İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOĞRU EKSENLİ DÜZLEM ÇUBUKLARDA NONLİNEER ANALİZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnş. Müh. Mustafa AKPINAR

Anabilim Dalı : İnşaat Mühendisliği
Programı : Yapı Mühendisliği

Tez Danışmanı: Yrd.Doç.Dr. Ali Nuri DOĞRUOĞLU

EKİM 2006

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOĞRU EKSENLİ DÜZLEM ÇUBUKLARDA NONLİNEER ANALİZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İnş. Müh. Mustafa AKPINAR
(501031042)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 15 Eylül 2006
Tezin Savunulduğu Tarih : 18 Ekim 2006

Tez Danışmanı : **Yrd.Doç.Dr. Ali Nuri DOĞRUOĞLU**

Diğer Jüri Üyeleri **Prof.Dr. Mehmet OMURTAG (İ.T.Ü.)**

Prof.Dr. Faruk YÜKSELER (Y.T.Ü.)

EKİM 2006

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, doğru eksenli çubukların nonlinner problem çözümlerinde ki davranışları, yeni bir fonksiyonel geliştirilerek incelenmiştir.

Bu çalışma sırasında değerli katkılarını esirgemeyen başta değerli hocam Yrd. Doç. Dr. A. Nuri Doğruoğlu'na, yüksek lisans çalışmalarım sırasında her türlü desteği aileme ve arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

EYLÜL, 2006 Mustafa AKPINAR

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ v
ŞEKİL LİSTESİ vı
SEMBOL LİSTESİ vıı
ÖZET vıı
SUMMARY ıx

1. GİRİŞ 1

2. ÇUBUĞUN YAPISI VE FONKSİYONELİN OLUŞTURULMASI 4
2.1 Çubuğun İç Kuvvetlerinin ve Deplasmanlarının Durumu 4
2.2 Fonksiyonelin Elde Edilmesi 7
2.2.1 Kabuller 7
2.2.2 Kinematik büyüklüklerin oluşturulması 7
2.2.3 Şekil değiştirme tansörü bileşenlerinin hesabı 10
2.2.4 İç kuvvet-yer değiştirme bağıntıları 12
2.2.5 Denge denklemlerinin elde edilmesi 13
2.2.6 Bilineer fonksiyonun elde edilmesi 14
2.2.7 Fonksiyonelin elde edilmesi 17
2.2.8 Fonksiyonelin özel yapıları 19

3. ÇÖZÜM YÖNTEMİ 21
3.1 Artımsal Formülasyon 21
3.2 Sonlu Elemanlar Yöntemi 26

4. PROBLEM ÇÖZÜMLERİ 31
4.1 Konsol Kiriş 1 31
4.1.1 Konsol kiriş 1 31
4.1.2 Konsol kiriş 2 33
4.2 Tekil Yük Altında Basit Kiriş 34
4.3 Yayılı Yük Altında Basit Kiriş 36
4.4 Normal Kuvvet Altındaki Basit Kiriş 39
4.4.1 Tekil yük altında 39
4.4.2 Yayılı yük altında 42
4.4.3 Moment çifti etkisinde 44
4.5 Burkulma Analizi 46
4.5.1 Birinci tip burkulma problemi 46
4.5.2 İkinci tip burkulma analizi 47
4.5.3 Üçüncü tip burkulma problemi 48
4.5.4 Dördüncü tip burkulma analizi 49

5. SONUÇLAR 50

KAYNAKLAR 52

ÖZGEÇMİŞ **54**

TABLO LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 4.1 Tekil Kuvvet Altında Konsol Kirişte Çökme ve Uzamalar…….. 32
Tablo 4.2 Tekil Kuvvet Altında Boyutsuz Konsol Kirişte Çökme ve Uzamalar…… 33
Tablo 4.3 Tekil Kuvvet Altında Boyutsuz Basit Kirişte Çökme ve Uzamalar I…… 34
Tablo 4.4 Tekil Kuvvet Altında Boyutsuz Basit Kirişteki Çökme ve Uzamalar II …….. 35
Tablo 4.5 Yayılı Yük Altında Boyutsuz Basit Kirişteki Çökme ve Uzamalar I……. 37
Tablo 4.6 Yayılı Yük Altında Boyutsuz Basit Kirişteki Çökme ve Uzamalar II…… 37
Tablo 4.7 Normal Kuvvet Altında Tekil Yük Etkiyen Basit Kiriş Çökme Tablosu I…… 40
Tablo 4.8 Normal Kuvvet Altında Tekil Yük Etkiyen Basit Kiriş Çökme Tablosu I…… 40
Tablo 4.9 Normal Kuvvet ve Tekil Yük Altında Basit Kirişteki Çökmenin Değişik Fonksiyonellere Göre Karşılaştırma Tablosu……... 41
Tablo 4.10 Normal Kuvvet ve Tekil Yük Altında Basit Kirişte Nodlarda ki Normal Kuvvet Büyüklüğünü Karşılaştırma Tablosu……... 41
Tablo 4.11 Normal Kuvvet ve Yayılı Yük Altında Basit Kirişin Orta Noktasında Oluşan Çökme Tablosu…….. 42
Tablo 4.12 Normal Kuvvet ve Moment Çifti Altında Basit Kirişin Orta Noktasında Oluşan Çökme Tablosu…….. 44
Tablo 4.13 Yayılı Yük Altında Birinci Tip Burkulma Yükü……... 46
Tablo 4.14 Yayılı Yük Altında Birinci Tip Burkulma Yükü……... 47
Tablo 4.15 Yayılı Yük Altında Birinci Tip Burkulma Yükü……... 48
Tablo 4.16 Yayılı Yük Altında Birinci Tip Burkulma Yükü…….. 49

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 2.1 **:** Yer ve Şekil Değişiminden Önceki Durum…… 4
Şekil 2.2 **:** Yer ve Şekil Değişiminden Sonraki Durum…… 5
Şekil 2.3 **:** Kesitin Konum Vektörleri ve Yer Değiştirmeleri……. 5
Şekil 2.4 **:** Yer ve Şekil Değişimi Yapmış Çubukta Eğrilik……... 11
Şekil 2.5 **:** Ω Açısının Gösterimi……... 11
Şekil 3.1 : Artımsal İfadenin Gösterimi…….. 21
Şekil 3.2 **:** Eleman Matrisinin ve Yükleme Vektörünün Şekli……... 25
Şekil 3.3 **:** Kuadratik Şekil Fonksiyonları……27
Şekil 3.4 **:** Artımsal Metot ile Sonlu Eleman Analizi Şekli…… 29
Şekil 4.1 **:** Tekil Yük Altında Konsol Kirişin Şekli…… 31
Şekil 4.2 **:** 1. Konsol Kiriş Örneği *P – w* Grafiği……... 32
Şekil 4.3 **:** 1. Konsol Kiriş Örneği *P – u* Grafiği…… 32
Şekil 4.4 : Tekil Yük Altında Basit Kiriş Şekli…….. 34
Şekil 4.5 : Tekil Yük Altında Basit Kiriş Örneği *P – w* Grafiği……. 35
Şekil 4.6 : Tekil Yük Altında Basit Kiriş Örneği *P – u* Grafiği……. 36
Şekil 4.7 : Yayılı Yük Altında Basit Kiriş Şekli……. 36
Şekil 4.8 : Yayılı Yük Altında Basit Kiriş Örneği *P – w* Grafiği……... 38
Şekil 4.9 : Yayılı Yük Altında Basit Kiriş Örneği *P – u* Grafiği…… 38
Şekil 4.10 : Tekil Yüklemeli Normal Kuvvet Etkisindeki Basit Kiriş……. 39
Şekil 4.11 : Tekil Yüklemeli Normal Kuvvetli Basit Kirişte *w/ws-P/Pcr* Grafiği…… 40
Şekil 4.12 : Yüklü Normal Kuvvet Etkisindeki Basit Kiriş…….. 42
Şekil 4.13 : Normal Kuvvet ve Yayılı Yük Altında Basit Kirişin Orta Noktasındaki *w -P/Pcr* Grafiği…….. 43
Şekil 4.14 : Moment Çifti ile Normal Kuvvet Etkisindeki Basit Kiriş……. 44
Şekil 4.15 : Normal Kuvvet ve Moment Çifti Altında Basit Kirişin Orta Noktasında *w -P/Pcr* Grafiği…… 45
Şekil 4.16 : Birinci Tip Burkulma Problemi…… 46
Şekil 4.17 : İkinci Tip Burkulma Problemi…… 47
Şekil 4.18 : Üçüncü Tip Burkulma Problemi……... 48
Şekil 4.19 : Dördüncü Tip Burkulma Problemi…… 49

SEMBOL LİSTESİ

t	**:** Birim teğet vektör
n	**:** Birim normal vektör
b	**:** Birim binormal vektör
u	**:** Teğetsel doğrultuda yer değiştirme
w	**:** Normal doğrultuda yer değiştirme
R	**:** Kesit içindeki bir noktanın konum vektörü
r	**:** Çubuk ekseni üzerindeki bir noktanın konum vektörü
ξ	**:** Kesit içindeki bir noktanın binormal eksene olan dik uzaklığı
κ	**:** Eğrilik
ε	**:** Boyca uzama
Ω	**:** Şekil değiştirmemiş ve değiştirmiş durumdaki teğet vektörler arasındaki açı
M	**:** Moment
N	**:** Normal Kuvvet
A	**:** Alan
q	**:** Yayılı yük
ψ	**:** Şekil fonksiyonu

DOĞRU EKSENLİ DÜZLEM ÇUBUKLARDA NONLİNEER ANALİZ

ÖZET

Bu çalışmada ince eğri eksenli düzlem çubukların sonlu yer değiştirme teorisine göre yapılarını incelemek için yeni bir fonksiyonel oluşturulmuştur. Bu fonksiyonelde κ_o ilkel eğrilik sıfır alınarak doğru eksenli çubuklar için fonksiyonel elde edilmiş ve değişik türde sistemlerde çözüm aranmıştır. Bu fonksiyonelin elde edilmesinde Bernoulli - Euler kiriş teorisi göz önüne alınmıştır. Aşağıdaki kabuller yapılmıştır.

Fonksiyonel Gateaux diferansiyel yaklaşımı kullanılarak eğri eksenli düzlem ince çubuklar için uygun sınır koşulları ile birlikte elde edilmiştir. Elde edilen bu fonksiyonel artımsal yapı kullanılarak doğru eksenli düzlem çubukların sonlu eleman analizi yapılmıştır. Sonlu eleman analizi sırasında kuadratik şekil fonksiyonları kullanıldığından her bir eleman için her biri birbirinden bağımsız üçer adet normal kuvvet, moment, yatay yer değiştirme ve düşey yer değiştirme olmak üzere 12 adet bilinmeyen vardır.. Bulunan yapı içinde bir eleman için, içinde nonlineer terimleri de içeren 12 x 12 büyüklüğüne eleman matrisi ve 12 x 1 büyüklüğünde yükleme vektörü elde eidlmiştir. Artımsal yapıdan dolayı çözüm sırasında iterasyonlar kullanılmıştır.

Ayrıca fonksiyonelin yapısını daha iyi inceleyebilmek için; çalışmanın sonunda burkulma analizinde Euler halleri olarak geçen çubuklar için kendi ekseninde yayılı yük altında burkulma analizi yapılmış ve kritik "q" yayılı yükleri bulunmuştur.

Bu hesapların yapılmasında "Mathematica" programı kullanılmıştır.

NONLINEER ANALYSIS OF STRAIGHT BEAMS INPLANE

SUMMARY

In this study, taking the finite displacement theory into consideration, the effects of nonlineer terms on the internal forces and displacement that take place in the plane of the circular beams are examined. For this purpose, a finete element application will be done using a new functional obtained by Ali N. Doğruoğlu. In functional κ_o curvature is taken as zero so the functioan structure to transform straight beams inplane. The assumption of Bernoulli-Navier beam theory take in consideraiton for to get the function. Function is gotten with its boundary conditions for thin straight beams inplane by using Gateaux differential. By using incremental method, the finite elements theory with this function is used for solving the problems. The fundamental quantities are u “axial displacement”, w “radial displacement”, M “flexural moment” and N “axial force” in this study. Since the higher order derivatives in the functional are second order, quadratic shape functions will be used to obtain the element matrix. In the final for one element, we made a 12x12 element matrix and 12x1 loading vector which are contain the nonlineer terms. Mathematice is used for the solution of these matrices.

1. GİRİŞ

Bir yapı, malzeme, yükleme ve mesnetlenme durumlarına göre değişik şekillerde hareket gösterirler. Yapının güvenli bir şekilde dizayn edilebilmesi için, yapacağı yer değiştirmelerin ve şekil değiştirmelerin önceden düzgün bir şekilde saptanması gerekir. Çubuk elemanlar yapının her alanında karşımıza çıkmaktadırlar. Çubuk elemanlar için şekil değiştiren cisimler mekaniğinde genel olarak iki tip problem sösz konusudur.

a) Gerilme problemi

b) Stabilite problemi

Gerilme probleminde bir çubuğun farklı dış yük etkileri altında iç bünyesinde oluşan gerilmelerin, çeşitli bilimsel çalışmalar sonuncunda kabul edilen sınır gerilme değerlerine ne kadar yaklaştığı, yani elemanın ne kadar zorlandığı analiz edilir. Mühendislikte bu analiz lineer teoriye göre yapılmaktadır. Lineer teoride yer değiştirmelerin çubuğun kalınlığına göre çok küçük olduğu kabul edildiğinden denge denklemlerinin yazımında çubuğun şekil değiştirmemiş konumu kullanılır. Genel olarak mühendislikte çubuk elemanların yaptığı yer değiştirmeler çubuğun diğer boyutlarına göre çok küçük olduğu için lineer teorinin geçerli olduğu kabul edilir. Ancak ince çubuklarda ve eğri eksenli çubuklarda oluşan yer değiştirmeler ihmal edilemeyecek kadar büyüktür. Bu durumda lineer teori ile yapılan çözüm gerçeği yansıtmamaktadır. Bu yüzden çubukların doğrusal olmayan (nonlineer) davranışlarının araştırılmasının gerekliliği ortaya çıkmıştır. İkinci ve daha yüksek mertebeden büyüklüklerin ve türevlerin ihmal edilmediği nonlineer teori çözümü lineer teorinin çözümüne göre daha karmaşıktır. Çözüm yöntemlerinin karmaşıklığından dolayı bazı çalışmalarda yine çeşitli ihmaller yapılarak yapılar basitleştirilip lineer teoriye yaklaşılmıştır. Ama özellikle son yıllarda bilgisayar kapasitelerinin büyümesinden ve işlem hızlarının artmasından dolayı ve bilgisayar programcılığı açısından rahatlık getiren sonlu eleman teorisinin geliştirilmesiyle de

bu yapılar hep daha az ihmal yapılarak çözülmeye çalışılmıştır. Genel görüş ne kadar az ihmal yapılırsa elemanın göstereceği davranışa o kadar çok yaklaşılacağıdır.

Bu bağlamda büyük yer değiştirmeler ile ilgili çalışmalar incelendiğinde Torkamani[12] çubuğun eksenal doğrultusundaki yer değiştirmesinin ikinci mertebeden büyüklüklerinin ihmal edildiği bir çalışma yapmıştır.

Trahair[9] çubuğun boy uzama ifadesini seriye açarak iki ve daha yüksek mertebeden büyüklükleri ihmal etmiş ve buna göre bir fonksiyon elde etmiştir.

Büyük yer değiştirmelerle ilgili yapılan bir diğer çalışmada Tekinalp[11] çubuğun şekil değiştir konumdaki eksen çizgisi ile şekil değiştirmemiş konumdaki eksen çizgisi üzerinde karşılıklı noktalardaki teğet vektörleri arasındaki açının kosinüs ve sinüs fonksiyonlarını esas alarak çubuğun denge ve deformasyonuna ait denklemler elde etmiştir.

Ayrıca İnan, kirişlerin sonlu yer değiştirmeleri hesabında yaklaşık bir metot geliştirmiştir. Bu metodun ana fikri, çubukların elastik eğri hesabını direkt yapmak yerine iki adımda yapmaktır. Birinci adımda başlangıç ekseninden geçen ortalama bir eğri seçili, ikinci adımda bu eğriden gerçek elastik eğri elde edilir.

Bu tez çalışmasında eğri eksenli çubukların yapılarından yola çıkılarak uzama ve çökme deplasmanlarının ikinci mertebeden türevlerine kadar olan terimleri de ihmal edilmeyerek bir fonksiyonel elde edilmiştir. Bu fonksiyonelin elde edilmesinde sonlu yer değiştirme teorisi kullanılmış ve Bernoulli - Euler kiriş teorisi göz önüne alınmıştır. Bu doğrultuda aşağıdaki kabuller yapılmıştır.

1. Düzlem kesitlerin şekil değişiminden sonra düzlem kaldığı kabul edilir.

2. Düzlem kesitler rijit levhanın ötelenme ve dönme hareketi gibi hareket ederler.

3. Çubuklar incedir h << L.

4. Çubuğun kesitinin düzlemde simetrik olduğu kabul edilmiştir ve şekil değişiminden sonra kesitlerin değişmeyeceği kabul edilmiştir.

5. Hooke kanunu $\sigma = E\varepsilon$ geçerlidir.

6. Kayma gerilmeleri etkisi ihmal edilmiştir.

Burada Gateaux diferansiyel yaklaşımı kullanılarak eğri eksenli ince çubuklara ait fonksiyonel, sınır koşulları ile birlikte elde edilmiştir. Elde edilen bu fonksiyonel artımsal yapı içerisinde oluşturularak sonlu eleman analizi yapılmıştır

Eğri eksenli çubuklar için elde edilen bu fonksiyonelde; κ_o ilkel eğrilik terimi sıfır alınarak doğru eksenli çubuklar için değişik mesnetlenme yapılarında, yükleme durumlarında ve malzeme özelliklerinde statik ve stabilite çözümleri aranmıştır.

Eleman matrisinin elde edilmeside kuadratik şekil fonksiyonları kullanıldığından her bir eleman için elemanın sol ucunda, ortasında ve sağ ucunda olmak üzere üçer adet normal kuvvet, moment, yatay yer değiştirme ve düşey yer değiştirme olmak üzere toplam 12 adet bilinmeyen bulunmaktadır. Bulunan yapı içinde bir eleman için, içinde nonlineer terimleri de içeren 12 x 12 büyüklüğüne bir eleman matrisi ve 12 x 1 büyüklüğünde bir yükleme vektörü bulunmuştur. . Artımsal yapıdan dolayı çözüm sırasında iterasyonlar kullanılmıştır.

Ayrıca fonksiyonelin yapısını daha iyi inceleyebilmek için; çalışmanın sonunda burkulma analizinde Euler halleri olarak geçen çubuklardan iki tanesi için kendi ekseninde yayılı yük altında burkulma analizi yapılmış ve kritik "q" yayılı yükleri bulunmuştur.

Bu hesapların yapılmasında "Mathematica" programı kullanılmıştır.

