T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BANACH UZAYLARINDA ASİMTOTİK OLARAK GENİŞLEMEYEN DÖNÜŞÜMLERİN BİR SONLU AİLESİ İÇİN YAKINSAKLIK TEOREMLERİ

Yahya BULUT

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2016

Prof. Dr. Seyit TEMİR danışmanlığında, Yahya BULUT' un hazırladığı **"Banach Uzaylarında Asimtotik Olarak Genişlemeyen Dönüşümlerin Bir Sonlu Ailesi İçin Yakınsaklık Teoremleri"** konulu bu çalışma 24.06.2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

İmza

Danışman : Prof. Dr. Seyit TEMİR .....

Üye : Prof. Dr. Manaf MANAFLI .....

Üye : Doç. Dr. Aydın İZGİ .....

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım.

Prof. Dr. Recep GÜNDOĞAN

Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET…… i
ABSTRACT…….. ii
TEŞEKKÜR…….. iii
1. KURAMSAL TEMELLER……... 1
1.1. Diziler……. 2
1.2. Metrik Uzaylar …….. 4
1.3. Normlu Uzaylar……..... 7
1.4. Sabit Nokta……. 12
2. MATERYAL ve YÖNTEM……. 17
2.1. Genişlemeyen Dönüşümler…… 17
2.2. Bazı önemli tanımlar ve Notasyonlar…… 18
2.3. İterasyon Yöntemleri…….. 20
2.4. Genişlemeyen Dönüşümlerin İterasyon Dizileri İçin Kuvvetli ve Zayıf Yakınsaklıkları….. 22
3. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA……..……..... 29
3.1. Banach Uzaylarında Yeni İterasyon Dizileri İçin Hata Eklenmiş Asimtotik Olarak Genişlemeyen Dönüşümlerin Sonlu Ailesinin Kuvvetli ve Zayıf Yakınsaklık Teoremleri.. 29
4. SONUÇLAR ve ÖNERİLER…… 53
KAYNAKLAR…….. 54
ÖZGEÇMİŞ……... 56

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BANACH UZAYLARINDA ASİMTOTİK OLARAK GENİŞLEMEYEN DÖNÜŞÜMLERİN BİR SONLU AİLESİ İÇİN YAKINSAKLIK TEOREMLERİ

Yahya BULUT

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Seyit TEMİR
Yıl: 2016, Sayfa: 56

Banach uzaylarında genişlemeyen, asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktaya yaklaşımları için iterasyon teknikleri ile ilgili problemler birçok yazar tarafından çalışılmıştır. Bu tezde, literatürde var olan çalışmaların ışığında sonlu adımlı iterasyon dizisi kullanılarak Banach uzaylarında kendi üzerine olan asimptotik olarak genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktasına ve sonlu sayıdaki böyle dönüşümlerin ortak sabit noktasına kuvvetli ve zayıf yakınsaklık teoremleri ispatlanmaktadır.

ANAHTAR KELİMELER: Asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümler, Asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümlerin sonlu ailesi, Ortak sabit nokta, Düzgün konveks Banach uzayı, Yakınsaklık teoremleri.

ABSTRACT

MSc Thesis

CONVERGENCE THEOREMS FOR A FINITE FAMILY OF ASYMPTOTICALLY NONEXPANSIVE MAPPINGS IN BANACH SPACES

Yahya BULUT

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Seyit TEMİR
Year: 2016, Page: 56

Recently, many problems related to iterative techniques for approximating fixed point of nonexpansive mappings, asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces have been studied by many authors. In this thesis, in the light of studies in the existing literature the strong and weak convergence theorems of self and asymptotically nonexpansive mappings to fixed points and finite family of asymptotically nonexpansive mappings to comman fixed point with using finite step iteration sequence in the Banach space are proved.

KEY WORDS: Asymptotically nonexpansive mappings, Finite family of asymptotically nonexpansive mappings, Common fixed point, Uniformly convex Banach space, Convergence theorems.

TEŞEKKÜR

Tezin konusunun seçiminde ve çalışmamda bilgi ve tecrübelerinden yaralandığım danışmanım sayın Prof. Dr. Seyit TEMİR'e ve desteklerini esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

1. KURAMSAL TEMELLER

Banach ve metrik uzaylarda genişlemeyen asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümler için öteleme dizilerin sabit noktaya yaklaşımı ile ilgili problemler birçok yazar tarafından çalışılmaktadır. 1965'de Browder, Banach uzaylarında lineer olmayan genişlemeyen dönüşümleri çalışmıştır. 1967' de Diaz ve Metcalf, sözde genişlemeyen dönüşüm kavramını vermişlerdir. 1972' de Goebel ve Kirk, asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümlerin notasyonunu sunmuşlardır. Petryshyn ve Williamson(1973)'de çalışmaları, ötelemelerin dizisinin sözde genişlemeyen dönüşümlerinin sabit noktaya zayıf ve kuvvetli yakınsaklığı, çeşitli özel durumlarda Dotson (1970) tarafından çalışılan ve Mann (1953) tarafından sunulan Mann ötelemelerinin yakınsaklığı ile ilgilidir.

Tan ve Xu (1993), genişlemeyen dönüşümlerin Ishikawa (1974) tarafından sunulan Ishikawa ötelemelerinin yakınsaklık teoremlerini kurmuşlardır. Ghosh ve Debnath (1997), Ishikawa iterasyon dizilerinin sözde genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktasına yakınsaklığına dair gerekli ve yeterli şartları verdiler. Liu (2001), yukarıdaki sonuçları genişletip ishikawa iterasyon dizilerinin ve hata eklenmiş Ishikawa iterasyon dizilerinin asimptotik sözde genişlemeyen dönüşümlerin ortak sabit noktasına yakınsaklıklarına dair bazı gerekli ve yeterli şartları ispatladı. Xu ve Noor (2002), üç adım iterasyon dizilerinin asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarına yakınsaklıklarına dair bazı gerekli şartlar üzerinde çalıştılar. Cho, Zhou, Guo (2004), hata eklenmiş üç adım iterasyon dizilerinin asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarına yakınsaklıklarına dair bazı gerekli şartları araştırdılar. Quan ve ark. (2005), ortalama hata eklenmiş sonlu adım iterasyon dizilerinin asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sonlu ailesinin ortak sabit noktalarına zayıf ve kuvvetli yakınsaklıklarını çalıştılar. Temir ve Kılıçman (2013), hata eklenmiş sonlu iterasyon dizileri için reel Banach uzayında kendi üzerine olan asimptotik olarak genişlemeyen dönüşümlerin ortak sabit nokta noktalarına kuvvetli ve zayıf yakınsaklıklarını çalışmışlardır.

1.1. Diziler

Tanım 1.1.1. (Dizi): $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinden $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesine tanımlanan her fonksiyona bir reel terimli dizi veya kısaca dizi denir ve $\{x_n\}$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 1.1.2. (Üstten sınırlı dizi): Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \leq M$ olacak şekilde bir M reel sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine üstten sınırlıdır denir. M sayısına da bu dizinin bir üst sınırıdır denir. Üst sınırlarının en küçüğüne dizinin en küçük üst sınırı veya supremumu adı verilir. $\sup x_n$ veya $eküs x_n$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.3. (Alttan sınırlı dizi): Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \geq K$ olacak şekilde bir K reel sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine alttan sınırlıdır denir. K sayısına bu dizinin bir alt sınırıdır denir. Alt sınırlarının en büyüğüne dizinin en büyük alt sınırı veya infimumu denir. $\inf x_n$ veya $ebas x_n$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.4. (Sınırlı dizi): Her $n \in \mathbb{N}$ için $|x_n| \leq A$ olacak şekilde bir A pozitif reel sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine sınırlı dizi denir.

Tanım 1.1.5. (Yakınsak dizi): $\{x_n\}$ bir reel sayı dizisi olsun ve $x_0 \in \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda $|x_n - x_0| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa $\{x_n\}$ dizisi x_0 a yakınsaktır denir ve $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ veya $\{x_n\} \to x_0$ şeklinde gösterilir.

Yakınsak her dizi sınırlıdır ve limiti tektir (Kolmogorov ve Fomin, 1970).

Tanım 1.1.6. (Monoton azalan ve artan dizi): Bir $\{x_n\}$ dizisi verilsin. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n < x_{n+1}$ ise bu diziye monoton artan dizi denir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n > x_{n+1}$ ise monoton azalan dizi denir.

Tanım 1.1.7. (Alt dizi): $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x(n) = x_n$ dizisi verilsin. $n: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n(k) = n_k$ dizisi bir artan dizi olmak üzere $(x \circ n): \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bileşke fonksiyonuna $\{x_n\}$ dizisinin bir alt dizisi denir ve $(x \circ n)(k) = x\big(n(k)\big) = x(n_k) = x_{n_k}$ şeklinde gösterilir.

Teorem 1.1.1. Gerçel değerli bir $\{x_n\}$ dizisinin yakınsak ve limitinin L olması için gerekli ve yeterli koşul $\{x_n\}$ dizisinin bütün $\{x_{n_k}\}$ alt dizilerinin de aynı L limitine yakınsamasıdır. Her sınırlı reel sayı dizisinin en az bir yakınsak alt dizisi vardır (Kolmogorov ve Fomin, 1970).

Tanım 1.1.8. (Üst limit, Alt limit): Herhangi bir X uzayında $\{x_n\}$ dizisi verilsin. O zaman

$$\overline{\lim} x_n = \limsup x_n = \inf_{m \geq 1} \left(\sup_{n \geq m} (x_n) \right)$$

şeklinde tanımlanan limit değerine $\{x_n\}$ dizisinin üst limiti denir.

Benzer olarak

$$\underline{\lim} x_n = \liminf x_n = \sup_{m \geq 1} \left(\inf_{n \geq m} (x_n) \right)$$

şeklinde tanımlanan limit değerine $\{x_n\}$ dizisinin alt limiti denir.

Teorem 1.1.2. $\{x_n\}$ sınırlı bir dizi ise $\limsup x_n$ ve $\liminf x_n$ sırasıyla $\{x_n\}$ dizisinin en büyük ve en küçük limit noktasıdır ve

$$\liminf x_n \leq \limsup x_n \text{ ve } \liminf (-x_n) = -\limsup x_n$$

dir. (Royden, 1968).

Teorem 1.1.3. $\{x_n\}$ reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. O zaman

$$\overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = x \Leftrightarrow \lim x_n = x$$

dir (Royden, 1968).

Tanım 1.1.9. (Cauchy dizisi): $\{x_n\}$ reel terimli bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşı gelen bir $n_0 \in \mathbb{R}$ sayısı m, n ≥ n_0 alındığında $|x_m - x_n| < \varepsilon$ olacak şekilde bulunabiliyorsa $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi adı verilir.

1.2. Metrik Uzaylar

Tanım 1.2.1. (Metrik uzay): X boş kümeden farklı bir küme ve $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu olsun. Her x, y, z∈ X için d fonksiyonu;

(**M1**) $d(x,y) \geq 0$

(**M2**) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(**M3**) $d(x,y) = d(y,x)$

(**M4**) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

koşullarını sağlıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik ve (X,d) ikilisine de metrik uzay denir.

Tanım 1.2.2. (Açık yuvar kapalı yuvar): Bir (X,d) metrik uzayı ile bu uzayın bir x_0 noktası ve pozitif bir r reel sayısı verilsin. Bu durumda

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\}$$

kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar,

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) \leq r\}$$

kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar,

$$S(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) = r\}$$

kümesine de x_0 merkezli ve r yarıçaplı yuvar yüzeyi denir.

Tanım 1.2.3. (Metrik uzaylarda sürekli dönüşüm): X = (X,d) ve Y = (Y,ρ) iki metrik uzay olsun. T: X $\rightarrow$Y dönüşümüne $x_0 \in$ X noktasında sürekli bir dönüşüm denir. Eğer her $\varepsilon > 0$ için d(x,x_0) $< \delta$ olduğunda $\rho(Tx, Tx_0) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ varsa, ya da buna denk olarak $T(B(x_0, \delta)) \subset B(T(x_0), \varepsilon)$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa T dönüşümüne x_0 noktasında süreklidir denir.

Tanım 1.2.4. (Sınırlı küme): (X,d) bir metrik uzayı ve A, X' in boş kümeden farklı bir altkümesi olsun. Eğer d(A) sonlu ise yani d(A) $< \infty$ ise A kümesine sınırlı küme denir. Bu şu anlama gelir: her x, y$\in$ A için d(x,y) $<$ k olacak şekilde bir k $\geq$ 0 sayısı vardır.

Tanım 1.2.5. (Sınırlı dizi): Sınırlı bir küme içerisindeki dizi de sınırlı bir dizidir. Demek ki x_n dizisi sınırlı ise; her m, n$\in$ N için d(x_m, x_n) $\leq k$ olacak şekilde bir k $\geq$ 0 sayısı vardır.

Tanım 1.2.6. (Yakınsak dizi): (X, d) bir metrik uzayı içinde bir $\{x_n\}$ dizisi ve $x \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n_0 \leq n$ olduğunda $d(x_n, x) < \varepsilon$ ya da $x_n \in B(x, \varepsilon)$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisi x noktasına yakınsıyor denir. Yani $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ olacak şekilde $x \in$ X varsa $\{x_n\}$ dizisine X de yakınsak dizi denir. Bu durum $x_n \rightarrow x$ ya da $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ şeklinde ifade edilir.

Önerme 1.2.1. Bir (X, d) metrik uzayında yakınsak her dizi sınırlıdır ve limiti tektir (Kolmogorov ve Fomin, 1970).

Tanım 1.2.7. (Örtü): $\mathbb{R}$ nin bazı alt kümelerinin bir $\mathfrak{M}$ sınıfı göz önüne alınsın. Bir $A \subset \mathbb{R}$ kümesi için, $A \subset \bigcup_{\lambda\in A} A_\lambda$, $A_\lambda \in \mathfrak{M}$ yazılabiliyorsa $\mathfrak{M}$ sınıfına A kümesinin bir örtüsü adı verilir. Bu durumda A kümesinin her noktası $\mathfrak{M}$ sınıfı içinde bulunur. $\mathfrak{M}$ deki bütün kümeler açıksa bu sınıf bir açık örtü adını alır. $\mathfrak{M}$ sınıfı $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ gibi kümelerin oluşturduğu sayılabilir bir sınıfsa ve $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ yazılabiliyorsa $\mathfrak{M}$ sınıfına A nın sayılabilir örtüsü denir.

Tanım 1.2.8. (Alt örtü): $\mathfrak{M}$ sınıfı bir $A \subset \mathbb{R}$ kümesinin bir örtüsü olsun. $\mathfrak{A}$ her üyesi $\mathfrak{M}$ nin içinde olan bir alt kümeler sınıfıysa ve $\mathfrak{A}$ sınıfı da A kümesinin bir örtüsü ise $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}$ alt sınıfı A nın bir alt örtüsü adını alır.

Tanım 1.2.9. (Kompakt küme): Bir $A \subset \mathbb{R}$ kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa A ya kompakt küme adı verilir.

Önerme 1.2.2. Bir metrik uzayın kompakt alt kümesi kapalı ve sınırlıdır (Bayraktar, 1992).

Tanım 1.2.10. (Kompakt metrik uzay): X kompakt bir küme ise X metrik uzayına kompakt metrik uzay denir.

Tanım 1.2.11. (Tam metrik uzayı): Bir (X,d) metrik uzayında alınan her Cauchy dizisi X içinde yakınsak ise (X,d) metrik uzayına tam metrik uzay denir. (Kolmogorov ve Fomin, 1970)

Her kompakt metrik uzay tamdır (Kolmogorov ve Fomin, 1970).

Tanım 1.2.12. (Noktanın kümeye uzaklığı): X bir metrik uzay ve A bir alt kümesi olsun. Bir $x \in X$ noktasının A kümesine uzaklığı bu noktanın A nın tüm noktalarına uzaklıklarının infimumudur.

$$d(x,A) = \inf\{d(x,y) : y \in A\}$$

Tanım 1.2.13. (İki kümenin birbirine uzaklığı): X bir metrik uzay ve A ile B birer alt kümesi olsun. A ve B kümesinin birbirine uzaklığı, $x \in A$ ve $y \in B$ için

$$d(A,B) = \inf\{d(x,y) : x \in A, y \in B\}$$

dir. Bu tanımda $d(A,B) = d(B,A)$ olduğu açıktır.

İki küme arasındaki uzaklığın sıfır olmasının bu kümelerin aynı olduğunu ifade etmediği açıktır.

Tanım 1.2.14. (Kümenin çapı): X metrik uzayının bir alt kümesi A olsun. $x, y \in A$ için bir A alt kümesinin çapı,

$$d(A) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A\}$$

ile tanımlanır.

Tanım 1.2.15. (Lineer uzay, Vektör uzayı): L boş olmayan bir küme ve F, reel ya da kompleks sayılar cismi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye F üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir.

A) L, + işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

G1) Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir.

G2) Her $x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir.

G3) Her $x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır.

G4) Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır.

G5) Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir.

B) $x + y \in L$ ve $\alpha + \beta \in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

L1) $\alpha x \in L$ dir.

L2) $\alpha(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$ dir.

L3) $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$ dir.

L4) $(\alpha\beta).x = \alpha.(\beta.x)$ dir.

L5) $1.x = x$ dir.

$F = \mathbb{R}$ olması halinde L ye reel; $F = C$ olması halinde ise L ye kompleks lineer uzay denir.

