



T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİKDÖRTGEN BÖLGE İÇİN İKİ BOYUTLU ISI DENKLEMİNİN ELİPTİK FONKSİYONLAR VE CHEBYSHEV POLİNOMLARI CİNSİNDEN ÇÖZÜMÜ

Emel KURUL

YÜKSEK LİSANS

Matematik Anabilim Dalı

Eylül-2016
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Emel KURUL

Tarih:

ÖZET

YÜKSEK LİSANS

DİKDÖRTGEN BÖLGE İÇİN İKİ BOYUTLU ISI DENKLEMİNİN ELİPTİK FONKSİYONLAR VE CHEBYSHEV POLİNOMLARI CİNSİNDEN ÇÖZÜMÜ

Emel KURUL

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL

2016, 34 Sayfa

Jüri
Doç. Dr. Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL
Prof. Dr. Mehmet SEZER
Yrd. Doç. Dr. Kemal USLU

Bu çalışmada, dikdörtgen bir plakada iki boyutlu ısı denkleminin çözümü için alternatif iki metot sunulmuştur.

Birinci bölümde; diferansiyel denklemlerin tarihçesi, gelişimi, eliptik fonksiyonların tarihi, Dirichlet probleminin tanımı ve daha önce yapılan çalışmalara yer verilmiştir. İkinci bölümde; kısmi diferansiyel denklemler ile ilgili temel kavramlar, eliptik integraller, eliptik fonksiyonlar, konform dönüşümler, Rieman dönüşüm teoremi, Green fonksiyonu, Chebyshev polinomları gibi temel bağıntılardan bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde; ilk olarak, Dirichlet probleminin Green fonksiyonuna dayalı çözümü için gerekli olan dönüşüm ve Green fonksiyonu bulunup problem dikdörtgen bölgede çözülmüştür ve bir uygulama verilmiştir. İkinci olarak Chebyshev kollakasyon metoduyla Dirichlet probleminin yaklaşık çözümü elde edilmiştir. Dördüncü bölümde; sonuç ve tartışmalara yer verilerek yöntemin sağladığı kolaylık ve zorluklara değinilmiş, ayrıca getirdiği yeniliklerden bahsedilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Dirichlet problemi, Eliptik fonksiyon, Eliptik integral, Green fonksiyonu, Isı denklemi, Chebyshev kollokasyon metodu, Chebyshev polinomları, Kollokasyon metodunun hata analizi.

ABSTRACT

MS THESIS

SOLUTİON OF THE TWO-DIMENSIONAL HEAT EQUATION FOR A RECTANGLE IN TERMS OF ELLIPTIC FUNCTION AND CHEBYSHEV POLYNOMIALS

Emel KURUL

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE DEPARTMANT OF MATHEMATİCS

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL

2016, 34 Pages

Jury
Assoc. Prof. Dr. Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL
Prof. Dr. Mehmet SEZER
Asst. Prof. Dr. Kemal USLU

In this study, two novel method is presented for the solution of two-dimensional heat equation for a rectangular plate.

In the first chapter, the history and development of differential equation, the history of elliptic functions, the definition of Dirichlet problem and previous studies are presented. In the second chapter, fundamental relation such as partial differential equation, elliptic integral, elliptic functions, conform mapping, Riemann transformation theorem and Green theorem, chebyshev polynomials are mentioned. In the third chapter, firstly the method for solution of Dirichlet problem with Green function is presented the Green function for the solution of the Dirichlet problem in the rectangular region is found and the problem is solved in the rectangular region and an application is given. Secondly approximate solution function of Dirichlet problem with Chebshev collocation method is obtained. In the fourth chapter, results and discussion are given, the facilities and difficulties of the method presented and the contributions of the method are mentioned.

Keywords: Dirichlet problem; Elliptic functions; Elliptic integral; Green function; Heat equation, Chebyshev collocation method, Chebyshev polynomials, Error analysis of collocation methods.

ÖNSÖZ

Bu tez: 1. Bölüm Giriş Bölümü, 2. Bölüm Temel Bağıntılar, 3. Bölüm Problemin Çözümü İçin Yöntemler, 4. Bölüm Sonuç ve Öneriler olmak üzere toplam dört bölümden oluşmaktadır.

Bu çalışmada bana yardımcı olan ve konu seçimimde yol gösterip tavsiyelerini esirgemeyen kıymetli hocam Doç. Dr. Nurcan Baykuş Savaşaneril'e en içten teşekkürlerimi sunarım. Hayatım boyunca benden maddi ve manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen annemi ve babamı hürmetle anıyorum ve sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Emel KURUL
KONYA-2016

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

SİMGELER VE KISALTMALAR ..... **ix**

1. GİRİŞ **1**

2. TEMEL BAĞINTILAR **5**

2.1. Kısmi Diferansiyel Denklemler 5
2.2. Eliptik İntegraller 6
2.2.1. Eliptik integrallerin üç kanonik formu 6
2.2.2. Tam eliptik integral 7
2.2.3. Eliptik integraller için Jakobi şekilleri 8
2.3. Eliptik Fonksiyonlar 8
2.3.1. Jakobi eliptik fonksiyonları 9
2.3.2. Jakobi eliptik fonksiyonları arasındaki temel ilişkiler 11
2.3.3. K ve K' sabitleri 13
2.3.4. Jakobi eliptik fonksiyonların periyodikliği, kutup ve sıfır noktaları 14
2.4. Konform Dönüşümler 15
2.5. Rieman Dönüşüm Teoremi 16
2.6. Green Fonksiyonu 16
2.7. Chebyshev Polinomları 17
2.7.1. Chebyshev polinomu 18
2.7.2. Chebyshev düğümleri 18

3. PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ VE KULLANILAN YÖNTEMLER **19**

3.1. Problemin Eliptik Fonksiyonlar Cinsinden Çözümü 19
3.1.1. Dikdörtgen bir bölgenin birim çember üzerine konform dönüşümü 19
3.1.2. Dikdörtgen bölge için green fonksiyonu 21
3.1.3. Dirichlet probleminin çözümü 22
3.1.4. Uygulama 23
3.2. Problemin Chebyshev Kollokasyon Metodu ile Çözümü 24
3.2.1 Problemin matris denklemi 24
3.2.2. Hata analizi ve çözümün doğruluğu 26
3.2.3 Nümerik uygulama 27
3.2.4. Hata fonksiyonu 28

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER **31**

4.1. Sonuçlar 31
4.2. Öneriler 31

KAYNAKLAR 32

ÖZGEÇMİŞ.....34

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

am u	: u nun genliği
mod u	: u nun modülü
$K(k)$	: Birinci tür tam eliptik integral
$E(k)$	: İkinci tür tam eliptik integral
$\Pi(n,k)$	: Üçüncü tür tam eliptik integral
$F_1(k,x)$	: Birinci tür eliptik integraller için Jakobinin sekli
$E_1(k,x)$	: İkinci tür eliptik integraller için Jakobinin sekli
$\Pi_1(k,n,x)$	: Üçüncü tür eliptik integraller için Jakobinin sekli
Im z	: z kompleks sayısının imajiner kısmı
Re z	: z kompleks sayısının reel kısmı

1. GİRİŞ

Fonksiyon veya fonksiyonların bir veya daha fazla değişkene göre türevlerini içeren denklemlere diferansiyel denklemler denir. Bu kavram ilk olarak 1673 yılında Alman matematikçi Leibniz ve İngiliz matematikçi Newton tarafından kullanıldı. Daha sonraları İsveçli matematikçilerden Bernoulli kardeşler, 18. yy da Euler, Lagrange, D'Alembert, Monge, Laplace ile 19. yy da Chrystal, Cauchy, Jacobi, Ampere, Picard, Fusch ve Frobenius, diferansiyel denklemler teorisini bugün olduğu seviyeye getiren matematikçiler oldular.

Çoğu bilimsel problemin çözülebilmesi için problemdeki değişkenlerin ve değişim hızlarının türevlerle ifade edilmesi diferansiyel denklemler ile mümkün olur. Bu nedenle diferansiyel denklemler doğa bilimleri ve mühendislikte karşılaşılan çok farklı problemlere başarılı bir şekilde uygulanmaktadır. Diferansiyel denklemlerin yeni uygulamaları sadece fiziksel bilimlerde değil aynı zamanda biyoloji, tıp, istatistik, sosyoloji, psikoloji ve ekonomi gibi alanlarda da devam etmektedir.

Eliptik fonksiyonlar ise ilk defa, 1655 yılında John Wallis'in ikinci dereceden eğrileri (konikleri) incelemesi sırasında bir elipsin çevresini hesaplama isteği sonucunda adına " *eliptik integraller*" denilen integralin tanımlanmasıyla ortaya çıkmıştır. Eliptik fonksiyonların daha sonraki hikayesi kompleks sayıların gelişimi ile birlikte gözler önüne serilmiştir. (Stillwell, 1989)

Değişkenlere ayırma metoduyla basit bağlantılı bir D bölgesinde Dirichlet probleminin çözümü mevcuttur. Ayrıca İki boyutlu Dirichlet probleminin çözümü için konform dönüşümler mevcut olduğundan z- düzlemindeki basit bağlantılı D bölgesi w-düzleminde birim çembere ya da üst yarı düzleme konform dönüşebilir. Böylece Green fonksiyonu tespit edilebilir ve dolayısıyla Laplace (ve Poisson) denklemi için Dirichlet probleminin çözümü bu dönüşüm yardımıyla elde edilebilir.

Bu çalışmada dikdörtgen bir plaka için iki boyutlu ısı denklemine alternatif iki metot sunulmuştur. Bunlardan birincisi; reel ve kompleks düzlemde, Schwarz-Christoffel ve konformal dönüşümler kullanılarak, eliptik fonksiyonlar cinsinden D düzlemindeki dikdörtgensel bir bölgeyi w düzlemindeki birim çembere dönüştüren fonksiyonu bulmaktır ve daha sonra elde edilen analitik fonksiyon ile Green fonksiyonu arasında bağlantıyı kurarak dikdörtgensel bölge için Dirichlet probleminin çözümünü eliptik fonksiyonlara dayandırmaktır. Bunlar yapılırken eliptik fonksiyonlar, eliptik integraller, konform dönüşüm ve Green fonksiyonları ile ilgili temel kavramlardan yararlanılmıştır. İkincisi ise, Chebyshev serisini kullanarak problemin yaklaşık

çözümünü elde etmektir. Bunun için de denklemin Chebyshev yaklaşık çözüm fonksiyonu matris formda yazılır ve katsayılar matrisi bulunur.

Kullanılan çözüm yöntemlerine tutarlılığını göstermek amacıyla iki uygulama verilmiştir.

Litaratür Taraması:

Bu konuda daha önce yapılmış aşağıdaki çalışmalardan bahsedilebilir:

Dönel elipsoid üzerindeki Laplace denklemi için Dış Dirichlet sınır değer probleminin Green fonksiyonu kapalı bir formda Martinec ve Grafarend (1997) tarafından inşa edilmiştir.

Wang (1997) tarafından temel olmayan karakter içeren Dirichlet polinomları için bir ters dönüşüm formülü çıkartılmıştır. Healt-Brown üst-sınırı kullanarak Dirichlet'nin L-fonksiyonları için, q elemanında hata terimi içeren, hatasız bir üst sınır bulma olanağı elde edilmiştir.

Dirichlet problemi ile Cauchy problemi arasındaki ilişki, yerel operatörler için homojen olmayan sınır koşullarında Lumer ve Schnaubelt (2001) tarafından araştırılmıştır.

Brovar ve ark. (2001) tarafından Dirichlet problemi ve Cauchy problemi arasındaki ilişki araştırılmıştır. Yarıçap türevi ile bilinen sınır-koşulun doğruluğunu, mutlak teriminde küçük bir değişim yaparak 5×10^{-5} düzeyine kadar geliştirilebildiğini göstermişlerdir.

