



T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KARE BÖLGE İÇİN DIRICHTLET PROBLEMİNİN ELİPTİK FONKSİYONLAR VE BERNSTEİN POLİNOMLAR CİNSİNDEN ÇÖZÜMÜ

Zeynep HACİOĞLU

YÜKSEK LİSANS

Matematik Anabilim Dalı

Eylül-2016
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Zeynep HACİOĞLU

Tarih :

ÖZET

YÜKSEK LİSANS

KARE BÖLGE İÇİN DIRICHTLET PROBLEMİNİN ELİPTİK FONKSİYONLAR VE BERNSTEİN POLİNOMLAR CİNSİNDEN ÇÖZÜMÜ

Zeynep HACİOĞLU

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Hasan KÖSE
Danışman: Doç. Dr. Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL
2016, 30 Sayfa

Jüri
Yrd. Doç. Dr. Hasan KÖSE
Prof. Dr. Mehmet SEZER
Yrd. Doç. Dr. Kemal USLU

Kararlı hal fiziksel problemlerin geniş bir sınıfı belirli sınır koşulları sağlayan harmonik fonksiyonları bulmaya indirgenebilir. Laplace (ve Poisson) denklemi için Dirichlet problemi bahsedilen problemlerden biridir.

Bu çalışmada kare bölge için Dirichlet Problemine alternatif iki metot sunulmuştur. Bunlardan birincisi; D kare bölgeyi, uygun bir konform dönüşümle w-düzlemindeki birim çembere dönüştüren analitik fonksiyonu belirlemek ve bu dönüşüm fonksiyonu ile Green fonksiyonu arasında bağlantı kurarak, kare bölge için Dirichlet probleminin çözümünü eliptik fonksiyonlara dayandırmaktır. Bunlar yapılırken; Dirichlet problemi, eliptik fonksiyonlar, eliptik integraller, Green fonksiyonu, konform dönüşüm kavramlarından yararlanılmıştır. İkincisi ise, kare bölgede problem Bernstein serisine açılarak yaklaşık çözüm elde etmektir. Bunun için de problemin Bernstein yaklaşık çözüm fonksiyonu matris formunda yazılır ve problem Bernstein polinomuna dayandırılır.

Anahtar Kelimeler: Bernstein kollakasyon metot, Bernstein polinomları, Dirichlet problemi, Eliptik fonksiyon, Eliptik integral, Green fonksiyonu, Kollokasyon metodunun hata analizi.

ABSTRACT

MS THESIS

SOLUTION OF DIRICHLET PROBLEM FOR A SQUARE IN TERMS OF ELLIPTIC FUNCTIONS AND BERNSTEIN POLYNOMIALS

Zeynep HACİOĞLU

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE DEPARTMANT OF MATHEMATİCS

Advisor: Asst. Prof. Dr. Hasan KÖSE
Advisor: Assoc. Prof. Dr. Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL

2016, 30 Pages

Jury
Asst. Prof. Dr. Hasan KÖSE
Prof. Dr. Mehmet SEZER
Asst. Prof. Dr. Kemal USLU

A broad class of steady-state physical problems can be reduced to finding the harmonic functions that satisfy certain boundary conditions. The Dirichlet problem for the Laplace (and Poisson) equations is one of the these mentioned problems.

In this study presents two alternative methods for the square domain of the Dirichlet problem. The first one is to specify the analytic function which transforms the D square domain into unit circle on w plane with an approximate conformal mapping and establishing a connection between this mapping function and Green function, the solution of Dirichlet problem for square domain is based upon eliptic functions. To do this, it is made use of the basic consepts associated with dirichlet problem, elliptic function, elliptic integrals, conform mappings and green functions. Secondly, The problem in square domain is extended to Bernstein series and an approximate solution is attained. For this reason, the approximate solution function of the problem is written in matris form and the problem is based upon Bernstein polynomial.

Keywords: Bernstein collocation method, Bernstein polynomials, Dirichlet problem, Elliptic functions, Elliptic integral, Green function, error analysis of collocation method

ÖNSÖZ

Bu tezde 1. bölüm giriş bölümü, 2. bölüm temel kavramlar, 3. bölüm Dirichlet probleminin çözümü için yöntemler ve 4. bölüm sonuçlar ve öneriler olmak üzere toplam dört bölümden oluşmaktadır.

Bu çalışmada bana yardımcı olan sayın hocam Yar. Doç. Dr. Hasan KÖSE 'ye teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca konu seçimimde yol gösterip tavsiyelerini esirgemeyen kıymetli hocam ve eş danışmanım Doç. Dr. Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL 'e de en içten teşekkürlerimi sunarım. Hayatım boyunca benden maddi ve manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen annemi ve babamı hürmetle anıyorum ve sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Zeynep HACİOĞLU
KONYA-2016

İÇİNDEKİLER

ÖZET iv

ABSTRACT v

ÖNSÖZ vi

İÇİNDEKİLER vii

SİMGELER VE KISALTMALAR ix

1. GİRİŞ 1

1.1. Amaç ve Kapsam 1
1.2. Kaynak Araştırması 1

2. TEMEL BAĞINTILAR 4

2.1. Diferansiyel Denklemler 4
2.1.1. Newton ve diferansiyel denklem 4
2.1.2. Leibnitz ve diferansiyel denklem 4
2.1.3. Euler ve diferansiyel denklem 5
2.2. Eliptik Fonksiyonlar 7
2.2.1. Jacobi eliptik fonksiyonlar 7
2.2.2. Diğer jacobi eliptik fonksiyonları 8
2.2.3. Jakobiyen fonksiyonların kareleri arasındaki ilişki 9
2.2.4. Jakobi fonksiyonların türev ve integrali 9
2.2.5. Jakobi fonksiyonların toplam formülleri 10
2.2.6. Jacobi eliptik fonksiyonların periyotları 11
2.3. Eliptik İntegraller 11
2.3.1. Eliptik integrallerin kanonik formu 12
2.3.2. Tam eliptik integraller 12
2.3.3. Eliptik integraller için jacobi şekilleri 13
2.4. Green Fonksiyonu 13
2.5. Bernstein Polinomu 14

3. DIRICHLET PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN YÖNTEMLER 16

3.1. Dirichlet Probleminin Kare Bölge İçin Eliptik Fonksiyonlar Cinsinden Çözümü 16
3.1.1. Kare bölgenin birim çembere konform dönüşümü ve green fonksiyonu 16
3.1.2. Problemin çözümü 18
3.2. Problemin Bernstein Seri Metodu ile Çözümü 18
3.2.1. Problemin matris denklemi 19
3.2.2. Hata analizi ve çözümün doğruluğu 21
3.2.3. Nümerik örnek 22
3.2.4. Hata fonksiyonu 23

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 26

4.1. Sonuçlar 26
4.2. Öneriler 26

KAYNAKLAR 27

ÖZGEÇMİŞ 29

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

am u	: u nun genliği
mod u	: u nun modülü
$K(k)$	: Birinci tür tam eliptik integral
$E(k)$	: İkinci tür tam eliptik integral
$\prod(n,k)$	: Üçüncü tür tam eliptik integral
$F_1(k,x)$	: Birinci tür eliptik integraller için Jakobinin sekli
$E_1(k,x)$	: İkinci tür eliptik integraller için Jakobinin sekli
$\prod_1(k,n,x)$	: Üçüncü tür eliptik integraller için Jakobinin sekli
$\mathrm{Im}\, z$	: z kompleks sayısının imajiner kısmı
$\mathrm{Re}\, z$	: z kompleks sayısının reel kısmı
$B_{i,n}(x)$	: n-inci dereceden Bernstein polinomu
$\binom{i}{k}$	: $\frac{i!}{k!(i-k)!}$

1. GİRİŞ

1.1. Amaç ve Kapsam

Belirli bir bağlantılı bölgede harmonik olan ve bu bölgenin sınırları üzerinde önceden verilen koşulları sağlayan bir fonksiyon bulma problemi, kısmi diferansiyel denklemlerin sınır değer problemlerinin en eskilerinden ve en önemlilerinden biridir. Eğer fonksiyonun kendisinin sınır boyunca değerleri önceden verilirse probleme Dirichlet problemi denir. Eliptik tip kısmi diferansiyel denklemler için (iç) Dirichlet problemi, bir D bölgesinin sınırında bilinen U_0 değerlerini alan ve D bölgesi içinde denklemi sağlayan bir fonksiyon bulmaktır. Bu tip problemlerin reel uzayda, basit bağlantılı sınırlı bir D bölgesindeki Green fonksiyonu ve çözümü iyi bilinmektedir (Garabedian, 1964; Hildebrand, 1976). Ayrıca kompleks düzlemde bazı bölgeler için Green fonksiyonları konform dönüşümler yardımıyla bulunabilmekte ve çözümler bunlara dayalı olarak verilmektedir (A. G. Sveshnikov, 1982; Vladimirov, 1984).

Bu çalışmada kare bölge için Dirichlet problemine alternatif iki metot sunulmuştur. Bunlardan birincisi; D kare bölgeyi, uygun bir konform dönüşümle w-düzlemindeki birim çembere dönüştüren analitik fonksiyonu belirlemek ve bu dönüşüm fonksiyonu ile Green fonksiyonu arasında bağlantı kurarak, kare bölge için Dirichlet probleminin çözümünü eliptik fonksiyonlara dayandırmaktır. Bunlar yapılırken; Dirichlet problemi, eliptik fonksiyonlar, eliptik integraller, Green fonksiyonu, konform dönüşüm kavramlarından yararlanılmıştır. İkincisi ise, kare bölgede problem Bernstein serisine açılarak yaklaşık çözüm elde etmektir. Bunun için de problemin Bernstein yaklaşık çözüm fonksiyonu matris formunda yazılır ve problem Bersntein polinomuna dayandırılır.

Kullanılan çözüm yöntemlerine tutarlılığını göstermek amacıyla iki uygulama verilmiştir.