1.3. Normlu Uzaylar

Tanım 1.3.1. (Normlu lineer uzayı): X bir lineer uzay olsun. $N: X \to \mathbb{R}$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

N1) $N(x) \geq 0$ ve $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

N2) $N(\alpha x) = |\alpha| N(x)$

N3) $N(x+y) = N(x) + N(y)$

koşullarını sağlıyorsa bu dönüşüme norm denir. X bir lineer uzay ve bu uzay üzerinde bir norm tanımlanmış olsun. Bu uzaya normlu lineer uzay denir. Genel olarak, N norm dönüşümü yerine $\|\cdot\|$ sembolü kullanılır.

X normlu bir lineer uzay olmak üzere,

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; d(x,y) = \|x-y\|$$

şeklinde tanımlanan d dönüşümü X uzayı üzerinde bir metriktir. Bu metriğe norm metriği denir. Bu nedenle her normlu uzay bir metrik uzaydır (Bayraktar, 1992).

Tanım 1.3.2. (Sınırlı küme): $(X, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzayının alt kümesi A olsun. Eğer

$$R_A = \sup\{\|x-y\| : x \in A, y \in A\} < \infty$$

oluyorsa A kümesine X içinde sınırlı küme denir.

Tanım 1.3.3. (Konveks küme): X bir lineer uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer $x, y \in A$ için $0 \le \lambda \le 1$ olmak üzere $\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y \in A$ oluyorsa A kümesine konveks küme denir.

Tanım 1.3.4. (Yakınsak dizi): $(X, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzayı içinde bir dizi (x_n) ve $x \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n_0 \le n$ olduğunda $\|x_n - x\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisi x noktasına yakınsaktır denir ve $x_n \to x$ şeklinde gösterilir.

Önerme 1.3.1. $(X, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzayı içinde yakınsak her dizi sınırlıdır ve limiti tektir (Kolmogorov ve Fomin, 1970).

Tanım 1.3.5. (Cauchy dizisi): $(X,\|\cdot\|)$ bir normlu lineer uzay ve bu uzay içinde bir dizi (x_n) olsun. Her $\varepsilon>0$ için $n_0 \le n,m$ olduğunda

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı varsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Önerme 1.3.2. $(X,\|\cdot\|)$ normlu lineer uzayı içinde her Cauchy dizisi sınırlıdır (Kolmogorov ve Fomin, 1970).

Önerme 1.3.3. $(X,\|\cdot\|)$ normlu lineer uzayında $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisi $x \in X$ noktasına yakınsak bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisine sahip ise $\{x_n\}$ diziside x 'e yakınsaktır (Kolmogorov ve Fomin, 1970).

Tanım 1.3.6. (Banach Uzayları): X normlu lineer uzay olsun. X , norm metriğine göre tam ise X uzayına Banach uzayı denir.

X in normlu reel veya kompleks lineer uzay oluşuna göre Banach uzayına, reel veya kompleks Banach uzayı denir.

Örnek 1.3.1. $C[a,b]$ yani $[a,b]$aralığında reel değerli ve sürekli fonksiyonlar uzayı $\|x\| = \max_{t\in[a,b]} \{|x(t)|\}$ normuna göre Banach uzayıdır.

Örnek 1.3.2. $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n): x_i \in \mathbb{R}\}$ kümesi bileşen ve bileşen toplama ve skalerle çarpma ve

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

normuna göre bir reel Banach uzaydır.

Tanım 1.3.7. (Lineer ve lineer Olmayan Dönüşümler): X ve Y aynı bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $T: X \to Y$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{K}$ için

$$T(x+y) = T(x) + T(y)$$

$$T(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot T(x)$$

ya da buna denk olarak her $x, y \in X$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ için

$$T(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot T(x) + \beta \cdot T(y)$$

şartını sağlıyorsa T dönüşümüne lineer dönüşüm denir.

Eğer T dönüşümü yukarıdaki şartlardan herhangi birini gerçeklemezse T dönüşümüne lineer olmayan dönüşüm denir.

Tanım 1.3.8. (Sınırlı lineer dönüşümler): (X,$\|.\|$) ve (Y,$\|.\|'$) iki normlu uzay ve $T: X \to Y$ bir dönüşüm olsun. Her $x \in X$ için

$$\|T(x)\|' \leq M.\|x\|$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sabiti varsa, T dönüşümüne sınırlı dönüşüm denir.

Tanım 1.3.9. (Sürekli lineer dönüşüm): (X,$\|.\|$)ve (Y,$\|.\|'$)iki normlu uzay ve $T: X \to Y$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in X$ ise $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\|x - x_0\| < \delta$ için

$\|T(x) - T(x_0)\|' < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa T dönüşümüne x_0 noktasında süreklidir denir.

Tanım 1.3.10. (Lineer fonksiyonel): X bir lineer uzay olsun. Bu uzayın her bir vektörüne karşılık bir skaler sayı getiren $f: X \to F$ lineer dönüşümüne lineer fonksiyonel denir.

Tanım 1.3.11. (Sürekli fonksiyon): $(X, \|\cdot\|_1)$, $(Y, \|\cdot\|_2)$ birer normlu lineer uzay. X uzayından Y içine f bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$\|x - x_0\|_1 < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_2 < \varepsilon$$

ya da buna denk olarak

$$f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir denir.

Bir $\left(X, \|\cdot\|\right)$ normlu lineer uzayının her noktasında sürekli olan f dönüşümüne X üzerinde sürekli bir fonksiyon adı verilir.

Tanım 1.3.12. (Sıkı konveks Banach uzayı): X bir Banach uzayı olsun. Her $x, y \in X$ için $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ ve $\|x-y\| > 0$ iken $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1$ ise X uzayına sıkı konveks Banach uzayı adı verilir.

Tanım 1.3.13. (Düzgün konveks Banach uzayı): X bir Banach uzayı olsun. Eğer $x, y \in X$ ve herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\|x\| \leq 1,\ \|y\| \leq 1 \text{ ve } \|x-y\| \geq \varepsilon$$

olduğunda

$$\|x+y\| \leq 2(1-\delta)$$

olacak biçimde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa X uzayına düzgün konveks Banach uzayı denir.

Tanım 1.3.14. (Kuvvetli yakınsaklık): X normlu lineer uzayı içinde bir dizi (x_n) ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$$

ise (x_n) dizisi x_0 noktasına kuvvetli yakınsıyor denir ve $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 1.3.15. (Zayıf yakınsaklık): X normlu lineer uzayı içinde bir dizi (x_n) dizisi verilmiş olsun. Eğer, her $f \in X'$ için

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

olacak biçimde bir $x_0 \in X$ elemanı varsa (x_n) dizisi x_0 a zayıf yakınsıyor denir ve $x_n \xrightarrow{z} x_0$ şeklinde ifade edilir.

Teorem 1.3.1. X normlu lineer uzayı içinde $\{x_n\}$ bir dizi olsun. O zaman,

(i) Kuvvetli yakınsak ise zayıf yakınsaktır.

(ii) (i) şartının tersi genelde doğru değildir.

(iii) Eğer X normlu uzayının boyutu sonlu ise o zaman zayıf yakınsak ise kuvvetli yakınsaktır (Kolmogorov ve Fomin, 1970).

1.4. Sabit Nokta

Tanım 1.4.1. (Sabit nokta): X boş olmayan bir küme ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $T(x) = x$ ise $x \in X$ değerine T dönüşümünün sabit noktası denir. T 'nin bütün sabit noktalarının kümesi F_T ile ya da $Fix(T)$ ile gösterilir.

Örnek 1.4.1.

1) Eğer $X = \mathbb{R}$ ve $T(x) = x^2 + 5x + 4$ olursa $F(T)$ yi inceleyelim.

$T(x) = x$

$T(x) = x^2 + 5x + 4 = x$

$x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow F(T) = \{-2\}$ olur.

2) $X = \mathbb{R}$ ve $T(x) = x^2 - x$ ise $F_T = \{0, 2\}$ olur.

3) $X = \mathbb{R}$ ve $T(x) = x^2 + 2$ ise $F_T = \phi$ olur.

4) $X = \mathbb{R}$ ve $T(x) = x$ ise $F_T = \mathbb{R}$ olur.

X herhangi bir küme ve $T: X \to X$ dönüşüm olsun. Verilmiş herhangi bir x $x \in X$ için $T^0(x) = x$ ve $T^{n+1}(x) = T(T^n(x))$ ifadeleri ile tümevarımsal teknik kullanarak $T^n(x)$ ifadesini tanımlarız.

Burada $T^n(x)$ ifadesine x 'in T dönüşümü altında n'inci iterasyonu deriz. Daha kolay bir gösterim olduğundan dolayı $T(x)$ ifadesi yerine Tx ifadesini kullanacağız.

$T^n (n \geq 1)$ dönüşümüne T dönüşümünün n'inci iterasyonu(tekrar) denir.

Herhangi $x_0 \in X$ için $x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0$, $n = 1, 2, \ldots$ şeklinde verilen bir $\{x_n\}_{n\geq 0} \subset X$ dizisine ilk değeri x_0 olan ardışık yaklaşımlar dizisi denir. Bu dizi aynı zamanda x_0 dan başlayan Picard iterasyonu olarak da adlandırılır.

Verilen bir özdönüşüm aşağıdaki özellikleri açıkça sağlar.

1) Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $F_T \subset F_{T^n}$ olur.

2) bazı $n \in \mathbb{N}$ için $F_{T^n} = \{x\}$ ise $F_T = \{x\}$ dir.

2 ' nin tersi genellikle örnekte görüleceği gibi doğru değildir.

Örnek 1.4.2. $T : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$ dönüşümü verilsin ve $T(1) = 3$ $T(2) = 2$, $T(3) = 1$ olarak tanımlansın. Burada $F_T = \{2\}$ iken, $F_{T^2} = \{1, 2, 3\}$ kümesidir.

Tanım 1.4.2. (Süreklilik modülü): $\phi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu 0 da sürekli, artan bir fonksiyon olsun ve $\phi(0) = 0$ koşulunu sağlasın. (X, d) ve (Y, ρ) metrik uzaylar olmak üzere $f : X \to Y$ fonksiyonu her $x_1, x_2 \in X$ için

$$\rho\big(f(x_1), f(x_2)\big) \leq \phi\big(d(x_1, x_2)\big)$$

bağıntısını gerçeklerse ϕ ye f fonksiyonun bir süreklilik modülü adı verilir.

Tanım 1.4.3. (Lipschitz dönüşüm): (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \to X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq k.d(x, y)$$

olacak şekilde bir $k \geq 0$ sabiti varsa bu eşitsizliğe Lipschitz koşulu, T dönüşümüne Lipschitzian dönüşüm ve bu şartı sağlayan en küçük k sayısına da Lipschitz sabiti denir. Süreklilik modülü ve Lipschitz tanımlarından Lipschitzian dönüşümleri düzgün sürekli dönüşümlerdir. Çünkü, her $\varepsilon > 0$ için d(x,y)$< \delta$ olduğunda $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$ seçersek k.d(x,y)$< k\delta = \varepsilon$ olur. Buradan

$$d(Tx, Ty) \leq k.d(x, y) < \varepsilon \Longrightarrow d(Tx, Ty) < \varepsilon \text{ olur.}$$

Tanım 1.4.4. (Büzülme (contraction) dönüşümü): (X,d) bir metrik uzay ve T:X→X dönüşüm olsun. Her x,y∈ X için,

$$d(Tx,Ty) \leq k.d(x,y)$$

eşitsizliği $0 \leq k < 1$ için sağlanıyorsa T dönüşümüne büzülme dönüşümü denir. Bir büzülme dönüşümünün Lipschitz sürekli bir fonksiyon olduğu açıktır. k Lipschitz sabiti bu durumda büzülme sabiti olarak adlandırılır.

Teorem 1.4.1. Tam metrik uzay üzerinde her büzülme dönüşümü, bir sabit noktaya sahiptir(Banach büzülme prensibi) (Kolmogorov ve Fomin, 1970).

İspat: $x_0 \in X$ ve $\{x_n\}$ dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$x_1 = Tx_0,\ x_2 = Tx_1,\ x_3 = Tx_2,\ \ldots,\ x_n = Tx_{n-1},\ \ldots$$

x_n dizisine iterasyon dizisi adı verilir.

$$d(x_1,x_2) = d(T(x_0),T(x_1)) \leq k \cdot d(x_0,x_1) = k^1 \cdot d(x_0,T(x_0))$$

$$d(x_2,x_3) = d(T(x_1),T(x_2)) \leq k \cdot d(x_1,x_2) = k^2 \cdot d(x_0,T(x_0))$$

$$d(x_3,x_4) = d(T(x_2),T(x_3)) \leq k \cdot d(x_2,x_3) = k^3 \cdot d(x_0,T(x_0))$$

...
...
...

$d(x_n,x_{n+1}) = d(T(x_{n-1}),T(x_n)) \leq k \cdot d(x_{n-1},x_n) = k^n \cdot d(x_0,T(x_0))$ dir.

Herhangi bir m pozitif tam sayısı için

$$\begin{aligned} d(x_n,x_m) &\leq d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{n+1},x_{n+2}) + \ldots + d(x_{m-1},x_m) \\ &\leq k^n d(x_0,T(x_0)) + k^{n+1} d(x_0,T(x_0)) + \ldots + k^{m-1} d(x_0,T(x_0)) \\ &\leq \left(k^n + k^{n+1} + \ldots + k^{m-1}\right) \cdot d(x_0,T(x_0)) \\ &= \frac{k^n - k^m}{1-k} \cdot d(x_0,T(x_0)) \\ &< \frac{k^n}{1-k} \cdot d(x_0,T(x_0)) \end{aligned}$$

ve $0<k<1$dir.

Bu sebeple $n\to\infty$ iken $d(x_n,x_m)\to 0$ dır. Böylece $\{x_n\}$ dizisi Cauchy dizisidir. X tam olduğu için $\{x_n\}$ dizisi x e yakınsaktır. x, T nin sabit bir noktası olsun.

Yani $T(x)=x$ olsun.

$$\begin{aligned} d(x,T(x)) &\le d(x,x_n)+d(x_n,T(x)) \\ &\le d(x,x_n)+d(T(x_{n-1}),T(x)) \\ &\le d(x,x_n)+k\cdot d(x_{n-1},x) \end{aligned}$$

$n\to\infty$ iken $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ olduğu için $d(x,T(x))\to 0$ dır. Böylece $T(x)=x$ olur. Yani x, T nin sabit bir noktasıdır.

$T(y)=y$ olacak şekilde $y\in X$ olsun.

$$d(x,y)=d(T(x),T(y))=k\cdot d(x,y)$$

olur.

Eğer $x\neq y$ ise $d(x,y)>0$ dır. $k\ge 1$, $0<k<1$ olmasıyla çelişir.

Bu çelişki $x=y$ olduğunu gösterir. Böylece tek sabit nokta mevcuttur.

Teorem 1.4.2. X bir tam metrik uzay ve f bir büzülme dönüşümü ise f fonksiyonunun tek bir sabit noktası vardır. Büzülme olmayan dönüşümlerin de sabit noktası vardır, hatta tek olabilir (Kolmogorov ve Fomin, 1970).

Örnek 1.4.3. $T(x)=2+\frac{1}{2}\cdot x$, $x\in[0,1]$ şeklinde tanımlanan T:[0,1]⟶ ℝ dönüşümü $[0,1]$ üzerinde büzülme dönüşümüdür, fakat bu aralıkta sabit noktaya sahip değildir.

Çözüm: d:[0,1]x[0,1] ⟶ $\mathbb{R}^+$, $d(x,y)=\|x-y\|$ şeklinde tanımlanan uzaklık fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde bir metriktir. d metriğine $\|\cdot\|$ normunun indirgediği metrik adı verilir. Her $x,y\in[0,1]$ ve $0<k<1$ koşulunu sağlayan bir k reel sayısı için

$$d\left(T\left(x\right),T\left(y\right)\right)\le k\cdot d\left(x,y\right)$$
$$\left\|T\left(x\right)-T\left(y\right)\right\|\le k\cdot\left\|x-y\right\|$$
$$\left\|2+\frac{1}{2}\cdot x-\left(2+\frac{1}{2}\cdot y\right)\right\|\le k\cdot\left\|x-y\right\|$$
$$\left\|2+\frac{1}{2}\cdot x-2-\frac{1}{2}\cdot y\right\|\le k\cdot\left\|x-y\right\|$$
$$\left\|\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{2}\cdot y\right\|\le k\cdot\left\|x-y\right\|$$
$$\frac{1}{2}\cdot\left\|x-y\right\|\le k\cdot\left\|x-y\right\|$$
$$\left\|x-y\right\|\le 2\cdot k\cdot\left\|x-y\right\|$$

$$0<2\cdot k<1\Rightarrow 0<k<\frac{1}{2}\text{ dir.}$$

T , $\left[0,1\right]$ üzerinde büzülme dönüşümüdür. $x\in\left[0,1\right]$ için

$$T\left(x\right)=x\Rightarrow 2+\frac{1}{2}\cdot x=x\Rightarrow 2=\frac{x}{2}\Rightarrow x=4\notin\left[0,1\right]\text{ dir.}$$

Gerçekten T dönüşümü $\left[0,1\right]$ aralığında sabit noktaya sahip değildir.

Dikkat edilirse, verilen bir *T* büzülme dönüşümü aynı zamanda sürekli bir dönüşümdür. O zaman *T* sürekli değilse kesinlikle büzülme dönüşüm de olamaz.

Teorem 1.4.3. n ≥ 2 için T^n, bir (X,d) tam metrik uzayında büzülme dönüşümü ise T'nin bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir(Kolmogorov ve Fomin, 1970).

Bu teoremden yola çıkarak T büzülme dönüşümü olmasa bile T^n 'nin büzülme dönüşümü olması, T'nin sabit noktasının olmasını garanti ediyor diyebiliriz.

