



T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SOFT BAĞLANTILI UZAYLARIN BAZI ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE

Büşra AYDIN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalını

Haziran-2016
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Büşra AYDIN

Tarih:

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SOFT BAĞLANTILI UZAYLARIN BAZI ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE

Büşra AYDIN

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd.Doc.Dr Hasan köse
2016, 33 Sayfa

Jüri
Yrd.Doç.Dr.Hasan KÖSE
Doç.Dr.Necati TAŞKARA
Yrd.Doç.Dr.Nihat AKGÜNEŞ

Bu çalışmada ilk olarak tezde kullanılan kavramların literatür bilgilerini kısaca özetleyen giriş bölümü verildi.

İkinci olarak soft küme teori ve 2011 yılında Çağman ve ark. tarafından verilen soft topolojik uzaylar ile ilgili temel kavramlar ve bazı özellikler hatırlatıldı.

Sonraki kısımlarda soft bağlantısızlık ile ilgili bazı kavramlar verilip soft bileşen ve lokal soft bağlantılılık incelendi.

Anahtar Kelimeler: Soft Bağlantısızlık; Soft Bileşen; Soft Lokal Bağlantılılık; Soft Topoloji

ABSTRACT

MS THESIS

ON SOME PROPETIES OF SOFT CONNECTED SPACES

Büşra AYDIN

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE

Advisor: Yrd.Doc.Dr.Hasan KÖSE

2016, 33 Pages

Jury
Yrd.Doç.Dr.Hasan KÖSE
Doç.Dr.Necati TAŞKARA
Yrd.Doç.Dr.Nihat AKGÜNEŞ

In this study, firstly, the introduction which has been summarized briefly literature knowledge of concepts used in thesis was given.

Secondly, the basic concepts and some properties about soft set theory and soft topological space was proposed Çağman et.al in 2011 were reminded.

Then, some concepts about soft disconnected were given and soft local connected was examined.

Keywords: Soft Component; Soft disconnected; Soft Local Connected; Soft Topology

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Matematik Anabilim dalında çalışmış olan Prof.Dr. Şaziye YÜKSEL'in yönetiminde başlatılmış ve sürdürülmüş olup emekliliğinden sonra Yrd.Doc.Dr. Hasan KÖSE danışmanlığında tamamlanmıştır. Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Bu çalışma sürecinde emeğini ve bilgisini üzerimden eksik etmeyen saygıdeğer hocam Prof.Dr. Şaziye YÜKSEL' ve her zaman desteklerini benden esirgemeyen sayın Yrd.Doç.Dr Hasan KÖSE'ye teşekkür ederim. Ayrıca ilgi ve anlayışlarından dolayı saygıdeğer bölüm hocalarıma sonsuz şükranlarımı sunarım.

Büşra AYDIN
KONYA-2016

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

SİMGELER VE KISALTMALAR ..... **viii**

1. GİRİŞ **1**

2. SOFT KÜME TEORİ **3**

2.1. Soft Kümeler 3
2.2. Soft Topolojik Uzaylar 4

3. SOFT BAĞLANTILI UZAYLAR **9**

3.1. Soft Bağlantılı Kümeler 9
3.2. Soft Bağlantılı Uzaylar 11
3.3. Soft Bağlantılı Alt Uzaylar 12
3.4. Bir Soft Uzayın Soft Bileşenleri 15
3.5. Tamamen Soft Bağlantısız Uzaylar 18
3.6. Lokal Soft Bağlantılı Uzaylar 18

KAYNAKLAR **20**

ÖZGEÇMİŞ **22**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler	Açıklamalar
E	Parametreler kümesi
$\mathcal{P}(X)$	Güç kümesi
$=$	Eşittir
$\in$	Elemanıdır
$\Rightarrow$	İse
$\setminus$	Fark
$\cup$	Birleşim
$\cap$	Kesişim
$\emptyset$	Boş küme
F_A	Soft küme
F_Φ	Soft boş küme
F_E	Soft tam küme
$\sqsubseteq$	Soft alt küme
$\sqcap$	Soft kesişim
$\sqcup$	Soft birleşim
$S(X,E)$	Soft kümeler ailesi
$(F_A,\tilde{\tau})$	Soft topolojik uzay
F_A°	F_A soft kümesinin içi
F_A^c	F_A soft kümesinin tümleyeni
F_A^b	F_A soft kümesinin sınırı
F_A^-	F_A soft kümesinin kapanışı
$\mathcal{N}_{\tilde{\tau}}(x)$	Soft komşuluk sistemi

1. GİRİŞ

Günlük hayatta karşılaştığımız birçok kavram kesinden çok şüphelidir. Ancak klasik matematik kesin olmayan durumlarla ilgilenmez, tüm kavramlar belli olmalıdır, aksi halde kesin sonuca ulaşılamaz. Ancak bazı bilim adamları kesin olmayan durumlar üzerine de çalışmışlar ve bazı teorileri ortaya koymuşlardır. Bunlardan bazıları fuzzy küme teori (Zadeh, 1965; Atanassov, 1986; Gorzałczany, 1987; Atanassov, 1994), vague kümeler (Gau ve Buehrer, 1993), rough küme teori (Pawlak, 1982) ve soft küme teoridir (Molodtsov, 1999; Molodtsov ve ark., 2006).

1999 yılında Molodtsov (Molodtsov, 1999), belirsizliğe yeni bir yaklaşım olan soft küme teoriyi tanıttı. Bu teoride soft kümeyi, evrenin parametrelenmiş alt kümelerinin bir ailesi şeklinde tanımladı. Soft küme teori geniş bir alanda, birçok uygulamaya sahiptir.

2003 yılında Maji ve arkadaşları (Maji ve ark., 2002; Maji ve ark., 2003), soft küme teori ile ilgili çeşitli temel kavramları verdiler. VE, VEYA gibi ikili işlemleri, ayrıca birleşim ve kesişim işlemlerini tanımlayıp De Morgan kurallarının ve çok sayıda sonucun soft kümeler için doğru olduğunu gösterdiler. Çeşitli araştırmacılar soft küme teori üzerinde günümüze kadar çalışmışlardır. 2011 yılında Shabir ve Naz (Shabir ve Naz, 2011), evren küme üzerindeki bütün soft kümelerden oluşan aile üzerinde bir τ topolojisi kurdular. Bu topolojiyi (X, τ, E) soft topolojik uzay olarak adlandırdılar. Bu uzayda soft açıklar ve soft kapalıları verdiler. Soft kapanış, soft iç, soft komşuluk, soft alt uzay kavramlarını verdiler. Soft ayırma aksiyomlarını verdiler ve birbirleriyle karşılaştırdılar. Aygünoğlu ve Aygün (Aygünoğlu ve Aygün, 2012) 2012 yılında yaptıkları çalışmada soft dönüşümde soft sürekliliği tanımlamış ve soft topolojik uzayda kompaktlık üzerine çalışmışlardır.

2011 yılında Çağman ve ark. (Çağman ve ark., 2011), Shabir ve Naz (Shabir ve Naz, 2011)' ın üzerinde çalıştığı (X, τ, E) soft topolojik uzayından daha genel olan bir topolojik uzay tanımladılar. Burada soft kümeyi, parametre ve parametreye karşılık gelen evrenin parametrelenmiş alt kümesi ile birlikte bir ikili oluşturacak şekilde verdiler. Gerekli olan kavramları verip, evren küme üzerindeki bütün soft kümelerden herhangi bir tanesi üzerinde topoloji kurdular ve $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayı olarak adlandırdılar. Ayrıca bu uzayda soft iç, soft kapanış, soft sınır, soft açıklık, soft kapalılık, soft komşuluk, soft yığılma noktası ve soft taban kavramlarını verdiler. Soft iç, soft kapanış ve soft yığılma noktası ile ilgili olarak çok sayıda özellik vererek ispatladılar.

Bu çalışmada öncelikle soft kümeler ve soft topolojik uzaylar hakkında bazı tanım ve teoremler hatırlatılarak soft bağlantılı uzaylar ve soft bağlantılı alt uzaylar incelenmiştir. Ayrıca soft bileşen tanımlanarak tamamen soft bağlantısız uzaylar ve lokal soft bağlantılı uzaylar üzerinde bazı tanım ve teoremler verilmiştir.

Bu tez çalışması üç bölümden oluşmuştur.

Birinci bölümde; soft topoloji kavramının ortaya çıkışından, tarihçesinden ve yapılan çalışmanın içeriğinden bahsedilmiştir.

İkinci bölüm iki kısımdan oluşmuştur. Birinci kısımda; Çağman ve arkadaşlarının 2011 yılında tanımlamış olduğu soft küme kavramı verilmiş, soft kümeler ile ilgili iç, dış, kapanış, tümleyen, birleşim, kesişim vb. özellikler hatırlatılmış ve konu ile açıklayıcı örneklere yer verilmiştir. İkinci kısımda ise Çağman tarafında tanımlanan soft topoloji kavramı verilmiş olup bazı tanım ve teoremler ile açıklanmıştır.

Üçüncü bölümde; genel topolojide tanımlanmış**(Yüksel, 2008)** ve soft topolojide de sağlandığı gösterilen soft bağlantılı uzaylar ve soft bağlantılı alt uzaylar hatırlatılıp bazı teoremler verilmiştir. Bir soft uzay için soft bileşen ve lokal soft bağlantılı uzay kavramları tanımlanmıştır.

Yapılan bu tez çalışmasının bazı kısımlarıyla bir makale oluşturulmuş ve Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi'nde basıma kabul edilmiştir.

2. SOFT KÜME TEORİ

2.1. Soft Kümeler

Bu bölümde soft küme teori ile ilgili temel kavramları ve özellikleri hatırlattık. Burada X başlangıç evreni, E parametre kümesi, $P(X)$ X' in güç kümesi ve $A \subseteq E$ olarak alınmıştır.