1.2. Kaynak Araştırması

Dönel bir elipsoid üzerine dağılmış olarak verilen Laplace denklemi için Dış Dirichlet sınır-değer probleminin Green fonksiyonu kapalı bir şekilde Martinec ve Grafarend (1997) tarafından inşa edilmiştir. İncelenen sınır-değer probleminin elipsoidal Poisson çekirdeği çözümün sınırdaki eliptikliğini tanımlar ve problem analitik olarak eliptik çekirdeğin tekil noktasını tanımlayan sonlu fonksiyonlar toplamıdır. Tekil

noktaların komşuluğundaki elipsoidal Poisson çekirdeğinin tekillik derecesi ile orijinal Küresel Poisson çekirdeğinin tekillik derecesinin aynı derece olduğu gösterilmiştir.

Lurner ve Schnaubelt (2001) local operatörler için homojen olmayan sınır koşullarıyla Cauchy problemi ve Dirichlet problemi arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Sonucunda silindirik olmayan bölgeler üzerindeki otonom olmayan parabolik problemlere uygulamışlardır.

Brovar, Kopeikina ve Pavlova (2001) dairesel türevle iyi bilinen sınır koşullarının doğruluğu 5×10^{-5}'e kadar arttırılmıştır(bu mutlak terimin küçük bir değişikliğini gösterir). *Dini* metodu kullanılarak değiştirilen şartlar elipsoid yüzeyinin dışında harmonik olan ikinci bir fonksiyon Dirichlet problemi ile ilgili bir duruma geçmeyi mümkün kılar. Dirichlet probleminin çözümü için kullanılan bu yeni metod küçük çekirdekli integral denklemi elde edilmesini sağlar. Böylece integral denkleminin çözümleri iterasyon adımları kullanılarak yada kullanılmadan kolaylıkla elde edilebilir. Bu integral denkleminin çözümü dağınık potansiyelini ve elipsoidin dışında karışık yerçekimi anomalisini belirler.

Khoromskji ve Schmidt (1998) konveks(dışbükey) poligonal(çokgen,köşeli) alanlardaki biharmonik Dirichlet probleminin sınırlarının küçültmek için etkili bir ayrık hesaplama yapısı önerilmiş ve analiz edilmiştir. Burada biharmonik Dirichlet problemi, harmonik Dirichlet problemlerine ve işaretli uzaylarının alt uzayları arasında hareket eden Poincare-Steklov operatörü ile bir denkleme indirgenebilir. Sonuç olarak, küçültülmüş konveks poligonal bölgelerde biharmonik Dirichlet probleminin sınırları için asimptotik en yüksek sıralı bir arayüz çözücü elde edilmiştir.

Aiyama ve Akutagawa (2002) belirli tanımlanmamış metrik bir *m*- uzayından açık *n*- küre ünitesine düzgün harmonik uzaylar için sonsuzdaki Dirichlet probleminin varlığı, tekliği ve bazı özelliklerini çalışmışlardır. $m=n=2$ olduğunda bu Dirichlet probleminin harmonik çözümleri hiperbolik 3-boyutlu uzayda tam sabit ortalama eğrilik anlamına gelir.

Lanzara (1998), Dirichlet probleminin sınırlı ve ölçülebilir katsayılı ikinci dereceden lineer eliptik eşitliği ile ilgilenmiştir. Ara operatörler metodu vasıtasıyla Dirichlet probleminin Green fonksiyonunu hesaplamıştır.

Babuska ve Chelobun (2003), çalışmalarında Lipschitz sınırlı bölgelerin monoton biçimde genişleyen ya da büzülen bir limitini Lipschitz-olmayan bir bölge

olacak şekilde tanımlarlar. Tekil bir biçimde çözülebilen Dirichlet sınır değer problemi Lipschitz alanların her biri üzerinde tanımlanır ve bu çözümlerin limiti araştırılır. Limit fonksiyonu, sınırlı bölgeler üzerinde bir Dirichlet sınır değer problemini de çözer. Fakat eğer sınır bölge Dirichlet sınır değer problemine göre kararsızsa problem bölgelerin sırasına bağlı olabilir. Bu makale birisi Lipschitz ve diğeri kararsız olabilen iki kapalı bölge üzerinde Dirichlet sınır değer probleminin çözümleri arasındaki farkın tahmin edilmesini de kapsar. genel bölgelerin yanı sıra yıldız şekiller için tahminler üretilmiştir. Onların nümerik değerlendirmelerinin mümkün olduğunu ve farklı şekilde yapılabileceğini söylemişlerdir.

Marshakov, Wiegmann ve Zabrodin (2002) tarafından düz basit bağlantılı bölgeler için iki boyutlu Dirichlet sınır değer problemi çözümünün problemin verisinin değişikliklere nasıl bağlı olduğu çalışılmıştır. Bölgenin defermasyonu altında Dirichlet Green fonksiyonunun değişkeni için *Hadamard* formülü integrallenebilir bir yapı göstermiştir. Değişken akımların sonsuz setine karşılık gelen bağımsız değişkenler bölgenin harmonik anları ile tanımlanmıştır. Dirichlet sınır probleminin çözümü, dağılımsız *Toda* dizisinin tau-fonksiyonları aracılığıyla ifade edilmiştir. Ayrıca onlar boşluklu uzayda Dirichlet probleminin dejenere bir durumunu da araştırmışlardır. Bu durumda, tau-fonksiyonunun Hermityen tek matris modelinin düzlemsel geniş N limitinin parçalı fonksiyonu ile aynı olduğunu göstermişlerdir.

Kurt (2003) $-K < x < K$, $0 < y < 2K$ dikdörtgen bölgesinde Laplace denklemi için Dirichlet probleminin çözümünü Green fonksiyonlarına ve eliptik fonksiyonlara bağlı olarak elde etmiştir.

Kurt, Sezer (2006) üçgen bölgede Dirichlet probleminin çözümünü eliptik fonksiyonlara bağlı olarak elde etmiştir.

Kurt (2008) kare bir bölgede iki boyutlu ısı denkleminin çözümü için alternatif metot vermişlerdir.

Kurul, Baykuş Savaşaneril (2015) dikdörtgen biçimindeki bir levha için iki boyutlu ısı denkleminin çözümüne yeni bir metot vermişlerdir.

Baykuş Savaşaneril, Delibaş (2016) elips bir bölgede iki boyutlu ısı denkleminin çözümü için alternatif metot vermiştir.

2. TEMEL BAĞINTILAR

2.1. Diferansiyel Denklemler

Diferansiyel denklemler ilk olarak 17. yüzyılın ikinci yarısında İngiliz matematikçi Newton (1642-1727) ve Alman matematikçi Leibnitz (1641-1716) tarafından kullanılmıştır. Daha sonralarda ise İsviçreli matematikçilerden Bernouilli kardeşler, 18.yüzyılda Euler, Clairaut, Lagrance, D'Alembert, Charbit, Monge, Laplace ile 19.yüzyılda Chrystal, Cauchy, Jacobi, Ampere, Darboux, Picart, Fusch ve F.G. Frobenius, diferansiyel denklemler teorisini günümüzdeki seviyeye getirmişlerdir.

Diferansiyel denklemler teorisinde varlık teoremi belli tip diferansiyel denklemlerin belli şartlar altında bir çözümlerinin var olmasıdır. Varlık teoremi ilk olarak 1820 ile 1830 yılları arasında, Fransız matematikçi A.L. Cauchy tarafından bulunmuş ve daha sonra diğer matematikçiler tarafından geliştirilmiştir.

Şimdi bazı önemli matematikçilerin yapmış olduğu diferansiyel denklemler tanımlarını verelim.

2.1.1. Newton ve diferansiyel denklem

İngiliz matematikçi Newton (1642-1727), ilk çalışmalarına 1655 yılında başlamıştır ve 1671 yılında yayınladığı makalesinde diferansiyel denklemleri 3 sınıfa ayırmıştır. Bunlar;

i) Birinci Sınıf Diferansiyel Denklemler

Bu sınıftaki diferansiyel denklemler, dy/dx tipinde olanlardır. Burada x, y'nin bir fonksiyonudur veya bunun tersi de söz konusudur.

ii) İkinci Sınıf Diferansiyel Denklemler

Bu sınıftaki diferansiyel denklemler, $(dy/dx) = f(x,y)$ tipinde olanlardır.

iii) Üçüncü Sınıf Diferansiyel Denklemler

Bu sınıftaki diferansiyel denklemler ise, kısmi diferansiyel denklemler tipinde olanlardır.

2.1.2. Leibnitz ve diferansiyel denklem

Alman filozof ve matematikçi Leibnitz (1646-1716), ilk çalışmalarını 1673 yılında başlamıştır. Bu konudaki çalışmalarını, 1684 ile 1686 yılları arasında yazdığı *Aklaerudilorum* adında bir eseri yayınlamıştır.

Leibnitz'in bu eseri o zamanlarda Almanya'da pek ilgi görmemesine rağmen İsviçre'de, Jaques ve Jean Bernouilli kardeşler tarafından incelenmiştir. Daha sonra 1690 yılında, Jaques Bernouilli bu konu hakkında önemli bir eser yayınlamıştır. Yine

1690'lı yıllarda; Leibnitz ve Bernouilli kardeşler diferansiyel denklemler üzerinde önemli araştırmalar yapmışlardır.

Leibnitz 1691 yılında; $f(x,y)=f(x.g(y))$ olarak tanımlanan diferansiyel denklemini çözmüştür.

2.1.3. Euler ve diferansiyel denklem

Alman matematikçi Leonard Euler (1707-1783), 1728 yılında, diferansiyel denklemler üzerinde kapsamlı çalışmalar yapmıştır. Diferansiyel denklemlerin derecesini düşürme yöntemlerini geliştirmiş ve seri çözümleri :

$$\left(1-x^4\right)^{-1/2} dx + \left(1-y^4\right)^{1/2} dy = 0$$

şeklinde olan Abel'in teoreminin cebirsel çözümünü bulmuştur. Bu çözüm, eliptik fonksiyonlarda önemli rol oynamıştır.

Euler diferansiyel denklem tanımını a_i 'ler sabit olmak üzere,

$$a_0 x^n y^n + a_1 x^{n-1} y^{n-1} + \ldots + a_{n-1} xy + a_n = q(x)$$

olarak tanımlamıştır. Bu denklem, y' ye ve türevlerine göre lineerdir, fakat katsayılar değişkendir.

En genel anlamıyla diferansiyel denklemleri şu şekilde tanımlayabiliriz.

