NESTA, i) Yöntemlere ait hata fonsiyonu. 35
Şekil 4.3 : %50 gürültü için yöntemlere ait sayısal sonuçlar: a) Cisim, b) BİY, c) BİY-L2IMAT, d) BİY-FISTA-YE, e) BİY-GPSR, f) BİY-FISTA-SE, g) BİY-TWIST, h) BİY-NESTA, i) Yöntemlere ait hata fonsiyonu. 36
Şekil 4.4 : Birbirlerine yakın konumlandırılmış cisimler için yöntemlere ait sayısal sonuçlar: a) Cisim, b) BİY, c) BİY-L2IMAT, d) BİY-FISTA-YE, e) BİY-GPSR, f) BİY-FISTA-SE, g) BİY-TWIST, h) BİY-NESTA. 37
Şekil 4.5 : CS için yöntemlere ait sayısal sonuçlar: a) Cisim, b) 100 ölçüm için BİY sonucu, c) CS ile BİY sonucu, d) BİY-L2IMAT, e) BİY-FISTA-YE, f) BİY-GPSR, g) BİY-FISTA-SE, h) BİY-TWIST, i) BİY-NESTA. 38
Şekil 4.6 : %25 Gürültüde CS için sayısal sonuçlar: a) Cisim, b) 100 ölçüm için BİY sonucu, c) CS ile BİY sonucu, d) BİY-L2IMAT, e) BİY-FISTA-YE, f) BİY-GPSR, g) BİY-FISTA-SE, h) BİY-TWIST, i) BİY-NESTA. 39
Şekil 4.7 : Yöntemlerin yakınsamasına ait sayısal sonuçlar: a) Cisim, b) FISTA, c) GPSR, d) L2IMAT, e) TWIST, f) NESTA, g) Yöntemlerin yakınsama eğrileri. 40
Şekil 4.8 : Seyreklik koşulunun sağlanmadığı duruma ait sayısal sonuçlar: a) Cisim, b) BİY, c) BİY-L2IMAT, d) BİY-FISTA-YE, e) BİY-GPSR, f) BİY-FISTA-SE, g) BİY-TWIST, h) BİY-NESTA. 42

MİKRODALGA GÖRÜNTÜLEMEDE SEYREKLİK YAKLAŞIMI YÖNTEMLERİNİN UYGULANMASI

ÖZET

Cisimlerin şekli, yeri ve dielektrik sabiti gibi özelliklerinin belirlenmesi elektromanyetik ters saçılma problemi olarak adlandırılır. Ters saçılma problemi optik, radar, akustik, sismik ve medikal görüntülemede büyük önem taşımaktadır. Ters saçılma problemi lineer olmayan ve kötü kurulmuş (ill-posed) bir problemdir. Born ve Rytov yaklaşıklığı ters saçılma probleminin lineerleştirilmesinde kullanılan en yaygın iki yöntemdir. Ters saçılma problemi lineer hale getirildikten sonra da hala kötü kurulmuş bir problem olma özelliğini korumaktadır. Bu yüzden çözüm tek değildir, bu durumun üstesinden gelmek için regularizasyon teknikleri sıkça kullanılmaktadır ve literatürde birçok teknik bulunmaktadır.

Bu bitirme çalışmasında mikrodalga görüntüleme probleminin çözümü için seyreklik yaklaşımı yöntemleri kullanılmıştır. Bu yöntemler temel olarak Born yaklaşıklığı sonucu elde edilen lineer denklem sistemini çözmektedir. Tezin ilk kısmında ters saçılma problemi anlatılmış ve Born yaklaşıklığıyla bu problemin nasıl lineer hale getirildiği gösterilmiştir. Daha sonra Born İteratif Yöntemi (BİY) ele alınmıştır. Aynı zamanda Born iteratif yöntemi içerisinde, cisim fonksiyonunu bulmak için lineer ters problem çözümünde kullanılan Tikhonov regülarizasyonuna da değinilmiştir.

Tezin ikinci kısmında ise lineer ters problem çözümü için son yıllarda önem kazanan seyreklik yaklaşımı incelenmiştir. Görüntülenecek cismin görüntülenen bölgeye göre oransal olarak küçük olması, ters saçılma probleminin seyreklik yaklaşımı ile ele alınabilmesine olanak sağlamaktadır. Bu doğrultuda literatürde seyreklik yaklaşımı çözümünde kullanılan NESTA, seyrek yaklaşıklıkta gradyen izdüşümü (Gradient Projection for Sparse Recovery - GPSR), iki adımlı iteratif kısaltarak eşikleme (Two Way İterative Shrinkage Thresholding - TWIST), hızlandırılmış iteratif kısaltarak eşikleme (Fast İterative Shrinkage Thresholding - FISTA) ve l_2 normu ile regülarize edilmiş uyarlamalı sert eşikleme(l_2 Regularized İterative Method for Adaptive Thresholding - L2IMAT) yöntemleri incelenmiştir. Yöntemler incelenirken kullandıkları l_1 veya l_0 norm küçültmesine göre sınıflandırılmıştır. Bu yöntemler BİY içerisine entegre edilerek BİY ile karşılaştırılmıştır. Karşılaştırmada gürültüye karşı dayanıklılık, cisim boyutu ve şekli, birden çok cisim için yakınlık durumu, görüntülenen cismin kenarlarının belirginliği ve sıkıştırılmış algılama özellikleri göz önünde bulundurulmuştur. Seyreklik yaklaşımı yöntemlerinin küçük cisimlerde yüksek çözünürlük verdiği ve gürültüye karşı daha dayanıklı olduğu sonuçlarla görülmüştür.

SPARSE APPROXIMATION AND APPLICATIONS IN MICROWAVE IMAGING

SUMMARY

In the electromagnetic theory, imaging burried object is called as inverse scattering problem. Inverse scattering can be described as determining properties of burried objects from their response to a known electromagnetic excitation. Some physical and geometric properties such as shape, location, dielectric permitivity can be reconstructed from inverse scattering theorem. Mathematical model of inverse scattering problem has importance in optical, radar, acoustic, seismic and medical imaging. Inverse scattering problem is non-linear and ill-posed equation. To linearize it, Born and Rytov approximation methods are widely used. However, after the linearization, inverse scattering problem is still ill-posed and there is no unique solution. To deal with ill-posedness, there are many regularization techniques in literature.

The measurement data , that is required to image the object, is obtained by applying Moment Method. In the Born approximation, total electric field in the object is assumed to be equal to the incident field. Since this method is valid for only weak scatters. Born Iterative Method can be explained via three main step. First step is to calculate the initial object function by using the Born Approximation. In the second step, total electric field on the object is updated according to object function that is found in first step. In the third step of this method, object function is updated by using new total field that is result of second step. These steps are runned until convergence. In this study, sparse approximation techniques are used to solve inverse scattering problem. These techniques mainly solve linear inverse problem that is obtained after born approximation.

In chapter 2, nature of inverse scattering problem is discussed and linearization with Born approximation is shown. Then Born Iterative Method (BIM) is explained extensively step by step. Also Tikhonov regularization technique is discussed within Born İterative Method. İnverse scattering problem resembles the properties of ill-posed problems. These problems usually arise from pyhsical limitations of knowledge about object. Physically ill-posed problems lead to computationally ill-conditioned problems. So the solution for inverse scattering problem is higly sensitive to error. Discretization and noise can be source of error. The computed solution for inverse scattering problem oscilates strongly. To cope with this difficulty, any additional knowledge of physical nature quantity of object is needed in order to make the solution physically meaningful and possible correct. İt can be achieved by regularization methods. For instance, in Tikhonov regularization l_2 norm is added to cost function. This lead l_2 norm of minimizer of cost function must be little. In other words, regularization reduce the solution space so as to truncate the oscilation. And also l_2 norm is not only the type of norm that used in regularization, l_1 and l_0 norm can also

be used in regularization to solve inverse scattering problem. If the object is sparse, l_1 or l_0 norm regularization gives pyhsically meaningful and correct solution. Because sparse object has lower l_1 and l_0 norm.

In chapter 3, sparse approximation methods that become a popular in recent years are explained. Sparsity means that number of significant (nonzero) components are relatively small compared to the signal length. If the imaging domain is sparse, sparse approximation methods can work well for an imaging application. These methods often use l_0 and l_1 norm minimization and this allows to hold significant components while forcing other component to be zero. l_0 norm are also explained mathematically in this chapter, but briefly it can be assumed as a count of nonzero elements of signal. l_1 norm is the sum of absolute values of all elements in signal. Cost function of inverse scattering problem is squared norm of residual error. Moreover it is also ill-posed problem thus it requires regularization. Tikhonov method adds l_2 norm of signal to the cost function to regularize it. This can give analytical solution to the ill-posed problem. Adding l_0 and l_1 norm to cost function doesn't give analytical solution to the ill-posed problem. Because many different signals may have same l_0 or l_1 norm value. Therefore regularizing the cost function with these norms provides solution that minimizes squared norm of residual which is necessarily sparse. Because of this property, l_0 or l_1 norm are useful in sparse approximation. The l_2 norm regularization term in the cost function enhances smoothness in the solution. At the same time, l_2 regularized cost functions become inefficient when the sparsity or sharpness exist in the search domain. Some microwave imaging areas include this type of search domain such as through the wall imaging and radar imaging. The nature of l_0 norm has discrete structure so it makes the problem non-convex. l_0 norm can be replaced by l_1 norm which is convex approximation of l_0 norm. This makes problem convex. Eventually, many convex optimization techniques can be used in sparse approximation.

Methods are classified according to the use of type of norm minimization. In this study, NESTA, Gradient Projection for Sparse Recovery (GPSR), Two Way İterative Shrinkage Thresholding (TWIST), Fast İterative Shrinkage Thresholding (FISTA) are classified as l_1 norm minimization and l_2 Regularized İterative Method for Adaptive Thresholding (L2IMAT) is classified as l_0 norm minimization. NESTA and GPSR algorithm aims to find gradient of l_1 norm of signals to minimize cost function. NESTA algorithm minimizes cost function by iteratively estimating three sequences x_k, y_k and z_k. At step k, y_k is the current guess of the optimal solution. İterating only y_k corresponds only standart firs order technique. z_k is the novelty which keeps in mind the previous steps. This leads fast convergence of NESTA algorithm. Further, another aspect of z_k is use of proximal function. The proximal function doesn't allow z_k go too far away from the center. Main sequence x_k is computed from weighted average of y_k and z_k. y_k includes Lipschitz constant of cost function and gradient of cost function. In case z_k consists Lipschitz constant of cost function, sum of previous gradient and proximal function. NESTA uses Huber function that is smooth approximation of l_1 norm while computing gradient of l_1 term in the cost function. GPSR involves two type of algorithm, GPSR-Basic and GPSR-BB (BB stands for Barzilai-Borwein). In this study, GPSR-Basic is used. GPSR-Basic iterates signal estimate along the negative gradient and projects it onto the non-negative orthant, and then performs backtracking process which ensures minimization of cost function. GPSR-Basic utilizes non-negative description of l_1 norm while calculating gradient of cost function. After extracting l_1 norm in the cost function , a new quadratic cost function can be

organized. GPSR-Basic loses time because of backtracking process. The bactracking line search optimizes the best step size which satisfies the minimization of cost funciton for GPSR-Basic algorithm. TWIST, FISTA and L2IMAT utilize Landweber iteration to decrease squared norm of residual. Landweber iteration is a special case of gradient descent algorithm. Briefly, they find new signal estimation by applying threshold function to the result of Landweber iteration. This method is also called truncated Landweber iteration. TWIST and FISTA methods use previous computed values in their iteration. TWIST method applies threshold function twice in each iteration. Two step in TWIST comes from Iterative Reweighted Shrinkage and Two Step Method for Linear Systems. Iterative Reweighted Shrikage algorithm finds a linear representation for shrinkage problem while using diagonal matris that consists non-negative components of signal. After this linear represantation used in Two Step Method for Linear Systems, TWIST algorithm is obtained. FISTA method is an accelareted version of İterative Shrinkage Thresholding Algorithm (ISTA), it updates both previous and older computed values. In FISTA and TWIST method, hard and soft threshold function can be used for shrinkage. In this study, soft threshold function is used for both methods. Soft thresholding technique corresponds l_1 minimization while hard thresholding corresponds l_0 minimization. The threshold value plays key role in the accuracy of methods that use hard threshold function. By keeping threshold value larger, hard threshold function can discard significant elements but it may produce good results against noise factor. On the other hand, by keeping threshold value smaller, hard threshold function picks all siginificant elements but it may produce bad results against noise factor.

In this thesis, NESTA, GPSR, TWIST, FISTA and L2IMAT methods are replaced with Tiknonov regularization while finding object function in Born Iterative Method. This leads positive impact on the result of imaging small object for Born Iterative Method. To show this improvement, some tests like noise resistance, resolution on closely located objects and edge preserving are applied to BIM-NESTA, BIM-TWIST, BIM-FISTA, BIM-GPSR, BIM-L2IMAT and BIM. And also l_1 and l_0 norm regularization techniques enable recovery of signal after Compressive Sensing (CS) application. Compressed Sampling based on obtaining signal from fewer measurement unlike the Nyquist sampling. Two conditions must be satisfied in order to apply CS to a given problem. First, the signal to be reconstructed must be sparse and the sensing matrix must be incoherent. According to the CS theory, a randomized sensing matrix allows compression of the measurement, hence reducing the amount of measurements. Randomized matrix has low coherence and that leads preserving nature of sparsity of imaging domain so that it gives same results despite reduction. After all of these, the simple idea in CS theory that measurements should not match signal's structure at all, the measurement should look like random noise in order to apply CS. A sparse signal can be shown in another transform domain. Basis for this transform domain called sparsifying basis. In our simulation, we have a priori knowledge about sparsity of search domain so that we use identity matrix instead of sparsifying basis. So that our sensing matrix is made up of system modelling matrix that includes green coefficients and total field and random matris that is used for sampling. We choose sampling matrix as a random i.i.d gaussian matrix to hold incohorency of sensing matrix. After multiplying both measurement vector and system modelling matrix with random i.i.d gaussian matrix, we reduce the data size of linear system. In the CS theory, there must be at least 4 times incoherent samples for each significant component in a sparse signal

so as to recover signal form reduced measurement. According to this, we reduce 400 measurements to 100 measurements in our simulation.

1. GİRİŞ

Düz saçılma problemi, cismin özellikleri biliniyor iken saçılan elektriksel alanın hesaplanması olarak tanımlanır. Saçılan alandan cismin özelliklerinin belirlenmesi ise ters saçılma problemi olarak adlandırılır ve lineer olmayan problemdir. Mikrodalga görüntüleme problemi de ters saçılma problemidir. Bu tezde mikrodalga görüntüleme problemi Born yaklaşıklığı kullanılarak lineer hale getirilmiştir ve lineer problem çözümü ele alınmıştır. Born yaklaşıklığı, gelen elektrik alan ile toplam alanın cisim içerisinde birbirine eşit olduğunu varsayar. Bu tezde ters saçılma probleminin Born İteratif Yöntemi ve bu yönteme entegre edilmiş NESTA, seyrek yaklaşıklıkta gradyen izdüşümü (Gradient Projection for Sparse Recovery - GPSR), iki adımlı iteratif kısaltarak eşikleme (Two Way İterative Shrinkage Thresholding - TWIST), hızlandırılmış iteratif kısaltarak eşikleme (Fast İterative Shrinkage Thresholding - FISTA) ve l_2 norm ile düzünlenmiş uyarlamalı sert eşikleme (l_2 Regularized İterative Method for Adaptive Thresholding - L2IMAT) yöntemleri ile çözümü ele alınacaktır.

1.1 Tezin Amacı

Tezin temel amacı, mikrodalga görüntülemede ters saçılma probleminin çözümü için Born İteratif Yöntemi içerisine seyreklik yaklaşımı kullanan yöntemleri entegre ederek efektif bir çözüm sunmaktır. Tezin ilk kısmında ters saçılma probleminden ve Born yaklaşıklığından, ikinci kısımda ise seyreklik yaklaşımı çözüm yöntemlerinden bahsedilecektir.