Khoromskij ve Schmidt (1998) tarafından Konveks poligonal bölgeler üzerinde biharmonik Dirichlet probleminin sınırlarının daraltılması ile ilgili etkili bir diskritizasyon şeması önerilip analiz edilmiştir. Burada biharmonik Dirichlet probleminin, harmonik Dirichlet çözümüne ve Poincare-Steklov operatörünün taranan uzayların alt uzayları arasında hareket eden operatör olarak çalıştığı bir eşitliğe indirgenebileceği gösterilmiştir. O halde, bu denklemin (doğrusal elemanları tarafından) etkili bir ön-koşullama ve matris sıkıştırılmasına izin veren karışık bir lineer sonlu eleman diskritizasyonu olduğu görülmüştür. Sonuç olarak, sınırlarını azaltmak için konveks poligonal sınırlarda biharmonik Dirichlet probleminin asimptotik optimal iteratif bir arayüz çözümleyici elde edilmiştir.

Bir diğer çalışmada Aiyama ve Akutagawa (2002), hiperbolik m-uzay'dan, tam olmayan spesifik *metrikli* açık n-küre ünitesine kadar tam harmonik dönüşümler için sonsuzdaki Dirichlet probleminin teklik, varlık ve düzenlilik özelliklerinin araştırılması hedeflenmiştir. m=n=2 olduğunda Dirichlet probleminin çözümleri hiperbolik-3 uzayda tam sabit ortalama eğri yüzeyler vermektedir.

Lanzara (1998), sınırlı ve ölçülebilir katsayılı ikinci dereceden lineer eliptik denklem için Dirichlet probleminin çözümü üzerine çalışmıştır. Ara operatörler yöntemini kullanarak, Green operatörünü ve Green fonksiyonunu hesaplamıştır. Bu yöntem, katsayıları sınırlı ve ölçülebilir ikinci derece eliptik denklem için Dirichlet problemine uygulanmıştır.

Başka bir çalışma Babuska ve Chleboun (2003) Dirichlet sınır değer probleminin tanımındaki belirsiz sınırı ele almaktadır. Lipschitz-olmayan sınırlara sahip bir bölge, Lipschitz sınırlı bölgelerin monoton biçimde genişleyen ya da büzülen bölgelerinin bir limiti olarak tanımlanır. Kendine özgü tekil bir biçimde çözülebilen Dirichlet sınır değer problemi bölgelerin ikisinde de tanımlanır ve bu çözümlerin limiti araştırılır. Bu makalenin temel noktası, birisi Lipschitz diğeri kararsız olan iki kapalı bölgede Dirichlet sınır değer probleminin birbirinden farklı çözümlerinin bulunabileceğini göstermektir.

Chen ve ark. (1999) Dirichlet sınır şartları ile, $D^n \subset \Re \, (n \geq 3)$ gibi yarı eliptik denklemler için bazı pozitif çözümlerin varlığına dair yeterli koşulları vermişlerdir., D' nin kompakt alt dizisindeki değişken b terimi modifiye edildiğinde D bölgesinde $\frac{1}{2}\Delta + b.\nabla$ biçimindeki operatörler için Green fonksiyonlarının karşılaştırılabilir olduğu göstermişlerdir.

Marshakov ve ark. (2002) tatarından, basit bağlantılı bölgeler için iki boyutlu Dirichlet probleminin, problem verilerinin değişimi araştırılmıştır.

(Kurt ve ark. (2004); Kurt ve Sezer (2006); Kurt (2008)) farklı düzlemsel bölgelerde Laplace diferansiyel denklemi için Dirichlet probleminin Green fonksiyonunu eliptik fonksiyonlar cinsinden ifade edip problemin çözümünü Green fonksiyonuna ve dolayısıyla eliptik fonksiyonlara dayandırmışlardır.

Hacioğlu ve ark.(2015), kare bölgede Laplace (ayrıca Poisson) diferansiyel denklemi için Dirichlet problemini eliptik fonksiyonlar cinsinden ifade etmişler ve problemin çözümünü eliptik fonksiyonlara dayandırmışlardır.

Baykus Savaşaneril ve Delibaş (2016) çalışmalarında, elips bölgede iki boyutlu ısı denklemi için alternatif bir çözüm sunmuşlardır.

2. TEMEL BAĞINTILAR

Bu bölümde problemin çözümü için gerekli olan kısmi diferansiyel denklemler, eliptik fonksiyonlar, eliptik integraller, konform dönüşümler Green fonksiyonları ve Chebyshev polinomları ile ilgili temel bağıntılar verilmiştir.

2.1. Kısmi Diferansiyel Denklemler

Bir diferansiyel denklemde bilinmeyen fonksiyon bir tek değişkene bağımlı ise, diferansiyel denkleme adi diferansiyel denklem; bilinmeyen fonksiyon iki veya daha fazla değişkene bağımlı ise, kısmi diferansiyel denklem denir. Adi diferansiyel denklemler, kısmi diferansiyel denklemlerin özel bir hali olarak düşünülebilir ve kısmi diferansiyel denklemlerin incelenmesinde basit modeller olarak iş görürler.

Genel olarak iki bağımsız değişkenli, ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemler aşağıdaki şekilde verilirler.

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+E(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+F(x,y)u=G(x,y) \quad (2.1)$$

$\Delta = B^2 - 4AC$ diskriminantına bağlı olarak bu denklem;

i) $B^2 - 4AC > 0$ ise hiperbolik

ii) $B^2 - 4AC = 0$ ise parabolik

iii) $B^2 - 4AC < 0$ ise eliptik ‘dir.

Matematiksel fiziğin en önemli denklemleri olan dalga, ısı ve potansiyel (Laplace) denklemleri de aşağıdaki şekilde sınıflandırılır.

i) x konum, t zaman değişkeni olmak üzere bir boyutlu dalga denklemi;

$u_{tt} = c.u_{xx}$ (hiperbolik tip)

ii) Bir boyutlu ısı denklemi;

$u_t = c.u_{xx}$ (parabolik tip)

iii) x ve y konum değişkeni olmak üzere $u(x,y)$ fonksiyonu için iki boyutlu laplace (potansiyel) denklemi

$u_{xx} + u_{yy} = 0$ ve Poisson denklemi $u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$ (eliptik tip)

Kısmi diferansiyel denklemler çeşitli tipte sınır şartlarıyla birlikte verilir. Sınır şartları u cinsinden verilmiş ise “*Dirichlet Tipi Sınır Şartı”* olarak, u’nun grandyantı cinsinden verilmişse “*Neuman Tipi Sınır Şartı*” olarak, u ve grandyantı birlikte verildiği taktirde “*Karışık Sınır Şartı*” olarak adlandırılır.

Eliptik denklemler "*potansiyel*" adı verilen bir büyüklüğün bölge içindeki değişimini temsil eder. Potansiyel, bir büyüklüğün sıklığını ölçer. Örneğin sıcaklık ve konsantrasyon birer potansiyel büyüklüktür. Bağımlı u değişkeni potansiyelin herhangi bir noktada, sınırdaki değerlere bağlı olarak aldığı denge (equilibrium) veya daimi-durum (steady-state) değerlerini belirtir. Dolayısıyla eliptik denklemler aynı zamanda potansiyel olarak adlandırılırlar. Eliptik denklemlerin 2-boyutlu hali;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad \text{Laplace denklemi}$$

ve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y) \quad \text{Poisson denklemi}$$

şeklindedir.

2.2. Eliptik İntegraller

Eliptik integraller; R rasyonel bir fonksiyon, $P(t)$ üçüncü veya dördüncü dereceden katlı kökü olmayan bir polinom olmak üzere $\int R[t,\sqrt{p(t)}]$ şeklinde ifade edilen basit cebirsel integrallerdir.

Eliptik integraller bir elipsin yay uzunluğunun hesaplanması ile ortaya çıkmış ve ilk olarak Leonhard Euler ve öğrencisi Giulio Fagnano tarafından incelenmiştir.

Her eliptik integral indirgeme formülleriyle rasyonel fonksiyonların ve birinci, ikinci, üçüncü tür eliptik integraller olarak adlandırılan üç kanonik formun integralleri şeklinde ifade edilebilir. Bu formlar dışında eliptik integraller "Legendre Formu" ve "Carlson Simetrik Formu" diye adlandırılan biçimler ile de ifade edilebilir.

2.2.1. Eliptik integrallerin üç kanonik formu

Birinci Tip Tam olmayan Eliptik İntegraller

$$u=F(k,\phi)=\int_0^{\phi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \qquad 0<k<1 \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanır; ϕ ye $F(k,\phi)$ nin veya u nun *genliği* denir ve $\phi = \mathrm{am}\, u$ yazılır, k ya da u nun *modülü* denir ve $k = \mathrm{mod}\, u$ yazılır. Bu integrale *birinci tür eliptik integralin Legendre şekli* de denir.

İkinci Tür Tam Olmayan Eliptik İntegral

$$E(k,\phi) = \int_0^{\phi} \sqrt{1-k^2 \sin^2\theta}\, d\theta \qquad 0 < k < 1 \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanır. Buna *ikinci tür eliptik integralin Legendre şekli* de denir. Bu integral bir elips yayının uzunluğunun belirtilmesinde ortaya çıkar ve eliptik integral teriminin kullanılmasının bir nedenini teşkil eder.

Üçüncü Tür Tam Olmayan Eliptik İntegral

$$\prod(k,n,\phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{(1+n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \qquad 0 < k < 1 \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanır. Buna *üçüncü tür eliptik integralin Legendre şekli* de denir. Burada n sıfırdan farklı bir sabit kabul edilmektedir. Çünkü $n = 0$ için bu integral birinci tür eliptik integrale indirgenmiş olur.

2.2.2. Tam eliptik integral

Yukarıdaki eliptik integraller de $\phi = \pi/2$ ise integraller *tam eliptik integral* adını alır. Bu durumda şu denklemlerde yazılabilir.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \int_0^{K} du = F\left(\frac{\pi}{2},k\right) \equiv K(k) \equiv K \tag{2.5}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\, d\theta = \int_0^{K} dn^2 u\, du = E\left(\frac{\pi}{2},k\right) \equiv E(k) \equiv E \tag{2.6}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1+n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \int_0^{K} \frac{du}{1-n\,\mathrm{sn}^2 u} = \prod\left(\frac{\pi}{2},n,k\right) \equiv \prod(n,k) \tag{2.7}$$

Buna ek olarak

$$K'(k) \equiv K(k') \equiv K'$$
$$E'(k) \equiv E(k') \equiv E'$$

dir. Bazı özel değerler ise aşağıdaki gibidir;

$k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ iken $K' = K$ dır,

$k = \sqrt{2} - 1$ iken $K' = \sqrt{2}K$ dır,

$k = 3 - 2\sqrt{2}$ iken $K' = 2K$ dır.

2.2.3. Eliptik integraller için Jakobi şekilleri

Eliptik integrallerin Legendre şekillerinde $t = \sin\theta$ dönüşümü yapılırsa $x = \sin\phi$ olmak üzere, aşağıdaki integraller elde edilir. Bunlara sırasıyla birinci, ikinci, üçüncü tür *eliptik integrallerin Jakobi şekilleri* denir ve $x = 1$ için tam integral elde edilir.

$$F_1(k,x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{\left(1-t^2\right)\left(1-k^2t^2\right)}} \tag{2.8}$$

$$E_1(k,x) = \int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}dt \tag{2.9}$$

$$\prod\nolimits_1(k,n,x) = \int_0^x \frac{dt}{\left(1+nt^2\right)\sqrt{\left(1-t^2\right)\left(1-k^2t^2\right)}} \tag{2.10}$$

2.3. Eliptik Fonksiyonlar

Eliptik integrallerin ters dönüşüm problemleri ile eliptik fonksiyonlar ortaya çıkmıştır. İlk olarak J. Bernoulli elastik konusundaki çalışmalarında bu integralle karşılaşmıştır. Aynı zamanda Maclaurin, Fagnano, Legendre gibi matematikçiler elipsin yay parçasının düzenlenmesinde eliptik fonksiyonlardan yararlanmıştır. 1980 lerde Jakobi ve Abel tarafından yapılan çalışmalar ile eliptik fonksiyonların bugün kullanılan isimleri verilmiştir.

