KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELEKTRONİK VE BİLGİSAYAR EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

KAYIPSIZ OPTİK DALGA KILAVUZLARINDA İLETİLEN MODLARIN VE METAMATERYAL YÜKLÜ KAPALI KILAVUZLARDA GERİYE DOĞRU DALGALARIN TRANSMİSYON HATTI EŞDEĞERLİKLERİ YÖNTEMİ İLE İNCELENMESİ

PELİN KELEBEKLER

KOCAELİ 2016

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELEKTRONİK VE BİLGİSAYAR EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

KAYIPSIZ OPTİK DALGA KILAVUZLARINDA İLETİLEN MODLARIN VE METAMATERYAL YÜKLÜ KAPALI KILAVUZLARDA GERİYE DOĞRU DALGALARIN TRANSMİSYON HATTI EŞDEĞERLİKLERİ YÖNTEMİ İLE İNCELENMESİ

PELİN KELEBEKLER

Prof.Dr. Namık YENER
Danışman, Kocaeli Üniv. .....

Prof.Dr. Yunus Emre ERDEMLİ
Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv. .....

Doç.Dr. Vildan GÜLKAÇ
Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv. .....

Doç.Dr. Sibel ÇİMEN
Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv. .....

Yrd.Doç.Dr. Ahmet Yahya TEŞNELİ
Jüri Üyesi, Sakarya Üniv. .....

Tezin Savunulduğu Tarih: 29.04.2016

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında ilk olarak açık silindirik plazma sütun kılavuzuna ait dispersiyon karakteristikleri, yapının metalik bir çerçeve ile kapatılarak elde edilen kapalı modeline ait Moment Metodu (Method of Moment-MoM) çözümleri kullanılarak yaklaşık olarak elde edilmiştir. Yöntemin uygulanabilirliği açısından kritik olan nokta modellenecek modların matematiksel olarak uygun olması zorunluluğudur. Bu nedenle dispersiyon karakteristikleri elde edilen yapıya ait modların matematiksel uygunluğu test edilmiştir. Yapıya ait kesin çözümler ve yöntemden elde edilen sonuçlar aynı şekiller üzerinde verilerek yöntemin geçerliliği ortaya konulmuştur.

Bu çalışmada ikinci olarak Foster reaktans teoreminin metamateryal ortamlar için uygulanabilirliğinin metamateryal yüklü yapılara ait iletim hattı eşdeğeri eşitlikleri kullanılarak araştırılmasıdır. Elektrik alan ve manyetik alan vektörlerinin modal gösterimleri ve iletim hattı eşdeğeri eşitlikleri kullanılarak Foster reaktans teoreminin ifadesi iletim hattı eşdeğeri eşitlikleri cinsinden elde edilmiştir. Sonuç olarak zamana göre ortalama depolanmış elektrik ve manyetik enerji toplamlarının işaretinin, yani ilgili yapının Foster reaktans teoremini sağlayıp sağlamadığının iletim hattı eşdeğeri eşitlikleri cinsiden elde edilen ifade ile belirlenebileceği sonucu elde edilmiştir. Çalışmada ayrıca, jirotropik metamateryal yüklü, kapalı, üniform, kayıpsız dalga kılavuzları için de geriye doğru dalgaların varlığı için gerek ve yeter koşullar iletim hattı eşdeğeri eşitlikleri cinsinden elde edilmiştir. Bu eşitlikler sisteminde pozitif reel matris olma durumunu bozan kutbu olan, admitans katsayı matrisine sahip iki dalga kılavuzu yapısı için negatif zamana göre ortalama depolanmış elektromanyetik enerji ve geriye doğru dalgaların beraber var olduğu ispatlanmıştır. Foster reaktans teoreminin, yüklü ortam aktif olduğunda ve bu yüzden eşitlikler sisteminde katsayılar matrislerinin pozitif reel olma durumu bozulduğunda, metamateryal ortam yüklü bir dalga kılavuzu için sağlanmadığı gösterilmiştir.

Bu çalışmanın ortaya çıkmasında değerli fikirleri ile yol gösteren ve desteğini eksik etmeyen danışmanım Sayın Prof.Dr.Namık YENER'e sonsuz şükranlarımı belirtmeyi borç bilirim.Ayrıca tezimin doğru yönde şekillenmesinde çok değerli tecrübelerini paylaşan tez izleme jürilerim Sayın Prof.Dr.Yunus Emre ERDEMLİ ve Sayın Doç.Dr.Vildan GÜLKAÇ başta olmak üzere, üzerimde emeği olan tüm hocalarıma en derin saygılarımla teşekkür ederim.

Bu çalışma süresince Yurtiçi Doktora Burs Programı'ndan yararlanmama olanak sağlayan Türkiye Bilimsel Araştırma ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na, finansal desteği için teşekkürü borç bilirim.

Bu süreçte desteklerini esirgemeyen aileme, özellikle göstermiş olduğu sabır ve anlayış için çok değerli eşim Ersoy KELEBEKLER'e tüm içtenliğimle teşekkür ederim.

Mart - 2016 Pelin KELEBEKLER

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR i
İÇİNDEKİLER ii
ŞEKİLLER DİZİNİ iv
TABLOLAR DİZİNİ vi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ vii
ÖZET viii
ABSTRACT ix
GİRİŞ 1
1. AÇIK DALGA KILAVUZU YAPILARI, MOMENT METODU VE FOSTER REAKTANS TEOREMİ 5
1.1. Dalga Kılavuzları ve Açık Dalga Kılavuzu Yapıları 5
1.2. Moment Metodu ve Tez Çalışmasındaki Yeri 7
1.3. Dalga Kılavuzları Dispersiyon Karakteristiklerini Elde Etmek İçin Literatürde ve Tez Çalışmasında Kullanılan Yöntemler 9
1.4. Foster Reaktans Teoremi 11
1.5. Tez Çalışmasının Amacı ve Gerçekleştirilen Çalışmalar 13
2. MOMENT METODU 16
2.1. Üniform Dalga Kılavuzu İçin İletim Hattı Eşitliklerinin Türetilmesi 18
2.1.1. Üniform dalga kılavuzu için enine alan eşitliklerinin türetilmesi 19
2.1.2. Alanların modal gösterimi ve iletim hattı eşitliklerinin türetilmesi 22
2.2. Dielektrik Sütun Yüklü Kapalı Dalga Kılavuzu İçin İletim Hattı Eşdeğeri Eşitlikleri 29
3. AÇIK SİLİNDİRİK PLAZMA SÜTUN DALGA KILAVUZUNUN MOMENT METODU İLE MODELLENMESİ 35
3.1. Silindirik Açık Plazma Sütun İçin İletilen Modlar 37
3.2. Silindirik Açık Plazma Sütun İçin Kompleks Modlar 39
3.3. Açık Dalga Kılavuzları İçin Uygun ve Uygunsuz Modlar 40
3.3.1. Açık plazma sütun dalga kılavuzu için uygun ve uygunsuz modların analitik olarak incelenmesi 42
3.3.2. Açık plazma sütun dalga kılavuzuna ait modların uygunluğunun sayısal olarak incelenmesi 53
3.4. Açık Dalga Kılavuzları İçin Kompleks Dalga Tipleri 58
3.5. Silindirik Açık Plazma Sütun Dalga Kılavuzu Modlarının Moment Metodu Kullanılarak Elde Edilmesi 59
3.5.1. Farklı seri açılım değerleri için MoM'dan elde edilen silindirik açık plazma sütun dalga kılavuzu modları 64
3.5.2. MoM'da kullanılan seri açılım terim sayısının yüzde hata ve hesaplama zamanı ile ilişkisi 66

4. İLETİM HATTI EŞİTLİKLERİ CİNSİNDEN FOSTER REAKTANS TEOREMİ 69
4.1. Foster Reaktans Teoremi 69
4.2. Metamateryaller İçin Foster Reaktans Teoreminin Geçerliliği 71
4.3. İletim Hattı Eşitlikleri Cinsinden Foster Reaktans Teoremi 76
4.4. Depolanan Elektrik ve Manyetik Enerjilerin Zaman Ortalamaları İçin Ayrı Ayrı İfadeler 86
5. METAMATERYAL YÜKLÜ KAPALI ÜNİFORM DALGA KILAVUZLARINDA GERİYE DOĞRU DALGALAR İÇİN GEREK VE YETER KOŞULLAR 95
5.1. Kayıpsız, Jirotropik Doğal Materyal Yüklü Kapalı Dalga Kılavuzlarında Geriye Doğru Dalgaların Varlığı İçin Gerek ve Yeter Koşullar 95
5.2. Kayıpsız, Jirotropik Metamateryal Yüklü Kapalı Dalga Kılavuzu Yapılarında Geriye Doğru Dalga Modları İçin Gerek ve Yeter Koşullar 99
5.3. Genel Hususlar 100
5.3.1. Dielektrik geçirgenlik matrisinde jω ekseninde basit olmayan kutup 101
5.3.2. jω ekseninde bir kutupta rezidü matrisinin non-negatif tanım özelliğinin bozulması 105
5.4. Tipik Olmayan Kutba Sahip Dalga Kılavuzu Yapıları Örnekleri 106
5.4.1. Tek eksenel soğuk sürüklenen plazma ile yüklü dalga kılavuzu 107
5.4.2. İzotropik, kayıpsız metametaryal yüklü kare dalga kılavuzu 110
5.4.3. Negatif sönüm katsayısına sahip metamateryal ile yüklü dalga kılavuzu 113
5.4.4. Sayısal örnek 116
6. SONUÇLAR 118
KAYNAKLAR 122
EKLER 128
KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER 134
ÖZGEÇMİŞ 135

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Dielektrik Sütun Yüklü Kapalı Dalga Kılavuzu 29
Şekil 3.1. Dış cidar ile kapalı hale getirilen dielektrik çubuk 35
Şekil 3.2. Silindirik açık izotropik plazma sütun için dispersiyon eğrileri 39
Şekil 3.3. Silindirik açık izotropik plazma sütun için kompleks dispersiyon eğrileri 40
Şekil 3.4. n=1 için modifiye Bessel fonksiyonu ve bileşenleri 44
Şekil 3.5. n=1 için ikinci tür modifiye Bessel fonksiyonu hesabı 45
Şekil 3.6. k=reel pozitif ve r=0,01-2,5 aralığı için ikinci tür modifiye Bessel fonksiyonu ve Asimptotik ifadesinden elde edilen eğriler 46
Şekil 3.7. k=reel negatif ve r=0,01-10 aralığı için ikinci tür modifiye Bessel fonksiyonu ve Asimptotik ifadesinden elde edilen eğriler 47
Şekil 3.8. k=saf sanal ve r=0,1-100 aralığı için ikinci tür modifiye Bessel fonksiyonu ve Asimptotik ifadesinden elde edilen eğriler 48
Şekil 3.9. k=saf sanal ve r=0,1-100 aralığı için ikinci tür modifiye Bessel fonksiyonu ve Asimptotik ifadesinden elde edilen eğriler 48
Şekil 3.10. k=kompleks, $k_R>0$ ve r=0,1-2,5 aralığı için ikinci tür modifiye Bessel fonksiyonu ve Asimptotik ifadesinden elde edilen eğriler 50
Şekil 3.11. k=kompleks, $k_R<0$ ve r=0,1-10 aralığı için ikinci tür modifiye Bessel fonksiyonu ve Asimptotik ifadesinden elde edilen eğriler 51
Şekil 3.12. f=7,5x10^8 Hz'de TEM_{11} için alanların genlik değişimleri 54
Şekil 3.13. f=7,65x10^8 Hz'de TEM_{11} için alanların genlik değişimleri 55
Şekil 3.14. f=7,65x10^8 Hz'de TEM_{12} için alanların genlik değişimleri 55
Şekil 3.15. f=8x10^8 Hz'de TEM_{11} için alanların genlik değişimleri 56
Şekil 3.16. f=8x10^8 Hz'de TEM_{12} için alanların genlik değişimleri 57
Şekil 3.17. f=8x10^8 Hz'de TEM_{13} için alanların genlik değişimleri 57
Şekil 3.18. f=8,5x10^8 Hz'de TEM_{11} için alanların genlik değişimleri 58
Şekil 3.19. Açık plazma sütun ve b=20mm için MoM'dan elde edilen dispersiyon eğrileri 61
Şekil 3.20. Açık plazma sütun ve b=33,3mm için MoM'dan elde edilen dispersiyon eğrileri 62
Şekil 3.21. Açık plazma sütun ve b=50mm için MoM'dan elde edilen dispersiyon eğrileri 62
Şekil 3.22. Açık plazma sütun ve b=100mm için MoM'dan elde edilen dispersiyon eğrileri 63
Şekil 3.23. Tam çözümden ve MoM'dan elde edilen dispersiyon eğrileri 65
Şekil 3.24. Tam çözümden ve MoM'dan elde edilen dispersiyon eğrileri (İletilen Modlar) 65
Şekil 3.25. Seri açılım sayısı – hesaplama süresi eğrisi 66
Şekil 3.26. f=810 MHz'de iletilen mod için seri açılım sayısı – yüzde hata eğrisi 67
Şekil 4.1. Foster reaktans fonksiyonu 73
Şekil 4.2. Problemin Geometrisi 73

Şekil 5.1. ω_p=c=1, $\bar{\alpha}$=0,05 değerleri için $\underline{i}_n^+ \frac{dZ}{dj\omega} \underline{i}_n + \underline{v}_n^+ \frac{dY}{dj\omega} \underline{v}_n$ formu..... 116

Şekil 5.2. ω_p=c=1, $\bar{\alpha}$=0,05 değerleri için $\underline{v}_n^+ X^{-1} \underline{v}_n$ ve $\underline{v}_n^+ B \underline{v}_n$ ifadeleri ve β..... 117

TABLOLAR DİZİNİ

Tablo 3.1. Tam çözümden elde edilen farklı frekanslardaki modların sayısal değerleri 53
Tablo 3.2. Açık dalga kılavuzları için kompleks dalga tipleri 59

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\vec{E}$: Elektrik alan vektörü, (Volt/metre)
$\vec{H}$: Manyetik alan vektörü, (Amper/metre)
$\vec{D}$: Elektrik akı yoğunluğu vektörü, (Coulomb/metrekare)
$\vec{B}$: Manyetik akı yoğunluğu vektörü, (Weber/metrekare)
$\vec{J}$: Kaynak akım yoğunluğu vektörü, (Amper/metrekare)
ε : Elektriksel geçirgenlik, (Farad/metre)
ε_0 : Boşluk ortam için elektriksel geçirgenlik, (8.854×10^{-12} Farad/metre)
$\tilde{\varepsilon}$: Plazma için tensör elektriksel geçirgenlik
μ : Manyetik geçirgenlik, (Henry/metre)
μ_0 : Boşluk ortam için manyetik geçirgenlik, ($4\pi \times 10^{-7}$ Henry/metre)
σ : İletkenlik, (Siemens/metre)
r, φ, z : Silindirik koordinat sistemi değişkenleri
a : Dalga kılavuzu yarıçapı
γ : Kompleks yayılım sabiti
k_0 : Boşluk ortam için yayılım sabiti
ω : Açısal çalışma frekansı, (rad/saniye)
ω_p : Açısal plazma frekansı, (rad/saniye)
ω_c : Açısal hızlandırıcı frekansı, (rad/saniye)
c : Işık hızı, (3×10^8 km/s)
m : Azimutal değişim
t : Zaman, (saniye)
J_m : m. dereceden birinci tip Bessel fonksiyonu
N_m : m. dereceden ikinci tip Bessel fonksiyonu
K_m : m. dereceden ikinci tip modifiye Bessel fonksiyonu
N : Açınım öz fonksiyon sayısı

Kısaltmalar

Adj : Ek Matris (Adjugate)
det : Determinant
MoM : Method of Moment (Moment Metodu)
TE : Transverse Electric (Enine Elektrik)
TM : Transverse Magnetic (Enine Manyetik)
tr : Matrisin İzi (Trace)

KAYIPSIZ OPTİK DALGA KILAVUZLARINDA İLETİLEN MODLARIN VE METAMATERYAL YÜKLÜ KAPALI KILAVUZLARDA GERİYE DOĞRU DALGALARIN TRANSMİSYON HATTI EŞDEĞERLİKLERİ YÖNTEMİ İLE İNCELENMESİ

ÖZET

Çalışmada, öncelikle açık dalga kılavuzu yapısına ait kompleks dispersiyon karakteristiklerinin, yapının metalik bir cidarla kapatılmış modeli kullanılarak elde edilmesi amaçlanmaktadır. Model, kapalı yapıya ait çözümler genelleştirilmiş telgrafçı denklemlerini temel alan Moment Metodu (MoM) kullanılarak elde edilmiştir. Sızıntılı dalga modlarının çok geniş uygulama alanları ve önemli fizikler özelliklerinin yanı sıra, matematiksel olarak uygunsuz olmaları, çalışmamızda gerçekleştirilen silindirik açık dalga kılavuzuna ait kompleks modların kapalı kılavuz yapısı kullanılarak modellenmesini engellemektedir. Çünkü, kapalı kılavuz yapılar için sınır koşulları olan sınırda elektrik alanın teğetsel bileşeni ve manyetik alanının dik bileşeninin sıfıra eşit olması kuralı ihlal edilmektedir. Ayrıca modellemede kullanılacak olan iletim hattı eşitlikleri dik baz fonksiyonların tam kümesinden oluşmaktadır. Sızıntılı dalgaların sonsuzdaki sınır koşullarını ihlal etmesi ve dik baz fonksiyonlarının bir tam kümesinin üyesi olmamaları yöntemi çalışmaz hale getirmektedir. Çalışmada, silindirik plazma sütun açık dalga kılavuzuna ait tüm modların uygunluğu analitik ve sayısal olarak gösterilmiştir. Yapıya ait bu uygun modlar izotropik plazma sütun yüklü kapalı silindirik dalga kılavuzu modeli kullanılarak elde edilmiştir. Gerçek çözümden ve model sistemden elde edilen sayısal çözümler aynı grafik üzerinde sunulmuştur. Ayrıca modelleme kullanılan yapının dış cidar yarıçapı arttırılarak, modellemeden elde edilen sonuçlarda açık kılavuza ait gerçek sonuçlara yaklaşıldığı gösterilmiştir. Çalışmada ikinci amaç, Foster reaktans teoreminin metamateryal ortamlar için uygulanabilirliğinin metamateryal yüklü yapılara ait iletim hattı eşdeğeri eşitlikleri kullanılarak araştırılmasıdır. Bu kapsamda jirotropik ortamla dolu kapalı, üniform dalga kılavuzunun bir kesitindeki zamana göre ortalama depolanmış elektrik ve manyetik enerjiler için ifadeler iletim hattı eşdeğeri eşitlikleri cinsinden ayrı ayrı elde edilmiştir. Jirotropik metamateryal yüklü, kapalı, üniform, kayıpsız dalga kılavuzları için de geriye doğru dalgaların varlığı için gerek ve yeter koşullar iletim hattı eşdeğeri eşitlikleri cinsinden elde edilmiştir. Bu eşitlikler sisteminde pozitif reel matris olma durumunu bozan kutbu olan, admitans katsayı matrisine sahip iki dalga kılavuzu yapısı için negatif zamana göre ortalama depolanmış elektromanyetik enerji ve geriye doğru dalgaların beraber var olduğu ispatlanmıştır. Foster reaktans teoreminin, yüklü ortam aktif olduğunda ve bu yüzden eşitlikler sisteminde katsayılar matrislerinin pozitif reel olma durumu bozulduğunda, metamateryal ortam yüklü bir dalga kılavuzu için sağlanmadığı gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Açık Dalga Kılavuzları, Foster Reaktans Teoremi, Metamateryal Ortam, Moment Metodu, Uygun ve Uygunsuz Dalgalar.

INVESTIGATION OF TRANSMITTED MODES OF LOSSLESS OPTICAL WAVEGUIDES AND BACKWARD WAVES OF METAMATERIAL LOADED CLOSED WAVEGUIDES WITH TRANSMISSION LINE EQUIVALENT METHOD

ABSTRACT

In the study, it is aimed that complex dispersion characteristics of an open waveguide are obtained by using its metallic closed model. Equations, which belong to metallic closed model, are obtained by using Method of Moment (MoM) based generalized telegraphest's equations. Even though leaky wave modes have very large implementation field and important physical phenomenon, their mathematically improper nature prevents the modeling which supplies to obtain approximately complex modes of open waveguide from closed waveguide structure. Because boundary conditions for metallic closed waveguides, which tangential component of electric field and normal component of magnetic field equal to zero at metallic wall, are violated. Besides transmission line equations used in modeling consist of a complete set of orthogonal base functions. The conditions, which leaky waves violate the boundary conditions at infinite and they are not a member of complete set of orthogonal base functions, prevent to work the model. In the study, propriety of modes of cylindrical plasma column open waveguide are shonw analytically and numerically. These proper modes of the structure are obtained from the model fo the structre, isotropic plasma column loaded closed cylindrical waveguide. In the study, numerical values obtained from characteristic equations system and model structure for cylindrical isotropic plasma column open waveguide are presented in the same figure. Additionally, it is shown that the numerical results obtained from the model approach to the exact solution while radius of metallic waveguide frame is gets larger. Secondly, in the study, it is investigated whether metamaterial medium is suppled by using transmission line equivalent equations belonging to metamaterial loaded structures, or not. Individual expressions are obtained for time averaged stored electric and magnetic energies in a section of a closed, uniform waveguide filled with gyrotropic medium in terms of transmission line equivalent equations. Necessary and sufficient conditions in terms of transmission line equivalent equations are presented for the existence of backward waves in closed, uniform, lossless waveguides filled with gyrotropic metamaterials. Coexistence of intervals of negative time averaged stored electromagnetic energy and backward waves are proven for two waveguide structures with types of poles in their admittance coefficient matrix in MoM that cause the matrix to cease to be positive real. Foster's reactance theorem is shown to fail for a waveguide with metamaterial filling medium when the medium is active and hence when the coefficient matrices in MoM cease to be positive real.

Keywords: Open Cylindirical Waveguides, Foster's Reaktance Theorem, Metamateryal Medium, Method of Moment, Proper and Improper Waves.

GİRİŞ

Çalışmamızın ilk amacı açık dalga kılavuzu yapıları için elde edilen dispersiyon karateristiklerinin, yapının metalik bir cidar ile çerçevelenerek elde edilen kapalı modeline ait Moment Metodu (Method of Moment- MoM) çözümleri kullanılarak elde edilmesidir. Moment Metodu yarı analitik olarak adlandırılan bir yöntemdir. Yarı analitik yöntemlerde, ele alınan problemin özellikleri kullanılarak çözümü mümkün olan bir noktaya kadar analitik olarak yürütülerek bir integral gösterim, bir seri açılımı vb. şekilde formüle edilir. Çalışmamızda, Moment yönteminin incelenen yapılara uygulanmasında, iletim hattı eşdeğerliği olarak adlandırılan kapalı dalga kılavuzu yapısının sonsuz sayıda iletim hattı denklemleri sistemi ile modellenerek kısmi diferansiyel denklemlerden oluşan Maxwell denklemlerinin, sadece yayılma yönüne bağlı adi diferansiyel denklem sistemine dönüşmesi sağlanmıştır. Yöne bağlı türev, sabit bir değer ile çarpmaya eşit olduğundan adi diferansiyel denklem sistemi, cebrik denklem sistemine dönüşür.