2. ÇUBUĞUN YAPISI VE FONKSİYONELİN OLUŞTURULMASI

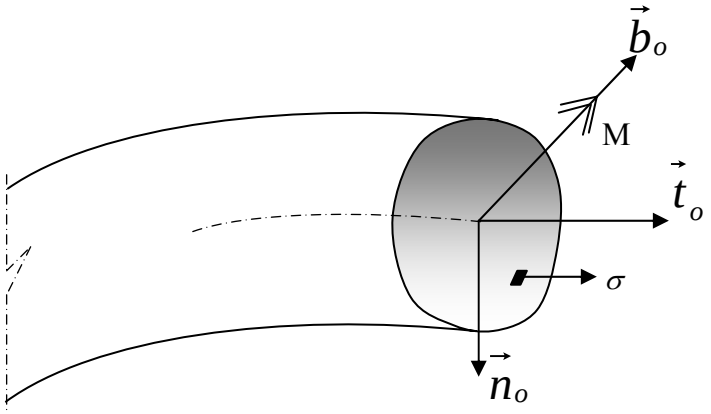
2.1 Çubuğun İç Kuvvetlerinin ve Deplasmanlarının Durumu

Düzlem eğrinin ilk konumundaki büyüklükleri $(\ )_0$ alt indisi ile tanımlanmıştır. Bu durumda düzlem eğrinin ilk konumdaki büyüklükleri

$\mathbf{t}_o$: birim teğet vektör,

$\mathbf{n}_o$: birim normal vektör,

$\mathbf{b}_o$: birim binormal vektör



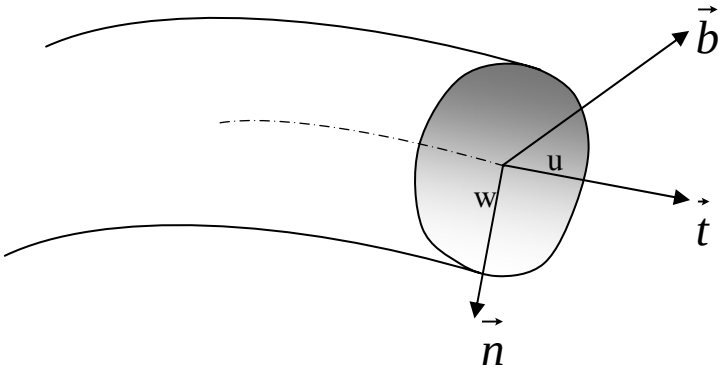
Şekil 2.1 : Yer ve Şekil Değişiminden Önceki Durum

Düzlem eğrinin yer ve şekil değişimi yaptıktan sonraki konumu Şekil 2.2 de gösterilmiştir. Burda ise

t : birim teğet vektör,

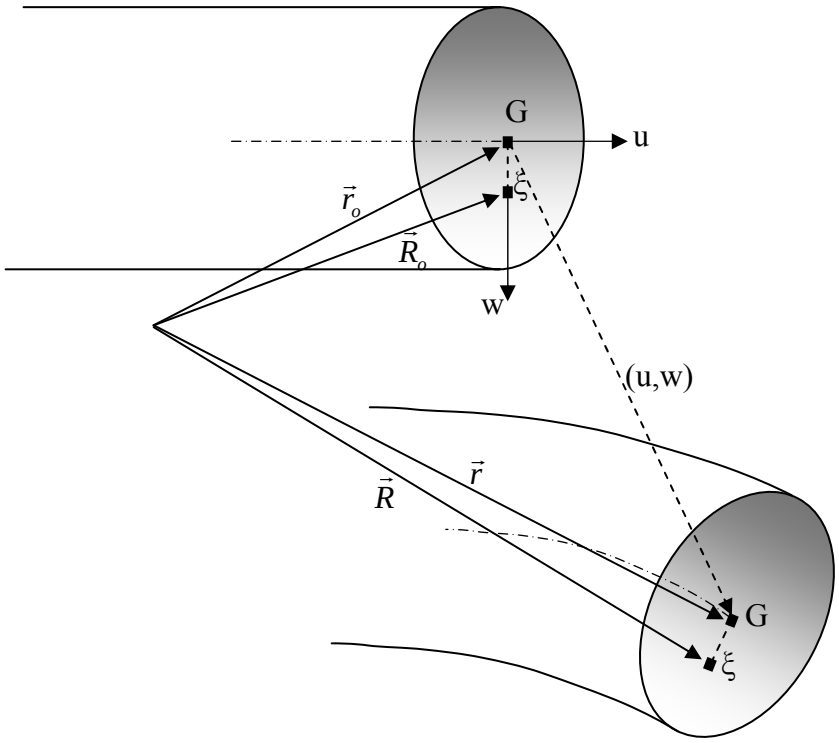
n : birim normal vektör,

b : binormal vektörü göstermektedir.



Şekil 2.2 : Yer ve Şekil Değişiminden Sonraki Durum

Şekil 2.2 de "u" eksen üzerindeki bir noktanın teğetsel doğrultuda, "w" ise normal doğrultuda ki yaptığı yer değiştirmeleri gösterir.



Şekil 2.3 : Kesitin Konum Vektörleri ve Yer Değiştirmeleri

Şekil 2.3 de düzlem eğrinin ilk konumdaki büyüklükleri

$\mathbf{r}_o$: Çubuk ekseni üzerindeki bir noktanın konum vektörünü

$\mathbf{R}_o$: Kesit içindeki bir noktanın konum vektörünü

ξ : Kesit içindeki bir noktanın b_o binormal eksene olan dik uzaklığı

göstermek üzere,

$$\mathbf{R}_o = \mathbf{r}_o + \xi \mathbf{n}_o \qquad \textbf{(2.1)}$$

bağıntısı yazılabilir.

Düzlem eğri yer ve şekil değişimi yaptıktan sonraki konumda ise

$\mathbf{r}$: Çubuk ekseni üzerindeki bir noktanın konum vektörünü

$\mathbf{R}$: Kesit içindeki bir noktanın konum vektörünü

göstermek üzere,

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \xi \mathbf{n} \qquad \textbf{(2.2)}$$

bağıntısı yazılabilir. Şekil ve yer değişiminden sonra "ξ" mesafesi değişmemiştir.

2.2 Fonksiyonelin Elde Edilmesi

2.2.1 Kabuller

Bu çalışmada sonlu yer değiştirme teorisi kullanılmış ve Bernoulli - Euler kiriş teorisi göz önüne alınmıştır. Bu doğrultuda aşağıdaki kabuller yapılmıştır.

1. Düzlem kesitlerin şekil değişiminden sonra düzlem kaldığı kabul edilir.
2. Düzlem kesitler rijit levhanın ötelenme ve dönme hareketi gibi hareket ederler.
3. Çubuklar incedir h << L.
4. Çubuğun kesitinin düzlemde simetrik olduğu kabul edilmiştir ve şekil değişiminden sonra kesitlerin değişmeyeceği kabul edilmiştir.
5. Hooke kanunu $\sigma = E\varepsilon$ geçerlidir.
6. Kayma gerilmeleri etkisi ihmal edilmiştir.

2.2.2 Kinematik Büyüklüklerin Elde Edilmesi

Yukarda ki şekiller ve kabuller doğrultusunda

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + u\mathbf{t}_o + w\mathbf{n}_o \tag{2.3}$$

bağıntısı yazılabilir. Buna göre (2.2) ifadesini kullanarak

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_o + u\mathbf{t}_o + w\mathbf{n}_o + \xi\mathbf{n} \tag{2.4}$$

olacaktır. u ve w yer değiştirmelerini şekil değiştirmemiş konumdaki çubuk ekseni üzerinde tanımlanmış s parametresinin fonksiyonları olduklarını düşünürsek

$$\frac{d\mathbf{R}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}_o}{ds} + \frac{du}{ds}\mathbf{t}_o + u\frac{d\mathbf{t}_o}{ds} + \frac{dw}{ds}\mathbf{n}_o + w\frac{d\mathbf{n}_o}{ds} + \xi\frac{d\mathbf{n}}{ds} \tag{2.5}$$

yazılabilir. Burada

$$\frac{d\mathbf{r}_o}{ds} = \mathbf{t}_o\,,\quad \frac{d\mathbf{t}_o}{ds} = \kappa_o \mathbf{n}_o\,,\quad \frac{d\mathbf{n}_o}{ds} = -\kappa_o \mathbf{t}_o \tag{2.6}$$

olduğuna göre (2.5) ve (2.6) kullanılarak

$$\frac{d\mathbf{R}}{ds} = \mathbf{t}_o + \frac{du}{ds}\mathbf{t}_o + \kappa_o u\mathbf{n}_o + \frac{dw}{ds}\mathbf{n}_o + w(-\kappa_o \mathbf{t}_o) + \xi\frac{d\mathbf{n}}{ds} \tag{2.7}$$

yazılabilir. Burada κ_o düzlem eğrinin ilkel eğriliğidir. İfade biraz daha düzenlenirse

$$\frac{d\mathbf{R}}{ds} = \mathbf{t}_o + \frac{du}{ds}\mathbf{t}_o + \kappa_o u\mathbf{n}_o + \frac{dw}{ds}\mathbf{n}_o + w(-\kappa_o \mathbf{t}_o) + \xi\frac{d\mathbf{n}}{ds} \tag{2.8}$$

elde edilir.

$$\frac{d\overline{u}}{ds} = \overline{u}' = \frac{du}{ds} - \kappa_o w\,, \tag{2.9}$$

$$\frac{d\overline{w}}{ds} = \overline{w}' = \frac{dw}{ds} + \kappa_o u \tag{2.10}$$

gösterimi kullanılırsa

$$\frac{d\mathbf{R}}{ds} = (1+\overline{u}')\mathbf{t}_o + \overline{w}'\mathbf{n}_o + \xi\frac{d\mathbf{n}}{ds} \tag{2.11}$$

şeklinde ifade edilir. Diğer taraftan,

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}_o}{ds} + \frac{du}{ds}\mathbf{t}_o + u\frac{d\mathbf{t}_o}{ds} + \frac{dw}{ds}\mathbf{n}_o + w\frac{d\mathbf{n}_o}{ds} \tag{2.12}$$

ifadesi de aynı şekilde düzenlenirse,

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = (1+\overline{u}')\mathbf{t}_o + \overline{w}'\mathbf{n}_o \tag{2.13}$$

şeklinde yazılabilir.

Şekil değiştirmiş konumdaki düzlem eğrinin ekseni üzerinde $\overline{s}$ yay boyu parametresini tanımlarsak

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{d\bar{s}}\frac{d\bar{s}}{ds} \tag{2.14}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\bar{s}} = \mathbf{t} \text{ ve } \frac{d\bar{s}}{ds} = 1+\varepsilon \tag{2.15}$$

olduğuna göre (2.13) ifadesini (2.14) ve (2.15) bağıntılarını kullanarak

$$(1+\varepsilon)\mathbf{t} = (1+\bar{u}')\mathbf{t}_o + \bar{w}'\mathbf{n}_o \tag{2.16}$$

şeklinde yazarız. Buradan da

$$1+\varepsilon = \sqrt{(1+\bar{u}')^2 + \bar{w}'^2} \tag{2.17}$$

elde edilir. Diğer taraftan (2.14) de olduğu gibi

$$\frac{d\mathbf{R}}{ds} = \frac{d\mathbf{R}}{d\bar{s}}\frac{d\bar{s}}{ds} \tag{2.18}$$

şeklinde yazılabilir. Burada (2.2) bağıntısı kullanılarak

$$\frac{d\mathbf{R}}{ds} = (1+\varepsilon)(1-\kappa\xi)\mathbf{t} \tag{2.19}$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde (2.1) bağıntısı kullanılarak

$$\frac{d\mathbf{R}_o}{ds} = (1-\kappa_o\xi)\mathbf{t}_o \tag{2.20}$$

bağıntısı elde edilir. Ayrıca

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\xi} = \frac{d}{d\xi}(\mathbf{r}+\xi\mathbf{n}) \Rightarrow \frac{d\mathbf{R}}{d\xi} = \mathbf{n} \tag{2.21}$$

$$\frac{d\mathbf{R}_o}{d\xi} = \frac{d}{d\xi}(\mathbf{r}_o+\xi\mathbf{n}_o) \Rightarrow \frac{d\mathbf{R}_o}{d\xi} = \mathbf{n}_o \tag{2.22}$$

dır.

2.2.3 Şekil Değiştirme Tansörü Bileşenlerinin Hesabı

Şekil değiştirme tansörünün elemanları

$$[\varepsilon]=\begin{bmatrix}\varepsilon_t & \varepsilon_{tn}\\ \varepsilon_{nt} & \varepsilon_n\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix}\frac{d\mathbf{R}}{ds}\cdot\frac{d\mathbf{R}}{ds} & \frac{d\mathbf{R}}{ds}\cdot\frac{d\mathbf{R}}{d\xi}\\ \frac{d\mathbf{R}}{d\xi}\cdot\frac{d\mathbf{R}}{ds} & \frac{d\mathbf{R}}{d\xi}\cdot\frac{d\mathbf{R}}{d\xi}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{d\mathbf{R}_o}{ds}\cdot\frac{d\mathbf{R}_o}{ds} & \frac{d\mathbf{R}_o}{ds}\cdot\frac{d\mathbf{R}_o}{d\xi}\\ \frac{d\mathbf{R}_o}{d\xi}\cdot\frac{d\mathbf{R}_o}{ds} & \frac{d\mathbf{R}_o}{d\xi}\cdot\frac{d\mathbf{R}_o}{d\xi}\end{bmatrix}\right\} \tag{2.23}$$

şeklinde hesaplanacaktır. Burada bölüm 2.2.1. deki büyüklükler kullanılarak

$$\begin{aligned}&\frac{d\mathbf{R}}{ds}\cdot\frac{d\mathbf{R}}{ds}=(1+\varepsilon)^2(1-\kappa\xi)^2 && \frac{d\mathbf{R}_O}{ds}\cdot\frac{d\mathbf{R}_O}{ds}=(1-\kappa_O\xi)^2\\ &\frac{d\mathbf{R}}{ds}\cdot\frac{d\mathbf{R}}{d\xi}=\frac{d\mathbf{R}}{d\xi}\cdot\frac{d\mathbf{R}}{dS}=0 && \frac{d\mathbf{R}_O}{ds}\cdot\frac{d\mathbf{R}_O}{d\xi}=\frac{d\mathbf{R}_O}{d\xi}\cdot\frac{d\mathbf{R}_O}{ds}=0\\ &\frac{d\mathbf{R}}{d\xi}\cdot\frac{d\mathbf{R}}{d\xi}=1 && \frac{d\mathbf{R}_O}{d\xi}\cdot\frac{d\mathbf{R}_O}{d\xi}=1\end{aligned} \tag{2.24}$$

şeklinde bulunur. Buna göre

$$\varepsilon_t=\frac{1}{2}\left[(1+\varepsilon)^2(1-\kappa\xi)^2-(1-\kappa_o\xi)^2\right] \tag{2.25}$$

$$\varepsilon_{tn}=\varepsilon_{nt}=\varepsilon_n=0 \tag{2.26}$$

şeklindedir. Sıfırdan farklı olan ε_t ifadesi açılıp düzenlenirse

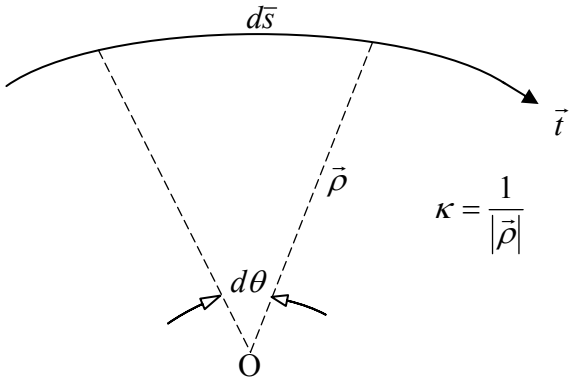
$$\varepsilon_t=\frac{1}{2}\left[(1+\varepsilon)^2-1\right]-\xi\left[\kappa(1+\varepsilon)^2-\kappa_o\right]+\frac{1}{2}\xi^2\left[\kappa^2(1+\varepsilon)^2-{\kappa_0}^2\right] \tag{2.27}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada ξ^2 teriminin çarpanı çok küçük kabul edildiğinden ihmal edilmiştir. Buna göre

$$\varepsilon_t\cong\frac{1}{2}\left[(1+\varepsilon)^2-1\right]-\xi\left[\kappa(1+\varepsilon)^2-\kappa_o\right] \tag{2.28}$$

biçiminde kullanılmıştır.

Burada $\kappa = \dfrac{d\theta}{d\bar{s}}$ şeklinde çubuğun eğriliğidir. $d\theta$ açısı aşağıdaki şekil 2.4'de gösterilmiştir.



Şekil 2.4 : Yer ve Şekil Değişimi Yapmış Çubukta Eğrilik

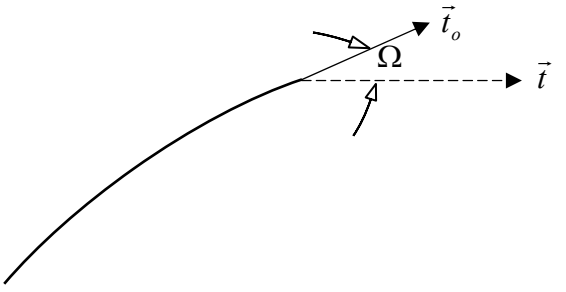
Burada,

$$\frac{d\theta}{d\bar{s}} = \kappa = \frac{\bar{w}''(1+\bar{u}') - \bar{u}''\bar{w}'}{(1+\varepsilon)^3} + \frac{\kappa_o}{1+\varepsilon} \qquad \textbf{(2.29)}$$

Denklem (2.17) ve (2.29)'da ki bağıntıları denklem (2.28) de yerine koyarsak ve düzenlersek

$$\varepsilon_t = \bar{u}' + \frac{1}{2}\bar{u}'^2 + \frac{1}{2}\bar{w}'^2 - \xi\left[\ \frac{\bar{w}''(1+\bar{u}')}{1+\varepsilon} - \frac{\bar{u}''\bar{w}'}{1+\varepsilon} + \kappa_o\varepsilon\ \right] \qquad \textbf{(2.30)}$$

şeklinde elde ederiz.