Tanım (Diferansiyel denklem):

Bir veya daha fazla bağımlı değişken, bir veya daha fazla bağımsız değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre türevini içeren denklemlere diferansiyel denklem denir. Adi diferansiyel denklem ve Kısmi diferansiyel denklem olmak üzere ikiye ayrılır.

i) Adi Diferansiyel Denklem

Bir diferansiyel denklemde bağımsız değişken bir tane ise bu diferansiyel denkleme adi diferansiyel denklem denir.

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_2(x)\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + y = 0$$

ya da

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

şeklinde ifade edilir.

ii) Kısmi Diferansiyel Denklemler

Bir veya daha çok bağımlı değişken, birden fazla bağımsız değişken ve bunların türevlerinden oluşan diferansiyel denkleme kısmi diferansiyel denklem denir.

z bağımlı, x ve y bağımsız değişken olmak üzere

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, ...) = 0$$

şeklinde tanımlanır.

Kısmi türevli diferansiyel denklemler, katsayıların durumlarına ve zamana ait türevin varolmasına göre üç sınıfa ayrılır.

1. Hiperbolik diferansiyel denklemler
2. Parabolik diferansiyel denklemler
3. Eliptik diferansiyel denklemler

1. Hiperbolik Diferansiyel Denklemler

Hiperbolik denklemler sınıfının temsilci denklemi dalga denklemidir.

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

denklemine 1- boyutlu homojen dalga denklemi denir. Denklemde x yeri, t zamanı göstermektedir. $c > 0$ olup sabittir. Hiperbolik denklemler genellikle titreşim problemlerinde ya da yoğunluk, basınç ve hızdaki süreksizlik problemlerinde karşımıza çıkar.

2. Parabolik Diferansiyel Denklemler

Parabolik denklemlerin en basit denklem sınıfı ısı denklemidir.

$u_t - ku_{xx} = 0$ denklemine 1- boyutlu homojen ısı denklemi denir. denklemdeki k pozitif sabit fonksiyondur. Parabolik denklemler bir çubuktaki ısı iletkenlik ve sıcaklık dağılımı problemlerinde karşımıza çıkar.

3. Eliptik Diferansiyel Denklemler

Eliptik tipten kısmi diferansiyel denklemlerin temsilci denklemleri Laplace ve Poisson denklemleridir. u, x ve y değişkenlerinin bir fonksiyonu olmak üzere

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Homojen denklemine 2- boyutlu Laplace denklemi denir.

$$u_{xx} + u_{yy} = F(x, y)$$

Homojen olmayan denklemine 2-boyutlu Poisson denklemi denir.

Eliptik kısmi diferansiyel denklemler genellikle dengeli ve kararlı hal problemleri ve bunların çözümüyle karşımıza çıkar.

2.2. Eliptik Fonksiyonlar

Eliptik fonksiyonlar ilk, eliptik integrallerin ters dönüşüm probleminden ortaya çıkmıştır. Eliptik integrallerle J.Bernoulli, elastik konusundaki çalışmalarında karşılaşmıştır. Bunun dışında Maclauren, Fagnano, Legende gibi matematikçiler de elips yay parçasını hesaplarken bu integrallerle karşılaşmışlardır. Eliptik integrallerin tersinin alınması düşüncesinden yola çıkarak Abel, Jacobi ve Gauss eliptik fonksiyonların bugünkü anlamdaki tanımını yapmışlardır.

İlk çalışmalar Gauss tarafından yapılmış olmasına karşın 1820' lerde Abel ve Jacobi tarafından yapılan çalışmalarda eliptik fonksiyonların bugünkü isimleri verilmiştir.

Jacobi kutup noktaları dışında analitik, iki tane esas periyodu olan ve bu sayılar arasındaki oranın gerçel bir sayı belirten bir fonksiyonun var olup olmadığını araştırmıştır. Eğer böyle bir fonksiyon varsa var olan bu fonksiyonun sabit fonksiyondan başka bir fonksiyon olamayacağını görmüştür. Eğer bu iki esas periyod arasındaki oran bir gerçel sayı belirtmiyorsa bu fonksiyonların yeni bir fonksiyon sınıfı oluşturduğunu görmüştür. Bu fonksiyon sınıfını da eliptik fonksiyonlar olarak adlandırmıştır.

2.2.1. Jacobi eliptik fonksiyonlar

Belli bir k sabiti için

$$u = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

integrali yardımıyla elde edilen snu fonksiyonuna *Jacobi eliptik fonksiyonu* denir. Bu integralin tersi alındığında $x = snu$ ve $sn0 = 0$ olduğu görülür. $x = snu$ fonksiyonunun

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \text{ ve } K' = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}$$

olarak tanımlanan gerçel sayılarla bağıntılı iki periyodu vardır.

cnu ve dnu fonksiyonları da

$$sn^2u + cn^2u = 1$$
$$k^2sn^2u + dn^2u = 1$$

özdeşlikleri yardımıyla tanımlanabilir.

Bu tanımlardan yola çıkarak $cn0=1$ ve $dn0=1$ sonuçları elde edilir. Tüm Jacobi eliptik fonksiyonu bir k parametresine bağlıdır. Bu k parametresine *Jacobi eliptik fonksiyonunun modülü* denir. Ve

$$k^2+k'^2=1$$

eşitliği geçerlidir. Bu eşitlikte tanımlanan k' parametresine de k'nın *tümler modül* denir.

Özel olarak belirli bir modül vurgulanmak istenildiğinde, Jacobi eliptik fonksiyonları

$$sn(u,k),\ cn(u,k)\ ve\ dn(u,k)$$

şeklinde ifade edilirler. Eski literatürde m yerine k^2 kullanılmış ve modül olarak ifade edilmiştir. $m=k^2$ notasyonu kullanıldığında Jacobi eliptik fonksiyonları

$$sn(u|m),\ cn(u|m)\ ve\ dn(u|m)$$

şeklinde ifade edilirler.

Özel olarak k=0 olması halinde $k^2sn^2u+dn^2u=1$ $\mathrm{dn}u=1$ olurken, snu ve cnu Jacobi eliptik fonksiyonları sırasıyla $\sin u$ ve $\cos u$ trigonometrik fonksiyonları olur. Eğer k =1 olursa cnu ve dnu Jacobi eliptik fonksiyonları sech u hiperbolik fonksiyonu, $\mathrm{sn}u$ fonksiyonu ise tanh u hiperbolik fonksiyonu olur.

2.2.1.1. Teorem

snu fonksiyonu tek, dnu ve cnu fonksiyonları ise çift Jacobi eliptik fonksiyonlardır(Whittaker ve Watson, 1927).

2.2.2. Diğer jacobi eliptik fonksiyonları

Diğer çift periyodik fonksiyonları sinüs genliğine dayanarak tanımlanabilirler. Bunlardan ikisi şu şekildedir. Kosinüs- genliği , cnu'yu

$sn^2u+cn^2u=1$ eşitliğinden

$cnu=\sqrt{1-sn^2u}$ şeklinde

ve fark- genliği de , dnu'yu;

$k^2sn^2u+dn^2u=1$ eşitliğinden

$dnu=\sqrt{1-k^2sn^2u}$

olarak elde ederiz.

Her iki fonksiyonda da, $u=0$ da keyfi olarak 1 değeri vererek diğer değerler hesaplanabilir. snu, cnu ve dnu'nun sıklıkla ortaya çıkan diğer kombinasyonları aşağıdaki gibidir.

$$nsu = \frac{1}{\mathrm{sn}u}; \quad tnu = scu = \frac{snu}{cnu}; \quad sdu = \frac{snu}{dnu};$$
$$ncu = \frac{1}{\mathrm{cn}u}; \quad \frac{1}{\mathrm{tn}u} = csu = \frac{cnu}{snu}; \quad cdu = \frac{cnu}{dnu};$$
$$ndu = \frac{1}{\mathrm{dn}u}; \quad dsu = \frac{dnu}{snu}; \quad dcu = \frac{dnu}{cnu};$$

verilen fonksiyonlar kolaylıkla snu, cnu ve dnu'nun özellikleri ile bağdaştırılabilir. Pratik bir noktadan bakılırsa, kanıtlanacak olan teorem ve $0 \le k^2 \le 1$ ile $0 \le u \le K$ aralığında snu, cnu ve dnu'nun değerlerini göstermek üzere hazırlanacak olan tablo, eliptik fonksiyonlara ilişkin herhangi bir problemin nümerik çözümünü bulmada yardımcı olur.

2.2.3. Jakobiyen fonksiyonların kareleri arasındaki ilişki

Jakobiyen fonksiyonları arasında sinüs ve kosinüs trigonometrik fonksiyonları arasındaki ilişkiye benzer ilişki vardır:

$$sn^2u + cn^2u = 1$$
$$dn^2u + k^2 sn^2u = 1$$

Herhangi iki jakobiyen fonksiyonun karesi arasında da benzeri ilişkiler oluşturulabilir. Örneğin diğer jakobi eliptik fonksiyonlar arasındaki eşitlikler kullanılarak

$$ns^2u - cs^2u = 1 \qquad ns^2u - ds^2u = k^2$$
$$nc^2u - sc^2u = 1 \qquad dc^2u - k'^2\, nc^2u = k^2$$
$$nd^2u - k^2 sd^2u = 1 \qquad k^2 cd^2u + k'^2\, nd^2u = 1$$

eşitlikleri bulunur. Bu eşitlikler diğer Jakobiyen fonksiyonların değerlendirilmesini snu, cnu ve dnu'e indirgerler.

2.2.4. Jakobi fonksiyonların türev ve integrali

Önceki başlıklar altında elde ettiğimiz sonuçlardan;

2.2.4.1. Teorem

snu, cnu, dnu ve tnu Jacobi eliptik fonksiyonlarının türevleri

$$\frac{d}{du}(snu)=(cnu)(dnu)$$
$$\frac{d}{du}(cnu)=-(snu)(dnu)$$
$$\frac{d}{du}(dnu)=-k^2(snu)(cnu)$$
$$\frac{d}{du}(tnu)=\frac{dnu}{cn^2u}$$

şeklindedir.