1.2 Literatür Araştırması

Mikrodalga görüntüleme medikal uygulamarda da üzerinde çok fazla çalışılan bir konudur. Kadınlarda görülen göğüs kanserinin teşhisinde kullanılabilmektedir. Göğüs kanseri teşhisinde mikrodalga görüntülemenin, X-ray mamagrofisine kıyasla daha fazla avantajı bulunmaktadır [1]. X-ray mamagrofisi yüksek çözünürlük vermesine

rağmen bazı eksiklikleri bulunmaktadır. Bunlara; göğüsteki tümörü erken teşhis edememesi, koltuk altı ve göğüs kafesine yakın durumdaki tümörleri tespit etmede ve göğüs dokusu yoğun olan kadınlarda etkin olamaması ve iyonlaştırıcı radyasyon kullanılması örnek verilebilir. Mikrodalga frekanslarda, diğer kanser türlerine oranla göğüs kanserine sahip dokunun sağlıklı göğüs dokusuna göre önemli derecede farklı elektriksel özellik göstermektedir [2]. Bu da mikrodalga görüntülemeyi X-ray mamagrofisine göre ön plana çıkarmaktadır. Göğüs kanseri teşhisinde başka bir yöntem olan Manyetik rezonans görüntüleme(magnetic resonance imaging - MRI) de kullanışlı bir görüntüleme tekniğidir. Mikrodalga görüntüleme MRI'ya göre küçük tümörlerin tespitinde daha duyarlı ve daha ucuz bir tekniktir. Burada duyarlılığın nedeni küçük cisimlerin sahip olduğu iletkenlik ve dielektrik sabiti gibi elektriksel özelliklerdir. Kanserli göğüs dokusu için dielektrik sabiti ve iletkenlik sağlıklı dokuya oranla en az 3 kat daha büyüktür [3].

Ters saçılma problemi Born iteratif yöntemi [4], bozulmuş Born iteratif yöntemi (Distorted Born Iterative Method - DBIM) [5], modifiye gradyen yöntemi (Modified Gradient Method - MGM) [6] ve kontrast kaynak yöntemi (Contrast Source Inversion - CSI) [7] gibi bilinen yöntemler ile çözülebilmektedir. Born iteratif yöntemi, cisim fonsiyonunun ilk değerini bulmak için Born yaklaşıklığını kullanır. Born yaklaşıklığı zayıf saçıcılar için cisim üzerindeki toplam alanın gelen alana eşit olduğunu varsaymaktadır. Bu varsayım ile ters saçılma problemi lineer denklem haline gelir. Born iteratif yöntemi, Born yaklaşıklığından elde edilen cisim fonsiyonu ile yeni toplam alanı hesaplar daha sonra bu toplam alanı kullanılarak yeni cisim fonksiyonu bulur. Bu işlem iteratif olarak devam ettirilir.

Cismin görüntülenecek bölgeye oranla düşük yer kaplaması seyreklik yaklaşımına olanak sağlamaktadır. Seyreklik yaklaşımı çözüm yöntemleri son yıllarda mikrodalga görüntülemede kullanılmaya başlanmıştır [8–10]. Aynı zamanda seyreklik yaklaşıklığı sıkıştırılmış algılamanın da kullanılmasına olanak sağlamaktadır. Sıkıştırılmış algılama daha az ölçüm ile cismin geri elde edinilmesini sağlamaktadır [11]. Seyreklik yaklaşımı çözüm yöntemleri küçük boyuttaki cisimler için daha başarılı sonuçlar vermektedir.

Bu tez çalışmasında, seyreklik yaklaşımına ilişkin çözümler üzerinde durulmuştur. Bu yöntemler değişkene ait hata terimini küçültecek şekilde tasarlanmıştır. Bu çalışmada,

seyreklik yaklaşımı çözüm yöntemleri Born İteratif Yöntemi içerisinde kullanılarak hem cisim üzerindeki toplam alanın güncellenmesi hem de cisim fonksiyonuna bağlı hata teriminin küçültülmesi planlanmıştır. Seyreklik yaklaşımı için literatürde bir çok yöntem bulunmaktadır. Bu yöntemler kullandığı norm minimizasyonu türüne göre değişkenlik göstermektedir. Seyrek yaklaşıklık yöntemleri l_0 veya l_1 normunun kullanımına göre sınıflandırılabilir. l_0 normu vektörün 0 olmayan elemanlarının sayısını, l_1 normu ise vektörün elemanlarının mutlak değerlerinin toplamını ifade etmektedir. l_0 normunu kullanan belli başlı yöntemler Greedy algoritmaları olarak adlandırılan arayış eşleşmesi (Matching Pursuit-MP) [12], dik açılı arayış eşleşmesi (Orthogonal Matching Pursuit - OMP) [13], gradyen arayış (Gradient Pursuit - GP) [14], basamaklı dik açılı arayış eşleşmesi (Stagewise Orthogonal Matching Pursuit - stOMP) [15], regülarize edilmiş dik açılı arayış eşleşmesi (Regularized Orthogonal Matching Pursuit - ROMP) [16], sıkıştırılmış algılama ile dik açılı arayış eşleşmesi (Compressive Sampling Matching Pursuit - CoSaMP) [17], itaratif sert eşikleme (İterative Hard Thresholding - IHT) [18] olarak sıralanabilir. l_1 normunu kullanan yöntemler ise lineer programlama (Linear Programming - LP) [19], NESTA [20], spektral izdüşürülmüş gradyen (Spectral Projected Gradient - SPGL1) [21], hızlandırılmış iteratif kısaltarak eşikleme (Fast Iterative Shrinkage Thresholding - FISTA) [22], l_1 küçültmesi için sabit nokta sürekliliği (Fixed Point Continuation for l_1 minimization - FPC) [23], Bregman [24], seyrek yaklaşıklıkta gradyen izdüşümü (Gradient Projection for Sparse Recovery - GPSR) [25], iki adımlı kısaltarak eşikleme (Two Way Iterative Shrinkage Thresholding - TWIST) [26], ayırdedebilme yaklaşımı ile seyrek işaret elde edilmesi (Sparse Reconstruction by Seperable Approximation - SpaRSA) [27] olarak sıralanabilir.

1.3 Tezin İçeriği

Tez içeriğinin ilk kısmında ters saçılma problemi modelinden, Born yaklaşıklığından ve Born İteratif Yönteminden (BİY) bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde ise seyreklik yaklaşımı çözüm yöntemleri olan NESTA, TWIST, FISTA ve GPSR ve L2IMAT yöntemlerinden bahsedilecektir. Bu yöntemler adımlar halinde açıklanıp sonrasında Born İteratif Yöntemi içerisine nasıl entegre edildiği anlatılacaktır. 4. bölümde de

bahsi geçen yöntemlerin BİY içerisine entegre edilmesi sonucunda elde edilen sayısal sonuçlara yer verilecektir. Son bölümde ise sonuç ve öneriler belirtilecektir.

2. TERS SAÇILMA PROBLEMİ

Ters saçılma problemi bilinmeyen bir cismin yerinin, şeklinin, dielektrik sabitinin ve iletkenliğinin elektromanyetik dalgalar ile belirlenmesidir. Problem kısaca cismin bulunduğu bölgeye elektromanyetik dalgalar gönderilmesi ve cisimden saçılan alanın ölçülerek cismin fiziksel özelliklerinin çıkarılması olarak tarif edilebilir.

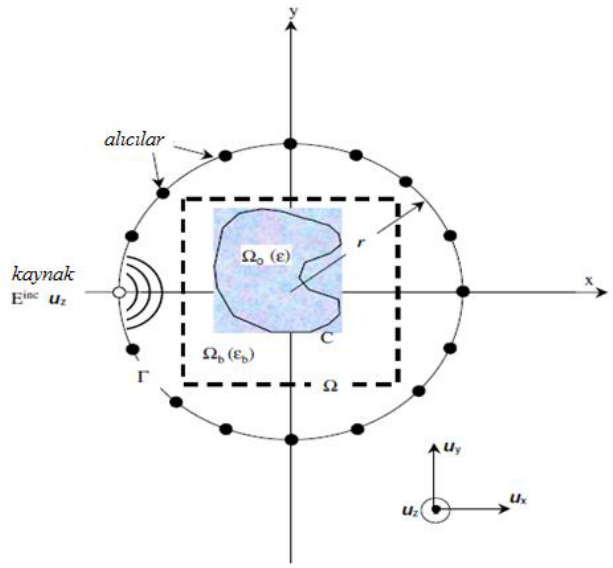
Bu kısımda ters saçılma problemi modeli, Born yaklaşıklığı ve Born İteratif Yönteminden bahsedilecektir.

2.1 Ters Saçılma Problemi Modeli

Ters saçılma problem modelini Şekil 2.1 üzerinden açıklayabiliriz. Γ ile gösterilen bölge alıcı ve verici antenlerin konumlandırıldığı yerdir. Saçılan alanın ölçümü bu bölgede yapılmaktadır. Ω ile gösterilen bölge ise araştırma bölgesi olarak adlandırılmaktadır. Bulunmak istenilen cisim bu bölgenin içerisinde olduğu düşünülür ve bu kısım görüntülenir. Bu çalışmada multistatik ölçüm düzeneği kullanılmış ve saçılan alan ölçümünde cismin içerisinde bulunduğu görüntülenecek alan etrafına birden çok alıcı anten konumlandırılmıştır. Bu antenlerde verici antenden gönderilip cisim üzerinden saçılan alan ölçülmektedir. Bu çalışmada mikrodalga frekansında görüntüleme yapılmıştır. Araştırma bölgesindeki cisim üzerinden saçılan alanın ifadesi denklem 2.1' deki gibidir;

$$E^s(\mathbf{r}) = k_0^2 \int_\Omega \chi(\mathbf{r}')E(\mathbf{r}')G(\mathbf{r},\mathbf{r}')d\mathbf{r}', \quad \mathbf{r} \in \Gamma \tag{2.1}$$

Burada E^s saçılan alan, k_0 boşluğun dalga sayısı, χ bulunmak istenen cisim fonksiyonu, E toplam alan ve G Green fonksiyonudur. $\mathbf{r}$ ölçüm yapılan bölge (Γ), $\mathbf{r}'$ ise cismin bulunduğu bölgeyi (Ω) gösterir. Denklem 2.1' de bulunmaya çalışılan cisim fonksiyonu cismin araştırma bölgesi içerisindeki konumunu, şeklini, dielektrik katsayısını ve iletkenliğini içerir. Burada cisim fonksiyonu ile dielektrik katsayısının arasındaki ilişki 2.2 denklemindeki gibidir.



Şekil 2.1 : Problem geometrisi

$$\chi(\mathbf{r}^{'}) = \varepsilon(\mathbf{r}^{'}) - 1 \tag{2.2}$$

Boş uzayın Green fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$G(\mathbf{r};\mathbf{r}^{'}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}^{'}|) \tag{2.3}$$

Denklem 2.3'de $H_0^{(1)}$ sıfırıncı dereceden birinci çeşit Hankel fonksiyonudur.

Ters saçılma probleminde denklem 2.1' den görüleceği üzere toplam alan ve cisim fonksiyonu şeklinde iki adet bilinmeyen vardır. Toplam alan cisim fonksiyonuna bağlı olduğu için problem lineer olmayan denklem halindedir. Bu çalışmada Born yaklaşıklığı kullanılarak problem lineer hale getirilmiştir.

2.2 Born yaklaşıklığı

Boyutları ve dielektrik katsayısı küçük olan cisimler düşük saçıcı olarak kabul edilir. Bu özelliğe sahip cisimler için cisim üzerindeki toplam alanın gelen alana eşit olduğu düşünülebilir. Bu yaklaşıma Born yaklaşıklığı denilir. Born yaklaşıklığıyla denklem 2.1'de toplam alan (E) yerine gelen alan (E^i) ifadesi yazılarak lineer olmayan problem lineer hale getirilebilir. Buna ait ifade aşağıdaki gibidir.

$$E^s(\mathbf{r}) \cong k_0^2 \int_\Omega \chi(\mathbf{r}')E^i(\mathbf{r}')G(\mathbf{r},\mathbf{r}')d\mathbf{r}', \quad \mathbf{r} \in \Gamma \tag{2.4}$$

2.3 Born İteratif Yöntemi

Born İteratif Yöntemi (BİY), ters saçılma probleminin çözümünde kullanılan iteratif bir yöntemdir. Bu yöntem; başlangıçta Born yaklaşıklığından elde edilen cisim fonksiyonunu ile toplam alanı günceller, daha sonra güncel toplam alandan yeni cisim fonksiyonunu hesaplar. Bu işlem iteratif olarak devam eder. Born iteratif yöntemi 3 temel adımla açıklanabilir:

Adım 1) Bu adımda başlangıç koşulu olarak kullanılmak üzere cisim fonksiyonu, Born yaklaşıklığı kullanılarak elde edilir.

$$E_{(0)} = E^i \tag{2.5}$$

Burada alt indis iterasyon adımını göstermektedir. Daha sonra denklem 2.6 kullanılarak $\chi_{(0)}(\mathbf{r}')$ elde edilir. Bunun için Tikhonov regülarizasyonu kullanılır.

$$E^s(\mathbf{r}) = k_0^2 \int_\Omega \chi_{(0)}(\mathbf{r}')E_{(0)}(\mathbf{r}')G(\mathbf{r},\mathbf{r}')d\mathbf{r}', \quad \mathbf{r} \in \Gamma \tag{2.6}$$

Yukarıdaki denklem ayrıklaştırılarak aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$[E^s] = [A_{(0)}][\chi_{(0)}] \tag{2.7}$$

Denklem 2.7 kötü kurulmuş (ill-posed) probleme ait denklem olduğundan, A matrisinin tersi tanımlı değildir. Bu problemden χ, Tikhonov regülarizasyonu ile aşağıdaki şekilde bulunabilir [28].

$$[\chi_{(0)}] = (\alpha[I] + [A_{(0)}]^*[A_{(0)}])^{-1}([A_{(0)}]^*[E^s]) \tag{2.8}$$

2.8 denkleminde A^*, A matrisinin kompleks eşleniği α ise regülarizasyon parametresidir.

Adım 2) Bu adımda denklem 2.9 kullanılarak cismin içerisindeki toplam alan bir önceki adımda elde edilen cisim fonksiyonu kullanılarak hesaplanır.

$$E_{(1)}(\mathbf{r}) = E^i(\mathbf{r}) + k_0^2 \int_\Omega \chi_{(0)}(\mathbf{r}')E_{(1)}(\mathbf{r}')G(\mathbf{r},\mathbf{r}')d\mathbf{r}', \quad \mathbf{r} \in \Gamma \tag{2.9}$$

Denklem 2.9'un çözümünde ayrıklaştırma yöntemi kullanılır. Cismin bulunduğu bölge yeterince küçük hücrelere bölündüğünde 2.9 denklemi, bir hücre ile eşit alana sahip a yarıçaplı daire kullanılarak ayrıştırılabilir [29].

$$E_m^i = E_m + \frac{jk_0^2}{4}\sum_{n=1}^{N}(\varepsilon_n - 1)E_n\frac{j}{2}[\pi k_0 a H_1^{(2)}(k_0 a) - 2j] \quad \text{m=n durumunda} \tag{2.10}$$

2.10 denkleminde $H_1^{(2)}$, 1. dereceden 2. çeşit Hankel fonksiyonunu temsil eder.

$$E_m^i = \sum_{n=1}^{N}(\varepsilon_n - 1)E_n\frac{j\pi a k_0}{2}J_1(k_0 a)H_0^{(2)}(k_0\rho_{mn}) \quad m \neq n \text{ durumunda} \tag{2.11}$$

2.11 denkleminde $H_0^{(2)}$, 0. dereceden 2. çeşit Hankel fonksiyonunu belirtir. Hücreler arası mesafe ise

$$\rho_{mn} = \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2} \tag{2.12}$$

şeklinde hesaplanır. 2.10 ve 2.11 denklemlerinde n değişkeni, m ise 1'den toplam hücre sayısına (N) kadarki hücre numarasını temsil eder.