Şekil 2.5 : Ω Açısının Gösterimi

Yukarıdaki Şekil 2.5'de $\vec{t}_o$ teğet vektörü ile şekil değiştirmiş konumdaki $\vec{t}$ teğet vektörleri arasındaki açıyı Ω ile gösterirsek denklem (2.30)'u elde ederiz.

$$\cos\Omega = \frac{1+\overline{u}'}{1+\varepsilon},\ \sin\Omega = \frac{\overline{w}'}{1+\varepsilon} \tag{2.30}$$

2.2.4 İç Kuvvet – Yer Değiştirme Bağıntıları

Bünye bağıntısı olarak

$$\sigma = E\varepsilon_t \tag{2.31}$$

lineer teori göz önüne alınmaktadır. Buna göre

$$N = \iint \sigma dA = E\iint \varepsilon_t dA \tag{2.32}$$

$$M = -\iint \xi\sigma dA = -E\iint \xi\varepsilon_t dA \tag{2.33}$$

tanımlarını kullanarak (2.32) ifadesi

$$N = E\iint_F (\overline{u}' + \frac{1}{2}\overline{u}'^2 + \frac{1}{2}\overline{w}'^2)\, dA \tag{2.34}$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadenin integrali alınırsa, (2.32) ifadesi

$$N = EA(\overline{u}' + \frac{1}{2}\overline{u}'^2 + \frac{1}{2}\overline{w}'^2) \tag{2.35}$$

olarak elde edilir. Ve (2.33) ifadesi

$$M = -E\iint_F \left\{ -\xi^2 \left[\frac{\overline{w}''(1+\overline{u}')}{1+\varepsilon} - \frac{\overline{u}''\overline{w}'}{1+\varepsilon} + \kappa_o\varepsilon \right] \right\} dA \tag{2.36}$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadenin integrali alınırsa (2.33) ifadesi

$$M = EI\left[\frac{\overline{w}''(1+\overline{u}')}{1+\varepsilon} - \frac{\overline{u}''\overline{w}'}{1+\varepsilon} + \kappa_o\varepsilon \right] \tag{2.37}$$

olarak bulunur.

2.2.5 Denge Denklemlerinin Elde Edilmesi

Denge denklemleri Virtüel iş denklemi kullanılarak elde edilecektir. Buna göre

$$\iiint \sigma \delta \varepsilon_t dV - \int q_t \delta u ds - \int q_n \delta w ds + S.T = 0 \tag{2.38}$$

olmalıdır. Burada ε_t ' nin varyasyonu alınırsa,

$$\begin{aligned}\delta\varepsilon_t = {} & \delta\overline{u}' + \overline{u}'\delta\overline{u}' + \overline{w}'\delta\overline{w}' - \xi[\frac{(1+\overline{u}')}{1+\varepsilon}\delta\overline{w}'' + \frac{\overline{w}''}{1+\varepsilon}\delta\overline{u}' - \frac{(1+\overline{u}')^2\overline{w}''}{(1+\varepsilon)^3}\delta\overline{u}' - \\ & - \frac{\overline{w}'\overline{w}''(1+\overline{u}')}{(1+\varepsilon)^3}\delta\overline{w}' - \frac{\overline{w}'}{1+\varepsilon}\delta\overline{u}'' - \frac{\overline{u}''}{1+\varepsilon}\delta\overline{w}' + \frac{(1+\overline{u}')\overline{u}''\overline{w}'}{(1+\varepsilon)^3}\delta\overline{u}' + \frac{\overline{w}'^2\overline{u}''}{(1+\varepsilon)^3}\delta\overline{w}' + \\ & + \kappa_o\frac{(1+\overline{u}')}{1+\varepsilon}\delta\overline{u}' + \kappa_o\frac{\overline{w}'}{1+\varepsilon}\delta\overline{w}']\end{aligned} \tag{2.39}$$

olur ve (2.32), (2.33) ve (2.39) ifadeleri (2.38) bağıntısında yerlerine konursa ve oluşan denklemler düzenlenirse denge denklemleri

$\mathbf{t}_o$ doğrultusunda:

$$\begin{aligned}& -\frac{d}{ds}\left[N(1+\overline{u}') + \frac{dM}{ds}\frac{\overline{w}'}{1+\varepsilon} + M\frac{\overline{w}''}{1+\varepsilon} + \kappa_o M\frac{(1+\overline{u}')}{1+\varepsilon}\right] + \\ & + \kappa_o\left[N\overline{w}' - \frac{dM}{ds}\frac{(1+\overline{u}')}{1+\varepsilon} - M\frac{\overline{u}''}{1+\varepsilon} + \kappa_o M\frac{\overline{w}'}{1+\varepsilon}\right] - q_t = 0\end{aligned} \tag{2.40}$$

$\mathbf{n}_o$ doğrultusunda:

$$\begin{aligned}& -\frac{d}{ds}\left[N\overline{w}' - \frac{dM}{ds}\frac{(1+\overline{u}')}{1+\varepsilon} - M\frac{\overline{u}''}{1+\varepsilon} + \kappa_o M\frac{\overline{w}'}{1+\varepsilon}\right] + \\ & + \kappa_o\left[N(1+\overline{u}') + \frac{dM}{ds}\frac{\overline{w}'}{1+\varepsilon} + M\frac{\overline{w}''}{1+\varepsilon} + \kappa_o M\frac{(1+\overline{u}')}{1+\varepsilon}\right] - q_n = 0\end{aligned} \tag{2.41}$$

şeklinde ifade edilebilir.

2.2.6 Bilineer Fonksiyonun Elde Edilmesi

Sınır Koşulları :

Sınır koşullarının genel yapısı aşağıdaki gibi yazılabilir.

Dinamik S.K. : $\sigma - \hat{\sigma} = 0$, $\sigma = (N, T, M)$ **(2.42)**

Geometrik S.K. : $\varepsilon - \hat{\varepsilon} = 0$, $\varepsilon = (u, w, w')$ **(2.43)**

(2.42) ve (2.43) ifadelerindeki şapkalı terimler o terimin sınırdaki bilinen değeridir. Geometrik ve dinamik sınır koşullarının açık ifadeleri bu çalışmada verilmiştir.

Denge denklemleri, bünye bağıntıları ve sınır koşulları birlikte alan denklemlerini gösterirler. Alan denklemleri aşağıdaki gibi bir operatör olarak yazılabilir.

$$P(u) = Lu - f \qquad \textbf{(2.44)}$$

Bilindiği gibi, eğer P(u) potansiyel ise K(u) diye gradyanı P operatörü olan aşağıdaki gibi K(u) diye bir fonksiyon bulunur.

$$K(u) = \int_0^1 \left\langle P(u_0 + s(u - u_0), u - u_0 \right\rangle ds + K_0 \qquad \textbf{(2.45)}$$

$K_0 = K(u_0)$ ve "s" gerçel bir parametredir.

Bir P(u) operatörünün potansiyel olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\langle dP(u;\eta), \zeta \rangle = \langle dP(u;\zeta), \eta \rangle \qquad \textbf{(2.46)}$$

dır.

Yani; bilinear fonksiyonel $\langle dP(u;\eta), \zeta \rangle$ her u için η ve ζ ya göre simetrik olmalıdır. Bu koşul, sınır terimlerinin yapısının elde edilmesinde de oldukça önemli bir rol oynamaktadır.

Yukarıdaki açıklamaya göre $dP(u;\eta)$ ve $dP(u;\zeta)$, η ve ζ yönlerinde P(u) operatörünün Gateaux diferansiyelleridir. Bir operatörün Gateaux diferansiyeli,

$$dP(u;\eta) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \left[P(u + \tau\eta) - P(u) \right] \tag{2.47}$$

olarak tanımlanır. Burada $\tau \in R$ dır. Bu denklemin açık hali

$$dP(u;\eta) = -\frac{d}{ds}\overset{+}{N} - \frac{d}{ds}(\overset{+}{N}\overline{u}' + N\overset{+}{\overline{u}}') - \frac{d}{ds}\Big[\frac{\overset{+}{M}\overline{w}''}{1+\varepsilon} + \frac{M\overset{+}{\overline{w}}''}{1+\varepsilon} - \frac{M\overline{w}''\cos\Omega}{(1+\varepsilon)^2}\overset{+}{\overline{u}}' - \frac{M\overline{w}''\sin\Omega}{(1+\varepsilon)^2}\overset{+}{\overline{w}}' \Big] -$$

$$- \frac{d}{ds}\Big[\frac{d\overset{+}{M}}{ds}\sin\Omega + \frac{dM}{ds}\frac{\cos^2\Omega}{1+\varepsilon}\overset{+}{\overline{w}}' - \frac{dM}{ds}\frac{\cos\Omega\sin\Omega}{1+\varepsilon}\overset{+}{\overline{u}}' \Big] - \frac{d}{ds}\Big[\kappa_o \overset{+}{M}\cos\Omega$$

$$- \kappa_o M\frac{\cos\Omega\sin\Omega}{1+\varepsilon}\overset{+}{\overline{w}}' + \kappa_o M\frac{\sin^2\Omega}{1+\varepsilon}\overset{+}{\overline{u}}' \Big] + \kappa_o\Big[\overset{+}{N}\overline{w}' + N\overset{+}{\overline{w}}' - \frac{d\overset{+}{M}}{ds}\cos\Omega + \frac{dM}{ds}\frac{\cos\Omega\sin\Omega}{1+\varepsilon}\overset{+}{\overline{w}}'$$

$$- \frac{dM}{ds}\frac{\sin^2\Omega}{1+\varepsilon}\overset{+}{\overline{u}}' - \frac{\overset{+}{M}\overline{u}''}{1+\varepsilon} - \frac{M\overset{+}{\overline{u}}''}{1+\varepsilon} + \frac{M\overline{u}''\cos\Omega}{(1+\varepsilon)^2}\overset{+}{\overline{u}}' + \frac{M\overline{u}''\sin\Omega}{(1+\varepsilon)^2}\overset{+}{\overline{w}}' + \kappa_o\overset{+}{M}\sin\Omega + \kappa_o M\frac{\cos^2\Omega}{1+\varepsilon}\overset{+}{\overline{w}}'$$

$$- \kappa_o M\frac{\cos\Omega\sin\Omega}{1+\varepsilon}\overset{+}{\overline{u}}' \Big]$$

$$- \frac{d}{ds}\Big(\overset{+}{N}\overline{w}' + N\overset{+}{\overline{w}}' \Big) + \frac{d}{ds}\Big[\frac{d\overset{+}{M}}{ds}\cos\Omega - \frac{dM}{ds}\frac{\cos\Omega\sin\Omega}{1+\varepsilon}\overset{+}{\overline{w}}' + \frac{dM}{ds}\frac{\sin^2\Omega}{1+\varepsilon}\overset{+}{\overline{u}}' \Big] +$$

$$+ \frac{d}{ds}\Big[\frac{\overset{+}{M}\overline{u}''}{1+\varepsilon} + \frac{M\overset{+}{\overline{u}}''}{1+\varepsilon} - \frac{M\overline{u}''\cos\Omega}{(1+\varepsilon)^2}\overset{+}{\overline{u}}' - \frac{M\overline{u}''\sin\Omega}{(1+\varepsilon)^2}\overset{+}{\overline{w}}' \Big] - \frac{d}{ds}\Big(\kappa_o\overset{+}{M}\sin\Omega \Big) -$$

$$- \frac{d}{ds}\Big[\kappa_o M\frac{\cos^2\Omega}{1+\varepsilon}\overset{+}{\overline{w}}' - \kappa_o M\frac{\cos\Omega\sin\Omega}{1+\varepsilon}\overset{+}{\overline{u}}' \Big] - \kappa_o\Big[\overset{+}{N} + \overset{+}{N}\overline{u}' + N\overset{+}{\overline{u}}' + \frac{\overset{+}{M}\overline{w}''}{1+\varepsilon} \tag{2.48}$$

$$+ \frac{M\overset{+}{\overline{w}}''}{1+\varepsilon} - \frac{M\overline{w}''\cos\Omega}{(1+\varepsilon)^2}\overset{+}{\overline{u}}' - \frac{M\overline{w}''\sin\Omega}{(1+\varepsilon)^2}\overset{+}{\overline{w}}' + \frac{d\overset{+}{M}}{ds}\sin\Omega + \frac{dM}{ds}\frac{\cos^2\Omega}{1+\varepsilon}\overset{+}{\overline{w}}'$$

$$- \frac{dM}{ds}\frac{\cos\Omega\sin\Omega}{1+\varepsilon}\overset{+}{\overline{u}}' + \kappa_o\overset{+}{M}\cos\Omega - \kappa_o M\frac{\cos\Omega\sin\Omega}{1+\varepsilon}\overset{+}{\overline{w}}' + \kappa_o M\frac{\sin^2\Omega}{1+\varepsilon}\overset{+}{\overline{u}}' \Big]$$

$$- \frac{\overset{+}{N}}{EA} + \overset{+}{\overline{u}}'\overline{u}' + \overset{+}{\overline{u}}'\overline{u}' + \overset{+}{\overline{w}}'\overline{w}'$$

$$-\frac{\overset{+}{M}}{EI}+\overset{+}{\overline{w}}''\cos\Omega-\overline{w}''\frac{\cos\Omega\sin\Omega}{1+\varepsilon}\overset{+}{\overline{w}}''+\overline{w}''\frac{\sin^2\Omega}{1+\varepsilon}\overset{+}{\overline{u}}'-\overset{+}{\overline{u}}''\sin\Omega-\overline{u}''\frac{\cos^2\Omega}{1+\varepsilon}\overset{+}{\overline{w}}'+$$

$$+\overline{u}''\frac{\cos\Omega\sin\Omega}{1+\varepsilon}\overset{+}{\overline{u}}'+\kappa_o\overset{+}{\overline{u}}'\cos\Omega+\kappa_o\overset{+}{\overline{w}}'\sin\Omega$$

şeklinde ifade edilir.

Buradan çeşitli hesaplamalar sonucunda bilineer fonksiyon $\langle dP(u;\eta),\zeta\rangle$ bulunur.

Problemin gerçek sınır koşulları sınır terimlerini yok edecek yapıda olmalıdır. Bu ifadeden sınır koşulları

$$\begin{aligned}\langle\delta,T\rangle_\varepsilon \equiv &-\langle u,N\rangle_\varepsilon-\langle u,N\overline{u}'\rangle_\varepsilon-\langle u,\frac{M\overline{w}''}{1+\varepsilon}\rangle_\varepsilon-\langle u,\frac{dM}{ds}\sin\Omega\rangle_\varepsilon-\langle u,\kappa_o M\cos\Omega\rangle_\varepsilon-\\&-\langle w,N\overline{w}'\rangle_\varepsilon+\langle w,\frac{M\overline{u}''}{1+\varepsilon}\rangle_\varepsilon+\langle w,\frac{dM}{ds}\cos\Omega\rangle_\varepsilon-\langle w,\kappa_o M\sin\Omega\rangle_\varepsilon\end{aligned} \tag{2.49}$$

$$\langle\Omega,M\rangle_\varepsilon\equiv-\langle\Omega,M(1+\varepsilon)\rangle_\varepsilon\equiv\langle\overline{u}',M\sin\Omega\rangle_\varepsilon-\langle\overline{w}',M\cos\Omega\rangle_\varepsilon \tag{2.50}$$

$$\begin{aligned}\langle T,\delta\rangle_\sigma\equiv&\langle N,u\rangle_\sigma+\langle N\overline{u}',u\rangle_\sigma+\langle\frac{M\overline{w}''}{1+\varepsilon},u\rangle_\sigma+\langle\frac{dM}{ds}\sin\Omega,u\rangle_\sigma+\langle\kappa_o M\cos\Omega,u\rangle_\sigma\\&+\langle N\overline{w}',w\rangle_\sigma-\langle\frac{M\overline{u}''}{1+\varepsilon},w\rangle_\sigma-\langle\frac{dM}{ds}\cos\Omega,w\rangle_\sigma+\langle\kappa_o M\sin\Omega,w\rangle_\sigma\end{aligned} \tag{2.51}$$

$$\langle M,\Omega\rangle_\sigma\equiv\langle M(1+\varepsilon),\Omega\rangle_\sigma\equiv-\langle M\sin\Omega,\overline{u}'\rangle_\sigma+\langle M\cos\Omega,\overline{w}'\rangle_\sigma \tag{2.52}$$

şeklinde ifade edilir.

2.2.7 Fonksiyonelin Elde Edilmesi

Gradyanı potansiyel olduğu gösterilen P operatörünü veren $I(u)$ fonksiyoneli

$$I(u)=\int_0^1 \langle P(u_o+\tau(u-u_o)),u-u_o\rangle d\tau + K_o \tag{2.53}$$

biçiminde elde edilecektir. Burada $K_o = K(u_o)$ ve τ gerçel parametrelerdir ve genel olarak, $K_o = 0$, $u_o = 0$ alınırlar. Buna göre $I(u)$,

$$\begin{aligned}
I(\mathbf{u}) = &-\int_0^1 \langle \frac{d}{ds}(\tau N),u\rangle d\tau - \int_0^1 \langle \frac{d}{ds}(\tau^2 N\bar{u}'),u\rangle d\tau - \int_0^1 \langle \frac{d}{ds}\Big[\frac{\tau^2 M\bar{w}''}{1+\varepsilon(\tau)}\Big],u\rangle d\tau - \int_0^1 \langle \frac{d}{ds}\Big[\frac{d(\tau M)}{ds}\frac{\tau\bar{w}'}{1+\varepsilon(\tau)}\Big],u\rangle d\tau - \\
&-\int_0^1 \langle \frac{d}{ds}\Big[\kappa_o \tau M\frac{(1+\tau\bar{u}')}{1+\varepsilon(\tau)}\Big],u\rangle d\tau + \int_0^1 \langle \kappa_o \tau^2 N\bar{w}',u\rangle d\tau - \int_0^1 \langle \kappa_o \frac{d(\tau M)}{ds}\frac{(1+\tau\bar{u}')}{1+\varepsilon(\tau)},u\rangle d\tau - \int_0^1 \langle \kappa_o \frac{\tau^2 M\bar{u}''}{1+\varepsilon(\tau)},u\rangle d\tau + \\
&+\int_0^1 \langle \kappa_o{}^2 \tau M\frac{\tau\bar{w}'}{1+\varepsilon(\tau)},u\rangle d\tau - \int_0^1 \langle \frac{d}{ds}(\tau^2 N\bar{w}'),w\rangle d\tau + \int_0^1 \langle \frac{d}{ds}\Big[\frac{d(\tau M)}{ds}\frac{(1+\tau\bar{u}')}{1+\varepsilon(\tau)}\Big],w\rangle d\tau + \int_0^1 \langle \frac{d}{ds}\Big[\frac{\tau^2 M\bar{u}''}{1+\varepsilon(\tau)}\Big],w\rangle d\tau - \\
&-\int_0^1 \langle \frac{d}{ds}\Big[\kappa_o \tau M\frac{\tau\bar{w}'}{1+\varepsilon(\tau)}\Big],w\rangle d\tau - \int_0^1 \langle \kappa_o \tau N,w\rangle d\tau - \int_0^1 \langle \kappa_o \tau^2 N\bar{u}',w\rangle d\tau - \int_0^1 \langle \kappa_o \frac{\tau^2 M\bar{w}''}{1+\varepsilon(\tau)},w\rangle d\tau - \\
&-\int_0^1 \langle \kappa_o \frac{d(\tau M)}{ds}\frac{\tau\bar{w}'}{1+\varepsilon(\tau)},w\rangle d\tau - \int_0^1 \langle \kappa_o{}^2 \tau M\frac{(1+\tau\bar{u}')}{1+\varepsilon(\tau)},w\rangle d\tau - \int_0^1 \langle q_t,u\rangle d\tau - \int_0^1 \langle q_n,w\rangle d\tau - \\
&-\int_0^1 \langle \frac{\tau N}{EA},N\rangle d\tau + \int_0^1 \langle \tau\bar{u}',N\rangle d\tau + \frac{1}{2}\int_0^1 \langle \tau^2\bar{u}'^2,N\rangle d\tau + \frac{1}{2}\int_0^1 \langle \tau^2\bar{w}'^2,N\rangle d\tau - \\
&-\int_0^1 \langle \frac{\tau M}{EI},M\rangle d\tau + \int_0^1 \langle \tau\bar{w}''\frac{(1+\tau\bar{u}')}{1+\varepsilon(\tau)},M\rangle d\tau - \int_0^1 \langle \tau\bar{u}''\frac{\tau\bar{w}'}{1+\varepsilon(\tau)},M\rangle d\tau + \int_0^1 \langle \kappa_o\varepsilon(\tau),M\rangle d\tau
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Olarak yazılabilir. Burada

$$1+\varepsilon(\tau) = \sqrt{(1+\tau\bar{u}')^2 + \tau^2\bar{w}'^2} \tag{2.55}$$

dır. Bu ifadede bazı terimlere kısmi türev uygulanıp, kapalı formdaki terimler dışındaki terimler τ üzerinde integre edilip, gerekli düzenlemeler yapılarak fonksiyonel

$$
\begin{aligned}
I(\mathbf{u}) = {} & \langle N, \overline{u}' \rangle + \frac{1}{2}\langle N\overline{u}', \overline{u}' \rangle + \frac{1}{2}\langle N\overline{w}', \overline{w}' \rangle - \frac{1}{2}\langle \frac{N}{EA}, N \rangle - \frac{1}{2}\langle \frac{M}{EI}, M \rangle - \langle q_t, u \rangle - \langle q_n, w \rangle + \\
& - \langle M \frac{\overline{w}'}{1+\varepsilon}, \overline{u}'' \rangle + \langle M \frac{(1+\overline{u}')}{1+\varepsilon}, \overline{w}'' \rangle + \langle \kappa_o \varepsilon, M \rangle - \\
& - \langle (u - \hat{u}), N \rangle_\varepsilon + \langle (w - \hat{w}), \frac{dM}{ds} \rangle_\varepsilon - \langle (u - \hat{u}), \kappa_o M \rangle_\varepsilon - \\
& - \langle (\overline{w}' - \hat{\overline{w}}'), M \rangle_\varepsilon - \\
& - \langle \hat{N}, u \rangle_\sigma + \langle \frac{d\hat{M}}{ds}, w \rangle_\sigma - \\
& - \langle \hat{M}, \overline{w}' \rangle_\sigma
\end{aligned}
\tag{2.56}
$$

şeklinde bulunur.