Jakobiyen fonksiyonların belirsiz integralleri , logaritma ve ters trigonometrik fonksiyonlar yoluyla ifade edilebilirler. snu, cnu ve dnu için belirsiz integraller aşağıdaki gibidir.

$$\int snu\,du=\frac{1}{k}\log(dnu-kcnu)$$
$$\int cnu\,du=\frac{1}{k}\arccos snu$$
$$\int dnu\,du=\arcsin snu$$

2.2.5. Jakobi fonksiyonların toplam formülleri

$sn(u_1+u_2)$ jakobi fonksiyonunu , sadece u_1 ve u_2'nin jakobiyen fonksiyonları cinsinden ifade edebiliriz, fakat eliptik fonksiyon cinsinden eşitliği bulmak trigonometrik fonksiyonlar kadar basit değildir.

$$sn(u_1+u_2)=\frac{snu_1cnu_2dnu_2+snu_2cnu_1dnu_1}{1-k^2sn^2u_1sn^2u_2}$$

Benzer şekilde kosinüs-genliği ve fark-genliği de yazabiliriz.

$$cn(u_1+u_2)=\frac{cnu_1cnu_2-snu_1snu_2dnu_1dnu_2}{1-k^2sn^2u_1sn^2u_2}$$

$$dn(u_1+u_2)=\frac{dnu_1dnu_2-k^2snu_1snu_2cnu_1cnu_2}{1-k^2sn^2u_1sn^2u_2}$$

Yukarıda verilen eşitliklerde $u_1=u=u_2$ alarak çift argüman formülleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$sn\,2u=\frac{2snu\,cnu\,dnu}{1-k^2sn^4u}$$
$$cn\,2u=\frac{cn^2u-sn^2u\,dn^2u}{1-k^2sn^4u}$$
$$dn\,2u=\frac{dn^2u-k^2sn^2u\,cn^2u}{1-k^2sn^4u}$$

Karmaşık sayılar için toplam ve fark formüllerini verecek olursak;

$$sn(u_1 \pm iu_2, k) = \frac{sn(u_1,k)dn(u_2,k')\pm i\,cn(u_1,k)dn(u_1,k)sn(u_2,k')cn(u_2,k')}{1-sn^2(u_2,k')dn^2(u_1,k)}$$

$$cn(u_1 \pm iu_2, k) = \frac{cn(u_1,k)cn(u_2,k')\pm i\,sn(u_1,k)dn(u_1,k)sn(u_2,k')dn(u_2,k')}{1-sn^2(u_2,k')dn^2(u_1,k)}$$

$$dn(u_1 \pm iu_2, k) = \frac{dn(u_1,k)cn(u_2,k')dn(u_2,k')-i\,k^2 sn(u_1,k)cn(u_1,k)sn(u_2,k')}{1-sn^2(u_2,k')dn^2(u_1,k)}$$

şeklindedir.

Eliptik fonksiyonların kendi aralarındaki bağıntılar da aşağıdaki gibidir;

$$sn^2 u + cn^2 u = 1 \qquad -1 \le sn\,u \le 1$$
$$k^2 sn^2 u + dn^2 u = 1 \qquad -1 \le cn\,u \le 1$$
$$dn^2 u - k^2 cn^2 u = k'^2 \qquad k' \le dn\,u \le 1$$
$$k'^2 sn^2 u + cn^2 u = dn^2 u \qquad -\infty \le tn\,u \le \infty$$

Eliptik fonksiyonların bazı özel değerleri şu şekildedir :

$$sn(-u) = -snu \quad sn0 = 0 \quad snK = 1 \quad sn2K = 0$$
$$cn(-u) = cnu \quad cn0 = 0 \quad cnK = 0 \quad cn2K = -1$$
$$dn(-u) = dnu \quad dn0 = 1 \quad dnK = k' \quad dn2K = 1$$
$$tn(-u) = -tnu \quad tn0 = 1 \quad tnK = \infty$$

2.2.6. Jacobi eliptik fonksiyonların periyotları

snu ve *cnu* fonksiyonlarının her ikisinin periyodu 4K, *dnu* fonksiyonun periyodu 2K dır(Whittaker ve Watson, 1927).

2.3. Eliptik İntegraller

Eliptik integraller modern tanımıyla $p(x)$, derecesi 3 yada 4 olan, katlı kökü olmayan bir polinom ve $r(x,y)$ iki değişkenli rasyonel fonksiyon olmak üzere

$$\int r\left(x, \sqrt{p(x)}\right) dx$$

şeklinde tanımlanan integrallerdir.

Genel olarak eliptik integraller elementer (cebirsel, trigonometrik, ters trigonometrik, logaritmik ve üstel fonksiyon) fonksiyonlar cinsinden ifade edilemezler. İstisna olarak $p(x)$ polinomunun katlı kökünün olması ya da $r(x,y)$ fonksiyonunun y değişkeninin tek kuvvetlerini içerdiği halleridir. Bu durumda eliptik integralleri birinci, ikinci, üçüncü tür eliptik integral olarak üç kanonik formda ifade edebiliriz.

2.3.1. Eliptik integrallerin kanonik formu

Birinci Tip Eliptik İntegral

$$u = F(k,\phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \qquad 0 < k < 1$$

şeklinde tanımlanır. Bu integrale *birinci tip eliptik integralin Legendre şekli* de denir. Burada ϕ ' ye $F(k,\phi)$ ' nin veya u ' nun *genliği* denir ve $\phi = \mathrm{am}\, u$ şeklinde ifade edilir, k ya da u ' nun *modülü* denir ve $k = \mathrm{mod}\, u$ olarak ifade edilir.

İkinci Tip Eliptik İntegral

$$E(k,\phi) = \int_0^{\phi} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\, d\theta \qquad 0 < k < 1$$

şeklinde tanımlanır. Bu integrale *ikinci tip eliptik integralin Legendre şekli* de denir.

Üçüncü Tip Eliptik İntegral

$$\prod(k,n,\phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{(1+n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \qquad 0 < k < 1$$

şeklinde tanımlanır. Bu integrale *üçüncü tip eliptik integralin Legendre şekli* de denir. Burada $n \neq 0$ 'dır. Çünkü $n = 0$ olduğu durumda Birinci tip eliptik integrali elde ederiz. Bu üç tip eliptik integraller bazı kaynaklarda tam olmayan eliptik integraller olarak da karşımıza çıkmaktadır.

2.3.2. Tam eliptik integraller

Yukarıda tanımını verdiğimiz birinci, ikinci, üçüncü tip eliptik integrallerde $\phi = \frac{\pi}{2}$ aldığımız durumda bu integraller *tam eliptik integral* adını alır. Bu durumda tam eliptik integralleri şu şekilde gösterebiliriz:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \int_0^{K} du = F\left(\frac{\pi}{2},k\right) \equiv K(k) \equiv K$$

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\, d\theta = \int_0^{K} dn^2 u\, du = E\left(\frac{\pi}{2},k\right) \equiv E(k) \equiv E$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1+n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \int_0^{K} \frac{du}{1-n\,\mathrm{sn}^2 u} = \prod\left(\frac{\pi}{2},n,k\right) \equiv \prod(n,k)$$

Bunlara ilaveten

$K'(k) \equiv K(k') \equiv K'$

$E'(k) \equiv E(k') \equiv E'$ dir.

Bazı özel değerler ise şöyledir;

$k=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ iken $K'=K$ dır,

$k=\sqrt{2}-1$ iken $K'=\sqrt{2}K$ dır,

$k=3-2\sqrt{2}$ iken $K'=2K$ dır.

2.3.3. Eliptik integraller için jacobi şekilleri

Eliptik integrallerin Legendre şekillerinde $t=\sin\theta$ dönüşümü yapılırsa $x=\sin\phi$ olmak üzere, aşağıdaki integraller elde edilir.

$$F_1(k,x)=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{\left(1-t^2\right)\left(1-k^2t^2\right)}}$$

$$E_1(k,x)=\int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}dt$$

$$\prod\nolimits_1\left(k,n,x\right)=\int_0^x \frac{dt}{\left(1+nt^2\right)\sqrt{\left(1-t^2\right)\left(1-k^2t^2\right)}}$$

Bunlara sırasıyla birinci, ikinci, üçüncü tür *eliptik integrallerin Jakobi şekilleri* denir.

2.4. Green Fonksiyonu

D basit bağlantılı sınırlı bir bölge, $z=x+iy$ ve $\zeta=\xi+i\eta$ olmak üzere,

$$G(z,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\ln\left|z-\zeta\right|+g(z,\zeta),\quad z\in D,\ \zeta\in D$$

fonksiyonu, D bölgesinde Laplace operatörü için Green fonksiyonu olarak tanımlanır (Vladimirov, 1984; Sidorov ve ark., 1985). Burada $g(z,\zeta)$ aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyondur;

1) $g,\ \forall\zeta\in D$ de harmoniktir, yani $g_{xx}+g_{yy}=0,\quad z=x+iy\in D$

2) $g,\ \forall\zeta\in D$ için D sınırına kadar sürekli ve

$$g(z,\zeta)\big|_{z\in S}=-\frac{1}{2\pi}\ln\left|z-\zeta\right|_{z\in S}$$

Buna göre $G(z,\zeta)\big|_{z\in S}=0$ olduğu anlaşılır.

Basit bağlantılı bir bölgede Green fonksiyonunu bulmak, bu bölgeyi birim çembere dönüştüren fonksiyonu bulmaya denktir. Bu aşağıdaki teoremle verilir.

2.4.1. Teorem

D basit bağlantılı sınırlı bir bölge olsun ve her $\zeta \in D$ için $w = w(z,\zeta)$, $z \in D, \zeta \in D$ fonksiyonu $(z = \zeta \leftrightarrow w = 0)$ ve $w(z,\zeta) = 0$ olacak şekilde $,D'$ yi $|w| < 1$ birim çemberine konform olarak dönüştürsün. O zaman D bölgesinde Laplace operatörü için Dirichlet probleminin Green fonksiyonu

$$G(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln |w(z)|$$

dır(Garabedian, 1964; Hildebrand, 1976; Sidorov ve ark., 1985).

O halde $w = w(z)$ D bölgesinin $|w| < 1$ birim çemberine konform dönüşümü ise,

$$w(z,\zeta) = \frac{w(z) - w(\zeta)}{1 - w(z)\overline{w(\zeta)}}$$

olmak üzere, D bölgesi için Green fonksiyonu,

$$G(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi} \mathrm{Re} \ln \frac{w(z) - w(\zeta)}{1 - w(z)\overline{w(\zeta)}}$$

olarak verilir.