Örnek 1.4.4. $T:\left[0,2\right]\to\left[0,2\right]$dönüşümü

$$T(x)=\begin{cases}0, & x\in\left[0,1\right]\\ 1 & x\in\left(1,2\right]\end{cases}\text{ ile tanımlansın.}$$

T nin x=1 de süreksiz olduğu açıktır ve dolayısıyla T bir büzülme dönüşümü olamaz. Diğer taraftan T^2, $\left[0,2\right]$de bir büzülme dönüşümüdür ve x = 0, T nin tek bir sabit noktasıdır.

2. MATERYAL ve YÖNTEM

2.1. Genişlemeyen Dönüşümler

Tanım 2.1.1. (Genişlemeyen dönüşüm): X Banach uzayı ve C, X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer $T:C\to C$ dönüşümü her $x,y\in C$ için

$$\|Tx-Ty\|\le\|x-y\|$$

eşitsizliğini gerçekliyorsa T dönüşümüne C üzerinde genişlemeyen dönüşüm denir.

Örnek 2.1.1. X Banach uzayı ve C, X in kapalı konveks bir alt kümesi olsun. $T:C\to C$ dönüşümü, $T(x)=\frac{x}{2}+a$, $(a\neq 0)$ şeklinde tanımlansın. O zaman T genişlemeyen bir dönüşümdür.

Çözüm: Gerçekten her $x,y\in C$ ve $y\neq 0$ için

$$\|T(x)-T(y)\|=\left\|\frac{x}{2}+a-\left(\frac{y}{2}+a\right)\right\|=\left\|\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right\|=\frac{\|x-y\|}{2}\le\|x-y\|$$

dir.

Bu durumda aşağıdaki gerektirmelerin doğruluğu kolaylıkla görülür.

T, büzülme dönüşümü$\Longrightarrow$ T, genişlemeyen dönüşüm $\Longrightarrow$ T, Lipschitz dönüşüm.

Tanım 2.1.2. (Sözde(Quasi) genişlemeyen dönüşüm): X Banach uzayı ve C, X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer $T:C\to C$ dönüşümü her $x\in C$ ve her $p\in F(T)$ için

$$\|T(x)-p\|\le\|x-p\|$$

eşitsizliğini gerçekliyorsa T dönüşümüne C üzerinde sözde genişlemeyen dönüşüm denir.

Uyarı 2.1.1. Bir genişlemeyen dönüşüm, sabit nokta kümesi boştan farklı olmak şartıyla aynı zamanda sözde genişlemeyen dönüşümdür. Tersi her zaman doğru değildir.

Tanım 2.1.3. (Asimtotik olarak genişlemeyen dönüşüm): X Banach uzayı C, X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. $T:C\to C$ dönüşümü, her $x,y\in C$ ve $n\geq 1$ için

$$\left\|T^n x-T^n y\right\|\leq k_n\left\|x-y\right\|$$

eşitsizliğini sağlayan $n\to\infty$ iken $k_n\to 1$ olacak şekilde $k_n\subset[1,\infty)$ pozitif reel sayı dizisi varsa T dönüşümüne asimtotik olarak genişlemeyen dönüşüm adı verilir.

Tanım 2.1.4. (Asimtotik olarak sözde genişlemeyen dönüşüm): X Banach uzayı, C X in boş olmayan bir alt kümesi ve $F(T)$, T nin sabit noktalarının kümesi olsun. $T:C\to C$ dönüşümü her $x\in C$, her $p\in F(T)$ ve $n\geq 1$ için

$$\left\|T^n x-p\right\|\leq k_n\left\|x-p\right\|$$

eşitsizliğini sağlayan $n\to\infty$ iken $k_n\to 1$ olacak şekilde $k_n\subset[1,\infty)$ pozitif reel sayı dizisi varsa T dönüşümüne asimtotik olarak sözde genişlemeyen dönüşüm adı verilir.

Tanım 2.1.5. (Düzgün *L*-Lipschitz dönüşüm): X Banach uzayı, C, X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. $T:C\to C$ dönüşümü her $x,y\in C$ ve $n\geq 1$ için

$$\left\|T^n x-T^n y\right\|\leq L\left\|x-y\right\|$$

olacak şekilde $L>0$ sabiti varsa T dönüşümüne düzgün L-Lipschitz adı verilir.

Uyarı 2.1.2: Asimtotik olarak genişlemeyen dönüşüm, sabit nokta kümesi boştan farklı olmak şartıyla aynı zamanda asimtotik olarak sözde genişlemeyen dönüşümdür. Tersi her zaman doğru değildir.

2.2. Bazı Önemli Tanımlar ve Notasyonlar

Tanım 2.2.1. (Opial şartı): X bir Banach uzayında $x\in X$ elemanına zayıf yakınsayan herhangi bir $\{x_n\}$ dizisi ve her x≠y için

$$\liminf_{n\to\infty}\left\|x_n-x\right\|<\liminf_{n\to\infty}\left\|x_n-y\right\|$$

ise o zaman X Opial şartını sağlar denir.

Tanım 2.2.2. (Demi-closed(yarı kapalı)): X bir Banach uzayı, C kümesi X'in boştan farklı kapalı bir alt kümesi ve $T:C\to C$ bir dönüşüm olsun. C içinde $\{x_n\}$ sınırlı dizisi, $x^* \in C$ 'e zayıf ve Tx_n dizisi 0'a kuvvetli yakınsadığında $Tx^* = 0$ olursa T dönüşümüne 0 da yarı kapalı(demi-closed) dönüşüm denir.

Tanım 2.2.3. (Semi-compact(yarı kompakt)): X bir Banach uzayı, C kümesi X in kapalı bir alt kümesi ve $T:C\to C$ dönüşüm olsun. C içinde $\{x_n\}$ sınırlı dizisi ile $\lim_{n\to\infty}\|x_n - Tx_n\| = 0$ verilsin. $x_{n_i} \to x^* \in C$ (kuvvetli yakınsak) olacak şekilde $\{x_n\}$ dizisinin bir alt dizisi $\{x_{n_i}\}$ mevcutsa o zaman T dönüşümüne yarı kompakt(semi-compact) denir.

Tanım 2.2.4. (Tamamen sürekli dönüşüm): $T: C \to C$ bir dönüşüm olsun. Eğer her sınırlı $\{x_n\}$ dizisinin $\{x_{n_j}\}$ alt dizisi var ve $\{Tx_{n_j}\}$ dizisi T nin görüntü kümesinde yakınsak ise, T dönüşümüne tamamen süreklidir denir.

Tanım 2.2.5. (A Şartı): X düzgün konveks Banach uzayı ve C, X in boştan farklı konveks alt kümesi ayrıca T: $C\to C$ bir dönüşüm ve $F(T) \neq \emptyset$ olsun. Her $k > 0$ için $f(k) > 0$, $f(0) = 0$ olacak olacak şekilde azalmayan bir $f:[0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonu var ve her $x \in C$ için $\|x - Tx\| \geq f(d(x,F(T)))$ ise, T ye (A) şartını sağlar deriz(Senter ve Dotson 1974). Burada $d(x,F(T)) = \inf_{y\in F(T)} d(x,y)$ dir. (A) şartı, C nin kompaktlığından daha zayıftır (Tan ve Xu, 1993).

Lemma 2.2.1. X bir düzgün konveks Banach uzayı ve bütün pozitif tamsayılar için $0 < p \leq t_n \leq q < 1$ olsun. Ayrıca $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ X de bazı $r \geq 0$ için

$$\limsup_{n\to\infty}\|x_n\| \leq r, \limsup_{n\to\infty}\|y_n\| \leq r \text{ ve}$$

$$\limsup_{n\to\infty}\|t_n x_n + (1-t_n)y_n\| = r$$

şartlarını sağlayan iki dizi olsun. Bu durumda

$$\limsup_{n\to\infty}\|x_n - y_n\| = 0 \text{ olur(Schu,1991).}$$

2.3. İterasyon Yöntemleri

Bir dönüşümün sabit noktaları bulunurken çeşitli iterasyonlar kullanılır. Bunlardan bazıları aşağıdaki gibidir;

Tanım 2.3.1. (Picard iterasyonu): (X ,d) bir metrik uzayı ve C, X in kapalı bir alt kümesi ve $T:C\to C$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in C$ olmak üzere Picard iterasyonu; $x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, n = 1,2,...$ şeklinde tanımlanır (Picard 1980). Picard iterasyonu bazen ardışık yaklaşıklıkların dizisi(sequence of succesive approximations) olarak da adlandırılır.

Tanım 2.3.2. (Mann iterasyon dizisi): 1953 yılında Mann tarafından oluşturulmuştur. Banach büzülme teoremini sağlamayan dönüşümlerin sabit noktalarının bulunmasında kullanılmıştır. X bir normlu uzay ve C, X'in boştan farklı konveks bir altkümesi, $T:C\to C$ bir dönüşüm ve $x_1 \in C$ olmak üzere Mann iterasyonu aşağıdaki gibi olur;

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n Tx_n, n = 1,2,...$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}, (0,1)$ aralığında

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$$

şartlarını sağlayan bir dizidir.

Tanım 2.3.3. (İshikawa iterasyon dizisi): Bu iterasyon 1974 yılında S. Ishikawa tarafından kurulmuş ve Mann iterasyonunun yetersiz kaldığı durumlarda kullanılmak üzere oluşturulmuştur. Bu iterasyon ilk olarak bir Hilbert uzayının konveks ve kompakt bir altkümesi üzerinde tanımlı Lipschitz ve pseudocontractive dönüşümün sabit bir noktaya kuvvetli yakınsamasını kurmak için kullanıldı (Berinde 2006).

X Banach uzayı, C, X in konveks bir alt kümesi ve $T:C\to C$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in C$ olmak üzere

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n Ty_n,$$

$$y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n Tx_n \qquad n = 0,1,2,...$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\} \in (0,1)$ ve

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$$

dır (Ishikawa 1974).

Yukarıdaki eşitlikte verilmiş iterasyonda β_n= 0 alınırsa, bu iterasyon Mann iterasyonuna indirgenir. Buna rağmen Mann ile Ishikawa iterasyonları için yakınsama sonuçları arasında genel bir bağ yoktur (Berinde 2006).

Tanım 2.3.4. (Noor İterasyonu): 2000 yılında Noor tarafından kurulmuştur. X bir normlu uzay, C X in boş olmayan konveks alt kümesi olsun. $T:C\to C$ bir dönüşüm ve $x_1 \in$ C keyfi bir nokta olmak üzere Noor iterasyonu

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n Ty_n,$$
$$y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n Tz_n,$$
$$z_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n Tx_n, n \geq 1$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $\{\alpha_n\},\{\beta_n\},\{\gamma_n\} \in (0,1)$ ve

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0, \lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$$

dir (Noor 2000).

2.4. Genişlemeyen Dönüşümlerin İterasyon Dizileri İçin Kuvvetli ve Zayıf Yakınsaklıkları

Teorem 2.4.1. X Banach uzayı, C X in kapalı konveks bir alt kümesi ve $T:C\to C$ sürekli bir dönüşüm olsun. T dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın.

i) $F(T)\neq\varnothing$

ii) T , sözde genişlemeyen bir dönüşümdür.

Yani $x\in C$ ve $p\in F(T)$ için $\|T(x)-p\|\leq\|x-p\|$ dir. O zaman, $x_0\in C$ için $x_n=T_{\lambda,\mu}^n(x_0)$ ile tanımlı $\{x_n\}$ dizisinin C içinde T nin sabit noktasına yakınsaması için gerek ve yeter şart $n\to\infty$ iken $d(x_n,F(T))\to 0$ dır (Ghosh ve Debnath, 1997).

Petryshyn ve Williamson (1973) de X reel Banach uzayı, C, X in kapalı bir alt kümesi ve $T:C\to X$ sürekli bir dönüşüm olsun. $x_0\in C$, $\lambda\in(0,1)$ ve $\{x_n\}$ iterasyon dizisi aşağıdaki iterasyon metodu ile tanımlansın.

i) $n=1,2,3,...$ için $x_n=T(x_{n-1})=T^n(x_0)$ ya da basit iterasyon metodu,

ii) $n=1,2,3,...$ için $x_n=T_\lambda(x_{n-1})=T_\lambda^n(x_0)$, $T_\lambda=\lambda E+(1-\lambda)T$ iyi tanımlı olarak vermişlerdir. Ayrıca C içinde T nin sabit bir noktasına $\{x_n\}$ iterasyon dizisinin zayıf ve kuvvetli yakınsaklıklarını vermişlerdir.

Teorem 2.4.2. X Banach uzayı, C X in kapalı bir alt kümesi ve $T:C\to X$ tanımlı, sürekli bir dönüşüm olsun. T dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın.

1) $F(T)\neq\varnothing$

2) T , sözde genişlemeyen bir dönüşümdür. Yani her $x\in C$ ve her $p\in F(T)$ için

$$\|T(x)-p\|\leq\|x-p\| \text{ dir.}$$

3) Her $n\geq 1$ için $x_n=T^n(x_0)\in C$ olacak şekilde bir $x_0\in C$ vardır.

O zaman, $\{x_n\}$ dizisinin C içinde sabit bir noktasına yakınsaması için gerek ve yeter şart $n\to\infty$ iken $\lim_n d(x_n,F(T))=0$ olmasıdır (Petryshyn ve Williamson, 1973).

Tanım 2.4.1. (Asimtotik regüler): Eğer $T:C\to C$ dönüşümü her $x\in C$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|T^n(x)-T^{n+1}(x)\right\|=0$$

şartını gerçeklerse o zaman T dönüşümüne C üzerinde asimtotik regülerdir denir (Browder ve Petryshyn, 1966).

Teorem 2.4.3. X Banach uzayı, C, X in kapalı bir alt kümesi ve $T:C\to X$ tanımlı, sürekli bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki şartlar kabul edilsin.

1) $F(T)\neq\varnothing$

2) T, sözde genişlemeyen bir dönüşümdür.

3) Her $n\geq 1$ için $x_n=T^n(x_0)\in C$ olacak şekilde bir $x_0\in C$ vardır.

4) T, x_0 da asimtotik regülerdir.

5) Eğer $\{y_n\}\subseteq C$, $n\geq 1$ ve $n\to\infty$ iken $\|(E-T)y_n\|\to 0$ ise $\liminf_n d(y_n,F(T))=0$ olur. O zaman, $\{x_n\}$ dizisi C içinde T nin sabit bir noktasına yakınsaktır (Petryshyn ve Williamson, 1973).

İspat: $n\geq 1$ için $T^n(x_0)\in C$, T x_0 da asimtotik regüler ve $(I-T)\cdot T^n(x_0)=T^n(x_0)-T^{n+1}(x_0)$ olduğu için $\lim_{n\to\infty}\|(E-T)\cdot x_n\|=0$ olur. Böylece 5) şartından,

$$\liminf_n d(x_n,F(T))=0$$

olur. 2)'den yani T nin sözde genişlemeyen dönüşüm olmasından dolayı $\{d(y_n,F(T))\}_{n\geq 1}$ dizisi monoton azalandır ve böylece $\liminf_{n\to\infty} d(x_n,F(T))=0$ dır. Bu sebeple $\{x_n\}$ dizisi C içinde T nin sabit bir noktasına kuvvetli yakınsaktır.

Örnek 2.4.1. $B=B(0,1)$, $\mathbb{R}^2$ de birim çember olsun. $T:B\to B$ dönüşümü $T(x,y)\to\left(-\frac{x}{2},-y\right)$ olarak tanımlansın.

(i) T, genişlemeyen bir dönüşümdür.

(ii) $F(T)\neq\varnothing$; B içinde T nin sadece tek sabit noktası $(x,y)=(0,0)$ dır.

(iii) Eğer $(x,y)\in B$ ise o zaman basit bir hesaplama ile herhangi bir n için

$$\left\|T^n(x,y)-T^{n+1}(x,y)\right\|^2=\left(\frac{3x}{2^{n+1}}\right)^2+(2y)^2$$

dir (Petryshyn ve Williamson, 1973).

Teorem 2.4.4. X Banach uzayı, C X in kapalı bir alt kümesi ve $T:C\to C$ tanımlı, sürekli bir dönüşüm olsun. T dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın.

1) $F(T)\neq\varnothing$

2) T , sözde genişlemeyen bir dönüşümdür.

6) Her $x\in C-F(T)$ için

$$\left\|T(x)-q_x\right\|<\left\|x-q_x\right\|$$

olacak şekilde $q_x\in F(T)$ mevcuttur.

7) Her $n\geq 1$ için $T^n(x_0)\in C$ olacak şekilde $x_0\in C$ vardır ve $\{x_n\}=\{T^n(x_0)\}_{n\geq 0}$ dizisi bazı $x^*\in C$ ye yakınsayan $\{x_{n_j}\}_{j\geq 1}$ bir alt dizisini içerir.

O zaman $x^*\in F(T)$ ve $\{x_n\}$ dizisi de x^* a yakınsar (Petryshyn ve Williamson, 1973).

Sonuç 2.4.1. X Banach uzayı, C X in kapalı bir alt kümesi ve $T:C\to C$ sürekli bir dönüşüm olsun.

1) $F(T)\neq\varnothing$

8) Her $x\in C$, $x\notin F(T)$ ve her $p\in F(T)$ için

$$\left\|T(x)-p\right\|<\left\|x-p\right\| \text{ olur.}$$

x_0 , C nin herhangi bir elemanı olsun ve $n\geq 1$ için $x_n\equiv T^n(x_0)$ olarak tanımlansın. Eğer $\{x_n\}$ dizisi yakınsak bir alt dizi içerirse o zaman dizinin kendisi yani $\{x_n\}$, C içinde T nin sabit bir noktasına yakınsar (Diaz ve Metcalf, 1969).