(2.56) ifadesinin içindeki $< M \dfrac{(1+\overline{u}')}{1+\varepsilon}, \overline{w}'' >$ teriminin

$$
\begin{aligned}
\langle M \frac{(1+\overline{u}')}{1+\varepsilon}, \overline{w}'' \rangle = {} & \langle M \frac{1}{1+\varepsilon}, \overline{w}'' \rangle + \langle M \frac{\overline{u}'}{1+\varepsilon}, \overline{w}'' \rangle = \\
& \langle M \frac{1}{1+\varepsilon}, \overline{w}' \rangle_0 - \langle \frac{dM}{ds} \frac{1}{1+\varepsilon}, \overline{w}' \rangle - \langle M \frac{d}{ds} \Big[\frac{1}{1+\varepsilon} \Big], \overline{w}' \rangle + \langle M \frac{\overline{u}'}{1+\varepsilon}, \overline{w}'' \rangle
\end{aligned}
\tag{2.57}
$$

şeklinde olduğu göz önüne alınınca fonksiyonel,

$$
\begin{aligned}
I(\mathbf{u}) = {} & \langle N, \overline{u}' \rangle + \frac{1}{2}\langle N\overline{u}', \overline{u}' \rangle + \frac{1}{2}\langle N\overline{w}', \overline{w}' \rangle - \frac{1}{2}\langle \frac{N}{EA}, N \rangle - \frac{1}{2}\langle \frac{M}{EI}, M \rangle - \langle q_t, u \rangle - \langle q_n, w \rangle + \\
& - \langle M \frac{\overline{w}'}{1+\varepsilon}, \overline{u}'' \rangle + \langle M \frac{\overline{u}'}{1+\varepsilon}, \overline{w}'' \rangle - \langle \frac{dM}{ds} \frac{1}{1+\varepsilon}, \overline{w}' \rangle - \langle M \frac{d}{ds} \Big[\frac{1}{1+\varepsilon} \Big], \overline{w}' \rangle + \langle \kappa_o \varepsilon, M \rangle - \\
& - \langle (u - \hat{u}), N \rangle_\varepsilon + \langle (w - \hat{w}), \frac{dM}{ds} \rangle_\varepsilon - \langle (u - \hat{u}), \kappa_o M \rangle_\varepsilon - \\
& + \langle \hat{\overline{w}}', M \rangle_\varepsilon - \\
& - \langle \hat{N}, u \rangle_\sigma + \langle \frac{d\hat{M}}{ds}, w \rangle_\sigma - \\
& + \langle (M \frac{1}{1+\varepsilon} - \hat{M}), \overline{w}' \rangle_\sigma
\end{aligned}
\tag{2.58}
$$

şeklinde yazılabilir.

Bu çalışmada doğru eksenli çubuk problemleri ele alındığından dolayı, eğri eksenli çubuklar için elde edilmiş olan (2.57) de $\kappa_0 = 0$ alınarak doğru eksenli problemlerin çözümüme uyarlanmıştır. Dolayısıyla

$$
\overline{u}' = u', \ \overline{w}' = w' \tag{2.59}
$$

olur.

2.2.8 Fonksiyonelin Özel Yapıları

Doğru eksenli çubuklarda sonlu yer değiştirme kapsamında analiz yaparken doğrusal olmayan (nonlineer) terimlerin etkisini incelemek için fonksiyonelin özel yapıları ele alınmıştır. Bu özel yapıların elde edilmesinde aşağıdaki kabuller yapılmıştır

1- Birinci Özel Yapı :

Bu yapıda $\kappa \cong \overline{w}''$ şeklinde lineer yapının eğriliği alınır. Bu ifade de;

$$\overline{u}'^2 \cong 0,\ \overline{u}'' \cong 0,\ \frac{1}{1+\varepsilon} \cong 1 \tag{2.60}$$

kabulleri yapılmıştır. Bu durumda fonksiyonel,

$$\begin{aligned} I_1(u) =& < N, \overline{u}' > + \frac{1}{2} < N\overline{w}', \overline{w}' > - \frac{1}{2} < \frac{N}{EA}, N > - \frac{1}{2} < \frac{M}{EI}, M > - < q_t, u > - \\ & - < q_n, w > - < \frac{dM}{ds}, \overline{w}' > - \\ & - < (u-\hat{u}), N >_{\varepsilon} + < (w-\hat{w}), \frac{dM}{ds} >_{\varepsilon} - < \overline{w}', M >_{\varepsilon} - \\ & - < \hat{N}, u >_{\sigma} + < \frac{d\hat{M}}{ds}, w >_{\sigma} + < (M-\hat{M}), \overline{w}' > \end{aligned} \tag{2.61}$$

biçiminde yazılabilir.

2- İkinci Özel Yapı :

Bu yapıda $\varepsilon^2 \cong 0$ kabulü yaparız.

Öncelikle (2.17) ifadesinin karesini alırsak

$$1+\varepsilon^2+2\varepsilon = 1+\overline{u}'^2+2\overline{u}'+\overline{w}'^2 \Rightarrow \therefore \varepsilon = \overline{u}' + \frac{1}{2}\overline{u}'^2 + \frac{1}{2}\overline{w}'^2 \tag{2.62}$$

olur. Ardından $\frac{1}{1+\varepsilon}$ ifadesini seriye açtığımıza

$$\frac{1}{1+\varepsilon} \cong 1-\varepsilon+\varepsilon^2-\ldots \Rightarrow \therefore \frac{1}{1+\varepsilon} \cong 1-\varepsilon \qquad \textbf{(2.63)}$$

olur. (2.62) ifadesini (2.63) ifadesinde yerine koyarsak

$$\frac{1}{1+\varepsilon} \cong 1-\overline{u}'-\frac{1}{2}\overline{u}'^2-\frac{1}{2}\overline{w}'^2 \qquad \textbf{(2.64)}$$

olarak buluruz.

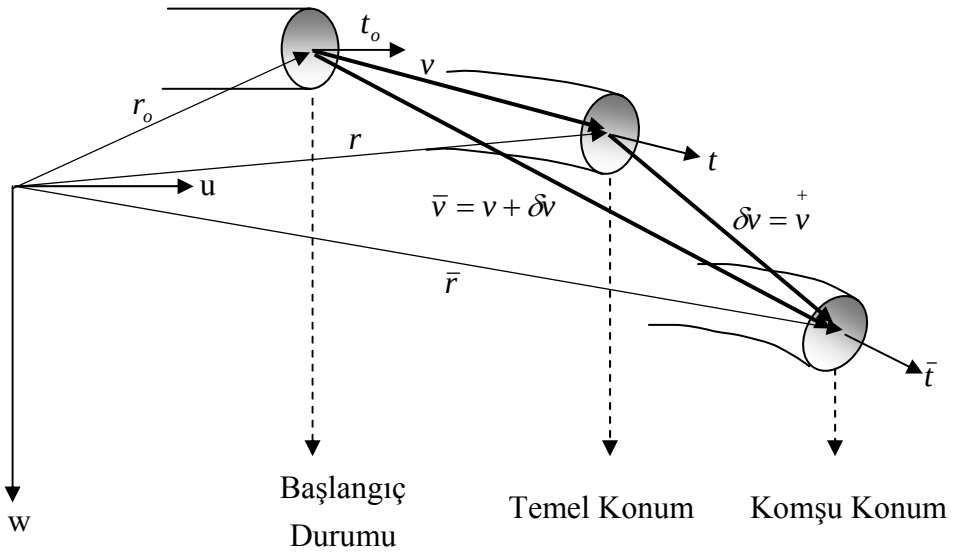
Bu fonksiyonda, (2.58) deki ifadeyi $\frac{1}{1+\varepsilon}$ teriminin yeni yapısı ile değerlendiririz.

3. ÇÖZÜM YÖNTEMİ

Fonksiyonelin çözümlerinin araştırılması sırasında; problemin nonlineer yapısını lineerleştirmek için, artımsal yapıdan yararlanılarak sonlu eleman analizi yapılmıştır.

3.1 Artımsal Formülasyon

Çubuğun şekil değiştirmemiş yani herhangi bir yüklemenin etkisinde bulunmadığı durum, Başlangıç Durum (Initial State) dur. Herhangi bir dinamik yüklemenin ardından meydana gelen hareket ise Temel Konum (Fundamental Motion) olarak ifade edilir. Bu durumdayken herhangi keyfi bir zamanda herhangi bir etki uygulanırsa bu Komşu Konumu "Neighbouring Motion" meydana getirir.



Şekil 3.1 : Artımsal İfadenin Gösterimi

Fonksiyonelin artımsal yapısındaki büyüklükler,

$$\bar{u}' \to \bar{u}' + \delta\bar{u}' \to \bar{u}' + \overset{+}{\bar{u}}', \qquad \bar{w}' \to \bar{w}' + \delta\bar{w}' \to \bar{w}' + \overset{+}{\bar{w}}' \tag{3.1}$$

$$N \to N + \delta N \to N + \overset{+}{N}, \qquad M \to M + \delta M \to M + \overset{+}{M} \tag{3.2}$$

şeklinde ifade edilerek $I(u)$ fonksiyonunda yerlerine konulur. Bu ifadede

$$\frac{\bar{w}'}{1+\varepsilon}=\sin\Omega \text{ ve } \frac{1+\bar{u}'}{1+\varepsilon}=\cos\Omega \tag{3.3}$$

gösterimleri kullanılmış ve

$$\delta\left[\frac{1}{1+\varepsilon}\right]=-\frac{1}{1+\varepsilon}\left[\frac{\cos\Omega}{1+\varepsilon}\overset{+}{\bar{u}}'+\frac{\sin\Omega}{1+\varepsilon}\overset{+}{\bar{w}}'\right]$$

$$\overset{+}{\varepsilon}=\cos\Omega\,\overset{+}{\bar{u}}'+\sin\Omega\,\overset{+}{\bar{w}}' \tag{3.4}$$

$$\overset{+}{\Omega}=\frac{\cos\Omega}{1+\varepsilon}\overset{+}{\bar{w}}'-\frac{\sin\Omega}{1+\varepsilon}\overset{+}{\bar{u}}'$$

şeklinde ifadele edilmiştir.

Bu yapıları göz önüne alırsak komşu konumda fonksiyonel

$$\begin{aligned}
I+\delta I=&+\langle(N+\overset{+}{N}),(\bar{u}'+\overset{+}{\bar{u}}')\rangle+\frac{1}{2}\langle(N+\overset{+}{N})(\bar{u}'+\overset{+}{\bar{u}}'),(\bar{u}'+\overset{+}{\bar{u}}')\rangle+\frac{1}{2}\langle(N+\overset{+}{N})(\bar{w}'+\overset{+}{\bar{w}}'),(\bar{w}'+\overset{+}{\bar{w}}')\rangle-\\
&-\frac{1}{2}\langle\frac{(N+\overset{+}{N})}{EA},(N+\overset{+}{N})\rangle-\frac{1}{2}\langle\frac{(M+\overset{+}{M})}{EI},(M+\overset{+}{M})\rangle-\langle q_t,(u+\overset{+}{u})\rangle-\langle q_n,(w+\overset{+}{w})\rangle+\\
&-\langle(M+\overset{+}{M})(\bar{w}'+\overset{+}{\bar{w}}')\left\{\frac{1}{1+\varepsilon}+\delta\left[\frac{1}{1+\varepsilon}\right]+\frac{1}{(1+\varepsilon)^3}(\overset{+}{\varepsilon})^2-\frac{1}{2(1+\varepsilon)}(\overset{+}{\Omega})^2\right\},(\bar{u}''+\overset{+}{\bar{u}}'')\rangle+\\
&+\langle(M+\overset{+}{M})(\bar{u}'+\overset{+}{\bar{u}}')\left\{\frac{1}{1+\varepsilon}+\delta\left[\frac{1}{1+\varepsilon}\right]+\frac{1}{(1+\varepsilon)^3}(\overset{+}{\varepsilon})^2-\frac{1}{2(1+\varepsilon)}(\overset{+}{\Omega})^2\right\},(\bar{w}''+\overset{+}{\bar{w}}'')\rangle-\\
&-\langle(M+\overset{+}{M})\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{1+\varepsilon}+\delta\left[\frac{1}{1+\varepsilon}\right]+\frac{1}{(1+\varepsilon)^3}(\overset{+}{\varepsilon})^2-\frac{1}{2(1+\varepsilon)}(\overset{+}{\Omega})^2\right\},(\bar{w}'+\overset{+}{\bar{w}}')\rangle-\\
&-\langle\frac{d}{ds}(M+\overset{+}{M})\left\{\frac{1}{1+\varepsilon}+\delta\left[\frac{1}{1+\varepsilon}\right]+\frac{1}{(1+\varepsilon)^3}(\overset{+}{\varepsilon})^2-\frac{1}{2(1+\varepsilon)}(\overset{+}{\Omega})^2\right\},(\bar{w}'+\overset{+}{\bar{w}}')\rangle+\\
&+\langle\kappa_o\left[\varepsilon+\overset{+}{\varepsilon}+\frac{1}{2}(1+\varepsilon)(\overset{+}{\Omega})^2\right],(M+\overset{+}{M})\rangle-\\
&-\langle\left[(u+\overset{+}{u})-\hat{u}\right],(N+\overset{+}{N})\rangle_\varepsilon+\langle\left[(w+\overset{+}{w})-\hat{w}\right],\frac{d}{ds}(M+\overset{+}{M})\rangle_\varepsilon-\langle\left[(u+\overset{+}{u})-\hat{u}\right],\kappa_0(M+\overset{+}{M})\rangle_\varepsilon+\\
&+\langle\hat{\bar{w}}',(M+\overset{+}{M})\rangle_\varepsilon-\\
&-\langle\hat{N},(u+\overset{+}{u})\rangle_\sigma+\langle\frac{d\hat{M}}{ds},(w+\overset{+}{w})\rangle_\sigma+\\
&+\langle(M+\overset{+}{M})\left\{\frac{1}{1+\varepsilon}+\delta\left[\frac{1}{1+\varepsilon}\right]+\frac{1}{(1+\varepsilon)^3}(\overset{+}{\varepsilon})^2-\frac{1}{2(1+\varepsilon)}(\overset{+}{\Omega})^2\right\},(\bar{w}'+\overset{+}{\bar{w}}')\rangle_\sigma
\end{aligned} \tag{3.5}$$

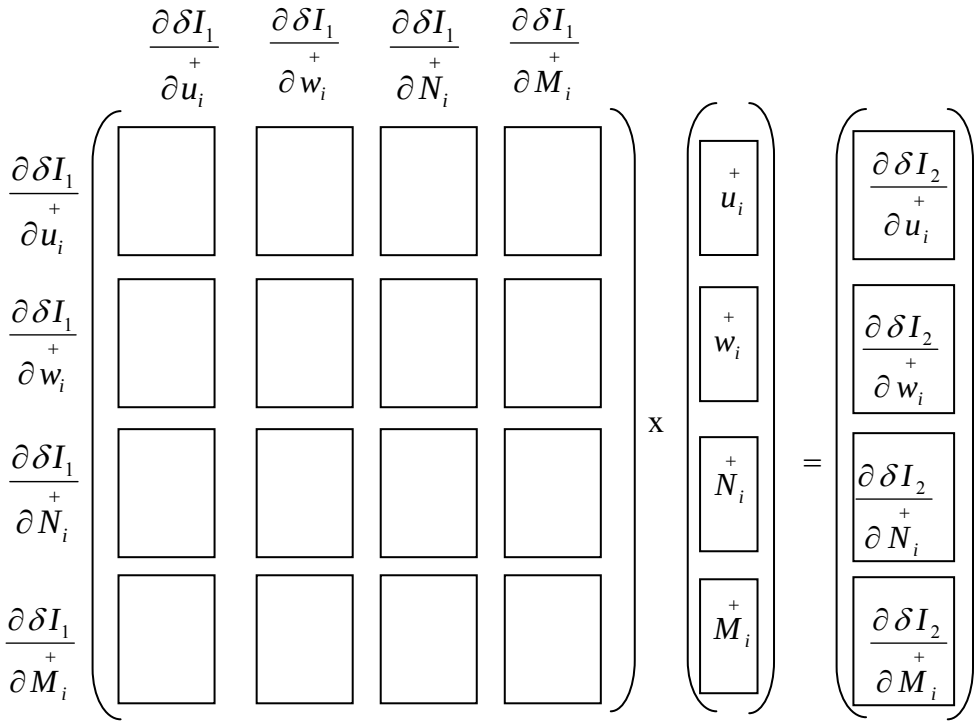
biçiminde yazılabilir. Burada $(\overset{++}{.}.,\overset{+}{.})$ ve daha yüksek artımsal mertebedeki terimler ihmal edilerek fonksiyonel düzenlenecek olursa δI fonksiyoneli aşağıdaki gibi bulunur.