Açık dalga kılavuzu yapılarında, sönümlü ve iletilen modlar ile birlikte matematiksel olarak uygun olan kompleks modlar ve matematiksel olarak uygun olmayan kompleks değerli sızıntı modları var olabilmektedir. Kapalı kılavuz yapısı ile gerçekleştirilen modellemede, sönümlü, iletilen ve matematiksel olarak uygun kompleks modlar MoM ile modellenebilmekteyken, matematiksel olarak uygunsuz sızıntı modlarının MoM ile modellenebilmesi mümkün olmamaktadır. Çünkü sızıntı modları, MoM modelinde kullanılan kapalı kılavuz yapıları için sınır koşulları olan sınırda elektrik alanını teğetsel bileşeninin ve manyetik alanının dik bileşeninin sıfıra eşit olması kuralı otomatik olarak ihlal etmektedirler. Ayrıca modellemede kullanılacak olan iletim hattı eşdeğeri eşitlikleri dik baz fonksiyonların tam kümesinden oluşmaktadır. Sızıntı modlar ise dik baz fonksiyonlarının bir tam kümesinin üyesi değildirler.

Sızıntı modlar haricindeki karakteristik eşitlikler sistemini sağlayan kompleks değerli yayılım sabitine sahip kompleks modların, matematiksel olarak uygun modlara karşı

düştüğü, çalışmamızda analitik ve sayısal olarak gösterilmiştir. Ayrıca açık silindirik plazma sütun için elde edilen bu modlar yapının kapalı MoM modeli kullanılarak elde edilmiş olup sonular aynı şekil üzerinde verilerek yöntemin geçerliliği gösterilmiştir. Yapılan çalışmalar sonucunda beklendiği üzere modellemede kullanılan kapalı yapının dış yarıçap değeri arttıkça elde edilen sonuçların açık kılavuzun tam çözüm değerlerine yaklaştığı gösterilmiştir. Gerçekleştirilen sayısal hesaplamalar sonucunda kullanılan terim sayısı arttıkça MoM'dan elde edilen sonuçların gerçek sonuca yaklaştığı, hesaplama sürelerinin de bununla birlikte arttığı gösterilmiştir.

Çalışmamızın ikinci amacı ise, Foster reaktans teoreminin metamateryaller ile yüklü kapalı kılavuzlar için sağlanıp sağlanmadığının metamateryal yüklü yapılara ait iletim hattı eşdeğeri eşitlikleri kullanılarak araştırılmasıdır. Bu amaçla literatürde var olan Foster reaktans teoreminin zamana göre ortalama depolanmış elektrik ve manyetik enerji toplamları cinsinden ifadesi tekrar elde edilmiştir. Daha sonra, elektrik alan ve manyetik alan vektörlerinin iletim hattı eşdeğerliği eşitliklerinin elde edilmesinde kullanılan modal gösterimleri ve iletim hattı eşdeğeri eşitlikleri kullanılarak, Foster reaktans teoreminin iletim hattı eşdeğerliği eşitlikleri cinsinden ifadesi elde edilmiştir. Elde edilen sonuca göre depolanan elektrik ve manyetik enerjinin zaman ortalaması ifadesi W_e+W_m, Z ve Y matrisleri iletim hattı eşdeğerliğinde ortaya çıkan empedans ve admitans matrisleri olmak üzere,

$$W_m + W_e = \frac{1}{4}(z_2 - z_1)\left[v^+ \frac{dY}{dj\omega} v + i^+ \frac{dZ}{dj\omega} i \right]$$

olarak bulunmuştur. Metamateryal ortamlarda $W_e+W_m < 0$ olabildiği için, bu eşitlikten bu tür ortamlarda

$$i^+ \frac{dZ}{dj\omega} i < 0 \text{ ve/veya } v^+ \frac{dY}{dj\omega} v < 0$$

olması zorunluluğu ortaya çıkar ki bu da Z ve Y için Foster reaktans teoreminin sağlanmadığı sonucunu getirir.

Burada vurgulanması gereken husus şudur, bu çalışmada Foster reaktans teoremini sağlayıp sağlamadığı kontrol edilen Z ve Y matrisleri, MoM yaklaşımında karşılaşılan katsayı matrisleri olup [80]'deki gibi bir mikrodalga devresinin bir kapısından gözlenen empedansın Foster reaktans teoremini sağlayıp sağlamadığı değildir. Dolayısıyla, buradaki Z ve/veya Y matrisleri,

$$W_m + W_e = \frac{1}{4}(z_2 - z_1)\left[v^+ \frac{dY}{dj\omega} v + i^+ \frac{dZ}{dj\omega} i \right]$$

denkleminin negatif olduğu her frekans aralığında Foster matrisi olmayacaktır.

Sonuç olarak metamateryal yüklü kapalı kılavuz yapılarının Foster reaktans teoremini sağlamasıyla ilgili iletim hattı eşdeğerliği eşitlikleri cinsinden ifadeler elde edilmiştir. Ek olarak literatürde ilk kez iletim hattı eşdeğeri eşitlikleri cinsinden zamana göre ortalama depolanmış elektrik ve manyetik enerji ifadeleri ayrı ayrı elde edilmiştir.

Ayrıca çalışmamızda, kayıpsız, jirotropik doğal materyal yüklü kapalı dalga kılavuzlarında geriye doğru dalgaların varlığı için elde edilen gerek ve yeter koşullar referans alınarak, jirotropik metamateryal dolu kılavuz yapılarında geriye doğru dalga modları için gerek ve yeter koşullar elde edilmiştir. Böylece geriye doğru dalgaların varlık koşulları için özdeğerlerin ve özvektörlerin türevlerini içeren ifadeler yerine özdeğerlerin ve özvektörlerin türev içermeyen kuadratik formları ve katsayılar matrislerinin türevlerini içeren, bilinen ifadeleri cinsinden elde edilmiştir. Bununla birlikte, negatif zamana göre ortalama depolanmış enerji frekans aralığına yol açan, admitans matrisi için de tipik olmayan kutba sahip yapılar için böyle bir kutbun ve neden olduğu böyle bir aralığın bir geriye doğru dalga modu aralığına neden olduğu gösterilmiştir. Bu dielektrik geçirgenlik matrisinde, jω ekseninde basit olmayan kutup için olası durumlar, jω ekseninde bir kutupta rezidü matrisinin non-negatif tanım özelliğinin bozulması durumları ve sağ yarı düzlemde mevcut kutup durumları incelenerek detaylandırılmıştır. Elde edilen sonuçlar, bu tipik olmayan kayıpsız üç tür kutba sahip, tek eksenel soğuk sürüklenen plazma ile yüklü dalga kılavuzu, kayıpsız izotropik metametaryal yüklü kare dalga kılavuzu ve negatif sönüm katsayısına sahip metamateryal ortamla dolu kare dalga kılavuzu örnekleri

üzerinde analitik olarak incelenmiştir. Ayrıca sonuçların geçerliliği tek eksenel soğuk sürüklenen plazma ile yüklü dalga kılavuzu için sayısal olarak da gösterilmiştir.

1. AÇIK DALGA KILAVUZU YAPILARI, MOMENT METODU VE FOSTER REAKTANS TEOREMİ

1.1. Dalga Kılavuzları ve Açık Dalga Kılavuzu Yapıları

Elektromanyetik enerjiyi bir noktadan başka bir noktaya istenen doğrultuda taşıyabilen elektromanyetik yapılara dalga kılavuzu denir. Dalga kılavuzları başlangıçta yalnız metalik kapalı yapılardan oluşuyordu [1], sonrasında keşfedildi ki; elektromanyetik dalgalar bir dielektrik materyal sınır tarafından da kılavuzlanabilmektedir [2]. Dalga kılavuzları elektromanyetik, mikrodalga, elektrodinamik kitaplarının temel konularından biridir ve dalga kılavuzları açık dalga kılavuzları ve kapalı dalga kılavuzları olarak iki sınıfta gruplandırılabilir [3]-[15]. Kapalı dalga kılavuzları, dalga kılavuzunu kapatan yüzeyin bir iletken olması ile sınıflanırlar, diğer durumlarda ise dalga kılavuzu açık kılavuz sınıfındadır. Dalga kılavuzları silindirik, eliptik veya dikdörtgensel kesite sahip olabilirler. Dikdörtgensel ve silindirik kesite sahip dalga kılavuzları uygulamada en çok kullanılan yapılardır. Metalik kapalı dalga kılavuzları içi boşluk, dielektrik gibi izotropik, plazma veya ferrit gibi izotropik olmayan yapılarla, homojen veya kısmen doldurulabilir. Üniform dalga kılavuzlarında, ortam parametreleri olan elektriksel ve manyetik geçirgenliğin dalga kılavuzu kesiti içinde sabit olması dalga kılavuzunu homojen olarak nitelendirir. Ortam parametrelerinin skaler fonksiyonlar olarak değişmesi durumunda dalga kılavuzu homojen olamayan olarak nitelendirilir. Ayrıca üniform dalga kılavuzlarında, ortam parametrelerinin matrissel büyüklüklerle temsil edilebilmesi durumunda ise dalga kılavuzu anizotropik olarak nitelendirilir.

Kapalı dalga kılavuzu içerisinde sinyaller, dalga kılavuzunun boyutları tarafından belirlenen ve kesim frekansı olarak adlandırılan, belirli bir frekansın üzerindeki frekanslarda yayılırlar. Eğer sinyalin frekansı, kesim frekansından daha küçük ise o kesim frekansına ilişkin modda yayılma mümkün olamaz.

Kapalı dalga kılavuzlarında, milimetrik dalga boyunda, pek çok mühendislik uygulaması için dalga zayıflaması oldukça yüksektir. Bu zayıflamanın temel nedeni dalga kılavuzunun duvarlarında indüklenen yüzey akımlarının omik kayıplarıdır. Açık dalga kılavuzlarında ise yüzey iletimi yoktur ve duvar kayıpları dalga zayıflamasına neden olan bir etken değildir. Kılavuzlanmış enerjinin bir kısmı kılavuz içinde, bir kısmı ise kılavuzun dışında yayılır [16]-[18]. Açık dalga kılavuzları, metal bir kalkanla tamamıyla kaplanmamış ve dış sınırları, elektromanyetik alanın ilerleme yönünün ters yönünde sonsuza doğru yönelmesine izin veren dalga kılavuzu yapılarıdır. Açık dalga kılavuzları optik iletişim sistemlerinde ve entegre optik sistemlerde kullanılırlar. Açık dalga kılavuzlarının mikrodalgada ve milimetre dalga boyunda çalışabilmesi, onların geniş bir uygulama alanında kullanılmalarını sağlar [19].

Optik dalga kılavuzları açık dalga kılavuzlarının en temel yapılarıdır. Optik dalga kılavuzları iletilecek dalga olarak ışığı kullanan ve enerjiyi ışık aracığıyla yönlendiren kılavuzlardır. Bir haberleşme sisteminde taşıyıcı sinyal olarak ışığın kullanılması düşüncesi eskilere dayanır. 1870 yılında Tyndall ışığın su içinde kılavuzlanabileceğini göstermiştir [20]. 1960 yılında lazerin bulunmasıyla ışığın iletimi çalışmaları hızlanmıştır. Lazerin yönlülüğü ve tek dalga boylu olması özellikleri ışık kaynağı olarak bu aygıtların kullanılmasını uygun hale getirmiştir.

Optik dalga kılavuzlarının çalışma prensibi ışığın elektriksel (permittivity) veya manyetik (permeability) iletkenliğinin farklı olduğu ortamlardan birinden diğerine geçerken gösterdiği fiziksel tepkilerden meydana gelmektedir. Farklı kırılma indislerine sahip bir ortamdan diğerine geçen elektromanyetik dalga için kırılma ve yansıma olayları meydana gelir. Eğer elektromanyetik dalganın geliş açısı, kritik açıdan daha büyük olursa kırılma meydana gelmez, sadece yansıma meydana gelir. Böylece elektromanyetik dalganın tüm enerjisi kılavuz içinde hapsedilir. Eğer elektromanyetik dalganın geliş açısı, kritik açıdan daha küçük olursa kırılma meydana gelir. Kırılan ışınlar sızıntı ışınları olarak adlandırılabilir. Çünkü elektromanyetik dalga iletim yönünde yayılması için kılavuzlanmasına rağmen elektromanyetik enerji aynı zamanda enine yönünde yayılmaktadır. Böylelikle elektromanyetik dalga iletim yönünde yayılırken dalga enerjisi sürekli olarak enine yönde serbest uzaya sızar. Elektromanyetik güç sabit olarak sızdığında eksenel alan

genliği azalır, fakat bu malzemenin emişinden (absorption) kaynaklanmaz. Matematiksel olarak, bu dalgalar uygunsuzdur çünkü dalga genliği enine artar ve sonsuzdaki yayılma koşulu ihlal edilmiş olur. Bu, sızıntı dalgalarının fiziksel olmadığını gösterir. Bununla birlikte, sızıntı dalgaları fiziksel olarak ölçülebilmektedir [21] ve sızıntı dalga antenleri, dielektrik rezenatör, sızıntı dalga filtreleri, yönsel kuplör (directional copuler) gibi pek çok elektromanyetik uygulamada kullanılırlar [2].

Çok çeşitli geometrik yapıya sahip optik dalga kılavuzları vardır. Bunlardan bazıları; şerit (strip) dalga kılavuzu, gömülü şerit dalga kılavuzu, çıkıntılı dalga kılavuzu, ters çıkıntılı dalga kılavuzu, mikroşerit hat (microstrip line), boşluk hat (slot line), eşdüzlemli (coplanar) dalga kılavuzu, görüntü (image) kılavuzu, silindirik veya dikdörtgensel açık dielektrik dalga kılavuzu ve optik fiberler olarak sıralanabilir [22]-[24]. Düzlemsel (Planar) dalga kılavuzları açık dalga kılavuzlarının temel örnekleridir. İki dielektrik malzemenin birleştirilmesiyle gerçekleştirilen açık düzlemsel dalga kılavuzu örnekleri; şerit, gömülü şerit, çıkıntılı ve ters çıkıntılı dalga kılavuzu yapılarıdır. İletken şeritler ile dielektrik malzemelerin birleştirilmesiyle gerçekleştirilen açık düzlemsel dalga kılavuzu örnekleri; mikroşerit hat, boşluk hat, eş düzlemli dalga kılavuzu ve imaj kılavuzu yapılarıdır. Açık dalga kılavuz yapılarına başka bir örnek düzlemsel olmayan silindirik açık elektromanyetik dalga kılavuzu yapısıdır. Silindirik açık dalga kılavuzu yapısı için örnek uygulama fiber optiktir. Optik fiberler; düşük kayıp, yüksek bant genişliği ve ses, veri, görüntü sinyallerinin taşınmasındaki iletim karakteristiğinin iyi olması nedeniyle geniş ölçüde kullanılırlar [2], [19].

1.2. Moment Metodu ve Tez Çalışmasındaki Yeri

Maxwell denklemlerinin her yapı için analitik çözümü yoktur. Çözümü analitik olarak mümkün olmayan yapıların çözümü, yarı analitik veya salt sayısal yöntemler yardımıyla ve bu yöntemlerin zorunlu olarak içerdikleri bazı yaklaşıklıklar altında elde edilebilir. Bu yöntemlerden biri Schelkunoff tarafından verilmiştir [33]. Bu çalışmada Schelkunoff, kısmi diferansiyel denklemlerden oluşan Maxwell denklemlerini ve sınır koşullarını kullanarak kapalı dalga kılavuzunu sonsuz sayıda iletim hattı denklem sistemi olarak modeller ve böylece kısmi diferansiyel

denklemlerden oluşan Maxwell denklemlerini, iletim hattı eşdeğerli eşitlikleri olarak adlandırılan sadece yayılma yönüne bağlı adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürür. Yöne bağlı türev, sabit bir değer ile çarpmaya karşı düştüğünden adi diferansiyel denklem sistemi, cebrik denklem sistemine dönüşür. Böylece, analitik çözümü mevcut olmayan yapıların çözümü yaklaşık olarak elde edilir. İletim hattı eşdeğerliği olarak adlandırılan bu yöntemin en genel adı Moment Metodudur (Method of Moment-MOM). Moment Metodu dağılım/saçılma ve yayılım problemlerinin sayısal benzetiminde sıkça kullanılan bir yöntemdir [35]. Yöntemin diğer bir önemli avantajı elde edilen sonuçların geçerliliğinin çok iyi olmasıdır. Çünkü yöntemde kullanılan lineer eşitlikler aslında boş yapının tam çözüm fonksiyonları cinsinden elde edilir [36]. Uygulamada geometrik olarak karmaşık olan yapılar için kullanılabilir olması yöntemin bir diğer avantajıdır [37]. Bu yaklaşım ek olarak açık dalga kılavuzlarının modellenmesinde de kullanılabilmektedir [29], [30], [38].

Çalışmamızda Moment yönteminde kullanılan iletim hattı eşdeğerliği eşitliklerini elde etmek amacıyla üniform dalga kılavuzu için Maxwell denklemlerinden enine alan eşitlikleri türetilmiştir. Genel koordinat sisteminde, hem anizotropik dielektrik geçirgenliğe hem de anizotropik manyetik geçirgenliğe sahip ortam yüklü kapalı dalga kılavuzu için elde edilen iletim hattı eşitliklerinin en genel formu ise Ek-A'de verilmiştir. Çalışmamızda izotropik plazma sütun açık dalga kılavuzu yapının kapalı modeline ait iletim hattı eşdeğeri eşitlikleri kullanılarak modellenmiştir. Nümerik örneklerde incelenen izotropik plazma (veya dielektrik çubuk) yüklü kapalı silindirik dalga kılavuzuna ait iletim hattı eşdeğeri eşitlikleri ise bölüm 2'de verilmiştir.

Çalışmamızda, metamateryaller için Foster reaktans teoreminin geçerliliği incelenmiştir. Bu amaçla iletim hattı eşdeğeri eşitlikleri kullanılarak Foster reaktans teoremi için gerekli ifadeler iletim hattı eşdeğerliği eşitlikleri cinsinden elde edilmiştir. Ayrıca zamana göre ortalama depolanmış elektrik ve manyetik enerji için jirotropik ortam yüklü kapalı dalga kılavuzu yapılarını iletim hattı eşdeğerliği eşitlikleri cinsinden ifadeleri ayrı ayrı elde edilmiştir. Jirotropik metamateryal yüklü kapalı, üniform ve kaynaksız dalga kılavuzlarında geriye doğru dalga varlığı için gerek ve yeter koşullar yine iletim hattı eşdeğerliği eşitlikleri cinsinden elde edilmiştir.

1.3. Dalga Kılavuzları Dispersiyon Karakteristiklerini Elde Etmek İçin Literatürde ve Tez Çalışmasında Kullanılan Yöntemler

Dalga kılavuzlarının dispersiyon karakteristikleri, yapıya ait analitik, yarı analitik veya nümerik yaklaşık çözüm yöntemleri kullanılarak elde edilen, genellikle frekans-yayılım sabiti grafiği olarak sunulan ve elektromanyetik dalganın iletim-kesim frekans bölgelerini gösteren diyagramlardır. Düzgün yapıdaki (uniform), kayıpsız, izotropik ve homojen dalga kılavuzu problemleri standart değişkenlere ayırma yöntemi kullanılarak analitik olarak çözülür. Ayrıca düzgün yapıdaki, kayıpsız fakat heterojen ve/veya anizotropik yapıdaki kapalı dalga kılavuzu problemlerinin ise bir kısmı doğrudan Maxwell denklemleri ve sınır koşuları kullanılarak analitik olarak çözülebilmektedir. Örneğin dielektrik çubuk veya plazma/ferit sütun gibi anizotropik ortamla yüklü silindirik dalga kılavuzları, tabakalı dielektrik yüklü dikdörtgensel dalga kılavuzları için analitik çözüm elde edebilmek mümkün iken, dikdörtgen veya kare yapıdaki bir dielektrik çubukla yüklü dikdörtgensel dalga kılavuzu için analitik çözüm elde etmek mümkün değildir. Analitik çözümün mümkün olmadığı yapılar için bazı yaklaşımlar altında yarı analitik çözümler veya salt sayısal çözümler elde etmek mümkündür.

Yarı analitik yöntemlerde, ele alınan problemin özellikleri kullanılarak çözümü mümkün olan bir noktaya kadar analitik olarak yürütülerek bir integral gösterilim, bir seri açılımı vb. şekilde formüle edilir [30]. Moment yöntemi ve varyasyonel yöntemler bu tip yaklaşımların yaygın biçimde kullanılan örnekleridir. Yarı analitik yöntemlerin sağladığı en önemli avantaj elde edilen çözümler ile problemin parametreleri arasındaki ilişkilerin izlenebilmesine ve böylece problemin fiziğinin daha iyi anlaşılmasına olanak vermeleridir. Ayrıca, problemin ön formülasyonu yapıldıktan sonra sayısal çözümlerin bulunması ve olası gerçek dışı çözümlerin elimine edilmesi genelde çok daha kolay ve hızlı biçimde yapılabilir. Buna karşın ele alınan her değişik problem veya problem grubu için formülasyon adımlarının tekrarlanması gereği, yarı-analitik yöntemlerin kullanımını güçleştiren ve uygulanabilirliğini sınırlayan bir faktördür. Bu nedenle, yarı analitik bir çözüm yönteminin formülasyon adımları tekrarlanmaksızın kullanılabildiği problem grubunun ne kadar geniş olduğu bu yöntemin uygulama açısından değerlerini belirleyen başlıca kriteri oluşturmaktadır. Diğer taraftan, bir ara formülasyon

gerektirmedikleri için sonlu farklar, sonlu elemanlar gibi yöntemlerin farklı problemlerin çözümü amacıyla kullanılmaları daha kolaydır. Ancak, yarı analitik yöntemler ile karşılaştırıldıklarında, bu yöntemler daha fazla bilgisayar kapasitesi/zamanı gerektirmekte ve belli bir problemde elde edilen çözümler ile bu problemin parametreleri ilişkilendirmeye ve/veya hesaplama hatalarının saptanmasına doğrudan olanak vermeme gibi bazı açılardan dezavantaj taşırlar [30].