Eliptik fonksiyonlar iki farklı periyoda sahiptir, periyotlardan biri her zaman gerçel kabul edilir ve diğeri genellikle karmaşık olacaktır. Gerçel değişkenin eliptik

fonksiyonları, mekanikte birçok problemin çözümünde kullanılır. Karmaşık bir değişkenin eliptik fonksiyonları, özellikle de bir dairenin poligon üzerine dönüşümünde, konform dönüşüm problemlerinin çözümleri olarak bulunabilirler. Bu fonksiyonlar elektrostatik veya elastisite problemlerinde görülürler.(Moretti, 1968)

2.3.1. Jakobi eliptik fonksiyonları

Jakobi, kutup noktaları hariç analitik, iki esas periyodu olan ve bu periyotlar arasındaki oranın gerçel bir sayı belirttiği bir fonksiyon olup olmadığını incelemiş ve böyle bir fonksiyonun ancak sabit bir fonksiyon olabileceğini görmüştür. Eğer iki esas periyodun oranı bir gerçel sayı belirtmiyorsa bu tür fonksiyonların yeni bir sınıf oluşturduğunu ve bu fonksiyonlar için bir tanım yapmanın gerekli olduğunu düşünmüştür. Bu düşünceye göre $\sin z$ fonksiyonu $(z = x + yi)$ x ve y değişkenine göre periyodik ise bu tip fonksiyonlara eliptik fonksiyonlar denir.

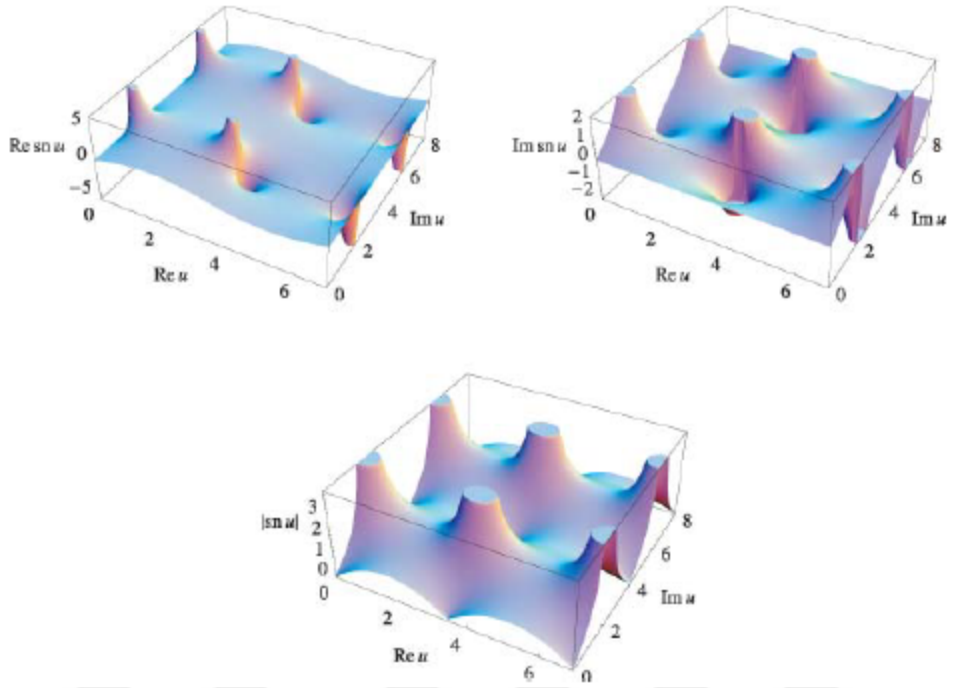
Belli bir k sabiti için;

$$u = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{\left(1-t^2\right)\left(1-k^2t^2\right)}} \tag{2.11}$$

integrali yardımıyla elde edilen snu fonksiyonuna *Jakobi eliptik fonksiyonu* denir. Bu integralin tersi $x = snu$ ve $sn0 = 0$ 'dir.

Her jakobi eliptik fonksiyon bir k parametresine bağlıdır. Bu k parametresine *Jakobi eliptik fonksiyonunun modülü* adı verilir.

$k^2 + k'^2 = 1$ şeklinde gösterilen k' parametresine de tümler (bütünleyici) modül adı verilir.



Şekil 2.1. $sn(u,k)$ Jakobi eliptik fonksiyonun $k=0.1$ iken; reel kısım grafiği (a), imajinal kısım grafiği (b) ve mutlak değer grafiği (c).

Jakobi eliptik fonksiyonları özel olarak;

$$sn(u,k), cn(u,k) \; ve \; dn(u,k)$$

şeklinde gösterilebilirler. Ayrıca $m=k^2$ şeklinde alternatif bir notasyon kullanıldığında ise

$$sn(u|m),\; cn(u|m) \; ve \; dn(u|m)$$

gösterimi elde edilir.

Diğer Jakobi eliptik fonksiyonlardan $cnu \; ve \; dnu$ fonksiyonları da sinüs genliği temelinde tanımlanabilirler. Bunlardan biri kosinüs-genliği, cnu ;

$$cnu = \sqrt{1-sn^2u} \tag{2.12}$$

ve diğeri fark-genliği ile tanımlanan dnu ;

$$dnu = \sqrt{1-msn^2u} \tag{2.13}$$

şeklinde gösterilebilir.

Her üç fonksiyonda da özel olarak $k=0$ verilmesi halinde $dnu=1$ olurken, $snu \; ve \; cnu$ eliptik fonksiyonları sırası ile $\sin u \; ve \; \cos u$ trigonometrik fonksiyonlarına

dönüşürler. Aynı zamanda $u=0$ da keyfi bir değeri verilerek diğer değerler elde edilirler.

Diğer Jakobi eliptik fonksiyonların bazıları;

$$\begin{aligned} nsu &= \frac{1}{snu} & ncu &= \frac{1}{cnu} & ndu &= \frac{1}{dnu} \\ scu &= \frac{snu}{cnu} & csu &= \frac{cnu}{snu} & dsu &= \frac{dnu}{snu} \\ sdu &= \frac{snu}{dnu} & dcu &= \frac{dnu}{cnu} & cdu &= \frac{cnu}{dnu} \end{aligned} \tag{2.14}$$

Burada $0 \le k \le 1$ ile $0 \le u \le K$ aralığında $snu, cnu \text{ ve } dnu$ değerlerini veren bir tablo, eliptik fonksiyonlara ilişkin herhangi bir problemin nümerik çözümünde bize yardımcı olur.

2.3.2. Jakobi eliptik fonksiyonları arasındaki temel ilişkiler

Jakobi fonksiyonları arasında sinüs ve cosinüs fonksiyonunkine benzer bir ilişki vardır:

$$sn^2u + cn^2u = 1 \tag{2.15}$$

$$dn^2u + m\,sn^2u = 1 \tag{2.16}$$

ve benzer olarak

$$\begin{aligned} ns^2u - cs^2u &= 1 & ns^2u - ds^2u &= m \\ nc^2u - sc^2u &= 1 & dc^2u - m_1 nc^2u &= m \\ nd^2u - msd^2u &= 1 & mcd^2u + m_1 nd^2u &= 1 \end{aligned} \tag{2.17}$$

şeklinde ifade edilerek $snu, cnu \text{ ve } dnu$ fonksiyonlarına indirgenirler.

Circular functions	*Jacobi elliptic functions*
$u = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$	$u = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$
$x = \sin u$	$x = \mathrm{sn}\,u$
$\frac{1}{2}\pi = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$	$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$
$\cos u = \sin(\frac{1}{2}\pi - u)$	$\mathrm{cd}\,u = \mathrm{sn}(K - u)$
$\sin \frac{1}{2}\pi = 1$	$\mathrm{sn}\,K = 1$
$\sin \pi = 0$	$\mathrm{sn}\,2K = 0$
$\sin(\pi + u) = -\sin u$	$\mathrm{sn}(2K + u) = -\mathrm{sn}\,u$
$\sin(-u) = -\sin u$	$\mathrm{sn}(-u) = -\mathrm{sn}\,u$

Tablo.2.1. Jakobi eliptik fonksiyonlar ile trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması.

2.3.2.1 Teorem

snu, *cnu ve dnu* Jakobi eliptik fonksiyonların türevleri

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}(snu) &= (cnu)(dnu)\\ \frac{d}{du}(cnu) &= -(snu)(dnu)\\ \frac{d}{du}(dnu) &= -k^2(snu)(cnu)\end{aligned} \tag{2.18}$$

şeklindedir.(Bowman, 1953)

Jakobi eliptik fonksiyonları cinsinden $sn(u_1+u_2)$ yi, sadece u_1 ve u_2 şeklinde ifade etmek mümkündür, ama sonuç trigonometrik fonksiyonlarda olduğu kadar basit değildir.

2.3.2.2 Teorem.

Jakobi eliptik fonksiyonları için toplam formülleri

$$sn(u_1+u_2) = \frac{snu_1 cnu_2 dnu_2 + snu_2 cnu_1 dnu_1}{1-k^2 sn^2 u_1 sn^2 u_2} \tag{2.19}$$

$$cn(u_1+u_2) = \frac{cnu_1 cnu_2 - snu_1 snu_2 dnu_1 dnu_2}{1-k^2 sn^2 u_1 sn^2 u_2} \tag{2.20}$$

$$dn(u_1+u_2) = \frac{dnu_1 dnu_2 - k^2 snu_1 snu_2 cnu_1 cnu_2}{1-k^2 sn^2 u_1 sn^2 u_2} \tag{2.21}$$

şeklindedir.(Bowman, 1953)

Toplam formüllerinde $u = u_1 = u_2$ yerine koyarak çift argüman için aşağıdaki formüller elde edilir:

$$\begin{aligned}sn\,2u &= \frac{2snu\,cnu\,dnu}{1-k^2 sn^4 u}\\ cn\,2u &= \frac{cn^2 u - sn^2 u\,dn^2 u}{1-k^2 sn^4 u}\\ dn\,2u &= \frac{dn^2 u - k^2 sn^2 u\,cn^2 u}{1-k^2 sn^4 u}\end{aligned} \tag{2.22}$$

Karmaşık sayılar için de toplam ve fark formüllerini verecek olursak ;

$$sn(u_1 \pm iu_2, k) = \frac{sn(u_1,k)dn(u_2,k')\pm i\,cn(u_1,k)dn(u_1,k)sn(u_2,k')cn(u_2,k')}{1-sn^2(u_2,k')dn^2(u_1,k)}$$

$$cn(u_1 \pm iu_2, k) = \frac{cn(u_1,k)cn(u_2,k')\pm i\,sn(u_1,k)dn(u_1,k)sn(u_2,k')dn(u_2,k')}{1-sn^2(u_2,k')dn^2(u_1,k)} \qquad (2.23)$$

$$dn(u_1 \pm iu_2, k) = \frac{dn(u_1,k)cn(u_2,k')dn(u_2,k')-ik^2sn(u_1,k)cn(u_1,k)sn(u_2,k')}{1-sn^2(u_2,k')dn^2(u_1,k)}$$

Eliptik fonksiyonların Jakobi şekillerinin problemin çözümünde de kullandığımız bazı özel değerleri;

$$\begin{array}{lll} sn(-u) = -snu & sn0 = 0 & snK = 1 \\ cn(-u) = cnu & cn0 = 1 & cnK = 0 \\ dn(-u) = dnu & dn0 = 1 & dnK = k' \\ tn(-u) = -tnu & tn0 = 0 & tnK = \infty \end{array}$$

dır.