Daha sonra 2.10 ve 2.11'i genel formda denklem 2.13 şeklinde yazabiliriz.

$$\sum_{1}^{N} C_{mn}E_n = E_m^i \tag{2.13}$$

2.13 denkleminde C_{mn} ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$C_{mn} = 1 + (\varepsilon_m - 1)\frac{j}{2}[\pi k_0 a_m H_1^{(2)}(k_0 a_m) - 2j] \quad \text{m=n durumunda} \tag{2.14}$$

$$C_{mn} = \frac{j\pi a k_0}{2}(\varepsilon_n - 1)[J_1(k_0 a_n)H_0^{(2)}(k_0\rho_{mn})] \quad m \neq n \text{ durumunda} \tag{2.15}$$

2.13 denklemi matris formunda aşağıdaki gibi yazılarak çözüm sağlanır.

$$[E_{(1)}] = [C_{mn}]^{-1}[E^i] \tag{2.16}$$

Adım 3) 2. adımdan elde edilen $E_{(1)}(\mathbf{r}^{'})$ toplam alan kullanılarak 2.17 denkleminden yeni cisim fonksiyonu ($\chi_{(1)}(\mathbf{r}^{'})$) elde edilir.

$$E^s(\mathbf{r}) = k_0^2 \int_\Omega \chi_{(1)}(\mathbf{r}^{'}) E_{(1)}(\mathbf{r}^{'}) G(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'}) d\mathbf{r}^{'}, \quad \mathbf{r} \in \Gamma \tag{2.17}$$

Bu şekilde iterasyon aşağıdaki kriter sağlanana kadar devam ettirilir.

$$\frac{||\chi_{(k)} - \chi_{(k-1)}||_2^2}{||\chi_{(k-1)}||_2^2} \leq \varepsilon \tag{2.18}$$

Burada ε küçük bir reel sayıdır, k ise iterasyon adımının numarasıdır.

3. SEYREKLİK YAKLAŞIMI ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Ters saçılma problemlerinde seçilen arama bölgesine göre bulunmak istenilen cismin oransal olarak düşük olması seyreklik yaklaşımına olanak sağlamaktadır. Bulunmak istenilen işaretin seyrek olması elemanlarının çoğunluğunun 0'a eşit olmasıdır. Lineer ters problemlerin çözümünde seyreklik yaklaşımı çözüm yöntemleri kullanılabilir. Seyreklik yaklaşımında genel olarak l_1 ve l_0 norm minimizasyonu kullanılır. Bu bölümde seyreklik modeli, lineer denklemler ve sıkıştırılmış algılamaya ait genel bilgiler verildikten sonra seyreklik yaklaşımı çözüm yöntemlerine değinilecektir. Bunlar NESTA, seyrek yaklaşıklıkta gradyen izdüşümü (Gradient Projection for Sparse Recovery - GPSR), iki adımlı kısaltarak eşikleme (Two Way İterative Shrinkage Thresholding - TWIST), hızlandırılmış iteratif kısaltarak eşikleme (Fast İterative Shrinkage Thresholding - FISTA) ve l_2 normu ile regülarize edilmiş uyarlamalı sert eşikleme (l_2 Regularized İterative Method for Adaptive Thresholding - L2IMAT) yöntemleridir.

3.1 Temel Bilgiler

Bu kısımda seyrek işaretin özelliğinden, lineer denklemlerin incelenmesinden ve sıkıştırılmış algılama teoreminden bahsedilecektir.

3.1.1 Seyreklik modeli

Seyrek işaret tanımlamasında sıkça l_p norm tanımı kullanılmaktadır. l_p norm gösterimi aşağıdaki şekildedir.

$$||x||_p = (\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \quad p \in [1, \infty) \tag{3.1}$$

Normlar işaret boyunun veya hatanın boyutunun ölçülmesinde kullanılır. Bir x işareti K adet 0 olmayan elemana sahipse, matematikte K-seyrek olarak adlandırılır ve l_0 normuyla aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$||x||_0 \leq K \tag{3.2}$$

Bazen işaretlerin kendileri seyrek olmayabilir fakat bazı temel dönüşümler ile seyrek hale getirilebilir. Bu temel dönüşümler dalgacık dönüşümü veya Fourier dönüşümü olabilir. Bu dönüşüme ait temel matris ψ ile gösterilebilir. Bu durumda x aşağıdaki biçimde açıklanabilir.

$$x = \psi\alpha \tag{3.3}$$

Bu durumda da $||\alpha||_0 \leq K$ şeklinde gösterilebilir.

Seyreklik yaklaşımı problemi l_0 teriminden dolayı konveks olmayan optimizasyon problemidir. Bu durumda çözülmeye çalışılan problem aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

$$x = argmin_x||x||_0 \quad Ax = b \quad \text{koşuluyla} \tag{3.4}$$

3.4 denklemindeki problem gürültü olması durumunda aşağıdaki biçimde gösterilebilir.

$$x = argmin_x||x||_0 \quad ||Ax - b||_2 \leq \varepsilon \quad \text{koşuluyla} \tag{3.5}$$

3.5 denklemindeki problem alternatif olarak iki şekilde gösterilebilir. Bazı durumlarda gürültüye ait üst limit (ε) belirlidir, diğer durumlarda ise seyreklik modelinde anlatılan işarete ait 0 olmayan eleman sayısının üst limiti (K) belirlidir. Bu durumda ilgili problem aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$$x = argmin_x||Ax - b||_2 \leq \varepsilon \quad ||x||_0 \leq K \quad \text{koşuluyla} \tag{3.6}$$

Alternatifi de, koşulsuz biçimde aşağıdaki gibidir.

$$x = argmin_x||x||_0 + \lambda||Ax - b||_2 \tag{3.7}$$

Bu problemlerde $||x||_0$ konveks değildir ve çözülmesi zordur. Bu yüzden $||x||_0$ yerine onun konveks yaklaşımı olan $||x||_1$ kullanılabilir. Bu durumda optimizasyon problemi aşağıdaki hale gelir.

$$x = argmin_x ||x||_1 \quad Ax = b \quad \text{koşuluyla} \tag{3.8}$$

Gürültü olması durumunda,

$$x = argmin_x ||x||_1 \quad ||Ax - b||_2 \leq \varepsilon \quad \text{koşuluyla} \tag{3.9}$$

halindedir.

Seyrek yaklaşıklık problemlerinin çözümünde bir çok yöntem kullanılmaktadır. Bunlar l_0 ve l_1 normu minimizasyonu kullanılmasına göre değişmektedir. l_0 çözümünü kullanan yöntemlere örnek olarak Greedy algoritmaları verilebilir. Bu algoritmalara örnek olarak Matching Pursuit (MP), Orthogonal Matching Pursuit, Gradient Pursuit'dir. Iterative Hard Thresholding (IHT) ve l_2 Regularized Iterative Method for Adaptive Thresholding (L2IMAT) yöntemleride l_0 normu minimizasyonunu kullanmaktadır. l_1 çözümünü kullanan yöntemlere örnek olarak ise Lineer Programlama, NESTA, FISTA, GPSR, TwIST, FPC ve SpaRSA yöntemleri verilebilir. Bu çalışmada L2IMAT, NESTA, FISTA, GPSR ve TWIST yöntemleri incelenecektir.

3.1.2 Lineer denklemlerin incelenmesi

Bu bölümde incelenmek istenilen denklem sistemi aşağıdaki gibidir.

$$Ax = b \tag{3.10}$$

Burada b ölçüm vektörü, A sistem modelleme matrisi, x ise bulunmak istenilen işaretdir. Bu denklem sisteminde m adet denklem ve n adet bilinmeyen mevcuttur. Yani $b \in R^m$, $A \in R^{mxn}$ ve $x \in R^n$ şeklindedir.

İlk olarak n=m durumu göze alındığında, A'yı tekil olmayan matris olarak kabul edelim (A tekil bir matris ise n>m durumundaki inceleme geçerlidir) ve tersi (A^{-1}) mevcuttur. Bu yüzden lineer denklemi sağlayan tek x değeri mevcuttur ve her iki tarafı A^{-1} ile çarparak bulunabilir.

$$x = A^{-1}b \tag{3.11}$$

$n < m$ durumu, denklem sayısı bilinmeyen sayısından fazla olduğu durumdur. Eğer ölçümler gürültü ile bozulmamış ise A matrisinin tam sütun rank matris olduğu varsayımıyla aşağıdaki çözüm elde edilebilir.

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b \tag{3.12}$$

$n < m$ için gürültü olan durum göz önünde bulundurulduğunda $Ax = b$ denklemi tam anlamıyla sağlanmayacaktır. Bu durumda b, A ya ait sütun uzayında olmayabilir bu yüzden Ax=b'ye ait çözüm bulunmamaktadır. Bu durumla başa çıkmak için en küçük kareler yöntemi kullanılır. Buna ait optimizasyon problemi aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

$$x = argmin_x ||Ax - b||_2^2 \tag{3.13}$$

Burada maliyet fonksiyonu aşağıdaki şekilde genişletilebilir.

$$||Ax - b||_2^2 = x^T A^T Ax - 2x^T A^T b + b^T b \tag{3.14}$$

Bu fonksiyonun x'e göre türevini 0 yapan değer aynı zamanda fonksiyonu küçülten bir değerdir.

$$\frac{\partial}{\partial x} ||Ax - b||_2^2 = 2A^T Ax - 2A^T b = 0 \tag{3.15}$$

Buradan en küçük kareler çözümü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b \tag{3.16}$$

$(A^T A)^{-1}$ nin tekil olmayan bir matris olduğu varsayılmaktadır.

$n > m$ durumunda denklem sayısı bilinmeyen sayısından azdır. Bu denklem sistemine eksik belirtilmiş lineer denklem sistemi denilir ve çözüm tek değildir. Bu tür problemlere kötü kurulmuş ters problem denilmektedir. Bir çok çözüm içerisinden bir

tanesinin seçilmesi regülarizasyon yaklaşımı ile gerçekleştirilebilir. Bu çözüm, çözüm adaylarının normunun minimize edilmesi ile elde edilir. l_2 normu regülarizasyon problemi aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$x = argmin_x ||x||_2^2 \quad Ax = b \quad \text{koşuluyla} \tag{3.17}$$

3.17 optimizasyon problemi Lagrange çarpanı yöntemi ile çözülebilir. Lagrange fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanırsa

$$L(x) = ||x||_2^2 + \lambda^T (Ax - b) = x^T x + x^T A^T \lambda - b^T \lambda \tag{3.18}$$

Burada L(x) fonksiyonu x in karesel fonksiyonudur. Bu fonksiyonun x e göre türevini 0 yapan değer, karesel fonksiyonu küçülten değerdir. Bu işlem sonucunda da x aşağıdaki gibi bulunabilir ve minimum norm çözümü olarak adlandırılır.

$$x = A^T (AA^T)^{-1} b \tag{3.19}$$

Seyrek işaretlerin bulunmasında l_0 ve l_1 normu regülarizasyonunu kullanılmak l_2'ye göre daha uygundur.

$n > m$ için gürültü olup olmamasına bakılmaksızın, A matrisi tam sütun rankı özelliğine sahip değil ise l_2 norm ile regülarize edilerek A matrisinin tam sütun rankı özelliğine sahip olması sağlanabilir.

$$x = min_x ||Ax - b||_2^2 + \lambda ||x||_2^2 \tag{3.20}$$

3.20 denklemi aşağıdaki gibi en küçük kareler yöntemine dönüştürülebilir.

$$x = min_x ||\tilde{A}x - \tilde{b}||_2^2 \tag{3.21}$$

Burada $\tilde{A}$ ve $\tilde{b}$ aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A \\ \sqrt{\lambda} I_n \end{bmatrix}, \tilde{b} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

Son olarak regülarize edilmiş en küçük kareler çözümü aşağıdaki gibidir.

$$x = (\lambda I + A^T A)^{-1} A^T b \tag{3.23}$$

Burada λ, karesel hata ve l_2 norm çözümü arasındaki dengeyi sağlayan regülarizasyon parametresidir.

3.1.3 Sıkıştırılmış algılama

Sıkıştırılmış algılama (Compressive Sensing) teorisi yeni bir işaret işleme tekniğidir ve daha düşük ölçüm ile işaretin geri elde edilmesi üzerine kurulmuştur. Bulunmak istenilenilen işaret $x \in C^N$, ölçüm vektörü $b \in C^M$ ve $M << N$ için tanımlanabilir. Bu iki vektör için algılama matrisi $A \in C^{MxN}$ şeklindedir ve aşağıdaki denklemle gösterilir.

$$Ax = b \tag{3.24}$$

Sıkıştırılmış algılama M adet ölçümden N elemente ait vektörün bulunması düşüncesini içerir. Sıkıştırılmış algılama ile daha düşük sayıda ölçümden işaretin geri elde edilmesi için 2 adet önkoşul bulunmaktadır, bunlar geri elde edilecek işaretin seyrek özelliğe sahip olması ve algılama matrisinin tutarsız olmasıdır.

Seyreklik: Bu kısım daha önce 3.1.1 bölümünde ele alınmıştır. İşaret seyrek ise sadece sıfır olmayan elemanları ele alınabilir. Sıkıştırılmış algılamada K-seyrek bir cismin bulunabilmesi için en az 4*K kadar birbirleri ile ilintili olmayan ölçüm gerekmektedir [30].

Algılama matrisinin tutarsızlığı: İkinci koşul olarak sıkıştırılmış algılama, algılama matrisindeki sütunların birbiri ile tutarsız olmasını gerektirir. Tutarsızlık matrisin sütunları arasındaki korelasyonla ilintilidir. Algılama matrisinin ortak korelasyonun küçük olması tutarsız olduğu anlamına gelmektedir. Rastgele matrisler çok yüksek tutarsızlığa sahip matrislerdir. Burada tutarsızlık sayesinde seyrek işaretin yapısı korunabilmektedir ve geri elde etmede bilgi kaybı yaşanmamaktadır ve yüksek başarım sağlanabilmektedir. Bu durum Kısıtlanmış izometri özelliği (Restricted Isometry Property - RIP) ile açıklanabilir. δ_K izometri sabiti ve çok küçük bir sayı olmak şartıyla, özellik aşağıdaki gibidir

$$(1 - \delta_K)||x||_2^2 \leq ||Ax||_2^2 \leq (1 + \delta_K)||x||_2^2 \tag{3.25}$$

3.25 eşitsizliğinden anlaşılacağı üzere kısıtlanmış izometri özelliği aşağıdaki durumu garanti altına almış olur ve seyrek işaret özelliğini kaybetmemiş olur.

$$||x||_2^2 \approx ||Ax||_2^2 \tag{3.26}$$

3.2 l_1 Normunu Kullanan Seyreklik Yaklaşımı Çözüm Yöntemleri

Bu bölümde l_1 norm kullanılarak ters problemin çözümünde kullanılan seyreklik yaklaşımı yöntemleri açıklanacaktır. Bunlar NESTA, GPSR, TWIST ve FISTA'dır.

3.2.1 NESTA

Nesterov algoritması veya kısaca NESTA aşağıdaki konveks optimizasyon probleminin çözümünde kullanılan bir yöntemdir.

$$\min f(x) = min\ \lambda ||x||_1 + \frac{1}{2}||b - Ax||_2^2 \tag{3.27}$$

Genel olarak bir konveks optimizasyon problemi aşağıdaki formdadır.

$$\min f(x) \tag{3.28}$$

Burada f konveks fonksiyonu belirtir. f türevi alınabilir bir fonsiyondur ve gradyeni (∇f) Lipschitz şartını sağlar. Bu durumda her x,v ve $L \geq 0$ için aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$||\nabla f(x) - \nabla f(v)||_2 \leq L||x - v||_2 \tag{3.29}$$

Lipschitz şartı altında herhangi bir x,v için 3.30 eşitsizliği her zaman sağlanır. 3.30 eşitsizliğinde sağ taraftaki kısım f(x)'in v noktası civarındaki karesel yaklaşım gösterimidir.

$$f(x) \leq f(v) + \nabla f(v)^T(x - v) + \frac{L}{2}||x - v||_2^2 \tag{3.30}$$

Büyütme-küçültme (Majorization-Minimization MM) algoritmasına göre karesel yaklaşımı küçülten değer aynı zamanda f(x)'i de küçülten değerdir. NESTA problemin

çözümünde y_k ve z_k adında iki adet vektörel, α_k ve τ_k adında iki adet skaler dizin kullanmaktadır. y_k 3.30 eşitsizliğinin sağ tarafındaki karesel yaklaşımı küçülten değeri temsil eder. y_k, aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$y_k = argmin \nabla f(x_k)^T x + \frac{L}{2}||x - x_k||_2^2 \tag{3.31}$$

Aynı zamanda 3.31 denklemi aşağıdaki formda da gösterilebilir.

$$y_k = argmin||x - (x_k - L^{-1}\nabla f(x_k))||_2^2 \tag{3.32}$$

3.31 denkleminde x_k yerine y_{k-1} kullanılması standart 1. derece konveks şartı tekniğidir. NESTA aşağıdaki z_k dizini ile bu teknikten farklılık göstermektedir.

$$z_k = argmin \frac{L}{\sigma} p(x) + \sum \alpha_i \nabla f(x_k)^T x \tag{3.33}$$

$$p(x) \geq \frac{\sigma}{2}||x - x_p||_2^2 \tag{3.34}$$

Burada p(x) merkezi fonksiyon, $\sigma \geq 0$ yakınsama parametresi, x_p ise merkez olarak düşünülen değerdir. z_k, her adımda hesaplanan gradyenlerin ağırlıklı toplamından hesaplanmaktadır. Bu sayede bir önceki adımlar hafızada tutulur ve z_k'nın p(x) sayesinde merkeze (x_p) yakın yerde kalması sağlanır.