Bu çalışmada öncelikle açık dalga kılavuzu yapılarına ait kompleks modların yapının kapalı modeli kullanılarak elde edilmesi amaçlanmıştır. Örnek yapı olarak ele alınan açık silindirik plazma dalga kılavuzuna ait dispersiyon eğrileri, Maxwell denklemleri ve sınırda süreklilik koşulları kullanılarak analitik olarak elde edilmiştir. İletilen modlar, her yapı için elde edilen karakteristik eşitlikler sistemi kullanılarak, sabit bir frekans değerinde sistemi sağlayan (determinantını sıfır yapan) yayılım sabiti (iletilen modlar için saf sanal) yarıya bölme yöntemi ile basit bir şekilde elde edilmiştir. Bununla birlikte kompleks modlar ise MATLAB programında fsolve fonksiyonu kullanılarak elde edilmiştir. MATLAB programında fsolve fonksiyonu kendi içerisinde üç farklı algoritma kullanmaktadır. Bunlar; trust-region-reflective, trust-region dogleg ve Levenberg-Marquardt algoritmalarıdır [82]. Kompleks değerli köklerin bulunmasında kullanılan fsolve komutu başlangıç değeri konusunda oldukça katıdır ve başlangıç değeri olarak köke yakın bir değer girilmesini zorunlu kılar. Bu kısıtlamayı aşmak amacıyla şöyle bir yaklaşım uygulanmıştır; literatürde farklı yapılara ait var olan çalışmalarda kompleks modların ortak özelliği olan kompleks modların dispersiyon eğrilerinin yön değiştirdiği noktalarda doğmaları, fsolve komutuna başlangıç değeri belirlenmesinde referans alınmıştır. Çalışmamızda analitik çözümlerden (karakteristik eşitlikler sistemi) elde edilen kompleks dispersiyon eğrileri şekiller üzerinde sunulmuştur.

Çalışmamızda ayrıca, açık kılavuz yapısı metalik bir cidar ile çerçevelenerek modelleme yapılmaktadır. Çerçeveleme sonucu elde edilen kapalı yapıya ait MoM çözümleri kullanılarak yaklaşık dispersiyon eğrileri elde edilmektedir. Bu yaklaşım ilk olarak Ogusu tarafından dikdörtgensel dieletrik açık dalga kılavuzuna ait kılavuzlanmış dalgaların modellenmesinde kullanılmıştır [29]. Daha sonra, Yener tarafından optik film, gömülü tip ve çıkıntılı dalga kılavuzu yapılarına uygulanmış ve tek frekans değerleri için kompleks modlar araştırılmıştır [30].

1.4. Foster Reaktans Teoremi

Foster reaktans Teoremi, herhangi bir kayıpsız devrenin giriş empedansının en genel formunu verir. Bu empedans birbirlerini takip eden rezonans ve anti-rezonans frekanslarına sahip saf reaktanstır [54]. Yani tamamıyla reaktiftir , yani Z = jX ve tabiki Y = jB. Herhangi bir kapılı reaktif son bulan devre için en genel formda Foster reaktans teoremi,

$$\frac{\partial B}{\partial \omega} > 0 \text{ veya } \frac{\partial X}{\partial \omega} > 0$$

koşullarını sağladığında geçerlidir. Bu frekans eksenine karşı reaktans (veya suseptans) fonksiyonunun eğiminin daima pozitif olduğunu belirtir. Foster reaktans teoremi, giriş empedansı kavramını temel alır. Giriş empedansı frekans domeninde (s veya jω domeni) bir filtrenin giriş empedansının matematiksel temsilidir. Tek kapılı devre, sürekli kesir veya kısmi kesir açılımları kullanılarak ifade edilir. Elde edilen ifade elektrik elemanlarından oluşan bir elektrik devresine dönüştürülür. Bu devrenin sonundan bir çıkış alınarak arzu edilen bir transfer fonksiyonuna sahip iki kapılı bir filtre devresi elde edilir [55]. Foster reaktans teoremi genel olarak tek kapılı kayıpsız elektrik devrelerine uygulanmıştır [57].

Foster reaktans teoremini sağlayan devreler kayıpsız pasif devrelerdir. Yükselteç veya transistor gibi aktif eleman barındıran devreler Foster reaktans teoremini sağlamazlar [61]. Aktif elemanların reaktans veya suseptansları frekansa göre negatif eğimli olağan dışı davranış sergilerler, bu yüzden non-Foster elemanlar olarak adlandırılırlar [61], [62], [63], [64]. Non-Foster elemanların basit örnekleri negatif kapasite ve negatif indüktör aktif devrelerle gerçekleştirilirler. Ayrıca pasif kayıpsız materyaller içinde depolanan enerji daima pozitiftir ve boşlukta aynı büyüklükteki hacimde depolanan enerjiden daha büyüktür [65], [66], [67]. Depolanan enerji negatif veya boşlukta depolanan enerjiden daha küçük olması metamateryal yapı içerisine aktif elemanlar gömülmesi ile mümkün olur ve bu durumda Foster reaktans teoremi geçerliliğini kaybeder [67].

Çalışmamızda metamateryal yapılar için Foster reaktans teoreminin geçerliliği ele alınmıştır. Metamateryaller pek çok elemanın birleştirilmesiyle meydana gelen ve

belirli bir frekans bandı için negatif elektriksel ve manyetik geçirgenliğe sahip yapılardır. Metamateryaller, elektromanyetik özellikleri bakımından doğal ortamda bulunmayan veya doğal materyallerde elde edilmesi zor olan fiziksel olarak gerçeklenebilen yapay tasarlanmış materyallerdir [68]. Metamateryaller için Foster reaktans teoremi Munk tarafından ifade edilmiştir [78]. Hem elektrik hem de manyetik geçirgenliklerin her ikisinin belirli bir frekans aralığında aynı anda negatif olduğu çift-negatif (DNG) materyaller için Foster reaktans teoreminin uygulanabilirliği Munk ve Engheta'nın kişisel paylaşımları sonucunda ortaya çıkmış ilginç bir konu olmuştur [79]. . [79] çalışmasında DNG materyallerin Foster reaktans teoremini sağlayıp sağlamadığını konusunda bir kısım bulgular sunulmuştur. [80] çalışmasında ise ENG, MNG durumları ile birlikte DNG durumlar için elde edilen sonuçların bazı ayrıntıları sunulmuştur.

Çalışmamızda bir literatür katkısı olarak iletim hattı eşdeğeri eşitlikleri kullanılarak Foster reaktans teoreminin iletim hattı gerilim ve akımları cinsinden ifadesi elde edilmiştir. Giriş bölümünde de belirtildiği gibi depolanan elektrik ve manyetik enerjinin zaman ortalaması ifadesi (W_e+W_m), iletim hattı eşdeğerliği empedans ve admitans matrisleri cinsinden elde edilmiştir. Metamateryal ortamlarda W_e+W_m<0 olabildiği için, bu tür ortamlarda

$$i^{+}\frac{dZ}{dj\omega}i<0 \text{ ve/veya } v^{+}\frac{dY}{dj\omega}v<0$$

olması zorunluluğu ortaya çıkar ki bu da Z ve Y için Foster reaktans teoreminin sağlanmadığı sonucunu getirir. Bu çalışmada, [80]'deki gibi bir mikrodalga devresinin bir kapısından gözlenen empedansın Foster reaktans teoremini sağlayıp sağlamadığı değil, Foster reaktans teoremini sağlayıp sağlamadığını kontrol ettiğimiz Z ve Y matrisleri MoM yaklaşımında karşılaşılan katsayı matrisleridir. Dolayısıyla bizim Z ve/veya Y matrisimiz W_e+W_m iletim hattı eşdeğerliği cinsinden ifadesinin negatif olduğu her frekans aralığında Foster matrisi olmayacaktır.

Çalışmamızda ek olarak zamana göre ortalama depolanmış elektrik ve manyetik enerji için jirotropik ortam yüklü kapalı dalga kılavuzu yapılarını iletim hattı eşdeğeri eşitlikleri cinsinden ifaleri ayrı ayrı elde edilmiştir. Jirotropik metamateryal yüklü kapalı, üniform ve kaynaksız dalga kılavuzlarında geriye doğru dalga varlığı için

gerek ve yeter koşullar yine iletim hattı eşdeğerliği eşitlikleri cinsinden elde edilmiştir.

1.5. Tez Çalışmasının Amacı ve Gerçekleştirilen Çalışmalar

Bu tez çalışmasına açık dalga kılavuzlarına ait kompleks değerli modların (öncelikle sızıntı modların), yapının metalik bir duvar ile kapatılarak elde edilen kapalı modeline ait iletim hattı eşdeğerliği yöntemi veya Moment Metodu (Method of Moment-MoM) çözümleri kullanılarak yaklaşık olarak elde edilmesi amacıyla başlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda öncelikle yapılara ait karakteristik eşitlikler sistemleri kullanılarak iletilen modlar ve kompleks modlar elde edilmiştir. Gerçekleştirilen çalışmalarda yapılara ait MoM modellerinin elde edilen tüm iletilen modları modelleyebildiği görülmüştür. Bununla birlikte elde edilen kompleks değerli sızıntı modların matematiksel olarak uygunsuz olmaları, diğer bir deyişle sonsuzda

$$\lim_{R\to\infty} RE = \lim_{R\to\infty} RH = 0$$

şeklinde tanımlı sınır koşullarını ihlal etmeleri, bu mod grubunun ilgili yapıya ait MoM modeli ile elde edilememesi sonucunu doğurmuştur. Çünkü MoM modelinde kullanılan kapalı kılavuz yapıları için sınır koşulları olan sınırda elektrik alanın teğetsel bileşeninin ve manyetik alanının dik bileşeninin sıfıra eşit olması kuralı otomatik olarak ihlal edilecektir. Ayrıca modellemede kullanılacak olan iletim hattı eşitlikleri dik baz fonksiyonların tam kümesinden oluşmaktadır [33]. Oysa sızıntılı dalgalar dik baz fonksiyonlarının bir tam kümesinin üyesi değildirler [31]. Sızıntılı dalgaların sonsuzdaki sınır koşullarını ihlal etmesi ve dik baz fonksiyonlarının bir tam kümesinin üyesi olmamaları yöntemi çalışmaz hale getirmektedir. Bu yüzden kompleks değerli modları elde edilen farklı silindirik dalga kılavuzu yapılarından yalnızca açık silindirik plazma sütun yapısı için önerilen yöntem kullanılabilecektir. Bu yüzden ayrıca, açık silindirik plazma yapısı için elde edilen modların uygun modlara karşı düştüğü analitik ve nümerik olarak gösterilmiştir. Bu tez çalışmasında bölüm 2'de, Moment yönteminde kullanılan iletim hattı eşdeğerliği eşitliklerini elde etmek amacıyla üniform dalga kılavuzu için Maxwell denklemlerinden enine alan eşitlikleri türetilmiştir. Genel koordinat sisteminde, hem anizotropik dielektrik geçirgenliğe hem de anizotropik manyetik geçirgenliğe sahip ortam yüklü kapalı

dalga kılavuzu için elde edilen iletim hattı eşitliklerinin en genel formu ise Ek-A'de verilmiştir. Çalışmamızda izotropik plazma sütun açık dalga kılavuzu yapının kapalı modeline ait iletim hattı eşdeğeri eşitlikleri kullanılarak modellenmiştir. Nümerik örneklerde incelenen izotropik plazma (veya dielektrik çubuk) yüklü kapalı silindirik dalga kılavuzuna ait iletim hattı eşdeğeri eşitlikleri ise yine bölüm 2'de sunulmuştur.

Açık silindirik plazma sütun dalga kılavuzu için karakteristik eşitlikler sisteminden elde edilen tam çözümler ve ilgili yapının kapalı modeline ait MoM çözümlerinden elde edilen dispersiyon eğrileri aynı şekil üzerinde verilerek yöntemin geçerliliği gösterilmiştir. Yapılan nümerik hesaplamalar ve ilgili sonuçlar için verilen şekiller sonucunda modellemede kullanılan kapalı yapının dış yarıçap değeri arttıkça elde edilen sonuçların açık kılavuzun tam çözüm değerlerine yaklaştığı gösterilmiştir. Bununla birlikte cidar yarıçapı arttırıldıkça analitik çözümle uyumlu değerlerin elde edilebilmesi için MoM hesaplamalarında daha fazla sayıda TE ve TM öz çözümünün kullanılması ihtiyacı doğmaktadır. Daha fazla öz çözüm kullanılarak yapılacak hesaplamalar hesaplama yükünü ve zamanını arttırmaktadır. Çalışmamızda MoM hesaplamalarında kullanılan seri açılım sayısı "N" ile gösterilmiştir. MoM hesaplamalarında N seri açılım sayısı için N adet TE ve N adet TM öz çözümü kullanılmaktadır ve lineer sistem boyutu NxN olarak elde edilmektedir. Tez çalışmamızda bölüm 3'te, çeşitli seri açılım değerleri kullanılarak MoM'dan elde edilen dispersiyon eğrileri ile tam çözümden elde edilen dispersiyon eğrileri aynı şekil üzerinde verilerek seri açılım sayısı arttıkça elde edilen sonuçların tam çözümle uyumunun arttığı gösterilmiştir. Ayrıca yapılan nümerik hesaplamalar sonucunda elde edilen terim sayısı-yüzde hata ve terim sayısı-hesaplama süresi eğrileri verilmiştir.

Tezin diğer bir amacı metamateryal yapıların Foster reaktans teoremini sağlayıp sağlamadığının jirotropik ortam yüklü kapalı kılavuz yapısına ait iletim hattı eşdeğeri eşitlikleri kullanılarak sorgulamaktır. Bu amaçla öncelikle elektrik alan ve manyetik alan vektörlerinin modal gösterimleri ve iletim hattı eşdeğeri eşitlikleri kullanılarak Foster reaktans teoreminin ifadesi iletim hattı eşdeğeri eşitlikleri cinsinden elde edilmiştir. Gerçekleştirilen işlemler sonucunda zamana göre ortalama depolanmış elektrik ve manyetik enerji toplamlarının işaretinin, yani ilgili yapının Foster reaktans teoremini sağlayıp sağlamadığının iletim hattı eşdeğeri eşitlikleri cinsiden

elde edilen ifade ile belirlenebileceği sonucu elde edilmiştir. Giriş bölümünde vurgulandığı gibi bu çalışmada Foster reaktans teoremini sağlayıp sağlamadığı araştırılan matrisler, MoM yaklaşımında karşılaşılan katsayı matrisleri Z ve Y'dir. Yoksa [80] referansında belirtilen gibi bir mikrodalga devresinin girişinde gözlenen empedans için Foster reaktans teoremi incelenmemektedir. Gerçekleştirilen işlemler ve elde edilen sonuçlar bölüm 4'te ayrıntılı olarak sunulmuştur. Ek olarak literatürde ilk kez iletim hattı eşdeğeri eşitlikleri cinsinden zamana göre ortalama depolanmış elektrik ve manyetik enerji ifadeleri ayrı ayrı elde edilmiştir.

Bölüm 5'te, jirotropik doğal materyal yüklü kapalı dalga kılavuzlarında geriye doğru dalgaların varlığı için elde edilen gerek ve yeter koşullar referans alınarak jirotropik metamateryal dolu kılavuz yapılarında geriye doğru dalga modları için gerek ve yeter koşullar elde edilmiştir. Geriye doğru dalgaların varlık koşulları olarak elde edilen ifadelerin sağladığı avantaj geriye doğru dalgaların varlık koşulları için özdeğer ve özvektörlerin türevleri ile uğraşmak yerine türev içermeyen kuadratik formlarını ve bilinen

$$\frac{dZ}{dj\omega} \text{ ve } \frac{dY}{dj\omega}$$

şeklindeki katsayılar matrislerinin türev ifadeleri kullanmaktır. Bununla birlikte negatif zamana göre ortalama depolanmış enerji aralığına neden olan, Y(p) matrisi içinde tipik olmayan kutba sahip yapılar için böyle bir kutup ve neden olduğu böyle bir aralığın, bir geriye doğru dalga modu aralığına neden olduğu gösterilmiştir. Bu dielektrik geçirgenlik matrisinde jω ekseninde basit olmayan kutup için olası durumlar, jω ekseninde bir kutupta rezidü matrisinin non-negatif tanım özelliğinin bozulması durumları ve sağ yarı düzlemde kutup durumları incelenerek ayrıntılandırılmıştır. Elde edilen sonuçlar tipik olmayan kutba sahip; tek eksenel soğuk sürüklenen plazma ile yüklü dalga kılavuzu, izotropik kayıpsız metametaryal yüklü kare dalga kılavuzu ve negatif sönüm katsayısına sahip metamateryal ortamla dolu kare dalga kılavuzu örnekleri üzerinde analitik olarak incelenmiştir. Ayrıca sonuçların geçerliliği tek eksenel soğuk sürüklenen plazma ile yüklü dalga kılavuzu için nümerik olarak da gösterilmiştir.

2. MOMENT METODU

Dalga kılavuzlarının dispersiyon karakteristikleri, yapıya ait analitik, yarı analitik veya nümerik yaklaşık çözüm yöntemleri kullanılarak elde edilen, genellikle frekans-yayılım sabiti grafiği olarak sunulan ve elektromanyetik dalganın iletim-kesim frekans bölgelerini gösteren diyagramlardır. Düzgün yapıdaki (üniform), kayıpsız, izotropik ve homojen dalga kılavuzu problemleri standart değişkenlere ayırma yöntemi kullanılarak analitik olarak çözülür. Ayrıca düzgün yapıdaki, kayıpsız fakat heterojen ve/veya anizotropik yapıdaki kapalı dalga kılavuzu problemlerinin ise bir kısmı doğrudan Maxwell denklemeleri ve sınır koşuları kullanılarak analitik olarak çözülebilmektedir. Örneğin dielektrik çubuk veya plazma/ferit sütun gibi anizotropik ortamla yüklü silindirik dalga kılavuzları, tabakalı dielektrik yüklü dikdörtgensel dalga kılavuzları için analitik çözüm elde edebilmek mümkün iken, dikdörtgen veya kare yapıdaki bir dielektrik çubukla yüklü dikdörtgensel dalga kılavuzu için analitik çözüm elde etmek mümkün değildir. Analitik çözümün mümkün olmadığı yapılar için bazı yaklaşıklıklar altında yarı analitik çözümler veya salt sayısal çözümler elde etmek mümkündür.

Yarı analitik yöntemlerde, ele alınan problemin özellikleri kullanılarak çözümü mümkün olan bir noktaya kadar analitik olarak yürütülerek bir integral gösterilim, bir seri açılımı vb. şekilde formüle edilir [30]. Moment yöntemi ve varyasyonel yöntemler bu tip yaklaşımların yaygın biçimde kullanılan örnekleridir. Yarı analitik yöntemlerin sağladığı en önemli avantaj elde edilen çözümler ile problemin parametreleri arasındaki ilişkilerin izlenebilmesine ve böylece problemin fiziğinin daha iyi anlaşılmasına olanak vermeleridir. Ayrıca, problemin ön formülasyonu yapıldıktan sonra sayısal çözümlerin bulunması ve olası gerçek dışı çözümlerin elimine edilmesi genelde çok daha kolay ve hızlı biçimde yapılabilir. Buna karşın ele alınan her değişik problem veya problem grubu için formülasyon adımlarının tekrarlanması gereği, yarı-analitik yöntemlerin kullanımını güçleştiren ve uygulanabilirliğini sınırlayan bir faktördür. Bu nedenle, yarı analitik bir çözüm yönteminin formülasyon adımları tekrarlanmaksızın kullanılabildiği problem

grubunun ne kadar geniş olduğu bu yöntemin uygulama açısından değerlerini belirleyen başlıca kriteri oluşturmaktadır. Diğer taraftan, bir ara formülasyon gerektirmedikleri için sonlu farklar, sonlu elemanlar gibi yöntemlerin farklı problemlerin çözümü amacıyla kullanılmaları daha kolaydır. Ancak, yarı analitik yöntemler ile karşılaştırıldıklarında, bu yöntemler daha fazla bilgisayar kapasitesi/zamanı gerektirmekte ve belli bir problemde elde edilen çözümler ile bu problemin parametreleri ilişkilendirmeye ve/veya hesaplama hatalarının saptanmasına doğrudan olanak vermeme gibi bazı açılardan dezavantaj taşırlar [30].

Maxwell denklemlerinin her yapı için analitik çözümü yoktur. Çözümü analitik olarak mümkün olmayan yapıların çözümü, yarı analitik veya salt sayısal yöntemler yardımıyla ve bu yöntemlerin zorunlu olarak içerdikleri bazı yaklaşıklıklar altında elde edilebilir. Bu yöntemlerden biri Schelkunoff tarafından verilmiştir [33]. Bu çalışmada Schelkunoff, kısmi diferansiyel denklemlerden oluşan Maxwell denklemlerini ve sınır koşullarını kullanarak elektrik iletim hatları için telgrafçı eşitliklerine [34] benzeyen bağımsız adi diferansiyel denklemler kümesi elde etmiştir. Bu kümedeki her bir eşitliği elektrik devre teorisinde iyi bilinen büyüklükler cinsinden bir "yayılım modu" olarak tanımlanmıştır. Bir dalga kılavuzu iletim hatlarının bir sonsuz sistemi olarak düşünülebilir. Schelkunoff [33] çalışmasında, kapalı dalga kılavuzunu sonsuz sayıda iletim hattı olarak modelleyerek kısmi diferansiyel denklemlerden oluşan Maxwell denklemlerini, sadece yayılma yönüne bağlı adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürür. Yöne bağlı türev, sabit bir değer ile çarpmaya eşit olduğundan adi diferansiyel denklem sistemi, cebrik denklem sistemine dönüşür. Böylece, analitik çözümü mevcut olmayan yapıların çözümü yaklaşık olarak elde edilir. Bu yöntem ayrıca Moment Metodu (Method of Moment-MOM) olarak da adlandırılır. Moment Metodu dağılım/saçılma ve yayılım problemlerinin sayısal benzetiminde sıkça kullanılan bir yöntemdir [35]. Yöntemin diğer bir önemli avantajı elde edilen sonuçların geçerliliğinin çok iyi olmasıdır. Çünkü yöntemde kullanılan lineer eşitlikler aslında boş yapının tam çözümleridir ve yöntem bu eşitliklerin doğrudan sayısal çözümlerini verir [36]. Uygulamada geometrik olarak karmaşık olan yapılar için kullanılabilir olması yöntemin bir diğer avantajıdır [37]. Bu yaklaşım ek olarak açık dalga kılavuzlarının modellenmesinde de kullanılabilmektedir [29], [30], [38].