2.5. Bernstein Polinomu

Yaklaşım teorisi; üzerinde çalışması zor olan bir fonksiyona, çalışması daha kolay bir fonksiyon yardımıyla yaklaşım sağlanabilir mi? Bu yaklaşım en iyi nasıl elde edilir? gibi sorulara cevap arayan çalışmaları kapsar. 19. yüzyıldan günümüze kadar birçok matematikçi yaklaşım teorisi üzerine çalışmalar yapmıştır. Günümüzde yaklaşım teorisi alanında en çok uygulamayı Bernstein polinomları bulmaktadır. Bernstein polinomu ilk olarak 1912 yılında Rus matematikçi Sergei Natonovich Bernstein(1880-1968) tarafından oluşturulmuş cebirsel bir polinomdur. Weierstrass Teoremi uygulamalı matematikteki en önemli teoremlerden biridir ve Bernstein Weierstrass teoremine daha basit ve daha kullanışlı bir ispat yolu bulmuştur. Çünkü polinomları her aralıkta sürekli olup ayrıca türevi ve integrali kolaylıkla alınabilirdir. Bu yüzden sürekli herhangi bir fonksiyonu verilen aralıkta polinom fonksiyonuna dönüştürmek, bu fonksiyonla yapılabilecek hesaplamalarda kolaylık sağlayacaktır.

1885 yılında Karl Weierstrass cebirsel ve trigonometrik fonksiyonlara kapalı bir aralıkta sürekli fonksiyonlara polinomlarla yaklaşılabileceği ifade ve ispat ettikten sonra Bernstein bu teoremin daha basit bir ispatını aramaya çalışmıştır. Ve Sergei Natonovich

Bernstein, 1912 yılında Weierstrass teoreminin ispatını, kendi adını verdiği Bernstein Polinomları'nı kullanarak yapmıştır (Çiçek, 2007).

Bernstein polinomları matematiğin en çok araştırılmış ve araştırılmaya devam eden konuları arasındadır. Bernstein polinomu $f:[0,1]\to\square$ ve n negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere

$$B_n(f,x)=\sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\binom{i}{k}x^i(1-x)^{n-i}=\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(x)f\left(\frac{i}{n}\right)$$

şeklinde tanımlanır. $B_n(f,x)$, n mertebeli bir polinomdur. $B_{i,n}(x)$ n tane birbirinden bağımsız denemenin i-inci denemede başarılı olma olasılığıdır.

3. DIRICHLET PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN YÖNTEMLER

Laplace denklemi için Dirichlet problemi,

$$\nabla^2 U = 0 \qquad z \in D,\ U\big|_{\partial D} = U_0(z)$$

olarak tanımlanır.

3.1. Dirichlet Probleminin Kare Bölge İçin Eliptik Fonksiyonlar Cinsinden Çözümü

Poisson denklemi için Dirichlet problemi,

$$\nabla^2 U = h(z), \quad z \in D, \quad U\Big|_{z\in\partial D} = U_0(z)$$

şeklinde gösterilir. Bunun çözümünü bulmak için Green fonksiyonu kullanılabilir. Bu problemin Green fonksiyonuna dayalı çözümü,

$$U(z) = \int_{\partial D} \frac{G(z,\zeta)}{\partial n} U_0(\zeta)\left|d\zeta\right|$$

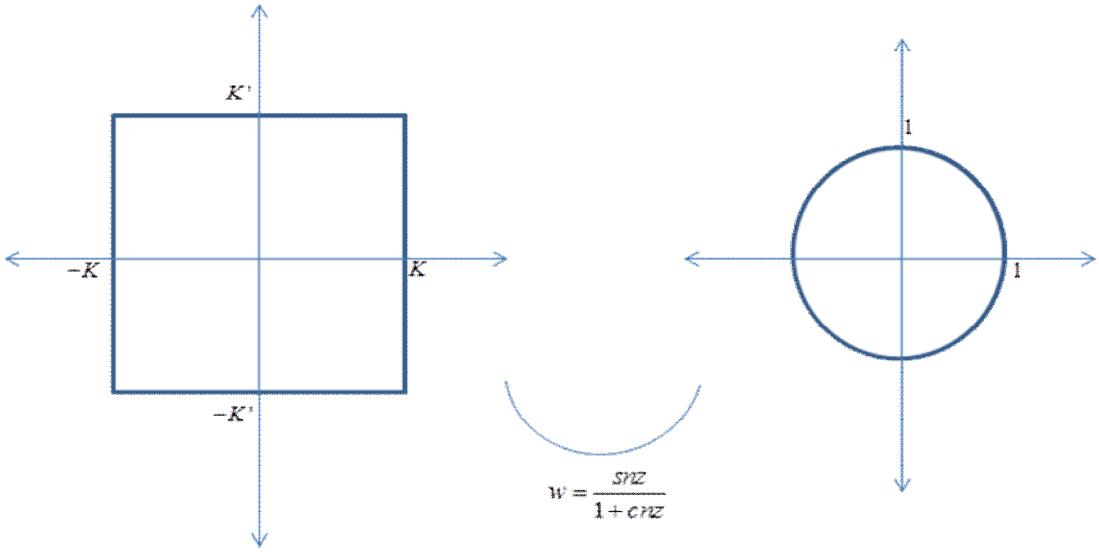
şeklindedir. Burada $\zeta = \xi + i\eta$ dır ve $\frac{\partial}{\partial n}$, ζ ya göre D sınırı boyunca normal türevi göstermektedir.

3.1.1. Kare bölgenin birim çembere konform dönüşümü ve green fonksiyonu

z-düzlemindeki köşeleri A_1, A_2, A_3, A_4 olan kare bölgeyi, w-düzlemindeki $|w|<1$ birim çemberine dönüştüren konform dönüşüm fonksiyonu $-K < \mathrm{Re}(z) < K$, $-K' < \mathrm{Im}(z) < K'$ olmak üzere, $w = F(z) = \frac{snz}{1+cnz}$ dır (Moretti, 1968). Eğer $k^2 = 0.5$ alınırsa bu durumda $K = K'$ olacağından z-düzlemindeki karenin w-düzleminde $|w|<1$ birim çemberi üzerine konform dönüşümü,

$$w = F(z) = \frac{snz}{1+cnz} \qquad -K < \mathrm{Re}(z) < K, \quad -K < \mathrm{Im}(z) < K$$

olarak,



z -düzlemindeki karenin w-düzlemine konform dönüşümü

D bölgesinde Laplace denklemi için Dirichlet probleminin Green fonksiyonu $G(z,\zeta)$

$$G(z,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\ln|z-\zeta|+g(z,\zeta) \quad z\in D\ ,\ \zeta\in D$$

olarak tanımlanır.

Burada, D bölgesinde $\forall\zeta\in D$ için g bir harmonik fonksiyon ve $g(z,\zeta)=-1/(2\pi)\ln|z-\zeta|$ dır. D' nin sınırında $G(z,\zeta)=0$ ve $z=x+iy$, $\zeta=\xi+i\eta$ dir.

Basit bağlantılı bir D bölgesinde bahsedilen Green fonksiyonunun tanımlanması aslında, D' yi birim daireye konform olarak dönüştüren analitik fonksiyonunun bulunması problemine denktir. Eğer $W=F(z)$ dönüşümü D'yi $|\omega|<1$ birim dairesine dönüştürüyor ise o zaman Laplace operatörü için Dirichlet probleminin Green fonksiyonu,

$$G(z,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\ln|\omega(z-\zeta)|\ ,\ W(z,\zeta)=\frac{F(z)-F(\zeta)}{1-F(z)\overline{F(\zeta)}}$$

dır.

Sonuç olarak, D bölgesi kare olarak alınırsa $A_1(K,-K)$, $A_2(K,K)$, $A_3(-K,K)$, $A_4(-K,-K)$ için Green fonksiyonu,

$$G=\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{\frac{snz}{1+cn\,z}-\frac{sn\zeta}{1+cn\,\zeta}}{1-\frac{snz}{1+cn\,z}\,\overline{\frac{sn\zeta}{1+cn\,\zeta}}}\right|$$

olarak elde edilir.

3.1.2. Problemin çözümü

D bölgesi kare olarak alınca $A_1(K,-K)$, $A_2(K,K)$, $A_3(-K,K)$, $A_4(-K,-K)$ ve D 'nin ∂D sınırı olarak da $\partial D = \overline{A_4A_1} \cup \overline{A_1A_2} \cup \overline{A_2A_3} \cup \overline{A_3A_4}$ alalım.

(a) $\overline{A_4A_1}$ kenarı üzerinde $\eta = -K$, $d\eta = 0$, $-K \le \xi \le K$

(b) $\overline{A_1A_2}$ kenarı üzerinde $\xi = K$, $d\xi = 0$, $-K \le \eta \le K$

(c) $\overline{A_2A_3}$ kenarı üzerinde $\eta = K$, $d\eta = 0$, $-K \le \xi \le K$

(d) $\overline{A_3A_4}$ kenarı üzerinde $\xi = -K$, $d\xi = 0$, $-K \le \eta \le K$

olduğundan denkleminin çözümü şu şekilde olur.

$$U(z) = \int_{-K}^{K}\int_{-K}^{K} G(z,\zeta)h(\zeta)d\xi\, d\eta - \int_{-K}^{K}\left[G_\xi^2(z,\zeta)+G_\eta^2(z,\zeta)\right]^{1/2} U_0(\zeta)\Big|_{\eta=-K}^{K} d\xi$$

$$+\int_{-K}^{K}\left[G_\xi^2(z,\zeta)+G_\eta^2(z,\zeta)\right]^{1/2} U_0(\zeta)\Big|_{\xi=-K}^{K} d\eta$$

Laplace denklemi için Dirichlet probleminin yukarıda bahsedilen kare bölgedeki çözümü,

$$U(z) = \int_{-K}^{K}\left[G_\xi^2+G_\eta^2\right]^{1/2} U_0(\zeta)\Big|_{\xi=-K}^{K} d\eta - \int_{-K}^{K}\left[G_\xi^2+G_\eta^2\right]^{1/2} U_0(\zeta)\Big|_{\eta=-K}^{K} d\xi$$

olarak elde edilir.