Teorem 2.4.5. X Banach uzayı, C X in kapalı bir alt kümesi, $T:C\to X$ tanımlı, şartlı sözde genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Kabul edilsin ki bazı $x_0\in C$ için $\left\{T^n\left(x_0\right)\right\}_{n\geq 1}\subseteq C$ olsun. O zaman $\left\{T^n\left(x_0\right)\right\}_{n\geq 1}$ dizisinin C içinde T nin sabit bir noktasına kuvvetli yakınsak olması için gerek ve yeter şart,

4) T , x_0 da asimtotik regülerdir.

9) $\lim_{n\to\infty} d\left(T^n\left(x_0\right),K\right)=0$ olacak şekilde bir K kompakt kümesi vardır.

şartlarını sağlamasıdır (Petryshyn ve Williamson, 1973).

Teorem 2.4.6. X Banach uzayı, C X in kapalı konveks bir alt kümesi ve $T:C\to X$ sürekli bir dönüşüm olsun. T dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın,

1) $F\left(T\right)\neq\varnothing$

2) T , sözde genişlemeyen bir dönüşümdür.

10) Her bir $n\geq 1$ ve bazı $\lambda\in\left(0,1\right)$ için $x_n=T_\lambda^n\left(x_0\right)$ olacak şekilde $x_0\in C$ vardır. O zaman $\left\{x_n\right\}$ dizisinin C içinde T nin sabit bir noktasına yakınsaması için gerek ve yeter şart,

$$\lim_{n\to\infty} d\left(T_\lambda^n\left(x_0\right),F\left(T\right)\right)=0$$

olmasıdır (Petryshyn ve Williamson, 1973).

Sonuç 2.4.2. X düzgün konveks Banach uzayı, C X in kapalı, sınırlı konveks bir alt kümesi ve $T:C\to C$ genişlemeyen bir dönüşüm olsun. T dönüşümü aşağıdaki iki şarttan herhangi birini sağlasın. E birim dönüşüm olmak üzere

11) $\left(E-T\right)$ dönüşümleri, C içindeki kapalı kümeleri, X içindeki kapalı kümelere dönüştürür.

12) T , 0 da yarı kompakttır.

Herhangi bir λ , $0<\lambda<1$ için $T_\lambda\equiv\lambda E+\left(1-\lambda\right)T$ olarak tanımlanır. O zaman herhangi bir $x_0\in C$ için $x_n\equiv T_\lambda^n\left(x_0\right)$, $n\geq 1$ dizisi C içinde T nin sabit bir noktasına kuvvetli yakınsaktır (Petryshyn ve Williamson, 1973).

Lemma 2.4.1. $\{s_n\}$, $\{t_n\}$ ve $\{\sigma_n\}$ negatif olmayan reel sayı dizileri $\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} t_n < \infty$ olacak şekilde her $n \geq 1$ için $s_{n+1} \leq (1+\sigma_n)s_n + t_n$ şartını sağlarlarsa

(i) $\lim_{n\to\infty} s_n$ vardır.

(ii) Eğer $\{s_n\}$ dizisi sıfıra yakınsak bir $\{s_{n_j}\}$ alt dizisine sahipse $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$ olur (Tan ve Xu, 1993).

Lemma 2.4.2. p> 1 ve R> 0 iki sabit sayı olsun. X Banach uzayı düzgün konvekstir deriz ancak ve ancak her $x, y \in B_R = \{x \in X : \|x\| \leq R\}$ ve $\lambda \in [0,1]$, $w_p(\lambda) = \lambda(1-\lambda)^p + \lambda^p(1-\lambda)$ için

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^p \leq \lambda\|x\|^p + (1-\lambda)\|y\|^p - w_p(\lambda)g(\|x-y\|)$$

eşitsizliğini sağlanacak şekilde $g(0) = 0$ olmak üzere bir $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ kesin artan sürekli konveks fonksiyon vardır (Xu, 1991).

Lemma 2.4.3. X bir düzgün konveks Banach uzayı ve $B_R = \{x \in X : \|x\| \leq R\}$ R> 0 olsun. O zaman her $x, y, z \in B_R$ ve $\lambda, \mu, \gamma \in [0,1]$, $\lambda + \mu + \gamma = 1$ için $\|\lambda x + \mu y + \gamma z\|^2 \leq \lambda\|x\|^2 + \mu\|y\|^2 + \gamma\|z\|^2 - \lambda\mu g(\|x-y\|)$ olacak şekilde g(0) = 0 olmak üzere bir g: [0, ∞)→[0, ∞) sürekli ve kesin artan konveks fonksiyon vardır (Cho ve arkadaşları, 2004).

İspat: Öncelikle her $x, y \in B_R$, $\lambda, \mu, \gamma \in [0,1], ve \quad \lambda + \mu + \gamma = 1, için$

$\frac{\lambda}{1-\gamma}x + \frac{\mu}{1-\gamma}y$ ifadesini ele alalım.

$$\left\|\frac{\lambda}{1-\gamma}x + \frac{\mu}{1-\gamma}y\right\| \leq \left\|\frac{\lambda}{1-\gamma}x\right\| + \left\|\frac{\mu}{1-\gamma}y\right\|$$

$$= \frac{\lambda}{1-\gamma}\|x\| + \frac{\mu}{1-\gamma}\|y\|$$

$$\leq \frac{\lambda}{1-\gamma} R + \frac{\mu}{1-\gamma} R$$
$$= \frac{\lambda+\mu}{1-\gamma} R$$
$$= \frac{1-\gamma}{1-\gamma} R$$
$$= R$$

buradan $\frac{\lambda}{1-\gamma} x + \frac{\mu}{1-\gamma} y \in B_R$ olduğu aşikardır. Lemma 2.4.2. dan

$$\|\lambda x + \mu y + \gamma z\|^2 = \left\|(1-\gamma)\left[\frac{\lambda}{1-\gamma} x + \frac{\mu}{1-\gamma} y\right] + \gamma z\right\|^2$$
$$\leq (1-\gamma)\left\|\frac{\lambda}{1-\gamma} x + \frac{\mu}{1-\gamma} y\right\|^2 + \gamma \|z\|^2 - w_2(\gamma)$$
$$= (1-\gamma)\left\|\frac{\lambda}{1-\gamma} x + \left(1 - \frac{\lambda}{1-\gamma}\right) y\right\|^2 + \gamma \|z\|^2 - w_2(\gamma)$$
$$\leq (1-\gamma)\left[\frac{\lambda}{1-\gamma}\|x\|^2 + \left(1 - \frac{\lambda}{1-\gamma}\right)\|y\|^2 - w_2(\frac{\lambda}{1-\gamma}) g(\|x-y\|)\right] + \gamma \|z\|^2$$
$$= \lambda \|x\|^2 + \mu \|y\|^2 + \gamma \|z\|^2 - (1-\gamma) w_2(\frac{\lambda}{1-\gamma}) g(\|x-y\|)$$
$$= \lambda \|x\|^2 + \mu \|y\|^2 + \gamma \|z\|^2 - \frac{\lambda\mu}{1-\gamma} g(\|x-y\|)$$
$$\leq \lambda \|x\|^2 + \mu \|y\|^2 + \gamma \|z\|^2 - \lambda\mu g(\|x-y\|)$$

olur, ki ispat tamamlanmış olur.

Lemma 2.4.4. X bir reel banach uzayı ve C, X'in boştan farklı kapalı konveks altkümesi olsun. $T : C \to C$ asimtotik olarak genişlemeyen dönüşüm olsun. O zaman $(I - T)$ sıfırda demiclosed tır. Yani eğer x_n dizisi x^*'e zayıf ve $x_n - Tx_n$ sıfıra kuvvetli yakınsarsa o zaman $x^* \in F(T)$ olur. Burada F(T), T'nin sabit noktalarının kümesidir (Temir ve Kılıçman, 2013).

Tanım 2.4.2. C, X reel Banach uzayının boştan farklı kapalı konveks alt kümesi, C üzerinde tanımlı $\{T_i : i \in \{1,2,3,...,m\}\}$ asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümler ailesi ve $\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^{m} F(T_i) \neq \emptyset$ olsun. Eğer her r ∈ [0, ∞) için f(r)>0 ve f(0)=0 olacak şekilde azalmayan $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonu var ve her x ∈ C için, $\max_{1\leq i\leq m} \|x - T_i x\| \geq f(d(x,F))$ ise, $\{T_i : i \in \{1,2,3,...,m\}\}$ ailesine C üzerinde (A) şartını sağlar denir (Temir ve Kılıçman, 2013).

3. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

3.1. Banach Uzaylarında Yeni İterasyon Dizileri İçin Hata Eklenmiş Asimtotik Olarak Genişlemeyen Dönüşümlerin Sonlu Ailesinin Kuvvetli ve Zayıf Yakınsaklık Teoremleri

Bu kısımda Cho ve ark. (2004) ile Temir ve Kılıçman (2013) çalışmaları ışığında üretilen yeni n-adımlı iterasyon dizisinin asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümlerin sonlu ailesinin ortak sabit noktaya zayıf ve kuvvetli yakınsaklıkları incelenecektir.

X bir reel Banach uzayı ve C, X 'in boştan farklı kapalı konveks altkümesi olsun. $\{k_n\} \subset [1,\infty)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$ ile $T_i : C \to C, (i = 1,2,3,...,m)$ m tane asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümler ve $F = \bigcap_{i=1}^{m} F(T_i) \neq \phi$ olsun. $\sum_{n=1}^{\infty} b_{in} < \infty$ olacak şekilde $\{a_{in}\}_{n=1}^{\infty}, \{b_{in}\}_{n=1}^{\infty}, (i = 1,2,3,...m)$ dizileri $[0,1]$ aralığında ve $\{u_{in}\}_{n=1}^{\infty}, (i = 1,2,3,...m)$ C de sınırlı dizileri olsun.

$\{x_n\}$ dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= (1 - a_{1n} - b_{1n}) y_{1n} + a_{1n} T_1^n y_{1n} + b_{1n} u_{1n} \\
y_{1n} &= (1 - a_{2n} - b_{2n}) y_{2n} + a_{2n} T_2^n y_{2n} + b_{2n} u_{2n} \\
y_{2n} &= (1 - a_{3n} - b_{3n}) y_{3n} + a_{3n} T_3^n y_{3n} + b_{3n} u_{3n} \\
y_{3n} &= (1 - a_{4n} - b_{4n}) y_{4n} + a_{4n} T_4^n y_{4n} + b_{4n} u_{4n} \qquad (3.1) \\
&\vdots \\
y_{(m-1)n} &= (1 - a_{mn} - b_{mn}) x_n + a_{mn} T_m^n x_n + b_{mn} u_{mn}
\end{aligned}
$$

Lemma 3.1.1. X bir reel Banach uzayı , C , X'in boştan farklı kapalı konveks altkümesi ve $\{k_n\} \subset [1,\infty]$, $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$ olacak şekilde $T_i : C \to C, (i = 1,2,3,...,m)$ m tane asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümü ve $\mathcal{F}=\bigcap_{i=1}^{m} F(T_i) \neq \emptyset$ olsun. Farz edelim ki $\{a_{in}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_{in}\}_{n=1}^{\infty}$, $(i = 1,2,3,...,m)$ dizileri [0,1] aralığında uygun diziler ve $\{u_{in}\}_{n=1}^{\infty}$ $(i = 1,2,3,...,m)$ dizileri C de sınırlı diziler olsun öyle ki $\sum_{n=1}^{\infty} b_{in} < \infty$ dır. O zaman (3.1) de verilen $\{x_n\}$ dizisi sınırlıdır ve p∈ $\mathcal{F}$ için $\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\|$ vardır.

İspat: p∈ $\mathcal{F}$ ve $\{u_{in}\}_{n=1}^{\infty}$ $(i = 1,2,3,...,m)$ dizileri C da sınırlı dizi olsun. Ayrıca her bir n≥ 1 için

$$M = \sup_{n\geq 1}\|u_{in} - p\| \ (i = 1,2,3,...,m) \text{ olsun}$$

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - p\| &= \|(1-a_{1n}-b_{1n})y_{1n} + a_{1n}T_1^n y_{1n} + b_{1n}u_{1n} - p\| \\ &\leq (1-a_{1n}-b_{1n})\|y_{1n} - p\| + a_{1n}\|T_1^n y_{1n} - p\| + b_{1n}\|u_{1n} - p\| \\ &\leq (1-a_{1n}-b_{1n})\|y_{1n} - p\| + a_{1n}k_n\|y_{1n} - p\| + b_{1n}\|u_{1n} - p\| \\ &\leq k_n\|y_{1n} - p\| + Mb_{1n}\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}\|y_{1n} - p\| &= \|(1-a_{2n}-b_{2n})y_{2n} + a_{2n}T_2^n y_{2n} + b_{2n}u_{2n} - p\| \\ &\leq (1-a_{2n}-b_{2n})\|y_{2n} - p\| + a_{2n}\|T_2^n y_{2n} - p\| + b_{2n}\|u_{2n} - p\| \\ &\leq (1-a_{2n}-b_{2n})\|y_{2n} - p\| + a_{2n}k_n\|y_{2n} - p\| + b_{2n}\|u_{2n} - p\| \\ &\leq k_n\|y_{2n} - p\| + Mb_{2n}\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}\|y_{2n} - p\| &= \|(1-a_{3n}-b_{3n})y_{3n} + a_{3n}T_3^n y_{3n} + b_{3n}u_{3n} - p\| \\ &\leq (1-a_{3n}-b_{3n})\|y_{3n} - p\| + a_{3n}\|T_3^n y_{3n} - p\| + b_{3n}\|u_{3n} - p\| \\ &\leq (1-a_{3n}-b_{3n})\|y_{3n} - p\| + a_{3n}k_n\|y_{3n} - p\| + b_{3n}\|u_{3n} - p\| \\ &\leq k_n\|y_{3n} - p\| + Mb_{3n}\end{aligned} \tag{3.4}$$

.

.

.

$$\left\|y_{(m-2)n}-p\right\| \le k_n \left\|y_{(m-1)n}-p\right\| + Mb_{(m-1)n} \qquad (3.5)$$

$$\left\|y_{(m-1)n}-p\right\| \le k_n \left\|x_n-p\right\| + Mb_{mn} \qquad (3.6)$$

$$\begin{aligned}
\left\|x_{n+1}-p\right\| &\le k_n \left\|y_{1n}-p\right\| + Mb_{1n} \\
\left\|x_{n+1}-p\right\| &\le k_n \left[k_n \left\|y_{2n}-p\right\| + Mb_{2n}\right] + Mb_{1n} \\
&\le k_n \left[k_n \left\|y_{2n}-p\right\| + Mb_{2n}\right] + Mb_{1n} \\
&\le {k_n}^2 \left\|y_{2n}-p\right\| + Mk_n b_{2n} + Mb_{1n} \\
&\le {k_n}^2 \left[k_n \left\|y_{3n}-p\right\| + Mb_{3n}\right] + Mk_n b_{2n} + Mb_{1n} \\
&\le {k_n}^3 \left\|y_{3n}-p\right\| + Mk_n{}^2 b_{3n} + Mk_n b_{2n} + Mb_{1n} \\
&\;\;\vdots \\
&\le {k_n}^{(m-1)} \left\|y_{(m-1)n}-p\right\| + Mk_n{}^{(m-2)} b_{(m-1)n} + Mk_n{}^{(m-3)} b_{(m-2)n} + \ldots + Mk_n{}^3 b_{4n} + \\
&\quad + Mk_n{}^2 b_{3n} + Mk_n b_{2n} + Mb_{1n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\|x_{n+1}-p\right\| \le {k_n}^m \left\|x_n-p\right\| &+ Mk_n{}^{(m-1)} b_{mn} + Mk_n{}^{(m-2)} b_{(m-1)n} + \ldots + Mk_n{}^3 b_{4n} + \\
&+ Mk_n{}^2 b_{3n} + Mk_n b_{2n} + Mb_{1n}
\end{aligned} \qquad (3.7)$$

$$\left\|x_{n+1}-p\right\| \le {k_n}^m \left\|x_n-p\right\| + M\sum_{i=0}^{m-1} k_n^i b_{(i+1)n} \qquad (3.8)$$

Elde edilir. Bu eşitsizlik düzenlenirse

$$\left\|x_{n+1}-p\right\| \le (1+({k_n}^m-1))\left\|x_n-p\right\| + M\sum_{i=0}^{m-1} k_n^i b_{(i+1)n} \qquad (3.9)$$

$$\left\|x_{n+1}-p\right\| \le (1+(k_n{}^m-1)\left\|x_n-p\right\|+\varphi_n \quad (3.10)$$

Burada n≥ 1 için

$$\varphi_n = M\sum_{i=0}^{m-1} k_n^i b_{(i+1)n} \text{ dir.}$$

her $\theta \ge 1$için $0<\theta^m-1 \le m\theta^{m-1}(\theta-1)$ dir.

$\sum_{n=1}^{\infty}(k_n-1)<\infty$ olduğu için $\{k_n\}$ dizisi sınırlıdır, bazı L sayısı ve $n\ge 1$ için $k_n \subset [1,L]$ denilebilir. Böylece her $n\ge 1$ için $0<k_n^m-1 \le mL^{m-1}(k_n-1)$ yazılabilir.

$\sum_{n=1}^{\infty}(k_n-1)<\infty$ olması $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n^m-1)<\infty$ olmasını gerektirir. Ayrıca burada k_n^i ve $b_{(i+1)n}$ sınırlı olduğu için

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n b_{2n} < \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n^2 b_{3n} < \infty$$

.

.

.

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n^{m-1} b_{mn} < \infty$$

olur. Bu ifadelerin toplamı alınırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n b_{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} k_n^2 b_{3n} + \ldots + \sum_{n=1}^{\infty} k_n^{m-1} b_{mn} < \infty \text{ olur.} \quad (3.11)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m-1} k_n^i b_{(i+1)n} < \infty \text{ olur.} \qquad (3.12)$$

Buradan Lemma 2.4.1. gereği $\{x_n\}$ dizisinin sınırlı olduğu ve $\lim_{n\to\infty} ||x_n - p||$ varlığı sonucuna ulaşılır.