İyi bir merkezi fonksiyonun konveks problemin çözümünde fonksiyonu minimize edecek şekilde etki yaratması beklenir. Merkezi fonksiyon aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

$$p(x) = \frac{1}{2}||x - x_0||_2^2 \tag{3.35}$$

Burada x_0 çözüm için önerilen başlangıç tahminidir.

3.35 ifadesi 3.33'de yerine yerleştirilirse, z_k dizinine ait denklem aşağıdaki formda yazılabilir

Merkezi fonksiyonun tanımından sonra z_k dizinine ait denklem aşağıdaki formda yazılabilir

$$z_k = argmin||x - (x_0 - L^{-1}\sum \alpha_i \nabla f(x_k))||_2^2 \tag{3.36}$$

y_k ve z_k dizinleri hesaplandıktan sonra x_k, y_k ve z_k nın ağırlıklı ortalaması şeklinde aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$x_k = \tau_k z_k + (1 - \tau_k) y_k \tag{3.37}$$

Teorik analizler sonucunda

$$\alpha_k = \frac{1}{2}(k+1) \tag{3.38}$$

$$\tau_k = \frac{2}{k+3} \tag{3.39}$$

seçilmesi durumunda algoritma hızlı yakınsama göstermektedir [20].

Nesta algoritması aşağıdaki şekilde adımlar halinde tanımlanabilir:

x_0 başlangıç değerinin belirlenmesinden sonra iterasyon içerisinde aşağıdaki adımlar belirlenen kriter (ε) sağlanana kadar devam ettirilir.

Adım 1) $\nabla f(x_k)$ yı hesapla

Adım 2) 3.32 denkleminden y_k yı hesapla

Adım 3) 3.36 denkleminden z_k yı hesapla

Adım 4) $x_k = \tau_k z_k + (1 - \tau_k) y_k$ şeklinde x_k yı güncelle

NESTA algoritmasına ait sözde program Şekil 3.1'deki gibidir.

3.2.2 İki adımlı iteratif kısaltarak eşikleme-TWIST

İki adımlı iteratif kısaltarak eşikleme (Two Way İterative Shrinkage Thresholding - TWIST) iteratif kısaltarak eşikleme (İterative Shrinkage Thresholding Algorithm - ISTA) yönteminin özel bir halidir. İki yöntemde 3.40 denklemindeki konveks optimizasyon probleminin çözümünde kullanılabilir.

$$\min \lambda ||x||_1 + \frac{1}{2}||b - Ax||_2^2 \tag{3.40}$$

Algoritma - NESTA
Gerekenler:$(b),(A)$
Başlangıç:
$x_0 <= A^* b$
$k = 1$
yinele
$y_k <= x_k - L^{-1}\nabla f(x_k)$
$z_k <= x_0 - L^{-1}\sum \alpha_i \nabla f(x_k)^T$
$x_{k+1} <= \tau_k z_k + (1-\tau_k) y_k$
$\tau_k <= \frac{2}{k+3}$
$||f(x_{k+1}) - f(x_k)|| \leq \varepsilon$
sonuç
$x = x_{k+1}$

Şekil 3.1 : NESTA algoritması.

İteratif kısaltarak eşikleme yöntemi, kötü kurulmuş problemin çözümünde Landweber iterasyonunu kullanır. Landweber iterasyonu eşlenik gradyen yönteminin aşağıdaki problemin çözümüne ilişkin özel halidir.

$$\min \frac{1}{2}||b - Ax||_2^2 \tag{3.41}$$

Landweber iterasyonuna ait güncellemede kullanılan algoritma aşağıdaki gibidir.

$$x_{k+1} = x_k + \beta A^T (b - Ax) \tag{3.42}$$

Burada β, gevşetme parametresi olarak geçmektedir ve aşağıdaki eşitsizliğe göre seçilmelidir.

$$0 < \beta < \frac{2}{\sigma_1^2} \tag{3.43}$$

Burada σ_1, A matrisinin en büyük tekil değeridir.

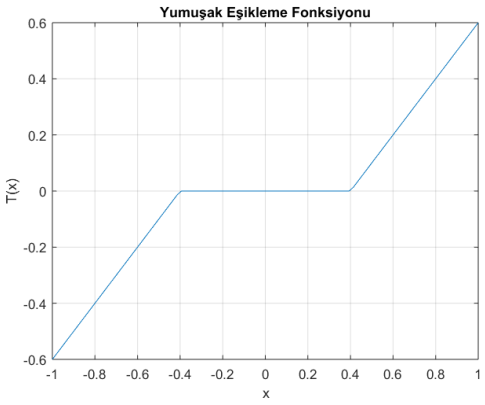
İteratif kısaltarak eşikleme yöntemi Landweber iterasyonunun l_1 normu ile regülarize edilmiş halidir. Bu yüzden Landweber kısaltma (Landweber truncated) olarak da geçmektedir. İteratif kısaltarak eşiklemede güncelleme algoritması denklem 3.44'deki gibidir. Burada $\beta = 1$ durumunda orijinal iteratif kısaltarak eşikleme yöntemi elde edilir.

$$x_{k+1} = (1-\beta)x_k + \beta T(x_k + A^T(b - Ax)) \tag{3.44}$$

Kısaltarak eşikleme için iki farklı fonksiyon kullanılabilir, bunlar yumuşak eşikleme ve sert eşikleme fonksiyonudur. Bu tez kapsamında TWIST yöntemi için yumuşak eşikleme fonksiyonu kullanılarak l_1 minimizasyonu yapılmıştır. Yumuşak eşiklemede kullanılan fonksiyon (T) aşağıdaki gibidir. Burada γ eşik değeridir.

$$T(x_k) = x_k \frac{max[|x_k| - \gamma, 0]}{max[|x_k| - \gamma, 0] + \gamma} \tag{3.45}$$

Yumuşak eşikleme fonksiyonuna ait grafik aşağıdaki gibidir.



Şekil 3.2 : Yumuşak eşikleme fonksiyonu.

İteratif kısaltarak eşikleme yöntemini iki adımlı hale getirmek için öncelikle lineer sistemler için uygulanan yöntemi inceleyebiliriz. Bunun için $Ax = b$ şeklinde bir lineer sistemi ele alacak olursak, burada A pozitif tanımlı matris olsun. Bu matris ayrıştırılarak $A = C - R$ haline getirilebilir. C pozitif tanımlı ve tersi alınabilen matristir. Buradan yola çıkarak iki adımlı yöntem aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

$$x_1 = x_0 + \beta C^{-1}(b - Ax_0) \tag{3.46}$$

$$x_{k+1} = (1-\alpha)x_{k-1} + \alpha x_k + \beta C^{-1}(b - Ax_k) \tag{3.47}$$

3.47 denkleminden görüleceği üzere x_{k+1}, x_{k-1} ve x_k ye bağlıdır. Bu sebeple iki adımlı denilmektedir. $C = I + \lambda D$, $R = I - K^T K$, $A = C - R$ ve $b = K^T y$ alınırsa denklem 3.47'deki iki adımlı iterasyon aşağıdaki gibi olur [26]. Burada D, x_k'ye bağlı diagonal matris, I ise birim matristir.

$$x_{k+1} = (1-\alpha)x_{k-1} + (\alpha-\beta)x_k + \beta C^{-1}(x_k + K^T(y - Kx_k)) \tag{3.48}$$

yukarıdaki denklemde $\alpha = 1$ ve C^{-1} yerine T operatörü alındığında 3.44 ve 3.48 denklemleri arasındaki benzerliği görebiliriz. Bu benzerlikten iki adımlı iteratif kısaltarak eşikleme yöntemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$x_1 = T(x_0 + \beta A^T(b - Ax_0)) \tag{3.49}$$

$$x_{k+1} = (1-\alpha)x_{k-1} + (\alpha-\beta)x_k + \beta T(x_k + A^T(b - Ax_k)) \tag{3.50}$$

Yakınsama açısından parametreler aşağıdaki şekilde seçilebilir [26].

$$\beta = \frac{2\alpha}{\sigma_1 + \sigma_m} \tag{3.51}$$

Burada σ_1 ve σ_m sırasıla A matrisinin maximum ve minimum tekil değerleridir.

$$\alpha = \rho^2 + 1 \tag{3.52}$$

yakınsama faktörüdür ve

$$p = \frac{(1 - (\sqrt{\sigma_1 + \sigma_m}))}{(1 + (\sqrt{\sigma_1 + \sigma_m}))} \tag{3.53}$$

şeklinde hesaplanır. İki adımlı kısaltarak eşikleme algoritması aşağıdaki şekilde adımlar halinde tanımlanabilir:

x_0 başlangıç değerinin belirlenmesinden sonra iterasyon içerisinde aşağıdaki adımlar belirlenen kriter (ε) sağlanana kadar devam ettirilir.

Adım 1) 3.42 denklemi ile x_{k+1} değeri bulunur

Adım 2) 3.44 denklemi ile x_{k+1} değerine 3.45 denklemindeki eşikleme fonksiyonu uygulanır.

Adım 3) 3.50 denkleminden x_{k+1} değeri tekrar güncellenir. Bu durumda x_{k+1} hem 2. adımda yumuşak eşiklemeden gelen değere ve ilk iterasyon için başlangıç değerine ($x_{k-1} = x_0$) göre güncellenmiş olur.

Adım 4) 3. adımda bulunan x_{k+1} değeri saklanır ve bir sonraki iterasyonda 3.50 denkleminde x_{k-1} yerine koyulur, 1. adım ve 2. adımda da x_k yerine koyulur.

TWIST algoritmasına ait sözde program Şekil 3.3'deki gibidir.

Algoritma - TWIST
Gerekenler:$(b),(A)$
Başlangıç:
$x_0 <= A^* b$
$k = 0$
yinele
$x_{k+1} <= (1-\beta)x_k + \beta T(x_k + A^T(b - Ax_k))$
$x_{k+2} <= (1-\alpha)x_k + (\alpha-\beta)x_{k+1} + \beta T(x_{k+1} + A^T(b - Ax_{k+1}))$
$x_k <= x_{k+2}$
$||f(x_{k+2}) - f(x_{k+1})|| \leq \varepsilon$
sonuç
$x = x_{k+2}$

Şekil 3.3 : TWIST algoritması.

3.2.3 Hızlandırılmış iteratif kısaltarak eşikleme-FISTA

Hızlandırılmış iteratif kısaltarak eşikleme aşağıdaki konveks optimizasyon probleminin çözümünde kullanılan bir yöntemdir.

$$\min \lambda ||x||_1 + \frac{1}{2}||b - Ax||_2^2 \tag{3.54}$$

Bu yöntem için güncellemede 3.55 denklemindeki standart iteratif kısaltarak eşikleme algoritması kullanılmaktadır.

$$x_{k+1} = T(x_k + \beta A^T(b - Ax)) \tag{3.55}$$

FISTA yönteminde, 3.55 denklemindeki eşikleme ile kısaltılmaya çalışılan değer aşağıdaki gibidir

$$y_k = x_k + \beta A^T(b - Ax) \tag{3.56}$$

bir sonraki iterasyonda da aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$y_{k+1} = x_k + (\frac{t_k - 1}{t_{k+1}})(x_k - x_{k-1}) \tag{3.57}$$

Burada t_k aşağıdaki gibi tanımlanmıştır [22].

$$t_{k+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_k^2}}{2} \tag{3.58}$$

Denklem 3.57'den görüleceği üzere FISTA yöntemi bir önceki iterasyonda hesaplanan değerleri de kullanarak iteratif kısaltarak eşikleme yöntemini hızlandırmaktadır. Hızlandırılmış kısaltarak eşikleme algoritması aşağıdaki şekilde adımlar halinde tanımlanabilir:

x_0 başlangıç değerinin belirlenmesinden sonra iterasyon içerisinde aşağıdaki adımlar belirlenen kriter (ε) sağlanana kadar devam ettirilir.

Adım 1) 3.55 denkleminde kısaltılmaya çalışılan y_k değeri bulunur.

Adım 2) Adım 1'de bulunan değere (3.41) denklemindeki eşikleme fonksiyonu uygulanarak x_{k+1} değeri bulunur.

Adım 3) Bulunan x_{k+1} değeri bir sonraki iterasyonda denklem 3.57 de kullanılmak üzere saklanır.

Adım 4) Denklem 3.57'den y_{k+1} değeri hesaplanır ve adım 2'ye dönülerek x tekrardan güncellenir.

FISTA algoritmasına ait sözde program Şekil 3.4'deki gibidir.

3.2.4 Seyrek yaklaşıklıkta gradyen izdüşümü yöntemi-GPSR

Seyrek yaklaşıklıkta gradyen izdüşümü yöntemi aşağıdaki konveks optimizasyon probleminin çözümünde kullanılan bir yöntemdir.

$$\min \lambda ||x||_1 + \frac{1}{2}||b - Ax||_2^2 \tag{3.59}$$

Burada l_1 terimi, tanımından yola çıkarak 3.60 denklemi biçiminde yazılabilir.

$$||x||_1 = 1_n^T u + 1_n^T v \tag{3.60}$$

Algoritma - FISTA
Gerekenler:$(b),(A)$
Başlangıç:
$x_0 <= A^* b$
$k = 1$
yinele
$w_k <= x_k + (\frac{t_k - 1}{t_{k+1}})(x_k - x_{k-1})$
$y_k <= w_k + \beta A^T (b - A w_k)$
$x_{k+1} <= T(y_k)$
$t_k <= \frac{1+\sqrt{1+4t_k^2}}{2}$
$x_{k-1} <= x_{k+1}$
$||f(x_{k+1}) - f(x_k)|| \leq \varepsilon$
sonuç
$x = x_{k+1}$

Şekil 3.4 : FISTA algoritması.

Burada x=u-v , $u = (x)_+$ ve $v = (-x)_+$ şeklinde tanımlıdır. $()_+$ operatörü vektörün sadece pozitif kısımlarını almaktadır. n, x vektörünün uzunluğunu, 1_n ise n uzunluğunda bütün elemanları 1 olan vektörü temsil eder.

3.59 ve 3.60 denklemlerinden yola çıkarak 3.59 denklemi aşağıdaki hale getirilebilir.

$$\min \frac{1}{2}||b - Ax||_2^2 + 1_n^T u + 1_n^T v \tag{3.61}$$

Aynı zamanda bu denklem de aşağıdaki gibi karesel optimizasyon problemi haline getirilebilir.

$$\min \frac{1}{2} z^T B z + c^T z \tag{3.62}$$

Burada

$$z = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, y = A^T b, c = \lambda 1_{2n}^T + \begin{bmatrix} -y \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} A^T A & -A^T A \\ -A^T A & A^T A \end{bmatrix}, Bz = \begin{bmatrix} A^T A(u-v) \\ -A^T A(u-v) \end{bmatrix} \tag{3.63}$$

Şeklinde gösterilmektedir ve fonksiyona ait gradyen hesabı ise aşağıdaki gibidir

$$\nabla F = c + Bz \tag{3.64}$$

Gradyen izdüşümü işlemi her iterasyonda x_k nın negatif gradyen $(-\nabla F)$ boyunca pozitif reel sayılar üzerine izdüşümüyle gerçekleştirilir ve F fonksiyonunda yeterli azalma sağlanana kadar geri izleme yöntemi kullanılır. Geri izleme yöntemi, GPSR yönteminin 4. adımında açıklanacaktır.