$$
\begin{aligned}
\delta I = &+\langle \overset{+}{N},\overline{u}'\rangle+\frac{1}{2}\langle N\overline{u}',\overline{u}'\rangle+\langle \overset{+}{N}\overline{u}',\overline{u}'\rangle+\frac{1}{2}\langle N\overline{w}',\overline{w}'\rangle+\langle \overset{+}{N}\overline{w}',\overline{w}'\rangle-\frac{1}{2}\langle \overset{+}{\frac{N}{EA}},\overset{+}{N}\rangle-\frac{1}{2}\langle \overset{+}{\frac{M}{EI}},\overset{+}{M}\rangle-\langle M\overline{w}'\delta\left[\frac{1}{1+\varepsilon}\right],\overline{u}''\rangle-\\
&-\langle M\frac{\overline{w}'}{(1+\varepsilon)^3}\overset{+}{(\varepsilon)^2},\overline{u}''\rangle+\frac{1}{2}\langle M\frac{\overline{w}'}{1+\varepsilon}\overset{+}{(\Omega)^2},\overline{u}''\rangle-\langle M\frac{1}{1+\varepsilon}\overline{w}',\overline{u}''\rangle-\langle M\overline{w}'\delta\left[\frac{1}{1+\varepsilon}\right],\overline{u}''\rangle-\langle \overset{+}{M}\frac{\overline{w}'}{1+\varepsilon},\overline{u}''\rangle-\\
&-\langle \overset{+}{M}\overline{w}'\delta\left[\frac{1}{1+\varepsilon}\right],\overline{u}''\rangle-\langle \overset{+}{M}\frac{1}{1+\varepsilon}\overline{w}',\overline{u}''\rangle+\langle M\overline{u}'\delta\left[\frac{1}{1+\varepsilon}\right],\overline{w}''\rangle+\langle M\frac{\overline{u}'}{(1+\varepsilon)^3}\overset{+}{(\varepsilon)^2},\overline{w}'\rangle-\frac{1}{2}\langle M\frac{\overline{u}'}{1+\varepsilon}\overset{+}{(\Omega)^2},\overline{w}'\rangle+\\
&+\langle M\frac{1}{1+\varepsilon}\overset{+}{\overline{u}'},\overline{w}''\rangle+\langle M\overline{u}'\delta\left[\frac{1}{1+\varepsilon}\right],\overline{w}''\rangle+\langle \overset{+}{M}\frac{\overline{u}'}{1+\varepsilon},\overline{w}''\rangle+\langle \overset{+}{M}\overline{u}'\delta\left[\frac{1}{1+\varepsilon}\right],\overline{w}''\rangle+\langle \overset{+}{M}\frac{1}{1+\varepsilon}\overset{+}{\overline{u}'},\overline{w}''\rangle-\\
&-\langle \frac{dM}{ds}\frac{1}{(1+\varepsilon)^3}\overset{+}{(\varepsilon)^2},\overline{w}'\rangle+\frac{1}{2}\langle \frac{dM}{ds}\frac{1}{1+\varepsilon}\overset{+}{(\Omega)^2},\overline{w}'\rangle-\langle \frac{dM}{ds}\delta\left[\frac{1}{1+\varepsilon}\right],\overset{+}{\overline{w}'}\rangle-\langle \frac{d\overset{+}{M}}{ds}\delta\left[\frac{1}{1+\varepsilon}\right],\overline{w}'\rangle-\langle \frac{d\overset{+}{M}}{ds}\frac{1}{1+\varepsilon},\overset{+}{\overline{w}'}\rangle-\\
&-\langle M\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{(1+\varepsilon)^3}\overset{+}{(\varepsilon)^2}\right],\overline{w}'\rangle+\frac{1}{2}\langle M\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{1+\varepsilon}\overset{+}{(\Omega)^2}\right],\overline{w}'\rangle-\langle M\frac{d}{ds}\left\{\delta\left[\frac{1}{1+\varepsilon}\right]\right\},\overset{+}{\overline{w}'}\rangle-\langle \overset{+}{M}\frac{d}{ds}\left\{\delta\left[\frac{1}{1+\varepsilon}\right]\right\},\overline{w}'\rangle-\\
&-\langle \overset{+}{M}\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{1+\varepsilon}\right],\overset{+}{\overline{w}'}\rangle+\langle \kappa_0\overset{+}{\varepsilon},\overset{+}{M}\rangle+\frac{1}{2}\langle \kappa_0(1+\varepsilon)\overset{+}{(\Omega)^2},M\rangle-\\
&-\langle \overset{+}{u},\overset{+}{N}\rangle_\varepsilon+\langle \overset{+}{w},\frac{d\overset{+}{M}}{ds}\rangle_\varepsilon-\langle \overset{+}{u},\kappa_0\overset{+}{M}\rangle_\varepsilon+ \qquad \textbf{(3.6)}\\
&+\langle M\delta\left[\frac{1}{1+\varepsilon}\right],\overset{+}{\overline{w}'}\rangle_\sigma+\langle M\frac{1}{(1+\varepsilon)^3}\overset{+}{(\varepsilon)^2},\overline{w}'\rangle_\sigma+\langle M\frac{1}{2(1+\varepsilon)}\overset{+}{(\Omega)^2},\overline{w}'\rangle_\sigma+\langle \overset{+}{M}\frac{1}{1+\varepsilon},\overset{+}{\overline{w}'}\rangle\rangle_\sigma+\langle \overset{+}{M}\delta\left[\frac{1}{1+\varepsilon}\right],\overline{w}'\rangle_\sigma+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\langle N,\overset{+}{\overline{u}'}\rangle+\langle \overset{+}{N},\overline{u}'\rangle+\langle N\overline{u}',\overset{+}{\overline{u}'}\rangle+\frac{1}{2}\langle \overset{+}{N}\overline{u}',\overline{u}'\rangle+\langle N\overline{w}',\overset{+}{\overline{w}'}\rangle+\frac{1}{2}\langle \overset{+}{N}\overline{w}',\overline{w}'\rangle-\langle \frac{N}{EA},\overset{+}{N}\rangle-\langle \frac{M}{EI},\overset{+}{M}\rangle-\langle q_t,\overset{+}{u}\rangle-\langle q_n,\overset{+}{w}\rangle+\\
&-\langle M\frac{\overline{w}'}{1+\varepsilon},\overset{+}{\overline{u}''}\rangle-\langle M\overline{w}'\delta\left[\frac{1}{1+\varepsilon}\right],\overline{u}''\rangle-\langle M\frac{1}{1+\varepsilon}\overline{w}',\overline{u}''\rangle-\langle \overset{+}{M}\frac{\overline{w}'}{1+\varepsilon},\overline{u}''\rangle+\\
&+\langle M\frac{\overline{u}'}{1+\varepsilon},\overset{+}{\overline{w}''}\rangle+\langle M\overline{u}'\delta\left[\frac{1}{1+\varepsilon}\right],\overline{w}''\rangle+\langle M\frac{1}{1+\varepsilon}\overset{+}{\overline{u}'},\overline{w}''\rangle+\langle \overset{+}{M}\frac{\overline{u}'}{1+\varepsilon},\overline{w}''\rangle-\langle \frac{dM}{ds}\delta\left[\frac{1}{1+\varepsilon}\right],\overline{w}'\rangle-\langle \frac{dM}{ds}\frac{1}{1+\varepsilon},\overset{+}{\overline{w}'}\rangle\\
&-\langle \frac{d\overset{+}{M}}{ds}\frac{1}{1+\varepsilon},\overline{w}'\rangle-\langle M\frac{d}{ds}\left\{\delta\left[\frac{1}{1+\varepsilon}\right]\right\},\overline{w}'\rangle-\langle M\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{1+\varepsilon}\right],\overset{+}{\overline{w}'}\rangle-\langle \overset{+}{M}\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{1+\varepsilon}\right],\overline{w}'\rangle+\langle \kappa_0\varepsilon,\overset{+}{M}\rangle+\langle \kappa_0\overset{+}{\varepsilon},M\rangle-\\
&-\langle (u-\hat{u}),\overset{+}{N}\rangle_\varepsilon-\langle \overset{+}{u},N\rangle_\varepsilon+\langle (w-\hat{w}),\frac{d\overset{+}{M}}{ds}\rangle_\varepsilon+\langle \overset{+}{w},\frac{dM}{ds}\rangle_\varepsilon-\langle (u-\hat{u}),\kappa_0\overset{+}{M}\rangle_\varepsilon-\langle \overset{+}{u},\kappa_0 M\rangle_\varepsilon+\\
&+\langle \overset{+}{\hat{w}'},\overset{+}{M}\rangle_\varepsilon-\\
&-\langle \hat{N},\overset{+}{u}\rangle_\sigma+\langle \frac{d\hat{M}}{ds},\overset{+}{w}\rangle_\sigma+\\
&+\langle M\frac{1}{1+\varepsilon},\overset{+}{\overline{w}'}\rangle_\sigma+\langle M\delta\left[\frac{1}{1+\varepsilon}\right],\overline{w}'\rangle_\sigma+\langle \overset{+}{M}\frac{1}{1+\varepsilon},\overline{w}'\rangle_\sigma
\end{aligned}
$$

δI denklemindeki çift artımsallı ifadeler eleman matrisinin elemanlarını, tek artımsallı ifadeler ise yükleme vektörünün elemanlarını belirtir.

Eleman matrisinin elemanlarını bulmak için çift artımsallı kısmın o elemana karşılık gelen artımsal büyüklüklere göre türevleri alınır. δI_1 ifadesini çift artımsallıların olduğu kısım, δI_2 ifadesini tek artımsallıların olduğu kısım olarak alırsak eleman matrisini, yükleme vektörünü ve çözüm şeklini aşağıdaki gibi gösterebiliriz.



Şekil 3.2 : Eleman Matrisinin ve Yükleme Vektörünün Şekli

Ayrıca tek δI ifadesinde tek artımsallı terimlerini içeren δI_2 kısmının sıfıra eşit olması durumu ekstrem bir durum olup problemi burkulma analizine dönüştürür.

3.2 Sonlu Elemanlar Yöntemi

Çözümü aranan herhangi bir φ bölgesinin, bir araya getirildiğinde yine aynı bölgeyi oluşturan φ^e alt bölgelerin birleşimi cinsinden ifade edildiği yaklaşık çözüm yöntemine sonlu elemanlar yöntemi denir. Bu metodu diğer yöntemlerden ayıran iki önemli nokta vardır. Birincisi çözüm sırasında kullanılacak olan yaklaşım fonksiyonlarının genellikle enterpolasyon teorisi yardımıyla geliştirilmiş cebirsel fonksiyonlar oluşu, ikincisi ise yaklaşım fonksiyonlarının, çözümü aranan ana bölgenin bölünmesiyle elde edilmiş olan alt bölgeler geliştirilmiş olmasıdır. Bu alt bölgelerin her birine sonlu eleman denir.

Sistemin gerçek çözümü için ana bölgenin N sayıda alt bölgeden oluşturulduğu kabul edilirse,

$$\varphi = \sum_{e=1}^{N} \varphi^e \qquad \textbf{(3.7)}$$

eşitliği şeklinde yazılabilir. Burada alt bölgeler yaklaşın fonksiyonlarına bağlı olarak yazılabilirler.

Kullanılacak bu yaklaşım fonksiyonlarına, enterpolasyon fonksiyonları da denir.Bu fonksiyonlar ilgili düğüm noktalarında problemin tipine göre, bazen çözümü aranan fiziksel büyüklüğün, bazen de bilinmeyeni ifade eden fonksiyonun istenen mertebedeki türevinin sürekliliğini sağlamak zorundadır. Bu sağlanması gereken koşullara problemin sınır koşulları denir.

Elemanın herhangi bir noktasında çözümü aranan fiziksel büyüklüğün gerçek değeri u^e, sonlu elemanlar teorisine göre yaklaşık değerine ise $u_f{}^e$ ile gösterilirse,

$$u^e \cong u_f{}^e = \sum_{i=1}^{N} u_i{}^e \psi_i{}^e \qquad \textbf{(3.8)}$$

ile gösterilebilir. Burada ki u_i^e değerleri, u fonksiyonun, ilgili düğüm noktalarındaki değerleridir. ψ_i^e ise aynı düğün noktalarına ait yaklaşım fonksiyonlarıdır ve bunlara Şekil Fonksiyonları da denir.

Örneğin, bir "e" elemanın global koordinat sisteminde sol nodu 1, sağ nodu ise 2 numaralarıyla ifade edilirse ve bu elemana ait şekil fonksiyonları da ψ_1^e ve ψ_2^e olarak gösterilecek olursa, "e" elemanı üzerindeki herhangi bir noktanın konumu,

$$u_e = \sum_{i=1}^{2} u_i^e \psi_i^e = u_1^e \psi_1^e + u_2^e \psi_2^e \qquad \textbf{(3.9)}$$

şeklinde bulunabilir. Şekil fonksiyonlarının seçiminde dikkat edilmesi gereken iki ana unsur vardır.

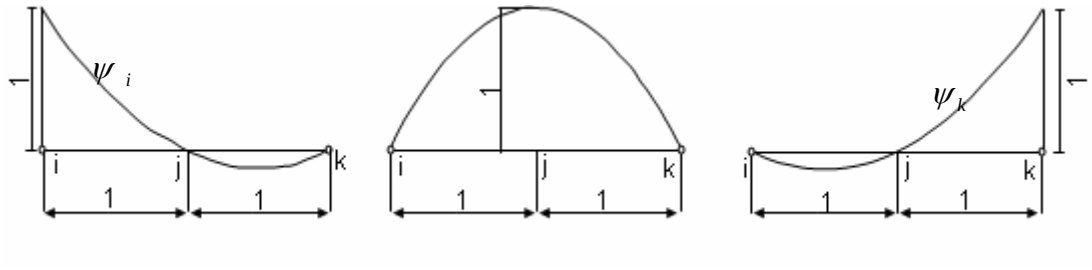
a) Şekil fonksiyonu hangi düğüm noktası için yazılmışsa o düğüm noktasında "1", diğerlerinde ise "0" değerini vermelidir.

b) Elemanın herhangi bir noktası üzerinde, şekil fonksiyonlarının toplamı mutlaka "1" olmalıdır.

Herhangi bir problemin çözümünü ararken, çözümün hassasiyetini artırmak için, problemin genel yapısına uygun şekil fonksiyonları kullanılmalıdır. Bundan dolayı şekil fonksiyonları fonksiyoneldeki en yüksek türev mertebesine göre kurulmalıdır. Birinci dereceden türev içeren bir fonksiyonda şekil fonksiyonlarını birinci dereceden alınması mümkünken, ikinci dereceden türev ifadelerinin olduğu fonksiyonlarda, o büyüklüğün şekil fonksiyonlarını en az ikinci dereceden alınması gerekir.

Biz bu çalışmada şekil fonksiyonunu belirlerken, uzamanın ve çökmenin ikinci mertebeden türevlerinin olmasından dolayı kuadratik şekil fonksiyonlarını kullandık. Bu yapıya uygun olarak seçilen kuadratik şekil fonksiyonları aşağıdaki şekildeki gibidir.

ψ_j



Şekil 3.3 : Kuadratik Şekil Fonksiyonları

Şekil 3.3 deki şekil fonksiyonlarını ifadeleri,

$$\psi_i = \frac{r^2}{2} - \frac{r}{2}, \quad \psi_j = -r^2 + 1, \quad \psi_k = \frac{r^2}{2} + \frac{r}{2} \tag{3.10}$$

şeklindedir.

Artımsal fonksiyonelin Şekil 3.2 deki gibi artımsal değerlere göre türevlerinin alınması ile

$$\underset{\sim}{A}\,\overset{+}{\underset{\sim}{x}} = \underset{\sim}{b} \tag{3.11}$$

ifadesini kullanabiliriz. Burada $\underset{\sim}{A}$ terimi eşitliğin sol tarafındaki çift artımsallı ifadeden gelen eleman matrisini, $\underset{\sim}{b}$ terimi ise eşitliğin sağ tarafındaki tek artımsallı yapıdan gelen yükleme vektörünü belirtir.

$$\underset{\sim}{b} = b_0 + \overset{+}{b} \tag{3.12}$$

yapısındaki b_0 terimi herhangi bir problem de sistemin etkisi aldığında olduğu dış kuvvetlerin dinamik sınır koşullarından meydana getirdiği bir vektördür. $\overset{+}{x}$ terimi ise

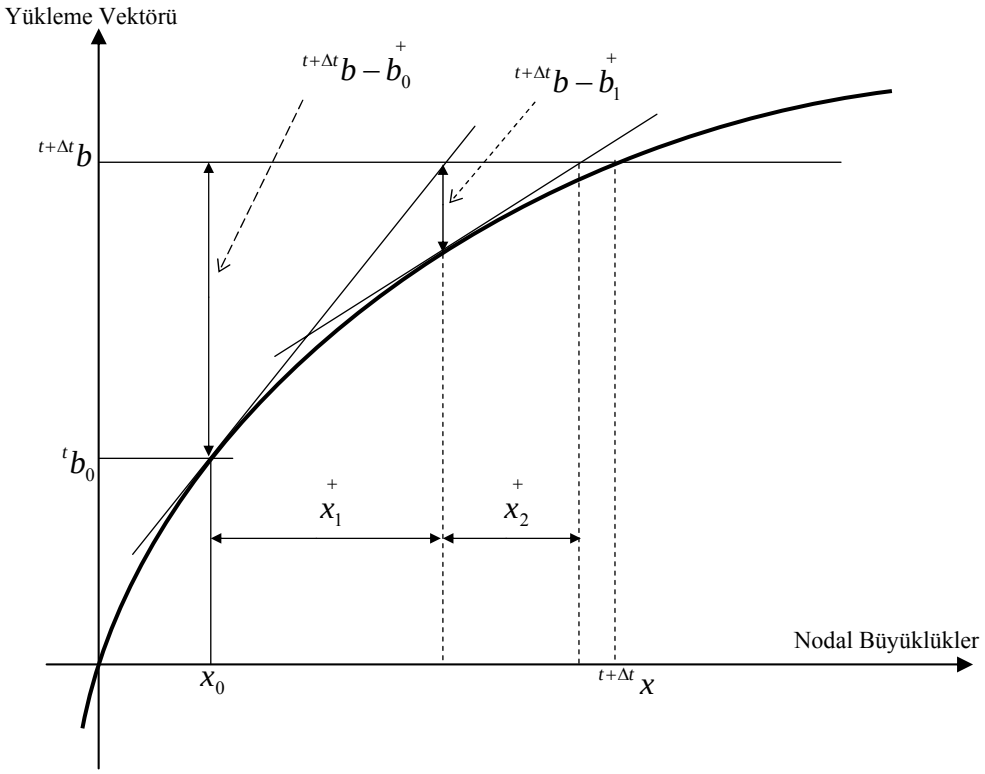
$$\overset{+}{x} = \left\{ \overset{+}{u}_i,\ \overset{+}{w}_i,\ \overset{+}{N}_i,\ \overset{+}{M}_i \right\} \tag{3.13}$$

şeklinde ulaşmaya çalıştığımız artımsal ifadelerim bulunduğu bir vektördür.