Tanım 2.1.1.(Çağman ve ark., 2011) X evren kümesi üzerinde tanımlanan ikililerin oluşturduğu F_A soft kümesi, f_A: $E \longrightarrow P(X)$ küme değerli bir dönüşüm olmak üzere,

$$F_A = \{(e, f_A(e)) : e \in E, f_A(e) \in P(X)\}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan $e \notin A$ ise $f_A(e) = \emptyset$ olur.

X evren kümesi üzerindeki bütün soft kümeler $S(X, E)$ ile gösterilmiştir.

Örnek 2.1.1. Zeynep ve Ahmet evlenecekler ve bir düğün salonu kiralamak istiyorlar. F_A soft kümesi düğün salonunun özelliklerini açıklasın. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ düğün salonlarının kümesi, $E = \{e_1 = büyük, e_2 = merkezde, e_3 = ucuz, e_4 = kaliteli, e_5 = şık\}$ parametreler kümesi ve

$F(e_1) = \{x_2, x_4\}$, $F(e_2) = \{x_1, x_3, x_4\}$, $F(e_3) = \emptyset$, $F(e_4) = \{x_1, x_3, x_5\}$, $F(e_5) = \{x_1, x_6\}$

olsun. F_A soft kümesi,

$F_A = \{e_1 = \{x_2, x_4\}, e_2 = \{x_1, x_3, x_4\}, e_3 = \emptyset, e_4 = \{x_1, x_3, x_5\}, e_5 = \{x_1, x_6\}\}$

şeklinde oluşturulabilir.

Tanım 2.1.2.(Çağman ve ark., 2011) $F_\emptyset \in S(X, E)$ verilsin. Eğer her $e \in E$ için $f_\emptyset(e) = \emptyset$ oluyorsa $F_\emptyset$, boş soft küme olarak adlandırılır ve F_Φ ile gösterilir.

Tanım 2.1.3.(Çağman ve ark., 2011) $F_A \in S(X, E)$ soft kümesi verilsin. Her $e \in A$ için $f_A(e) = X$ oluyorsa F_A, A - tam soft küme olarak adlandırılır ve $F_{\tilde{A}}$ ile gösterilir. Eğer $A = E$ ise A - tam soft kümesi, tam soft küme olarak adlandırılır ve $F_{\tilde{E}}$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.4.(Çağman ve ark., 2011) $F_A, F_B \in S(X,E)$ soft kümeleri verilsin. Eğer her $e \in E$ için, $f_A(e) \subseteq f_B(e)$ oluyorsa F_A, F_B soft kümesinin soft alt kümesidir denir ve $F_A \sqsubseteq F_B$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.5.(Çağman ve ark., 2011) $F_A, F_B \in S(X,E)$ soft kümeleri verilsin. Eğer her $e \in E$ için, $f_A(e) = f_B(e)$ oluyorsa F_A ile F_B soft eşittir denir ve $F_A = F_B$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.6.(Çağman ve ark., 2011) $F_A, F_B \in S(X,E)$ soft kümeleri verilsin. Buradan soft birleşim $F_A \sqcup F_B$, soft kesişim $F_A \sqcap F_B$ ve soft fark $F_A \tilde{\setminus} F_B$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.7.(Çağman ve ark., 2011) $F_A \in S(X,E)$ soft kümesi verilsin. F_A soft kümesinin soft tümleyeni F_A^c şeklinde gösterilir. $f_A(e)$ kümesinin tümleyeni $f_A^c(e)$ ile ifade edilir ve her $e \in E$ için $f_A^c(e) = X \setminus f_A(e)$ dir.

Şimdi verilecek olan teoremde soft kümelerinde kesişim, birleşim, tümleyen gibi özelliklerin bir kısmını sağladığı gösterilecektir.

Teorem 2.1.1.(Çağman ve ark., 2011) $F_A, F_B, F_C \in S(X,E)$ soft kümeleri verilsin.

1) $F_A \sqcup F_A = F_A, F_A \sqcap F_A = F_A$

2) $F_A \sqcup F_\Phi = F_A, F_A \sqcap F_\Phi = F_\Phi$

3) $F_A \sqcup F_{\tilde{E}} = F_{\tilde{E}}, F_A \sqcap F_{\tilde{E}} = F_A$

4) $F_A \sqcup F_A^c = F_{\tilde{E}}, F_A \sqcap F_A^c = F_\Phi$

5) $F_A \sqcup F_B = F_B \sqcup F_A, F_A \sqcap F_B = F_B \sqcap F_A$

6) $(F_A \sqcup F_B)^c = F_B^c \sqcap F_A^c, (F_A \sqcap F_B)^c = F_B^c \sqcup F_A^c$

7) $(F_A \sqcup F_B) \sqcup F_C = F_A \sqcup (F_B \sqcup F_C)$

$(F_A \sqcap F_B) \sqcap F_C = F_A \sqcap (F_B \sqcap F_C)$

8) $F_A \sqcup (F_B \sqcap F_C) = (F_A \sqcup F_B) \sqcap (F_A \sqcup F_C)$

$F_A \sqcap (F_B \sqcup F_C) = (F_A \sqcap F_B) \sqcup (F_A \sqcap F_C)$

9) $(F_A^c)^c = F_A$

10) $F_A \sqsubseteq F_B$ ise $F_B^c \sqsubseteq F_A^c$ olur.

Teorem 1.1.2.(Çağman ve ark., 2011) $F_A \in S(X,E)$ olsun. Her $e \in A$ için $x \in f_A(e)$ olduğunda x, F_A soft kümesine aittir denir ve $x \in F_A$ şeklinde gösterilir. Herhangi $x \in X$ ve $e \in A$ için $x \notin f_A(e)$ ise $x \notin F_A$ 'dır.

Tanım 1.1.8. (Çağman ve ark., 2011) $x \in X$ olsun. Her $e \in E$ için $x_E(e) = \{x\}$ oluyorsa x_E, X üzerinde bir soft küme olarak tanımlanır.

Tanım 1.1.9. X ve Y üzerindeki bütün soft kümelerin ailesi sırasıyla $S(X,E)$ ve $S(Y,K)$ olsun. (φ,ψ) dönüşümü X' den Y' ye bir soft dönüşüm olarak tanımlanır. Burada $\varphi: X \to Y$ ve $\psi: E \to K$ iki dönüşümdür.

(1) $F_A \in S(X,E)$ olsun. F_A'nın (φ,ψ) dönüşümü altındaki görüntüsü Y üzerinde bir soft kümedir ve $(\varphi,\psi)(F_A)$ olarak tanımlanır.

$$(\varphi,\psi)(F_A)(k) = \begin{cases} \bigcup_{e \in \psi^{-1}(k) \cap A} \varphi\left(F_A(e)\right), & \psi^{-1}(k) \cap A \neq \emptyset \\ \emptyset, & aksi\ halde \end{cases}$$

(2) $G_B \in S(Y,K)$ olsun. G_B'nin (φ,ψ) dönüşümü altındaki ters görüntüsü X üzerinde bir soft kümedir ve$(\varphi,\psi)^{-1}(G_B)$ olarak tanımlanır.

$$(\varphi,\psi)^{-1}(G_B)(e) = \begin{cases} \varphi^{-1}\left(G_B(\psi(e))\right), & \psi(e) \in B \\ \emptyset, & aksi\ \ halde \end{cases}$$

(φ,ψ), X'den Y'ye bir soft dönüşüm ve (φ',ψ') Y'den Z'ye bir soft dönüşüm ise (φ,ψ) ve (φ',ψ') nin bileşkesi $(\varphi,\psi)\mathrm{o}(\varphi',\psi')$ şeklinde gösterilir ve $(\varphi,\psi)\mathrm{o}(\varphi',\psi') = (\varphi\mathrm{o}\varphi',\psi\mathrm{o}\psi')$ olarak tanımlanır. φ ve ψ injektif ise (φ,ψ) soft dönüşümü de injektiftir denir. φ ve ψ surjektif ise (φ,ψ) soft dönüşümü de surjektiftir denir.

Tanım 1.1.10.

1) Eğer $(F_A)_1 \sqsubseteq (F_A)_2$ ise $(\varphi,\psi)((F_A)_1) \sqsubseteq (\varphi,\psi)((F_A)_2)$
2) Eğer $(G_B)_1 \sqsubseteq (G_B)_2$ ise $(\varphi,\psi)^{-1}((G_B)_1) \sqsubseteq (\varphi,\psi)^{-1}((G_B)_2)$
3) $F_A \sqsubseteq (\varphi,\psi)^{-1}((\varphi,\psi)(F_A))$

2.2. Soft Topolojik Uzaylar

Bu bölümde soft kümeler kullanılarak elde edilen soft topolojik uzayı ve bu uzayda soft iç, soft kapanış, soft sınır, soft açıklık, soft kapalılık, soft komşuluk, soft dönüşüm, soft yığılma noktası, soft taban ve soft komşuluk tabanı kavramlarını ve özelliklerini hatırlattık.

Tanım 2.2.1.(Çağman ve ark., 2011) $F_A \in S(X,E)$ verilsin. F_A soft kümesinin soft güç kümesi,

$$\tilde{P}(F_A) = \{(F_A)_i : (F_A)_i \sqsubseteq F_A, i \in I \subseteq \mathbb{N}\}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.2.1: $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$,
$A = \{e_1, e_2\} \sqsubseteq E$ alalım.
$F_A = \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_2, x_3\})\}$ soft kümesi verilmiş olsun. F_A soft kümesinin bütün soft alt kümeleri aşağıdaki gibidir.