Gradyen izdüşümü fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$g = (\nabla F)_+ \tag{3.65}$$

Seyrek yaklaşıklıkta gradyen izdüşümü yöntemi aşağıdaki şekilde adımlar halinde tanımlanabilir:

Adım 1) başlangıç x_0'ın belirlenmesi, geri izleme adımında kullanılacak olan $\beta \in (0,1)$ ve $\mu \in (0,1/2)$ parametrelerinin seçimi

Adım 2) α'nın başlangıç değerinin bulunması

$$\alpha_0 = \frac{g^T g}{g^T B g} \tag{3.66}$$

Adım 3) $\nabla F(x_k)$'in hesaplanması

$$\nabla F = c + Bz \tag{3.67}$$

Adım 4) Geri izleme

Bu adımda aşağıdaki eşitsizlik kontrol edilir

$$F((x_k - \alpha_k \nabla F(x_k))_+) \leq F(x_k) - \mu \nabla F(x_k)^T (x_k - (x_k - \alpha_k \nabla F(x_k))_+) \tag{3.68}$$

3.68 eşitsizliğinin sağlanması durumunda x'in yeni değeri x_{k+1} aşağıdaki gibi bulunur.

$$x_{k+1} = (x_k - \alpha_k \nabla F(x_k))_+ \tag{3.69}$$

3.68 eşitsizliğinin sağlanmaması durumunda α değeri aşağıdaki şekilde güncellenir ve adım 3'e dönülür

$$\alpha_k = \alpha_0 * (\beta)^k \tag{3.70}$$

Bu durum F'in yeterli seviyede azalmasına kadar devam ettirilir.

GPSR algoritmasına ait sözde program Şekil 3.5'deki gibidir.

Algoritma - GPSR
Gerekenler: $(b), (A)$
Başlangıç:
$x_0 <= A^* b$
$\beta \in (0,1)$
$\mu \in (0, 1/2)$
$\alpha_0 <= \frac{g^T g}{g^T B g}$
$\alpha <= \alpha_0$
$k = 1$
yinele
$\nabla F <= c + Bz$
Kontrol et
$F((x_k - \alpha_k \nabla F(x_k))_+) \leq F(x_k) - \mu \nabla F(x_k)^T (x_k - (x_k - \alpha_k \nabla F(x_k))_+)$
Koşulu sağlıyor ise
$x_{k+1} <= (x_k - \alpha \nabla F(x_k))_+$
Koşul sağlanmıyor ise
$\alpha <= \alpha_0 * (\beta)^k$
$||F(x_k) - F(x_{k-1})|| \leq \varepsilon$
sonuç
$x = x_{k+1}$

Şekil 3.5 : GPSR algoritması.

3.3 l_0 Normunu Kullanan Seyreklik Yaklaşımı Çözüm Yöntemleri

Bu bölümde l_0 normunu kullanan seyreklik yaklaşımı çözüm yöntemi olarak sadece L2IMAT yöntemi açıklanacaktır.

3.3.1 Seyrek yaklaşıklıkta yinelemeli ve l_2 norm ile regülarize edilmiş uyarlamalı sert eşikleme yöntemi-L2IMAT

l_0 norm minimizasyonu ile çözülmeye çalışılan problem aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\min_x ||b - Ax||_2^2 + \lambda ||x||_0 \tag{3.71}$$

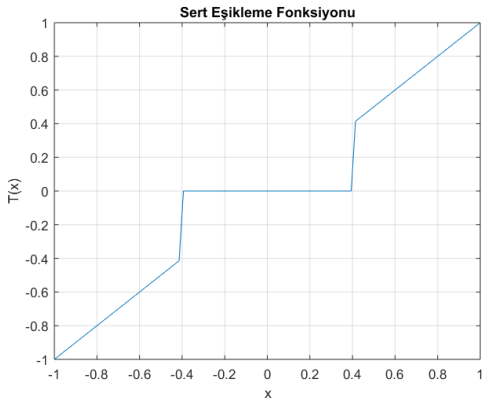
Bu denkleme ait çözümde aşağıdaki gibidir.

$$x_{k+1} = T(x_k + \lambda A^*(b - Ax_k)) \tag{3.72}$$

Burada A^*, A matrisinin konjuge transpoz matrisini göstermektedir. λ yöntemin yakınsamasını kontrol eden gevşetme parametresini, T ise sert eşikleme fonksiyonunu belirtir. l_0 norm minimizasyonu için sert eşikleme fonksiyonu kullanılmaktadır. Bu fonksiyon belirli bir değerin altındaki elemanları 0'a eşitlemektedir. Sert eşikleme fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

$$T(x_k) = \begin{cases} x_k, & \text{eğer } x_k > T \text{ ise.} \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases} \tag{3.73}$$

Sert eşikleme fonksiyonuna ait grafik aşağıdaki gibidir.



Şekil 3.6 : Sert eşikleme fonksiyonu.

l_2 norm ile regülarize edilmiş l_0 norm minimizasyonuna ait optimizasyon problemi aşağıdaki gibidir.

$$\min_x ||b - Ax||_2^2 + \lambda_1 ||x||_0 + \lambda_2 ||x||_2^2 \tag{3.74}$$

3.74 probleminin çözümü için geliştirilen L2IMAT yöntemi aşağıdaki gibidir [9].

$$x_{k+1} = \frac{1}{1+\lambda_2} T(x_k + \lambda_1 A * (b - Ax_k)) \tag{3.75}$$

Bu yöntemde eşikleme fonksiyonları için eşik değeri uyarlamalı olarak aşağıdaki şekilde güncellenmektedir.

$$T_k = T_0 e^{-\alpha k} \tag{3.76}$$

Burada k iterasyon adımını, T_0 ilk eşik değeri, α eşikleme adımını temsil eder. T_0 ve α parametrelerinin seçimi bu yöntemin performansını etkileyen en önemli unsurlardan biridir [9]. Klasik sert eşikleme fonksiyonu verilen ilk eşik değerine bağlıdır. Bu değerin doğru seçilmesi cisim hakkında önbilgi bulunmasını gerektirmektedir. Eşik değeri büyük seçildiğinde cismin bütün elemanları 0 olacaktır, küçük seçilmesi durumunda ise seyrek sonuç elde edilemeyecektir. Uyarlamalı eşikleme, cisim hakkında ön bilginin olmadığı durumlarda daha kullanışlıdır. Seyrek yaklaşıklıkta yinelemeli ve l_2 norm ile regülarize edilmiş uyarlamalı sert eşikleme yöntemi aşağıdaki şekilde adımlar halinde tanımlanabilir:

x_0 başlangıç değeri belirlendikten sonra aşağıdaki adımlar iterasyon içerisinde belirlenen kriter (ε) sağlayıncaya kadar tekrarlanır

Adım 1) $x_{k+1} = x_k + \lambda_1 A^*(b - Ax_k)$ ile x_k güncellenir

Adım 2) Güncellenen değer l_2 norm düzenlenmesinden gelen $\frac{1}{1+\lambda_2}$ ile çarpılır

Adım 3) Son olarak elde edilen değere 3.73'deki sert eşikleme fonksiyonu uygulanır.

Adım 4) Bir sonraki iterasyonda 3.73'deki eşik değeri (T) 3.76'deki denkleme göre güncellenir.

L2IMAT algoritmasına ait sözde program Şekil 3.7'deki gibidir.

3.4 l_1 ve l_0 Norm Yöntemlerinin BİY İçerisinde Kullanımı

Yukarıda anlatılan l_0 ve l_1 minimizasyon yöntemleri elektromanyetik ters saçılma problemlerinin çözüminde kullanılan Born İteratif Yöntemi (BİY) içerisine entegre edilebilir. BİY algoritmasında cisim fonksiyonunu Tikhonov regülarizasyonu ile bulmak yerine yukarıdaki yöntemler uygulanabilir. Bu yöntemler sonucunda güncellenen cisim fonksiyonu BİY içerisinde toplam alanın güncellenmesinde kullanılır ve BİY'e ait iterasyon bu şekilde devam ettirilir. Bu kısımda FISTA yönteminde yumuşak eşikleme yerine sert eşikleme fonksiyonu da kullanılmıştır. Sert eşikleme fonksiyonu kullanılan yöntem BİY-FISTA-SE, yumuşak eşikleme fonksiyonu kullanılan yöntem BİY-FISTA-YE olarak tasarlanmıştır. Sonuç olarak BİY-FISTA-YE, BİY-FISTA-SE, BİY-NESTA, BİY-GPSR, BİY-TWIST ve BİY-L2IMAT yöntemleri elde edilmiştir. Bu yöntemler için belirlenen kriter 2.18 denklemindeki ε değeridir.

Algoritma - L2IMAT
Gerekenler:$(b),(A)$
Başlangıç:
$x_0 <= A^* b$
$k = 1$
yinele
$x_{k+1} <= \frac{1}{1+\lambda_2} T(x_k + \lambda_1 A * (b - Ax_k)$
$T_k <= T_0 e^{-\alpha k}$
$||f(x_{k+1}) - f(x_k)|| \leq \varepsilon$
sonuç
$x = x_{k+1}$

Şekil 3.7 : L2IMAT algoritması.

3.4.1 BİY-NESTA yöntemi

Bu yöntem adımlar halinde aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

Cisim fonksiyonu ($\chi_{(0)}$)'nun başlangıç değeri belirlenir. Daha sonra iterasyon içerisinde aşağıdaki adımlar belirlenen kriter sağlanana kadar tekrarlanır.

Adım 1) Cisim fonksiyonun başlangıç değerine göre A matrisi güncellenir.

Adım 2) NESTA fonksiyonu çağrılır ve bu fonksiyonda "b" yerine ölçüm vektörü olan saçılan alan verisi girilir, A yerine de bir önceki adımda hesaplanan güncel A matrisi girilir ve sonrasında iterasyon sayısı belirtilir.

Adım 3) NESTA fonksiyonu 3.2.1 bölümünde anlatıldığı üzere verilen b, A ve iterasyon sayısı girdileriyle güncel x_k değerini bulur. x_k değeri cisim fonksiyonun yeni değerine atanır ve 1. adımda A matrisinin güncellenmesinde kullanılır

3.4.2 BİY-TWIST yöntemi

Bu yöntem adımlar halinde aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

Cisim fonksiyonu ($\chi_{(0)}$)'nun başlangıç değeri belirlenir. Daha sonra iterasyon içerisinde aşağıdaki adımlar belirlenen kriter sağlanana kadar tekrarlanır.

Adım 1) Cisim fonksiyonun başlangıç değerine göre A matrisi güncellenir.

Adım 2) TWIST fonksiyonu çağrılır ve bu fonksiyonda "b" yerine ölçüm vektörü olan saçılan alan verisi girilir, A yerine de bir önceki adımda hesaplanan güncel A matrisi

girilir, aynı zamanda bir önceki BİY iterasyonunda bulunan cisim fonksiyonu saklanır ve TWIST fonksiyonuna girdi olarak verilir, sonrasında da iterasyon sayısı belirtilir.

Adım 3) TWIST fonksiyonu 3.2.2 bölümünde anlatıldığı üzere verilen b, A, iterasyon sayısı ve bir önceki iterasyonda hesaplanan cisim fonksiyonunu x_{k-1} değerine atayarak güncel x_k değerini bulur. x_k değeri cisim fonksiyonun yeni değerine atanır ve 1. adımda A matrisinin güncellenmesinde kullanılır

3.4.3 BİY-FISTA-YE yöntemi

Bu yöntem adımlar halinde aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

Cisim fonksiyonu ($\chi_{(0)}$)'nun başlangıç değeri belirlenir. Daha sonra iterasyon içerisinde aşağıdaki adımlar belirlenen kriter sağlanana kadar tekrarlanır.

Adım 1) Cisim fonksiyonun başlangıç değerine göre A matrisi güncellenir.

Adım 2) FISTA fonksiyonu çağrılır ve bu fonksiyonda "b" yerine ölçüm vektörü olan saçılan alan verisi girilir, A yerine de bir önceki adımda hesaplanan güncel A matrisi girilir ve sonrasında iterasyon sayısı belirtilir.

Adım 3) FISTA fonksiyonu 3.2.3 bölümünde anlatıldığı üzere verilen b, A ve iterasyon sayısı girdileriyle yumuşak eşikleme fonksiyonunu kullanarak güncel x_k değerini bulur. x_k değeri cisim fonksiyonun yeni değerine atanır ve 1. adımda A matrisinin güncellenmesinde kullanılır

3.4.4 BİY-FISTA-SE yöntemi

Bu yöntem adımlar halinde aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

Cisim fonksiyonu ($\chi_{(0)}$)'nun başlangıç değeri belirlenir. Daha sonra iterasyon içerisinde aşağıdaki adımlar belirlenen kriter sağlanana kadar tekrarlanır.

Adım 1) Cisim fonksiyonun başlangıç değerine göre A matrisi güncellenir.

Adım 2) FISTA fonksiyonu çağrılır ve bu fonksiyonda "b" yerine ölçüm vektörü olan saçılan alan verisi girilir, A yerine de bir önceki adımda hesaplanan güncel A matrisi girilir ve sonrasında iterasyon sayısı belirtilir.

Adım 3) FISTA fonksiyonu 3.2.3 bölümünde anlatıldığı üzere verilen b, A ve iterasyon sayısı girdileriyle sert eşikleme fonksiyonunu kullanarak güncel x_k değerini bulur.

x_k değeri cisim fonksiyonun yeni değerine atanır ve 1. adımda A matrisinin güncellenmesinde kullanılır

3.4.5 BİY-GPSR yöntemi

Bu yöntem adımlar halinde aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

Cisim fonksiyonu ($\chi_{(0)}$)'nun başlangıç değeri belirlenir. Daha sonra iterasyon içerisinde aşağıdaki adımlar belirlenen kriter sağlanana kadar tekrarlanır.

Adım 1) Cisim fonksiyonun başlangıç değerine göre A matrisi güncellenir.

Adım 2) GPSR fonksiyonu çağrılır ve bu fonksiyonda "b" yerine ölçüm vektörü olan saçılan alan verisi girilir, A yerine de bir önceki adımda hesaplanan güncel A matrisi girilir ve sonrasında iterasyon sayısı belirtilir.

Adım 3) GPSR fonksiyonu 3.2.4 bölümünde anlatıldığı üzere verilen b, A ve iterasyon sayısı girdileriyle güncel x_k değerini bulur. x_k değeri cisim fonksiyonun yeni değerine atanır ve 1. adımda A matrisinin güncellenmesinde kullanılır

3.4.6 BİY-L2IMAT yöntemi

Bu yöntem adımlar halinde aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Cisim fonksiyonu ($\chi_{(0)}$)'nun başlangıç değeri belirlenir. Daha sonra iterasyon içerisinde aşağıdaki adımlar belirlenen kriter sağlanana kadar tekrarlanır.

Adım 1) Cisim fonksiyonun başlangıç değerine göre A matrisi güncellenir.

Adım 2) L2IMAT fonksiyonu çağrılır ve bu fonksiyonda "b" yerine ölçüm vektörü olan saçılan alan verisi girilir, A yerine de bir önceki adımda hesaplanan güncel A girilir ve sonrasında iterasyon sayısı belirtilir.

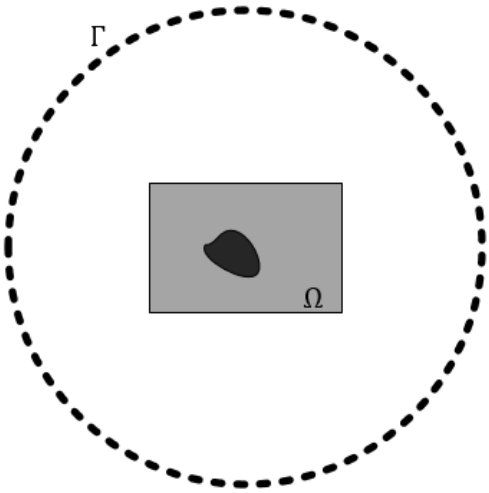
Adım 3) L2IMAT fonksiyonu 3.3.1 bölümünde anlatıldığı üzere verilen b, A ve iterasyon sayısı girdileriyle güncel x_k değerini bulur. x_k değeri cisim fonksiyonun yeni değerine atanır ve 1. adımda A matrisinin güncellenmesinde kullanılır.