Yukarıda bahsedildiği gibi Moment Metodu, sonsuz sayıda iletim hattı olarak modellenen kapalı dalga kılavuzu ile kısmi diferansiyel denklemlerden oluşan Maxwell denklemlerini, sadece yayılma yönüne bağlı adi diferansiyel denklem sistemine ve kapalı dalga kılavuzu için yayılım karakteristiği problemini sonsuz boyutlu bir matris özdeğer problemine dönüştürür. Sonsuz boyutlu matris probleminin boyutu sınırlandırılarak sayısal çözüme ulaşmak mümkündür. Matris sisteminin boyutu arttırılarak ele alınan probleme ilişkin özdeğerlerin yüksek doğrulukla belirlenebilmesi yöntemin diğer bir avantajıdır. Değişkenlere ayırma yönteminin mümkün olduğu dalga kılavuzu yapılarında Maxwell denklemlerinin çözümü ile elde edilen özfonksiyonlar (modlar) bu dalga kılavuzu yapısı içindeki her alan dağılımının ifade edilebileceği tam ve ortogonal bir küme oluştururlar. Bu nedenle, dalga kılavuzunun homojen olmayan ortamlar ile yüklenmesi durumunda problemlerde elde edilecek çözümler bu fonksiyonlardan oluşan serilere açılabilir. Bu tür açılımlarda, modal alanları kullanmak sonuç serilerin yakınsama özellikleri açısından da avantaj sağlar. Çünkü bu fonksiyonlar dalga kılavuzunun homojen olmayan veya izotropik olmayan malzeme ile yüklendiği pertürbasyon bölgesi dışındaki sınır koşullarını otomatik olarak sağlarlar [30]. Moment Metodunda modelleme metalik kapalı homojen (genellikle boş) boruya ait çözümler kullanılarak yapılmaktadır. Bu çözüm fonksiyonları sınır koşullarını sağlamaktadır ve problem Maxwell eşitliklerini de sağlayan, çözüm fonksiyonları cinsinden seriler olarak elde edilir. İletken ile kapatılmış yapıya ait sınır koşulları cidarda, elektrik alanın boyuna bileşeninin ve manyetik alanın ise dik bileşeninin sıfıra eşit olmasıdır.

2.1. Üniform Dalga Kılavuzu İçin İletim Hattı Eşitliklerinin Türetilmesi

Üniform kapalı dalga kılavuzları için iletim hattı eşitlikleri, aşağıdaki işlemler takip edilerek elde edilebilir. Bu bölümde üniform, kayıpsız, kaynaksız ve izotropik ortam için iletim hattı eşitlikleri referans [33]'da Schelkunoff tarafından sunulan notasyonlar cinsinden, referans [14]'de verilen aşamalar dikkate alınarak elde edilmiştir. Kayıpsız, kaynaksız ve izotropik ortam için iletim hattı eşitliklerini elde etmek için öncelikle üniform dalga kılavuzu kesitine ait enine alan ifadeleri elde edilmiştir. Daha sonra bu alan ifadeleri modal gösterimler cinsinden iletim hattı eşitliklerine dönüştürülmüştür.

2.1.1. Üniform dalga kılavuzu için enine alan eşitliklerinin türetilmesi

Üniform, kayıpsız, kaynaksız ve izotropik yüklü kapalı dalga kılavuzları için iletim hattı eşitlikleri aşağıdaki işlemler takip edilerek yapılabilir [14]. Öncelikle inceleyeceğimiz ortam için Maxwell denklemlerini ele alalım. İşlemlerimizi (u, v, z) genel koordinat değişkenlerini ele alarak gerçekleştirelim.

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \tag{2.1}$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E} \tag{2.2}$$

Yukarıda da belirtildiği gibi kapalı kılavuz yapıları için sınır koşulları cidarda, elektrik alanın boyuna bileşeni ve manyetik alanın ise dik bileşeni sıfıra eşittir.

$$\vec{E}_t \times \vec{u}_n = 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0 \tag{2.4}$$

Burada $\vec{u}_n$, kılavuz sınırına dik kesit içinde bulunan birim vektördür. E_z ve H_z ise sırasıyla elektrik ve manyetik alan vektörlerinin z bileşenleridir. z yönünde kılavuzlanmış modlar için diklik koşulları yalnızca enine bileşenleri kapsar. Bu yüzden Eşitlikler (2.1) ve (2.2)'den bağımlı E_z ve H_z bileşenlerinin atılması ve bağımsız enine bileşenler için alan eşitliklerinin türetilmesi gerekir. Eşitlik (2.1)'i $\vec{e}_z$ ile sırasıyla vektörel ve skaler çarpalım. Eşitlik (2.1) öncelikle $\vec{e}_z$ ile vektörel çarpılırsa Eşitlik (2.5) elde edilir.

$$\vec{e}_z \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) = j\omega\mu\left(\vec{H} \times \vec{e}_z\right) \tag{2.5}$$

$\vec{A}$ genel koordinat sisteminde tanımlı bir vektör olmak üzere, aşağıda verilen vektör eşitliği tanımlıdır.

$$\vec{e}_z \times \left(\nabla \times \vec{A}\right) = \nabla_t A_z - \frac{\partial}{\partial z}\vec{A}_t \tag{2.6}$$

Burada, ∇_t ifadesindeki t alt indisi ∇ operatörünün kesit içi bileşenlere ilişkin bölümünü, $\vec{A}_t$ ifadesindeki t alt indisi $\vec{A}$ vektörünün kesit içi bileşenlere ilişkin bölümünü temsil etmektedir. Bu vektör eşitliği kullanılarak, Eşitlik (2.5) aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\nabla_t E_z - \frac{\partial}{\partial z}\vec{E}_t = j\omega\mu\left(\vec{H}\times\vec{e}_z\right) \tag{2.7}$$

Eşitlik (2.1), $\vec{e}_z$ ile skaler çarpılırsa Eşitlik (2.8) elde edilir.

$$\vec{e}_z\cdot\left(\nabla\times\vec{E}\right) = -j\omega\mu\left(\vec{e}_z\cdot H_z\right) \tag{2.8}$$

$\vec{A}$ genel koordinat sisteminde tanımlı bir vektör olmak üzere, aşağıda verilen vektör eşitliği tanımlıdır.

$$\vec{e}_z\cdot\left(\nabla\times\vec{A}\right) = -\nabla_t\cdot\left(\vec{e}_z\times\vec{A}\right) \tag{2.9}$$

Yukarıda verilen vektör eşitliğinden Eşitlik (2.8), şu şekilde elde edilir.

$$-\nabla_t\cdot\left(\vec{e}_z\times\vec{E}\right) = -j\omega\mu H_z \tag{2.10}$$

Benzer şekilde, Eşitlik (2.2)'yi $\vec{e}_z$ ile sırasıyla vektörel ve skaler çarpılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\vec{e}_z\times\left(\nabla\times\vec{H}\right) = j\omega\varepsilon\left(\vec{e}_z\times\vec{E}\right) \tag{2.11}$$

$$\vec{e}_z\cdot\left(\nabla\times\vec{H}\right) = j\omega\varepsilon\left(\vec{e}_z\cdot\vec{E}\right) \tag{2.12}$$

Özdeşlikler (2.6) ve (2.9)'u kullanarak eşitlikleri düzenlersek Eşitlikler (2.13) ve (2.14) elde edilir.

$$\nabla_t H_z - \frac{\partial}{\partial z}\vec{H}_t = j\omega\varepsilon\left(\vec{e}_z\times\vec{E}\right) \tag{2.13}$$

$$\nabla_t \cdot \left(\vec{H} \times \vec{e}_z\right) = j\omega\varepsilon E_z \tag{2.14}$$

Eşitlik (2.7)'de E_z yerine Eşitlik (2.14)'de elde edilen E_z'yi koyarsak,

$$\frac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla_t\left[\nabla_t \cdot \left(\vec{H} \times \vec{e}_z\right)\right] - \frac{\partial}{\partial z}\vec{E}_t = j\omega\mu\left(\vec{H} \times \vec{e}_z\right)$$

elde edilir. İfadeyi elektrik alan vektörünün enine bileşenlerinin iletim yönüne göre türevleri yalnız kalacak şeklide düzenlersek aşağıdaki ifade elde edilir.

$$-\frac{\partial}{\partial z}\vec{E}_t = j\omega\mu\left(\vec{H} \times \vec{e}_z\right) - \frac{1}{j\omega\varepsilon}\left[\nabla_t\nabla_t \cdot \left(\vec{H}_t \times \vec{e}_z\right)\right]$$

Eşitliğin sağ tarafını $\left(\vec{H}_t \times \vec{e}_z\right)$ ortak parantezine alırsak, izotropik, kayıpsız ve kaynaksız ortam için elektrik alan vektörünün enine alan ifadesinin yayılım yönüne göre türevi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$-\frac{\partial}{\partial z}\vec{E}_t = j\omega\mu\left(1 + \frac{\nabla_t\nabla_t}{\omega^2\varepsilon\mu}\right) \cdot \left(\vec{H}_t \times \vec{e}_z\right) \tag{2.15}$$

Benzer şekilde, Eşitlik (2.13)'te H_z yerine Eşitlik (2.10)'da elde edilen H_z'yi koyarsak,

$$-\frac{\partial}{\partial z}\vec{H}_t = j\omega\varepsilon\left(\vec{e}_z \times \vec{E}\right) - \nabla_t\frac{1}{j\omega\mu}\left[\nabla_t \cdot \left(\vec{e}_z \times \vec{E}\right)\right]$$

İfadeyi, eşitliğin sağ tarafını $\left(\vec{e}_z \times \vec{E}\right)$ ortak parantezine alarak düzenlersek, izotropik, kayıpsız ve kaynaksız ortam için manyetik alan vektörünün enine alan ifadesinin yayılım yönüne göre türevi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$-\frac{\partial}{\partial z}\vec{H}_t = j\omega\varepsilon\left(1 + \frac{\nabla_t\nabla_t}{\omega^2\varepsilon\mu}\right) \cdot \left(\vec{e}_z \times \vec{E}_t\right) \tag{2.16}$$

Eşitlikler (2.10) ve (2.14) düzenlenirse boyuna alan ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$H_z = \frac{1}{j\omega\mu}\nabla_t \cdot \left(\vec{e}_z \times \vec{E}\right) \tag{2.17}$$

$$E_z = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla_t \cdot \left(\vec{H} \times \vec{e}_z\right) \tag{2.18}$$

2.1.2. Alanların modal gösterimi ve iletim hattı eşitliklerinin türetilmesi

Bu bölümde üniform, kayıpsız, kaynaksız ve izotropik ortam yüklü kapalı dalga kılavuzları için modal gösterimler cinsinden iletim hattı eşitlikleri, aşağıdaki işlemler takip edilerek elde edilecektir. İletim hattı denklemlerini elde etmek için, öncelikle homojen izotropik dalga kılavuzu içerisinde yayılan çeşitli modlar ele alınır. Her mod enine alan dağılım örneği, T(u,v) tarafından tanımlanır. T fonksiyonları, sınır koşullarını sağlayan ve özfonksiyonlar olarak adlandırılan boş kapalı dalga kılavuzunun çözümlerine karşı düşer. Burada u ve v kesit içerisinde herhangi bir noktanın ortagonal koordinatlarıdır. Yukarıda bahsedildiği gibi, enine manyetik (TM) dalgalar için, T fonksiyonu cidarda (sınırda sıfır empedans) sıfır olmalıdır. Enine elektrik (TE) dalgalar için ise T fonksiyonunun dik türevi cidarda sıfır olmalıdır. Her iki dalga tipi birlikte düşünülmesi gerektiği için TM dalgaları $T_{(n)}(u,v)$ ve TE dalgaları $T_{[n]}(u,v)$ olarak gösterilerek ayırt edilir. TM ve TE dalgaları için ayırma sabiti sırasıyla $\chi_{(n)}$ ve $\chi_{[n]}$ ile gösterilir. Çalışmamızda TM modlarına ilişkin büyüklükler $()$ alt indisi ve TE moduna ilişkin büyüklükler $[]$ alt indisi ile gösterilecektir.

T fonksiyonlarının çeşitli modları için diklik koşulu vardır. S, üniform dalga kılavuzunun enine kesiti olmak üzere aşağıdaki integraller diklik koşullarından dolayı kesit üzerinde sıfıra eşittirler.

$$\iint_S T_{(n)} T_{(m)} dS = 0, \qquad \iint_S T_{[n]} T_{[m]} dS = 0, \qquad m \neq n \tag{2.19}$$

$T_{(n)}$ ve $T_{[m]}$ fonksiyonlarının ortagonal olmadıkları vurgulanmalıdır. Bu noktada ($grad_tT$) ve ($flux_tT$) diye isimlendireceğimiz büyüklükleri tanımlayalım. $grad_tT$ doğrudan ∇T'nin enine bileşenlerinden oluşur yani ($\nabla_t T$) şeklindedir, $flux_tT$ ise $\nabla_t T \times \vec{e}_z$'den oluşur. Burada $\vec{e}_z$ boyuna yöndeki birim vektördür. Yukarıdakilere

benzer şekilde T fonksiyonlarının flux ve grad'ları arasında da diklik bağıntıları vardır.

$$\begin{aligned}&\iint_S \text{grad}_t T_{(n)} \cdot \text{flux}_t T_{[m]} dS = \iint_S \text{grad}_t T_{[n]} \cdot \text{flux}_t T_{(m)} dS \\ &= \iint_S \text{grad}_t T_{(n)} \cdot \text{flux}_t T_{(m)} dS = \iint_S \text{grad}_t T_{(n)} \cdot \text{grad}_t T_{[m]} dS = 0\end{aligned} \tag{2.20}$$

u ve v enine değişkenler olmak üzere genel koordinat sisteminde grad_t ve flux_t'nin u ve v bileşenleri aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$\text{grad}_u W = \frac{\partial W}{e_1 \partial u} \qquad \text{grad}_v W = \frac{\partial W}{e_2 \partial v} \tag{2.21}$$

$$\text{flux}_u W = \frac{\partial W}{e_2 \partial v} \qquad \text{flux}_v W = -\frac{\partial W}{e_1 \partial u} \tag{2.22}$$

Burada e_1 ve e_2 koordinat sisteminin metrik çarpanlarıdır. Ayrıca,

$$\begin{aligned}&\iint_S \text{grad}_t T_{(n)} \cdot \text{grad}_t T_{(m)} dS = \iint_S \text{flux}_t T_{(n)} \cdot \text{flux}_t T_{(m)} dS \\ &= \iint_S \text{grad}_t T_{[n]} \cdot \text{grad}_t T_{[m]} dS = \iint_S \text{flux}_t T_{[n]} \cdot \text{flux}_t T_{[m]} dS = \delta_{mn}\end{aligned} \tag{2.23}$$

Burada, δ_{mn} aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}$$

Yukarıdaki tanımları sağlayan bu dalga kılavuzu içerisinde herhangi bir alan dağılımı yukarıda verildiği şekilde tanımlı özfonksiyonlar cinsinden bir açılımla ifade edilebilir. Kapalı bir dalga kılavuzu içerisinde elektromanyetik dalganın iletimini sonsuz sayıda iletim hattı üzerinde akım ve gerilim büyüklüklerinin iletimi olarak modelleyebilmek için genel koordinat sisteminde elektrik ve manyetik alan bileşenleri aşağıdaki eşitliklerle tanımlanır.

$$\vec{E} = \sum_n V_{(n)}(z)\,\text{grad}_t T_{(n)}(u,v) + \sum_n V_{[n]}(z)\,\text{flux}_t T_{[n]}(u,v) + \sum_n \vec{a}_z \chi_{(n)} V_{z,(n)}(z)\, T_{(n)}(u,v) \tag{2.24}$$

$$\vec{H} = -\sum_{n} I_{(n)}(z)\,\mathrm{flux}_t T_{(n)}(u,v) + \sum_{n} I_{[n]}(z)\,\mathrm{grad}_t T_{[n]}(u,v) + \sum_{n} \vec{a}_z \chi_{[n]} I_{z,[n]}(z)\, T_{[n]}(u,v) \quad (2.25)$$

Çalışmamızın devamında ifadelerdeki sadelik adına Einstein notasyonu kullanılacaktır. Bu notasyonda aynı indisli iki terimin çarpımı bütün indisler çiftine sahip çarpılmış terimlerin toplamını ifade etmektedir [39]. Eşitlikler (2.24) ve (2.25) 'te tüm toplam ifadeler $e^{-\gamma z}$ ortak çarpanına sahiptir ve daha sonra gerçekleştirilecek işlemlerde de sadeleşme sağlamak amacıyla yazılmayacaktır. Ayrıca, yine sadeleşme adına, bu noktadan itibaren gerilim ve akım büyüklerinin sahip olduğu yayılım yönüne göre değişken ve özfonksiyonların ise sahip olduğu enine bileşenler cinsinden değişkenler ifadelerde gösterilmeyecektir. Bu açıklamalar dikkate alınarak Eşitlikler (2.24) ve (2.25)'te verilen modal gösterime sahip elektrik ve manyetik alan ifadelerinin enine ve boyuna bileşenlerini ayrı ayrı yazalım.

$$\vec{E}_t = V_{(n)}\,\mathrm{grad}_t T_{(n)} + V_{[n]}\,\mathrm{flux}_t T_{[n]} \quad (2.26)$$

$$\vec{H}_t = -I_{(n)}\,\mathrm{flux}_t T_{(n)} + I_{[n]}\,\mathrm{grad}_t T_{[n]} \quad (2.27)$$

$$\vec{E}_z = \vec{a}_z \chi_{(n)} V_{z,(n)} T_{(n)} \quad (2.28)$$

$$\vec{H} = \vec{a}_z \chi_{[n]} I_{z,[n]} T_{[n]} \quad (2.29)$$

Yukarıda verilen eşitliklerde $\mathrm{grad}_t T_{(n)}$, $\mathrm{flux}_t T_{(n)}$, $\mathrm{grad}_t T_{[n]}$ ve $\mathrm{flux}_t T_{[n]}$ ifadeleri çözümü bilinen bir referans probleme karşı düşerken, $\vec{E}$ ve $\vec{H}$ ise çözümü aranan bir incelenen probleme karşı düşmektedir. Ayrıca, akım ve gerilim boyutundaki I ve V açılım katsayıları modal transmisyon hatlarındaki akım ve gerilimler olarak adlandırılırlar. Eşitlikler (2.26) ve (2.27) ifadeleri Eşitlik (2.15)'te yerine konur ve eşitliğin her iki tarafı $-\mathrm{flux}_t T^{*}_{(m)} \times \vec{e}_z$ ile çarpılırsa aşağıdaki ifade elde edilir. Burada $(^{*})$ eşleniği ifade etmektedir.

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left[V_{(n)}\,\mathrm{grad}_t T_{(n)} + V_{[n]}\,\mathrm{flux}_t T_{[n]} \right] \cdot \left[-\mathrm{flux}_t T^{*}_{(m)} \times \vec{e}_z \right]$$
$$= j\omega\mu \left(1 + \frac{\nabla_t \nabla_t}{\omega^2 \varepsilon \mu} \right) \left[\left(-I_{(n)}\,\mathrm{flux}_t T_{(n)} + I_{[n]}\,\mathrm{grad}_t T_{[n]} \right) \times \vec{e}_z \right] \cdot \left[-\mathrm{flux}_t T^{*}_{(m)} \times \vec{e}_z \right]$$

Eşitlik düzenlenir ve eşitliğin her iki tarafı hacim üzerinde integre edilirse, aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\int_V \left\{ -\frac{\partial}{\partial z}\left[V_{(n)} \mathrm{grad}_t T_{(n)} \cdot \mathrm{grad}_t T^*_{(m)} + V_{[n]} \mathrm{flux}_t T_{[n]} \cdot \mathrm{grad}_t T^*_{(m)} \right] \right\} dV$$
$$= \int_V \left\{ j\omega\mu \left(1 + \frac{\nabla_t \nabla_t}{\omega^2 \varepsilon \mu} \right) \left[\left(+I_{(n)} \mathrm{grad}_t T_{(n)} \cdot \mathrm{grad}_t T^*_{(m)} + I_{[n]} \mathrm{flux}_t T_{[n]} \cdot \mathrm{grad}_t T^*_{(m)} \right) \right] \right\} dV$$

Eşitlikler (2.20) ve (2.23)'te verilen diklik koşullarından ifade aşağıdaki şekli alır.

$$\int_z -\frac{d}{dz} V_{(m)} dz$$
$$= \int_V \left\{ j\omega\mu \left(1 + \frac{\nabla_t \nabla_t}{\omega^2 \varepsilon \mu} \right) \left[\left(I_{(n)} \mathrm{grad}_t T_{(n)} \cdot \mathrm{grad}_t T^*_{(m)} + I_{[n]} \mathrm{flux}_t T_{[n]} \cdot \mathrm{grad}_t T^*_{(m)} \right) \right] \right\} dV$$

z'ye bağlı integral elimine edilirse, Eşitlik (2.30) elde edilir.

$$-\frac{dV_{(m)}}{dz} = \int_S \left\{ j\omega\mu \left(1 + \frac{\nabla_t \nabla_t}{\omega^2 \varepsilon \mu} \right) \left[I_{(n)} \mathrm{grad}_t T_{(n)} \cdot \mathrm{grad}_t T^*_{(m)} + I_{[n]} \mathrm{flux}_t T_{[n]} \cdot \mathrm{grad}_t T^*_{(m)} \right] \right\} dS \quad (2.30)$$

Benzer şekilde, Eşitlikler (2.26) ve (2.27) ifadeleri Eşitlik (2.15)'te yerine konur ve eşitliğin her iki tarafı $\mathrm{grad}_t T^*_{[m]} \times \vec{e}_z$ ile çarpılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left[V_{(n)} \mathrm{grad}_t T_{(n)} + V_{[n]} \mathrm{flux}_t T_{[n]} \right] \cdot \left[\mathrm{grad}_t T^*_{[m]} \times \vec{e}_z \right]$$
$$= j\omega\mu \left(1 + \frac{\nabla_t \nabla_t}{\omega^2 \varepsilon \mu} \right) \left[\left(-I_{(n)} \mathrm{flux}_t T_{(n)} + I_{[n]} \mathrm{grad}_t T_{[n]} \right) \times \vec{e}_z \right] \cdot \left[\mathrm{grad}_t T^*_{[m]} \times \vec{e}_z \right]$$

Eşitlik düzenlenir ve eşitliğin her iki tarafı hacim üzerinde integre edilirse, aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\int_V \left\{ -\frac{\partial}{\partial z}\left[V_{(n)} \mathrm{grad}_t T_{(n)} \cdot \mathrm{flux}_t T^*_{[m]} + V_{[n]} \mathrm{flux}_t T_{[n]} \cdot \mathrm{flux}_t T^*_{[m]} \right] \right\} dV$$
$$= \int_V \left\{ j\omega\mu \left(1 + \frac{\nabla_t \nabla_t}{\omega^2 \varepsilon \mu} \right) \left[\left(I_{(n)} \mathrm{grad}_t T_{(n)} \cdot \mathrm{flux}_t T^*_{[m]} + I_{[n]} \mathrm{flux}_t T_{[n]} \cdot \mathrm{flux}_t T^*_{[m]} \right) \right] \right\} dV$$

Eşitlikler (2.20) ve (2.23)'te verilen diklik koşulları dikkate alınır ve z'ye bağlı integral elimine edilirse ifade aşağıdaki şekli alır.

$$-\frac{dV_{[m]}}{dz}=\int_S\left\{j\omega\mu\left(1+\frac{\nabla_t\nabla_t}{\omega^2\varepsilon\mu}\right)\left[-I_{(n)}grad_t T_{(n)}\cdot flux_t T^*_{[m]}+I_{[n]}flux_t T_{[n]}\cdot flux_t T^*_{[m]}\right]\right\}dS \quad (2.31)$$