$F_{A_1} = \{(e_1, \{x_1\})\}$
$F_{A_2} = \{(e_1, \{x_2\})\}$
$F_{A_3} = \{(e_1, \{x_1, x_2\})\}$
$F_{A_4} = \{(e_2, \{x_2\})\}$
$F_{A_5} = \{(e_2, \{x_3\})\}$
$F_{A_6} = \{(e_2, \{x_2, x_3\})\}$
$F_{A_7} = \{(e_1, \{x_1\}), (e_2, \{x_2\})\}$
$F_{A_8} = \{(e_1, \{x_1\}), (e_2, \{x_3\})\}$
$F_{A_9} = \{(e_1, \{x_1\}), (e_2, \{x_2, x_3\})\}$
$F_{A_{10}} = \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, \{x_2\})\}$
$F_{A_{11}} = \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, \{x_3\})\}$
$F_{A_{12}} = \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, \{x_2, x_3\})\}$
$F_{A_{13}} = \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_2\})\}$
$F_{A_{14}} = \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_3\})\}$
$F_{A_{15}} = F_A$
$F_{A_{16}} = F_\Phi$

olur. Dolayısıyla F_A soft kümesinin soft güç kümesi 16 elemanlıdır.

Tanım 2.2.2.(Çağman ve ark., 2011) $F_A \in S(X,E)$ verilsin. F_A soft kümesi üzerindeki bir $\tilde{\tau}$ ailesi,

i)$F_\Phi, F_A \in \tilde{\tau}$

ii)$\{(F_A)_i \sqsubseteq F_A, i \in I \subseteq \mathbb{N}\} \subseteq \tilde{\tau} \Rightarrow \bigsqcup_{i \in I \subseteq \mathbb{N}} (F_A)_i \in \tilde{\tau}$

iii)$\{(F_A)_i \sqsubseteq F_A, 1 \leq i \leq n, \ n \in \mathbb{N}\} \subseteq \tilde{\tau} \Rightarrow \bigsqcap_{i=1}^{n} (F_A)_i \in \tilde{\tau}$

özelliklerini sağlarsa F_A soft kümesi üzerinde $\tilde{\tau}$ topolojisi tanımlanır. Burada $(F_A, \tilde{\tau})$ ikilisine soft topolojik uzay denir.

$\tilde{\tau}$'nun üyeleri soft açık kümelerdir. $F_B^c \in \tilde{\tau}$ ise F_B $(F_A, \tilde{\tau})$'da soft kapalı bir kümedir.

En kaba soft topoloji $\tilde{\tau}^0$ ile gösterilir ve sadece F_Φ ve F_A soft kümelerini içerir. En ince soft topoloji $\tilde{\tau}^1$ ile gösterilir ve F_A nın bütün soft alt kümelerini içerir.

Tanım 2.2.3.(Çağman ve ark., 2011) $(F_A, \tilde{\tau}_1)$ ve $(F_A, \tilde{\tau}_2)$ soft topolojik uzayları verilsin. Eğer, $\tilde{\tau}_1 \sqsubseteq \tilde{\tau}_2$ ise $\tilde{\tau}_2$, $\tilde{\tau}_1$ den daha incedir. Eğer $\tilde{\tau}_1 \sqsubset \tilde{\tau}_2$ ise $\tilde{\tau}_2$, $\tilde{\tau}_1$ den kesinlikle daha incedir. Eğer $\tilde{\tau}_1 \sqsubseteq \tilde{\tau}_2$ veya $\tilde{\tau}_2 \sqsubseteq \tilde{\tau}_1$ ise $\tilde{\tau}_1$ ile $\tilde{\tau}_2$ karşılaştırılabilirdir.

Teorem 2.2.1. $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayı verilsin. Aşağıdakiler her zaman doğrudur.

(i) F_E tam soft küme ve F_A^c soft kapalı kümelerdir.

(ii) Soft kapalı kümelerin herhangi soft kesişimleri soft kapalıdır.

(iii) Soft kapalı kümelerin sonlu soft birleşimleri soft kapalıdır.

Tanım 2.2.4.(Çağman ve ark., 2011) $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayı ve $(F_A)_1 \sqsubseteq F_A$ verilsin. $(F_A)_1$ soft kümesinin soft içi $(F_A)_1^\circ$ ile gösterilir ve $(F_A)_1$ soft kümesinin kapsadığı bütün soft açık alt kümelerinin soft birleşimi şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.2.2.(Çağman ve ark., 2011) $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzay ve $F_B \sqsubseteq F_A$ olsun. $F_B = F_B^\circ$ ise F_B soft açık kümedir.

Tanım 2.2.5.(Çağman ve ark., 2011) $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzay, $F_B \sqsubseteq F_A$ ve $x \in F_B$ olsun. $x \in F_C \sqsubseteq F_B$ olacak şekilde bir F_C soft açık kümesi varsa x, F_B nin bir soft iç noktasıdır.

Aşağıdaki teoremde soft topolojinin genel topolojideki iç özelliklerini sağladığı gösterilmiştir.

Teorem 2.2.3.(Çağman ve ark., 2011) $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzay ve $F_B, F_C \sqsubseteq F_A$ olsun. Buradan,

1) $(F_B^\circ)^\circ = F_B^\circ$
2) $F_B \sqsubseteq F_C \Rightarrow F_B^\circ \sqsubseteq F_C^\circ$
3) $F_B^\circ \sqcap F_C^\circ = (F_B \sqcap F_C)^\circ$
4) $F_B^\circ \sqcup F_C^\circ \sqsubseteq (F_B \sqcup F_C)^\circ$

Tanım 2.2.6.(Çağman ve ark., 2011) $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzay ve $F_B \sqsubseteq F_A$ olsun. F_B'nin soft kapalısı F_B^- ile gösterilir ve F_B nin tüm kapalı soft üst kümelerinin kesişimi şeklinde tanımlanır. F_B^-, F_B'yi kapsayan en küçük soft kapalıdır.

Teorem 2.2.4.(Çağman ve ark., 2011) $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzay ve $F_B \sqsubseteq F_A$ olsun. F_B'nin soft kapalı olması için gerek ve yeter şart $F_B = F_B^-$ olmasıdır.

Teorem 2.2.5.(Çağman ve ark., 2011) $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzay ve $F_B \sqsubseteq F_A$ olsun. Buradan $F_B^\circ \sqsubseteq F_B \sqsubseteq F_B^-$ yazılabilir.

Teorem 2.2.6.(Çağman ve ark., 2011) $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzay ve $F_B, F_C \sqsubseteq F_A$ olsun. Buradan,

1) $(F_B^-)^- = F_B^-$
2) $(F_B^-)^c = (F_B^c)^\circ$
3) $F_B \sqsubseteq F_C \Rightarrow F_B^- \sqsubseteq F_C^-$
4) $(F_B \sqcap F_C)^- \sqsubseteq F_B^- \sqcap F_C^-$
5) $F_B^- \sqcup F_C^- = (F_B \sqcup F_C)^-$

Tanım 2.2.7.(Çağman ve ark., 2011) $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzay ve $F_B \sqsubseteq F_A$ olsun. F_B nin sınırı, F_B^b ile gösterilir ve $F_B^b = F_B^- \sqcap (F_B^c)^-$ ile tanımlanır.

Tanım 2.2.8.(Çağman ve ark., 2011) $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayı ve $(F_A)_1 \sqsubseteq F_A$ verilsin. Eğer $(F_A)_1^c$ soft açık ise $(F_A)_1$ soft kapalıdır.

Teorem 2.2.7.(Çağman ve ark., 2011) $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayı ve $(F_A)_1, (F_A)_2 \sqsubseteq F_A$ verilsin. Buradan,

i) $((F_A)_1^-)^- = (F_A)_1^-$

ii) $((F_A)_1^-)^c = ((F_A)_1^c)^\circ$

iii) $(F_A)_1 \sqsubseteq (F_A)_2 \Longrightarrow (F_A)_1^- \sqsubseteq (F_A)_2^-$

iv) $((F_A)_1 \sqcap (F_A)_2)^- \sqsubseteq (F_A)_1^- \sqcap (F_A)_2^-$

v) $(F_A)_1^- \sqcup (F_A)_2^- = ((F_A)_1 \sqcup (F_A)_2)^-$

Tanım 2.2.9.(Çağman ve ark., 2011) $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayı ve $(F_A)_1 \sqsubseteq F_A$ verilsin. $(F_A)_1$ soft kümesi üzerindeki $\tilde{\tau}_{(F_A)_1} = \{(F_A)_i \sqcap (F_A)_1 : \ (F_A)_i \in \tilde{\tau}, \ i \in I \subseteq \mathbb{N}\}$ topolojisine, $(F_A)_1$ soft kümesi üzerine indirgenen soft alt uzay topolojisi, $((F_A)_1, \tilde{\tau}_{(F_A)_1})$ soft topolojik uzayına da $(F_A, \tilde{\tau})$ uzayının soft alt uzayı denir.