4. SEYREKLİK YAKLAŞIMI SAYISAL SONUÇLARI

Bu bölümde, bir önceki bölümde anlatılan seyreklik yaklaşımı çözüm yöntemlerine ait sayısal sonuçlara yer verilecektir. BİY, BİY-NESTA, BİY-GPSR, BİY-FISTA-YE, BİY-FISTA-SE, BİY-TWIST ve BİY-L2IMAT yöntemleri kullandığı norm minimizasyonu türüne göre karşılaştırılacaktır. BİY-NESTA, BİY-GPSR, BİY-FISTA-YE ve BİY-TWIST l_1 normunu kullanmaktadır. BİY-FISTA-SE ve BİY-L2IMAT l_0 normunu, BİY ise l_2 normunu kullanmaktadır. Yöntemler karşılaştırılırken büyük cisimlerin görüntülenmesi, gürültüye karşı dayanıklılık, birbirine yakın konumlandırılmış cisimlerin görüntülenmesi, sıkıştırılmış algılama ile işaretin geri elde edinebilmesi ve optimum sonuca ne kadar hızlı yakınsadığı kriterleri göz önünde bulundurulacaktır. Yöntemlerin testinde kullanılan ölçüm verisi MATLAB'da düz problemin moment yöntemi ile sayısal olarak çözümünden elde edilmiştir.

Düz problem çözümü ile 4 GHz frekansında (dalgaboyu $\lambda = 7.5cm$) sentetik ölçüm datası oluşturulmuştur. Data oluşturulurken kaynakların (verici antenler) hepsi aynı anda ışıma yapmamaktadır. Kaynaklar sırasıyla araştırma bölgesine elektromanyetik dalga gönderirken tüm alıcı antenlerden ölçüm yapılmaktadır. Cisim için bağıl dielektrik sabiti (ε_r) aksi belirtilmediği takdirde 2 alınmıştır.

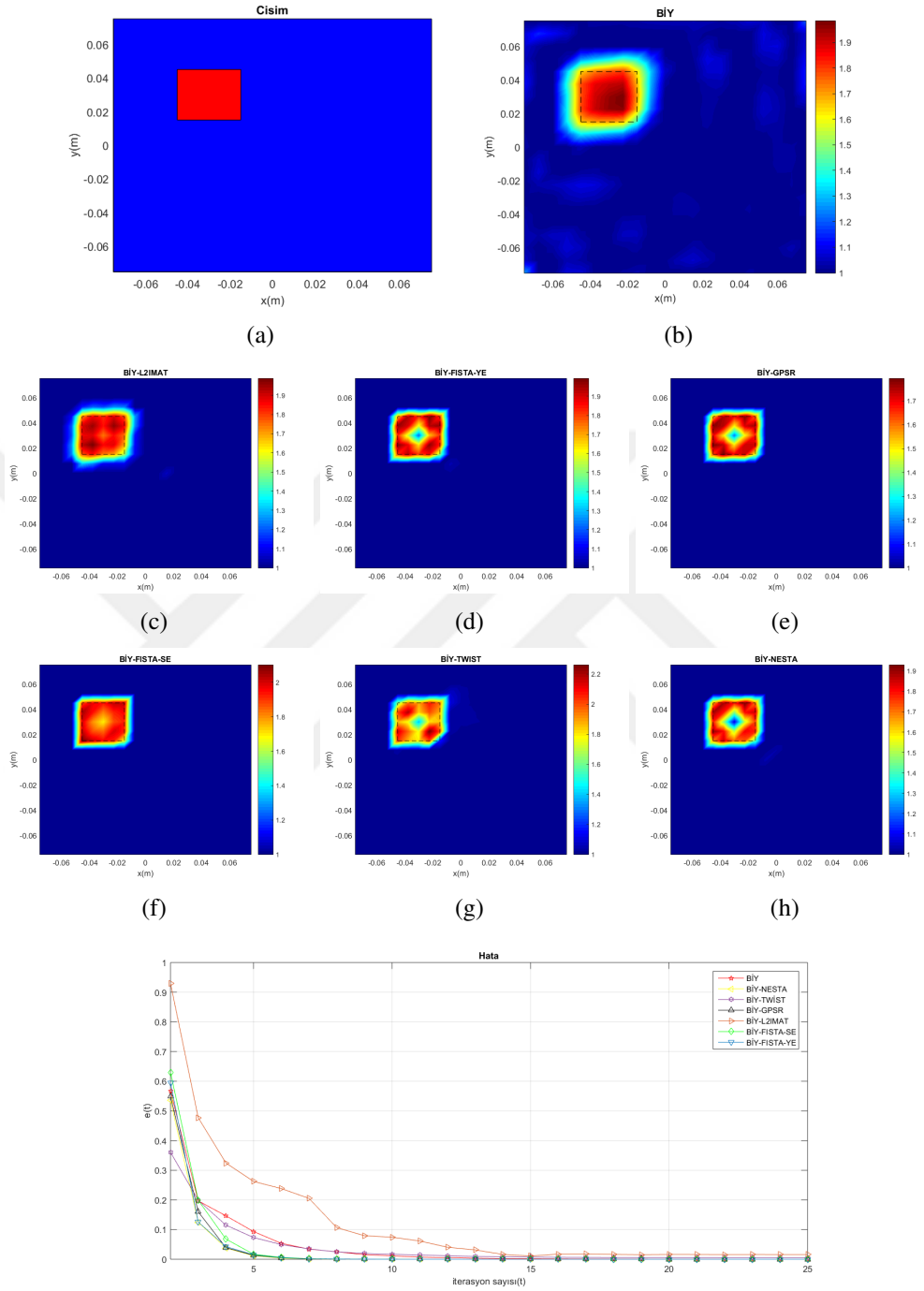
Ters saçılma problemi iki boyutlu olarak ele alınmıştır, buna ait ölçüm düzeneğinin geometrisi Şekil 4.1' de verilmiştir. Alıcı ve verici elektromanyetik antenler Γ bölgesine dairesel olarak yerleştirilmiştir. Ω bölgesi görüntülenmeye çalışılan cismin bulunduğu araştırma bölgesi olarak adlandırılan kısımdır. Kare seçilen araştırma bölgesinin bir kenarının uzunluğu 15 cm (2λ) olarak belirlenmiş ve 21 x 21 piksele ayrılmıştır. Ölçüm bölgesinin araştırma bölgesi merkezine uzaklığı 60 cm (8λ) olarak belirlenmiş ve tüm örnekler için aksi belirtilmediği takdirde toplamda 20 adet verici anten 20 adet alıcı anten kullanılmıştır. Yöntemlere ait hata fonksiyonu 2.18 denkleminden elde edilmektedir.



Şekil 4.1 : Ölçüm sistemi geometrisi.

4.1 Gürültü Analizi

Bu karşılaştırma için Şekil 4.2(a)'da gösterilen cismin gürültülü ortamda BİY, BİY-NESTA, BİY-GPSR, BİY-FISTA-YE, BİY-FISTA-SE, BİY-TWIST ve BİY-L2IMAT yöntemleri ile görüntülenmesine ilişkin sayısal sonuçlar verilecektir. Cismin bir kenar uzunluğu 0.4λ alınmıştır ve cismin araştırma bölgesine göre doluluk seviyesi %6 dır. Her bir anten için SNR değerleri %25 ve %50 oranında rastgele gürültü eklenmesi sonucu aralık olarak sırasıyla 6-12 ve 0-6 dB olarak alınmıştır. Şekil 4.2'da SNR değeri 6-12 dB için Şekil 4.3'da ise SNR değeri 0-6 dB için yöntemlere ait sonuçlar bulunmaktadır. Bu sonuçlardan da görüleceği üzere klasik BİY yöntemi diğer yöntemlere göre kötü sonuç vermektedir. Ölçüm vektörüne eklenen gürültü ile maliyet fonksiyonunun değeri artmaktadır. Cisim seyrek olduğu zaman l_1 veya l_0 minimizasyonu yapan yöntemler, bir sonraki iterasyonda diğerlerine göre maliyet fonsiyonunu daha da küçülmüş halde sunarlar. Bu sayede optimum sonuca daha çabuk ulaşırlar. Seyrek yapılı cisimleri tanımlamada l_1 ve l_0 normu l_2 normuna göre daha kullanışlıdır. Seyreklik durumunda maliyet fonksiyonunu minimum yapan değerin l_1 ve l_0 normunun küçük olması beklenir bu da l_1 ve l_0 norm minimizasyonunu Tikhonov regülarizasyonuna göre daha etkin kılmaktadır. Bu durum Şekil 4.3(i)'deki hata fonksiyonuna ait grafikten de görülebilir.



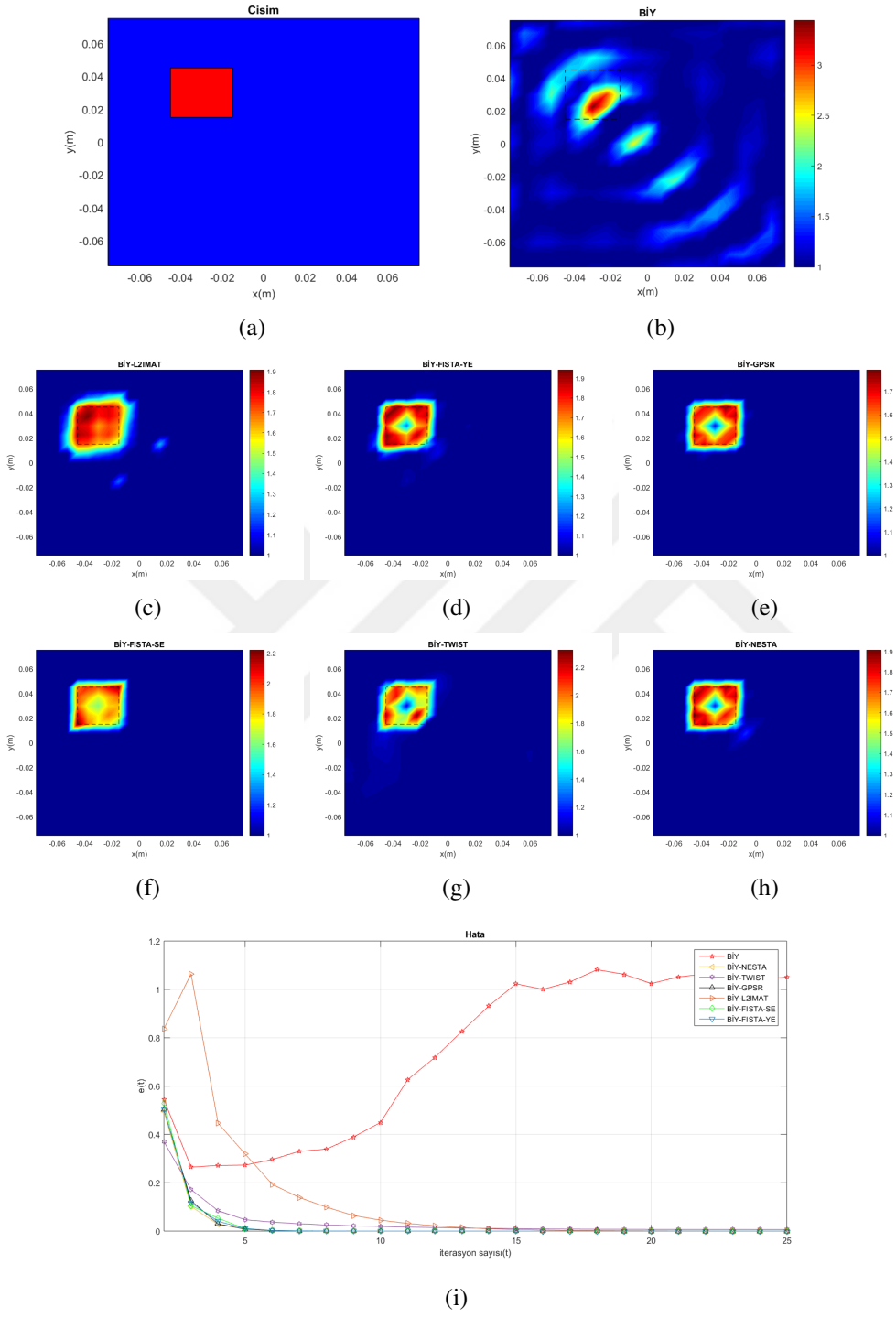
(a) (b)

(c) (d) (e)

(f) (g) (h)

(i)

Şekil 4.2 : %25 gürültü için yöntemlere ait sayısal sonuçlar: a) Cisim, b) BİY, c) BİY-L2IMAT, d) BİY-FISTA-YE, e) BİY-GPSR, f) BİY-FISTA-SE, g) BİY-TWIST, h) BİY-NESTA, i) Yöntemlere ait hata fonsiyonu.



(a) (b)

(c) (d) (e)

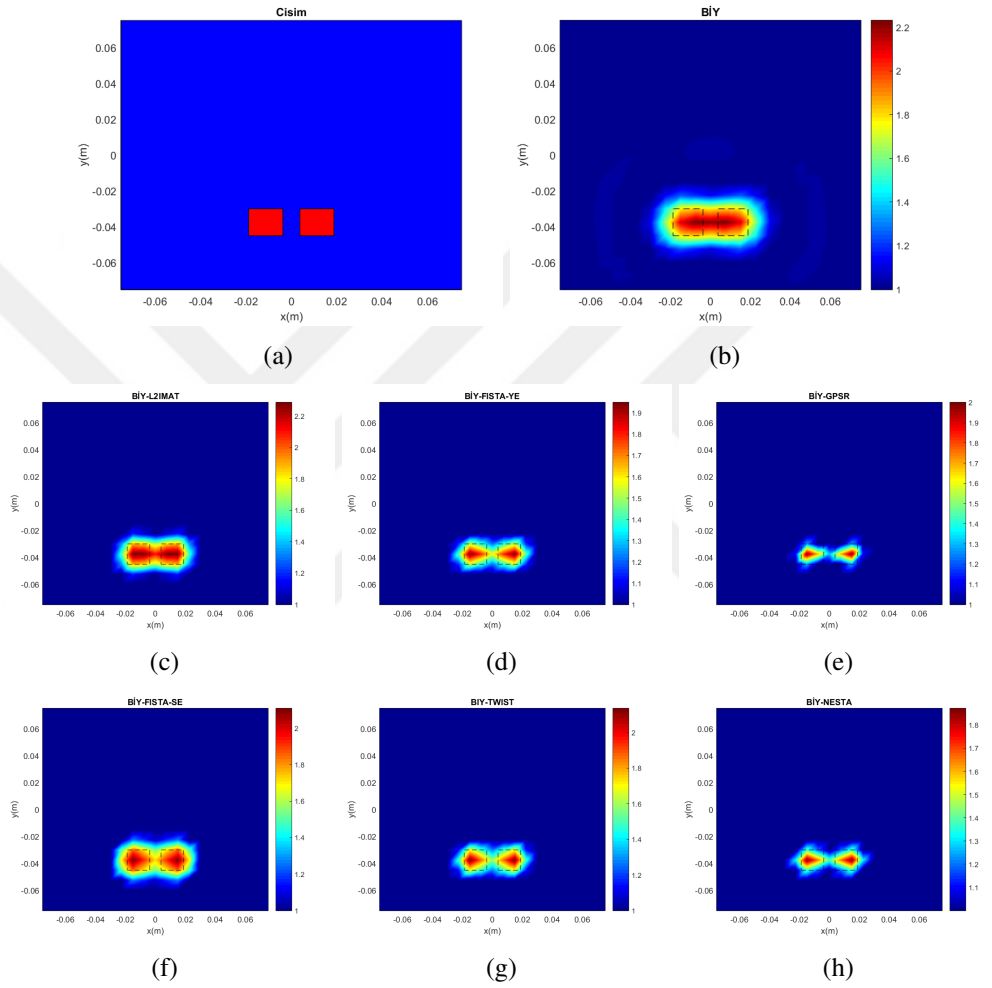
(f) (g) (h)

(i)

Şekil 4.3 : %50 gürültü için yöntemlere ait sayısal sonuçlar: a) Cisim, b) BİY, c) BİY-L2IMAT, d) BİY-FISTA-YE, e) BİY-GPSR, f) BİY-FISTA-SE, g) BİY-TWIST, h) BİY-NESTA, i) Yöntemlere ait hata fonsiyonu.