2.3.3. K ve K' sabitleri

Jakobi eliptik fonksiyonlarının periyotlarını kutup yerlerini ve sıfır noktalarını belirlerken kullanacağımız K ve K' sabitlerinin tanımı verilecek olursa; K sabiti

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\left(1-t^2\right)\left(1-k^2t^2\right)}} \qquad (2.24)$$

integrali yardımıyla tanımlanır. Bu tanımdan;

$$snK = 1 \qquad cnK = 0 \qquad dnK' = k'$$

değerlerini alır. Benzer şekilde K' sabitini de

$$K' = \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{\left(t^2-1\right)\left(1-k^2t^2\right)}} \qquad (2.25)$$

integrali yardımıyla tanımlanır.

$$K + iK' = \int_0^{1/k} \frac{dt}{\left(1-t^2\right)\left(1-k^2t^2\right)} \qquad (2.26)$$

olduğundan

$$sn\left(K+iK'\right) = 1/k, \qquad cn\left(K+iK'\right) = -ik'/k, \qquad dn\left(K+iK'\right) = 0$$

eşitlikleri elde edilir.

Eliptik fonksiyonların Jakobi şekillerinin problemin çözümünde de kullandığımız bazı özel değerleri;

$$sn(-u) = -snu \qquad sn0 = 0 \qquad snK = 1$$
$$cn(-u) = cnu \qquad cn0 = 1 \qquad cnK = 0$$
$$dn(-u) = dnu \qquad dn0 = 1 \qquad dnK = k'$$
$$tn(-u) = -tnu \qquad tn0 = 0 \qquad tnK = \infty$$

dir.

2.3.4. Jakobi eliptik fonksiyonların periyodikliği, kutup ve sıfır noktaları

Jakobi eliptik fonksiyonların çifte periyodik fonksiyonlar olduğunu eliptik fonksiyonların tanımından biliyoruz. Bu periyotlar K ve K' sabitleri cinsinden de ifade edilebilir.

2.3.4.1 Teorem

snu ve cnu fonksiyonlarının her ikisinin periyodu $4K$, dnu fonksiyonunun periyodu $2K$ 'dır. (Whittaker ve Watson, 1927)

Yani;

$$sn(u+4K) = snu \qquad cn(u+4K) = cnu \qquad dn(u+2K) = dnu$$

dır.

2.3.4.2 Teorem

snu ve dnu fonksiyonlarının her biri $4K + iK'$ periyoduna sahip olduğu halde cnu fonksiyonu $2K + 2iK'$ periyoduna sahiptir. (Whittaker ve Watson, 1927)

$$sn(u+4K+4iK') = snu, \qquad cn(u+2K+2iK') = cnu, \qquad dn(u+4K+4iK') = dnu$$

dır.

2.3.4.3 Teorem

cnu ve dnu fonksiyonları $4iK'$, snu fonksiyonu $2iK'$ periyoduna sahiptir.(Whittaker ve Watson, 1927)

$$sn(u+2iK') = snu \qquad cn(u+4iK') = cnu \qquad dn(u+4iK') = dnu$$

dır.

snu, cnu *ve* dnu fonksiyonlarının her biri iki basit kutup noktası ve iki basit sıfıra sahiptir. snu fonksiyonunun kutup noktaları, rezidüleri sırasıyla $1/k$ ve $-1/k$ olmak üzere iK' veya $2K + iK'$ sayılarına eşittir. snu fonksiyonun basit sıfırları ise 0 ve $2K$

sayılarına eşittir. *cnu* fonksiyonunun kutup noktaları, rezidüleri sırasıyla i/k ve $-i/k$ olmak üzere iK' veya $2K+iK'$ sayılarına, sıfırları ise K veya $-K$ sabitlerine eşittir. Son olarak *dnu* fonksiyonunun, rezidüleri sırasıyla i ve $-i$ olmak üzere iK' veya $-iK'$ sayılarına, sıfırları ise $K+iK'$ veya $K-iK'$ sabitlerine eşittir.

2.4. Konform Dönüşümler

Herhangi bir z düzleminin bir bölgesindeki bütün noktalarda bir $f(z)$ fonksiyonu analitik ve türevi sıfırdan farklı ise bu fonksiyon yardımıyla yapılan dönüşüme konform dönüşüm denir. Başka bir değişle konform dönüşüm, türevi sıfır olmayan analitik fonksiyonlarla gerçekleşen dönüşümdür.

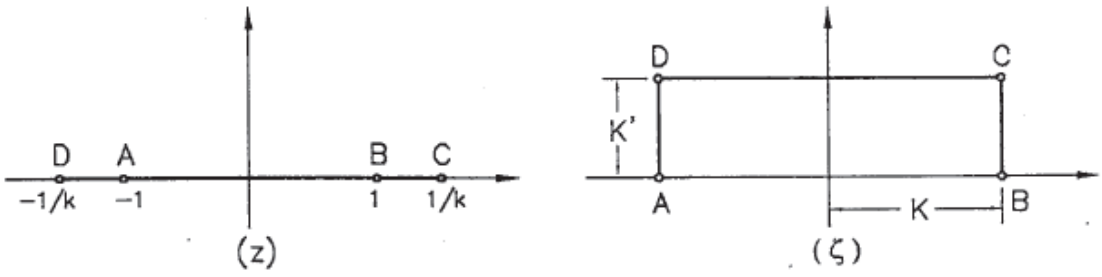
Konform dönüşüm kesişen eğriler arasındaki açıları, eğri ailelerinin özelliklerini ve oranlarını koruyan bir dönüşümdür, aynı zamanda dönüşüm fonksiyonunun R boyut faktörü ve θ dönme açısı z'ye bağlı olarak nokta nokta değişebileceğinden z düzlemindeki bir şekil ζ düzlemine çok farklı bir şekilde dönüşebilir.

Eliptik integrallerin bazı konform dönüşümlerinden örnek verecek olursak;

$\mathrm{Im}\, z > 0$ yarı düzleminin ζ - düzlemindeki bir dikdörtgen üzerine dönüşümü;

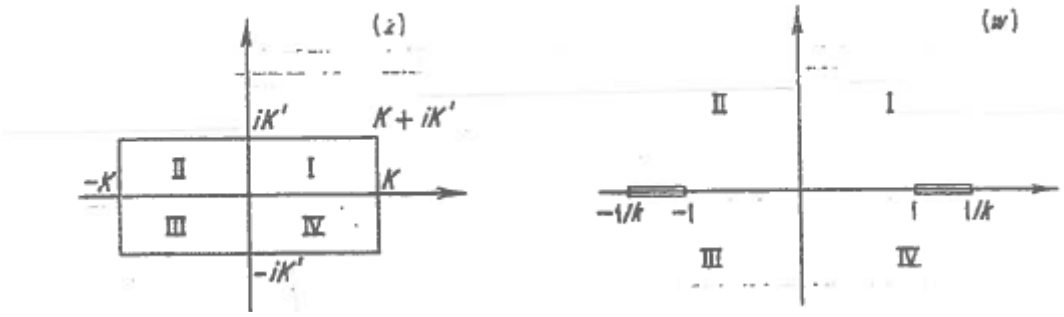
$$\zeta = \int_0^z \frac{dz_1}{\sqrt{\left(1-z_1^{\,2}\right)\left(1-k^2 z_1^{\,2}\right)}} = F(z,k); \qquad z = sn\zeta \tag{2.26}$$

ζ	$-K+iK'$	$-K$	0	K	$K+iK'$	iK'
z	$-1/k$	-1	0	1	$1/k$	∞



Şekil.2.2 $\mathrm{Im}\, z > 0$ yarı düzleminin ζ - düzlemindeki bir dikdörtgen üzerine dönüşümü.

z düzlemindeki bir dikdörtgenin w düzlemindeki iki kesik segmente dönüşümü;



Şekil.2.3. z düzlemindeki bir dikdörtgenin w düzlemindeki iki kesik segmente dönüşümü;

2.5. Rieman Dönüşüm Teoremi

D, □ - düzleminde basit bağlantılı bir bölge ve $D \neq$ □ olmak üzere D bölgesinden merkezi bir birim dairenin üzerine bir tek f dönüşümü vardır. Bu dönüşüm analitiktir ve ($z_0 \in D$) D bölgesinde $f(z_0)=0$ ve $f'(z_0)>0$ olacak şekilde birebirdir.

Bir Rieman yüzeyi, □ - düzleminin birden fazla tabakası olan bir yüzeye, çok-değerli bir fonksiyonun yüzey üzerindeki noktaların her biri için yalnız bir değer olacak şekilde genelleştirilmesidir. Bu yüzey için fonksiyon tek-değerli olur ve tek değerli fonksiyonlar kuramı uygulanır.

2.6. Green Fonksiyonu

Bir integral operatörü şeklinde yazılabilen diferansiyel denklemlerde, integralin içine etki eden fonksiyona Green fonksiyonu denir.

Laplace denklemi için Dirichlet probleminin Green fonksiyonu;

D basit bağlantılı sınırlı bir bölge, $z=x+iy$ ve $\zeta=\xi+i\eta$ olmak üzere,

$$G(z,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\ln|z-\zeta|+g(z,\zeta),\ z,\zeta\in D \tag{2.27}$$

dır. Burada $g(z,\zeta)$ fonksiyonu her $\zeta \in D$ için harmoniktir ve D sınırına kadar sürekli ve $g(z,\zeta)=-1/(2\pi)\ln|z-\zeta|$ olmalıdır. Buna göre $G(z,\zeta)|_{z\in S}=0$ olduğu görülür.

Düzlemsel bir D bölgesi için Green fonksiyonun bulunması aslında D bölgesini birim daireye dönüştüren analitik fonksiyonu bulmaya denktir. Bu bir teoremle verilir.

2.6.1 Teorem

D basit bağlantılı sınırlı bir bölge ve $\forall \zeta \in D$ için $w = w(z,\zeta),\ z,\zeta \in D$ fonksiyonu, $(z = \zeta \leftrightarrow w = 0) ve\ w(z,\zeta) = 0$ olmak üzere, D'yi $|w| < 1$ birim daireye konform olarak dönüştürsün. O halde D bölgesinde Laplace operatörü için Dirichlet probleminin Green fonksiyonu

$$G(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln |w(z,\zeta)| \tag{2.28}$$

dır. (Garabedian, 1964; Hildebrand, 1976; Sidorov ve ark., 1985)

O zaman $w = w(z)$ D bölgesinin $|w| < 1$ birim çemberine konform dönüşümü ise;

$$w(z,\zeta) = \frac{w(z) - w(\zeta)}{1 - w(z)\overline{w(\zeta)}}$$

olmak üzere, D bölgesi için Green fonksiyonu,

$$G(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi} \mathrm{Re} \ln \frac{w(z) - w(\zeta)}{1 - w(z)\overline{w(\zeta)}} \tag{2.29}$$

dır. Bu fonsiyonun,

a) simetrik

b) D'de $\zeta = \xi + i\eta$ ya göre harmanik

c) Her $z \in D$ için D'nin sınırına kadar sürekli ve $G(z,\zeta)|_{\zeta \in \partial D} = 0$

olduğu bilinmektedir.