$K(k)$ sınır değerleri tam eliptik integrallerdir ve $k^2 = 0.5$ için bellidir.

3.2. Problemin Bernstein Seri Metodu ile Çözümü

Bu kısımda kare bölgede Laplace denklemi için Dirichlet probleminin Bernstein serisine açarak çözülecektir. Bu yöntemle Dirichlet problemi, lineer denklem sistemine karşılık gelen bir matris denklemine dönüştürülecektir. Bunları yaparken matris metodunun çözümünü Bernstein polinomuna ve sıralama noktalarına dayandıracağız.

D bölgesini $[0,a]\times[0,b]$ olarak düşünelim. $(\alpha_k,\beta_k) \in \partial D$ için $a_{i,j}^k, k = 1,...,t$ ve λ_t sabitler olmak üzere,

$$\sum_{k=1}^{t}\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} a_{i,j}^k(\alpha_k,\beta_k) = \lambda_t$$

Laplace denklemi için Bernstein seri çözümü aşağıdaki gibidir. Buradaki $B_{k,n}$, $0 \le k \le n$ Bernstein polinomudur.

$$p_{n,n}(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}a_{ij}B_{i,n}(x)B_{j,n}(y)$$

3.2.1. Problemin matris denklemi

Laplace denklemi için Bernstein seri çözümü $p_{n,n}$ ve $p_{n,n}^{(i,j)}=\dfrac{\partial^{i+j}p_{n,n}}{\partial x^{i}\partial y^{j}}.\,p_{n,n}$ matris formları aşağıdaki gibi yazılabilir(Ahmadi ve Adibi, 2007).

$$p_{n,n}(x,y)=B_n(x)Q_n(y)A$$

Buradaki $B_n(x)$, $Q_n(y)$ ve A matrisleri aşağıdaki gibidir;

$$B_n(x)=\begin{bmatrix}B_{0,n}(x) & B_{1,n}(x) & \dots & B_{n,n}(x)\end{bmatrix}$$

$$Q_n(y)=\begin{bmatrix}B_n(y) & 0 & \dots & 0\\ 0 & B_n(y) & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & B_n(y)\end{bmatrix}$$

ve

$$A=\begin{bmatrix}a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} & a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} & \cdots & a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}^{T}$$

Ayrıca $p_{n,n}^{(i,j)}$'yi

$$p_{n,n}^{(i,j)}(x,y)=B_n^{i}(x)Q_n^{j}(y)A$$

olarak yazarız(Isik ve ark., 2014). Buradaki $B_n^{i}(x)$ ve $Q_n^{j}(y)$ matrisleri sırasıyla $B_n^{i}(x)=X^{(i)}(x)D^{T}$ ve $Q_n^{i}(x)=\overline{Y}^{(j)}(y)\overline{D}$ eşittir. $\boldsymbol{X}^{(k)}=\boldsymbol{X}(x)\,\boldsymbol{B}^{k}$ ve $\overline{\boldsymbol{Y}}^{(j)}(y)=\overline{\boldsymbol{Y}}(y)\,\overline{\boldsymbol{B}}^{j}$ olup bu eşitliklerdeki matrisler;

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}d_{00} & d_{01} & \cdots & d_{0n}\\ d_{10} & d_{11} & \cdots & d_{1n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ d_{n0} & d_{n1} & \cdots & d_{nn}\end{bmatrix},\quad d_{ij}=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{j-i}}{R^{j}}\binom{n}{j}\binom{n-i}{j-i} & ,i\le j\\ 0 & ,i>j\end{cases}$$

$$\boldsymbol{X}(x)=\begin{bmatrix}1 & x & \cdots & x^{n}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{Y}}\ (y)=\begin{bmatrix} Y(y) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Y(y) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Y(y) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{Y}\ (y)=\begin{bmatrix} 1 & y & \cdots & y^n \end{bmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{D}}=\begin{bmatrix} D^T & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D^T & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D^T \end{bmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{B}}=\begin{bmatrix} B & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır.

Tüm bu verilen matrisler $p_{n,n}^{(i,j)}(x,y)$ 'de yerine yazılırsa;

$$p_{n,n}^{(i,j)}(x,y)=\boldsymbol{X}\ (x)\ \boldsymbol{B}^{\ i}\ \boldsymbol{D}^{\ T}\ \overline{\boldsymbol{Y}}\ (y)\ \overline{\boldsymbol{B}}^{\ j}\ \overline{\boldsymbol{D}}\ \boldsymbol{A}$$

elde edilir.

$\left\{\left(x_i,y_j\right):0\le i,j\le n\right\}$ sıralama noktalarını kullanarak, $1\le m\le (n+1)^2$ olmak üzere $\left(x_k,y_l\right),k=\left[\left|\frac{m}{n+1}\right|\right],l=m-k(n+1)-1$ ifadesinden gelen, m inci sütunu $\mathbf{W}_{(n+1)^2\times(n+1)^2}$ olan bir matris elde ederiz. Benzer şekilde **G** sütun matrisi olup $[\mathbf{G}]_{1m}=G\left(x_t,y_l\right),t=\left[\left|\frac{m}{n+1}\right|\right],l=m-t(n+1)-1$ ' dir.(Isik ve ark., 2014)

Böylece $\mathbf{WA}=\mathbf{G}$ lineer denklem sistemini elde ederiz. Ve verilen koşulları sağlayan matrisleri

$$\boldsymbol{C}\ \boldsymbol{A}\ \sum_{k=0}^{t}\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}a_{i,j}^{k}\ \boldsymbol{X}\ (\alpha_t)\ \boldsymbol{B}^{\ i}\ \boldsymbol{D}^{\ T}\ \overline{\boldsymbol{Y}}\ (\beta_t)\ \overline{\boldsymbol{B}}^{\ j}\ \overline{\boldsymbol{D}}\ \boldsymbol{A}=\lambda_t$$

şeklinde buluruz. Verilen sistem sırasıyla $[\boldsymbol{G}]_{t1}=\lambda_t$ olmak üzere

$$\boldsymbol{C}\ \boldsymbol{A}=\boldsymbol{G}_1$$

biçiminde yazılır.

Lineer denklem sisteminde $[\boldsymbol{W},\boldsymbol{G}]$ ve $\left[\boldsymbol{C},\boldsymbol{G}_1\right]$, yazdığımızda yeni bir $\left[\tilde{\boldsymbol{W}},\tilde{\boldsymbol{G}}\right]$ elde ederiz.

$$\left[\tilde{\boldsymbol{W}},\tilde{\boldsymbol{G}}\right]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{W} & , & \boldsymbol{G}\\ \boldsymbol{C} & , & \boldsymbol{G}_1\end{bmatrix}$$

Gauss eliminasyon metodunu kullanarak $\left[\tilde{\boldsymbol{W}},\tilde{\boldsymbol{G}}\right]$ artan matrisinin sıfır satırlarını kaldırılarak, $\left[\tilde{\boldsymbol{W}},\tilde{\boldsymbol{G}}\right]$ elde ederiz. Eğer $\tilde{\boldsymbol{W}}$ kare matrisse, bu durumda A bilinmeyen matrisi

$$\boldsymbol{A}=\tilde{\boldsymbol{W}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{G}}$$

biçiminde elde edilir.

Aksi takdirde, $\dim(\tilde{W})=(n+1)^2$ olmak üzere, sıralama noktaları değiştirilmelidir. Ayrıca, eğer $\tilde{\boldsymbol{W}}$ 'nin sütunları lineer bağımsız ise **A** matrisi yalancı ters metodu kullanılarak hesaplanabilir; yani,

$$\tilde{\boldsymbol{W}}^{+}=\left(\tilde{\boldsymbol{W}}^{*}\tilde{\boldsymbol{W}}\right)^{-1}\tilde{\boldsymbol{W}}^{*}$$

Burada $\tilde{\boldsymbol{W}}^{*}$, $\tilde{\boldsymbol{W}}$ 'ın transpozudur.

3.2.2. Hata analizi ve çözümün doğruluğu

Tepesi kesilmiş Bernstein serileri Laplace denkleminin yaklaşık bir çözümü olduğundan, $P(x,y)$ fonksiyonu ve onun türevleri Laplace denkleminde yerine yazıldığında, elde edilen denklem yaklaşık olarak sağlanılmalıdır; yani, $(x,y)=(x_q,y_q)\in\left\{0\le x_q\le a,\quad 0\le y_q\le b\right\}$ $q=0,1,2,...$ için

$E(x_q,y_q)=\left|D(x_q,y_q)-\lambda I(x_q,y_q)\right|\cong 0$ ve $E(x_q,y_q)\le 10^{-kq}$ (k_q pozitif tamsayı)' dir. Eğer $10^{-kq}=10^{-k}$ (k pozitif tamsayı) yazılırsa; bu durumda kesme sınırı olan N, tanımlanan 10^{-k}, dan daha küçük olan noktaların her birinde $E(x_q,y_q)$ farkına kadar arttırılır. Diğer taraftan, hata

$$E_N=\sum_{r=0}^{N}\sum_{s=0}^{N}a_{r,s}T_{r,s}(x,y),-g(x,y)-I(x,y)$$

fonksiyonu ile tahmin edilebilir.

N yeterince büyük olduğunda, $E_N(x,y)\to 0$ ise, bu durumda hata azalır.