Teorem 3.1.1. X bir reel düzgün konveks Banach uzayı, C X'in boştan farklı kapalı konveks altkümesi ve $\{k_n\} \subset [0,\infty]$, $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n - 1) < \infty$ olacak şekilde $T_i : C \to C, (i = 1,2,3,...,m)$ m tane asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümü ve $\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^{m} F(T_i) \neq \emptyset$ olsun. Farz edelim ki $\{a_{in}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_{in}\}_{n=1}^{\infty}$, $(i = 1,2,3,...,m)$ dizileri [0,1] aralığında uygun diziler ve $\{u_{in}\}_{n=1}^{\infty}$ $(i = 1,2,3,...,m)$ dizileri C de sınırlı diziler olsun öyle ki $\sum_{n=1}^{\infty} b_{in} < \infty$ dır. O zaman (3.1) de verilen $\{x_n\}$ dizisinde her $(i = 1,2,3,...,m)$ için

$$0 < \liminf_{n\to\infty} a_{in} < \limsup_{n\to\infty} (a_{in} + b_{in}) < 1 \quad \text{ise}$$

$(i = 1,2,3,...,m)$ için $\lim_{n\to\infty} \|T_i x_n - x_n\| = 0$ olur.

İspat: $p \in \mathcal{F}$ olsun, Lemma 3.1.1. aracılığıyla $\lim_{n\to\infty} \|x_n - p\|$ ifadesinin var olduğu bulunmuştu ayrıca $\{u_{in}\}_{n=1}^{\infty}$ $(i = 1,2,3,...,m)$ dizileri C da sınırlı diziler olduğundan $M = \sup_{n\geq 1} \|u_{in} - p\|$ $(i = 1,2,3,...,m)$ denirse,

$\|y_{(m-1)n} - p\| \le k_n \|x_n - p\| + Mb_{mn}$

k_n sınırlı, $\|x_n - p\|$ sınırlı, b_{mn} sınırlı o zaman $\|y_{(m-1)n} - p\|$ ifadesi de sınırlıdır.

$\|y_{(m-2)n} - p\| \le k_n \|y_{(m-1)n} - p\| + Mb_{(m-1)n}$

Aynı şekilde hareketle $\|y_{(m-2)n} - p\|$ ifadesi de sınırlıdır.

.

.

.

$\|y_{1n} - p\| \le k_n \|y_{2n} - p\| + Mb_{2n}$ eşitsizliğinden $\|y_{1n} - p\|$ ifadesi sınırlı olur.

$\|x_{n+1} - p\| \le k_n \|y_{1n} - p\| + Mb_{1n}$ buradan $\|x_{n+1} - p\|$ ifadesi de sınırlı olur.

Yani $\{y_{in} - p\}$ sınırlı olur.

$$\|y_{in} - u_{in}\| \le \|y_{in} - p\| + \|u_{in} - p\|$$

Son olarak $\{y_{in} - u_{in}\}$ ifadesi de sınırlıdır. Ayrıca burada sınır olarak R yi alalım

$$\begin{aligned}
\|y_{(m-1)n} - p\|^2 &= \|(1 - a_{mn} - b_{mn})x_n + a_{mn}T_m^n x_n + b_{mn}u_{mn} - p\|^2 \\
&= \|(1 - a_{mn} - b_{mn})[x_n - p] + a_{mn}[T_m^n x_n - p] + b_{mn}[u_{mn} - p]\|^2 \\
&\le (1 - a_{mn} - b_{mn})\|x_n - p\|^2 + a_{mn}\|T_m^n x_n - p\|^2 + b_{mn}\|u_{mn} - p\|^2 \\
&\quad -(1 - a_{mn} - b_{mn})a_{mn}g(\|T_m^n x_n - x_n\|) \\
&\le (1 - a_{mn} - b_{mn})\|x_n - p\|^2 + a_{mn}k_n^2\|x_n - p\|^2 + b_{mn}\|u_{mn} - p\|^2 \\
&\quad -(1 - a_{mn} - b_{mn})a_{mn}g(\|T_m^n x_n - x_n\|) \\
&\le k_n^2\|x_n - p\|^2 + b_{mn}M^2 - (1 - a_{mn} - b_{mn})a_{mn}g(\|T_m^n x_n - x_n\|)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
\left\|y_{(m-2)n}-p\right\|^2 &\le (1-a_{(m-1)n}-b_{(m-1)n})\left\|y_{(m-1)n}-p\right\|^2+a_{(m-1)n}\left\|T_{m-1}^n y_{(m-1)n}-p\right\|^2\\
&\quad +b_{(m-1)n}\left\|u_{(m-1)n}-p\right\|^2-(1-a_{(m-1)n}-b_{(m-1)n})a_{(m-1)n}g(\left\|T_{m-1}^n y_{(m-1)n}-y_{(m-1)n}\right\|)\\
&\le k_n^2\left\|y_{(m-1)n}-p\right\|^2+b_{(m-1)n}M^2-(1-a_{(m-1)n}-b_{(m-1)n})a_{(m-1)n}g(\left\|T_{m-1}^n y_{(m-1)n}-y_{(m-1)n}\right\|)\\
&\le k_n^2\left[k_n^2\left\|x_n-p\right\|^2+b_{mn}M^2-(1-a_{mn}-b_{mn})a_{mn}g(\left\|T_m^n x_n-x_n\right\|)\right]\\
&\quad +b_{(m-1)n}M^2-(1-a_{(m-1)n}-b_{(m-1)n})a_{(m-1)n}g(\left\|T_{m-1}^n y_{(m-1)n}-y_{(m-1)n}\right\|)\\
&\le k_n^4\left\|x_n-p\right\|^2+b_{mn}k_n^2M^2-(1-a_{mn}-b_{mn})a_{mn}k_n^2g(\left\|T_m^n x_n-x_n\right\|)\\
&\quad +b_{(m-1)n}M^2-(1-a_{(m-1)n}-b_{(m-1)n})a_{(m-1)n}g(\left\|T_{m-1}^n y_{(m-1)n}-y_{(m-1)n}\right\|)
\end{aligned}$$

(3.14)

$$\begin{aligned}
\left\|y_{(m-2)n}-p\right\|^2 &\le k_n^4\left\|x_n-p\right\|^2+b_{mn}k_n^2M^2-(1-a_{mn}-b_{mn})a_{mn}g(\left\|T_m^n x_n-x_n\right\|)\\
&\quad +b_{(m-1)n}M^2-(1-a_{(m-1)n}-b_{(m-1)n})a_{(m-1)n}g(\left\|T_{m-1}^n y_{(m-1)n}-y_{(m-1)n}\right\|)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
\left\|y_{(m-3)n}-p\right\|^2 &\le (1-a_{(m-2)n}-b_{(m-2)n})\left\|y_{(m-2)n}-p\right\|^2+a_{(m-2)n}\left\|T_{(m-2)}^n y_{(m-2)n}-p\right\|^2\\
&\quad +b_{(m-2)n}\left\|u_{(m-2)n}-p\right\|^2-(1-a_{(m-2)n}-b_{(m-2)n})a_{(m-2)n}g(\left\|T_{(m-2)}^n y_{(m-2)n}-y_{(m-2)n}\right\|)\\
&\le k_n^2\left\|y_{(m-2)n}-p\right\|^2+b_{(m-2)n}M^2-(1-a_{(m-2)n}-b_{(m-2)n})a_{(m-2)n}g(\left\|T_{(m-2)}^n y_{(m-2)n}-y_{(m-2)n}\right\|)\\
&\le k_n^2\left[\begin{array}{l}k_n^4\left\|x_n-p\right\|^2+b_{mn}k_n^2M^2-(1-a_{mn}-b_{mn})a_{mn}g(\left\|T_m^n x_n-x_n\right\|)\\ +b_{(m-1)n}M^2-(1-a_{(m-1)n}-b_{(m-1)n})a_{(m-1)n}g(\left\|T_{m-1}^n y_{(m-1)n}-y_{(m-1)n}\right\|)\end{array}\right]\\
&\quad +b_{(m-2)n}M^2-(1-a_{(m-2)n}-b_{(m-2)n})a_{(m-2)n}g(\left\|T_{(m-2)}^n y_{(m-2)n}-y_{(m-2)n}\right\|)\\
&\le k_n^6\left\|x_n-p\right\|^2+b_{mn}k_n^4M^2-(1-a_{mn}-b_{mn})a_{mn}k_n^2g(\left\|T_m^n x_n-x_n\right\|)\\
&\quad +b_{(m-1)n}k_n^2M^2-(1-a_{(m-1)n}-b_{(m-1)n})a_{(m-1)n}k_n^2g(\left\|T_{m-1}^n y_{(m-1)n}-y_{(m-1)n}\right\|)\\
&\quad +b_{(m-2)n}M^2-(1-a_{(m-2)n}-b_{(m-2)n})a_{(m-2)n}g(\left\|T_{(m-2)}^n y_{(m-2)n}-y_{(m-2)n}\right\|)
\end{aligned}$$

(3.16)

$$\begin{aligned}
\left\|y_{(m-3)n}-p\right\|^2 &\le k_n^6\left\|x_n-p\right\|^2+b_{mn}k_n^4M^2-(1-a_{mn}-b_{mn})a_{mn}g(\left\|T_m^n x_n-x_n\right\|)\\
&\quad +b_{(m-1)n}k_n^2M^2-(1-a_{(m-1)n}-b_{(m-1)n})a_{(m-1)n}g(\left\|T_{m-1}^n y_{(m-1)n}-y_{(m-1)n}\right\|)\\
&\quad +b_{(m-2)n}M^2-(1-a_{(m-2)n}-b_{(m-2)n})a_{(m-2)n}g(\left\|T_{(m-2)}^n y_{(m-2)n}-y_{(m-2)n}\right\|)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
\left\|y_{(m-4)n}-p\right\|^2 &\le (1-a_{(m-3)n}-b_{(m-3)n})\left\|y_{(m-3)n}-p\right\|^2+a_{(m-3)n}\left\|T^n_{(m-3)}y_{(m-3)n}-p\right\|^2\\
&\quad +b_{(m-3)n}\left\|u_{(m-3)n}-p\right\|^2-(1-a_{(m-3)n}-b_{(m-3)n})a_{(m-3)n}g(\left\|T^n_{(m-3)}y_{(m-3)n}-y_{(m-3)n}\right\|)\\
&\le k_n^2\left\|y_{(m-3)n}-p\right\|^2+b_{(m-3)n}M^2-(1-a_{(m-3)n}-b_{(m-3)n})a_{(m-3)n}g(\left\|T^n_{(m-3)}y_{(m-3)n}-y_{(m-3)n}\right\|)\\
&\le k_n^2\begin{bmatrix}k_n^6\left\|x_n-p\right\|^2+b_{mn}k_n^4M^2-(1-a_{mn}-b_{mn})a_{mn}g(\left\|T^n_m x_n-x_n\right\|)\\ +b_{(m-1)n}k_n^2M^2-(1-a_{(m-1)n}-b_{(m-1)n})a_{(m-1)n}g(\left\|T^n_{m-1}y_{(m-1)n}-y_{(m-1)n}\right\|)\\ +b_{(m-2)n}M^2-(1-a_{(m-2)n}-b_{(m-2)n})a_{(m-2)n}g(\left\|T^n_{(m-2)}y_{(m-2)n}-y_{(m-2)n}\right\|)\end{bmatrix}\\
&\quad +b_{(m-3)n}M^2-(1-a_{(m-3)n}-b_{(m-3)n})a_{(m-3)n}g(\left\|T^n_{(m-3)}y_{(m-3)n}-y_{(m-3)n}\right\|)\\
&\le k_n^8\left\|x_n-p\right\|^2+b_{mn}k_n^6M^2-(1-a_{mn}-b_{mn})a_{mn}k_n^2g(\left\|T^n_m x_n-x_n\right\|)\\
&\quad +b_{(m-1)n}k_n^4M^2-(1-a_{(m-1)n}-b_{(m-1)n})a_{(m-1)n}k_n^2g(\left\|T^n_{m-1}y_{(m-1)n}-y_{(m-1)n}\right\|)\\
&\quad +b_{(m-2)n}k_n^2M^2-(1-a_{(m-2)n}-b_{(m-2)n})a_{(m-2)n}k_n^2g(\left\|T^n_{(m-2)}y_{(m-2)n}-y_{(m-2)n}\right\|)\\
&\quad +b_{(m-3)n}M^2-(1-a_{(m-3)n}-b_{(m-3)n})a_{(m-3)n}g(\left\|T^n_{(m-3)}y_{(m-3)n}-y_{(m-3)n}\right\|)
\end{aligned}$$

(3.18)

$$\begin{aligned}
\left\|y_{(m-4)n}-p\right\|^2 &\le k_n^8\left\|x_n-p\right\|^2+b_{mn}k_n^6M^2-(1-a_{mn}-b_{mn})a_{mn}g(\left\|T^n_m x_n-x_n\right\|)\\
&\quad +b_{(m-1)n}k_n^4M^2-(1-a_{(m-1)n}-b_{(m-1)n})a_{(m-1)n}g(\left\|T^n_{m-1}y_{(m-1)n}-y_{(m-1)n}\right\|)\\
&\quad +b_{(m-2)n}k_n^2M^2-(1-a_{(m-2)n}-b_{(m-2)n})a_{(m-2)n}g(\left\|T^n_{(m-2)}y_{(m-2)n}-y_{(m-2)n}\right\|)\\
&\quad +b_{(m-3)n}M^2-(1-a_{(m-3)n}-b_{(m-3)n})a_{(m-3)n}g(\left\|T^n_{(m-3)}y_{(m-3)n}-y_{(m-3)n}\right\|)
\end{aligned}$$

(3.19)

$$\begin{aligned}
\left\|y_{(m-5)n}-p\right\|^2 &\le (1-a_{(m-4)n}-b_{(m-4)n})\left\|y_{(m-4)n}-p\right\|^2+a_{(m-4)n}\left\|T^n_{(m-4)}y_{(m-4)n}-p\right\|^2\\
&\quad +b_{(m-4)n}\left\|u_{(m-4)n}-p\right\|^2-(1-a_{(m-4)n}-b_{(m-4)n})a_{(m-4)n}g(\left\|T^n_{(m-4)}y_{(m-4)n}-y_{(m-4)n}\right\|)\\
&\le k_n^2\left\|y_{(m-4)n}-p\right\|^2+b_{(m-4)n}M^2-(1-a_{(m-4)n}-b_{(m-4)n})a_{(m-4)n}g(\left\|T^n_{(m-4)}y_{(m-4)n}-y_{(m-4)n}\right\|)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq k_n^2\begin{bmatrix} k_n^8\|x_n-p\|^2+b_{mn}k_n^6M^2-(1-a_{mn}-b_{mn})a_{mn}g(\|T_m^n x_n-x_n\|) \\ +b_{(m-1)n}k_n^4M^2-(1-a_{(m-1)n}-b_{(m-1)n})a_{(m-1)n}g(\|T_{m-1}^n y_{(m-1)n}-y_{(m-1)n}\|) \\ +b_{(m-2)n}k_n^2M^2-(1-a_{(m-2)n}-b_{(m-2)n})a_{(m-2)n}g(\|T_{(m-2)}^n y_{(m-2)n}-y_{(m-2)n}\|) \\ +b_{(m-3)n}M^2-(1-a_{(m-3)n}-b_{(m-3)n})a_{(m-3)n}g(\|T_{(m-3)}^n y_{(m-3)n}-y_{(m-3)n}\|)\end{bmatrix} \\
&+b_{(m-4)n}M^2-(1-a_{(m-4)n}-b_{(m-4)n})a_{(m-4)n}g(\|T_{(m-4)}^n y_{(m-4)n}-y_{(m-4)n}\|) \\
&\leq k_n^{10}\|x_n-p\|^2+b_{mn}k_n^8M^2-(1-a_{mn}-b_{mn})a_{mn}k_n^2g(\|T_m^n x_n-x_n\|) \\
&+b_{(m-1)n}k_n^6M^2-(1-a_{(m-1)n}-b_{(m-1)n})a_{(m-1)n}k_n^2g(\|T_{m-1}^n y_{(m-1)n}-y_{(m-1)n}\|) \\
&+b_{(m-2)n}k_n^4M^2-(1-a_{(m-2)n}-b_{(m-2)n})a_{(m-2)n}k_n^2g(\|T_{(m-2)}^n y_{(m-2)n}-y_{(m-2)n}\|) \\
&+b_{(m-3)n}k_n^2M^2-(1-a_{(m-3)n}-b_{(m-3)n})a_{(m-3)n}k_n^2g(\|T_{(m-3)}^n y_{(m-3)n}-y_{(m-3)n}\|) \\
&+b_{(m-4)n}M^2-(1-a_{(m-4)n}-b_{(m-4)n})a_{(m-4)n}g(\|T_{(m-4)}^n y_{(m-4)n}-y_{(m-4)n}\|)
\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
\|y_{(m-5)n}-p\|^2 &\leq k_n^{10}\|x_n-p\|^2+b_{mn}k_n^8M^2-(1-a_{mn}-b_{mn})a_{mn}g(\|T_m^n x_n-x_n\|) \\
&+b_{(m-1)n}k_n^6M^2-(1-a_{(m-1)n}-b_{(m-1)n})a_{(m-1)n}g(\|T_{m-1}^n y_{(m-1)n}-y_{(m-1)n}\|) \\
&+b_{(m-2)n}k_n^4M^2-(1-a_{(m-2)n}-b_{(m-2)n})a_{(m-2)n}g(\|T_{(m-2)}^n y_{(m-2)n}-y_{(m-2)n}\|) \\
&+b_{(m-3)n}k_n^2M^2-(1-a_{(m-3)n}-b_{(m-3)n})a_{(m-3)n}g(\|T_{(m-3)}^n y_{(m-3)n}-y_{(m-3)n}\|) \\
&+b_{(m-4)n}M^2-(1-a_{(m-4)n}-b_{(m-4)n})a_{(m-4)n}g(\|T_{(m-4)}^n y_{(m-4)n}-y_{(m-4)n}\|)
\end{aligned}$$