Her bir eleman için oluşturulan (3.11) eşitliği, aynı düğüm noktasında birleşen farklı elemanlardaki ortak bilinmeyenler için süperpoze işlemine tabi tutulursa, tüm sistemin sonlu elemanlara göre çözüm yapısı elde edilir. Ardından sonlu eleman

analizi Kodlama Yöntemi adı verilen, sıfır olduğu bilinen satır ve sütunların sistem matrisinden silinmesiyle yapılır.

Kodlama matrisi elde edildikten sonra çözüm; aşağıda şekille ve adımlarıyla anlatılarak da gösterildiği gibi iterasyonlar yapılarak bulunur.



Şekil 3.4 : Artımsal Metot ile Sonlu Eleman Analizi Şekli

1. Her bir eleman için eleman matrisleri ve yükleme vektörleri elde edilir.

2. Bu eleman matrisleri ve vektörleri süperpoze edildikten sonra sistemin sınır koşullarını devreye sokmak için kodlama işlemi yapılır .

3. Yer değiştirmemiş başlangıç konumu olarak bütün nodal büyüklüklere "0" olacağından ilk nodal büyüklükler x_0 ifadesi bir sıfır matris olarak belirlenir.

4. Bir "t" anında sisteme dışarıdan etkiyen yüklemeler b_0 olarak sisteme eklenerek $\underset{\sim}{A}$ eleman matrisi ve $\underset{\sim}{b}$ yükleme vektörü elde edilir. Denklem (3.11) çözülerek ilk $\underset{\sim}{\overset{+}{x}}$ artımsal değer vektörü bulunur.

5. Bulunan bu ilk değerler sistemin lineer çözümünü verir. Bulunan bu sonuçlar ikinci adımda sitemin yeni nodal büyüklükleri olarak tanımlanarak "$t + \Delta t$" zamanında 1. iterasyon yapılır.

6. Bulunan yeni artımsal değerler bir önceki adımdakilerle toplandıktan sonra 4. ve . adımlar tekrar edilerek 2. iterasyonun sonucuna ulaşılır.

7. Bu iterasyonlar $\underset{\sim}{\overset{+}{x}}$ ve $\overset{+}{b}$ vektörünün sonuçları sıfır olana kadar devam ettirilir..Değişimlerin sıfır olduğu durum sistemin kesin çözümünü verir.

Ek olarak bu artımsal ifadeden ve sonlu elemanlardan yararlanılarak herhangi bir elemanın burkulma analizi de yapılabilir. Tek artımsallı yapının varyasyonunun sıfıra götürülmesi, burkulma analizi için gerekli olan denklem sistemini verecektir. Bunun için, $\underset{\sim}{A}$ matrisi başlangıç konumundaki değerlerle oluşturulur ve normal kuvvet büyüklüklerinin yerine bulunmak istenen P_{kr} yükü koyulur. Normal kuvvetin değerinde herhangi bir artım olmayacağından dolayı eleman matrisinde normal kuvvete göre varyasyonların bulunduğu satır ve sütunlar atılır. Ardından,

$$Det[A] = 0 \qquad \textbf{(3.14)}$$

ifadesi çözülerek oluşacak denklemden P_{kr} değerleri hesaplanır. Bulunan bu değerlerden en küçük gerçek kök sistemin kritik burkulma yükünü verir.

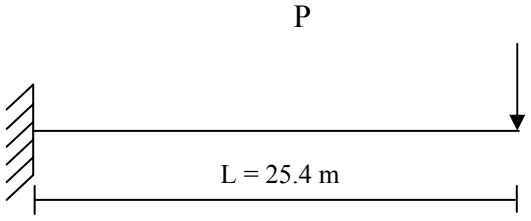
4. PORBLEM ÇÖZÜMLERİ

4.1 Tekil Yük Altında Konsol Kiriş

Konsol kirişin tekil yük altındaki davranışlarını incelemek için iki farklı problem incelenmiştir.

4.1.1 Konsol Kiriş 1

Bu örnekte, bu çalışmanın konusu olan (2.58) da ki fonksiyonelin çözümü arandı. Bulunan sonuçlar literatürde daha önce yayınlanan sonuçlarla karşılaştırıldı. Ayrıca nonlineer terimlerin etkisini daha iyi gözlemleyebilmek için (2.61) da ki birinci özel yapının artımsal ifadesi kullanarak çözüm yapıldı. Çözümler 8 eleman kullanılarak yapıldı.



Şekil 4.1 : Tekil Yük Altında Konsol Kirişin Şekli

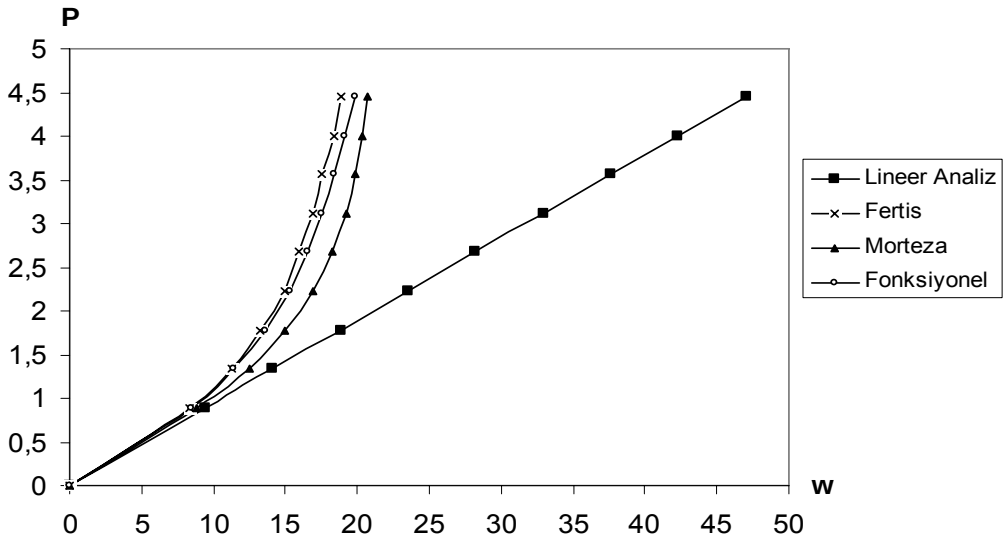
Çubuğun boyunu, EI ve alanını

$L = 25.4$ m (1000 in.), $EI = 516\,566.45$ Nm^2, $A = 3.226 \times 10^{-13}$ m^2 (5 in.^{2})

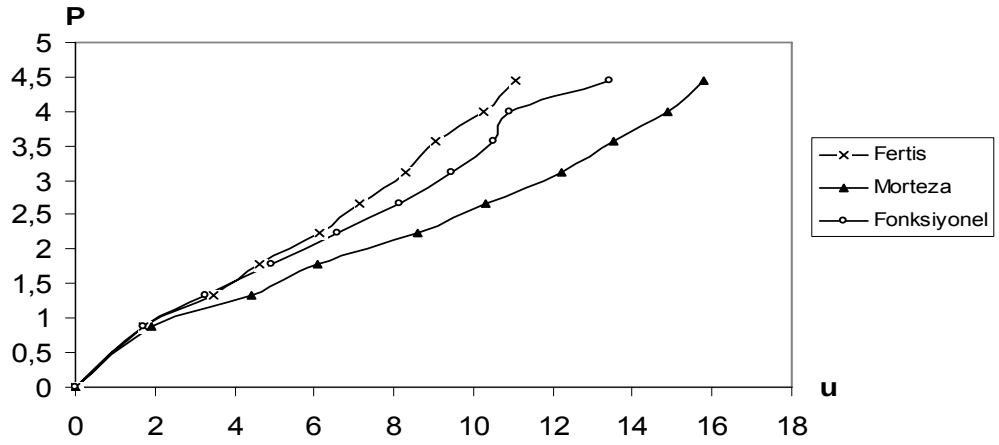
alınca, değişik kuvvetler altında, çubukta kuvvetin bulunduğu sağ uçtaki çökme "w" ve uzama "u" deplasmanları hesaplandı ve bu deplasmanlar aşağıdaki Tablo 4.1, Şekil 4.2 ve Şekil 4.3 de gösterildi.

Tablo 4.1 : Tekil Kuvvet Altında Konsol Kirişteki Çökme ve Uzamalar

	Lineer Çözüm	Nonlineer Analiz (Fertis 1993)		Artımsal Analiz (Morteza 1997)		Fonksiyonelin Artımsal Analizi		Birinci Özel Yapı Artımsal Analizi	
P(kN)	w (m)	w (m)	u (m)	w (m)	u (m)	w (m)	u (m)	w (m)	u (m)
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,89	9,41	8,35	-1,71	8,80	-1,90	8,42	-1,71	9,41	-2,05
1,34	14,11	11,31	-3,47	12,47	-4,42	11,40	-3,27	14,11	-4,61
1,78	18,81	13,29	-4,65	14,92	-6,09	13,60	-4,94	18,81	-8,19
2,23	23,52	14,90	-6,15	16,90	-8,61	15,30	-6,56	23,52	-12,80
2,67	28,22	15,98	-7,14	18,23	-10,28	16,60	-8,14	28,22	-18,44
3,12	32,93	16,93	-8,29	19,21	-12,22	17,55	-9,44	32,93	-25,09
3,56	37,63	17,57	-9,06	19,86	-13,52	18,35	-10,52	37,63	-32,77
4,01	42,33	18,33	-10,25	20,36	-14,87	19,17	-10,91	42,33	-41,48
4,45	47,04	18,85	-11,05	20,68	-15,78	19,81	-13,41	47,04	-51,21



Şekil 4.2 : 1. Konsol Kiriş Örneği *P – w* Grafiği



Şekil 4.3 : 1. Konsol Kiriş Örneği *P – u* Grafiği

4.1.2 Konsol Kiriş 2

Çubukta, L = 1, EI = 1, EA = 1 şeklinde aldık.

Çubuğun boyutsuz olarak ifade edildiği bu örnekte, FonksiyonelA'nın ve FonksiyonelB' nin çözümleri Tekinalp yöntemi ile karşılaştırdık.

Tekinalp yönteminde çökme ve uzama ifadeleri

$$\frac{w}{L} = \frac{PL^2}{3EI} - \frac{2}{105}\frac{P^3L^6}{(EI)^3} \tag{4.1}$$

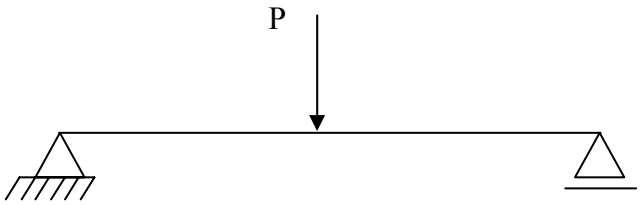
$$\frac{u}{L} = -\frac{1}{15}\left(\frac{PL^2}{EI}\right)^2 \tag{4.2}$$

şeklindedir.

Tablo 4.2 : Tekil Kuvvet Altında Boyutsuz Konsol Kirişteki Çökme ve Uzamalar

	Lineer Ç.	Tekinalp		Birinci Özel Yapı		İkinci Özel Yapı	
P	w	u / L	w / L	u	W	U	W
0	0	0	0	0	0	0	0
0,05	0,0167	0,0002	0,0167	-0,0002	0,0167	-0,0002	0,0167
0,10	0,0333	0,0007	0,0333	-0,0007	0,0333	-0,0007	0,3339
0,15	0,0500	0,0015	0,0499	-0,0015	0,0500	-0,0015	0,0502
0,20	0,0667	0,0027	0,0665	-0,0026	0,0667	-0,0027	0,0671
0,25	0,0833	0,0042	0,0830	-0,0041	0,0833	-0,0043	0,0841
0,30	0,1000	0,0060	0,0995	-0,0059	0,1000	-0,0062	0,1014
0,35	0,1167	0,0082	0,1159	-0,0080	0,1167	-0,0087	0,1189
0,40	0,1333	0,0107	0,1321	-0,0105	0,1333	-0,0116	0,1367
0,45	0,1500	0,0135	0,1483	-0,0265	0,1500	-0,0152	0,1549
0,50	0,1667	0,0167	0,1643	-0,0163	0,1667	-0,0194	0,1734
0,55	0,1833	0,0202	0,1802	-0,0198	0,1833	-0,0244	0,1925
0,60	0,2000	0,0240	0,1959	-0,0235	0,2000	-0,0304	0,2122
0,65	0,2167	0,0282	0,2114	-0,0276	0,2167	-0,0376	0,2317
0,70	0,2333	0,0327	0,2268	-0,0320	0,2333	-0,0461	0,2531
0,75	0,2500	0,0375	0,2420	-0,0367	0,2500	-0,0564	0,2759
0,80	0,2667	0,0427	0,2569	-0,0418	0,2667	-0,6831	0,3084

4.2 Tekil Yük Altında Basit Kiriş



Şekil 4.4 : Tekil Yük Altında Basit Kiriş Şekli

Çubukta, L = 1, EI = 1, EA = 1 şeklinde aldık.

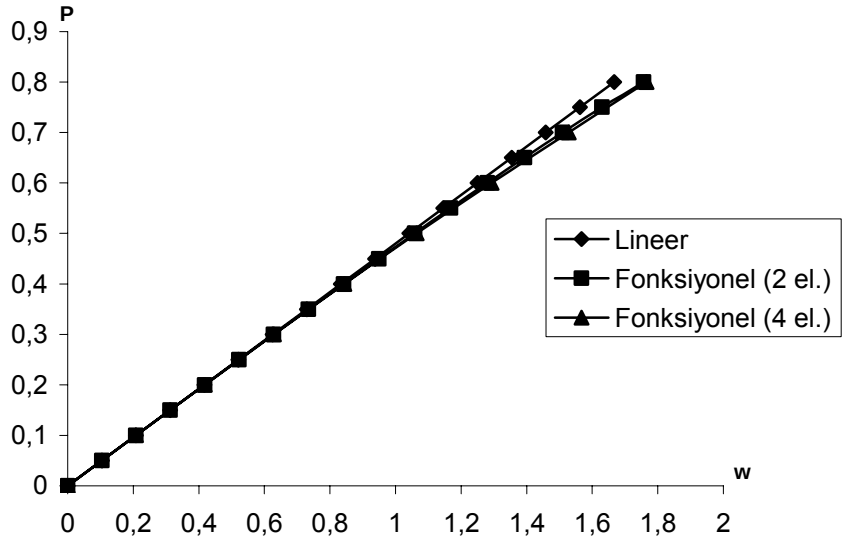
Çubuğun boyutsuz olarak ifade edildiği bu örnekte, çözüm iki elemanlı ve dört elemanlı incelenmiştir. Ayrıca, birinci ve ikinci özel yapıların sonuçları da iki elemanlı olarak hesaplanmıştır. Bulunana sonuçlar Tekinalp yöntemi ile daha önceden hesaplanan sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Tablo 4.3 : Tekil Kuvvet Altında Boyutsuz Basit Kirişteki Çökme ve Uzamalar I

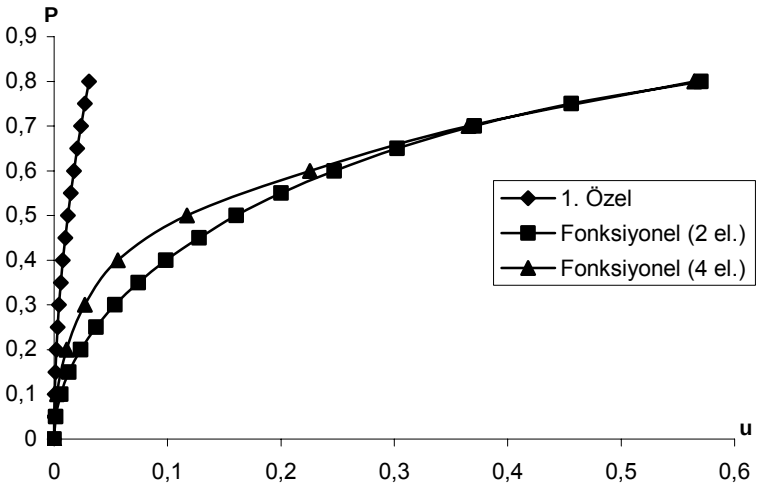
	Lineer Çözüm	Tekinalp		Fonksiyonel (İki eleman)		Birinci Özel		İkinci Özel	
P	w (cm)	u / L	w / L	w (cm)	u (cm)	w (cm)	u (cm)	w (cm)	U (cm)
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,05	0,1042	-0,0001	0,1094	0,1042	-0,0014	0,1042	-0,0001	0,1042	-0,0001
0,10	0,2083	-0,0005	0,2292	0,2085	-0,0058	0,2083	-0,0005	0,2083	-0,0005
0,15	0,3125	-0,0012	0,3594	0,3129	-0,0131	0,3125	-0,0011	0,3125	-0,0011
0,20	0,4167	-0,0021	0,5000	0,4176	-0,0234	0,4167	-0,0019	0,4167	-0,0019
0,25	0,5208	-0,0033	0,6510	0,5228	-0,0369	0,5208	-0,0030	0,5290	-0,0030
0,30	0,6250	-0,0047	0,8125	0,6284	-0,0537	0,6250	-0,0043	0,6251	-0,0044
0,35	0,7292	-0,0064	0,9889	0,7346	-0,0741	0,7292	-0,0059	0,7293	-0,0060
0,40	0,8333	-0,0083	1,1667	0,8415	-0,0984	0,8333	-0,0077	0,8336	-0,0078

Tablo 4.4 : Tekil Kuvvet Altında Boyutsuz Basit Kirişteki Çökme ve Uzamalar II

	Lineer Çözüm	Fonkisyonel (4 Eleman)		Fonkisyonel (2 Eleman)		Birinci Özel	
P	w (cm)	w (cm)	u (cm)	w (cm)	u (cm)	w (cm)	u (cm)
0	0	0	0	0	0	0	0
0,05	0,1042			0,1042	-0,0014	0,1042	-0,0001
0,1	0,2083	0,2085	-0,0027	0,2085	-0,0058	0,2083	-0,0005
0,15	0,3125			0,3129	-0,0131	0,3125	-0,0011
0,2	0,4167	0,4179	-0,0111	0,4176	-0,0234	0,4167	-0,0019
0,25	0,5208			0,5228	-0,0369	0,5208	-0,0030
0,3	0,6250	0,6293	-0,0272	0,6284	-0,0537	0,6250	-0,0043
0,35	0,7292			0,7346	-0,0741	0,7292	-0,0059
0,4	0,8333	0,8440	-0,0562	0,8415	-0,0984	0,8333	-0,0077
0,45	0,9375			0,9493	-0,1279	0,9375	-0,0098
0,5	1,0417	1,0647	-0,1172	1,0581	-0,1607	1,0417	-0,0121
0,55	1,1458			1,1683	-0,2002	1,1458	-0,0146
0,6	1,2500	1,2928	-0,2256	1,2800	-0,2469	1,2500	-0,0174
0,65	1,3542			1,3937	-0,3026	1,3542	-0,0204
0,7	1,4583	1,5287	-0,3654	1,5101	-0,3705	1,4583	-0,0237
0,75	1,5625			1,6302	-0,4560	1,5625	-0,0272
0,8	1,6667	1,7655	-0,5646	1,7566	-0,5704	1,6667	-0,0309

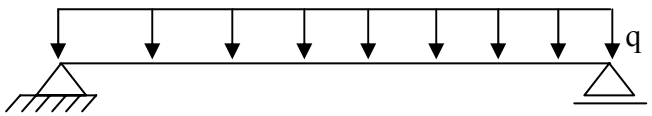


Şekil 4.5 : Tekil Yük Altında Basit Kiriş Örneği *P – w* Grafiği



Şekil 4.6 : Tekil Yük Altında Basit Kiriş Örneği *P – u* Grafiği

4.3 Yayılı Yük Altında Basit Kiriş



Şekil 4.7 : Yayılı Yük Altında Basit Kiriş Şekli

Çubukta, L = 1, EI = 1, EA = 1 şeklinde aldık.