Tanım 2.2.10.(Çağman ve ark., 2011) $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayı ve $\alpha \in F_A$ [$\alpha=(e, f_A(e))$, her $e \in E$ ve $f_A(e) \in P(X)$] verilsin. α elemanını içeren her $(F_A)_1 \sqsubseteq F_A$ soft açık alt kümesine, α elemanının soft açık komşuluğu (ya da soft komşuluğu) denir ve $\tilde{\mathcal{V}}_{(\alpha)}$ ile gösterilir. Yani,

$$\tilde{\mathcal{V}}_{(\alpha)} = \{(F_A)_1 : (F_A)_1 \in \tilde{\tau}, \alpha \in (F_A)_1\}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2.11.(Çağman ve ark., 2011) $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayı verilsin. $(F_A)_1 \sqsubseteq F_A$ ve $\alpha \in F_A$ verilsin. Eğer α elemanının her soft komşuluğu, $(F_A)_1$ soft kümesinin α elemanından farklı bir elemanını içeriyorsa α elemanına $(F_A)_1$ soft kümesinin soft yığılma noktası denir. Yani,

$$\forall (F_A)_2 \in \tilde{\mathcal{V}}_{(\alpha)} \text{ için } (F_A)_1 \sqcap ((F_A)_2 \tilde{\setminus} \{\alpha\}) \neq F_\Phi$$

oluyorsa α, $(F_A)_1$ soft kümesinin soft yığılma noktasıdır. $\alpha \in (F_A)_1'$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.12.(Çağman ve ark., 2011) $(F_A, \tilde{\tau})$ bir soft topolojik uzay ve $\tilde{\beta}$ da F_A soft kümesinin soft açık alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer $\tilde{\tau}$ ailesindeki her bir $(F_A)_1$ soft açık kümesi $\tilde{\beta}$ ya ait soft kümelerin herhangi soft birleşimleri olarak yazılabiliyorsa $\tilde{\beta}$ ailesine $\tilde{\tau}$ topolojisi için bir soft taban denir. Yani,

$$\tilde{\beta} \subseteq \tilde{\tau} \Leftrightarrow \forall (F_A)_1 \in \tilde{\tau}$$

için

$$(F_A)_1 = \bigsqcup_{(F_A)_2 \in \Psi} (F_A)_2 \ni \Psi \subseteq \tilde{\beta}$$

şeklinde yazılır.

Tanım 2.2.13.(Ahmad ve Hussain, 2012) $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzay ve $\alpha \in F_A$ verilsin. Eğer her $(F_A)_1 \in \tilde{\mathcal{V}}_{(\alpha)}$ soft komşuluğu için $(F_A)_2 \sqsubseteq (F_A)_1$ olacak şekilde bir $(F_A)_2 \in \tilde{\mathfrak{S}}_{(\alpha)}$ varsa, $\tilde{\mathfrak{S}}_{(\alpha)}$ ailesine $\tilde{\tau}$ soft topolojisine göre α elemanının bir soft komşuluklar tabanı denir.

3. SOFT BAĞLANTILI UZAYLAR

3.1. Soft Bağlantılı Kümeler

Bu kısımda Lin tarafından tanımlanmış soft bağlantılı küme tanımını verip konuyu açıklayan bazı tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 3.1.1.(Lin, 2013) $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzay ve $F_B, F_C \sqsubseteq F_A$ olsun. Eğer; $F_B^- \sqcap F_C \neq \Phi$ veya $F_B \sqcap F_C^- \neq \Phi$ ise F_B veF_C soft kümelerine soft bağlantılı kümeler denir. Burada F_B ve F_C soft bağlantısız ise $F_B^- \sqcap F_C = \Phi$ ve $F_B \sqcap F_C^- = \Phi$ 'dir.

Tanım 3.1.2.(Lin, 2013) $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzay ve $F_B, F_C \sqsubseteq F_A$ olsun. F_B ve F_C ayrık ise $F_B \sqcap F_C = \Phi$ 'dir.

Uyarı 3.1.1. Bir soft topolojik uzayda iki soft bağlantısız kümeler soft ayrıktır. Ancak karşıtı doğru değildir.

Teorem 3.1.1 $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzay ve $F_B, F_C \sqsubseteq F_A$ olsun.

(i) Eğer soft ayrık F_B ve F_C kümeleri soft açıksa soft bağlantısızdır.

(ii)Eğer soft ayrık . F_B ve F_C kümeleri soft kapalıysa soft bağlantısızdır.

İspat. (i) F_B ve F_C soft ayrık kümeler olsun. Bu kümelerin her ikisi de soft açık olduğundan F_B^c ve F_C^c soft kapalıdır. $F_B \sqcap F_C = \Phi$ olduğundan,

$$F_B \sqsubseteq F_C^c \Rightarrow F_B^- \sqsubseteq (F_C^c)^- \Rightarrow F_B^- \sqsubseteq (F_C^\circ)^c \Rightarrow F_B^- \sqsubseteq F_C^c \quad (1)$$

Benzer şekilde; $F_B \sqcap F_C = \Phi$ olduğundan,

$$F_C \sqsubseteq F_B^c \Rightarrow F_C^- \sqsubseteq (F_B^c)^- \Rightarrow F_C^- \sqsubseteq (F_B^\circ)^c \Rightarrow F_C^- \sqsubseteq F_B^c \quad (2)$$

F_C ve F_B sırasıyla (1) ve (2) ile kesiştirilirse

$$F_B^- \sqcap F_C \sqsubseteq F_C^c \sqcap F_C = \Phi \quad (3)$$

$$F_B \sqcap F_C^- \sqsubseteq F_B \sqcap F_B^c = \Phi \quad (4)$$

bulunur. (3) ve (4) kullanılarak Tanım 3.1.1' den F_B ve F_C soft bağlantısız olarak bulunur.

(ii) $F_B \sqcap F_C = \Phi$ olsun. F_B ve F_C kümeleri soft kapalı olduğundan $F_B^- \sqcap F_C = F_B \sqcap F_C^- = F_B \sqcap F_C = \Phi$'dır. Tanım 3.1.1 'den F_B ve F_C soft bağlantısız olarak bulunur.

Teorem 3.1.2. $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzay ve $F_B, F_C \sqsubseteq F_A$ olsun. F_B ve F_C soft kümelerinin her ikiside soft açık ya da soft kapalı ise $F_B \setminus F_C$ ve $F_C \setminus F_B$ soft kümeleri soft bağlantısızdır yani;

$$(F_B \setminus F_C)^- \sqcap (F_C \setminus F_B) = \Phi \text{ ve } (F_C \setminus F_B)^- \sqcap (F_B \setminus F_C) = \Phi$$

'dir.

İspat. F_B ve F_C kümeleri soft açık olsun.

$F_B \setminus F_C = F_B \sqcap F_C^c$ ve $(F_B \sqcap F_C)^- \sqsubset F_B^- \sqcap F_C^-$ olduğundan,

$$\begin{aligned}(F_B \setminus F_C)^- \sqcap (F_C \setminus F_B) &= (F_B \sqcap F_C^c)^- \sqcap F_C \sqcap F_B^c \\ &\sqsubseteq F_B^- \sqcap (F_B^c)^- \sqcap F_C \sqcap F_B^c \\ &\sqsubseteq F_B^- \sqcap F_B^c \sqcap F_C \sqcap (F_B^c)^- \\ &\sqsubseteq F_B^- \sqcap (F_B^c)^- \sqcap F_C \sqcap (F_C^\circ)^c \end{aligned} \quad (1)$$

F_C soft açık olduğundan $F_C^\circ = F_C$'dır. Buradan, görülür ki $(F_B \setminus F_C)^- \sqcap F_C \setminus F_B = \Phi$'dır. Benzer şekilde;

$$\begin{aligned}(F_C \setminus F_B)^- \sqcap (F_B \setminus F_C) &= F_B \sqcap F_C^c \sqcap (F_C \sqcap F_B^c)^- \\ &\sqsubseteq F_B \sqcap F_C^c \sqcap F_C^- \sqcap (F_B^c)^- \\ &\sqsubseteq F_B \sqcap (F_B^c)^- \sqcap F_C^- \sqcap F_C^c \\ &\sqsubseteq F_B \sqcap (F_B^\circ)^c \sqcap F_C^- \sqcap F_C^c \end{aligned} \quad (2)$$

F_B soft açık olduğundan, $F_B^\circ = F_B$'dir. Buradan, görülür ki;

$(F_C \setminus F_B)^- \sqcap (F_B \setminus F_C) = \Phi$

dir. F_B ve F_C kümeleri soft kapalı olduğundan $F_B^- = F_B$ ve $F_C^- = F_C$'dir. (1) ve (2) den $F_B \setminus F_C$ ve $F_C \setminus F_B$ soft ayrık kümelerdir.

Teorem 3.1.3. $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzay ve $F_B, F_C \sqsubseteq F_A$ olsun. Eğer $F_B^- \sqcap F_C = \Phi$ ve $F_B \sqcup F_C$ soft kapalı ise F_B soft kapalıdır.

İspat. $F_B \sqcup F_C$ soft kapalı olduğundan, $(F_B \sqcup F_C)^- = F_B^- \sqcup F_C^- = F_B \sqcup F_C$ ve $F_B^- \sqsubset F_B \sqcup F_C$ yazılabilir. $F_B^- \sqcap F_C = \Phi$ olduğundan, $F_B^- \sqsubset F_B$ bulunur. $F_B \sqsubset F_B^-$ olduğundan, $F_B = F_B^-$ ve F_B kapalı bulunur.

Teorem 3.1.4. $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzay ve $F_B, F_C \sqsubseteq F_A$ olsun. Eğer $F_B \sqcap F_C^- = \Phi$ ve$F_B \sqcup F_C$ soft kapalı ise F_C soft kapalıdır.

İspat. $F_B \sqcup F_C$ soft kapalı olduğundan,$(F_B \sqcup F_C)^- = F_B^- \sqcup F_C^- = F_B \sqcup F_C$. Hipotezden, $F_B \sqcap F_C^- = \Phi$ olduğunu biliyoruz. Buradan, $F_C^- \sqsubset F_C$ ve F_C'nin soft kapalısı küme olduğu bulunur.

Sonuç 3.1.1. (F_A , $\tilde{\tau}$) soft topolojik uzay ve $F_B, F_C \sqsubseteq F_A$ olsun. Eğer F_B ve F_C soft bağlantısız kümeler ve $F_B \sqcup F_C$ soft kapalı ise F_B ve F_C soft kapalıdır.