4.2 Birbirine Yakın Konumlandırılmış Cisimlerin Görüntülenmesi

Bu karşılaştırma için Şekil 4.4(a)'da gösterilen cismin BİY, BİY-NESTA, BİY-GPSR, BİY-FISTA-YE, BİY-FISTA-SE, BİY-TWIST ve BİY-L2IMAT yöntemleri ile çözümüne ilişkin sayısal sonuçlar verilecektir. Bir adet kare şeklindeki cisme ait bir kenar uzunluğu 0.2λ alınmıştır ve iki kare arası mesafe 0.1λ tutulmuştur. Cismin araştırma bölgesine göre doluluk seviyesi %4 dir ve gürültü eklenmemiştir.



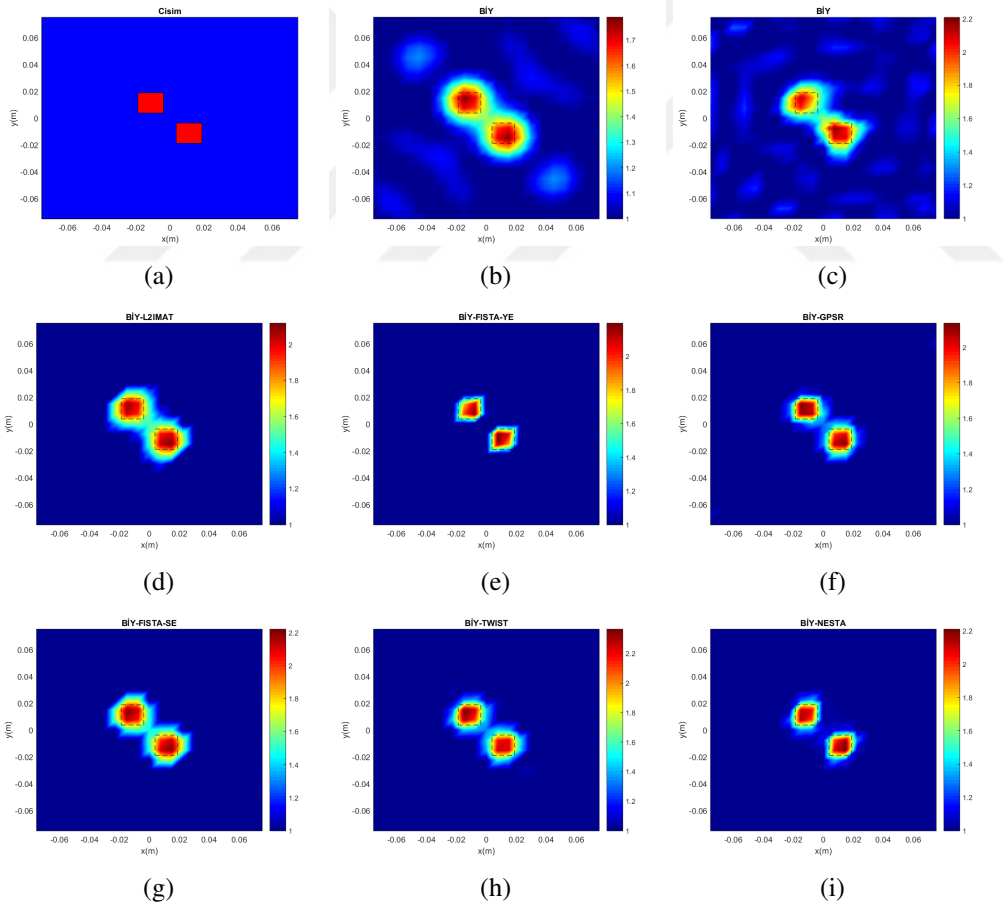
Şekil 4.4 : Birbirlerine yakın konumlandırılmış cisimler için yöntemlere ait sayısal sonuçlar: a) Cisim, b) BİY, c) BİY-L2IMAT, d) BİY-FISTA-YE, e) BİY-GPSR, f) BİY-FISTA-SE, g) BİY-TWIST, h) BİY-NESTA.

4.5 kısmında da anlatıldığı üzere l_1 normu cisim üzerinde keskinleştirici bir etkiye sahiptir, bu nedenle keskin kısımlar bu yöntemle daha iyi bulunabilmektedir. l_2 normu ise düzgünleştirici etkide bulunduğu için cismi olduğundan daha da geniş göstermektedir. Bu durum kenarların korunamamasına (edge preserving) yol açmaktadır. Şekil 4.4'den de görüleceği üzere l_1 norm minimizasyonu kullanan

yöntemler birbirine yakın konumlandırılmış cisimleri görüntülerken diğer yöntemlere göre daha iyi sonuç vermektedir.

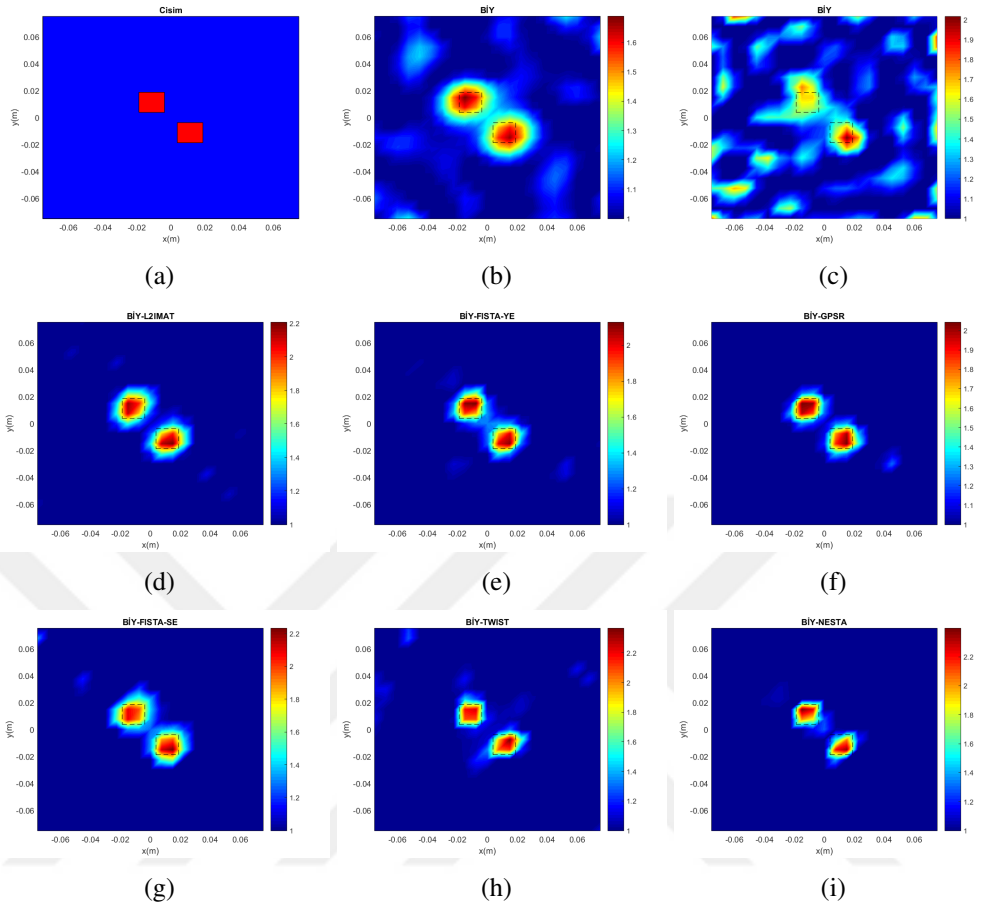
4.3 Sıkıştırılmış Algılama

Bu bölümde sıkıştırılmış algılama (Compressive Sensing - CS) ile toplamda 400 adet ölçüm 100'e düşürülerek işaretin BİY, BİY-NESTA, BİY-GPSR, BİY-FISTA-YE, BİY-FISTA-SE, BİY-TWIST ve BİY-L2IMAT yöntemleriyle geri elde edilmesi amaçlanmıştır. Cismin araştırma bölgesine göre doluluk seviyesi %4 dür. Daha sonrasında yöntemlerin sayısal sonuçları 4 kaynak ve 25 ölçüm noktasından elde edilen 100 ölçüme ait Born iteratif yöntemi sonucu ile karşılaştırılmıştır. Sonuç olarak sıkıştırılmış algılama ile aynı ölçüm sayısında BİY sonucundan daha iyi sonuçlar elde edilmiştir, buna ait sonuç Şekil 4.5'deki gibidir.



Şekil 4.5 : CS için yöntemlere ait sayısal sonuçlar: a) Cisim, b) 100 ölçüm için BİY sonucu, c) CS ile BİY sonucu, d) BİY-L2IMAT, e) BİY-FISTA-YE, f) BİY-GPSR, g) BİY-FISTA-SE, h) BİY-TWIST, i) BİY-NESTA.

Bu düzenek aynı şekilde gürültülü ortamda da denenmiştir ve yöntemlerin çalışırlığı Şekil 4.6'da gösterilmiştir.

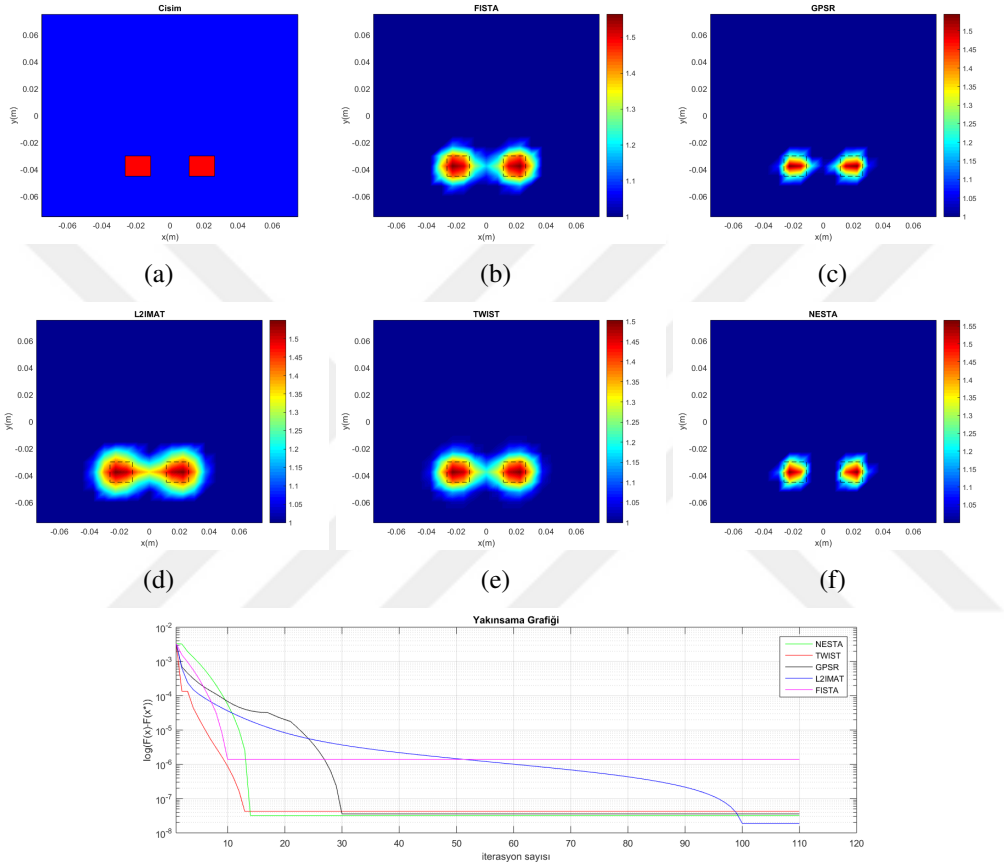


Şekil 4.6 : %25 Gürültüde CS için sayısal sonuçlar: a) Cisim, b) 100 ölçüm için BİY sonucu, c) CS ile BİY sonucu, d) BİY-L2IMAT, e) BİY-FISTA-YE, f) BİY-GPSR, g) BİY-FISTA-SE, h) BİY-TWIST, i) BİY-NESTA.

Sıkıştırılmış algılama teorisine göre işaretin geri elde edilebilmesi için algılama matrisi ile temel element matrisinin tutarsız olması gerekmektedir. Bu çalışmada cismin seyrek olduğuna dair ön bilgi bulunduğu için temel matris birim matrisi olarak alınmıştır. Birim matris ile rastgele gauss matrisi aralarında tutursızlık göstermektedir. Dolayısıyla algılama matrisi (sıkıştırma matrisi) rastgele gauss matrisi seçilmiştir. Sıkıştırılmış algılama işlemi sonucunda ölçümler, geri elde etme işlemi için işaret yapısını tam olarak yansıtmayıp gürültü gibi gözükmektedir. Bu durum sonucunda gürültü analizi örneğinde olduğu gibi seyreklik yaklaşımı çözüm yöntemleri daha kullanışlıdır. Tikhonov regülarizasyonu seyrek cismi sıkıştırılmış ölçümlerden bulmakta zorluk çekmektedir. Bu durum Şekil 4.5(c) ve 4.6(c)'de görülmektedir.

4.4 Yöntemlerin Yakınsama Hızı

Bu bölümde yöntemlerin yakınsama hızları karşılaştırılacaktır. Bu karşılaştırmada, Born yaklaşıklığı sonucunda elde edilen lineer ters problem FISTA, GPSR, L2IMAT, TWIST, NESTA yöntemleri ile çözülmüştür ve gürültü eklenmemiştir. En uygun sonucun hangi iterasyon adımında elde edildiğini gösteren grafik Şekil 4.7(g)'deki gibidir.



Şekil 4.7 : Yöntemlerin yakınsamasına ait sayısal sonuçlar: a) Cisim, b) FISTA, c) GPSR, d) L2IMAT, e) TWIST, f) NESTA, g) Yöntemlerin yakınsama eğrileri.

En uygun sonuç için algoritmaya yüksek sayıda iterasyon uygulanmıştır ve maliyet fonksiyonunun en düşük değeri baz alınmıştır. Daha sonrasında her yöntemin kendine ait en küçük maliyet fonksiyonu değerine kaç iterasyonda ulaştığı çizdirilmiştir.

Bu duruma ait işlemler denklem 4.1'deki gibidir. Burada x_k herbir iterasyonda hesaplanan değer, x^* ise maliyet fonksiyonunu minimuma getiren değerdir.

$$
\begin{array}{ll}
F(x_k) = ||b - Ax_k||^2 & \\
F(x^*) = ||b - Ax^*||^2 & \\
y = F(x_k) - F(x^*), & \text{eğer } F(x_k) > F(x^*) \text{ ise.} \\
y = F(x^*), & \text{eğer } F(x_k) = F(x^*) \text{ ise.}
\end{array} \tag{4.1}
$$

Bu işlem sonucunda FISTA ve TWIST yöntemleri önceki iterasyonlarda hesaplanan değerleri de kullandığı için daha hızlı yakınsamaktadır.

Yöntemlerin optimum sonuca ulaşmaları için gereken iterasyon sayısı aşağıdaki gibidir,

Çizelge 4.1 : Yöntemlerin yakınsaması için gereken iterasyon sayısı.