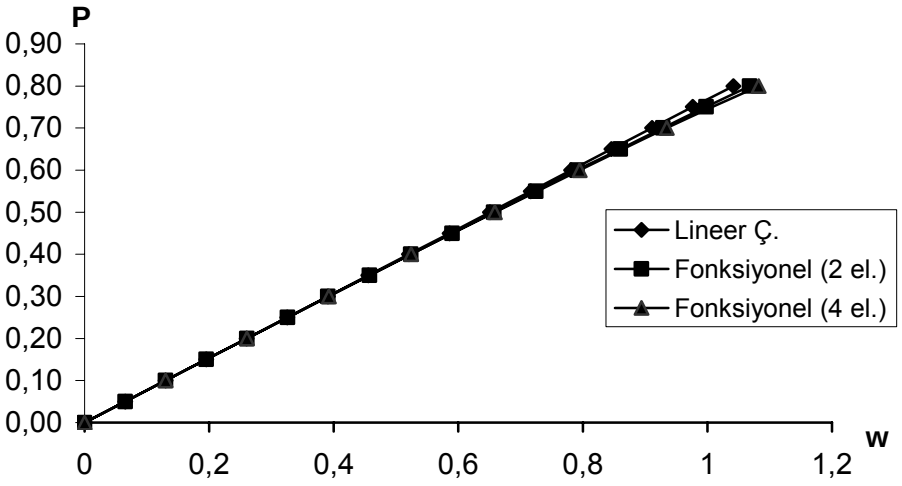
Çubuğun boyutsuz olarak ifade edildiği bu örnekte, çözüm iki elemanlı ve dört elemanlı incelenmiştir. Ayrıca, birinci ve ikinci özel yapıların sonuçları da iki elemanlı olarak hesaplanmıştır. Bulunana sonuçlar Tekinalp yöntemi ile daha önceden hesaplanan sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Tablo 4.5 : Yayılı Yük Altında Boyutsuz Basit Kirişteki Çökme ve Uzamalar I

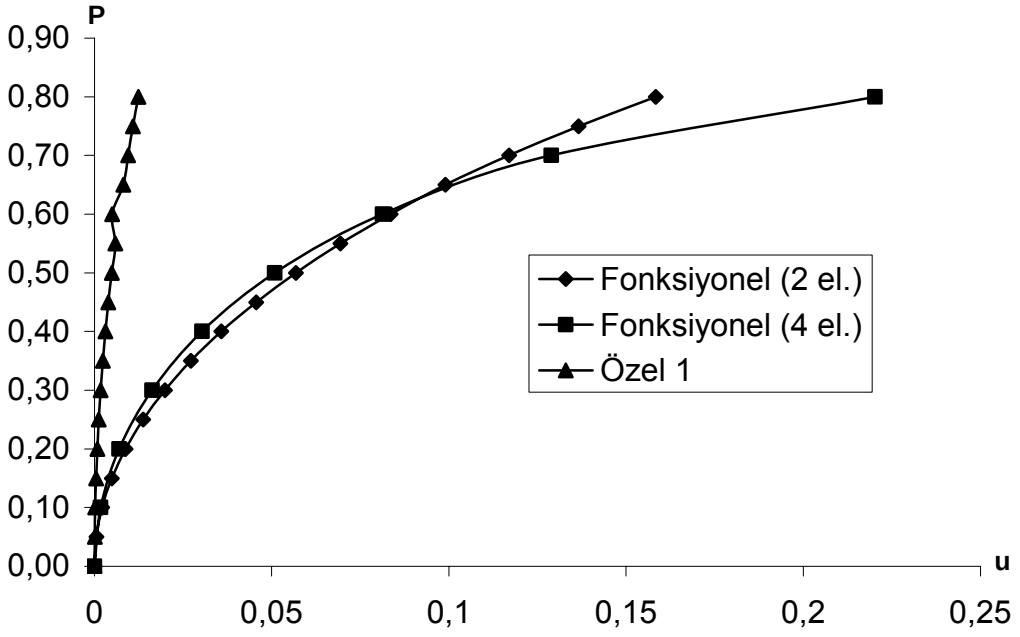
	Lineer Çözüm	Tekinalp		Fonksiyonel (2 Eleman)		Birinci Özel		İkinci Özel	
P	w(cm)	w/L	u/L	w(cm)	u(cm)	w(cm)	u(cm)	w(cm)	u(cm)
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,05	0,0651	0,0684	-0,0001	0,0651	-0,0005	0,0651	0,0000	0,6510	-0,0001
0,10	0,1302	0,1632	-0,0002	0,1303	-0,0022	0,1302	-0,0002	0,1302	-0,0002
0,15	0,1953	0,2246	-0,0005	0,1955	-0,0049	0,1953	-0,0004	0,1953	-0,0004
0,20	0,2604	0,3125	-0,0008	0,2607	-0,0088	0,2604	-0,0008	0,2604	0,0008
0,25	0,3255	0,4069	-0,0013	0,3260	-0,0137	0,3255	-0,0012	0,3255	-0,0012
0,30	0,3906	0,5078	-0,0019	0,3910	-0,0199	0,3906	-0,0017	0,3907	-0,0017
0,35	0,4557	0,6152	-0,0026	0,4578	-0,0272	0,4557	-0,0024	0,4558	-0,0024
0,40	0,5208	0,7292	-0,0034	0,5239	-0,0358	0,5208	-0,0031	0,5209	-0,0031

Tablo 4.6 : Yayılı Yük Altında Boyutsuz Basit Kirişteki Çökme ve Uzamalar II

	Lineer Çözüm	Fonksiyonel (2 Eleman)		Fonksiyonel (4 Eleman)		Birinci Özel	
P	w(cm)	w(cm)	u(cm)	w(cm)	u(cm)	w(cm)	u(cm)
0,00	0	0	0	0	0	0	0
0,05	0,0651	0,0651	-0,0005			0,0651	0,0000
0,10	0,1302	0,1303	-0,0022	0,1303	-0,0017	0,1302	-0,0002
0,15	0,1953	0,1955	-0,0049			0,1953	-0,0004
0,20	0,2604	0,2607	-0,0088	0,2609	-0,0070	0,2604	-0,0008
0,25	0,3255	0,3260	-0,0137			0,3255	-0,0012
0,30	0,3906	0,3910	-0,0199	0,3922	-0,0162	0,3906	-0,0017
0,35	0,4557	0,4578	-0,0272			0,4557	-0,0024
0,40	0,5208	0,5239	-0,0358	0,5246	-0,0303	0,5208	-0,0031
0,45	0,5859	0,5900	-0,0456			0,5859	-0,0039
0,50	0,6510	0,6570	-0,0568	0,6586	-0,0509	0,6510	-0,0048
0,55	0,7161	0,7243	-0,0694			0,7161	-0,0059
0,60	0,7810	0,7910	-0,0836	0,7948	-0,0813	0,7810	-0,0050
0,65	0,8460	0,8600	-0,0990			0,8460	-0,0082
0,70	0,9110	0,9287	-0,1170	0,9347	-0,1289	0,9110	-0,0095
0,75	0,9765	0,9980	-0,1366			0,9765	-0,0109
0,80	1,0417	1,0680	-0,1584	1,0823	-0,2203	1,0417	-0,0124



Şekil 4.8 : Yayılı Yük Altında Basit Kiriş Örneği *P* – *w* Grafiği



Şekil 4.9 : Yayılı Yük Altında Basit Kiriş Örneği *P* – *u* Grafiği

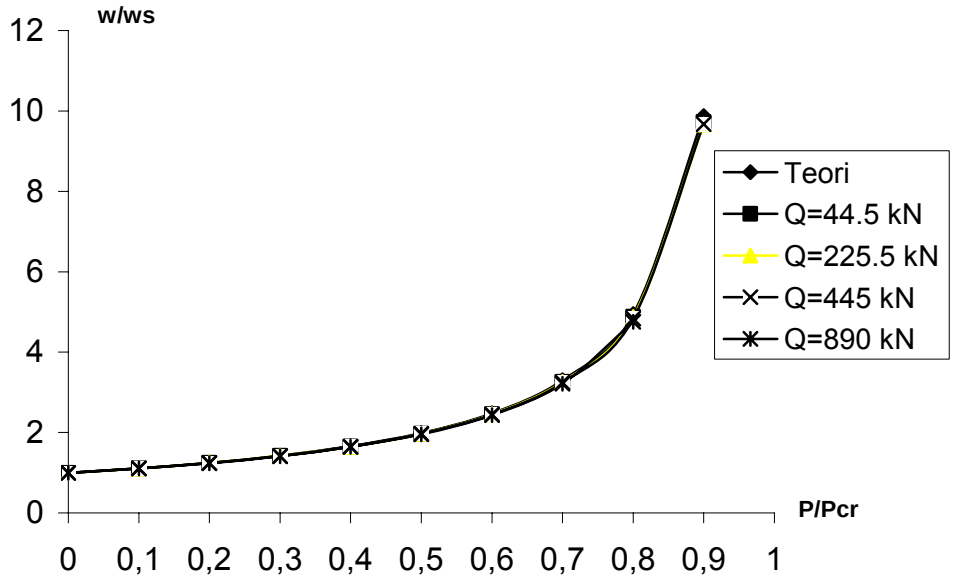
ifadesinden P_{cr} =7614.4 kN olarak bulundu ve sonuçlar aşağıda gösterildi.

Tablo 4.7 : Normal Kuvvet Altında Tekil Yük Etkiyen Basit Kiriş Çökme Tablosu I

		Q = 44,5 kN		Q = 222,5 kN		Q = 445 kN		Q = 890 kN	
P(kN)	P/Pcr	w (teori)	w (m)	w (teori)	w (m)	w (teori)	w (m)	w (teori)	w (m)
761,44	0,1	0,00488	0,00487	0,02440	0,02436	0,04881	0,04870	0,09761	0,09725
1522,88	0,2	0,00548	0,00547	0,02742	0,02732	0,05483	0,05462	0,10966	0,10903
2284,31	0,3	0,00626	0,00623	0,03129	0,03113	0,06258	0,06222	0,12516	0,12413
3045,75	0,4	0,00729	0,00724	0,03645	0,03621	0,07291	0,07235	0,14581	0,14421
3807,19	0,5	0,00874	0,00867	0,04368	0,04331	0,08736	0,08652	0,17472	0,17218
4568,63	0,6	0,01090	0,01080	0,05452	0,05396	0,10904	0,10771	0,21809	0,21382
5330,06	0,7	0,01452	0,01435	0,07259	0,07169	0,14517	0,14289	0,29034	0,28238
6091,50	0,8	0,02174	0,02146	0,10871	0,10705	0,21742	0,21268	0,43485	0,41809
6852,94	0,9	0,04342	0,04277	0,21708	0,21243	0,43416	0,42533	0,86833	.....

Tablo 4.8 : Normal Kuvvet Altında Tekil Yük Etkiyen Basit Kiriş Çökme Tablosu II

	Teori	Q = 44.5 kN	Q = 225,5 kN	Q = 445 kN	Q = 890 kN
P/P_{cr}	w/w_s	w/w_s	w/w_s	w/w_s	w/w_s
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,1	1,1096	1,1079	1,1077	1,1073	1,1056
0,2	1,2467	1,2427	1,2425	1,2419	1,2394
0,3	1,4228	1,4160	1,4157	1,4148	1,4111
0,4	1,6576	1,6470	1,6465	1,6451	1,6393
0,5	1,9863	1,9703	1,9695	1,9670	1,9574
0,6	2,4792	2,4553	2,4537	2,4489	2,4308
0,7	3,3007	3,2634	3,2598	3,2489	3,2101
0,8	4,9434	4,8793	4,8678	4,8354	4,7529
0,9	9,8712	9,7244	9,6599	9,6705	



Şekil 4.11 : Tekil Yüklemeli Normal Kuvvetli Basit Kirişte *w/ws-P/Pcr* Grafiği

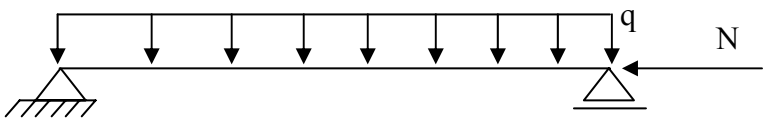
Tablo 4.9 : Normal Kuvvet ve Tekil Yük Altında Basit Kirişteki Çökmenin Değişik Fonksiyonellere Göre Karşılaştırma Tablosu

Q = 44,5 kN					
P (kN)	P/Pcr	Teori	Fonksiyonel	Birinci Özel	İkinci Özel
761,44	0,1	0,004881	0,004873	0,004876	0,004875
2284,31	0,3	0,006258	0,006228	0,006241	0,006275
3807,19	0,5	0,008736	0,008666	0,008704	0,006275
5330,06	0,7	0,014517	0,014353	0,014487	0,014241
Q = 445 kN					
P (kN)	P/Pcr	Teori	Fonksiyonel	Birinci Özel	İkinci Özel
761,44	0,1	0,048805	0,048702	0,192140	0,191934
2284,31	0,3	0,062579	0,062225	0,738898	0,735970
3807,19	0,5	0,087362	0,086516	1,726804	1,704602
5330,06	0,7	0,145172	0,142895	4,180410	3,924651

Tablo 4.10 : Normal Kuvvet ve Tekil Yük Altında Basit Kirişte Nodlarda ki Normal Kuvvet Büyüklüğünü Karşılaştırma Tablosu

	Q = 44,5 kN			Q = 445 kN		
	0.1Pcr					
N(kN)	Fonksiyonel	Birinci Özel	İkinci Özel	Fonksiyonel	Birinci Özel	İkinci Özel
N_1	-761,438	-761,438	-761,438	-762,017	-761,438	-761,922
N_2	-762,676	-761,438	-762,751	-755,659	-761,438	-763,189
N_3	-761,635	-761,438	-761,429	-781,543	-761,438	-760,960
N_4	-762,676	-761,438	-762,751	-755,813	-761,438	-763,304
N_5	-761,438	-761,438	-761,438	-761,438	-761,438	-761,438
	0.3Pcr					
N(kN)	Fonksiyonel	Birinci Özel	İkinci Özel	Fonksiyonel	Birinci Özel	İkinci Özel
N_1	-2284,209	-2284,313	-2284,205	-2287,119	-2284,313	-2286,623
N_2	-2296,101	-2284,313	-2296,228	-2285,600	-2284,313	-2298,380
N_3	-2284,556	-2284,313	-2284,189	-2318,511	-2284,313	-2281,836
N_4	-2296,075	-2284,313	-2296,201	-2286,326	-2284,313	-2298,963
N_5	-2284,313	-2284,313	-2284,313	-2284,313	-2284,313	-2284,313
	0.5Pcr					
N(kN)	Fonksiyonel	Birinci Özel	İkinci Özel	Fonksiyonel	Birinci Özel	İkinci Özel
N_1	-3806,655	-3807,188	-3806,644	-3816,520	-3807,188	-3815,223
N_2	-3840,362	-3807,188	-3840,618	-3821,827	-3807,188	-3847,738
N_3	-3807,411	-3807,188	-3806,638	-3876,020	-3807,188	-3798,786
N_4	-3840,228	-3807,188	-3840,481	-3824,256	-3807,188	-3849,677
N_5	-3807,188	-3807,188	-3807,188	-3807,188	-3807,188	-3807,188

4.4.2 Yayılı Yük Altında



Şekil 4.12 : Yayılı Yüklü Normal Kuvvet Etkisindeki Basit Kiriş

Bu örnekte sağ ucunda bir normal kuvvet "N" olan basit kirişin, "q" yayılı yükünün de etkimesi durumundaki davranışı incelenmiştir. Bunun için fonksiyonelimizden ve birinci özel yapıdan yararlanıldı. Bulunan sonuçlar Timoshenko'nun bu tarz problemler için ürettiği,

$$w = \frac{5qL^4}{384EI}\left[\frac{12(2\sec u - 2 - u^2)}{5u^4}\right] \qquad \textbf{(4.5)}$$

ifadesiyle bulunan çökme değerleri ile karşılaştırıldı.

Çubuğun boyu, q yayılı yükü, E, I ve alanını,

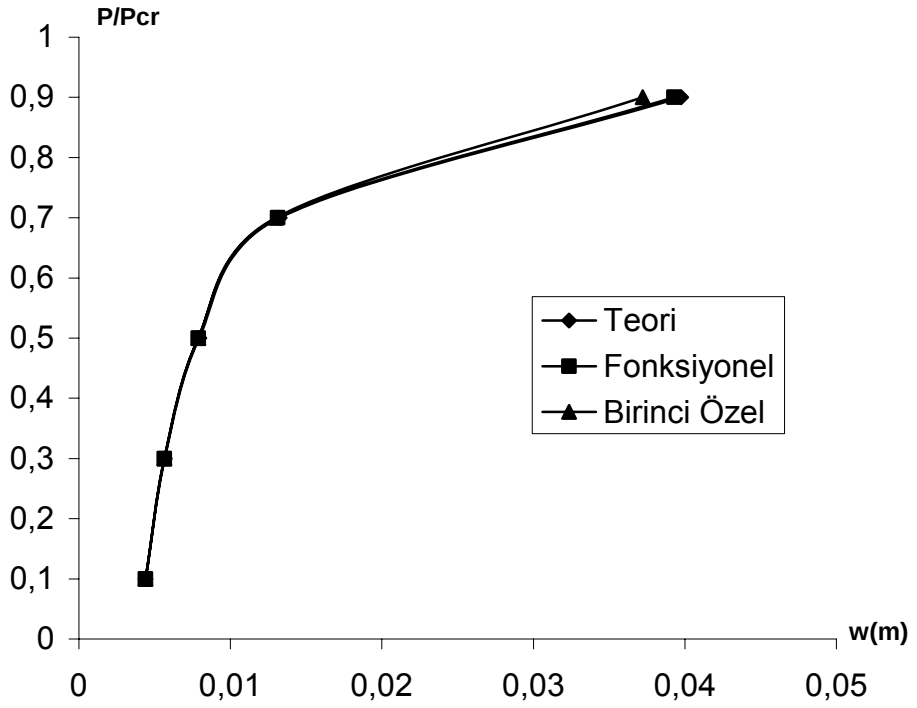
q = 17.52 kN/m (0.1 kips/in.), L = 3.66 m (12 ft.), E = 206 843 Mpa (30 000 ksi),

A = 3.226×10^{-13} m^2 (5 $in.^2$), I = 49.9×10^{-6} m^4 (120 $in.^4$).