İspat. Teorem 3.1.3 ve Teorem 3.1.4'den ispat açıktır.

Teorem 3.1.5. (F_A , $\tilde{\tau}$) soft topolojik uzay ve $F_B, F_C \sqsubseteq F_A$ olsun. Eğer $F_B^- \sqcap F_C = \Phi$ ve $F_B \sqcup F_C$ soft açıksa F_C soft açıktır.

İspat. Hipotezden $F_B^- \sqcap F_C = \Phi$, $F_C \sqsubset (F_B^-)^c$ ve $F_B \sqcup F_C$ soft açık olduğundan, $(F_B \sqcup F_C) \sqcap (F_B^-)^c = (F_B \sqcap (F_B^-)^c) \sqcup (F_C \sqcap (F_B^-)^c)$ eşitliği yazılabilir ve eşitliğin sol tarafı soft açık olduğundan, $F_C = (F_B \sqcap (F_B^-)^c) \sqcup (F_C \sqcap (F_B^-)^c)$ eşitliği ile görülür ki F_C soft açıktır.

Teorem 3.1.6. (F_A , $\tilde{\tau}$) soft topolojik uzay ve $F_B, F_C \sqsubseteq F_A$ olsun. Eğer$F_B \sqcap F_C^- = \Phi$ ve $F_B \sqcup F_C$ soft açıksa F_B soft açıktır.

İspat. Hipotezden $F_B^- \sqcap F_C = \Phi$, $F_B \sqsubset (F_C^-)^c$ ve $F_B \sqcup F_C$ soft açık olduğundan, $(F_B \sqcup F_C) \sqcap (F_C^-)^c = (F_B \sqcap (F_C^-)^c) \sqcup (F_C \sqcap (F_C^-)^c)$ eşitliği yazılabilir ve eşitliğin sol tarafı soft açık olduğundan, $F_B = (F_B \sqcap (F_C^-)^c) \sqcup (F_C \sqcap (F_C^-)^c)$ eşitliği ile görülür ki F_B soft açıktır.

Sonuç 3.1.2. (F_A , $\tilde{\tau}$) soft topolojik uzay ve $F_B, F_C \sqsubseteq F_A$ olsun. Eğer F_B ve F_C soft bağlantısız kümeler ve $F_B \sqcup F_C$ soft açık ise F_B ve F_C soft açıktır.

İspat. Teorem 3.1.5 ve Teorem 3.1.6' dan ispat açıktır.

3.2. Soft Bağlantılı Uzaylar

Bu kısımda soft bağlantılı uzayın tanımı hatırlatılmış ve uzayın soft bağlantılı ya da soft bağlantısız olması durumunu açıklayan teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 3.2.1. (Lin, 2013) (F_A , $\tilde{\tau}$) bir soft topolojik uzay olsun. Eğer F_A boştan farklı iki soft bağlantısız kümenin bileşimi şeklinde yazılabiliyorsa (F_A , $\tilde{\tau}$) 'ya soft bağlantısız uzay denir.

Teorem 3.2.1. (F_A , $\tilde{\tau}$) soft topolojik uzayının soft bağlantısız olması için gerek ve yeter şart F_A soft kümesinin boş olmayan ve soft ayrık soft açık iki soft alt kümenin birleşimi şeklinde yazılmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$ $F_B \sqcup F_C = F_A$ olacak şekilde boştan farklı, bağlantılı olmayan F_B ve F_C soft alt kümeleri verilsin. F_B ve F_C soft bağlantısız ise soft ayrıktır. $F_B \sqcup F_C = F_A \in \tilde{\tau}$ olup, Sonuç 3.1.2'den F_B ve F_C soft açıktır. O halde F_A soft kümesi, boş olmayan, soft ayrık, soft açık iki soft alt kümenin birleşimi şeklinde yazılabilir.

$\Leftarrow$ $F_B, F_C \sqsubseteq F_A$ ve $F_B \sqcup F_C = F_A$ olsun. F_B ve F_C soft soft ayrık ve soft açık ise Teorem 3.1.1'den soft bağlantısızdır. F_A soft kümesi, iki soft bağlantısız soft kümelerin birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa Tanım 3.2.1'den soft bağlantısızdır.

Teorem 3.2.2.(Lin, 2013) Bir F_A soft kümesi boştan farklı ayrık ve soft kapalı iki soft bağlantısız kümenin birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa (F_A , $\tilde{\tau}$) soft bağlantısızdır ancak tersi doğru değildir.

İspat: $F_B, F_C \sqsubseteq F_A$ ve $F_B \sqcup F_C = F_A$ olsun. F_B ve F_C soft soft ayrık ve soft kapalı ise Teorem 3.1.1'den soft bağlantısızdır. F_A soft kümesi, iki soft bağlantısız soft kümelerin birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa soft bağlantısızdır.

Sonuç 3.2.1.(Lin, 2013) (F_A , $\tilde{\tau}$) soft topolojik uzayının soft bağlantılı olması için gerek ve yeter koşul F_A soft kümesinin boş olmayan ayrık olmayan iki soft açığın birleşimi şeklinde yazılabilmesidir.

Teorem 3.2.3. Eğer $(F_A\ ,\tilde{\tau}_1)$ ve $(G_B\ ,\tilde{\tau}_2)$ soft bağlantılı uzaylarsa $(F_A\ \times G_B)$ soft bağlantılıdır.

İspat: F_A ve G_B soft bağlantılı uzaylar olsun. F_A soft bağlantılı ise $F_A = F_C \sqcup F_D$ ve $\Phi \neq F_C \sqcap F_D$ olacak şekilde $F_C, F_D \in \tilde{\tau}_1$ vardır. G_B soft bağlantılı ise $G_B = G_M \sqcup G_N$ ve $\Phi \neq G_M \sqcap G_N$ olacak şekilde $G_M, G_N \in \tilde{\tau}_2$ vardır. Buradan;

$$(F_A \times G_B) = (F_C \sqcup F_D) \times (G_M \sqcup G_N) \text{ ve } \Phi \neq (F_C \sqcap F_D) \times (G_M \sqcap G_N)$$

$$(F_A \times G_B) = (F_C \times G_M) \sqcup (F_D \times G_N) \text{ ve } \Phi \neq (F_C \times G_M) \sqcap (F_D \times G_N)$$

$(F_C \times G_M) \sqsubset F_A \times G_B$ ve $(F_D \times G_N) \sqsubset F_A \times G_B$ soft açıklardır. Buradan $F_A \times G_B$ bağlantılıdır.

3.3. Soft Bağlantılı Alt Uzaylar

Tanım 3.3.1.(Varol ve Aygun, 2013) $(F_A\ ,\tilde{\tau}\ )$ soft topolojik uzayı ve $F_B \sqsubseteq F_A$ soft alt kümesi verilsin. Eğer $(F_B\ ,\tilde{\tau}_B\ )$ soft alt uzayı bağlantılı ise, F_B soft kümesine, $(F_A\ ,\tilde{\tau}\ )$ soft uzayı içinde soft bağlantılı küme denir.

Teorem 3.3.1.(Varol ve Aygun, 2013) Bir $(F_A\ ,\tilde{\tau}\ )$ soft topolojik uzayı verilsin. Bu taktirde bir $F_B \sqsubseteq F_A$ soft alt kümesinin soft bağlantılı olması için gerek ve yeter şart

$$F_B \sqsubseteq F_U \sqcup F_V,\quad F_B \sqcap F_U = \Phi, F_B \sqcap F_V = \Phi$$

şeklindeki her $F_U, F_V \in \tilde{\tau}$ soft açık kümeleri için, $F_B \sqcap F_U \sqcap F_V \neq \Phi$ olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$ F_B soft kümesi soft bağlantılı olsun. Buradan

$$F_B \sqsubseteq F_U \sqcup F_V,\quad F_B \sqcap F_U \neq \Phi,\quad F_B \sqcap F_V \neq \Phi$$

şeklinde herhangi $F_U, F_V \in \tilde{\tau}$ soft açık kümelerini alalım. Varsayalım ki $F_B \sqcap F_U \sqcap F_V = \Phi$ olsun. Kesişimin dağılma özelliğinden,

$$F_B \sqcap F_U \sqcap F_V = (F_B \sqcap F_U) \sqcap (F_B \sqcap F_V) = \Phi$$

olup, $F_B \sqcap F_U \in \tilde{\tau}$ ve $F_B \sqcap F_V \in \tilde{\tau}$ olduğundan sonuç olarak

$$F_B = F_B \sqcap (F_U \sqcup F_V) = (F_B \sqcap F_U) \sqcup (F_B \sqcap F_V)$$

elde edilir. Teorem 3.2.1 gereğince, $(F_A\ ,\tilde{\tau}\ )$ soft alt uzayı soft bağlantılı değildir. Bu ise, $(F_B, \tilde{\tau}_B\ )$ soft alt uzayının soft bağlantılı olmasıyla çelişir. O halde $F_B \sqcap F_U \sqcap F_V \neq \Phi$ olur.

$\Leftarrow F_B \sqsubseteq F_U \sqcup F_V$, $F_B \sqcap F_U \neq \Phi$ ve $F_B \sqcap F_V \neq \Phi$ olacak şekilde her $F_U, F_V \in \tilde{\tau}$ soft açık kümeleri için, $F_B \sqcap F_U \sqcap F_V \neq \Phi$ olsun.

$$F_B = F_B \sqcap (F_U \sqcup F_V) = (F_B \sqcap F_U) \sqcup (F_B \sqcap F_V)$$

ve

$$F_B \sqcap F_U \sqcap F_V = (F_B \sqcap F_U) \sqcap (F_B \sqcap F_V) \neq \Phi$$

olduğundan, $F_B \sqcap F_U \in \tilde{\tau}$ ve $F_B \sqcap F_V \in \tilde{\tau}$ olur. Sonuç 3.2.1 gereğince, $(F_B, \tilde{\tau}_B)$ soft alt uzayı soft bağlantılı bir uzaydır. O halde Tanım 3.3.1'den F_B soft kümesi soft bağlantılı bir kümedir.