(3.21)

$$\begin{aligned}
\|y_{(m-5)n}-p\|^2 &\leq k_n^{2(m-(m-5))}\|x_n-p\|^2+k_n^{2(m-(m-4))}b_{mn}M^2-(1-a_{mn}-b_{mn})a_{mn}g(\|T_m^n x_n-x_n\|) \\
&+k_n^{2(m-(m-3))}b_{(m-1)n}M^2-(1-a_{(m-1)n}-b_{(m-1)n})a_{(m-1)n}g(\|T_{m-1}^n y_{(m-1)n}-y_{(m-1)n}\|) \\
&+k_n^{2(m-(m-2))}b_{(m-2)n}M^2-(1-a_{(m-2)n}-b_{(m-2)n})a_{(m-2)n}g(\|T_{(m-2)}^n y_{(m-2)n}-y_{(m-2)n}\|) \\
&+k_n^{2(m-(m-1))}b_{(m-3)n}M^2-(1-a_{(m-3)n}-b_{(m-3)n})a_{(m-3)n}g(\|T_{(m-3)}^n y_{(m-3)n}-y_{(m-3)n}\|) \\
&+k_n^{2(m-m)}b_{(m-4)n}M^2-(1-a_{(m-4)n}-b_{(m-4)n})a_{(m-4)n}g(\|T_{(m-4)}^n y_{(m-4)n}-y_{(m-4)n}\|)
\end{aligned}$$

(3.22)

$$\begin{aligned}\|y_{2n}-p\|^2 \le k_n^{2(m-2)}\|x_n-p\|^2 &+ k_n^{2(m-3)}b_{mn}M^2-(1-a_{mn}-b_{mn})a_{mn}g(\|T_m^n x_n-x_n\|)\\ &+k_n^{2(m-4)}b_{(m-1)n}M^2-(1-a_{(m-1)n}-b_{(m-1)n})a_{(m-1)n}g(\|T_{m-1}^n y_{(m-1)n}-y_{(m-1)n}\|)\\ &+k_n^{2(m-5)}b_{(m-2)n}M^2-(1-a_{(m-2)n}-b_{(m-2)n})a_{(m-2)n}g(\|T_{(m-2)}^n y_{(m-2)n}-y_{(m-2)n}\|)\\ &+k_n^{2(m-6)}b_{(m-3)n}M^2-(1-a_{(m-3)n}-b_{(m-3)n})a_{(m-3)n}g(\|T_{(m-3)}^n y_{(m-3)n}-y_{(m-3)n}\|)\\ &+k_n^{2(m-7)}b_{(m-4)n}M^2-(1-a_{(m-4)n}-b_{(m-4)n})a_{(m-4)n}g(\|T_{(m-4)}^n y_{(m-4)n}-y_{(m-4)n}\|)\\ &.\\ &.\\ &.\\ &+k_n^{2(m-(m-1))}b_{4n}M^2-(1-a_{4n}-b_{4n})a_{4n}g(\|T_4^n y_{4n}-y_{4n}\|)\\ &+k_n^{2(m-m)}b_{3n}M^2-(1-a_{3n}-b_{3n})a_{3n}g(\|T_3^n y_{3n}-y_{3n}\|)\end{aligned}$$

(3.23)

$$\begin{aligned}\|y_{1n}-p\|^2 \le k_n^{2(m-1)}\|x_n-p\|^2 &+ k_n^{2(m-2)}b_{mn}M^2-(1-a_{mn}-b_{mn})a_{mn}g(\|T_m^n x_n-x_n\|)\\ &+k_n^{2(m-3)}b_{(m-1)n}M^2-(1-a_{(m-1)n}-b_{(m-1)n})a_{(m-1)n}g(\|T_{m-1}^n y_{(m-1)n}-y_{(m-1)n}\|)\\ &+k_n^{2(m-4)}b_{(m-2)n}M^2-(1-a_{(m-2)n}-b_{(m-2)n})a_{(m-2)n}g(\|T_{(m-2)}^n y_{(m-2)n}-y_{(m-2)n}\|)\\ &+k_n^{2(m-5)}b_{(m-3)n}M^2-(1-a_{(m-3)n}-b_{(m-3)n})a_{(m-3)n}g(\|T_{(m-3)}^n y_{(m-3)n}-y_{(m-3)n}\|)\\ &+k_n^{2(m-6)}b_{(m-4)n}M^2-(1-a_{(m-4)n}-b_{(m-4)n})a_{(m-4)n}g(\|T_{(m-4)}^n y_{(m-4)n}-y_{(m-4)n}\|)\\ &.\\ &.\\ &.\\ &+k_n^{2(m-(m-2))}b_{4n}M^2-(1-a_{4n}-b_{4n})a_{4n}g(\|T_4^n y_{4n}-y_{4n}\|)\\ &+k_n^{2(m-(m-1))}b_{3n}M^2-(1-a_{3n}-b_{3n})a_{3n}g(\|T_3^n y_{3n}-y_{3n}\|)\\ &+k_n^{2(m-m)}b_{2n}M^2-(1-a_{2n}-b_{2n})a_{2n}g(\|T_2^n y_{2n}-y_{2n}\|)\end{aligned}$$

(3.24)

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-p\|^2 \le k_n^{2(m-0)}\|x_n-p\|^2 &+ k_n^{2(m-1)}b_{mn}M^2-(1-a_{mn}-b_{mn})a_{mn}g(\|T_m^n x_n-x_n\|)\\ &+k_n^{2(m-2)}b_{(m-1)n}M^2-(1-a_{(m-1)n}-b_{(m-1)n})a_{(m-1)n}g(\|T_{m-1}^n y_{(m-1)n}-y_{(m-1)n}\|)\\ &+k_n^{2(m-3)}b_{(m-2)n}M^2-(1-a_{(m-2)n}-b_{(m-2)n})a_{(m-2)n}g(\|T_{(m-2)}^n y_{(m-2)n}-y_{(m-2)n}\|)\\ &+k_n^{2(m-4)}b_{(m-3)n}M^2-(1-a_{(m-3)n}-b_{(m-3)n})a_{(m-3)n}g(\|T_{(m-3)}^n y_{(m-3)n}-y_{(m-3)n}\|)\\ &+k_n^{2(m-5)}b_{(m-4)n}M^2-(1-a_{(m-4)n}-b_{(m-4)n})a_{(m-4)n}g(\|T_{(m-4)}^n y_{(m-4)n}-y_{(m-4)n}\|)\\ &.\\ &.\\ &.\\ &+k_n^{2(m-(m-3))}b_{4n}M^2-(1-a_{4n}-b_{4n})a_{4n}g(\|T_4^n y_{4n}-y_{4n}\|)\\ &+k_n^{2(m-(m-2))}b_{3n}M^2-(1-a_{3n}-b_{3n})a_{3n}g(\|T_3^n y_{3n}-y_{3n}\|)\\ &+k_n^{2(m-(m-1))}b_{2n}M^2-(1-a_{2n}-b_{2n})a_{2n}g(\|T_2^n y_{2n}-y_{2n}\|)\\ &+k_n^{2(m-m)}b_{1n}M^2-(1-a_{1n}-b_{1n})a_{1n}g(\|T_1^n y_{1n}-y_{1n}\|)\end{aligned}$$

(3.25)

Düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-p\|^2 \le k_n^{2m}\|x_n-p\|^2 &+\sum_{i=0}^{m-1}k_n^{2i}b_{(i+1)n}M^2-\sum_{i=1}^{m-1}(1-a_{in}-b_{in})a_{in}g\left(\|T_i^n y_{in}-y_{in}\|\right)\\ &-(1-a_{mn}-b_{mn})a_{mn}g\left(\|T_m^n x_n-x_n\|\right)\end{aligned}$$

(3.26)

olur.

Her $t\ge 1$ için $0< t^2\text{-}1\le 2t^{2-1}(t\text{-}1)$ yani $0< t^2\text{-}1\le 2t(t\text{-}1)$ dir.

$\sum_{n=1}^{\infty}(k_n-1)<\infty$ olması $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n^2-1)<\infty$ olmasını sağlar.

$\{k_n\}$ dizisi sınırlı olduğundan bir L sayısı belirleriz öyle ki $n\ge 1$ için $k_n\subset[1,L]$ olur. Buradan her $n\ge 1$ için

$$k_n^{2m}\text{-}1 \le 2mL^{2m-1}(k_n\text{-}1)$$ eşitsizliği sağlanır.

Bundan dolayı $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n-1)<\infty$ olması $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n^{2m}-1)<\infty$ olmasını gerektirir.

Yukarıdaki eşitsizlik $\|x_n-p\|^2$ ile çarpılırsa

$(\mathrm{k}_\mathrm{n}^{2\mathrm{m}}\text{-}1)\|x_n-p\|^2 \le 2mL^{2m-1}\|x_n-p\|^2(\mathrm{k}_\mathrm{n}\text{-}1)$ eşitsizliğine ulaşılır.

Lemma 3.1.1. gereği x_n dizisinin sınırlı olduğu ayrıca bu sınıra da R denildiğinden

$$(\mathrm{k}_\mathrm{n}^{2\mathrm{m}}\text{-}1)\|x_n-p\|^2 \le 2mL^{2m-1}\mathrm{R}^2(\mathrm{k}_\mathrm{n}\text{-}1) \text{ eşitsizliği elde edilir. (3.27)}$$

(3.26) eşitsizliği üzerinde düzenleme yapılırsa

$$\|x_{n+1}-p\|^2 \le (k_n^{2m}-1)\|x_n-p\|^2+\|x_n-p\|^2+\sum_{i=0}^{m-1}k_n^{2i}b_{(i+1)n}M^2$$
$$-\sum_{i=1}^{m-1}(1-a_{in}-b_{in})a_{in}g\left(\left\|T_i^n y_{in}-y_{in}\right\|\right)-(1-a_{mn}-b_{mn})a_{mn}g\left(\left\|T_m^n x_n-x_n\right\|\right)$$

olur.

Aynı türdeki terimler bir araya getirilirse

$$(1-a_{mn}-b_{mn})a_{mn}g\left(\left\|T_m^n x_n-x_n\right\|\right)+\sum_{i=1}^{m-1}(1-a_{in}-b_{in})a_{in}g\left(\left\|T_i^n y_{in}-y_{in}\right\|\right)\le(k_n^{2m}-1)\|x_n-p\|^2+\|x_n-p\|^2$$
$$-\|x_{n+1}-p\|^2+\sum_{i=0}^{m-1}k_n^{2i}b_{(i+1)n}M^2$$

Buradan da (3.27) den

$$(1-a_{mn}-b_{mn})a_{mn}g\left(\left\|T_m^n x_n-x_n\right\|\right)+\sum_{i=1}^{m-1}(1-a_{in}-b_{in})a_{in}g\left(\left\|T_i^n y_{in}-y_{in}\right\|\right)\le\|x_n-p\|^2-\|x_{n+1}-p\|^2$$
$$+2mL^{2m-1}\mathrm{R}^2(\mathrm{k}_\mathrm{n}\text{-}1)+\sum_{i=0}^{m-1}k_n^{2i}b_{(i+1)n}M^2$$

(3.28) eşitsizliği elde edilir.

İlk olarak (3.28) eşitsizliğinin

$$(1-a_{mn}-b_{mn})a_{mn}g\left(\left\|T_m^n x_n-x_n\right\|\right)\le\|x_n-p\|^2-\|x_{n+1}-p\|^2+2mL^{2m-1}\mathrm{R}^2(\mathrm{k}_\mathrm{n}\text{-}1)+\sum_{i=0}^{m-1}k_n^{2i}b_{(i+1)n}M^2$$

(3.29) kısmı incelenecek.

$$\text{Eğer } 0<\liminf_{\mathrm{n}\to\infty}\mathrm{a}_{\mathrm{mn}}<\limsup_{\mathrm{n}\to\infty}(\mathrm{a}_{\mathrm{mn}}+b_{mn})<1 \text{ ise}$$

bir n_0 pozitif tamsayısı ve $\mu,\mu'\in(0,1)$ sayıları vardır öyle ki her $n\ge n_0$ için;

$0 < \mu < a_{mn}$, $(a_{mn} + b_{mn}) < \mu' < 1$ olur. Bu durum (3.29) un

$$(1-\mu')\mu g\left(\left\|T_m^n x_n - x_n\right\|\right) \le \left\|x_n - p\right\|^2 - \left\|x_{n+1} - p\right\|^2 + 2mL^{2m-1}R^2(k_n - 1) + \sum_{i=0}^{m-1} k_n^{2i} b_{(i+1)n} M^2$$

olduğu anlamına gelir. (3.30)

(3.30) da $\lambda \ge n_0$ için,

$$\sum_{n=n_0}^{\lambda} g(\left\|T_m^n x_n - x_n\right\|) \le \frac{1}{(1-\mu')\mu}\left[\sum_{n=n_0}^{\lambda}(\left\|x_n - p\right\|^2 - \left\|x_{n+1} - p\right\|^2) + 2m.L^{2m-1}R^2\sum_{n=n_0}^{\lambda}(k_n - 1) + M^2\sum_{n=n_0}^{\lambda}\sum_{i=0}^{m-1} k_n^{2i} b_{(i+1)n}\right]$$

elde edilir. (3.31)

Buradan

$$\sum_{n=n_0}^{\lambda}(\left\|x_n - p\right\|^2 - \left\|x_{n+1} - p\right\|^2) = \left\|x_{n_0} - p\right\|^2 - \left\|x_{n_0+1} - p\right\|^2 + \left\|x_{n_0+1} - p\right\|^2 - \left\|x_{n_0+2} - p\right\|^2 + \left\|x_{n_0+2} - p\right\|^2$$
$$- \left\|x_{n_0+3} - p\right\|^2 + \ldots + \left\|x_{\lambda-1} - p\right\|^2 - \left\|x_\lambda - p\right\|^2 + \left\|x_\lambda - p\right\|^2 - \left\|x_{\lambda+1} - p\right\|^2$$

Sonuç olarak,

$$\sum_{n=n_0}^{\lambda}(\left\|x_n - p\right\|^2 - \left\|x_{n+1} - p\right\|^2) = \left\|x_{n_0} - p\right\|^2 - \left\|x_{\lambda+1} - p\right\|^2$$

(3.32) olur.

(3.31)'e (3.32)'i uygularsak

$$\sum_{n=n_0}^{\lambda} g(\left\|T_m^n x_n - x_n\right\|) \le \frac{1}{(1-\mu')\mu}\left[\left\|x_{n_0} - p\right\|^2 - \left\|x_{\lambda+1} - p\right\|^2 + 2m.L^{2m-1}R^2\sum_{n=n_0}^{\lambda}(k_n - 1) + M^2\sum_{n=n_0}^{\lambda}\sum_{i=0}^{m-1} k_n^{2i} b_{(i+1)n}\right]$$

(3.33) elde edilir.

(3.33) eşitsizliğinin sağ tarafından $\left||x_{\lambda+1} - p|\right|^2$ ifadesi yok edilirse sağ taraf daha büyük olur.

$$M^2\sum_{n=n_0}^{\lambda}\sum_{i=0}^{m-1} k_n^{2i} b_{(i+1)n} < \infty \text{ ve}$$

$$2m.L^{2m-1}R^2\sum_{n=n_0}^{\lambda}(k_n - 1) < \infty$$

olur. Bu bilgilere ek olarak $\lambda \to \infty$ alınırsa

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} g(\left\|T_m^n x_n - x_n\right\|) < \infty$$

olur. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} g(\left\|T_m^n x_n - x_n\right\|) = 0 \text{ olur.}$$

Burada g fonksiyonu kesin artan sürekli konveks bir fonksiyon ve g(0)=0 olduğu için sonuç olarak

$$\lim_{n\to\infty} \left\|T_m^n x_n - x_n\right\| = 0 \quad (3.34) \text{ olur.}$$

Şimdi de (3.28) eşitsizliğinin

$$\sum_{i=1}^{m-1}(1-a_{in}-b_{in})a_{in}g\left(\left\|T_i^n y_{in} - y_{in}\right\|\right) \le \left\|x_n - p\right\|^2 - \left\|x_{n+1} - p\right\|^2 + 2mL^{2m-1}\mathrm{R}^2(\mathrm{k_n}\text{-}1) + \sum_{i=0}^{m-1} k_n^{2i} b_{(i+1)n} M^2$$

(3.35)

kısmını inceleyelim. Eğer bu eşitsizlikte sol tarafı açarsak

$$(1-a_{1n}-b_{1n})a_{1n}g\left(\left\|T_1^n y_{1n} - y_{1n}\right\|\right) + (1-a_{2n}-b_{2n})a_{2n}g\left(\left\|T_2^n y_{2n} - y_{2n}\right\|\right) + \ldots +$$

$$(1-a_{(m-1)n}-b_{(m-1)n})a_{(m-1)n}g\left(\left\|T_{(m-1)}^n y_{(m-1)n} - y_{(m-1)n}\right\|\right) \le \left\|x_n - p\right\|^2 - \left\|x_{n+1} - p\right\|^2 + 2mL^{2m-1}\mathrm{R}^2(\mathrm{k_n}\text{-}1) + \sum_{i=0}^{m-1} k_n^{2i} b_{(i+1)n} M^2$$

(3.36)

eşitsizliği elde edilir. Buradan sağ taraf toplamdan büyük olduğu için toplamı oluşturan her bir ifadeden de haliyle büyük olacaktır.

$$(1-a_{1n}-b_{1n})a_{1n}g\left(\left\|T_1^n y_{1n} - y_{1n}\right\|\right) \le \left\|x_n - p\right\|^2 - \left\|x_{n+1} - p\right\|^2 + 2mL^{2m-1}\mathrm{R}^2(\mathrm{k_n}\text{-}1) + \sum_{i=0}^{m-1} k_n^{2i} b_{(i+1)n} M^2$$

$$(1-a_{2n}-b_{2n})a_{2n}g\left(\left\|T_2^n y_{2n} - y_{2n}\right\|\right) \le \left\|x_n - p\right\|^2 - \left\|x_{n+1} - p\right\|^2 + 2mL^{2m-1}\mathrm{R}^2(\mathrm{k_n}\text{-}1) + \sum_{i=0}^{m-1} k_n^{2i} b_{(i+1)n} M^2$$

.