2.7. Chebyshev Polinomları

Chebyshev polinomları ilk olarak Rus matematikçi Pafnuty Chebyshev (1821-1894) tarafından tanımlanmıştır. Sonrasında Corneilus Lanczos ve Clenshaw tarafından 1930'lu yıllarda nümerik analize uygulanmaya başlanmıştır. Chebyshev polinomları; ortogonal olmalı ve bilgisayar programlarına yatkınlıkları ile yaklaşım polinomu olmaya çok uygundur. Bunun yanı sıra adi ve kısmi türevli diferansiyel denklemlerin başlangıç ve sınır değer problemlerinin nümerik çözümünde de Chebyshev polinomları sıklıkla kullanılır. Günümüzde bilgisayarlar teknolojisinin ve kullanımının yaygınlaşması ile Chebyshev polinom ve serilerinin kullanımı üzerine yapılan çalışmaların sayısı hızla artmıştır.

2.7.1. Chebyshev polinomu

$T_n(x)$ $n.$ dereceden bir polinom olmak üzere $\forall$ $n \geq 0$ için , $x \in [-1,1]$ olmak üzere,

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x) \qquad (1)$$

ile tanımlanan polinoma *Chebyshev* polinomu denir.(Fox ve Parker, 1968)

Eğer (1) eşitliğinde $x = \cos\theta$ alınırsa

$$T_n(x) = \cos(n\theta) \qquad (2)$$

formülü elde edilir (Mason ve Handscomb, 2002).

Chebyshev polinomları trigonometrik fonksiyonlar ile tanımlandığından θ değişkeni $[-\pi, \pi]$ aralığındadır ve bu nedenle x değişkeni $[-1,1]$ aralığında tanımlanır. Aynı zamanda $x \in (-1,1)$ aralığında Chebyshev Polinomları $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir.

n değerlerini Chebyshev polinomunda yerine koyduğumuzda ;

$$T_0(x) = \cos 0 = 1$$

ve

$$T_1(x) = \cos(\cos^{-1} x) = x$$
$$\vdots$$
$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

T_n'lerin bir polinom belirtiği görülür.

2.7.2. Chebyshev düğümleri

Chebyshev polinomlarının kökleri interpolasyon polinomlarındaki düğüm noktalarıdır. Bu düğüm noktalarına *Chebyshev* düğümleri denir (Mason ve Handscomb 2003).

$n \geq 1$ ve $x \in [-1,1]$ için birinci çeşit *Chebyshev* polinomunu sıfır yapan x değerleri

$$x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \qquad (k = 0,1,...,n)$$

formülü ile hesaplanır (Mason ve Handscomb, 2002)

3. PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ VE KULLANILAN YÖNTEMLER

Dirichlet problemi, ısı, elektrik ve akışkanların akışı alanlarında ortaya çıkan belirli kısmi diferansiyel denklemlerin formülleştirilmesi ve çözülmesine ilişkin problemlerdir. Problem bir diskin üzerindeki denge sıcaklığı dağılımının, diskin sınırları boyunca yapılan ölçümlere dayalı olarak belirlenmesine yöneliktir. Diskin içindeki çeşitli noktaların sıcaklığı, diskin içerdiği toplam ısı enerjisinin en düşük olduğu fiziksel duruma karşılık gelen Laplace denklemini sağlamalıdır. Bu problem biraz farklı şekilde her noktadaki sıcaklığın yine sabit kalması koşuluyla diskin içine ısı eklenmesi ya da azaltılmasıyla belli noktaların belirlenmesi de Poisson denklemidir.

Poisson denklemi için Dirichlet problemi,

$$\nabla^2 U = h(z), \quad z \in D, \quad U\big|_{\partial D} = U_0(z) \tag{3.1}$$

olarak tanımlanır.

3.1. Problemin Eliptik Fonksiyonlar Cinsinden Çözümü

Bu bölümde, problemin çözümü için gerekli dönüşümler elde edilip çözüm fonksiyonu bulunacaktır.

Poisson denkleminin Green fonksiyonuna dayalı çözümü;

$$U(z) = \int_D \int G(z,\zeta) h(\zeta) d\xi\, d\eta + \int_{\partial D} \frac{G(z,\zeta)}{\partial n} U_0(\zeta) |d\zeta| \tag{3.2}$$

olarak yazılır. Burada G, D bölgesi için Green fonksiyonu ve $\partial / \partial n$, D 'nin ∂D sınırı boyunca normal türevini göstermektedir.

3.1.1. Dikdörtgen bir bölgenin birim çember üzerine konform dönüşümü

Burada önce z-düzlemindeki A_1, A_2, A_3, A_4 köşeli dikdörtgen w düzlemindeki $|w| < 1$ birim çemberine dönüştürerek, dikdörtgeni birim çembere konform olarak dönüştüren fonksiyon eliptik fonksiyonlar cinsinden ifade edilecektir.

Aşağıdaki tablo çeşitli düzlemlerde karşılık gelen noktaları gösterir.

Plane	A	B	C	D
z	a	ib	$-a$	$-ib$
z_1	$a+2ib$	$a+2ib$	ib	a
λz_1	$K+iK'/2$	$K/2+iK'$	$iK'/2$	$K/2$
ζ_1	$1/\sqrt{k}$	$\sqrt{1+k'}/k$	$i/\sqrt{k}$	$1/\sqrt{1+k'}$
ζ	$1/k$	$(1+k')/k^2$	$-1/k$	$1/(1+k')$
w	1	i	-1	$-i$

Son iki satır $\zeta-$ ve $w-$ düzlemleri arasındaki bilineer dönüşümü tanımlar.

$$\frac{w-1}{w+1}=-i\frac{k+1+k'}{k-1-k'}\frac{k\zeta-1}{k\zeta+1} \tag{3.3}$$

Buradan,

$$\frac{w-1}{w+1}=i\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\frac{k\zeta-1}{k\zeta+1} \tag{3.4}$$

elde edilir, diğer yandan da;

$$\begin{aligned}\zeta &= sn^2\left(\lambda z+\frac{K}{2}+i\frac{K'}{2}\right)=sn^2\left[\frac{1}{2}(2\lambda z+K+iK')\right]\\ &=\frac{1-cn(2\lambda z+K+iK')}{1+dn(2\lambda z+K+iK')}=\frac{1+i(k'k)nc\,2\lambda z}{1+ik'sc\,2\lambda z}\end{aligned} \tag{3.5}$$

bulunur. Buradan da

$$\frac{w-1}{w+1}=i\frac{-\sqrt{1-k}\,cn\,2\lambda z+i\sqrt{1+k}(1-sn\,2\lambda z)}{\sqrt{1+k}\,cn\,2\lambda z+i\sqrt{1-k}(1+sn\,2\lambda z)}$$

$$w=\frac{\sqrt{1+k}(cn2\lambda z+sn2\lambda z-1)+i\sqrt{1-k}(sn2\lambda z-cn2\lambda z+1)}{\sqrt{1+k}(cn2\lambda z-sn2\lambda z+1)+i\sqrt{1-k}(sn2\lambda z+1)} \tag{3.6}$$

dönüşümü elde edilmiş olur

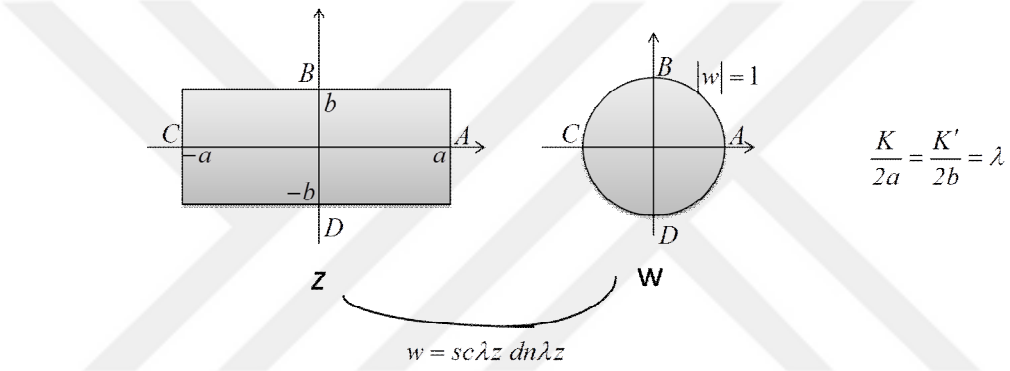
Gerekli işlemler yapılıp $1-k^2=k'^2$ ve $\mathrm{sn}^2+\mathrm{cn}^2=1$ eşitlikleri kullanıldığında

$$w = \frac{sn2\lambda z}{1+cn2\lambda z} = \frac{2\,sn\,\lambda z\,cn\,\lambda z\,dn\,\lambda z}{cn^2\,\lambda z + sn^2\,\lambda z\,dn^2\,\lambda z}$$
$$= \frac{cn^2\,\lambda z + sn^2\,\lambda z\,dn^2\,\lambda z}{cn^2\,\lambda z + sn^2\,\lambda z\,dn^2\,\lambda z + cn^2\,\lambda z - sn^2\,\lambda z\,dn^2\,\lambda z} \qquad (3.7)$$
$$= \frac{sn\,\lambda z\,dn\,\lambda z}{cn\,\lambda z} = sc\lambda\ dn\lambda z$$

eşitliği elde edilir.

z-düzlemindeki dikdörtgenin $w-$düzleminde $|w|<1$ birim çember üzerinde konform dönüşümü şu şekilde yazılır;(Moretti, 1968)

$$w = F(z) = sc\lambda z\,dn\lambda z \qquad scz = \frac{snz}{cnz} \qquad (3.8)$$



Şekil 3.1 z-düzlemindeki dikdörtgenin $w-$düzleminde $|w|<1$ birim çember üzerinde konform dönüşümü

3.1.2. Dikdörtgen bölge için green fonksiyonu

D bölgesinde Laplace denklemi için Dirichlet probleminin Green fonksiyonu $G(z,\zeta)$

$$G(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\ln|z-\zeta| + g(z,\zeta) \qquad z \in D\ ,\ \zeta \in D \qquad (3.9)$$

olarak tanımlanır.

Burada, D bölgesinde $\forall \zeta \in D$ için g bir harmonik fonksiyon ve $g(z,\zeta)\big|_{z\in S} = -1/(2\pi)\ln|z-\zeta|_{z\in S}$ dır. D nin sınırında $G(z,\zeta)=0$ ve $z = x+iy$, $\zeta = \xi + i\eta$ dir.

Teorem 2.6.1 ve $w = F(z)$ fonksiyonu, D bölgesinin $|w|<1$ birim çemberine konform dönüşümü ise,

$$w(z,\zeta) = \frac{F(z)-F(\zeta)}{1-F(z)\overline{F(\zeta)}} \qquad (3.10)$$

olmak üzere, D bölgesi için Green fonksiyonu,

$$G(z,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\ln\frac{F(z)-F(\zeta)}{1-F(z)\overline{F(\zeta)}} \tag{3.11}$$

olarak elde edilir.

Sonuç olarak, D bir dikdörtgen bölge ise, (3.9) ve (3.11) denklemlerinden $A_1\left(\frac{K}{2\lambda},-\frac{K'}{2\lambda}\right), A_2\left(\frac{K}{2\lambda},\frac{K'}{2\lambda}\right), A_3\left(-\frac{K}{2\lambda},\frac{K'}{2\lambda}\right), A_4\left(-\frac{K}{2\lambda},-\frac{K'}{2\lambda}\right)$ için Green fonksiyonu

$$G=\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{sc\lambda z\,dn\lambda z-sc\lambda\zeta\,dn\zeta\,z}{1-sc\lambda z\,dn\lambda z\,\overline{sc\lambda\zeta\,dn\zeta}}\right|=\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\ln\left[\frac{sc\lambda z\,dn\lambda z-sc\lambda\zeta\,dn\zeta\,z}{1-sc\lambda z\,dn\lambda z\,\overline{sc\lambda\zeta\,dn\zeta}}\right] \tag{3.12}$$

şeklinde bulunur.