şeklinde verildi. Buradan P_{cr}=7614.4 kN olarak bulundu ve sonuçlar aşağıda gösterildi.

Tablo 4.11 : Normal Kuvvet ve Yayılı Yük Altında Basit Kirişin Orta Noktasında Oluşan Çökme Tablosu

		Teori	Fonksiyonel	Birinci Özel
P(kN)	P/Pcr	w(m)	w(m)	w(m)
761,438	0,1	0,00440	0,00440	0,00440
2284,313	0,3	0,00566	0,00564	0,00565
3807,188	0,5	0,00794	0,00789	0,00787
5330,063	0,7	0,01324	0,01312	0,01300
6852,938	0,9	0,03975	0,03928	0,03721



Şekil 4.13 : Normal Kuvvet ve Yayılı Yük Altında Basit Kirişin Orta Noktasındaki *w -P/Pcr* Grafiği

4.4.3 Moment Çifti Etkisinde



Şekil 4.14 : Moment Çifti ile Normal Kuvvet Etkisindeki Basit Kiriş

Bu örnekte sağ ucunda bir normal kuvvet "N" olan basit kirişin, her iki ucuna "M" moment çiftinin de etkimesi durumundaki davranışı incelenmiştir. Bunun için fonksiyonelimizden yararlanıldı. Bulunan sonuçlar Timoshenko'nun bu tarz problemler için ürettiği,

$$w = \frac{ML^2}{8EI}\frac{2(1-\cos u)}{u^2\cos u} \qquad \textbf{(4.6)}$$

ifadesiyle bulunan çökme değerleri ile karşılaştırıldı.

Çubuğun boyu, M momenti, E, I ve alanını,

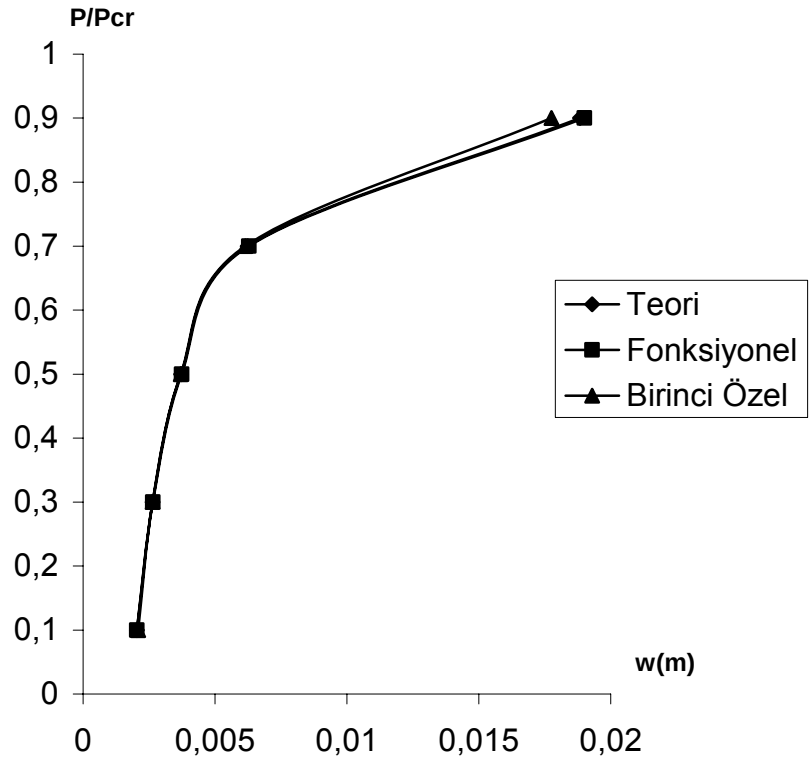
M = -11.303 kNm (-100 kips in.), L = 3.66 m (12 ft.), E = 206 843 Mpa (30 000 ksi),

A = 3.226×10^{-13} m^2 (5 $in.^2$), I = 49.9×10^{-6} m^4 (120 $in.^4$).

şeklinde verildi. Buradan P_{cr} =7614.4 kN olarak bulundu ve sonuçlar aşağıda gösterildi.

Tablo 4.12 : Normal Kuvvet ve Moment Çifti Altında Basit Kirişin Orta Noktasında Oluşan Çökme Tablosu

		Teori	Fonksiyonel	Birinci Özel
P(kN)	P/Pcr	w(m)	w(m)	w(m)
761,438	0,1	-0,00204	-0,00204	-0,00209
2284,313	0,3	-0,00264	-0,00265	-0,00264
3807,188	0,5	-0,00372	-0,00374	-0,00370
5330,063	0,7	-0,00624	-0,00628	-0,00616
6852,938	0,9	-0,01883	-0,01900	-0,01775

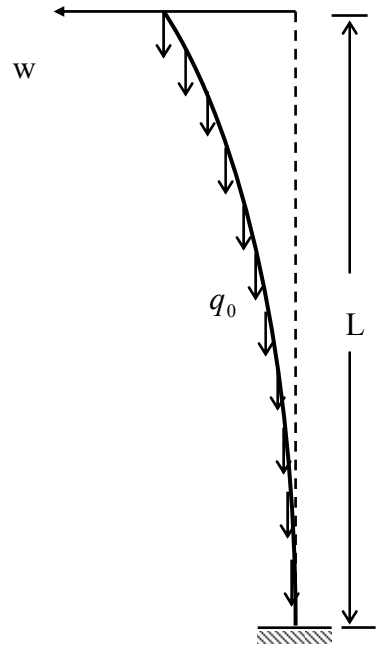


Şekil 4.15 : Normal Kuvvet ve Moment Çifti Altında Basit Kirişin Orta Noktasında *w -P/Pcr* Grafiği

4.5 Burkulma Analizi

Bu kısımda literatürde Euler halleri olarak bilinen burkulma tipleri için, çubuğun ağırlığını ifade eden kendi eksenindeki teğetsel doğrultuda yayılı yük için burkulma analizi yapıldı. Bunun için üçüncü bölümün sonunda anlatılan kritik yükü bulma yöntemi (3.14) kullanılarak hesaplandı.

4.5.1 Birinci Tip Burkulma Problemi



Şekil 4.9 : Birinci Tip Burkulma Problemi

Bu tip problemin literatürdeki bilinen kesin sonucu

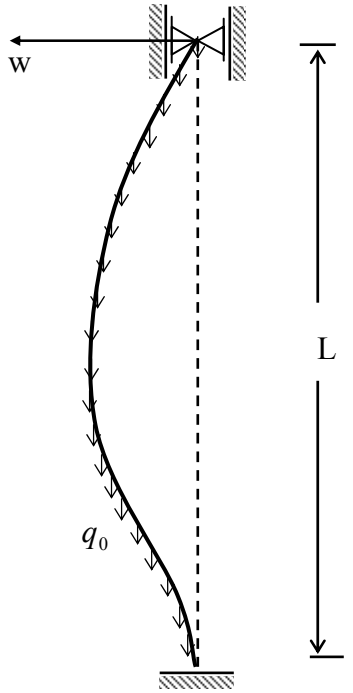
$$(q_o)_k = \frac{7.837EI}{L^3} \qquad \textbf{(4.7)}$$

dir. Bulduğumuz sonuçlar ve hata payları iki eleman, dört eleman ve sekiz eleman çözümleri olarak aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 4.13 : Yayılı Yük Altında Birinci Tip Burkulma Yükü

Eleman Sayısı	Kritik Burkulma Yükü (EI/L^3)	Euler Burkulma Yükü (EI/L^3)	Hata Oranı (%)
2	7,88225	7,837	0,577
4	7,84004		0,039
8	7,83719		0,002

4.5.2 İkinci Tip Burkulma Problemi



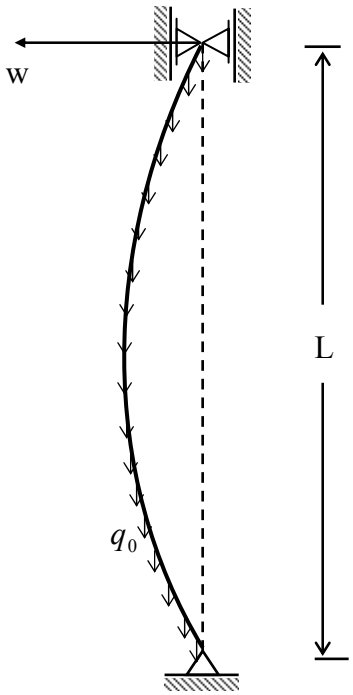
Şekil 4.9 : İkinci Tip Burkulma Problemi

Bu tip problemin literatürdeki kesin sonucunu bilmediğimiz için iki eleman, dört eleman ve sekiz eleman çözümleri yapıldı ve sonuçlar aşağıdaki tabloda gösterildi.

Tablo 4.14 : Yayılı Yük Altında İkinci Tip Burkulma Yükü

Eleman Sayısı	Kritik Burkulma Yükü (EI/L^3)
2	61,3405
4	52,8721
8	52,5244

4.5.3 Üçüncü Tip Burkulma Problemi



Şekil 4.10: Üçüncü Tip Burkulma Problemi

Bu tip problemin literatürdeki bilinen kesin sonucu

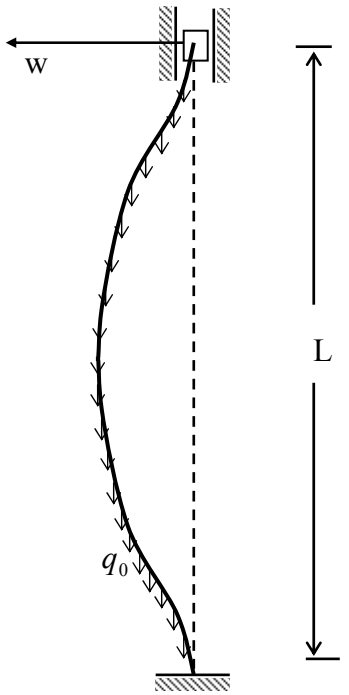
$$(q_o)_k = \frac{18.57EI}{L^3} \tag{4.8}$$

dir. Bulduğumuz sonuçlar ve hata payları iki eleman ve dört eleman çözümleri olarak aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 4.15 : Yayılı Yük Altında Üçüncü Tip Burkulma Yükü

Eleman Sayısı	Kritik Burkulma Yükü (EI/L^3)	Euler Burkulma Yükü (EI/L^3)	Hata Oranı (%)
2	18,6069	18,57	0,199
4	18,5819		0,064
8	18,5707		0,004

4.5.4 Dördüncü Tip Burkulma Problemi



Şekil 4.9 : Dördüncü Tip Burkulma Problemi

Bu tip problemin literatürdeki kesin sonucunu bilmediğimiz için iki eleman, dört eleman ve sekiz eleman çözümleri yapıldı ve sonuçlar aşağıdaki tabloda gösterildi.

Tablo 4.16 : Yayılı Yük Altında Dördüncü Tip Burkulma Yükü

Eleman Sayısı	Kritik Burkulma Yükü (EI/L^3)
2	90,2423
4	75,5561
8	74,6881

5. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında yapılan kabuller doğrultusunda Gateaux diferansiyel yaklaşımı kullanılarak eğri eksenli çubuklara ait bir fonksiyonel sınır terimleri ile birlikte elde edilmiştir. Bu yaklaşımda bütün bilinmeyenler bağımsız değişken olarak kabul edilmiştir.

Fonksiyon çözüm aşaması için artımsal yapıya dönüştürülmüştür. Bu yapının elde edilmesi sırasında iki artımsaldan büyük terimler ihmal edilmiştir. Bulunan artımsal yapının çift artımsallı kısmı sonlu eleman analizinde kullanacağımız eleman matrisini, tek artımsallı kısmı ise yükleme vektörünü verecek şeklide, bütün değişkenlerin artımsal ifadelerine göre türevleri alınmıştır.

Sonlu eleman analizi sırasında kuadratik şekil fonksiyonları kullanıldığından her bir eleman için elemanın sol ucunda, ortasında ve sağ ucunda olmak üzere üçer adet normal kuvvet, moment, yatay yer değiştirme ve düşey yer değiştirme olmak üzere 12 adet bilinmeyen kullanılmıştır. Bulunan yapı içinde bir eleman için, içinde nonlineer terimleri de içeren 12 x 12 büyüklüğüne bir eleman matrisi ve 12 x 1 büyüklüğünde bir yükleme vektörü bulunmuştur.

Ardından sonlu eleman analizi yapıp herhangi bir yükleme altında lineer çözüm bulunmuş ve bulunan bu yeni konum sistemin şekil değiştirmiş hali kabul edilerek yeni artımsal değerler bulunmuştur. Artımsal değerler ve yükleme vektörünün elemanları sıfıra gidinceye kadar enterpolasyon yapılmış ve sıfıra ulaştığı anda problemin çözümü bulunmuştur. Ayrıca fonksiyonel bazı büyüklüklerin ihmal edilmesi ile farklı yapıklarda elde edilmiş ve bunlarında çözümleri aranmıştır.

Bu araştırmalar sırasında kuadratik şekil fonksiyonları kullanılmıştır. Çözümler 2, 4 ve 8 eleman üzerinden yapılmıştır. Sonuçlar incelendiğinde büyük şekil değiştirme ve dış kuvvetler etkisinde ikinci derece mertebeden terimlerin etki açıkça ortaya çıkmıştır.

Bölüm 4.1.2 de, 4.2 de ve 4.3 de sonuçlar lineer teoriye yakın çıkarken, 4.1.1 de sonuçların lineer teoriden uzaklaştığı görülmüştür. Ama aynı problemde ikinci mertebeden büyüklüklerin ihmal edildiği fonksiyonu kullandığımızda sonuçlar lineer teoriye yakın çıkmıştır. Yine 4.1.1 de 2 elemanla düşük kuvvetler altında sonuç alırken, kuvvet büyüyünce sonuç alınamamıştır. Eleman sayısının 4'e ve 8'e çıkarılmasıyla belli bir büyüklüğe kadar sonuç alınmış, ama daha ilerisine gidilememiştir. Ama eleman sayısını arttırınca daha yüksek kuvvetlere çıkılabildiği görülmüştür. Ayrıca şekil fonksiyonları kübik alınırsa daha yüksek kuvvetlere ve daha kesin değerlere gidilebileceği söylenebilir. Fakat bilgisayar kapasitesi ve işlemlerin çok uzun sürmesi sebebiyle eleman sayısı daha fazla arttırılamamış ve kübik şekil fonksiyonları kullanılamamıştır. Bölüm 4.1.2 de, 4.2 de ve 4.3 de ki Tekinalp sonuçları [4] ve [11] den alınmıştır.

Ayrıca fonksiyoneli inceleyebilmek için kendi ekseni doğrultusunda yayılı yük altında Euler burkulma problemleri çözülmüştür. Birinci ve üçüncü tipin sonuçları, literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Ortalama olarak iki eleman da %0.4, dört elemanda %0.05 ve sekiz elemanda %0.003 hata payı ile kritik yayılı yüke ulaşılabiliştir. Elde edilen hata oranları mühendislik açısından kabul edilebilir mertebede olsa da eleman sayısının artırılmasıyla ve şekil fonksiyonlarının mertebelerinin büyültülmesiyle daha iyi sonuçlara gidilebileceği kabul edilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] **Bathe, K.J.,** 2002. Finite Element Procedures, Prentice Hall, New Jersey

[2] **Bradford, M.A. and UY, B. and Pi, Y.L.,** 2002. In-plane Elastic Stab. of Arches Under a Central Concentrated Load, *Jour.of Eng.Mec*., **128,** 710-719.

[3] **DaDeppo, D.A. and Calhoun, P.R.,** 1983. Non-linear Finite Element Analysis of Clamped Arches, *Journal of Struc. Eng.,* **109**, 599-612.

[4] **Güven, N.,** 2002. Geometrik Nonlineer Çubukların Hesabı, *Yüksek Lisans Tezi,* İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul

[5] **Hsiao, K.M. and Hou, F.Y.,** 1987. Non-Linear Finite Elements Analysis of Elastic Frames, *Comput.Struct.,* **26,** 693-701.

[6] **Ibrahimbegoviç, A. and Frey, F.,** 1993. Finite Element Analysis of Linear and Non-linear Planar Deformations of Elastic Initially Curved Beams., *Int.Journal.Numer.Methods.Eng*., **36**, 3239-3258.

[7] **Lee, Y.and Park, K.C.,** 2002. Numerically Generated Tangent Stiffness Matrices for Nonlinear Structural Analysis, *Comp.Met.Appl.Mech.Eng*., **191**, 5833-5846

[8] **Pak, R.Y.S. and Stauffer, E.J.,** 1994. Nonlinear Finite Deformation Analysis of Beams and Columns, *Journal of Eng. Mech*., **120,** 2136-2153.

[9] **Pi ,Y.L. and Trahair ,N.S.,** 1997. Nonlinear Elastic Behaviour of I-Beams Curved in Plane, *Journal of Structural Eng.*, **123,** 1201-1209.

[10] **Rajasekaran ,S. And Padmanabhan ,S.,** 1989. Equations of Curved Beams, *Journal of Eng. Mechanics* , **vol.115,** 1094-1111.

[11]**Tekinalp, B.,** 1954. Düzlem Çubukların Büyük Elastik Yer Değiştirmeleri, *İstanbul Teknik Üniversitesi Bülteni*.

[12] **Torkamani, A.M., Sönmez, M. and Cao, J.,** 1997. Second-order Elastic Plane-frame Analysis Using Finite Element Method*, Journal Of Structural Eng*., **123,** 1225-1235

[13] **Yang, Y.B. ,Kuo, S.R. and Cherng, Y.D.,** 1989. Curved Beam Elements For Nonlinear Analysis, *Journal Of Eng. Mechanics*, **115,** 840-855

[14] **Yoo, C.H. ,Kang, Y.J. and Davidson, J.S.,** 1996. Buckling Analysis of Curved Beams By Finite-Element Discretization, *Jour.Of Mech.*, **122,** 762-770

[15] **Yoo, C.H. and Pfeiffer, A.,** 1984. Buckling of Curved Beams With In-plane Deformation, *Journal Of Structural Eng.,* **100,** 291-301

[16] **Zielinski, A.P. and Frey, F.,** 2001. On Linearization in non-linear structural Finite Element Analysis , *Comput Struct.*, **79**, 825-838

[17] **İnan, M.,** 1962. Cisimlerin Mukavemeti, Arı Kitapevi Matbaası, İstanbul

ÖZGEÇMİŞ

Mustafa AKPINAR, 1980 yılında Giresun'da doğmuştur. İlköğrenimini Yeşilgiresun İlkokulu'nda tamamlamıştır. 1998 yılında Giresun Hamdi Bozbağ Anadolu Lisesi'nden mezun olmuştur. ve orta öğrenimini Giresun'da tamamlamıştır. 1998 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümünde lisans öğrenimine başlamıştır. 2003 yılında aynı okuldan İnşaat Mühendisi unvanı ile mezun olmuştur. Aynı yıl İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Yapı Mühendisliği Programında yüksek lisans programına başlamıştır. Halen Karayolları Genel Müdürlüğü'nde Keşif İhale Mühendisi olarak görev almaktadır.