3.2.3. Nümerik örnek

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$
$$u(x,0)=0\ ,\ u(x,K)=1 \qquad 0<y<K$$
$$u(0,y)=u(K,y)=0 \qquad 0<x<K$$

Laplace denklemi için Bernstein polinomu

$$[\ \boldsymbol{X}\ (x)\ \boldsymbol{B}^{\,2}\ \boldsymbol{D}^{\,T}\ \overline{\boldsymbol{Y}}\ (y)\ \overline{\boldsymbol{D}}\ +\ \boldsymbol{X}\ (x)\ \boldsymbol{D}^{\,T}\ \overline{\boldsymbol{Y}}\ (y)\ \overline{\boldsymbol{B}}^{\,2}\ \overline{\boldsymbol{D}}\ ]\ \boldsymbol{A}=0$$

ve sıralama noktaları,

$$\left\{\left(x_i,y_j\right):\ \ 0\le i,\quad j\le n,\quad x_i=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\pi,\quad y_i=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\pi\right\}$$

olup verilen $u(x,0)=0$, $u(x,K)=1$, $u(0,y)=0$ ve $u(K,y)=0$ koşulları sağlayan matrisler

$$p_{n,n}(x_i,0)=\ \boldsymbol{X}\ (x_i)\ \boldsymbol{D}^{\,T}\ \overline{\boldsymbol{Y}}\ (0)\ \overline{\boldsymbol{D}}\ \boldsymbol{A}=0 \qquad i=0,1,...,n$$
$$p_{n,n}(x_i,K)=\ \boldsymbol{X}\ (x_i)\ \boldsymbol{D}^{\,T}\ \overline{\boldsymbol{Y}}\ (K)\ \overline{\boldsymbol{D}}\ \boldsymbol{A}=1 \qquad i=0,1,...,n$$
$$p_{n,n}(0,y_i)=\ \boldsymbol{X}\ (0)\ \boldsymbol{D}^{\,T}\ \overline{\boldsymbol{Y}}\ (y_i)\ \overline{\boldsymbol{D}}\ \boldsymbol{A}=0 \qquad i=0,1,...,n$$
$$p_{n,n}(K,y_i)=\ \boldsymbol{X}\ (K)\ \boldsymbol{D}^{\,T}\ \overline{\boldsymbol{Y}}\ (y_i)\ \overline{\boldsymbol{D}}\ \boldsymbol{A}=0 \qquad i=0,1,...,n$$

şeklindedir. Şimdi $\left[\boldsymbol{W},\boldsymbol{G}\right]$ lineer denklem sistemini N=5 için $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{B}$, $\overline{\boldsymbol{B}}$, $\boldsymbol{D}$, $\overline{\boldsymbol{D}}$, $\overline{\boldsymbol{Y}}$, $\boldsymbol{Y}$ matrisleri şu şekildedir.

$$\boldsymbol{X}\ (x)=\left[\begin{array}{cccccc} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 \end{array}\right]_{1x6}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{6x6}, \qquad \overline{\boldsymbol{B}}=\begin{bmatrix} B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & B & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & B & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & B & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & B & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B \end{bmatrix}_{36x36}$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{(-1)^1}{(K)^1}\binom{5}{0}\binom{5}{1} & \frac{(-1)^2}{(K)^2}\binom{5}{0}\binom{5}{2} & \frac{(-1)^3}{(K)^3}\binom{5}{0}\binom{5}{3} & \frac{(-1)^4}{(K)^4}\binom{5}{0}\binom{5}{4} & \frac{(-1)^5}{(K)^5}\binom{5}{0}\binom{5}{5} \\ 0 & \frac{(-1)^0}{(K)^1}\binom{5}{1}\binom{4}{0} & \frac{(-1)^1}{(K)^2}\binom{5}{1}\binom{4}{1} & \frac{(-1)^2}{(K)^3}\binom{5}{1}\binom{4}{2} & \frac{(-1)^3}{(K)^4}\binom{5}{1}\binom{4}{3} & \frac{(-1)^4}{(K)^5}\binom{5}{1}\binom{4}{4} \\ 0 & 0 & \frac{(-1)^0}{(K)^2}\binom{5}{2}\binom{3}{0} & \frac{(-1)^1}{(K)^3}\binom{5}{2}\binom{3}{1} & \frac{(-1)^2}{(K)^4}\binom{5}{2}\binom{3}{2} & \frac{(-1)^3}{(K)^5}\binom{5}{2}\binom{3}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(-1)^0}{(K)^3}\binom{5}{3}\binom{2}{0} & \frac{(-1)^1}{(K)^4}\binom{5}{3}\binom{2}{1} & \frac{(-1)^1}{(K)^1}\binom{5}{3}\binom{2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(-1)^0}{(K)^4}\binom{5}{4}\binom{1}{0} & \frac{(-1)^1}{(K)^5}\binom{5}{4}\binom{1}{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(-1)^0}{(K)^5}\binom{5}{5}\binom{0}{0} \end{bmatrix}_{6x6}$$

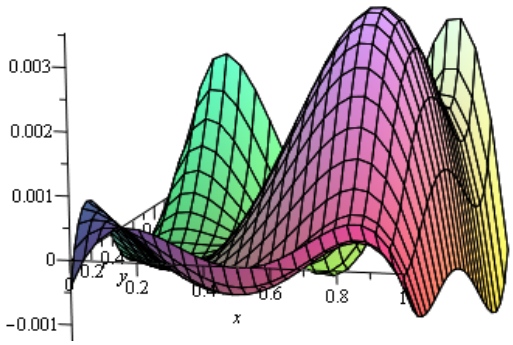
$$\overline{\boldsymbol{D}} = \begin{bmatrix} D^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D^T \end{bmatrix}_{36x36}$$

$$\overline{\boldsymbol{Y}}\ (y) = \begin{bmatrix} Y(y) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y(y) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y(y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y(y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y(y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y(y) \end{bmatrix}_{6x36}$$

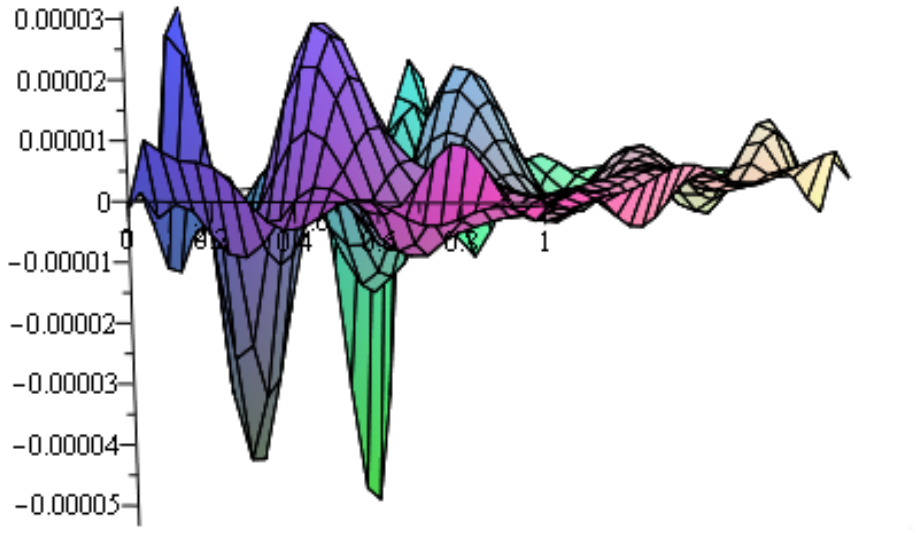
$$\boldsymbol{Y}\ (y) = \begin{bmatrix} 1 & y & y^2 & y^3 & y^4 & y^5 \end{bmatrix}_{1x6}$$

3.2.4. Hata fonksiyonu

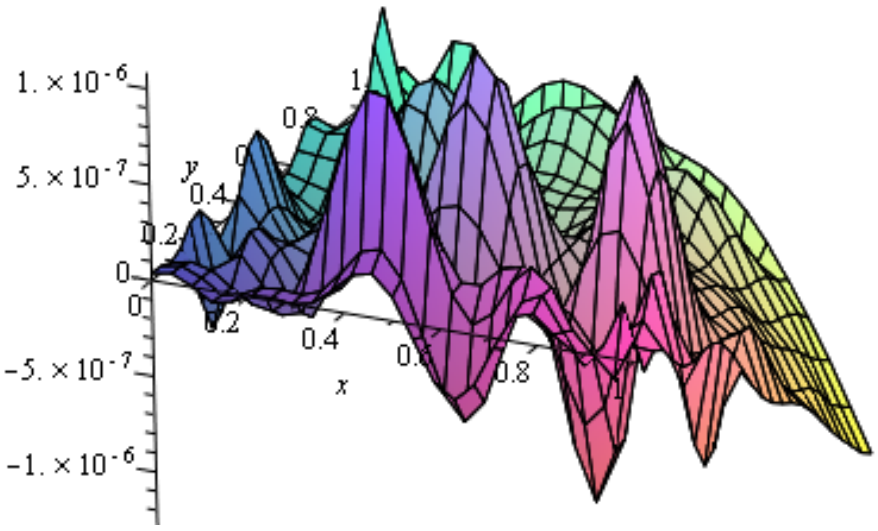
Bu kısımda problemin farklı N değerleri için hata fonksiyonun grafiği çizilip tablolar oluşturulmuştur.



N=5 için hata grafiği



N=10 için hata grafiği



N=12 için hata grafiği

D bölgesinin sınırında farklı N değerleri için hata analizi

X	Y	N=5	N=7	N=9	N=10	N=12
0	1	$-2.4403\,10^{-3}$	$1.5690\,10^{-4}$	$2.161\,10^{-5}$	$8.9\,10^{-8}$	$1.05\,10^{-7}$
0	0.9	$-2.0438\,10^{-2}$	$1.6914\,10^{-4}$	$-2.3880\,10^{-5}$	$-3.98\,10^{-7}$	$-3.90\,10^{-7}$
0	0.8	$-1.6157\,10^{-3}$	$-1.1162\,10^{-4}$	$-1.9550\,10^{-5}$	$3.7436\,10^{-8}$	$3.7436\,10^{-8}$
0	0.7	$-7.4720\,10^{-3}$	$-6.1234\,10^{-4}$	$2.195\,10^{-6}$	$1.584\,10^{-7}$	$1.60\,10^{-7}$
0	0.6	$-1.6648\,10^{-3}$	$-1.1537\,10^{-3}$	$5.6349\,10^{-6}$	$-1.40\,10^{-9}$	$9\,10^{-10}$
0	0.5	$-6.4541\,10^{-4}$	$-8.5508\,10^{-4}$	$-1.2969\,10^{-4}$	$-2.62\,10^{-9}$	$-2.6\,10^{-9}$
0	0.4	$-2.2257\,10^{-3}$	$-1.9680\,10^{-4}$	$-1.8373\,10^{-4}$	$-1.0338\,10^{-7}$	$-1.0362\,10^{-7}$
0	0.3	$-2.9730\,10^{-3}$	$6.9763\,10^{-5}$	$-4.1595\,10^{-5}$	$-9.3988\,10^{-8}$	$-9.387\,10^{-8}$
0	0.2	$-8.0039\,10^{-4}$	$-1.3218\,10^{-4}$	$4.7309\,10^{-5}$	$1.6025\,10^{-7}$	$1.6031\,10^{-7}$
0	0.1	$2.4436\,10^{-3}$	$-1.0054\,10^{-4}$	$-1.7810\,10^{-5}$	$1.1802\,10^{-8}$	$1.1826\,10^{-8}$
0	0	$-1.6157\,10^{-3}$	$-1.1162\,10^{-4}$	$-1.9550\,10^{-5}$	$3.7436\,10^{-8}$	$3.7436\,10^{-8}$