3.1.3. Dirichlet probleminin çözümü

(3.1) denkleminde, D bölgesi olarak; $A_1\left(\frac{K}{2\lambda},-\frac{K'}{2\lambda}\right), A_2\left(\frac{K}{2\lambda},\frac{K'}{2\lambda}\right), \quad A_3\left(-\frac{K}{2\lambda},\frac{K'}{2\lambda}\right),$ $A_4\left(-\frac{K}{2\lambda},-\frac{K'}{2\lambda}\right)$ köşeli dikdörtgenin içini ve D 'nin ∂D sınırı olarak da $\partial D=\overline{A_4A_1}\cup\overline{A_1A_2}\cup\overline{A_2A_3}\cup\overline{A_3A_4}$ çevresini alalım. Dikdörtgenin,

$\overline{A_4A_1}$ kenarı üzerinde $\eta=-\frac{K'}{2\lambda}, \quad d\eta=0, \quad -\frac{K}{2\lambda}\le\xi\le\frac{K}{2\lambda}$

$\overline{A_1A_2}$ kenarı üzerinde $\xi=\frac{K}{2\lambda}, \quad d\xi=0, \quad -\frac{K'}{2\lambda}\le\eta\le\frac{K'}{2\lambda}$

$\overline{A_2A_3}$ kenarı üzerinde $\eta=\frac{K'}{2\lambda}, \quad d\eta=0, \quad -\frac{K}{2\lambda}\le\xi\le\frac{K}{2\lambda}$

$\overline{A_3A_4}$ kenarı üzerinde $\xi=-\frac{K}{2\lambda}, \quad d\xi=0, \quad -\frac{K'}{2\lambda}\le\eta\le\frac{K'}{2\lambda}$

olduğundan, Poisson denklemin Dirichlet problemi için çözümü (3.2) eşitliğinden;

$$U(z)=\int_{-\frac{K'}{2\lambda}}^{\frac{K'}{2\lambda}}\int_{-\frac{K}{2\lambda}}^{\frac{K}{2\lambda}}G(z,\zeta)h(\zeta)d\xi\,d\eta-\int_{-\frac{K}{2\lambda}}^{-\frac{K}{2\lambda}}\left[G_\xi^2(z,\zeta)+G_\eta^2(z,\zeta)\right]^{1/2}U_0(\zeta)\Big|_{\eta=-\frac{K'}{2\lambda}}^{\frac{K'}{2\lambda}}d\xi$$
$$+\int_{-\frac{K'}{2\lambda}}^{\frac{K'}{2\lambda}}\left[G_\xi^2(z,\zeta)+G_\eta^2(z,\zeta)\right]^{1/2}U_0(\zeta)\Big|_{\xi=-\frac{K}{2\lambda}}^{\frac{K}{2\lambda}}d\eta \tag{3.13}$$

elde edilir.

Laplace denklemi için Dirichlet probleminin dikdörtgen bölgedeki çözümü (yani (3.1) denkleminin h(z)=0 için)

$$U(z)=\int_{-\frac{K'}{2\lambda}}^{\frac{K'}{2\lambda}}\left[G_\xi^2+G_\eta^2\right]^{1/2}U_0(\zeta)\Big|_{\xi=-\frac{K}{2\lambda}}^{\frac{K}{2\lambda}}d\eta-\int_{-\frac{K}{2\lambda}}^{\frac{K}{2\lambda}}\left[G_\xi^2+G_\eta^2\right]^{1/2}U_0(\zeta)\Big|_{\eta=-\frac{K'}{2\lambda}}^{\frac{K'}{2\lambda}}d\xi \tag{3.14}$$

olarak elde edilir.

G ile tanımlanan Green fonksiyonu

$$G=\frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\ln\left[\frac{sc\lambda z\,dn\lambda z-sc\lambda\zeta\,dn\zeta z}{1-sc\lambda z\,dn\lambda z\,\overline{sc\lambda\zeta\,dn\zeta}}\right],\quad z=x+iy,\ \zeta=\xi+i\eta \tag{3.15}$$

dır.

$K(k)$ ve $K'(k)$ integral sınırları k modüllü tam eliptik integrallerdir ve k ($0<k<1$) sabitinin verilen herhangi bir değeri için bellidir.

3.1.4. Uygulama

$$U_{xx}(x,y)+U_{yy}(x,y)=0 \qquad \left(-\frac{K}{2\lambda}\le x\le\frac{K}{2\lambda},\quad -\frac{K'}{2\lambda}\le y\le\frac{K'}{2\lambda}\right) \tag{3.16}$$

sınır değerleri;

$$\begin{aligned} &U\left(x,-\frac{K'}{2\lambda}\right)=20^0C,\quad U\left(x,\frac{K'}{2\lambda}\right)=50^0C \qquad -\frac{K}{2\lambda}\le x\le\frac{K}{2\lambda}\\ &U\left(-\frac{K}{2\lambda},y\right)=U\left(\frac{K}{2\lambda},y\right)=0^0C \qquad\qquad -\frac{K'}{2\lambda}\le y\le\frac{K'}{2\lambda}\end{aligned} \tag{3.17}$$

olarak yazılır. (3.14) eşitliğinden

$$U(z)=\int_{-\frac{K'}{2\lambda}}^{\frac{K'}{2\lambda}}\left[G_\xi^2+G_\eta^2\right]^{1/2}U_0(\zeta)\Big|_{\xi=-\frac{K}{2\lambda}}^{\frac{K}{2\lambda}}d\eta-\int_{-\frac{K}{2\lambda}}^{\frac{K}{2\lambda}}\left[G_\xi^2+G_\eta^2\right]^{1/2}U_0(\zeta)\Big|_{\eta=-\frac{K'}{2\lambda}}^{\frac{K'}{2\lambda}}d\xi \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}&=\int_{-\frac{K'}{2\lambda}}^{\frac{K'}{2\lambda}}\left[G_\xi^2+G_\eta^2\right]^{1/2}U_0\left(\frac{K}{2\lambda},\eta\right)d\eta-\int_{-\frac{K'}{2\lambda}}^{\frac{K'}{2\lambda}}\left[G_\xi^2+G_\eta^2\right]^{1/2}U_0\left(-\frac{K}{2\lambda},\eta\right)d\eta\\&-\int_{-\frac{K}{2\lambda}}^{\frac{K}{2\lambda}}\left[G_\xi^2+G_\eta^2\right]^{1/2}U_0\left(\xi,\frac{K'}{2\lambda}\right)U_0(\zeta)d\xi+\int_{-\frac{K}{2\lambda}}^{\frac{K}{2\lambda}}\left[G_\xi^2+G_\eta^2\right]^{1/2}U_0\left(\xi,-\frac{K'}{2\lambda}\right)d\xi\end{aligned}$$

yazılırak ve

$$U\left(\xi,-\frac{K'}{2\lambda}\right)=20^0C,\quad U\left(\xi,\frac{K'}{2\lambda}\right)=50^0C,\qquad U\left(-\frac{K}{2\lambda},\eta\right)=U\left(\frac{K}{2\lambda},\eta\right)=0^0C \tag{3.19}$$

sınır şartları kullanılarak

$$U(z) = -50 \int_{-\frac{K}{2\lambda}}^{\frac{K}{2\lambda}} \left[G_\xi^2 + G_\eta^2 \right]^{1/2} d\xi + 20 \int_{-\frac{K}{2\lambda}}^{\frac{K}{2\lambda}} \left[G_\xi^2 + G_\eta^2 \right]^{1/2} d\xi \tag{3.20}$$

elde edilir. Burada

$$G = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{sc\lambda z\, dn\lambda z - sc\lambda\zeta\, dn\zeta z}{1 - sc\lambda z\, dn\lambda z\, \overline{sc\lambda\zeta\, dn\zeta}} \right|$$

dır.

3.2. Problemin Chebyshev Kollokasyon Metodu ile Çözümü

Bu bölümde, Chebyshev serisini kullanarak Laplace denklemi için yaklaşık çözüm bulacağız. Çözüm fonksiyonu

$$U(x,y) = \sum_{r=0}^{N} \sum_{s=0}^{N} a_{r,s} T_{r,s}(x,y) \tag{3.21}$$

olarak yazılacaktır.

Burada $T_{r,s}(x,y) = T_r(x)T_s(y)$ ve $a_{r,s}$ belirlenecek bilinmeyen sabitlerdir. $T_r(x)$ ve $T_s(y)$ r ve s sırasıyla Chebyshev polinomlarının derecesini belirlemek üzere, $T_r(x) = \cos(r \arccos(x))$ ve $T_s(y) = \cos(s \arccos(y))$ tarafından tanımlanır. $T_r(x)$ ve $T_s(y)$ chebyshev polinomlarının uç kollokasyon noktaları

$$x_n = \cos\left(\frac{(N-n)}{N}\right)\pi \text{ ve } y_l = \cos\left(\frac{(N-n)}{N}\right)\pi; \quad n = 0,1,...,N, \quad l = 0,1,...,N \tag{3.22}$$

olarak seçilir.(Yüksel ve ark., 2015)

3.2.1 Problemin matris denklemi

Laplace denklemi için Chebyshev yaklaşık çözümü olan $U(x,y) = \sum_{r=0}^{N} \sum_{s=0}^{N} a_{r,s} T_{r,s}(x,y)$ fonksiyonu matris formda yazılırsa;

$$U(x,y) = \boldsymbol{T}(x)\, \boldsymbol{Q}(y)\, \overline{\boldsymbol{A}} \tag{3.23}$$

elde edilir(Yüksel ve ark., 2015). Burada

$$\boldsymbol{T}(x) = \left[T_0(x) \quad T_1(x) \quad \cdots \quad T_N(x) \right]_{1\times(N+1)}, \tag{3.24}$$

$$\boldsymbol{Q}(y)=\begin{bmatrix} T_0(y) & \cdots & T_N(y) & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & T_0(y) & & 0 & & 0 & & 0 \\ \vdots & & & & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & T_0(y) & \cdots & T_N(y) \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)^2} \tag{3.25}$$

ve $\overline{\boldsymbol{A}}$ chebyshev katsayılar matrisi

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,N} & a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,N} & \cdots & a_{N,0} & a_{N,1} & \cdots & a_{N,N} \end{bmatrix}_{(N+1)^2\times 1} \tag{3.26}$$

dir.

$U(x,y)$ denkleminin $(i+j)$. dereceden kısmi türevleri

$$U^{(i,j)}(x,y)=\boldsymbol{T}(x)(\boldsymbol{J}^T)^i\,\boldsymbol{Q}(y)(\overline{\boldsymbol{J}})^j\,\overline{\boldsymbol{A}} \tag{3.27}$$

olarak elde edilir(Yüksel, 2011; Yüksel ve ark., 2015). Burada

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2.2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2.3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2.4 & 0 & 2.4 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2.5 & 0 & 2.5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 2N & 0 & 2N & 0 & \cdots & 2N & 0 \\ N & 0 & 2N & 0 & 2N & \cdots & 2N & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)} \tag{3.28}$$

$$\overline{\boldsymbol{J}}=\begin{bmatrix} J^T & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J^T & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J^T \end{bmatrix}_{(N+1)^2\times(N+1)^2} \tag{3.29}$$

dır.

Koşullar için matris formu da

$$\sum_{k=1}^{1}\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} a_{i,j}^{k}U^{(i,j)}(\alpha_k,\beta_k)=\lambda_k. \tag{3.30}$$

dır.