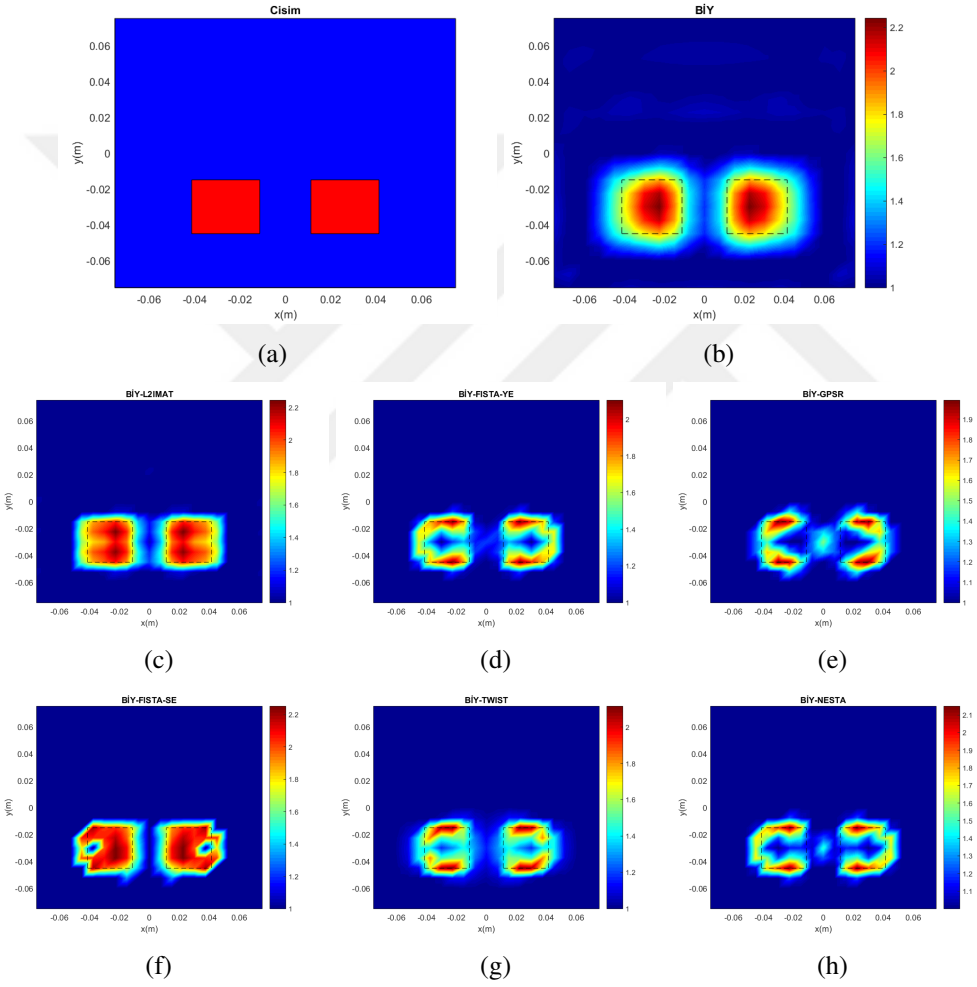
Yöntem	iterasyon sayısı
FISTA	10
TWIST	13
NESTA	15
GPSR	30
L2IMAT	100

4.5 Seyreklik Koşulunun Sağlanmadığı Durumda Görüntü Analizi

Bu karşılaştırma için Şekil 4.8(a)'da gösterilen cismin BİY, BİY-NESTA, BİY-GPSR, BİY-FISTA-YE, BİY-FISTA-SE, BİY-TWIST ve BİY-L2IMAT yöntemleri ile çözümüne ilişkin sayısal sonuçlar verilecektir. Bir adet kare şeklindeki cisme ait bir kenar uzunluğu 0.4λ alınmıştır ve iki kare arası mesafe 0.3λ tutulmuştur. Cismin araştırma bölgesine göre doluluk seviyesi %11 dir ve gürültü eklenmemiştir. Şekil 4.8'deki sonuçlara bakıldığında $l_!$ norm minimizasyonu yapan yöntemlerin büyük cisimlerin görüntülenmesinde kötü sonuç verdiği görülmektedir.

Yumuşak eşikleme fonksiyonu kullanan BİY-FISTA-YE ve BİY-TWIST yöntemleri, rezidüel hata terimine ait maliyet fonksiyonunu azaltan vektörün bütün elemanlarının değerlerini belirlenen eşik değeri ölçütünde azaltır. Bu şekilde cismi seyrek olmaya zorlar. BİY-NESTA ve BİY-GPSR ise maliyet fonksiyonunu rezidüel hatanın karesi ve işaretin l_1 normunun toplamı olarak baz alır ve bu fonksiyon üzerinde gradyen azaltma işlemi yapar. Sonuç olarak hem reziduel hata terimi hem de cismin l_1 normu azaltılmış olur, bu da seyrekliğe yol açar. l_0 norm minimizasyonu yapan BİY-L2IMAT ve BİY-FISTA-SE yöntemleri ise rezidüel hata terimine ait maliyet fonksiyonunu küçülten değer üzerinde sert eşikleme fonksiyonunu kullanmaktadır. Bu durum sonucunda belirlenen eşik değerinin altında kalan değerler 0'a eşitlenmektedir.

Bu da cismi seyrek olmaya zorlamaktadır. BİY sonucu ise Tikhonov regülarizasyonu ile elde edilmiştir ve l_2 norm regülarizasyonu kullanılmaktadır. l_2 normu tanımı gereği geometrik olarak düz ve yuvarlak şekilde bir yapıya sahiptir. Bu yüzden cisim üzerinde düzleştirici (smoothing) bir etkisi vardır. l_1 norm ise tanımı gereği geometrik olarak sivri (pointy) uçlu bir yapıya sahiptir. Bu sebeple cisim üzerinde keskinleştirici (sharpening) etkiye sahiptir. Bu durum Şekil 4.8'de görülebilmektedir. l_2 regülarizasyonu yapan BİY ve BİY-L2IMAT yöntemleri büyük cisimlerin görüntülenmesinde daha iyi sonuç vermektedir.



Şekil 4.8 : Seyreklik koşulunun sağlanmadığı duruma ait sayısal sonuçlar: a) Cisim, b) BİY, c) BİY-L2IMAT, d) BİY-FISTA-YE, e) BİY-GPSR, f) BİY-FISTA-SE, g) BİY-TWIST, h) BİY-NESTA.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, elektromanyetik ters saçılma problemi seyreklik yaklaşımı ile incelenmiştir. Seyreklik yaklaşımı çözüm yöntemleri açıklanmış ve bu yötemlerin çözümüne ait sayısal sonuçlar ile yöntemlerin karşılaştırılması yapılmıştır.

Elektromanyetik ters saçılma probleminin çözümü için ilk olarak Born iteratif yöntemi açıklanmıştır. Daha sonra seyreklik yaklaşımı çözüm yöntemleri, l_1 ve l_0 norm minimizasyonu kullanımına göre sınıflandırılmıştır. l_1 norm minimizasyonuna ait seyreklik yaklaşımı çözüm yöntemlerinden NESTA, TWIST, GPSR ve FISTA-YE(yumuşak eşikleme fonksiyonu kullanan) yöntemleri açıklanmıştır. l_0 norm minimizasyonuna ait seyreklik yaklaşımı çözüm yöntemlerinden ise L2IMAT ve FISTA-SE(sert eşikleme fonksiyonu kullanan) yöntemleri anlatılmıştır. Yöntemler kendi aralarında yakınsama hızı açısından değerlendirilmiştir ve FISTA yönteminin hız bakımından diğer yöntemlerden daha iyi olduğu sayısal sonuçlarda görülmektedir. Bu çalışmada, l_1 ve l_0 minimizasyonu yapan yöntemler Born iteratif yöntemi içerisinde Tikhonov regülarizasyonu yerine cisim fonksiyonunu elde etmek için kullanılmıştır. Bunun sonucu olarak seyreklik yaklaşımı yöntemleri BİY-NESTA, BİY-GPSR, BİY-TWIST, BİY-FISTA-YE, BİY-FISTA-SE ve BİY-L2IMAT olarak ele alınmıştır. Sayısal sonuçlarla birlikte büyük cisimlerin görüntülenmesinde l_2 regülarizasyonu tekniğini kullanan BİY ve BİY-L2IMAT yöntemlerinin diğerlerine göre daha iyi sonuç verdiği görülmüştür. Aynı zamanda birbirine yakın konumlandırılmış cisimlerin görüntülenmesinde l_1 norm minimizasyonu kullanan yöntemlerin, cisimlerin ayırdedilebilmesinde ve kenarların belirgin olmasında daha iyi performans gösterdiği kanıtlanmıştır. Seyrek cisimlerin görüntülenmesinde l_1 ve l_0 norm minimizasyonu kullanan yöntemlerin, gürültülü ortamda da daha iyi sonuç verdiği görülmüştür. Sıkıştırlmış algılama ile ölçüm sayısı düşürülerek işaretin geri elde edilmesi, l_1 ve l_0 norm minimizasyonu yapan yöntemler ile başarılı bir şekilde gerçekleştiği ve aynı sayıdaki ölçüme ait BİY sonucundan daha iyi olduğu ispatlanmıştır.

Seyrek cisimlerin görüntülenmesinde ve sıkıştırılmış algılama ile geri elde edilmesinde seyreklik yaklaşımı yöntemleri kullanılabilir. Büyük cisimlerin görüntülenmesinde ise l_2 norm regülarizasyonu kullanmak daha faydalıdır. Bu tez kapsamında anlatılan seyreklik yaklaşımı çözüm yöntemleri, Born iteratif yöntemi yerine kontrast kaynak yöntemi (Contrast Source Inversion - CSI) içerisinde kullanılması ve seyrekliğin sağlanmadığı durumda dalgacık dönüşümü kullanılması başka bir çalışmanın konusu olarak düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

[1] **Liu, Q.H.**, **Zhang, Z.Q.**, **Wang, T.T.**, **Bryan, J.**, **Ybarra, G.A.**, **Nolte, L.W. ve Joines, W.T.** (2002). Active microwave imaging. I. 2-D forward and inverse scattering methods, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, *50*(1), 123–133.

[2] **Nass, S.J.**, **Henderson, I.C.**, **Lashof, J.C.** *ve diğerleri* (2001). *Mammography and beyond: developing technologies for the early detection of breast cancer*, National Academies Press.

[3] **Fear, E.C.**, **Hagness, S.C.**, **Meaney, P.M.**, **Okoniewski, M. ve Stuchly, M.A.** (2002). Enhancing breast tumor detection with near-field imaging, *IEEE Microwave Magazine*, *3*(1), 48–56.

[4] **Wang, Y. ve Chew, W.C.** (1989). An iterative solution of the two-dimensional electromagnetic inverse scattering problem, *International Journal of Imaging Systems and Technology*, *1*(1), 100–108.

[5] **Chew, W.C. ve Wang, Y.M.** (1990). Reconstruction of two-dimensional permittivity distribution using the distorted Born iterative method, *IEEE transactions on medical imaging*, *9*(2), 218–225.

[6] **Belkebir, K. ve Tijhuis, A.G.** (2001). Modified2 gradient method and modified Born method for solving a two-dimensional inverse scattering problem, *Inverse Problems*, *17*(6), 1671.

[7] **Van Den Berg, P.M. ve Kleinman, R.E.** (1997). A contrast source inversion method, *Inverse problems*, *13*(6), 1607.

[8] **Şenyuva, R.V.**, **Özdemir, Ö.**, **Kurt, G.K. ve Anarım, E.** (2016). Electromagnetic Imaging of Closely Spaced Objects Using Matching Pursuit Based Approaches, *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, *15*, 1179–1182.

[9] **Azghani, M.**, **Kosmas, P. ve Marvasti, F.** (2015). Microwave medical imaging based on sparsity and an iterative method with adaptive thresholding, *IEEE transactions on medical imaging*, *34*(2), 357–365.

[10] **Desmal, A. ve Bağcı, H.** (2014). Shrinkage-thresholding enhanced Born iterative method for solving 2D inverse electromagnetic scattering problem, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, *62*(7), 3878–3884.

[11] **Donoho, D.L.** (2006). Compressed sensing, *IEEE Transactions on information theory*, *52*(4), 1289–1306.

[12] **Mallat, S.G. ve Zhang, Z.** (1993). Matching pursuits with time-frequency dictionaries, *IEEE Transactions on signal processing*, *41*(12), 3397–3415.

[13] **Pati, Y.C.**, **Rezaiifar, R. ve Krishnaprasad, P.** (1993). Orthogonal matching pursuit: Recursive function approximation with applications to wavelet decomposition, *Signals, Systems and Computers, 1993. 1993 Conference Record of The Twenty-Seventh Asilomar Conference on*, IEEE, s.40–44.

[14] **Blumensath, T. ve Davies, M.E.** (2008). Gradient pursuits, *IEEE Transactions on Signal Processing*, *56*(6), 2370–2382.

[15] **Donoho, D.L.**, **Tsaig, Y.**, **Drori, I. ve Starck, J.L.** (2012). Sparse solution of underdetermined systems of linear equations by stagewise orthogonal matching pursuit, *IEEE Transactions on Information Theory*, *58*(2), 1094–1121.

[16] **Needell, D. ve Vershynin, R.** (2010). Signal recovery from incomplete and inaccurate measurements via regularized orthogonal matching pursuit, *IEEE Journal of selected topics in signal processing*, *4*(2), 310–316.

[17] **Needell, D. ve Tropp, J.** (2008). CoSaMP: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples, *arXiv preprint arXiv:0803.2392*.

[18] **Blumensath, T. ve Davies, M.E.** (2009). Iterative hard thresholding for compressed sensing, *Applied and Computational Harmonic Analysis*, *27*(3), 265–274.

[19] **Candes, E. ve Romberg, J.** (2005). l1-magic: Recovery of sparse signals via convex programming, *URL: www. acm. caltech. edu/l1magic/downloads/l1magic. pdf*, *4*, 14.

[20] **Becker, S.**, **Bobin, J. ve Candès, E.J.** (2011). NESTA: a fast and accurate first-order method for sparse recovery, *SIAM Journal on Imaging Sciences*, *4*(1), 1–39.

[21] **Van Den Berg, E. ve Friedlander, M.P.** (2008). Probing the Pareto frontier for basis pursuit solutions, *SIAM Journal on Scientific Computing*, *31*(2), 890–912.

[22] **Beck, A. ve Teboulle, M.** (2009). A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems, *SIAM journal on imaging sciences*, *2*(1), 183–202.

[23] **Hale, E.T.**, **Yin, W. ve Zhang, Y.** (2008). Fixed-point continuation for \ell_1-minimization: Methodology and convergence, *SIAM Journal on Optimization*, *19*(3), 1107–1130.

[24] **Yin, W.**, **Osher, S.**, **Goldfarb, D. ve Darbon, J.** (2008). Bregman iterative algorithms for \ell_1-minimization with applications to compressed sensing, *SIAM Journal on Imaging sciences*, *1*(1), 143–168.

[25] **Nowak, R.D.**, **Wright, S.J.** *ve diğerleri* (2007). Gradient projection for sparse reconstruction: Application to compressed sensing and other inverse problems, *IEEE Journal of selected topics in signal processing*, *1*(4), 586–597.

[26] **Bioucas-Dias, J.M. ve Figueiredo, M.A.** (2007). A new TwIST: two-step iterative shrinkage/thresholding algorithms for image restoration, *IEEE Transactions on Image processing*, *16*(12), 2992–3004.

[27] **Wright, S.J.**, **Nowak, R.D. ve Figueiredo, M.A.** (2009). Sparse reconstruction by separable approximation, *IEEE Transactions on Signal Processing*, *57*(7), 2479–2493.

[28] **Cui, T.J.**, **Chew, W.C. ve Zhang, Y.** (2002). Detection of dielectric targets buried in a very lossy Earth, *Antennas and Propagation Society International Symposium, 2002. IEEE*, cilt 2, IEEE, s.769–772.

[29] **Richmond, J.** (1965). Scattering by a dielectric cylinder of arbitrary cross section shape, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, *13*(3), 334–341.

[30] **Candès, E.J. ve Wakin, M.B.** (2008). An introduction to compressive sampling, *IEEE signal processing magazine*, *25*(2), 21–30.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad : **Emre Yalçın**

Doğum Tarihi ve Yeri : **1989, Kırşehir**

E-Posta : **yalcinemr@itu.edu.tr**

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2012, İstanbul Teknik Üniversitesi, Elektrik-Elektronik Fakültesi, Telekomünikasyon Mühendisliği Bölümü
- **Y. Lisans:** 2016, İstanbul Teknik Üniversitesi, Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Anabilim Dalı, Telekomünikasyon Mühendisliği Programı.