Eşitlikler (2.26) ve (2.27) ifadeleri Eşitlik (2.16)'da yerine konur ve eşitliğin her iki tarafı $\vec{e}_z\times grad_t T^*_{(m)}$ ile çarpılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left[-I_{(n)}flux_t T_{(n)}+I_{[n]}grad_t T_{[n]}\right]\cdot\left[\vec{e}_z\times grad_t T^*_{(m)}\right]$$
$$=j\omega\varepsilon\left(1+\frac{\nabla_t\nabla_t}{\omega^2\varepsilon\mu}\right)\left(\vec{e}_z\times\left[V_{(n)}grad_t T_{(n)}+V_{[n]}flux_t T_{[n]}\right]\right)\cdot\left[\vec{e}_z\times grad_t T^*_{(m)}\right]$$

Eşitlik düzenlenir ve eşitliğin her iki tarafı hacim üzerinde integre edilirse, aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\int_V\left\{-\frac{\partial}{\partial z}\left[I_{(n)}flux_t T_{(n)}\cdot flux_t T^*_{(m)}-I_{[n]}grad_t T_{[n]}\cdot flux_t T^*_{(m)}\right]\right\}dV$$
$$=\int_V\left\{j\omega\varepsilon\left(1+\frac{\nabla_t\nabla_t}{\omega^2\varepsilon\mu}\right)\left(\left[V_{(n)}flux_t T_{(n)}\cdot flux_t T^*_{(m)}-V_{[n]}grad_t T_{[n]}\cdot flux_t T^*_{(m)}\right]\right)\right\}dV$$

Eşitlikler (2.20) ve (2.23)'te verilen diklik koşulları dikkate alınır ve z'ye bağlı integral elimine edilirse ifade aşağıdaki şekli alır.

$$-\frac{dI_{(n)}}{dz}=\int_V\left\{j\omega\varepsilon\left(1+\frac{\nabla_t\nabla_t}{\omega^2\varepsilon\mu}\right)\left(\left[V_{(n)}flux_t T_{(n)}\cdot flux_t T^*_{(m)}-V_{[n]}grad_t T_{[n]}\cdot flux_t T^*_{(m)}\right]\right)\right\}dV \quad (2.32)$$

Eşitlikler (2.26) ve (2.27) ifadeleri Eşitlik (2.16)'da yerine konur ve eşitliğin her iki tarafı $\vec{e}_z\times flux_t T^*_{[m]}$ ile çarpılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left[-I_{(n)}flux_t T_{(n)}+I_{[n]}grad_t T_{[n]}\right]\cdot\left[\vec{e}_z\times flux_t T^*_{[m]}\right]$$
$$=j\omega\varepsilon\left(1+\frac{\nabla_t\nabla_t}{\omega^2\varepsilon\mu}\right)\left(\vec{e}_z\times\left[V_{(n)}grad_t T_{(n)}+V_{[n]}flux_t T_{[n]}\right]\right)\cdot\left[\vec{e}_z\times flux_t T^*_{[m]}\right]$$

Eşitlik düzenlenir ve eşitliğin her iki tarafı hacim üzerinde integre edilirse, aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\int_V \left\{ -\frac{\partial}{\partial z}\left[-I_{(n)} \mathrm{flux}_t T_{(n)} \cdot \mathrm{grad}_t T^*_{[m]} + I_{[n]} \mathrm{grad}_t T_{[n]} \cdot \mathrm{grad}_t T^*_{[m]} \right] \right\} dV$$
$$= \int_V \left\{ j\omega\varepsilon \left(1 + \frac{\nabla_t \nabla_t}{\omega^2 \varepsilon \mu} \right) \left(\left[-V_{(n)} \mathrm{flux}_t T_{(n)} \cdot \mathrm{grad}_t T^*_{[m]} + V_{[n]} \mathrm{grad}_t T_{[n]} \cdot \mathrm{grad}_t T^*_{[m]} \right] \right) \right\} dV$$

Eşitlikler (2.20) ve (2.23)'te verilen diklik koşulları dikkate alınır ve z'ye bağlı integral elimine edilirse ifade aşağıdaki şekli alır.

$$-\frac{dI_{[m]}}{dz} = \int_V \left\{ j\omega\varepsilon \left(1 + \frac{\nabla_t \nabla_t}{\omega^2 \varepsilon \mu} \right) \left(\left[-V_{(n)} \mathrm{flux}_t T_{(n)} \cdot \mathrm{grad}_t T^*_{[m]} + V_{[n]} \mathrm{grad}_t T_{[n]} \cdot \mathrm{grad}_t T^*_{[m]} \right] \right) \right\} dV \quad (2.33)$$

Üniform, kayıpsız, kaynaksız ve izotropik ortam yüklü kapalı dalga kılavuzları için modal gösterimler cinsinden iletim hattı eşitlikleri, (2.30), (2.31), (2.32) ve (2.33) eşitliklerinin sağ taraflarının incelenen yapının homojen (genellikle boş) kılavuz yapısına ait özfonksiyonların yerlerine koyularak çözülmesi ile elde edilirler. Burada önemli bir nokta, incelenen yapının elektriksel veya manyetik geçirgenlik olarak heterojen bir yapıya sahip olması durumunda ε veya μ'de ifadelerinde meydana gelecek olan süreksizliklerin dikkate alınarak işlemlerin gerçekleştirilmesi gerekliliğidir.

Kapalı kılavuzlar için iletim hattı eşdeğerliği yöntemi veya en genel adıyla MoM yönteminde, akım ve gerilim büyüklükleri cinsinden iletim hattı eşdeğerliği eşitlikleri, Eşitlikler (2.24) ve (2.25)'te verilen modal gösterimlerin doğrudan Maxwell denklemlerinde yerine koyularak ve yukarıda gerçekleştirilen işlemlere benzer şekilde, diklik koşullarını sağlayan ifadelerle çarpıp yüzey üzerinde integrallerin alınarak, akım ve gerilim büyüklüklerinin yöne bağlı türevlerinin yalnız bırakılmasıyla da elde edilebilir [30], [33], [40]. Genel koordinat sisteminde, hem anizotropik dielektrik geçirgenliğe hem de anizotropik manyetik geçirgenliğe sahip ortam yüklü kapalı dalga kılavuzu için elde edilen iletim hattı eşitliklerinin en genel formu Ek-A'da verilmiştir.

Yukarıda veya Ek-A'da iletim hattı eşitlikleri için verilen ifadelerin sağ taraflarında bulunan çift katlı integraller tam küme oluşturan ve diklik koşullarını sağlayan öz fonksiyonlar kullanılarak çözülürse, bu özfonkisyonlar cinsinden yalnızca iletim yönüne bağlı türev içeren adi diferansiyel denklemler sisteminin en genel formu Eşitlik (2.34) şeklinde olur [33].

$$\begin{aligned}
\frac{dV_{(m)}}{dz} &= -Z_{(m)(n)}I_{(n)} - Z_{(m)[n]}I_{[n]} - {}^{V}T_{(m)(n)}V_{(n)} - {}^{V}T_{(m)[n]}V_{[n]} \\
\frac{dI_{(m)}}{dz} &= -Y_{(m)(n)}I_{(n)} - Y_{(m)[n]}I_{[n]} - {}^{I}T_{(m)(n)}I_{(n)} - {}^{I}T_{(m)[n]}I_{[n]} \\
\frac{dV_{[m]}}{dz} &= -Z_{[m][n]}I_{[n]} - Z_{[m](n)}I_{(n)} - {}^{V}T_{[m][n]}V_{(n)} - {}^{V}T_{[m](n)}V_{(n)} \\
\frac{dI_{[m]}}{dz} &= -Y_{[m][n]}V_{[n]} - Y_{[m](n)}V_{(n)} - {}^{I}T_{[m][n]}I_{[n]} - {}^{I}T_{[m](n)}I_{(n)}
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Burada, çeşitli modlar arasındaki, Y transfer admitansları, Z transfer empedansları, ${}^{V}T$ voltaj transfer katsayıları ve ${}^{I}T$ akım transfer katsayılarıdır. Bu katsayılar üniform dalga kılavuzlarında sabite indirgenirler. Bu durumda iletim hattı denklemlerinin çözülmesi problemi bir sonsuz doğrusal cebirsel eşitlikler sistemini ve ona karşı düşen karakteristik denklemi çözmeye indirgenir [33].

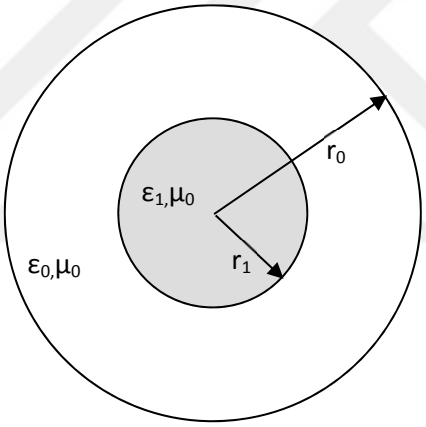
Dalga kılavuzumuzun üniform olduğunu kabul etmemiz durumunda, alanların boyuna alan koordinatı olan z ile değişimleri $e^{-\gamma z}$ şeklinde olacağı için bu adi diferansiyel denklem sistemi bir cebrik denklem sistemine dönüşecektir. Üstelik bu cebrik denklem sisteminin katsayılar matrisinin özdeğerleri, yayılma sabiti γ'yı ve öz vektörlerinin elemanları ise alanların Fourier açılımlarında kullanılan açınım katsayılarını verecektir. Eğer kendimizi enine ve boyuna alan bileşenlerinin kuplajına yol açmayan heterojen yüklemeler sınıfı ile sınırlandırırsak ve iletim yönüne göre türevin yayılım sabiti ile çarpmaya karşı düştüğünü göz önüne alırsak, bu sınıftaki kapalı kılavuz yapılarının iletim hattı eşdeğerliği Eşitlik (2.35)'te verilen doğrusal cebirsel denklem sistemi olarak elde ederiz [50].

$$\begin{bmatrix} \gamma(p)v(p) \\ \gamma(p)i(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & Z(p) \\ Y(p) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(p) \\ i(p) \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

Burada $\gamma(p)$ kompleks yayılım sabitini ve $p=\sigma+j\omega$ kompleks frekansı göstermektedir. Yukarıda da verildiği gibi $Z(p)$ ve $Y(p)$ sırasıyla kuple iletim hatlarının kesit içinde çift katlı integralle hesaplanan birim uzunluk başına seri empedans ve paralel admitans matrislerini göstermektedir. $v(p)$ ve $i(p)$ iletim hattı gerilim ve akım vektörlerini göstermektedir.

2.2. Dielektrik Sütun Yüklü Kapalı Dalga Kılavuzu İçin İletim Hattı Eşdeğeri Eşitlikleri

Bu bölümde çözümler, dielektrik çubuk için bağıl dielektrik geçirgenlik $\varepsilon_{r1}=\varepsilon_1$, çubuk dışı için bağıl dielektrik geçirgenlik $\varepsilon_{r2}=1$ ve dalga kılavuz içinde bağıl manyetik geçirgenlik $\mu_{r1}=\mu_{r2}=1$ alınarak elde edilmiştir. Yapının geometrisi Şekil 2.1'de verilmiştir.



Şekil 2.1. Dielektrik Sütun Yüklü Kapalı Dalga Kılavuzu

Silindirik dalga kılavuzunun enine manyetik (TM) ve enine elektrik (TE) alan ifadeleri için öz fonksiyonlar sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$$T_{(n)} = A_n J_1(\alpha_n r)\sin\varphi \tag{2.36}$$

$$T_{[n]} = B_n J_1(\beta_n r)\cos\varphi \tag{2.37}$$

Burada, J_1 birinci dereden birinci tür Bessel fonksiyonudur. A_n ve B_n normalizasyon katsayıları olarak adlandırılır. α_n ve β_n ise ayrıştırma sabitleri olarak adlandırılır. Schelkunoff çalışmasında, dalga kılavuzunu sonsuz sayıda iletim hattı ile modelleyerek kısmi diferansiyel denklemlerden oluşan Maxwell denklemlerini,

sadece iletim yönüne bağlı türevlerden oluşan adi diferansiyel denklemlere dönüştürmüştür. Dielektrik çubuk yüklü silindirik dalga kılavuzu için eşitlikler (Ek A.1), (Ek A.2), (Ek A.3) ve (Ek A.4) öz fonksiyonlar kullanılarak çözülürse, iletim hattı eşitlikleri için aşağıda verilen ifadeler elde edilir.

$$\frac{dV_{(m)}}{dz} = -j\omega\mu_0\delta_{mn}I_{(n)} + \alpha_m V_{z,(m)} \tag{2.38}$$

Burada δ birim matrise eşittir ve m ile n ise oluşan matris sistemi için, indis numaralarını temsil etmektedir. Eşitlik (Ek A.5)'ten yararlanılarak;

$$\alpha_m V_{z,(m)} = -\frac{1}{j\omega}(Z_A)_{mn} I_{(n)} \tag{2.39}$$

elde edilebilir. m≠n için Z_A ifadesi de aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$$(Z_A)^{-1}_{mn} = \pi A_n A_m (\varepsilon_0 - \varepsilon_1) r_1 \left\{ \frac{1}{\alpha_m^2 - \alpha_n^2} \left[\alpha_m J_1(\alpha_n r_1) J_0(\alpha_m r_1) - \alpha_n J_0(\alpha_n r_1) J_1(\alpha_m r_1) \right] \right\} \tag{2.40}$$

m=n için ise Z_A ifadesi aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$$\begin{aligned}(Z_A)^{-1}_{mm} = 0.5\pi A_m^2 \Bigg\{ & (\varepsilon_0 - \varepsilon_1) r_1^2 \left[J_1^2(\alpha_m r_1) + J_0^2(\alpha_m r_1) - \frac{2}{\alpha_n r_1} J_0(\alpha_m r_1) J_1(\alpha_m r_1) \right] \\ & + \varepsilon_0 r_0^2 \left[J_1^2(\alpha_m r_0) + J_0^2(\alpha_m r_0) - \frac{2}{\alpha_m r_0} J_0(\alpha_m r_0) J_1(\alpha_m r_0) \right] \Bigg\}\end{aligned} \tag{2.41}$$

Eşitlik (Ek A.3)'ün çözümü aşağıda verilmektedir.

$$\frac{dI_{(m)}}{dz} = -j\omega Y_{(m)(n)} - j\omega Y_{(m)[n]} \tag{2.42}$$

Burada, m≠n için $Y_{(m)(n)}$ ve $Y_{(m)[n]}$ ifadesi aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$$\begin{aligned}Y_{(m)(n)} = \pi A_n A_m (\varepsilon_0 - \varepsilon_1) \Bigg\{ & \frac{\alpha_m \alpha_n r_1}{\alpha_m^2 - \alpha_n^2} \Big[\alpha_n J_0(\alpha_m r_1) J_1(\alpha_n r_1) \\ & - \alpha_m J_1(\alpha_m r_1) J_0(\alpha_n r_1) \Big] + J_1(\alpha_m r_1) J_1(\alpha_n r_1) \Bigg\}\end{aligned} \tag{2.43}$$

$$Y_{(m)[n]} = \pi B_n A_m (\varepsilon_0 - \varepsilon_1)\left[J_1(\alpha_m r_1) J_1(\beta_n r_1)\right] \tag{2.44}$$

m=n için ifadeler aşağıdaki şekildedir.

$$\begin{aligned} Y_{(m)(m)} &= \pi A_m^2 \left\{\left[(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) J_1^2(\alpha_m r_1) - \varepsilon_0 J_1^2(\alpha_m r_0)\right]\right. \\ &\left. -\left[0.5(\varepsilon_0 - \varepsilon_1)(\alpha_m r_1)^2 \left(J_0^2(\alpha_m r_1) + J_1^2(\alpha_m r_1)\right)\right] + \left[0.5\varepsilon_0 (\alpha_m r_0)^2 \left(J_0^2(\alpha_m r_0) + J_1^2(\alpha_m r_0)\right)\right]\right\} \end{aligned} \tag{2.45}$$

$$Y_{[m][m]} = \pi B_m A_m (\varepsilon_0 - \varepsilon_1)\left[J_1(\beta_m r_1) J_1(\alpha_m r_1)\right] \tag{2.46}$$

Eşitlik (Ek A.2)'nin çözümü aşağıda verilmektedir.

$$\frac{dV_{[m]}}{dz} = j\omega\mu_0 \delta_{mn} I_{[n]} \tag{2.47}$$

Eşitlik (Ek A.4)'ün çözümü aşağıda verilmektedir.

$$\frac{dI_{[m]}}{dz} = -j\omega Y_{[m](n)} - j\omega Y_{[m][n]} + \beta_m I_{z,[m]} \tag{2.48}$$

Eşitlik (Ek A.6)'dan faydalanılarak aşağıdaki eşitlik elde edilebilir.

$$\beta_m I_{z,[m]} = -\frac{1}{j\omega} (Y_B)_{mn} V_{[m]} \tag{2.49}$$

Burada, m≠n için Y_B ifadesi aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$$(Y_B)_{mn}^{-1} = \pi B_n B_m \mu_0 r_0 \left\{\frac{1}{\beta_n^2 - \beta_m^2}\left[\beta_m J_1(\beta_n r_0) J_0(\beta_m r_0) - \beta_n J_0(\beta_n r_0) J_1(\beta_m r_0)\right]\right\} \tag{2.50}$$

m=n için ise Y_B ifadesi aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$$(Y_B)_{mm}^{-1} = 0.5\pi B_m^2 \mu_0 \left\{\frac{r_0^2}{2}\left[J_0^2(\beta_m r_0) + J_1^2(\beta_m r_0)\right]\right\} \tag{2.51}$$

Eşitlik (2.48) ifadesinde; m≠n için $Y_{[m](n)}$ ve $Y_{[m][n]}$ ifadeleri aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$$Y_{[m](n)} = \pi B_m A_n (\varepsilon_0 - \varepsilon_1)\left[J_1(\beta_m r_1) J_1(\alpha_n r_1)\right] \tag{2.52}$$

$$Y_{[m][n]} = \pi B_n B_m (\varepsilon_0 - \varepsilon_1)\left\{\frac{\beta_m \beta_n r_1}{\beta_m^2 - \beta_n^2}\left[-\beta_m J_1(\beta_m r_1) J_0(\beta_n r_1) + \beta_n J_0(\beta_m r_1) J_1(\beta_n r_1)\right] + J_1(\beta_m r_1) J_1(\beta_n r_1)\right\} \tag{2.53}$$

m=n için ifadeler aşağıdaki şekildedir.

$$Y_{[m](m)} = \pi B_m A_m (\varepsilon_0 - \varepsilon_1)\left[J_1(\beta_m r_1) J_1(\alpha_m r_1)\right] \tag{2.54}$$

$$Y_{[m][m]} = \pi B_m^2 \left\{ \left[(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) J_1^2(\beta_m r_1) - \varepsilon_0 J_1^2(\beta_m r_0)\right] - \left[0.5(r_1\beta_m)^2(\varepsilon_0 - \varepsilon_1)\left(J_1^2(\beta_m r_1) + J_0^2(\beta_m r_1)\right)\right] + \left[0.5(r_0\beta_m)^2 \varepsilon_0 \left(J_1^2(\beta_m r_0) + J_0^2(\beta_m r_0)\right)\right] \right\} \tag{2.55}$$

İfadelerdeki normalizasyon katsayıları, Eşitlik (2.56) ve (2.57) kullanılarak elde edilir.

$$\iint_s \chi_{(n)}^2 T_{(n)}^2 ds = 1 \tag{2.56}$$

$$\iint_s \chi_{[n]}^2 T_{[n]}^2 ds = 1 \tag{2.57}$$

Eşitlik (2.56)'den A_n ifadesi aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$A_n = \sqrt{\frac{2}{\pi r_0^2 \alpha_n^2 \left[J_1^2(\alpha_n r_0) + J_0^2(\alpha_n r_0) - \frac{2}{\alpha_n r_0} J_0(\alpha_n r_0) J_1(\alpha_n r_0)\right]}} \tag{2.58}$$

Eşitlik (2.57)'den B_n ifadesi aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$B_n = \sqrt{\frac{2}{\pi r_0^2 \beta_n^2 \left[J_1^2(\beta_n r_0) + J_0^2(\beta_n r_0) - \frac{2}{\beta_n r_0} J_0(\beta_n r_0) J_1(\beta_n r_0)\right]}} \tag{2.59}$$

Sınır koşullarından dolayı enine elektrik (TE) alan cidarda sıfıra eşit olacaktır.

$$T_{(n)}\Big|_{r=r_0} = A_n J_1(\alpha_n r)\sin\varphi = 0 \tag{2.60}$$

Eşitlik (2.60)'in çözümü, Bessel fonksiyonunun sıfırlarına karşılık gelir ve α_n ifadeleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\alpha_n = \frac{\rho_n}{r_0} \tag{2.61}$$

Burada ρ_n Bessel fonksiyonun n. sıfırına karşılık gelir. r_0 ise dalga kılavuzunun yarıçapını göstermektedir. Sınır koşullarından dolayı enine manyetik (TM) alanın türevi, cidarda sıfıra eşit olacaktır.

$$\frac{\partial T_{[n]}}{\partial r}\Big|_{r=r_0} = 0 \tag{2.62}$$

Eşitlik (2.62)'ün çözümü, Bessel fonksiyonunun türevinin sıfırlarına karşılık gelir ve β_n ifadeleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\beta_n = \frac{\rho'_n}{r_0} \tag{2.63}$$

Burada ρ_n' Bessel fonksiyonun türevinin n. sıfırına karşılık gelir. Sonuç olarak Eşitlik (2.35)'te verilen Z(p) ve Y(p) matrisleri, dielektrik çubuk (veya izotropik plazma) yüklü kapalı silindirik dalga kılavuz için sırasıyla Eşitlikler (2.64) ve (2.65) olarak elde edilir.

$$Z(p) = p\mu_0\begin{pmatrix}\delta & 0\\ 0 & \delta\end{pmatrix} + \frac{1}{p}\begin{pmatrix}Z_A & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \tag{2.64}$$

$$Y(p) = p\begin{pmatrix}Y_{(\,)(\,)} & Y_{(\,)[\,]}\\ Y_{[\,](\,)} & Y_{[\,][\,]}\end{pmatrix} + \frac{1}{p}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & Y_B\end{pmatrix} \tag{2.65}$$

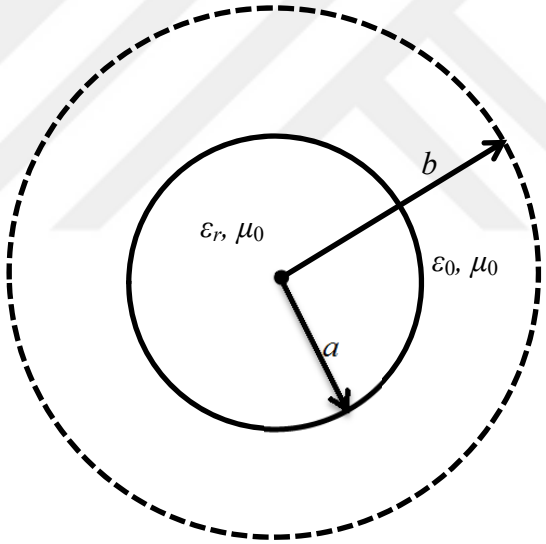
Burada, δ'nın birim matrise eşit olduğu yukarıda belirtilmiştir.