Teorem 3.3.2. $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayı, boş olmayan, ayrık, soft açık F_U ve F_V soft alt kümelerinin birleşimine eşit olsun. F_B soft kümesi , $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayının soft bağlantılı bir soft alt kümesi ise, ya $F_B \sqsubset F_U$ ya da $F_B \sqsubset F_V$'dir.

İspat. Varsayalım ki $F_B \sqcap F_U \neq \Phi$ ve $F_B \sqcap F_V \neq \Phi$ olsun. F_U ve F_V soft kümeleri, $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayında soft açık olduklarından, $F_B \sqcap F_U \in \tilde{\tau}$ ve $F_B \sqcap F_V \in \tilde{\tau}$ olup, $F_U \sqcap F_V = \Phi$ olduğundan,

$$F_B \sqcap F_U \sqcap F_V = (F_B \sqcap F_U) \sqcap (F_B \sqcap F_V) = \Phi$$

bulunur. $F_A = F_U \sqcup F_V$ olduğundan,

$$F_B = F_B \sqcap (F_U \sqcup F_V) = (F_B \sqcap F_U) \sqcup (F_B \sqcap F_V)$$

elde edilir. Teorem 3.2.1 gereği, $(F_B, \tilde{\tau}_B)$ soft alt uzayı soft bağlantılı değildir. Bu ise, F_B soft kümesinin soft bağlantılı olmasıyla çelişir. O halde ya $F_B \sqcap F_U = \Phi$ ve buradan $F_B \sqsubset F_V$ olur ya da $F_B \sqcap F_V = \Phi$ ve buradan $F_B \sqsubset F_U$ olur.

Teorem 3.3.3. Boş kümeden farklı soft bağlantılı kümelerden oluşan bir soft ailenin arakesiti boş küme değilse, bu ailenin birleşimi de soft bağlantılıdır.

İspat. $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayı verilsin. F_A soft kümesi her $i \in I$ için, F_{A_i} soft bağlantılı alt kümelerinin birleşimi şeklinde olsun. Varsayalım ki,

$$F_A = \coprod_{i \in I} F_{A_i}$$

soft topolojik uzayı soft bağlantılı olmasın. Bu taktirde Teorem 3.2.1 gereği F_A soft kümesi boş küme olmayan, ayrık, soft açık herhangi F_U ve F_V soft alt kümelerinin birleşimi şeklindedir. Teorem 3.3.3 gereğince, her $i \in I$ için, ya $F_{A_i} \sqsubset F_U$ ya da $F_{A_i} \sqsubset F_V$ olur. Eğer $\forall i \in I$ için $F_{A_i} \sqsubset F_U \Rightarrow \prod_{i \in I} F_{A_i} \neq \Phi$ olduğundan,

$$\coprod_{i \in I} F_{A_i} = F_A \sqsubset F_U \text{ ve } F_V = \Phi$$

olur. Bu ise, $F_V \neq \Phi$ olmasıyla çelişir. Eğer $\forall i \in I$ için $F_{A_i} \sqsubset F_V \Rightarrow \prod_{i\in I} F_{A_i} \neq \Phi$ olduğundan,

$$\coprod_{i\in I} F_{A_i} = F_A \sqsubset F_V \text{ ve } F_U = \Phi$$

elde edilir ki bu da $F_U \neq \Phi$ olmasıyla çelişir. O halde $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayı, soft bağlantılı bir uzaydır.

Teorem 3.3.4. $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayının soft bağlantılı olması için gerek ve yeter şart her $x, y \in F_A$ soft eleman çiftini içeren soft bağlantılı bir soft kümenin varlığıdır.

İspat. $\Rightarrow$ $(F_A, \tilde{\tau})$ soft bağlantılı uzay olduğundan, her $x, y \in F_A$ soft eleman çiftini içeren soft bağlantılı soft küme, F_A soft kümesinin kendisidir.

$\Leftarrow$ Sabir bir $y \in F_A$ soft noktasını seçelim. Hipotezden, her $x \in F_A$ soft noktası içini x ve y elemanlarını içeren bir $(F_{B_x})_{x\in F_A}$ soft bağlantılı soft alt kümeler ailesi vardır.

$$y \in \prod_{x\in F_A} F_{B_x} \neq \Phi \text{ ve } F_A = \coprod_{x\in F_A} F_{B_x}$$

olduğundan, Teorem 3.3.3 gereğince $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayı soft bağlantılıdır.

Önerme 3.3.1. $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayı ve $F_B \sqsubset F_A$ soft kümesi verilsin. F_B soft kümesi $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayında her yerde yoğun ise boş kümeden farklı her soft açık $T_C \sqsubset F_A$ soft kümesi için $T_C \sqcap F_B \neq \Phi$ 'dir.

İspat. $F_B{}^{-} = F_A$ ve $T_C \in \tilde{\tau}$ olacak şekilde bir $T_C \neq \Phi$ soft açık verilsin. Burada T_C soft kümesinin en az bir x soft noktası vardır. Ayrıca, $x \in F_A = F_B{}^{-}$ ve her yerde yoğun tanımı gereğince $T_C \sqcap F_B \neq \Phi$ elde edilir.

Teorem 3.3.5. Soft bağlantılı ve yoğun bir soft alt kümeye sahip olan her soft topolojik uzay soft bağlantılıdır.

İspat. $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayının soft bağlantılı ve yoğun bir soft alt kümesi F_B olsun. Varsayalım ki $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayı soft bağlantılı olmasın. Buradan Teorem 3.2.1 gereği herhangi soft açık F_U ve F_V soft alt kümeleri vardır öyle ki

$$F_U \sqcap F_V = F_A \text{ ve } F_U \sqcap F_V = \Phi \qquad (1)$$

yazılır. F_B soft kümesi yoğun olduğundan Tanım 2.1.10 gereği $F_B{}^{-} = F_A$ olur. (1)'den

$$F_B \sqsubset F_A = F_U \sqcap F_V \text{ ve } F_U \sqcap F_V \sqcap F_B = \Phi$$

bulunur. Buradan $F_B \sqcap F_U \in \tilde{\tau}_B$ ve $F_B \sqcap F_V \in \tilde{\tau}_B$ için

$$F_B = F_B \sqcap (F_U \sqcup F_V) = (F_B \sqcap F_U) \sqcup (F_B \sqcap F_V)$$

ve

$$\Phi = F_B \sqcap (F_U \sqcap F_V) = (F_B \sqcap F_U) \sqcap (F_B \sqcap F_V)$$

yazılır. Böylece Teorem 3.2.1 gereği $(F_B , \tilde{\tau}_B)$ soft bağlantısızdır. Bu ise F_B soft kümesinin soft bağlantılı olmasıyla çelişir. Sonuç olarak $(F_A , \tilde{\tau})$ soft bağlantılı bir uzaydır.

Teorem 3.3.6. $(F_A , \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayı ve bir $F_B \sqsubset F_A$ soft alt kümesi verilsin. Bu taktirde $F_B \sqsubset F_C \sqsubset F_B{}^{-}$ şeklindeki her F_C soft kümesi de soft bağlantılıdır.

İspat. Varsayalım ki F_C soft kümesi bağlantılı olmasın. Bu durumda Teorem .3.2.1 gereği $F_C = F_U \sqcup F_V$ olacak şekilde boş kümeden farklı, ayrık ve soft açık F_U ve F_V soft alt kümeleri vardır. Teorem 3.2.1 gereğince ya $F_B \sqsubset F_U$ ya da $F_B \sqsubset F_V$ olur.

$F_B \sqsubset F_U$ olsun. O halde $F_B{}^{-} \sqsubset F_U{}^{-}$ yazılabilir. $F_C \sqsubset F_B{}^{-}$ olduğundan $F_C \sqsubset F_U{}^{-}$ olur. Teorem 3.2.1 gereğince F_U ve F_V soft kümeleri soft bağlantılı iki küme değildir, yani; $F_U{}^{-} \sqcap F_V = \Phi$ ve $F_U \sqcap F_V{}^{-} = \Phi$ dir. Böylece

$$F_C = F_U \sqcup F_V \ , \ F_C \sqsubset F_U{}^{-} \text{ ve } F_U{}^{-} \sqcap F_V = \Phi$$

olduğundan $F_V = \Phi$ olur. Bu ise, $F_V \neq \Phi$ olmasıyla çelişir.

$F_B \sqsubset F_V$ olsun. O halde $F_B{}^{-} \sqsubset F_V{}^{-}$ yazılabilir. $F_C \sqsubset F_B{}^{-}$ olduğundan $F_C \sqsubset F_V{}^{-}$ olur. Teorem 3.2.1 gereğince F_U ve F_V soft kümeleri soft bağlantılı değildir, yani; $F_U{}^{-} \sqcap F_V = \Phi$ ve $F_U \sqcap F_V{}^{-} = \Phi$ dir. Böylece

$$F_C = F_U \sqcup F_V \ , \ F_C \sqsubset F_V{}^{-} \text{ ve } F_U \sqcap F_V{}^{-} = \Phi$$

olduğundan $F_U = \Phi$ olur. Bu ise $F_U \neq \Phi$ olmasıyla çelişir. O halde F_C soft kümesi soft bağlantılıdır.

Sonuç 3.3.1. $(F_A , \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayı ve soft bağlantılı bir $F_B \sqsubset F_A$ soft alt kümesi verilsin. Bu taktirde $F_B{}^{-}$ soft kümesi de soft bağlantılıdır.