.

.

$$(1-a_{(m-1)n}-b_{(m-1)n})a_{(m-1)n}g\left(\left\|T_{(m-1)}^n y_{(m-1)n} - y_{(m-1)n}\right\|\right) \le \left\|x_n - p\right\|^2 - \left\|x_{n+1} - p\right\|^2 + 2mL^{2m-1}\mathrm{R}^2(\mathrm{k_n}\text{-}1) + \sum_{i=0}^{m-1} k_n^{2i} b_{(i+1)n} M^2$$

yukarıdaki her bir eşitsizliğe (3.29) eşitsizliğindeki teknik uygulanırsa

$$\lim_{n\to\infty}\left\|T_1^n y_{1n} - y_{1n}\right\| = 0$$
$$\lim_{n\to\infty}\left\|T_2^n y_{2n} - y_{2n}\right\| = 0$$
.
.
.
$$\lim_{n\to\infty}\left\|T_{(m-1)}^n y_{(m-1)n} - y_{(m-1)n}\right\| = 0 \quad (3.37)$$

olduğu kolaylıkla görülür. Buradan

$$1 \le i \le m-1 \text{ için; } \limsup_{n\to\infty}\left\|T_i^n y_{in} - y_{in}\right\| = 0 \quad (3.38)$$

sonucuna ulaşılır.

Şimdi gerekli bazı ifadeleri inceleyelim. (3.1) dizisinde $2 \le i \le m$ için

$$\begin{aligned}\left\|y_{(i-1)n} - y_{in}\right\| &= \left\|(1-a_{in}-b_{in})y_{in} + a_{in}T_i^n y_{in} + b_{in}u_{in} - y_{in}\right\| \\ &= \left\|a_{in}(T_i^n y_{in} - y_{in}) + b_{in}(u_{in} - y_{in})\right\| \\ &\le a_{in}\left\|T_i^n y_{in} - y_{in}\right\| + b_{in}\left\|u_{in} - y_{in}\right\|\end{aligned} \quad (3.39)$$

olur.

$\left\|u_{in} - y_{in}\right\|$ ifadesinin sınırlı olduğundan ayrıca $\sum_{n=1}^{\infty} b_{in} < \infty$ olduğu için $\lim_{n\to\infty} b_{in} = 0$ olur ki buradan $\lim_{n\to\infty} b_{in}\left\|u_{in} - y_{in}\right\| = 0$ olur. Aynı şekilde a_{in} dizisi [0,1] içinde yani sınırlı bir dizi ayrıca $\lim_{n\to\infty}\left\|T_i^n y_{in} - y_{in}\right\| = 0$ olduğunu bulunmuştu ki bu bilgiler ışında

$$\lim_{n\to\infty}\left\|y_{(i-1)n} - y_{in}\right\| = 0 \quad (3.40)$$

olduğu bulunur.

(3.1) dizisinde

$$\begin{aligned}\left\|y_{(m-1)n} - x_n\right\| &= \left\|(1-a_{mn}-b_{mn})x_n + a_{mn}T_m^n x_n + b_{mn}u_{mn} - x_n\right\| \\ &= \left\|a_{mn}(T_m^n x_n - x_n) + b_{mn}(u_{mn} - x_n)\right\| \\ &\le a_{mn}\left\|T_m^n x_n - x_n\right\| + b_{mn}\left\|u_{mn} - x_n\right\|\end{aligned} \quad (3.41)$$

elde edilen bu eşitsizlikten

$$\lim_{n\to\infty}\left\|y_{(m-1)n}-x_n\right\|=0 \qquad (3.42) \quad \text{olur.}$$

$$\begin{aligned}\left\|x_{n+1}-y_{1n}\right\| &= \left\|(1-a_{1n}-b_{1n})y_{1n}+a_{1n}T_1^n y_{1n}+b_{1n}u_{1n}-y_{1n}\right\| \\ &= \left\|a_{1n}(T_1^n y_{1n}-y_{1n})+b_{1n}(u_{1n}-y_{1n})\right\| \\ &\le a_{1n}\left\|T_1^n y_{1n}-y_{1n}\right\|+b_{1n}\left\|u_{1n}-y_{1n}\right\|\end{aligned} \qquad (3.43)$$

Aynı şekilde bu eşitsizlikten de

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x_{n+1}-y_{1n}\right\|=0 \qquad (3.44) \quad \text{olur.}$$

$$\begin{aligned}\left\|x_{n+1}-y_{2n}\right\| &= \left\|(1-a_{1n}-b_{1n})y_{1n}+a_{1n}T_1^n y_{1n}+b_{1n}u_{1n}-y_{2n}\right\| \\ &= \left\|a_{1n}(T_1^n y_{1n}-y_{1n})+b_{1n}(u_{1n}-y_{1n})+y_{1n}-y_{2n}\right\| \\ &\le a_{1n}\left\|T_1^n y_{1n}-y_{1n}\right\|+b_{1n}\left\|u_{1n}-y_{1n}\right\|+\left\|y_{1n}-y_{2n}\right\| \\ &\le a_{1n}\left\|T_1^n y_{1n}-y_{1n}\right\|+b_{1n}\left\|u_{1n}-y_{1n}\right\|+\left\|y_{1n}-y_{2n}\right\|\end{aligned} \qquad (3.45)$$

$\left\|y_{1n}-y_{2n}\right\|$ ifadesi de $\lim_{n\to\infty}\left\|y_{(i-1)n}-y_{in}\right\|=0$ olduğundan sıfıra gider sonuç olarak (3.45) te

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x_{n+1}-y_{2n}\right\|=0 \qquad (3.46) \quad \text{olur.}$$

$$\begin{aligned}\left\|x_{n+1}-y_{3n}\right\| &= \left\|(1-a_{1n}-b_{1n})y_{1n}+a_{1n}T_1^n y_{1n}+b_{1n}u_{1n}-y_{3n}\right\| \\ &= \left\|a_{1n}(T_1^n y_{1n}-y_{1n})+b_{1n}(u_{1n}-y_{1n})+y_{1n}-y_{3n}\right\| \\ &\le a_{1n}\left\|T_1^n y_{1n}-y_{1n}\right\|+b_{1n}\left\|u_{1n}-y_{1n}\right\|+\left\|y_{1n}-y_{3n}\right\| \\ &\le a_{1n}\left\|T_1^n y_{1n}-y_{1n}\right\|+b_{1n}\left\|u_{1n}-y_{1n}\right\|+\left\|y_{1n}-y_{2n}\right\|+\left\|y_{2n}-y_{3n}\right\|\end{aligned}$$

(3.47)

olduğu için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x_{n+1}-y_{3n}\right\|=0 \quad (3.48) \qquad \text{olur.}$$

Bu yol ile devam edilirse $i=1,2,3,...,m-1$ için

$$\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-y_{in}\|=0 \quad (3.49)$$

sonucuna ulaşılır. Yukarıda bulunan bu bilgiler kullanılarak

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x_n\| &= \|x_{n+1}-y_{1n}+y_{1n}-y_{2n}+y_{2n}-y_{3n}+\ldots+y_{(m-2)n}-y_{(m-1)n}+y_{(m-1)n}-x_n\| \\ &\le \|x_{n+1}-y_{1n}\|+\|y_{1n}-y_{2n}\|+\|y_{2n}-y_{3n}\|+\ldots+\|y_{(m-2)n}-y_{(m-1)n}\|+\|y_{(m-1)n}-x_n\|\end{aligned}$$

(3.50) bulunur.

(3.50) eşitsizliğinin her iki tarafının limiti alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\|=0 \qquad (3.51) \quad \text{olur.}$$

T_m, k_n dizisi ile asimtotik olarak genişlemeyen dönüşüm olduğu için

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-T_m^n x_{n+1}\| &= \|x_{n+1}-x_n+x_n-T_m^n x_n+T_m^n x_n-T_m^n x_{n+1}\| \\ &\le \|x_{n+1}-x_n\|+\|T_m^n x_{n+1}-T_m^n x_n\|+\|T_m^n x_n-x_n\| \\ &\le \|x_{n+1}-x_n\|+k_n\|x_{n+1}-x_n\|+\|T_m^n x_n-x_n\|\end{aligned}$$

(3.52)

eşitsizliği elde edilir.

(3.52) eşitsizliğinin her iki tarafının limitini alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-T_m^n x_{n+1}\|=0 \qquad (3.53)$$

olur.

T_{m-1}, k_n dizisi ile asimtotik olarak genişlemeyen dönüşüm olduğu için

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-T_{m-1}^n x_{n+1}\| &= \|x_{n+1}-y_{(m-1)n}+y_{(m-1)n}-T_{m-1}^n y_{(m-1)n}+T_{m-1}^n y_{(m-1)n}-T_{m-1}^n x_{n+1}\| \\ &\le \|x_{n+1}-y_{(m-1)n}\|+\|T_{m-1}^n x_{n+1}-T_{m-1}^n y_{(m-1)n}\|+\|T_{m-1}^n y_{(m-1)n}-y_{(m-1)n}\| \\ &\le \|x_{n+1}-y_{(m-1)n}\|+k_n\|x_{n+1}-y_{(m-1)n}\|+\|T_{m-1}^n y_{(m-1)n}-y_{(m-1)n}\|\end{aligned}$$

(3.54)

(3.54) eşitsizliğinde her iki tarafın limitini alınırsa (3.37) ve (3.49) yardımıyla

$$\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-T_{m-1}^n x_{n+1}\|=0 \qquad (3.55)$$

$$\begin{aligned}\left\|x_{n+1}-T_{m-2}^{n}x_{n+1}\right\| &= \left\|x_{n+1}-y_{(m-2)n}+y_{(m-2)n}-T_{m-2}^{n}y_{(m-2)n}+T_{m-2}^{n}y_{(m-2)n}-T_{m-2}^{n}x_{n+1}\right\| \\ &\le \left\|x_{n+1}-y_{(m-2)n}\right\|+\left\|T_{m-2}^{n}x_{n+1}-T_{m-2}^{n}y_{(m-2)n}\right\|+\left\|T_{m-2}^{n}y_{(m-2)n}-y_{(m-2)n}\right\| \\ &\le \left\|x_{n+1}-y_{(m-2)n}\right\|+k_n\left\|x_{n+1}-y_{(m-2)n}\right\|+\left\|T_{m-2}^{n}y_{(m-2)n}-y_{(m-2)n}\right\|\end{aligned}$$

(3.56)

(3.56) eşitsizliğinde her iki tarafın limiti alınırsa (3.37) ve (3.49) yardımıyla

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x_{n+1}-T_{m-2}^{n}x_{n+1}\right\|=0 \qquad \text{(3.57)} \quad \text{olur.}$$

$$\begin{aligned}\left\|x_{n+1}-T_{m-3}^{n}x_{n+1}\right\| &= \left\|x_{n+1}-y_{(m-3)n}+y_{(m-3)n}-T_{m-3}^{n}y_{(m-3)n}+T_{m-3}^{n}y_{(m-3)n}-T_{m-3}^{n}x_{n+1}\right\| \\ &\le \left\|x_{n+1}-y_{(m-3)n}\right\|+\left\|T_{m-3}^{n}x_{n+1}-T_{m-3}^{n}y_{(m-3)n}\right\|+\left\|T_{m-3}^{n}y_{(m-3)n}-y_{(m-3)n}\right\| \\ &\le \left\|x_{n+1}-y_{(m-3)n}\right\|+k_n\left\|x_{n+1}-y_{(m-3)n}\right\|+\left\|T_{m-3}^{n}y_{(m-3)n}-y_{(m-3)n}\right\|\end{aligned}$$

(3.58)

(3.58) eşitsizliğinde her iki tarafın limiti alınırsa (3.37) ve (3.49) yardımıyla

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x_{n+1}-T_{m-3}^{n}x_{n+1}\right\|=0 \qquad \text{(3.59)} \quad \text{olur.}$$

.

.

.

$$\begin{aligned}\left\|x_{n+1}-T_{1}^{n}x_{n+1}\right\| &= \left\|x_{n+1}-y_{1n}+y_{1n}-T_{1}^{n}y_{1n}+T_{1}^{n}y_{1n}-T_{1}^{n}x_{n+1}\right\| \\ &\le \left\|x_{n+1}-y_{1n}\right\|+\left\|T_{1}^{n}x_{n+1}-T_{1}^{n}y_{1n}\right\|+\left\|T_{1}^{n}y_{1n}-y_{1n}\right\| \\ &\le \left\|x_{n+1}-y_{1n}\right\|+k_n\left\|x_{n+1}-y_{1n}\right\|+\left\|T_{1}^{n}y_{1n}-y_{1n}\right\|\end{aligned}$$

(3.60)

(3.60) eşitsizliğinde her iki tarafın limiti alınırsa (3.37) ve (3.49) yardımıyla

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x_{n+1}-T_1^n x_{n+1}\right\|=0 \quad \text{(3.61)} \quad \text{olur.}$$

$$\begin{aligned}\left\|x_n-T_{m-1}^n x_n\right\| &= \left\|x_n-y_{(m-1)n}+y_{(m-1)n}-T_{m-1}^n y_{(m-1)n}+T_{m-1}^n y_{(m-1)n}-T_{m-1}^n x_n\right\| \\ &\le \left\|x_n-y_{(m-1)n}\right\|+\left\|T_{m-1}^n x_n-T_{m-1}^n y_{(m-1)n}\right\|+\left\|T_{m-1}^n y_{(m-1)n}-y_{(m-1)n}\right\| \\ &\le \left\|x_n-y_{(m-1)n}\right\|+k_n\left\|x_n-y_{(m-1)n}\right\|+\left\|T_{m-1}^n y_{(m-1)n}-y_{(m-1)n}\right\|\end{aligned}$$

(3.62)

(3.62) eşitsizliğinde her iki tarafın limiti alınırsa (3.37) ve (3.49) yardımıyla

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x_n-T_{m-1}^n x_n\right\|=0 \quad \text{(3.63)} \quad \text{olur.}$$

$$\begin{aligned}\left\|x_n-T_{m-2}^n x_n\right\| &= \left\|x_n-y_{(m-2)n}+y_{(m-2)n}-T_{m-2}^n y_{(m-2)n}+T_{m-2}^n y_{(m-2)n}-T_{m-2}^n x_n\right\| \\ &\le \left\|x_n-y_{(m-2)n}\right\|+\left\|T_{m-2}^n x_n-T_{m-2}^n y_{(m-2)n}\right\|+\left\|T_{m-2}^n y_{(m-2)n}-y_{(m-2)n}\right\| \\ &\le \left\|x_n-y_{(m-2)n}\right\|+k_n\left\|x_n-y_{(m-2)n}\right\|+\left\|T_{m-2}^n y_{(m-2)n}-y_{(m-2)n}\right\|\end{aligned}$$

(3.64)

(3.64) eşitsizliğinde her iki tarafın limiti alınırsa (3.37) ve (3.49) yardımıyla

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x_n-T_{m-2}^n x_n\right\|=0 \quad \text{(3.65)} \quad \text{olur.}$$

.

.