Bölüm 2'de gerçekleştirilen çalışmalar şöyle özetlenebilir. Öncelikle, Moment yönteminde kullanılan iletim hattı eşdeğerliği eşitliklerini elde etmek amacıyla

üniform dalga kılavuzu için Maxwell denklemlerinden enine alan eşitlikleri türetilmiştir. Çalışmamızda izotropik plazma sütun açık dalga kılavuzu yapının kapalı modeline ait iletim hattı eşdeğeri eşitlikleri kullanılarak modellenmiştir. Bu nedenle nümerik örneklerde incelenen izotropik plazma (veya dielektrik çubuk) yüklü kapalı silindirik dalga kılavuzuna ait iletim hattı eşdeğeri eşitlikleri ise yine bu bölümde sunulmuştur.

3. AÇIK SİLİNDİRİK PLAZMA SÜTUN DALGA KILAVUZUNUN MOMENT METODU İLE MODELLENMESİ

Bu bölümde açık silindirik plazma sütun yapısına ait dispersiyon eğrileri Moment Metodu (MoM) kullanılarak modellenmiştir. Bu yöntemde temel olarak kapalı bir yapı için bilinen çözümler kullanılarak çözüme ulaşılmaktadır. İncelenecek yapıların açık kılavuzlar olması nedeniyle çözümlerde ilk adım olarak dalga kılavuzu Şekil 3.1'de gösterildiği gibi mükemmel iletken bir çerçeve ile örtülecektir. Bu xyz koordinat sisteminde üç yönde sonsuz boyutlara sahip problemi xy düzleminde sonlu bir kesit içine sınırlandıracaktır.



Şekil 3.1. Dış cidar ile kapalı hale getirilen dielektrik çubuk

Bu yaklaşım ilk olarak Ogusu tarafından dikdörtgensel dieletrik açık dalga kılavuzuna ait kılavuzlanmış dalgaların modellenmesinde kullanılmıştır [29]. Daha sonra, Yener tarafından optik film, gömülü tip ve çıkıntılı dalga kılavuzu yapılarına uygulanmış ve tek frekans değerleri için kompleks modlar araştırılmıştır [30].

Gerçekleştirilecek modelin geçerli olabilmesi için incelenen modların matematiksel olarak uygun olması gerekmektedir. Moment Metodunda modelleme metalik kapalı

boş boruya ait çözümler kullanılarak yapılmaktadır. Bu yapıya ait sınır koşulları cidarda, elektrik alanın teğetsel bileşeninin ve manyetik alanın ise dik bileşeninin sıfıra eşit olmasıdır. Uygunsuz modlar için plazma sütundan uzaklaştıkça alan bileşenlerinin genlikleri arttığı için kapalı yapıya ait sınır koşullarını ihlal etmektedirler. Ayrıca onlar dik baz fonksiyonlarının bir tam kümesinin üyesi değildirler [31]. Uygun modlar için ise, plazma sütundan uzaklaştıkça alan bileşenlerinin genlikleri azaldığı için eğer cidar plazma sütundan yeterince uzağa yerleştirilirse açık plazma sütun dalga kılavuzunu kapalı yapı ile modellemek mümkündür.

Kim tarafından [2] çalışmasında, açık silindirik dielektrik çubuk ve metamateryal çubuk için elde edilen sızıntı modları matematiksel olarak uygunsuzdur. Onlar dik baz fonksiyonlarının bir tam kümesinin üyesi değildirler. Yani, dalga eşitliği için bu çözüm bir merkez aralıkta (range) kompleks yayılım sabitli alan tasvirini verir fakat alan sonsuz enine uzaysal limitte sonsuz olur [31]. Sızıntılı dalgaların uygunsuz doğası sızıntı kılavuz yapısından enine yönde uzaklaşırken alanların artmasından kaynaklanmaktadır. Eğer dalga tüm uzayda var olursa dalga genliği enine yönde sonsuzda ıraksayacaktır ve bu yüzden sonsuzdaki sınır koşulu ihlal edilecektir. Bu yüzden bu dalga matematiksel olarak uygunsuz veya spektral olmayan(nonspectral) olarak karakterize edilir. Kolaylıkla gösterilebilir ki, dalga kaynaktan sonsuza vardığı zaman dalga sadece kılavuz yapısının yakın uzayın sektöründe tanımlanır ve dalga hiçbir zaman enine yönde sonsuza ulaşmaz. [32] çalışmasında; sızıntılı dalga meşru bölge içerisinde kesin olarak fiziksel olduğu ve ölçülebildiği belirtilmiştir.

Çalışmamızda açık dalga kılavuzu yapısına ait kompleks dispersiyon karakteristiklerinin, yapının metalik bir cidarla kapatılmış modeli kullanılarak elde edilmesi amaçlanmaktadır. Model, kapalı yapıya ait çözümler genelleştirilmiş telgrafçı denklemlerini temel alan Moment Metodu (MoM) kullanılarak elde edilmiştir. Sızıntılı dalga modlarının çok geniş uygulama alanları ve önemli fizikler özelliklerinin yanı sıra matematiksel olarak uygunsuz olmaları çalışmamızda gerçekleştirilen silindirik açık dalga kılavuzuna ait kompleks modların kapalı kılavuz yapısı kullanılarak modellenmesini engellemektedir. Çünkü kapalı kılavuz yapılar için sınır koşulları olan sınırda elektrik alanının teğetsel bileşeninin ve manyetik alanının dik bileşeninin sıfıra eşit olması kuralı otomatik olarak ihlal edilecektir.

Ayrıca modellemede kullanılacak olan iletim hattı eşitlikleri dik baz fonksiyonların tam kümesinden oluşmaktadır [33]. Sızıntılı dalgaların sonsuzdaki sınır koşullarını ihlal etmesi ve dik baz fonksiyonlarının bir tam kümesinin üyesi olmamaları yöntemi çalışmaz hale getirmektedir. Bunun için öncelikle yapı için elde edilen modların uygun modlara karşı düştüğü gösterilmelidir. Elde edilen sonuçların uygunluğu veya uygunsuzluğu bölüm 3.3'te incelenmiştir.

3.1. Silindirik Açık Plazma Sütun İçin İletilen Modlar

Plazma evrende var olan veya yeryüzünde yapay yollarla elde edilebilen maddenin dördüncü hali olarak da tanımlanan özel bir durumdur. Plazma için dielektrik geçirgenlik aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} 1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2-\omega_c^2} & -i\dfrac{\omega_p^2\omega_c}{\omega\left(\omega^2-\omega_c^2\right)} & 0 \\ i\dfrac{\omega_p^2\omega_c}{\omega\left(\omega^2-\omega_c^2\right)} & 1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2-\omega_c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{bmatrix}$$

Burada ω, açısal çalışma frekansı ve ω_p, radyan elektron plazma frekansı ve ω_c, radyan elektron hızlandırıcı frekansını göstermektedir.

Silindirik açık plazma sütun dalga kılavuzu [25] çalışmasında Granatstein ve arkadaşları tarafından ele alınmıştır. [25] çalışmasında plazma, hızlandırıcı frekansının sıfır olarak alındığı sıfır manyetik alan ve hızlandırıcı frekansının sonsuz olarak alındığı çok büyük eksenel manyetik alan olmak üzere iki farklı biçimde ele alınmıştır. Hızlandırıcı frekansı sıfır olarak alındığı birinci durum için dielektrik geçirgenlik aşağıdaki biçime dönüşür.

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} 1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{bmatrix} = \varepsilon_0\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = \varepsilon_0\varepsilon_p \tag{3.1}$$

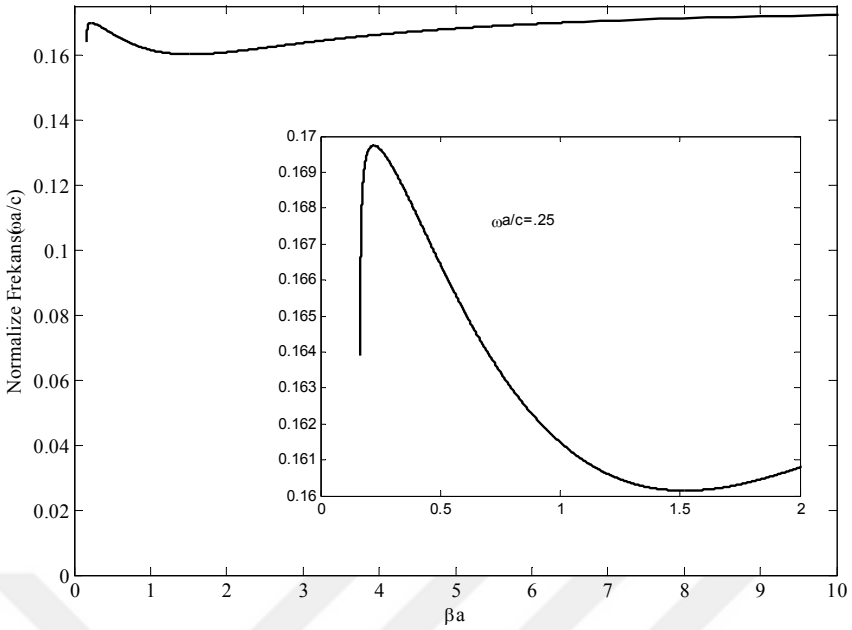
Hızlandırıcı frekansının sonsuz alındığı ikinci durum; çok büyük eksenel manyetik alan için ise dielektrik geçirgenlik aşağıdaki biçime dönüşür.

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{bmatrix}$$

Yukarıda elde edilen durumlardan ilkinde anizotropik olan plazma yapısı, izotropik yapıya dönüşmektedir. [25] çalışmasında her iki durum için elde edilen tam çözüm ifadeleri ve bu ifadeler kullanılarak farklı parametreler ve farklı frekans bölgeleri için elde edilen dispersiyon eğrileri verilmiştir. Tez çalışmamızda, hızlandırıcı frekansının sıfır olarak alındığı birinci durum ele alınmıştır. [25] çalışmasında azimutal değişim m= 0, 1 ve 2 değerleri için tam çözümden elde edilen dispersiyon eğrileri sunulmuştur. Bu yapılardan azimutal değişimin m=1 alındığı durum için ifadesi Eşitlik (3.2)'de sunulan normalize plazma frekansının 0,25, 0,5 ve 0,75 olduğu yapılara ait dispersiyon eğrileri verilmiştir.

$$\text{Normalize Plazma Frekansı} = \frac{\omega_p a}{c} \tag{3.2}$$

Burada, a, plazma sütun yarıçapını ve c, ışık hızını göstermektedir. Azimutal değişim m=1 yapısına ait dispersiyon eğrilerinde geriye doğru dalgalar meydana gelmektedir [25]. Çalışmamızda m=1 ve normalize plazma frekansının 0,25 olduğu yapıya ait dispersiyon eğrileri Eşitlik (Ek B.1)'de verilen karakteristik eşitlikler sistemi kullanılarak elde edilmiştir. Plazma sütun yarıçapı a=10mm, m=1 ve normalize plazma frekansı=0,25 alınarak ve Eşitlik (Ek B.1) kullanılarak elde edilen dispersiyon eğrileri Şekil 3.2'da verilmiştir.



Şekil 3.2. Silindirik açık izotropik plazma sütun için dispersiyon eğrileri

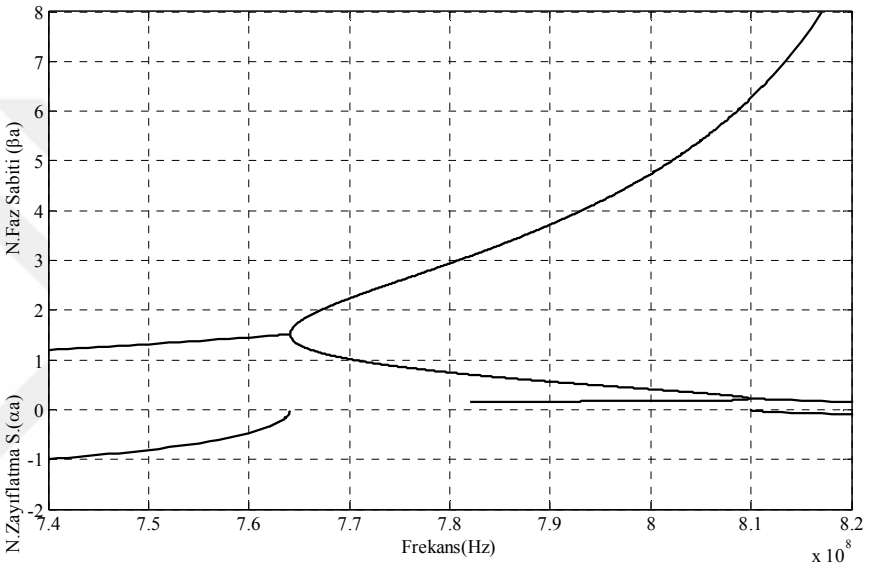
Şekil üzerinde yatay ve dikey eksen [25] çalışmasında sunulduğu gibi normalize faz sabiti (βa)-normalize frekans ($\frac{\omega a}{c}$) şeklinde sunulmuştur. Şekil 3.2'da elde edilen sonuçlar [25] çalışmasında elde edilen sonuçlar ile örtüşmektedir. Bununla birlikte çalışmamızda daha sonra elde edilecek olan silindirik açık plazma sütuna ait kompleks modlar yatay eksen frekans-dikey eksen ise yayılım sabiti olacak şekilde güncel literatüre uygun olarak verilecektir.

3.2. Silindirik Açık Plazma Sütun İçin Kompleks Modlar

Bu bölümde, iletilen modları bölüm 3.1'te verilen silindirik açık plazma sütun dalga kılavuza ait kompleks değerli modlar elde edilmiştir. Yapıya ait kompleks değerli modlar MATLAB programında fsolve komutu kullanılarak elde edilmiştir. Bu modlar sızıntı modlara karşı düşmeyen ve sonsuzdaki sınır koşulunu sağlayan uygun modlardır. Elde edilen modların uygunluğu veya uygunsuzluğu sonraki bölümde ayrıntılı olarak tartışılacaktır.

Açık silindirik plazma sütun yapısına ait kompleks modlar (Ek B.1)'de verilen karakteristik denklemler sistemi kullanılarak araştırılmıştır. Literatürde dielektrik çubuk yüklü silindirik kapalı [26],[28] ve elektrik ve manyetik geçirgenliği boşluktan farklı iki katmanlı silindirik kapalı dalga kılavuzu [27] için var olan kompleks

modlar gösterilmiştir. Literatürde var olan çalışmalarda kompleks modlar için ortak özellik kompleks modların dispersiyon eğrilerinin yön değiştirdiği noktalarda doğmalarıdır. Bu özellik göz önüne alınarak Şekil 3.2'de dispersiyon eğrilerinin yön değiştirdiği frekans noktaları civarında kompleks değerli modlar MATLAB programında Eşitlik (Ek B.1) ve fsolve komutu kullanılarak nümerik olarak elde edilmiştir. Nümerik hesaplamalar sonucunda elde edilen dispersiyon eğrileri literatürde daha yaygın olarak kullanılan; yatay eksen frekans-dikey eksen normalize faz sabiti olacak biçimde Şekil 3.3'da verilmiştir.



Şekil 3.3. Silindirik açık izotropik plazma sütun için kompleks dispersiyon eğrileri

Şekil 3.3'da görüldüğü gibi dispersiyon eğrilerinin yön değiştirdiği frekans noktalarında kompleks modlar doğmaktadır. Şekilde de görüldüğü gibi 764 MHz noktasında dispersiyon eğrisi çatallanmaktadır. Bu noktanın sol tarafında kompleks modlar, sağ tarafında ise ileri ve geri yönlü iletilen (veya kılavuzlanmış) modlar var olmaktadır. Benzer şekilde 810 MHz noktasında çatallanan dispersiyon eğrisinin sol tarafında ileri ve geri yönlü iletilen modlar, sağ tarafında ise kompleks modlar var olmaktadır.

3.3. Açık Dalga Kılavuzları İçin Uygun ve Uygunsuz Modlar

Açık dalga kılavuzlarında yayılabilen uygun ve uygunsuz modlar Manenkov tarafından incelenmiştir [41]. Açık dalga kılavuzları için alan bileşenleri sonsuzda

sınır koşullarını sağlamak zorundadır. Silindirik yapı için sınır koşulları çalışmasında aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\lim_{R\to\infty} RE = \lim_{R\to\infty} RH = 0 \tag{3.3}$$

Burada, R; r ve z koordinat bileşenleri olmak üzere $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ şeklinde tanımlıdır.

Eğer r→∞ giderken dalga genliği artarsa, sonsuzdaki sınır koşulu bozulur ve bu dalgalar matematiksel olarak uygunsuz olarak adlandırılır. Dalga genliğinin kılavuz dışında sonsuza yaklaştıkça büyümesinden, dalgaların fiziksel olmadığı sonucu çıkar. Bununla birlikte, sızıntılı olarak da adlandırılan bu dalgalar fiziksel olarak ölçülebilir ve pek çok elektromanyetik uygulamada kullanılırlar. Fakat bu dalgalar matematiksel olarak uygunsuz olduklarından, onlar sadece alanın sonlu kaldığı tampon şeklinde kısıtlı bir bölge içerisinde var olabilirler [2]. Düzlemsel(planar) sol elli materyal yapısı için uygun ve uygunsuz modlar [42] çalışmasında Manenkov tarafından incelenmiştir. Elektrik geçirgenliği ε_0 ve manyetik geçirgenliği, konuma bağlı olarak -1 ile +1 arasında değişen düzlemsel sol elli materyal yapısı için dispersiyon eğrileri verilmiştir. Dispersiyon eğrileri üzerinde var olan kompleks modların, ileri yönlü ve geriye doğru iletilen modların ve sönümlü modların varlığı gösterilmiştir. İlgili çalışmada sönümlü modlar, sanal(virtual) modlar olarak adlandırılmıştır. [42] çalışmasında farklı frekanslarda var olan farklı modlar için uzaklığa göre elektrik ve manyetik alan değişimlerinin şekilleri sunulmuştur. Yapı için sanal modlar olarak adlandırılan sönümlü modların uygunsuz oldukları gösterilmiştir. Bununla birlikte bu modların sızıntılı modlar olarak (leaky modes) adlandırıldıkları ve fotonik kristal sistemlerde sıklıkla kullanıldığı vurgulanmıştır.

Çok katmanlı bianizotropik düzlemsel dalga kılavuzlarında uygun ve kompleks uygunsuz modlar için bir hesaplama yöntemi Mesa ve Horno tarafından sunulmuştur [43]. Fakat modların uygun veya uygunsuz olma koşulları sunulmamıştır. [44]ve [45] çalışmalarında, sızıntılı modlar için yapıdan uzaklaştıkça alan bileşenlerinin eksponansiyel olarak artmasından dolayı uygunsuz oldukları belirtilmiştir. Zıttı olarak sınırlı modlarda (bound modes) yapıdan uzaklaştıkça alanların eksponansiyel olarak zayıfladığını için uygun oldukları belirtilmiştir.

3.3.1. Açık plazma sütun dalga kılavuzu için uygun ve uygunsuz modların analitik olarak incelenmesi

Açık plazma sütun dalga kılavuza ait modlar Maxwell denklemleri ve plazma boşluk ara yüzü için var olan süreklilik koşulları kullanılarak elde edilen karakteristik eşitlikler sistemi (Ek B.1) ile hesaplanmıştır. Plazma çubuk, elektrik geçirgenliği frekansa bağlı izotropik çubuk olarak ele alınmıştır. Plazma çubuk dışında kalan bölge için sonsuzda sıfır olan sınır koşullarını da göz önünde bulundurarak analitik ifadeleri ele alalım. Plazma çubuk dışındaki bölge için tüm alan ifadeleri ikinci tip modifiye Bessel fonksiyonlarını veya onların türevlerini içermektedir. Eşitlik (3.4)'te ifadesi verilen ikinci tip Bessel fonksiyonunun parametreleri sırasıyla r uzaklığı ve k ortamın dalga sayısını göstermektedir. Plazma dışı ortam için dalga sayısı $k = k_2 = \sqrt{\gamma^2 - k_0^2}$ şeklinde tanımlıdır. Burada γ yayılım sabitini, k_0 ise boşluk için dalga sayısını göstermektedir. Bessel fonksiyonlarının türevleri de kendi cinslerinden ifade edilebildiği için, ikinci tip modifiye Bessel fonksiyonunu $r\to\infty$ giderken limitini alırsak, analitik olarak alan ifadelerinin uygunluğu ve uygunsuzluğu için sonuç çıkarabiliriz. İkinci tip modifiye Bessel fonksiyonu aşağıdaki Eşitlik (3.4) şekilde tanımlıdır.

$$K_n(kr) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\left[\dfrac{I_{-n}(kr) - I_n(kr)}{\sin n\pi}\right] & n \neq 0,1,2,3,... \\ \lim\limits_{p\to n}\dfrac{\pi}{2}\left[\dfrac{I_{-p}(kr) - I_p(kr)}{\sin p\pi}\right] & n = 0,1,2,3,... \end{cases} \tag{3.4}$$

n'nin tam sayı olduğu durumlar için $\sin p\pi=0$ ve $I_p(kr)=I_{-p}(kr)$ olduğundan K_n ifadesinde 0/0 belirsizliği ortaya çıkar. Bu belirsizlik L'Hospital kuralı kullanılarak giderilirse Eşitlik (3.5) elde edilir [46].

$$\begin{aligned} K_n(kr) = (-1)^{n+1}\left\{\ln\left(\frac{kr}{2}\right) + \kappa\right\} I_n(kr) + \frac{1}{2}\sum_{x=0}^{n-1}(-1)^x (n-x-1)!\left(\frac{kr}{2}\right)^{2x-n} \\ + \frac{(-1)^n}{2}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{kr}{2}\right)^{n+2x}}{x!(n+x)!}\{\Phi(x) + \Phi(n+x)\} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Burada, κ=0,5772156… (Euler sabiti) ve

$$\Phi(p)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{p}, \qquad \Phi(0)=0$$

Şeklinde tanımlıdır.