İspat. Teorem 3.3.6 'dan $F_B \sqsubset F_C \sqsubset F_B{}^{-}$ şeklinde her F_C soft kümesi soft bağlantılıdır. $F_B \sqsubset F_C$ olduğundan $F_B{}^{-} \sqsubset F_C{}^{-}$ ve dolayısıyla $F_B \sqsubset F_C \sqsubset F_B{}^{-} \sqsubset F_C{}^{-}$

yazılabilir. F_C soft kümesi soft bağlantılı ve $F_C \sqsubset F_B^- \sqsubset F_C^-$ olduğundan Teorem 3.3.6 gereği F_B^- soft kümesi de soft bağlantılıdır.

3. 4. Bir Soft Uzayın Soft Bileşenleri

Bu kısımda bir soft uzayın alt uzayları incelenerek en büyük soft alt uzayı ile uzayın yapısı incelenmiştir.

Tanım 3.4.1. (F_A , $\tilde{\tau}$) soft topolojik uzayı ve soft bağlantılı bir $F_B \sqsubset F_A$ soft alt kümesi verilsin. Eğer (F_A , $\tilde{\tau}$) soft uzayını kapsayan daha büyük soft bağlantılı bir alt uzay yoksa, (F_B,$\tilde{\tau}_B$) soft topolojik uzayına bir soft bileşen denir. Diğer bir ifadeyle, (F_A , $\tilde{\tau}$) soft toolojik uzayının en büyük soft bağlantılı alt uzayına (F_A , $\tilde{\tau}$) soft topolojik uzayın soft bileşeni denir.

Tanım 3.4.2. Bir (F_A , $\tilde{\tau}$) soft topolojik uzayının bir x soft noktasını içeren soft bileşenine x noktasının soft bileşeni denir ve C_x ile gösterilir.

Teorem 3.4.1. Bir (F_A , $\tilde{\tau}$) soft topolojik uzayının her bir x soft noktasını içeren bir ve yalnız bir soft bileşeni vardır.

İspat. Her $x \in F_A$ için $\{x\}$ soft kümesinin soft bağlantılı olduğu açıktır. O halde x soft noktasını içeren soft bağlantılı kümeler ailesinin arakesiti boş küme değildir. Teorem 3.3.3 gereğince bu ailenin birleşimi soft bağlantılıdır. Bu soft bağlantılı küme x soft noktasını içeren en büyük soft bağlantılı küme olduğundan Tanım 3.4.1 gereğince soft bileşen olacağından bu soft bileşen tektir. Gerçekten F_B ve F_C soft kümeleri x soft noktasının soft bileşenleri ise F_B soft kümesi x soft noktasını içeren soft bağlantılı küme ve F_C kümesi soft bileşen olduğundan Tanım3.4.1 gereğince $F_B \sqsubset F_C$ yazılabilir. F_B ile F_C soft kümelerinin rollerini değiştirirsek $F_C \sqsubset F_B$ olup $F_B = F_C$ elde edilir.

Sonuç olarak aşağıdaki özellikler sağlanmış olur:

1. Bir (F_A , $\tilde{\tau}$) soft topolojik uzayının her $x \in F_A$ soft noktasının yalnızca bir bileşeni vardır.
2. Bir (F_A , $\tilde{\tau}$) soft topolojik uzayının soft bileşenleri o uzayın bir ayrışımını oluşturur.

3. Bir $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayının soft bağlantılı her alt kümesi o uzayın bir soft alt bileşeni tarafından kapsanır.

Teorem 3.4.2. $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayı verilsin. Her $x, y \in F_A$ için "aynı soft bağlantılı alt kümeye ait olma" bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat.

"$\forall x, y \in F_A$ *için* $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists\, F_B \sqsubset F_A$ *soft bağlantılı alt kümesi* $\ni x, y \in F_B$ "

şeklinde tanımlanan $\mathcal{R}$ bağıntısının yansıma ve simetri özelliğini sağladığı açıktır. Şimdi geçişme özelliğini sağladığını gösterelim. Herhangi $x, y, z \in F_A$ soft noktaları için, $x\mathcal{R}y$ ve $y\mathcal{R}z$ olsun. Bu durumda $x, y \in F_B$ olacak şekilde bir $F_B \sqsubset F_A$ ve $y, z \in F_C$ olacak şekilde bir $F_C \sqsubset F_A$ soft bağlantılı alt kümeleri vardır. $y \in F_B \sqcap F_C \neq \Phi$ olduğundan, Teorem 3.3.3 gereğince $F_B \sqcup F_C$ soft kümesi de soft bağlantılıdır. Ayrıca $x, z \in F_B \sqcup F_C$ olur. O halde $x\mathcal{R}z$ olur. Böylece $\mathcal{R}$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

Sonuç 3.4.1. Bir soft topolojik uzayın, Teorem 3.4.2' deki denklik bağıntısına göre denklik sınıfları bu uzayın soft bileşenlerini oluşturur.

Teorem 3.4.3. Bir soft topolojik uzayın tüm soft bileşenleri soft uzayın bir soft ayrışımını oluşturur. Ayrıca soft uzayın herhangi bir soft bağlantılı alt kümesi soft uzayın soft bileşenlerinden yalnızca biri tarafından kapsanır.

İspat. Bir $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayının soft bileşenleri, soft uzayın denklik sınıfları olduğundan, herhangi iki denklik sınıfı ya aynıdır ya da ayrık iki kümedir ve bu denklik sınıflarının birleşiminin F_A soft kümesine eşit olduğu açıktır. Dolayısıyla $(F_A, \tilde{\tau})$ soft uzayının tüm bileşenleri uzayın bir ayrışımını oluşturur.

$(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayının herhangi bir soft bağlantılı F_B soft alt kümesini ele alalım. Önce F_B soft alt kümesinin $(F_A, \tilde{\tau})$ soft uzayının soft bileşenlerinden sadece biri ile kesiştiğini gösterelim. Varsayalım ki F_B soft kümesi $(F_A, \tilde{\tau})$ soft uzayının C_1 ve C_2 gibi iki soft bileşeni ile kesişsin. $x \in F_B \sqcap C_1$ ve $y \in F_B \sqcap C_2$ olsun. $C_1 \sqcap C_2 = \Phi$ olduğundan $x \neq y$ olur ve bu soft noktalar aynı soft bağlantılı F_B soft kümesine ait olduğundan Teorem 3.4.2 gereğince, $x\mathcal{R}y$ bulunur. O halde Tanım 3.4.2 gereğince $C_1 = C_2$ olur. Şimdi F_B soft bağlantılı alt kümesinin $(F_A, \tilde{\tau})$ soft uzayının soft bileşenlerinden yalnızca biri tarafından kapsandığını gösterelim. $x \in F_B$ soft

noktasını alalım. $(F_A , \tilde{\tau})$ soft uzayının soft bileşenleri soft uzayın bir ayrışımını oluşturduğundan, x soft noktası bu soft bileşenlerden yalnızca birine aittir. Bu soft bileşeni C_x ile gösterelim. F_B soft kümesinin diğer soft noktaları da aynı C_x soft bileşenine aittir, aksi taktirde F_B soft kümesi sadece bir soft bileşenle kesişmemiş olurdu. Sonuç olarak, $F_B \sqsubset C_x$ elde edilir.

Teorem 3.4.4. Bir soft topolojik uzayın soft bileşenleri soft kapalıdır.

İspat. $(F_A , \tilde{\tau})$ soft uzayının bir soft bileşeni F_B soft kümesi ise Tanım 3.4.1 gereğince F_B soft kümesi soft bağlantılı bir kümedir. Sonuç 3.3.1. gereğince F_B^- soft kümesi de soft bağlantılıdır. F_B soft kümesi $(F_A , \tilde{\tau})$ soft uzayının en büyük soft bağlantılı alt kümesi olduğundan $F_B^- \sqsubset F_B$ bulunur. Diğer taraftan, $F_B \sqsubset F_B^-$olup, $F_B = F_B^-$ elde edilir. Böylece F_B soft kümesi soft kapalıdır.

Sonuç 3.4.2. Bir $(F_A , \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayını herhangi iki soft bileşeni soft bağlantılı olmayan iki soft kümedir.

İspat. $(F_A , \tilde{\tau})$ soft uzayının herhangi F_B ve F_C soft bileşenleri verilsin. Bu soft bileşenler Teorem 3.4.3 gereğince ayrık iki soft kümedir ve Teorem 3.4.4 gereğince soft kapalı kümelerdir. Teorem 3.2.1 gereğince

$$F_B^- \sqcap F_C = \Phi = F_B \sqcap F_C^-$$

bulunur. O halde F_B ve F_C soft kümeleri soft bağlantılı olmayan iki kümedir.

3.5. Tamamen Soft Bağlantısız Uzaylar

Tanım 3.5.1. $(F_A , \tilde{\tau})$ soft uzayının her x ve y soft noktaları için $x \in F_B \in \tilde{\tau}$ ve $y \in F_C \in \tilde{\tau}$ olacak şekilde $F_B \sqcup F_C$ soft bağlantısızlığı varsa $(F_A , \tilde{\tau})$ soft uzayına tamamen soft bağlantısız uzay denir.