Buradan problemin matris çözümü ;

$$\boldsymbol{A}(x,y)\,\boldsymbol{T}(x)(\boldsymbol{J}^T)^2\,\boldsymbol{Q}(y)\,\overline{\boldsymbol{A}}+\boldsymbol{B}(x,y)\,\boldsymbol{T}(x)\,\boldsymbol{J}^T\,\boldsymbol{Q}(y)(\overline{\boldsymbol{J}})\,\overline{\boldsymbol{A}}+\boldsymbol{C}(x,y)\,\boldsymbol{T}(x)\,\boldsymbol{Q}(y)$$
$$(\overline{\boldsymbol{J}})^2\,\overline{\boldsymbol{A}}+\boldsymbol{D}(x,y)\,\boldsymbol{T}(x)\,\boldsymbol{J}^T\,\boldsymbol{Q}(y)\,\overline{\boldsymbol{A}}+\boldsymbol{E}(x,y)\,\boldsymbol{T}(x)\,\boldsymbol{Q}(y)(\overline{\boldsymbol{J}})\,\overline{\boldsymbol{A}}+\boldsymbol{F}(x,y)\,\boldsymbol{T}(x)\,\boldsymbol{Q}$$
$$(y)\,\overline{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{G} \tag{3.31}$$

veya

$$\boldsymbol{W}\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{G}. \tag{3.32}$$

şeklinde yazılabilir(Yüksel, 2011; Yüksel ve ark., 2015).

Benzer şekilde kollokasyon noktalarını yerine koyarak sınır koşulları da

$$\left(\sum_{k=1}^{t}\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} a_{i,j}^{k}\, \boldsymbol{T}\,(a_k)\,(\boldsymbol{J}^{T})^{i}\,\boldsymbol{Q}\,(\beta_k)\,(\bar{\boldsymbol{J}})^{j}\right)\bar{\boldsymbol{A}} = \lambda_k, \tag{3.33}$$

veya kısaca

$$\boldsymbol{V}\,\bar{\boldsymbol{A}} = \lambda_k \tag{3.34}$$

dır. Poisson denkleminin chebyshev seri çözümü sınır koşulları ile beraber;

$$\left[\tilde{\boldsymbol{W}};\tilde{\boldsymbol{G}}\right] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{V} & ; & \lambda_{\boldsymbol{k}} \\ \boldsymbol{W} & ; & \boldsymbol{G} \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak chebyshev katsayılar matrisi,

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \left(\tilde{\tilde{\boldsymbol{W}}}\right)^{-1}\tilde{\tilde{\boldsymbol{G}}}, \tag{3.36}$$

olarak bulunur. $\left[\tilde{\tilde{\boldsymbol{W}}};\tilde{\tilde{\boldsymbol{G}}}\right]$ matrisi Gauss eliminasyon metodu kullanılarak ve sıfır olan satırlar kaldırılarak oluşturulur. Çözüm için Gauss eliminasyon yöntemi kullanılmasının nedeni $\tilde{\tilde{\boldsymbol{W}}}$ matrisinin döndürülemez olmasından dolayıdır. Koşullar lineer cebir sistemine eklendiğinde bazı satırlar Chebyshev kollokasyon noktalarının simetrikliğinden dolayı aynı kalır. Bu terimler Gauss eliminasyon metodu tarafından çıkarılır.

3.2.2. Hata analizi ve çözümün doğruluğu

Metodun doğruluğunu kontrol etmek kolay olacaktır. Chebyshev serisi Laplace denkleminin yaklaşık çözümü olduğundan $U(x,y)$ fonksiyonunun türevlerini laplace denkleminde yerine koyarsak elde edilen denklem yaklaşık olarak sağlanmalıdır.

$$(x,y) = (x_q, y_q) \in \left\{0 \le x_q \le a, \quad 0 \le y_q \le b\right\} \qquad\qquad q = 0,1,2,...$$

için $E(x_q,y_q) = \left|D(x_q,y_q) - \lambda I(x_q,y_q)\right| \cong 0$ ve $E(x_q,y_q) \le 10^{-k_q}$ (k_q pozitif integral)'dir. Eğer $10^{-k_q} = 10^{-k}$ (k pozitif tamsayı) yazılırsa; bu durumda kesme sınırı olan N, tanımlanan 10^{-k}, dan daha küçük olan noktaların her birinde $E(x_q,y_q)$ farkına kadar arttırılır. Başka bir değişle, hata

$$E_N = \sum_{r=0}^{N}\sum_{s=0}^{N} a_{r,s}T_{r,s}(x,y), - g(x,y) - I(x,y) \tag{3.37}$$

fonksiyonu ile tahmin edilebilir.

N yeterince büyük seçilerek, $E_N(x,y) \to 0$ ise, bu durumda hata azalır.

3.2.3 Nümerik uygulama

$$U_{xx}(x,y)+U_{yy}(x,y)=0 \qquad \left(-\frac{K}{2\lambda} \le x \le \frac{K}{2\lambda}, \quad -\frac{K'}{2\lambda} \le y \le \frac{K'}{2\lambda}\right) \tag{3.38}$$

ve sınır şartları;

$$\begin{aligned} &U\left(x,-\frac{K'}{2\lambda}\right)=20^0C, \quad U\left(x,\frac{K'}{2\lambda}\right)=50^0C \qquad -\frac{K}{2\lambda} \le x \le \frac{K}{2\lambda} \\ &U\left(-\frac{K}{2\lambda},y\right)=U\left(\frac{K}{2\lambda},y\right)=0^0C \qquad\qquad -\frac{K'}{2\lambda} \le y \le \frac{K'}{2\lambda} \end{aligned} \tag{3.39}$$

olmak üzere $N=5,7,9$ için dikdörtgen bölge üzerinde Chebyshev seri çözümü (3.21) kullanılarak yaklaşık çözüm (3.31)den;

$$(\boldsymbol{T}(x_i)\,(\boldsymbol{J}^T)^2\,\boldsymbol{Q}(y_l)+\boldsymbol{T}(x_i)\,\boldsymbol{Q}(y_l)\,(\overline{\boldsymbol{J}})^2)\,\overline{\boldsymbol{A}}=0 \qquad i,l=0,\ldots,N. \tag{3.40}$$

elde edilir. Buradan da

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{J}^T)^2\,\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{T}\,\boldsymbol{Q}\,(\overline{\boldsymbol{J}})^2=\boldsymbol{W}, \qquad \boldsymbol{W}\overline{\boldsymbol{A}}=0 \tag{3.41}$$

bulunur. Koşullar için matris formu;

$$\begin{aligned} &U\left(x_i,-\frac{K'}{2\lambda}\right)=\boldsymbol{T}(x_i)\,\boldsymbol{Q}\left(-\frac{K'}{2\lambda}\right)\overline{\boldsymbol{A}}=20 \\ &U\left(x_i,\frac{K'}{2\lambda}\right)=\boldsymbol{T}(x_i)\,\boldsymbol{Q}\left(\frac{K'}{2\lambda}\right)\overline{\boldsymbol{A}}=50 \\ &U\left(\pm\frac{K}{2\lambda},y_l\right)=\boldsymbol{T}(\pm\frac{K}{2\lambda})\,\boldsymbol{Q}(y_l)\,\overline{\boldsymbol{A}}=0 \end{aligned} \tag{3.42}$$

şeklinde yazılabilir. Aynı zamanda koşulların matris denklemleri;

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{T}\,\boldsymbol{Q}\left(-\frac{K'}{2\lambda}\right)\overline{\boldsymbol{A}}=20 \quad ; \qquad \boldsymbol{K}_1\,\overline{\boldsymbol{A}}=20 \\ &\boldsymbol{T}\,\boldsymbol{Q}\left(\frac{K'}{2\lambda}\right)\overline{\boldsymbol{A}}=50 \quad ; \qquad \boldsymbol{K}_2\,\overline{\boldsymbol{A}}=50 \\ &\boldsymbol{T}\left(-\frac{K}{2\lambda}\right)\boldsymbol{Q}\,\overline{\boldsymbol{A}}=0 \quad ; \qquad \boldsymbol{K}_3\,\overline{\boldsymbol{A}}=0 \\ &\boldsymbol{T}\left(\frac{K}{2\lambda}\right)\boldsymbol{Q}\,\overline{\boldsymbol{A}}=0 \quad ; \qquad \boldsymbol{K}_4\,\overline{\boldsymbol{A}}=0 \end{aligned} \tag{3.43}$$

dır. Problemin çözümü;

$$\left[\tilde{\boldsymbol{W}};\tilde{\boldsymbol{G}}\right]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_1\,;\;20\\ \boldsymbol{K}_2\,;\,50\\ \boldsymbol{K}_3\,;\;\;0\\ \boldsymbol{K}_4\,;\;\;0\\ \boldsymbol{W}\;;\;\;0\end{bmatrix} \tag{3.44}$$

elde edilir. Çözüm fonksiyonu için $N=5$ alınırsa;

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1 & x & 2x^2-1 & 4x^3-3x & 8x^4-8x^2+1 & 16x^5-20x^3+5x\end{bmatrix}_{1\times 6} \tag{3.45}$$

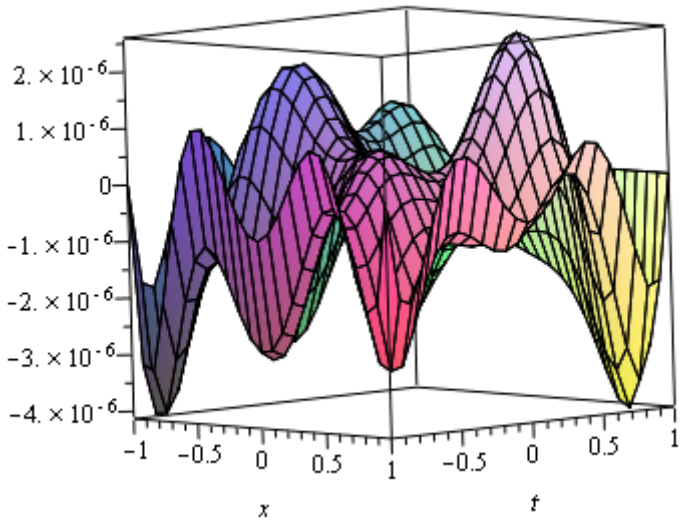
$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}T&0&0&0&0&0\\0&T&0&0&0&0\\0&0&T&0&0&0\\0&0&0&T&0&0\\0&0&0&0&T&0\\0&0&0&0&0&T\end{bmatrix}_{6\times 36} \qquad \boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&4&0&0&0&0\\3&0&6&0&0&0\\0&8&0&8&0&0\\5&0&10&0&10&0\end{bmatrix}_{6\times 6} \tag{3.46}$$

$$\overline{\boldsymbol{J}}=\begin{bmatrix}J^T&0&0&0&0&0\\0&J^T&0&0&0&0\\0&0&J^T&0&0&0\\0&0&0&J^T&0&0\\0&0&0&0&J^T&0\\0&0&0&0&0&J^T\end{bmatrix}_{36\times 36} \tag{3.47}$$

matrisleri elde edilir.

3.2.4. Hata fonksiyonu

Bu bölümde problemin herhangi bir N değeri için hata fonksiyonunun grafiği (şekil 3.1) çizilip tablolar oluşturularak çözümün tutarlılığından bahsedilecektir.