İkinci tip modifiye Bessel fonksiyonunu, $K_n=E_1+E_2+E_3$ şeklinde ifade ederek $r\to\infty$ giderken limitini alırsak, toplamların her birinin limitleri;

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty} E_1 &= \lim_{r\to\infty}\left[(-1)^{n+1}\left\{\ln\left(\frac{kr}{2}\right)+\kappa\right\}I_n(kr)\right] \\ &= (-1)^{n+1}\left\{\lim_{r\to\infty}\ln\left(\frac{kr}{2}\right)+\kappa\right\}.\lim_{r\to\infty} I_n(kr)=\begin{cases}-\infty & n=\text{çift}\\ \infty & n=\text{tek}\end{cases}\end{aligned} \tag{3.6}$$

Burada $\lim_{r\to\infty} I_n(kr)=\infty$ 'dur.

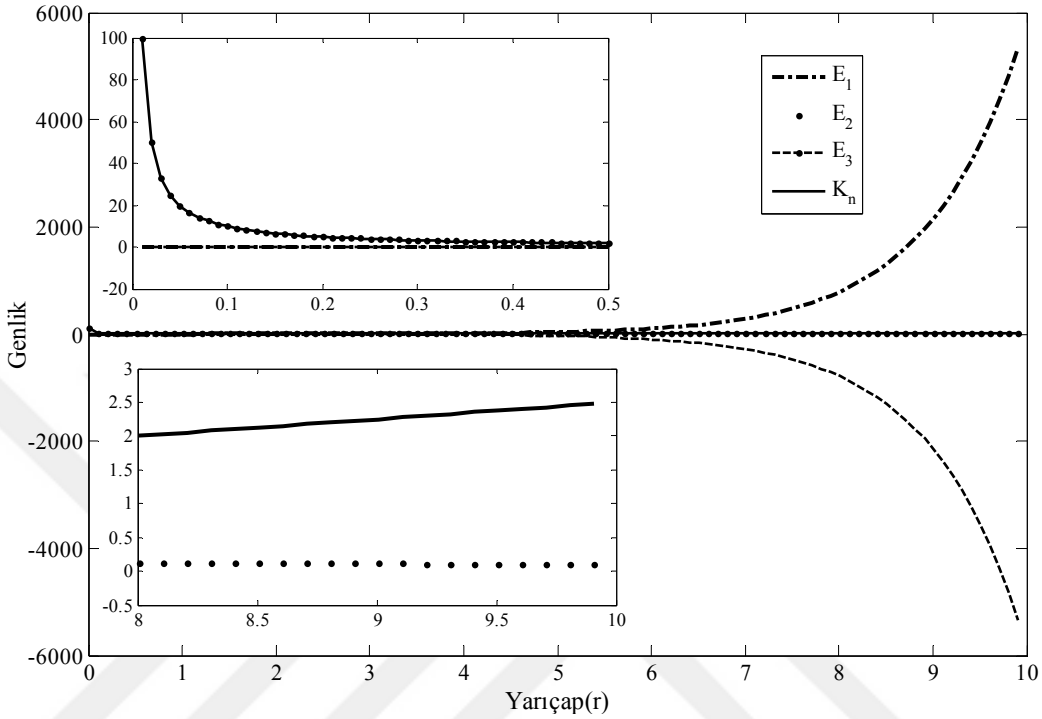
$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty} E_2 &= \lim_{r\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{x=0}^{n-1}(-1)^x(n-x-1)!\left(\frac{kr}{2}\right)^{2x-n} = \frac{1}{2}\sum_{x=0}^{n-1}(-1)^x(n-x-1)!\lim_{r\to\infty}\left(\frac{kr}{2}\right)^{2x-n} \\ &= \begin{cases} 2x-n>0 \quad \Rightarrow \quad \infty \\ 2x-n=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\sum_{x=0}^{n-1}(-1)^x(n-x-1) \\ 2x-n<0 \quad \Rightarrow \quad 0 \end{cases}\end{aligned} \tag{3.7}$$

Fakat n<2 için ($\left(\sum_{x=0}^{n-1}\right)$'den dolayı E_2 limiti sıfıra gider.

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty} E_3 &= \lim_{r\to\infty}\frac{(-1)^n}{2}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{kr}{2}\right)^{n+2x}}{x!(n+x)!}\{\Phi(x)+\Phi(n+x)\} \\ &= \begin{cases} n+2x>0 \quad \Rightarrow \quad \infty \\ n+2x=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(-1)^n}{2}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{x!(n+x)!}\{\Phi(x)+\Phi(n+x)\} \\ n+2x>0 \quad \Rightarrow \quad 0 \end{cases}\end{aligned} \tag{3.8}$$

Ayrıca, n>0 için E_3 limiti ∞ olur. Sonuç olarak, n=1 için limitler toplamı $\infty+0-\infty$ şeklinde elde edilir. $+\infty$ ve $-\infty$ ifadelerinin limite ulaşma hızları sonucu belirler. Bu

durum $K_n=E_1+E_2+E_3$ olmak üzere, ikinci tür modifiye Bessel fonksiyonunun açık ifadesini kullanılarak n=1 ve r=0,01-10 aralığı için elde edilen sayısal değerler üzerinde çizdirilmiştir.

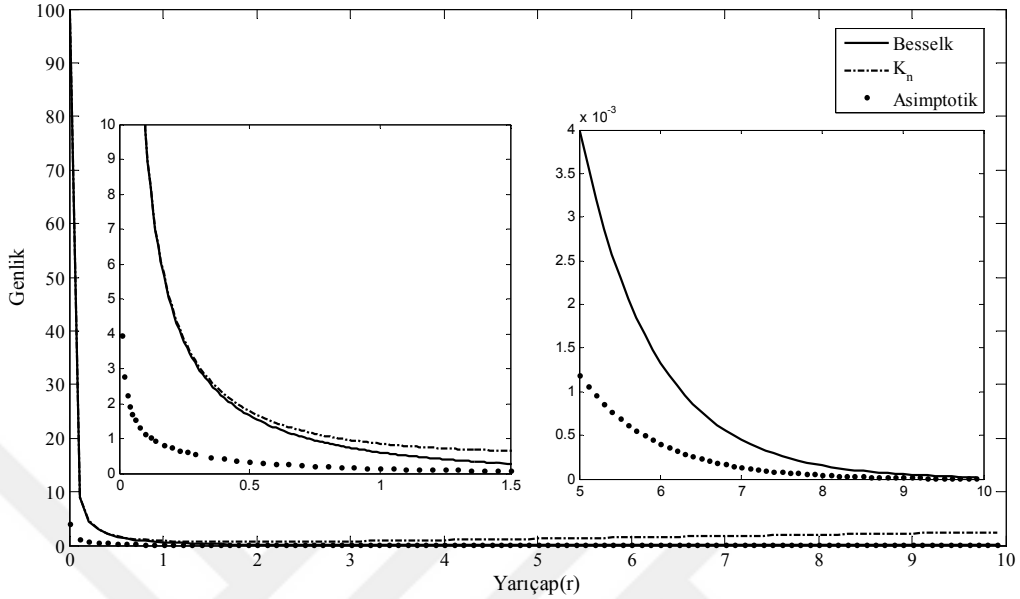


Şekil 3.4. n=1 için modifiye Bessel fonksiyonu ve bileşenleri

Şekilde de görüldüğü gibi n=1 için r→∞'a giderken, E_1 bileşeni +∞'a E_3 bileşeni -∞'a gitmektedir. E_1 bileşenin limit hızı E_3'e göre fazla olduğundan yeşil renkle verilen modifiye Bessel fonksiyonunun toplam değerleri r→∞'a giderken E_1 davranış yönünde olmaktadır. Şekilde verilen modifiye Bessel fonksiyonunu hesaplamak için kullanılan Matlab kodu Ek-C'de verilmiştir.

Matlab progamında ikinci tür modifiye Bessel fonksiyonunun hesabı için kullanılan (besselk) algoritma açık olarak bulunamamıştır. Matlab programında ikinci tür modifiye Bessel fonksiyonunun hesaplamasında kullanılan algoritma araştırmak amacıyla; yukarıda yazılı kod, besselk ve ikinci tür modifiye Bessel fonksiyonunun Eşitlik (3.9)'te verilen asimptotik ifadesi ile kullanılarak hesaplamalar gerçekleştirilmiştir ve Şekil 3.5'te sunulmuştur. İkinci tür modifiye Bessel fonksiyonunun asimptotik ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$K_n(kr) \simeq \frac{e^{-kr}}{\sqrt{2\pi kr}} \tag{3.9}$$



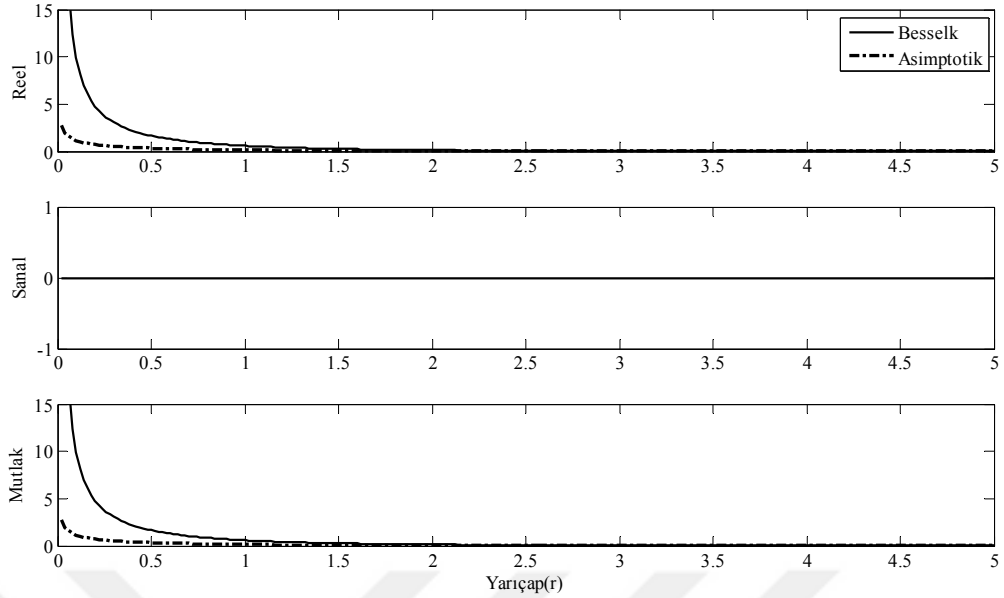
Şekil 3.5. n=1 için ikinci tür modifiye Bessel fonksiyonu hesabı

Şekilde görüldüğü gibi r'nin küçük değerleri için besselk 'dan elde edilen sonuçlar K_n ile uyumlu iken r büyüdükçe besselk 'dan elde edilen sonuçlar asimptotik ifadeye yaklaşmaktadır.

Bu noktadan itibaren modların uygunluğu veya uygunsuzluğunun analitik incelemesi, ikinci tür modifiye Bessel fonksiyonunun asimptotik ifadesi kullanılarak gerçekleştirilecektir. Eşitlik (3.9)'de Re(k)=k_R ve Im(k)=k_S ($k=k_R+jk_S$) olmak üzere, eşitliği k'nın olabileceği üç farklı durum için inceleyelim. $k=k_r$ yani saf reel için $r\to\infty$'a giderken Eşitlik (3.9)'nin limiti; $k_R>0$ için,

$$\lim_{r\to\infty} K_n(k_R r) \simeq \lim_{r\to\infty} \frac{e^{-k_R r}}{\sqrt{2\pi k_R r}} = \frac{0}{\infty} = 0$$

Bu durum sayısal bir örnek için Şekil 3.6'de verilmiştir. Şekil üzerinde yarıçap değişimine göre ifadelerden elde edilen değerlerin, reel ve sanal kısımları ve mutlak değerleri karşılaştırmalı olarak çizdirilmiştir.



Şekil 3.6. k=reel pozitif ve r=0,01-2,5 aralığı için ikinci tür modifiye Bessel fonksiyonu ve Asimptotik ifadesinden elde edilen eğriler

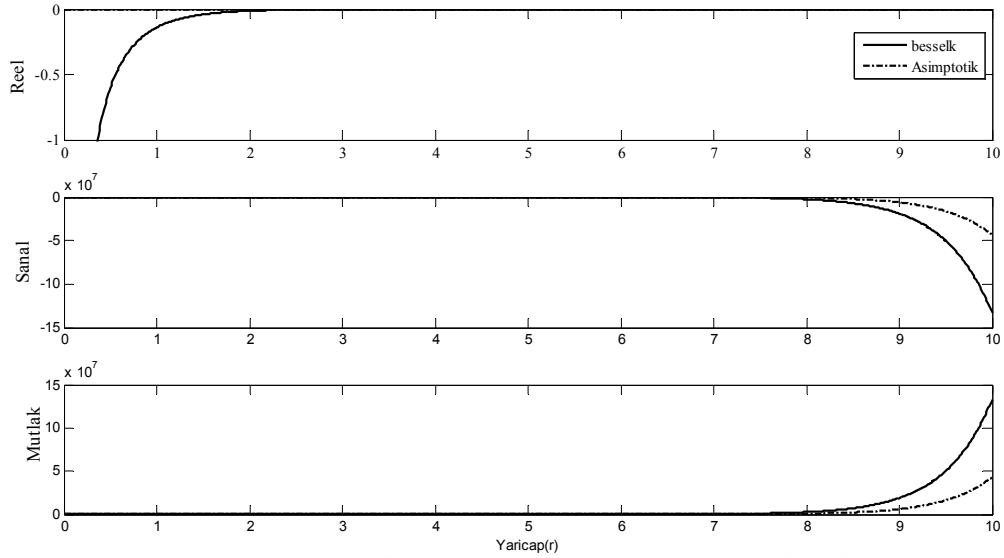
$k_R<0$ için,

$$\lim_{r\to\infty} K_n\left(k_R r\right) \simeq \lim_{r\to\infty} \frac{e^{k_R r}}{\sqrt{2\pi(-k_R)r}} = \lim_{r\to\infty} \frac{e^{k_R r}}{j\sqrt{2\pi k_R r}} = \lim_{r\to\infty} \frac{-je^{k_R r}}{\sqrt{2\pi k_R r}} = \frac{\infty}{\infty}$$

∞/∞ belirsizliği L'Hospital kuralı ile giderilirse,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{-jke^{k_R r}}{\sqrt{2\pi k_R}\,\frac{1}{2\sqrt{r}}} = \frac{-j\infty}{0} = -j\infty$$

elde edilir. Bu durum sayısal bir örnek için Şekil 3.7'de verilmiştir.



Şekil 3.7. k=reel negatif ve r=0,01-10 aralığı için ikinci tür modifiye Bessel fonksiyonu ve Asimptotik ifadesinden elde edilen eğriler

k=jk$_S$ (saf sanal) için r→∞'a giderken Eşitlik (3.9)'nin limiti; k$_S$>0 için,

$$\lim_{r\to\infty} K_n\left(k_S r\right) \simeq \lim_{r\to\infty} \frac{e^{-jk_S r}}{\sqrt{2\pi j k_S r}} = \lim_{r\to\infty} \frac{\cos\left(k_S r\right) - j\sin\left(k_S r\right)}{\sqrt{j}\sqrt{2\pi k_S r}}$$

$$\sqrt{j} = \left(a + jb\right)$$

paydadaki kompleks ifadeden kurtulursak,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\cos\left(k_S r\right) - j\sin\left(k_S r\right)}{\sqrt{j}\sqrt{2\pi k_S r}} = \lim_{r\to\infty} \frac{\left[\cos\left(k_S r\right) - j\sin\left(k_S r\right)\right]\left(a - jb\right)}{\left(a^2 + b^2\right)\sqrt{2\pi k_S r}}$$

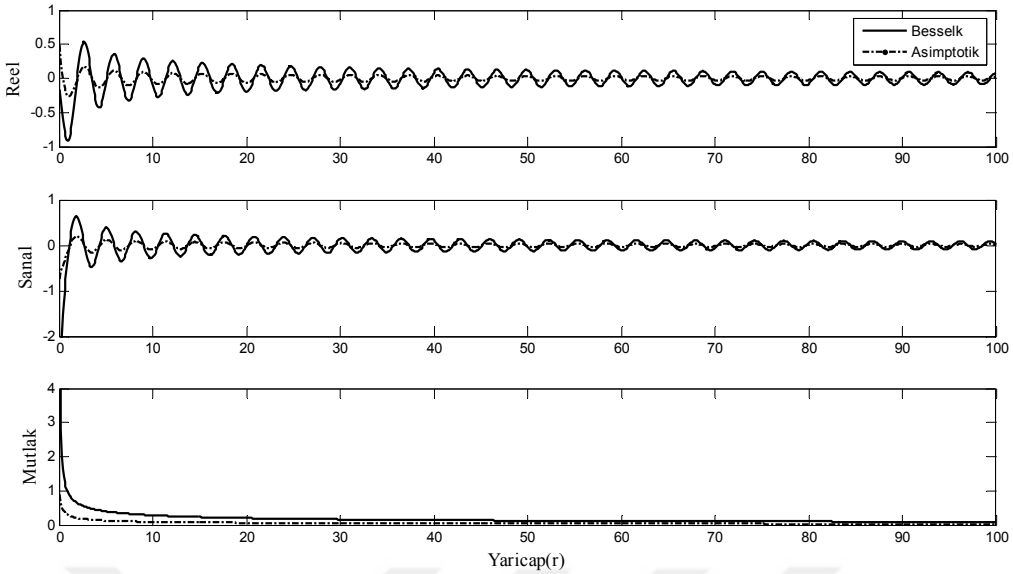
Elde edilir.

$$\left[\cos\left(k_S r\right) - j\sin\left(k_S r\right)\right]\left(a - jb\right) = A + jB$$

Şeklinde bir ifade olduğundan

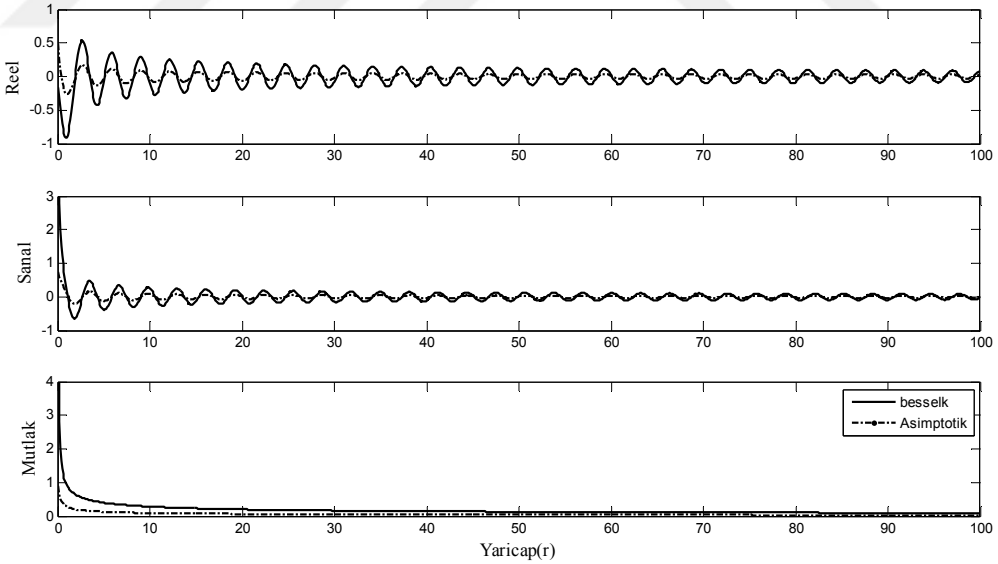
$$\lim_{r\to\infty} \frac{A}{\left(a^2 + b^2\right)\sqrt{2\pi k_S r}} + \lim_{r\to\infty} \frac{jB}{\left(a^2 + b^2\right)\sqrt{2\pi k_S r}} = \frac{A}{\infty} + \frac{jB}{\infty} = 0$$

olur ve bu durum sayısal bir örnek için Şekil 3.8'de verilmiştir.



Şekil 3.8. k=saf sanal ve r=0,1-100 aralığı için ikinci tür modifiye Bessel fonksiyonu ve Asimptotik ifadesinden elde edilen eğriler

Benzer şekilde $k=jk_S$ ve $k_S<0$ alarak yukarıdaki işlemleri tekrarlarsak, ifadelerde pay ve paydadaki karmaşık sayıların yerlerini eşlenikleri alacağından $r\to\infty$'a giderken limit tekrar sıfıra yaklaşır. Bu durum sayısal bir örnek için Şekil 3.9'da verilmiştir.