.

$$\begin{aligned}\left\|x_n - T_1^n x_n\right\| &= \left\|x_n - y_{1n} + y_{1n} - T_1^n y_{1n} + T_1^n y_{1n} - T_1^n x_n\right\| \\ &\le \left\|x_n - y_{1n}\right\| + \left\|T_1^n x_n - T_1^n y_{1n}\right\| + \left\|T_1^n y_{1n} - y_{1n}\right\| \\ &\le \left\|x_n - y_{1n}\right\| + k_n \left\|x_n - y_{1n}\right\| + \left\|T_1^n y_{1n} - y_{1n}\right\| \end{aligned} \quad (3.66)$$

(3.64) eşitsizliğinde her iki tarafın limiti alınırsa (3.37) ve (3.49) yardımıyla

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x_n - T_1^n x_n\right\| = 0 \quad (3.67) \quad \text{olur.}$$

$$\begin{aligned}\left\|x_n - T_m x_n\right\| &= \left\|x_n - x_{n+1} + x_{n+1} - T_m^{n+1} x_{n+1} + T_m^{n+1} x_{n+1} - T_m^{n+1} x_n + T_m^{n+1} x_n - T_m x_n\right\| \\ &\le \left\|x_n - x_{n+1}\right\| + \left\|T_m^{n+1} x_{n+1} - x_{n+1}\right\| + \left\|T_m^{n+1} x_{n+1} - T_m^{n+1} x_n\right\| + \left\|T_m^{n+1} x_n - T_m x_n\right\| \\ &\le \left\|x_n - x_{n+1}\right\| + \left\|T_m^{n+1} x_{n+1} - x_{n+1}\right\| + L\left\|x_{n+1} - x_n\right\| + L\left\|T_m^n x_n - x_n\right\| \end{aligned}$$

(3.68)

(3.68) eşitsizliğinde her iki tarafın limiti alınırsa (3.34), (3.51) ve (3.53) yardımıyla

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x_n - T_m x_n\right\| = 0 \quad (3.69) \quad \text{olur.}$$

$$\begin{aligned}\left\|x_n - T_{m-1} x_n\right\| &= \left\|x_n - x_{n+1} + x_{n+1} - T_{m-1}^{n+1} x_{n+1} + T_{m-1}^{n+1} x_{n+1} - T_{m-1}^{n+1} x_n + T_{m-1}^{n+1} x_n - T_{m-1} x_n\right\| \\ &\le \left\|x_n - x_{n+1}\right\| + \left\|T_{m-1}^{n+1} x_{n+1} - x_{n+1}\right\| + \left\|T_{m-1}^{n+1} x_{n+1} - T_{m-1}^{n+1} x_n\right\| + \left\|T_{m-1}^{n+1} x_n - T_{m-1} x_n\right\| \\ &\le \left\|x_n - x_{n+1}\right\| + \left\|T_{m-1}^{n+1} x_{n+1} - x_{n+1}\right\| + L\left\|x_{n+1} - x_n\right\| + L\left\|T_{m-1}^n x_n - x_n\right\| \end{aligned}$$

(3.70)

(3.70) eşitsizliğinde her iki tarafın limiti alınırsa (3.51), (3.55) ve (3.63) yardımıyla

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x_n - T_{m-1} x_n\right\| = 0 \quad (3.71) \quad \text{olur.}$$

$$\begin{aligned}\left\|x_n - T_{m-2}x_n\right\| &= \left\|x_n - x_{n+1} + x_{n+1} - T_{m-2}^{n+1}x_{n+1} + T_{m-2}^{n+1}x_{n+1} - T_{m-2}^{n+1}x_n + T_{m-2}^{n+1}x_n - T_{m-2}x_n\right\| \\ &\le \left\|x_n - x_{n+1}\right\| + \left\|T_{m-2}^{n+1}x_{n+1} - x_{n+1}\right\| + \left\|T_{m-2}^{n+1}x_{n+1} - T_{m-2}^{n+1}x_n\right\| + \left\|T_{m-2}^{n+1}x_n - T_{m-2}x_n\right\| \\ &\le \left\|x_n - x_{n+1}\right\| + \left\|T_{m-2}^{n+1}x_{n+1} - x_{n+1}\right\| + L\left\|x_{n+1} - x_n\right\| + L\left\|T_{m-2}^{n}x_n - x_n\right\|\end{aligned}$$

(3.72)

(3.70) eşitsizliğinde her iki tarafın limiti alınırsa (3.51), (3.57) ve (3.65) yardımıyla

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x_n - T_{m-2}x_n\right\| = 0 \qquad \text{(3.73) olur.}$$

.

.

.

$\lim_{n\to\infty}\left\|x_n - T_i x_n\right\| = 0$ i=1,2,3,…,m-1 için

olur. Yani

$$\lim_{n\to\infty}\left\|T_i x_n - x_n\right\| = 0 \qquad \text{(3.74)}$$

olur ki böylece ispat bitmiş olur.

Teorem 3.1.2. X bir reel düzgün konveks Banach uzayı, C, X in boştan farklı kapalı konveks altkümesi ve $\{k_n\} \subset [1,\infty]$, $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$ olacak şekilde $T_i : C \to C, (i = 1,2,3,...,m)$ m tane asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümü ve $\mathcal{F}=\cap_{i=1}^{m} F(T_i) \neq \emptyset$ olsun. Farz edelim ki $\{a_{in}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_{in}\}_{n=1}^{\infty}$, $(i = 1,2,3,...,m)$ dizileri [0,1] aralığında uygun diziler ve $\{u_{in}\}_{n=1}^{\infty}$ $(i = 1,2,3,...,m)$ dizileri C de sınırlı diziler olsun öyle ki $\sum_{n=1}^{\infty} b_{in} < \infty$ dır. Ayrıca her $(i = 1,2,3,...,m)$ için

$$0 < \liminf_{n\to\infty} a_{in} < \limsup_{n\to\infty}(a_{in} + b_{in}) < 1 \text{ olsun.} \quad \text{(3.75)}$$

Eğer bazı $i \in \{1,2,3,...,m\}$ için $\{T_i\}$ ailesinin bir tanesi tamamen sürekli ya da semi- kompakt ise (3.1) de verilen $\{x_n\}$ dizisi $\mathcal{F}$ nin bir elemanına kuvvetli yakınsar.

İspat: Varsayalım ki bir $\ell \in \{1,2,3,...,m\}$ vardır öyle ki T_ℓ semi- kompakt olsun. $\{x_n\}$ sınırlı bir dizi ve teorem 3.1.1. de $\lim_{n\to\infty}\|T_\ell x_n - x_n\| = 0$ olduğundan $\{x_n\}$ dizisinin $p \in C$ ye kuvvetli yakınsayan $\{x_{n_j}\}$ diye bir alt dizisi vardır. $\lim_{j\to\infty}\|T_\ell x_{n_j} - x_{n_j}\| = 0$ olduğundan lemma 2.4.4. gereği $T_\ell p = p$ olur. Aynı zamanda teorem 3.1.1. den i=1,2,…,m için $\lim_{j\to\infty}\|T_i x_{n_j} - x_{n_j}\| = 0$ olur. Sonuç olarak lemma 2.4.4. gereği $p \in \bigcap_{i=1}^{m} F(T_i)$ elde edilir. Böylece $\{x_n\}$ dizisi p ' ye kuvvetli yakınsar.

Eğer T_i dönüşümlerinden biri tamamen sürekli ise ki bu dönüşüm T_ℓ diye adlandırılsın, $\{x_n\}$ dizisi sınırlı olduğundan $\{x_{n_j}\}$ diye bir alt dizisi vardır öyle ki $T_\ell x_{n_j}$ ifadesi $p \in C$ ye kuvvetli yakınsar.

Teorem 3.1.1. gereği $\lim_{j\to\infty}\|x_{n_j} - T_\ell x_{n_j}\| = 0$ dır. $\|.\|$ un sürekliliğinden

$0 = \lim_{j\to\infty}\|x_{n_j} - T_\ell x_{n_j}\| = \lim_{j\to\infty}\|x_{n_j} - p\| = 0$ olur. (3.76)

$j \to \infty$ iken $\{x_{n_j}\} \to p$, i=1,2,…,m için $\lim_{j\to\infty}\|x_{n_j} - T_i x_{n_j}\| = 0$ ifadelerini kullanarak ve lemma 2.4.4. ten $p \in \bigcap_{i=1}^{m} F(T_i)$ elde edilir. Aynı şekilde $j \to \infty$ iken $\{x_{n_j}\} \to p$ ve lemma 3.1.1. den $\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\| = 0$ ifadesi elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.3. X bir reel düzgün konveks Banach uzayı, C, X'in boştan farklı kapalı konveks altkümesi ve $\{k_n\} \subset [1,\infty]$, $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$ olacak şekilde $T_i : C \to C, (i = 1,2,3,...,m)$ m tane asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümü (A)

şartını sağlasın ve $\mathcal{F}=\bigcap_{i=1}^{m} F(T_i) \neq \emptyset$ olsun. Farz edelim ki $\{a_{in}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_{in}\}_{n=1}^{\infty}$, $(i=1,2,3,...,m)$ dizileri $[0,1]$ aralığında uygun diziler ve $\{u_{in}\}_{n=1}^{\infty}$ $(i=1,2,3,...,m)$ dizileri C de sınırlı diziler olsun öyle ki $\sum_{n=1}^{\infty} b_{in} < \infty$ dır. Ayrıca her $(i=1,2,3,...,m)$ için

$$0<\liminf_{n\to\infty} a_{in} < \limsup_{n\to\infty}(a_{in}+b_{in})<1 \quad \text{olsun.}$$

O zaman (3.1) de verilen $\{x_n\}$ dizisi $\mathcal{F}$ nin bir elemanına kuvvetli yakınsaktır.

İspat: Lemma 3.1.1. den bütün $p \in \mathcal{F}$ için $\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\|$ var olduğundan herhangi bir $p \in \mathcal{F}$ için

$$d(x_n,\mathcal{F}) = \|x_n - p\| \qquad (3.77)$$

olur.

$\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\|$ var olduğunu bilindiğinden buradan hareketle $\lim_{n\to\infty} d(x_n,\mathcal{F})$ vardır.

(A) şartından

$$0 \leq f(d(x_n,\mathcal{F})) \leq \|x_n - T_{i_0}x_n\| \qquad (3.78)$$

olur ki burada

$$\|x_n - T_{i_o}x_n\| = \max_{1\leq i\leq m}\|x_n - T_i x_n\| \text{ dir.}$$

Teorem 3.1.1. den $\lim_{n\to\infty}\|x_n - T_{i_o}x_n\| = 0$ dır . Buradan $\lim_{n\to\infty} f(d(x_n,\mathcal{F})) = 0$ olur.

f fonksiyonunun süreklilik özelliğinden $\lim_{n\to\infty} d(x_n,\mathcal{F}) = 0$ elde edilir. (3.77) gereği $\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\| = 0$ olur.

Sonuç olarak $\lim_{n\to\infty} x_n = p \in \mathcal{F}$ dır.

Teorem 3.1.4. X Opial şartını sağlayan bir reel düzgün konveks Banach uzayı, C, X in boştan farklı kapalı konveks altkümesi ve $\{k_n\} \subset [1,\infty]$, $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$ olacak şekilde $T_i : C \to C, (i = 1,2,3,...,m)$ m tane asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümü (A) şartını sağlasın ve $\mathcal{F}=\cap_{i=1}^{m} F(T_i) \neq \emptyset$ olsun. Farz edelim ki $\{a_{in}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_{in}\}_{n=1}^{\infty}$, $(i = 1,2,3,..., m)$ dizileri [0,1] aralığında uygun diziler ve $\{u_{in}\}_{n=1}^{\infty}$ $(i = 1,2,3,..., m)$ dizileri C da sınırlı diziler olsun öyle ki $\sum_{n=1}^{\infty} b_{in} < \infty$ dır. Ayrıca her $(i = 1,2,3,..., m)$ için

$$0 < \liminf_{n\to\infty} a_{in} < \limsup_{n\to\infty}(a_{in} + b_{in}) < 1 \text{ olsun}$$

O zaman (3.1) de verilen $\{x_n\}$ dizisi $\{T_i : i = 1,2, \dots, m\}$ dönüşüm ailesinin ortak sabit noktasına zayıf yakınsar.

İspat: Lemma 3.1.1. den yola çıkarak $\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\|$ var olduğundan, $\{x_n - p\}$ X te sınırlı bir dizidir. X in yansımalılık ve $\{x_n\}$ dizisinin sınırlılık özelliğinden $\{x_{n_j}\}$ diye bir alt dizisi vardır öyle ki x_{n_j} , p ye zayıf yakınsar. Teorem 3.1.1. den $\lim_{n\to\infty}\|x_n - T_i x_n\| = 0$, ve $i = 1,2,...,m$ için $I - T_i$ sıfırda demiclosed'dır. Böylece $i = 1,2,...,m$ için $T_i p = p$ elde edilir. Sonuç olarak $\{x_n\}$ dizisinin p ye yakınsadığı ispatlanmış olur. Farz edelim $p, q \in w(\{x_n\})$ olsun ki burada $w(\{x_n\})$, $\{x_n\}$ dizisinin zayıf limit kümesini belirtir. $\{x_{n_j}\}$ ve $\{x_{m_j}\}$ sırasıyla p ve q ya zayıf yakınsayan $\{x_n\}$ dizisinin alt dizileri olsunlar. Opial şartı $w(\{x_n\})$ kümesinin tek elemanlı bir küme olduğunu garantiler. Buradan $p = q$ olduğu görülür. Böylece $\{x_n\}$ dizisi $\mathcal{F}$ kümesinin bir elemanına zayıf yakınsar bu ise ispatı tamamlar.

4. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu tezde kaynaklar kısmında verilen çalışmalar ışığında Banach uzaylarında kendinden kendi üzerine olan yeni sonlu adımlı iterasyon dizisi kullanılarak asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümlerin sonlu ailesinin ortak sabit noktasına yaklaşımı elde edilmeye çalışılmıştır.

Bundan sonraki çalışmalarda, Banach uzaylarında kendinden kendi üzerine olan sonlu adımlı iterasyon dizisi kullanılarak asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümlerin sonlu ailesinin ve onun genişlemeleri olan dönüşümlerin sabit noktasına kuvvetli ve zayıf yakınsaklıkları ispatlanarak literatürde elde edilen sonuçlar genelleştirilebilir ve geliştirilebilir.

KAYNAKLAR

BAYRAKTAR, M., 1992. Fonksiyonel Analiz. Atatürk Üniversitesi Yayınları, 320s.

BERINDE, V., 2006. Iterative Approximation of Fixed Points, Lecture Notes in Mathematics, 326 pp.

BROWDER, F. E., 1965. Nonexpansive nonlinear operators in a Banach Spaces. Proc. Nat. Acod. Sci., 54: 1041-1044.

BROWDER, F. E., 1976. Nonlinear Operators and Nonlinear Equations of Evolution in Banach Spaces, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 18, 2, Amer. Math. Soc. Providence R.I., 308 pp.

BROWDER, F. E. and PETRYSHYN, W.V., 1966. The Solution by Iteration of Linear Functional Equations in Banach Spaces. Bull. Amer. Math. Soc., 72(3): 566-570.

CHO, Y. J., ZHOU, H. Y. and GUO, G. T., 2004. Weak and Strong Convergence Theorems for Three-Steps Iterations with Errors for Asymptotically Nonexpansive Mappings. Computers and Mathematics with Applications, 47: 707-717.

DIAZ, J. B. and METCALF, F.T., 1969. On The Set of Sequential Limit Points of Successive Approximations. Trans. Amer. Math. Soc., 135: 459-485.

DOTSON, W. G. J., 1970. On The Mann Iterative Process. Trans. Amer. Math. Soc., 149: 65–73.

GHOSH, M. K. and DEBNAHT, L., 1997. Convergence of Ishikawa Iterates of Quasi-Nonexpansive Mapping. J. Math. Anal. Appl., 207: 96–103.

GLOWINSKI, R. and TALLEC, P. L., 1989. Augmented Lagrangian and Operator-Splitting Methods in Nonlinear Mechanics. SIAM, Philadelphia, 295 pp.

GOEBEL, K. and KIRK, W. A., 1972. A Fixed Point Theorem for Asymptotically Nonexpansive Mappings. Proc. Amer. Math. Soc., 35: 171–174.

GOEBEL, K. and KIRK, W. A., 1990. Topics in Metric Fixed Point Theory. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 28, 252 pp.

ISHIKAWA, S., 1974. Fixed Points by a New Iteration Method. Proc. Amer. Math. Soc., 44: 147–150.

KOLMOGOROV, A. N. and FOMIN, S. V., 1970. Introductory Real Analysis. Prentice-HallInc. , London, 403 pp.

LIU, Q., 2001. Iterations Sequence for Asymptotically Quasi-Nonexpansive Mapping with an Error Member. J. Math. Anal. Appl., 259: 18–24.

MANN, W. R., 1953. Mean Value Methods in Iteration. Proc. Amer. Math. Soc., 4: 506-510.

NOOR, M. A., 2000. New Approximation Schemes for General Variation a Line Qualities. J. Math. Anal. Appl., 251: 217–229.

OPIAL, Z., 1967. Weak Convergence of The Sequence of Successive Approximations for Nonexpansive Mappings. Bull. Austral. Math. Soc., 73: 591-597

PENG, J. W., 2007. On The Convergence of Finite Steps Iterative Sequences with Mean Errors for Asymptotically Quasi-Nonexpansive Mappings. IAENG International Journal of Applied Mathematics, 37(2): 84-88.

PETRYSHYN, W. V. and WILLIAMSON, T. E., 1973. Strong and Weak Convergence of The Sequence of Successive Approximations for Quasi-Nonexpansive Mappings. J. Math. Anal. Appl., 43: 459-497.

ROYDEN, H. L., 1968. Real Analysis (2nd eddition). Mcmillan, New York, 349 pp.

SCHU, J., 1991. Weak and Strong Convergence to Fixed Points of Asymptotically Nonexpansive Mappings. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 43(1): 153-159.

QUAN, J., CHANG, S. S. and LONG, X. J., 2005. Finite Steps Iterative Sequences with Errors for Asymptotically Quasi-Nonexpansive Mappings. Advances in Nonlinear Variational Inequalities, 8(2): 101-108.

TAN, K. K. and XU, H. K., 1993. Approximating Fixed Pointsof Nonexpansive Mappings by The Ishikawa Iteration Process. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 178(2): 301-308.

TEMİR, S. and KILIÇMAN, A., 2013. Approximating Common Fixed Points for a Finite Family of Asymptotically Nonexpansive Mappings Using Iteration Process with Error Terms. Abstract and Applied Analysis Article ID 974317, 8 Pages.

XU, H. K., 1991 Inequalities in Banach Spaces with Applications. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 178(2): 301-308.

XU, B. L. and NOOR, M. A., 2002. Fixed Point Iterations for Asymptotically Nonexpansive Mappings in Banach Spaces. J. Math. Anal. Appl., 267: 444-453.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : YAHYA BULUT
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : Ş.URFA- 23/10/1986
Telefon : 0541 840 10 11
e-mail : yahyabulut1@hotmail.com

EĞİTİM

Derece		Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	:	Davut Zeki Akpınar(YDA) Lisesi, Şanlıurfa	2005
Üniversite	:	Abant İzzet Baysal Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik(İngilizce), Bolu	2010
Yüksek Lisans	:	Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Şanlıurfa	2016

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2012	Milli Eğitim	Öğretmen

YABANCI DİLLER: İngilizce