Teorem 3.5.1. Bir soft topolojik uzayın tamamen soft bağlantısız olması için gerek ve yeter şart bu soft uzayın soft bileşenlerinin tek elemanlı soft kümeler olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$ $(F_A\ ,\ \tilde{\tau}\ )$ soft topolojik uzayı tamamen soft bağlantısız olsun. Varsayalım ki, $(F_A\ ,\ \tilde{\tau}\ )$ soft uzayının bir C soft bileşeni birden çok soft noktayı içersin. Bu durumda $x, y \in C\ (x \neq y)$ soft noktalarını alalım. $(F_A\ ,\ \tilde{\tau}\ )$ soft uzayı tamamen soft bağlantısız olduğundan Tanım 3.5.1 gereği, $x \in F_B \in \tilde{\tau}$ ve $y \in F_C \in \tilde{\tau}$ olacak şekilde $F_B \sqcup F_C$ soft bağlantısızlığı vardır. Ayrıca $C \sqcap F_B \neq \Phi$, $C \sqcap F_C \neq \Phi$, $C \sqcap F_B \sqcap F_C = \Phi$ ve $C \sqsubset F_B \sqcup F_C$ olduğundan Teorem 3.3.1 gereğince C soft kümesi soft bağlantılı değildir. Bu ise Tanım 3.4.1 gereği C soft kümesinin soft bileşen olmasıyla çelişir. O halde C soft bileşeni yalnızca tek soft nokta içerir.
$\Leftarrow$ $(F_A,\tilde{\tau})$ soft tolopojik uzayının soft bileşenleri tek elemanlı soft kümeler olsun. $(F_A,\tilde{\tau}\ )$ soft uzayının soft bileşenleri $(F_A\ ,\ \tilde{\tau}\ )$ soft uzayının en büyük soft bağlantılı kümeleri olduğundan her $x, y \in F_A$ soft noktaları için $x \in F_B$ ve $y \in F_C$ olacak şekilde $F_B \sqcup F_C$ soft bağlantısızlığı vardır. O halde Tanım 3.5.1 gereğince $(F_A\ ,\ \tilde{\tau}\ )$ soft uzayı tamamen soft bağlantısızdır.

Tanım 3.5.2. $(F_A\ ,\ \tilde{\tau}\ )$ soft topolojik uzayı ve bir $F_B \sqsubset F_A$ soft alt kümesi verilsin. Eğer $(F_B\ ,\ \tilde{\tau}_B)$ soft alt uzayı tamamen soft bağlantısız ise F_B soft kümesine tamamen soft bağlantısız küme denir.

3.6. Lokal Soft Bağlantılı Uzaylar

Tanım 3.6.1. $(F_A\ ,\ \tilde{\tau}\ )$ soft topolojik uzayı verilsin. Eğer her $x \in F_A$ soft noktasının $(F_A\ ,\ \tilde{\tau}\ )$ soft uzayında soft bağlantılı kümelerden oluşan bir komşuluk tabanı varsa $(F_A\ ,\ \tilde{\tau}\ )$ soft uzayına lokal soft bağlantılı uzay denir.

Uyarı 3.6.1. $(F_A\ ,\ \tilde{\tau}\ )$ soft topolojik uzayının lokal soft bağlantılı olması için gerek ve yeter şart her $x \in F_A$ soft noktası ve her $V \in \mathcal{N}_{\tilde{\tau}}(x)$ soft komşuluğu için $x \in F_B \sqsubset V$ olacak şekilde soft bağlantılı soft açık bir F_B soft komşuluğunun olmasıdır.

Teorem 3.6.1. $(F_A\ ,\ \tilde{\tau}\ )$ soft uzayının lokal soft bağlantılı olması için gerek ve yeter şart $(F_A\ ,\ \tilde{\tau})$ soft uzayının her soft açık alt uzayındaki her soft bileşeninin $(F_A\ ,\ \tilde{\tau}\ )$ soft uzayında soft açık olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$ $(F_A, \tilde{\tau})$ soft uzayı lokal soft bağlantılı, $F_B \sqsubset F_A$ soft açık bir alt küme ve C soft kümesi, $(F_B, \tilde{\tau}_B)$ soft alt uzayında bir soft bileşen olsun.

$x \in C \sqsubset F_B \sqsubset F_A$ soft noktasını ele alalım. $(F_A, \tilde{\tau})$ soft uzayı lokal soft bağlantılı olduğundan, Uyarı 3.6.1 gereğince $V \sqsubset F_B$ olacak şekilde soft bağlantılı bir $V \in \mathcal{N}_{\tilde{\tau}}(x)$ soft açık komşuluğu vardır. Böylece V soft açık kümesi $(F_B, \tilde{\tau}_B)$ soft alt uzayında x soft noktasını içeren soft bağlantılı bir kümedir. Diğer taraftan, C soft kümesi $(F_B, \tilde{\tau}_B)$ soft alt uzayında soft bileşen olduğundan, Tanım 3.4.1 gereğince $V \sqsubset C$ olur. Soft iç nokta tanımı gereği $x \in C^{\circ}$ elde edilir. Böylece $C \sqsubset C^{\circ}$olur. $C^{\circ} \sqsubset C$ olduğundan $C = C^{\circ}$yazılabilir. Sonuç olarak C soft bileşeni soft açıktır.

$\Leftarrow$ $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayında soft açık bir $(F_B, \tilde{\tau}_B)$ soft alt uzayının her soft soft bileşeni soft açık iken $(F_A, \tilde{\tau})$ soft uzayının lokal soft bağlantılı olduğunu gösterelim. $(F_B, \tilde{\tau}_B)$ soft açık alt uzayına göre x soft noktasını içeren $C \sqsubset F_B$ soft bileşeni soft açıktır. C soft bileşeni soft açık olup Uyarı 3.6.1 gereğince $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayı lokal soft bağlantılıdır.

Sonuç 3.6.1. Lokal soft bağlantılı bir soft uzayın soft bileşenleri hem soft açık hem soft kapalıdır.

İspat. $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayı lokal soft bağlantılı olsun. Eğer C soft kümesi $(F_A, \tilde{\tau})$ soft uzayının bir soft bileşeni ise Teorem 3.6.1 gereğince C soft bileşeni soft açıktır. Diğer taraftan, Teorem 3.4.3 gereğince C soft bileşeni kapalıdır.

Sonuç 3.6.2. $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayı kompakt ve lokal soft bağlantılı ise bu uzayın soft bileşenlerin sayısı sonludur.

İspat. Kompakt ve lokal soft bağlantılı bir $(F_A, \tilde{\tau})$ soft uzayın tüm soft bileşenleri, bu uzayın bir ayrışımını oluşturduğundan ve soft bileşenler soft açık olduğundan F_A soft kümesinin bir soft açık örtüsü elde edilir. $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayı kompakt uzay olduğunda bu ayrık soft açık örtünün sonlu bir soft açık alt örtüsü vardır. O halde $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayının bileşenlerinin sayısı sonludur.

KAYNAKLAR

Ahmad, B. ve Hussain, S., 2012, On some structures of soft topology, *Mathematical Sciences*, 6 (1), 1-7.

Atanassov, K. T., 1986, Intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy sets and Systems*, 20 (1), 87-96.

Atanassov, K. T., 1994, Operators over interval valued intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy sets and Systems*, 64 (2), 159-174.

Aygünoğlu, A. ve Aygün, H., 2012, Some notes on soft topological spaces, *Neural computing and Applications*, 21 (1), 113-119.

Çağman, N., Karataş, S. ve Enginoglu, S., 2011, Soft topology, *Computers & Mathematics with Applications*, 62 (1), 351-358.

Gau, W.-L. ve Buehrer, D. J., 1993, Vague sets, *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics*, 23 (2), 610-614.

Gorzałczany, M. B., 1987, A method of inference in approximate reasoning based on interval-valued fuzzy sets, *Fuzzy sets and Systems*, 21 (1), 1-17.

Lin, F., 2013, Soft connected spaces and soft paracompact spaces, *World Academy of Science, Engineering and Technology, International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering*, 7 (2), 277-283.

Maji, P., Roy, A. R. ve Biswas, R., 2002, An application of soft sets in a decision making problem, *Computers & Mathematics with Applications*, 44 (8), 1077-1083.

Maji, P., Biswas, R. ve Roy, A., 2003, Soft set theory, *Computers & Mathematics with Applications*, 45 (4), 555-562.

Molodtsov, D., 1999, Soft set theory—first results, *Computers & Mathematics with Applications*, 37 (4), 19-31.

Molodtsov, D., Leonov, V. Y. ve Kovkov, D., 2006, Soft sets technique and its application.

Pawlak, Z., 1982, Rough sets, *International Journal of Computer & Information Sciences*, 11 (5), 341-356.

Shabir, M. ve Naz, M., 2011, On soft topological spaces, *Computers & Mathematics with Applications*, 61 (7), 1786-1799.

Varol, B. P. ve Aygun, H., 2013, On soft Hausdorff spaces, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 5 (1), 15-24.

Yüksel, Ş., 2008, Genel Topoloji, *Eğitim Kitabevi.*

Zadeh, L. A., 1965, Fuzzy sets, *Information and control*, 8 (3), 338-353.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Büşra AYDIN
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : Van-27.01.1990
Telefon : 0(536)2379960
Faks :
e-mail : buaydin90@gmail.com

EĞİTİM

Derece		Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	:	**Güventaş Lisesi, Selçuklu,Konya**	**2007**
Üniversite	:	**Afyon Kocatepe Üni. Matematik Böl., Afyon** **Selçuk Üni. Tıbbi Lab. Teknikleri, Konya** **ODTÜ, Moleküler Biyoloji, Ankara**	**2011** **2013** **Devam**
Yüksek Lisans	:	**Selçuk Üniv. Matematik Anabilimdalı, Konya** **Selçuk Üniv. Tıbbi Lab. Anabilimdalı, Konya**	**Devam** **Devam**
Doktora	:	-	

YABANCI DİLLER: İngilizce

YAYINLAR

1. Soft Bileşen ve Soft Lokal Bağlantılı Uzaylar; YYÜ Fen Bil. Ens. Der., 2016, accepted.