Şekil.3.2 $N = 7$ için hata grafiği

D bölgesinin sınırında farklı N değerleri için hata analizi

$$\boldsymbol{D}:\left(-\frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{2\lambda}} \le \boldsymbol{x} \le \frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{2\lambda}},\quad -\frac{\boldsymbol{K'}}{\boldsymbol{2\lambda}} \le \boldsymbol{y} \le \frac{\boldsymbol{K'}}{\boldsymbol{2\lambda}}\right)$$

x	Y	N=5 için	N=7 için	N=9 için
0	-1	$-3.6060\,10^{-5}$	$-8.3312\,10^{-7}$	$2.6254\,10^{-6}$
0	-0.8	$-1.2322\,10^{-4}$	$-2.6451\,10^{-7}$	$9.4651\,10^{-7}$
0	-0.6	$-6.1317\,10^{-5}$	$-2.4327\,10^{-7}$	$2.6016\,10^{-7}$
0	-0.4	$-2.2821\,10^{-4}$	$8.7531\,10^{-7}$	$3.7960\,10^{-8}$
0	-0.2	$1.0496\,10^{-4}$	$2.6179\,10^{-7}$	$1.3644\,10^{-11}$
0	0	$8.6320\,10^{-5}$	$-6.9187\,10^{-7}$	$1.5891\,10^{-9}$
0	0.2	$-2.3897\,10^{-5}$	$-8.7441\,10^{-7}$	$-6.1521\,10^{-10}$
0	0.4	$-1.9570\,10^{-4}$	$-4.1512\,10^{-7}$	$1.0216\,10^{-8}$
0	0.6	$-3.5767\,10^{-4}$	$-4.0661\,10^{-7}$	$3.6733\,10^{-8}$
0	0.8	$8.6320\,10^{-5}$	$-1.3148\,10^{-6}$	$-1.1373\,10^{-8}$
0	1	$-1.4303\,10^{-4}$	$-4.67\,10^{-10}$	$-3.2615\,10^{-7}$

D bölgesinin içinde farklı N değerleri için hata analizi $E(x_q, y_q)$ ve çözüm fonksiyonu $U(x, y)$ nin karşılaştırılması

$$D:\left(-\frac{K}{2\lambda} \le x \le \frac{K}{2\lambda},\quad -\frac{K'}{2\lambda} \le y \le \frac{K'}{2\lambda}\right) \text{ ve } N=5,7,9 \text{ için.}$$

		N=5		N=7		N=9	
x	y	$E(x_q, y_q)$	$U(x,y)$	$E(x_q, y_q)$	$U(x,y)$	$E(x_q, y_q)$	$U(x,y)$
1	1	$3.11\,10^{-10}$	1.036158127	$-4.0915\,10^{-6}$	0.691470714	$2.3581\,10^{-5}$	0.689713483
0.8	0.9	$1.4253\,10^{-4}$	1.072137387	$-3.7379\,10^{-6}$	0.7140524713	$-8.4821\,10^{-6}$	0.6950974656
0.6	0.7	$4.6924\,10^{-5}$	1.041873897	$-1.2256\,10^{-6}$	0.6865901992	$1.6715\,10^{-6}$	0.6413776780
0.5	0.5	$4.3718\,10^{-5}$	0.984446591	$1.9927\,10^{-6}$	0.639452308	$-3.8822\,10^{-7}$	0.573220525
0.4	0.3	$6.7833\,10^{-5}$	0.936327177	$1.800\,10^{-6}$	0.5979623591	$-5.3711\,10^{-8}$	0.5113068901
0	0	$8.6320\,10^{-5}$	0.893921420	$-6.9187\,10^{-7}$	0.554079932	$1.5891\,10^{-9}$	0.436125601
-0.1	-0.2	$1.5422\,10^{-4}$	0.861180565	$7.2095\,10^{-7}$	0.5217932859	$5.9365\,10^{-10}$	0.3868576492
-0.5	-0.3	$3.7975\,10^{-4}$	0.808920150	$1.5432\,10^{-6}$	0.4833937120	$1.7882\,10^{-7}$	0.3521935632
-0.8	-0.5	$1.9901\,10^{-4}$	0.733725310	$-1.2084\,10^{-6}$	0.4264064797	$7.5171\,10^{-7}$	0.2979922641
-1	-1	$7.37\,10^{-10}$	0.706674499	$-4.8871\,10^{-10}$	0.383490217	$5.7160\,10^{-6}$	0.241299157

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

4.1. Sonuçlar

Bu çalışmada kullandığımız yöntemlerden ilkinin en önemli avantajı sonucun eliptik fonksiyonlar cinsinden ifade edilmesidir. Çünkü bazı fizik ve mühendislik problemlerinde çözümün eliptik fonksiyonlar cinsinden ifade edilmesi uygulamada kolaylık sağlamaktadır. Öte yandan, dezavantajı ise istenilen bölgedeki Laplace (ayrıca Poisson) diferansiyel denkleminin (dahili) Dirichlet probleminin çözümü için gerekli olan Green fonksiyonu ile eliptik fonksiyonların integralleri ve türevlerinin bulunması zorluğudur. İkincisinin de avantajı analitik çözümünü bulamadığımız bölgelerde, çözüm fonksiyonunu en iyi yaklaşımla bulmaktır.

4.2. Öneriler

Bundan sonraki çalışmalarda, çeşitli bölgelerin dışı için de Laplace (aynı zamanda Poisson) diferansiyel denkleminin Dirichlet problemi eliptik fonksiyonlar cinsinden çözülerek analitik çözümü yapılabileceği gibi bazen bu yöntemle kurulan problemin matematik modelinin çözümünde karşılaşılabilecek eliptik fonksiyonların türevleri ve integrallerinin alınması zorluğundan hiç olmazsa yaklaşık çözümünü bulmak için Chebyshev Kolakasyon metodu yoluna gidilebilir. Böylece fizik ve mühendislikteki bu tip problemlerin çözümüne gerek analitik çözümle gerekse yaklaşık çözümle katkı sağlanabilir.

KAYNAKLAR

Aiyama, R. ve Akutagawa, K., 2002, The Dirichlet problem at infinity for harmonic map equations arising from constant mean curvature surfaces in the hyperbolic 3-space, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 14 (4), 399-428.

Babuska, I. ve Chleboun, J., 2003, Effects of uncertainties in the domain on the solution of Dirichlet boundary value problems, *Numerische Mathematik*, 93 (4), 583-610.

Baykus Savaşaneril, N. ve Delibaş, H., 2016, Analytic Solution for Two-Dimensional Heat Equation for an Ellipse Region, *New Trends in Mathematical Science*, 4 (1), 65-65.

Bowman, F., 1953, Introduction to Elliptic Functions, with Applications, *London*, English Universities, p.

Brovar, V. V., Kopeikina, S. Z. ve Pavlova, V. M., 2001, Solution of the Dirichlet and Stokes exterior boundary problems for the Earth's ellipsoid, *Journal of Geodesy*, 74 (11), 767-772.

Chen, Z.-Q., Williams, R. J. ve Zhao, Z., 1999, On the existence of positive solutions for semilinear elliptic equations with singular lower order coefficients and Dirichlet boundary conditions, *Mathematische Annalen*, 315 (4), 735-769.

Fox, L. ve Parker, I. B., 1968, Chebyshev polynomials in numerical analysis, *London, New York, etc.*, Oxford U.P., p.

Garabedian, P. R., 1964, Partial Differential Equations, John Wiley & Sons, p.

Hacioğlu, Z., Baykuş Savasaneril, N. ve Köse, H., 2015, <Solution of Dirichlet problem for a square region in terms of elliptic functions.pdf>, *New Trends in Mathematical Science*, 3 (4), 98-103.

Hildebrand, F. B., 1976, Advanced Calculus for Applications *ABD : PRENTICE - HALL, 1976.*, p.

Khoromskij, B. N. ve Schmidt, G., 1998, A fast interface solver for the biharmonic Dirichlet problem on polygonal domains, *Numerische Mathematik*, 78 (4), 577-596.

Kurt, N., Sezer, M. ve Çelik, A., 2004, Solution of Dirichlet problem for a rectangular region in terms of elliptic functions, *International Journal of Computer Mathematics*, 81 (11), 1417-1426.

Kurt, N. ve Sezer, M., 2006, Solution of Dirichlet problem for a triangle region in terms of elliptic functions, *Applied Mathematics and Computation*, 182 (1), 73-81.

Kurt, N., 2008, Solution of the two-dimensional heat equation for a square in terms of elliptic functions, *Journal of the Franklin Institute*, 345 (3), 303-317.

Lanzara, F., 1998, Numerical approximation of eigenvalues and of Green's operator for an elliptic boundary value problem, *CALCOLO*, 35 (2), 63-92.

Lumer, G. ve Schnaubelt, R., 2001, Time-dependent parabolic problems on non-cylindrical domains with inhomogeneous boundary conditions, *Journal of Evolution Equations*, 1 (3), 291-309.

Marshakov, A., Wiegmann, P. ve Zabrodin, A., 2002, Integrable structure of the dirichlet boundary problem in two dimensions, *Communications in Mathematical Physics*, 227 (1), 131-153.

Martinec, Z. ve Grafarend, W. E., 1997, Construction of Green's function to the external Dirichlet boundary-value problem for the Laplace equation on an ellipsoid of revolution, *Journal of Geodesy*, 71 (9), 562-570.

Mason, J. C. ve Handscomb, D. C., 2002, Chebyshev Polynomials, p. 360.

Moretti, G., 1968, Functions of a Complex Variable, p. 450.

Sidorov, Y. V., Fedoryuk, M. V. ve Shabunin., M. I., 1985, Lectures on the Theory of Functions of a Complex Variable, *Moscow*, Mir Publishers, p. 492.

Stillwell, J., 1989, Mathematics and Its History, *Verlag Newyork*, Springer, p.

Wang, W., 1997, Inversion formula of Dirichlet polynomials and the approximate functional equation of Dirichlet's L-functions, *Archiv der Mathematik*, 69 (4), 305-312.

Whittaker, E. T. ve Watson, G. N., 1927, A Course of Modern Analysis, Cambridge University Press, p.

Yüksel, G., 2011, Chebyshev polynomials solutions of second order linear partial differential equations, Ph.D. Thesis, *Muğla University*.

Yüksel, G., Işık, O. R. ve Sezer, M., 2015, Error analysis of the chebyshev collocation method for linear second order partial differential equations, *International Journal of Computer Mathematics*, 19.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Emel KURUL
Uyruğu	**:**	T.C
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Osmangazi 1991
Telefon	**:**	05367472439
Faks	**:**	
e-mail	**:**	emelkurul@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	**Bursa İpekçilik Anadolu İmam Hatip Lisesi Yıldırım, Bursa**	**2009**
Üniversite	:	**Selçuk Üniversitesi Selçuklu, Konya**	**2014**
Yüksek Lisans	:	**Selçuk Üniversitesi Selçuklu, Konya**	**2016**

YABANCI DİLLER: İngilizce (İntermediate)

YAYINLAR

Emel KURUL, Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL, " Chebyshev Collocation Method for the Two-Dimensional Heat Equation", Gazi University Journal of Science 2016, Araştırma Makalesi.(in review) (Yüksek lisans tezinden yapılmıştır.)

Emel KURUL, Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL, "Chebyshev collocation method for the two dimensional heat equation" 2nd International Conference on Pure & Applied Science, İSTANBUL, Haziran 2016, serbest bildiri, Uluslararası hakemli organizasyon. .(Yüksek lisans tezinden yapılmıştır.)

Emel KURUL, Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL, "Analytic Solution two Dimensional Laplace Equation with Dirichlet Boundary Conditions" 7th International Workshop on Differential Equations and Applications, BORNOVA, Temmuz 2015, serbest bildiri, Uluslararası hakemli organizasyon. .(Yüksek lisans tezinden yapılmıştır.)

Emel KURUL, Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL, "Solution of the two-dimensional heat equation for a rectangular plate", New Trends in Mathematical Sciences, NTMSCI3, No. 4, 76-82 (2015), Araştırma Makalesi.(Yüksek lisans tezinden yapılmıştır.)