D bölgesinin içinde farklı N değerleri için hata analizi

X	y	N=5	N=7	N=9	N=10	N=12
1	1	$2.9900\,10^{-4}$	$1.2359\,10^{-4}$	$-6.9849\,10^{-4}$	$7.5900\,10^{-7}$	$-1.1100\,10^{-5}$
0.5	0.5	$3.9486\,10^{-3}$	$-6.7268\,10^{-4}$	$1.5599\,10^{-5}$	$6.1000\,10^{-9}$	$-5.2350\,10^{-8}$
0.2	0.8	$1.1137\,10^{-3}$	$-1.4905\,10^{-4}$	$-6.6864\,10^{-6}$	$5.8962\,10^{-6}$	$4.2800\,10^{-10}$
0.1	0.7	$5.1846\,10^{-3}$	$-6.6201\,10^{-5}$	$-6.5836\,10^{-5}$	$-5.7451\,10^{-6}$	$1.3544\,10^{-7}$
0.6	0.6	$1.0404\,10^{-2}$	$-1.2613\,10^{-4}$	$1.1713\,10^{-6}$	$-3.3402\,10^{-6}$	$-1.4990\,10^{-7}$
0.3	0.2	$-3.8989\,10^{-3}$	$5.0266\,10^{-4}$	$6.1778\,10^{-6}$	$2.5621\,10^{-5}$	$-9.5388\,10^{-8}$
1	0.4	$-2.0282\,10^{-4}$	$1.9284\,10^{-4}$	$1.8854\,10^{-4}$	$3.1996\,10^{-6}$	$-4.8500\,10^{-7}$
0.8	0.3	$-6.5765\,10^{-3}$	$-3.0576\,10^{-4}$	$4.9226\,10^{-5}$	$-1.9480\,10^{-7}$	$4.5170\,10^{-7}$
0.2	0.9	$6.3258\,10^{-3}$	$1.6659\,10^{-5}$	$-2.6873\,10^{-5}$	$-9.7539\,10^{-7}$	$4.4977\,10^{-8}$
0.5	0.7	$6.1834\,10^{-4}$	$-3.5100\,10^{-4}$	$-2.7896\,10^{-5}$	$-3.7444\,10^{-6}$	$2.7140\,10^{-7}$

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

4.1. Sonuçlar

Bu çalışmada kullandığımız yöntemlerden ilkinin en önemli avantajı sonucun eliptik fonksiyonlar cinsinden ifade edilmesidir. Çünkü bazı fizik ve mühendislik problemlerinde çözümün eliptik fonksiyonlar cinsinden ifade edilmesi uygulamada kolaylık sağlamaktadır. Öte yandan, dezavantajı ise istenilen bölgedeki Laplace (ayrıca Poisson) diferansiyel denkleminin (dahili) Dirichlet probleminin çözümü için gerekli olan Green fonksiyonu ile eliptik fonksiyonların integralleri ve türevlerinin bulunması zorluğudur. İkincisinin de avantajı analitik çözümünü bulamadığımız bölgelerde, çözüm fonksiyonunu en iyi yaklaşımla bulmaktır.

4.2. Öneriler

Bundan sonraki çalışmalarda, çeşitli bölgelerin dışı için de Laplace (aynı zamanda Poisson) diferansiyel denkleminin Dirichlet problemi eliptik fonksiyonlar cinsinden çözülerek analitik çözümü yapılabileceği gibi bazen bu yöntemle kurulan problemin matematik modelinin çözümünde karşılaşılabilecek eliptik fonksiyonların türevleri ve integrallerinin alınması zorluğundan hiç olmazsa yaklaşık çözümünü bulmak için Bernstein Seri metodu yoluna gidilebilir. Böylece fizik ve mühendislikteki bu tip problemlerin çözümüne gerek analitik çözümle gerekse yaklaşık çözümle katkı sağlanabilir.

KAYNAKLAR

A. G. Sveshnikov, A. N. T., 1982, The theory of functions of a complex variable *Moscow* Mir, p. 333.

Ahmadi, M. R. ve Adibi, H., 2007, The Chebyshev Tau technique for the solution of Laplace's equation, *Applied Mathematics and Computation*, 184 (2), 895-900.

Aiyama, R. ve Akutagawa, K., 2002, The Dirichlet problem at infinity for harmonic map equations arising from constant mean curvature surfaces in the hyperbolic 3-space, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 14 (4), 399-428.

Babuska, I. ve Chleboun, J., 2003, Effects of uncertainties in the domain on the solution of Dirichlet boundary value problems, *Numerische Mathematik*, 93 (4), 583-610.

Baykus Savaşaneril, N. ve Delibaş, H., 2016, Analytic Solution for Two-Dimensional Heat Equation for an Ellipse Region, *New Trends in Mathematical Science*, 4 (1), 65-65.

Brovar, V. V., Kopeikina, Z. S. ve Pavlova, M. V., 2001, Solution of the Dirichlet and Stokes exterior boundary problems for the Earth's ellipsoid, *Journal of Geodesy*, 74 (11-12), 767-772.

Çiçek, M. M., 2007, Bernstein Polinomları ve Yaklaşım Özellikleri, Yüksek Lisans Tezi, *Mersin Üniversitesi*.

Garabedian, P. R., 1964, Partial Differential Equations, John Wiley & Sons, p.

Hildebrand, F. B., 1976, Advanced Calculus for Applications *ABD : PRENTICE - HALL, 1976.*, p.

Isik, O. R., Sezer, M. ve Guney, Z., 2014, Bernstein series solution of linear second-order partial differential equations with mixed conditions, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 37 (5), 609-619.

Khoromskij, B. N. ve Schmidt, G., 1998, A fast interface solver for the biharmonic Dirichlet problem on polygonal domains, *Numerische Mathematik*, 78 (4), 577-596.

Kurt, N., 2003, Dirichlet Probleminin Eliptik Fonksiyonlar Cinsinden Çözümü, Doktora Tezi, *Dokuz Eylül Üniversitesi*.

Kurt, N. ve Sezer, M., 2006, Solution of Dirichlet problem for a triangle region in terms of elliptic functions, *Applied Mathematics and Computation*, 182 (1), 73-81.

Kurt, N., 2008, Solution of the two-dimensional heat equation for a square in terms of elliptic functions, *Journal of the Franklin Institute*, 345 (3), 303-317.

Kurul, E., Baykuş Savaşaneril, N. ve 2015, Solution of the two-dimensional heat equation for a rectangular plate, *New Trends in Mathematical Sciences*, 4, 76-82.

Lanzara, F., 1998, Numerical approximation of eigenvalues and of Green's operator for an elliptic boundary value problem, *Calcolo*, 35 (2), 63-92.

Lumer, G. ve Schnaubelt, R., 2001, Time-dependent parabolic problems on non-cylindrical domains with inhomogeneous boundary conditions, *Journal of Evolution Equations*, 1 (3), 291-309.

Marshakov, A., Wiegmann, P. ve Zabrodin, A., 2002, Integrable structure of the dirichlet boundary problem in two dimensions, *Communications in Mathematical Physics*, 227 (1), 131-153.

Martinec, Z. ve Grafarend, E. W., 1997, Construction of Green's function to the external Dirichlet boundary-value problem for the Laplace equation on an ellipsoid of revolution, *Journal of Geodesy*, 71 (9), 562-570.

Moretti, G., 1968, Functions of a Complex Variable, p. 450.
Sidorov, Y. V., Fedoryuk, M. V. ve Shabunin., M. I., 1985, Lectures on the Theory of Functions of a Complex Variable, *Moscow*, Mir Publishers, p. 492.
Vladimirov, V. S., 1984, Equations of Mathematical Physics, *Moscow*, Mir Publishers, p.
Whittaker, E. T. ve Watson, G. N., 1927, A Course of Modern Analysis, Cambridge University Press, p.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Zeynep HACİOĞLU
Uyruğu : T.C
Doğum Yeri ve Tarihi : Gölcük / 09.12.1991
Telefon : 05456027318
e-mail : zeynephacioglu886@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Barbaros Hayrettin lisesi, Gölcük , Kocaeli	2009
Üniversite	:	Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi , Matematik Bölümü , Konya	2014
Yüksek Lisans	:	Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı , Konya	------

YABANCI DİLLER

İngilizce (orta seviye)

YAYINLAR

Zeynep HACİOĞLU, Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL, " Bernstein Series Approximation for Dirichlet Problem " , Gazi University Journal of Science 2016, Araştırma Makalesi.(in review) (Yüksek lisans tezinden yapılmıştır.)

Zeynep HACİOĞLU, Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL, " Bernstein Series Approximation for Dirichlet Problem " 2nd International Conference on Pure & Applied Science, İSTANBUL, Haziran 2016, serbest bildiri, Uluslararası hakemli organizasyon. .(Yüksek lisans tezinden yapılmıştır.)

Zeynep HACİOĞLU, Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL, " Solution of Dirichlet problem for a square region in terms of elliptic functions " , 7th International Workshop on Differential Equations and Applications, BORNOVA, Temmuz 2015, serbest bildiri, Uluslararası hakemli organizasyon. (Yüksek lisans tezinden yapılmıştır.)

Zeynep HACİOĞLU, Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL, Hasan KÖSE, " Solution of Dirichlet problem for a square region in terms of elliptic functions " , New Trends in Mathematical Sciences, NTMSCI 3, No. 4, 98-103 (2015), Araştırma Makalesi.(Yüksek lisans tezinden yapılmıştır.)