Şekil 3.9. k=saf sanal ve r=0,1-100 aralığı için ikinci tür modifiye Bessel fonksiyonu ve Asimptotik ifadesinden elde edilen eğriler

$k=k_R+jk_S$ (kompleks) için $r\to\infty$'a giderken Eşitlik (3.9)'nin limiti;

$$\lim_{r\to\infty} K_n(kr) \simeq \lim_{r\to\infty} \frac{e^{-(k_R+jk_S)r}}{\sqrt{2\pi(k_R+jk_S)r}} = \lim_{r\to\infty} \frac{e^{-k_R r}\left[\cos(k_S r)-j\sin(k_S r)\right]}{\sqrt{2\pi r}\sqrt{(k_R+jk_S)}}$$

Paydadaki kompleks değerden kurtulursak,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi r}\sqrt{(k_R + jk_S)}} = \frac{\sqrt{(k_R + jk_S)}}{\sqrt{2\pi r}(k_R + jk_S)} = \frac{\sqrt{(k_R + jk_S)}(k_R - jk_S)}{\sqrt{2\pi r}(k_R{}^2 + k_S{}^2)}$$

Ve

$$\sqrt{(k_R + jk_S)}(k_R - jk_S) = a + jb \qquad \text{olarak yazarsak limit;}$$

$$\lim_{r\to\infty} K_n(kr) \simeq \lim_{r\to\infty} \frac{e^{-k_R r}(a + jb)}{\sqrt{2\pi r}(k_R{}^2 + k_S{}^2)} \lim_{r\to\infty} \frac{[\cos(k_S r) - j\sin(k_S r)](a + jb)}{\sqrt{2\pi r}(k_R{}^2 + k_S{}^2)}$$

Yukarıda verilenlere benzer şekilde birinci limiti $k_R>0$ ve $k_R<0$ için inceleyelim. $k_R>0$ için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{e^{-k_R r}(a + jb)}{\sqrt{2\pi r}(k_R{}^2 + k_S{}^2)} = \frac{0}{\infty} = 0$$

$k_R<0$ için ise,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{e^{k_R r}(a + jb)}{\sqrt{2\pi r}(k_R{}^2 + k_S{}^2)} = \frac{\infty}{\infty}$$

eşittir. ∞/∞ belirsizliği L'Hospital kuralı ile giderilebilir.

$$\lim_{r\to\infty} \frac{e^{k_R r}(a + jb)}{\sqrt{2\pi r}(k_R{}^2 + k_S{}^2)} = \lim_{r\to\infty} \frac{k_R e^{k_R r}(a + jb)}{\sqrt{2\pi}\,\frac{1}{2\sqrt{r}}(k_R{}^2 + k_S{}^2)} = \frac{\infty}{0} = \infty$$

elde edilir. İkinci limit ise k_R ve k_S'den bağımsız olarak,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{[\cos(k_R r) - j\sin(k_S r)](a + jb)}{\sqrt{2\pi r}(k_R{}^2 + k_S{}^2)} = \frac{A + jB}{\infty} = 0$$

olur. Sonuç ifadesi limit değerlerinin çarpım değerlerinden oluştuğu için, $k_R>0$ olduğunda limitler çarpımı ;

$$\lim_{r\to\infty} K_n(kr) = 0.0 = 0$$

olur. Diğer taraftan $k_R<0$ olduğundan,

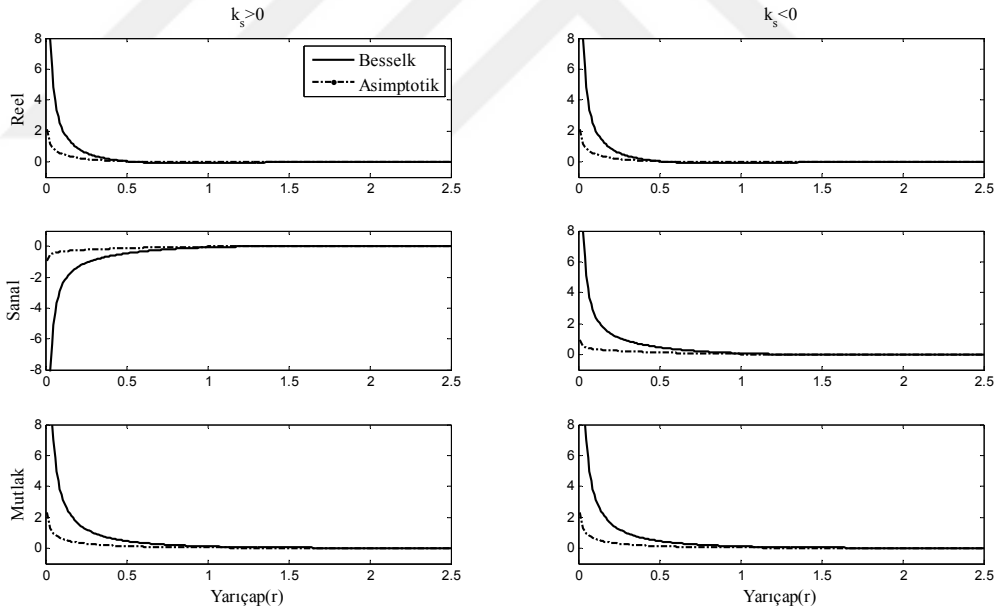
$$\lim_{r\to\infty} K_n(kr) = \infty.0$$

Belirsizliği meydana gelir. L'Hospital kuralı ile belirsizliği giderirsek,

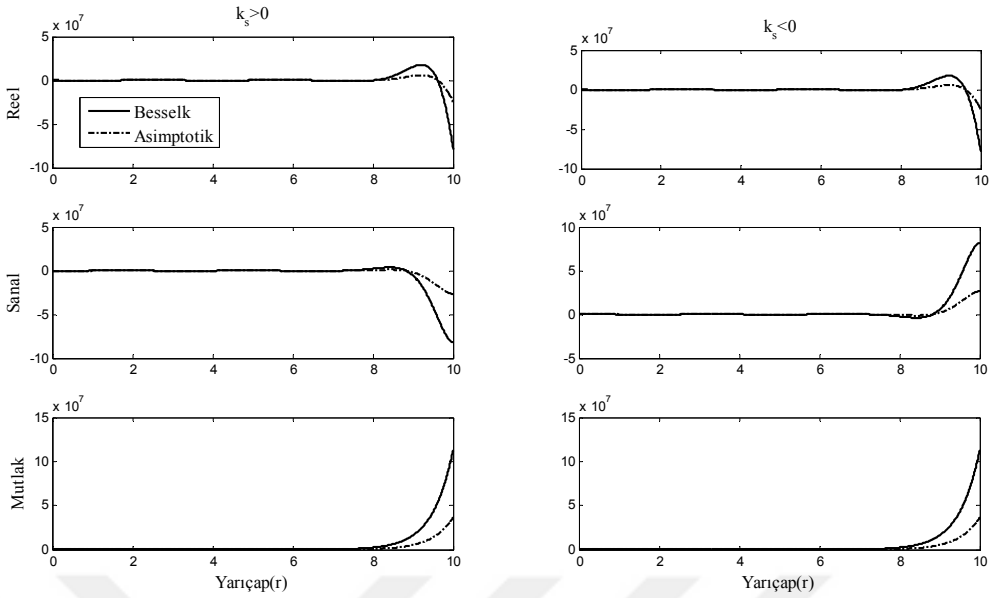
$$\lim_{r\to\infty} \frac{\dfrac{e^{k_R r}(a+jb)}{\sqrt{2\pi r}\left(k_R{}^2 + k_S{}^2\right)}}{\dfrac{\left[\cos(k_S r) - j\sin(k_S r)\right](a+jb)}{\sqrt{2\pi r}\left(k_R{}^2 + k_S{}^2\right)}} = \lim_{r\to\infty} \frac{e^{k_R r}}{\left[\cos(k_S r) - j\sin(k_S r)\right]}$$

$$= \lim_{r\to\infty} \frac{e^{k_R r}\left[\cos(k_S r) + j\sin(k_S r)\right]}{\cos^2(k_S r) + \sin^2(k_S r)} = \lim_{r\to\infty} e^{k_R r}\left[\cos(k_S r) + j\sin(k_S r)\right] = \infty(A + jB) = \infty$$

sonucu elde edilir. Bu sonuçlar sayısal örnekler ile Şekil 3.10 ve Şekil 3.11'de verilmiştir.



Şekil 3.10. k=kompleks, $k_R>0$ ve r=0,1-2,5 aralığı için ikinci tür modifiye Bessel fonksiyonu ve Asimptotik ifadesinden elde edilen eğriler



Şekil 3.11. k=kompleks, $k_R<0$ ve r=0,1-10 aralığı için ikinci tür modifiye Bessel fonksiyonu ve Asimptotik ifadesinden elde edilen eğriler

Plazma çubuk dışı alan ifadeleri ikinci tür modifiye Bessel fonksiyonlarından oluşmaktadır. Bessel fonksiyonlarının parametreleri olan ortamdaki dalga sayısı(k) ve uzaklık(r) çarpımı fonksiyonun dönüş değerini, dolayısıyla modların uygunluğunu veya uygunsuzluğunu belirlemektedir. Modların uygun modlar olabilmesi için sonsuzdaki sınır koşulu $\lim_{r\to\infty}\left|\vec{E}\right| = \lim_{r\to\infty}\left|\vec{H}\right| = 0$ sağlanmak zorundadır. Yukarıda ortamdaki dalga sayısının alabileceği değerler göz önünde bulundurularak $r\to\infty$ giderken ikinci tip modifiye Bessel fonksiyonun aldığı değerler incelenerek modların uygunluğu veya uygunsuzluğu saptanmıştır. Sonuç olarak, dalga sayısı $k=k_R+jk_S$ olmak üzere sonuçları özetlersek;

$k=k_R$ (saf reel) için $\begin{cases} k_R > 0 & \text{uygun mod} \\ k_R < 0 & \text{uygunsuz mod} \end{cases}$

$k=jk_S$ (saf sanal) için k_S'nin değerinden bağımsız uygun mod

$k=k_R+jk_S$ (kompleks) için k_S'nin değerinden bağımsız $\begin{cases} k_R > 0 & \text{uygun mod} \\ k_R < 0 & \text{uygunsuz mod} \end{cases}$

elde edilmektedir.

Bununla birlikte plazma sütun dışı ortam için ikinci tip modifiye Bessel fonksiyonun parametresi olan dalga sayısı yayılım sabitine bağlı bir değerdir ve $k_2^2 = \gamma^2 - k_0^2$ şeklinde tanımlıdır.

Çalışma frekansı ω reel bir değer olmak üzere k_0^2'nın değeri daima pozitif reel olur. Buna göre yayılım sabitinin(γ) değerine bağlı olarak k_2'nin alabileceği değerler ve bunlara bağlı olarak modların uygun veya uygunsuzluk sınıfları aşağıdaki gibi oluşacaktır.

$$\gamma \text{ saf reel ise } \begin{cases} \gamma^2 > k_0^2 \Rightarrow k_2 = |\lambda| \begin{cases} \lambda \text{ pozitif reel (uygun mod)} \\ \lambda \text{ negatif reel (uygunsuz mod)} \end{cases} \\ \gamma^2 < k_0^2 \Rightarrow k_2 \text{ saf sanal (uygun mod)} \end{cases}$$

γ saf sanal(γ^2 reel negatif değerdir) ise $\gamma^2 - k_0^2 < 0$ olacağından k_2 saf sanal (uygun mod)

$$\gamma \text{ kompleks ise } k_2 \text{ kompleks } \begin{cases} \mathrm{Re}\{k_2\} > 0 \text{ ise uygun mod} \\ \mathrm{Re}\{k_2\} < 0 \text{ ise uygunsuz mod} \end{cases}$$

Elde edilen koşullar ve iletim karakteristiklerine göre mod sınıfları göz önüne alındığında uygunsuz modlar; iletilen modlara karşı düşen γ'nın saf reel ve $\gamma^2 > k_0^2$ olduğu durumda veya kompleks modlara karşı düşen γ'nın kompleks değerli olduğu durumda var olabilirler. Diğer bir deyişle uygunsuz modlar, iletilen modlar veya kompleks modlar için var olabilirler. Sayısal hesaplamalarda k_2^2'nin karekök değeri standart MATLAB fonksiyonu olan sqrt() kullanılarak elde edilmiştir fakat MATLAB sqrt() fonksiyonu pozitif değerli parametre için köklerden yalnızca pozitif değerli olanı vermektedir. Dolayısıyla γ'nın saf reel ve $\gamma^2 > k_0^2$ durumu için sayısal hesaplamalar sonucu elde edilen kök pozitif değerli olduğu için ilgili durumda modlar uygun moda karşı düşmektedir.

Ayrıca, γ'nın kompleks olması durumunda, k_2 kompleks bir değerin karekökü ifadesinden elde edilecektir. Kompleks değer için karekök tanım ifadesini göz önüne alırsak,

$$z = a + jb = \rho e^{j\theta} \qquad \text{ve} \qquad \rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \theta = \arctan\frac{b}{a}$$

ve

$$k_2 = \sqrt{z} = \sqrt{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2m\pi}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\theta + 2m\pi}{2}\right)\right] \qquad m = 0,1$$

k_2 kompleks bir değerin kare kökü olduğunda elde edilecek iki kök, aralarında 180^o açı farkı olan modülleri eşit iki ayrı kompleks sayıdan oluşacaktır. Bu sayılar reel ve sanal kısımları aynı değerli fakat zıt işaretli $k_{2_I} = c + jd$ ve $k_{2_{II}} = -c - jd$ şeklindeki kompleks sayılar olarak elde edilir. Fakat sayısal hesaplamalarda kullanılan standart MATLAB fonksiyonu sqrt(), kompleks değerli parametre için köklerden yalnızca açısal değeri $-\frac{\pi}{2} < \frac{\theta + 2m\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$ aralığında olan kökü saptamaktadır. Bu açı aralığı için $\mathrm{Re}\{k_2\}>0$ olduğundan sayısal hesaplamalar sonucu elde edilen modlar uygun moda karşı düşmektedir.

Sonuç olarak silindirik açık plazma sütun dalga kılavuzu yapısında iletilen modlarda ve kompleks modlarda olası uygunsuz modlar sayısal hesaplamalarda karşımıza çıkmamaktadır ve sayısal hesaplamalar sonucunda elde edilen tüm modlar uygun modlara karşı düşmektedir.

3.3.2. Açık plazma sütun dalga kılavuzuna ait modların uygunluğunun sayısal olarak incelenmesi

Bu bölümde silindirik açık plazma sütun dalga kılavuzu ait modlar için elde edilen sayısal değerler kullanılarak modların uygunluğu incelenecektir. Tablo 3.1'de, Şekil 3.3'da verilen dispersiyon eğrilerine ait çeşitli frekans noktalarındaki modlara karşılık gelen sayısal değerleri verilmiştir.

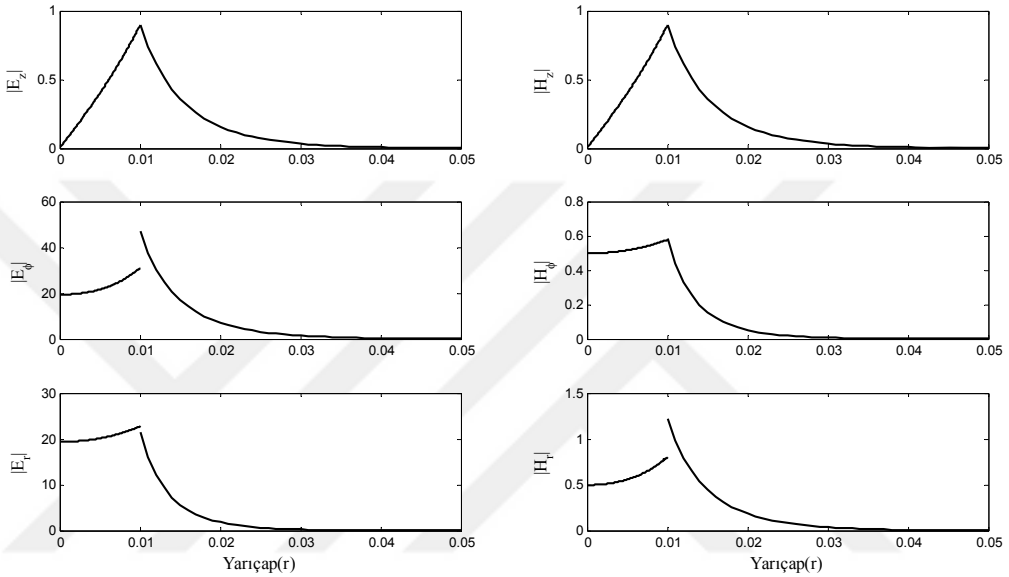
Tablo 3.1. Tam çözümden elde edilen farklı frekanslardaki modların sayısal değerleri

Frekans(MHz)	TEM11	TEM12	TEM13
750	γ=1,3156724095-0,807919796		
765	γ=1,306000695	γ=1,761090419	
800	γ=0,411843274	γ=4,735907078	γ=0,170832516
850	γ=0,251373122		

Tablo 3.1'de verilen frekanslar ve yayılım sabitleri için alan değişimleri, Eşitlik (Ek B.1) de verilen karakteristik eşitlikler sistemi kullanılarak elde edilmiştir. Farklı frekanslar için var olan modlara ilişkin normalize yayılım sabiti değerleri ve ona

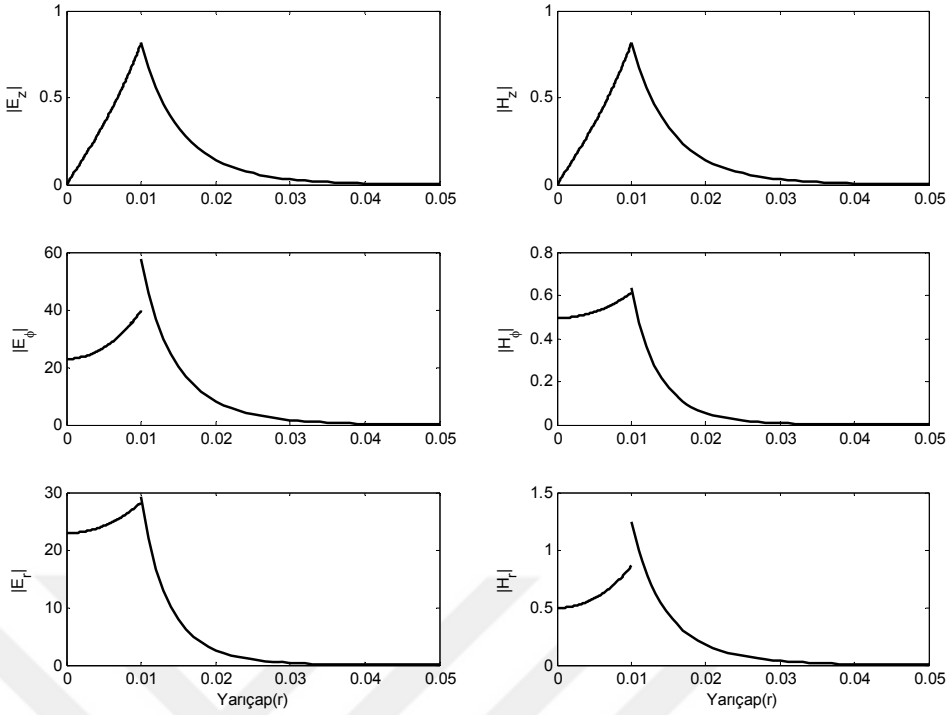
bağlı olarak elde edilen k_2 değerleri verilmiştir. İlgili frekans noktalarında elektrik ve manyetik alan bileşenlerinin genlikleri çizdirilerek elde edilen modların uygun modlar olduğu sayısal olarak gösterilmiştir.

f=7,5x10^8 Hz için elde edilen normalize kompleks yayılım sabiti γ=1,315672409513480 -0,807919796768156i için dalga sayısı; k_2 =13,89 -81,213i elde edilmektedir ve alan bileşenleri aşağıdaki gibidir;



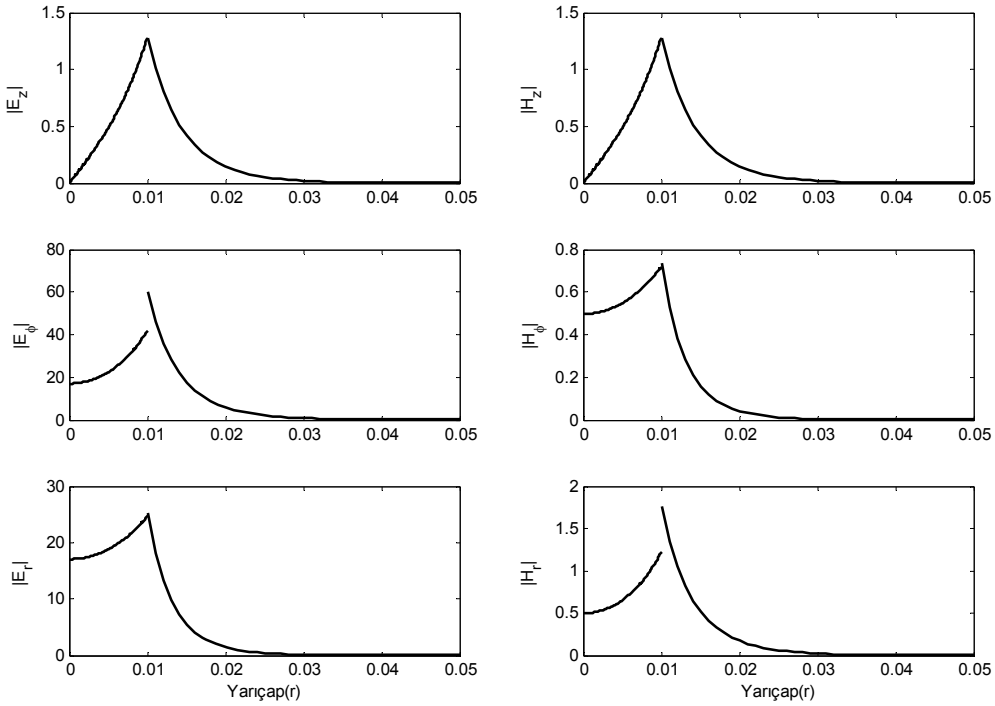
Şekil 3.12. f=7,5x10^8 Hz'de TEM_{11} için alanların genlik değişimleri

f=7,65x10^8 Hz için elde edilen geriye dalga modu için yayılım sabiti γ= 1,306000695390085 için dalga sayısı; k_2= 129,6116 elde edilir ve alan bileşenleri aşağıdaki gibidir.



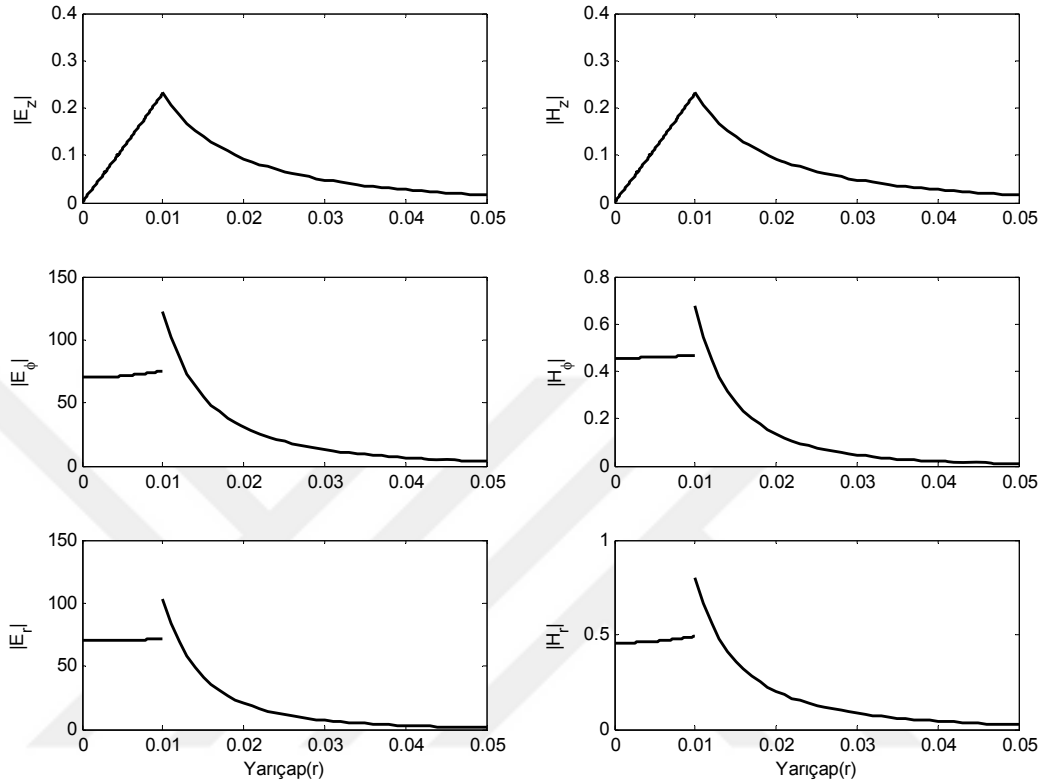
Şekil 3.13. f=7,65x10^8 Hz'de TEM_{11} için alanların genlik değişimleri

f=7,65x10^8 Hz için elde edilen ileri yönlü dalga modu için yayılım sabiti γ= 1,761090419749078 için k_2= 175,3786 elde edilir ve alan bileşenleri aşağıdaki gibidir.



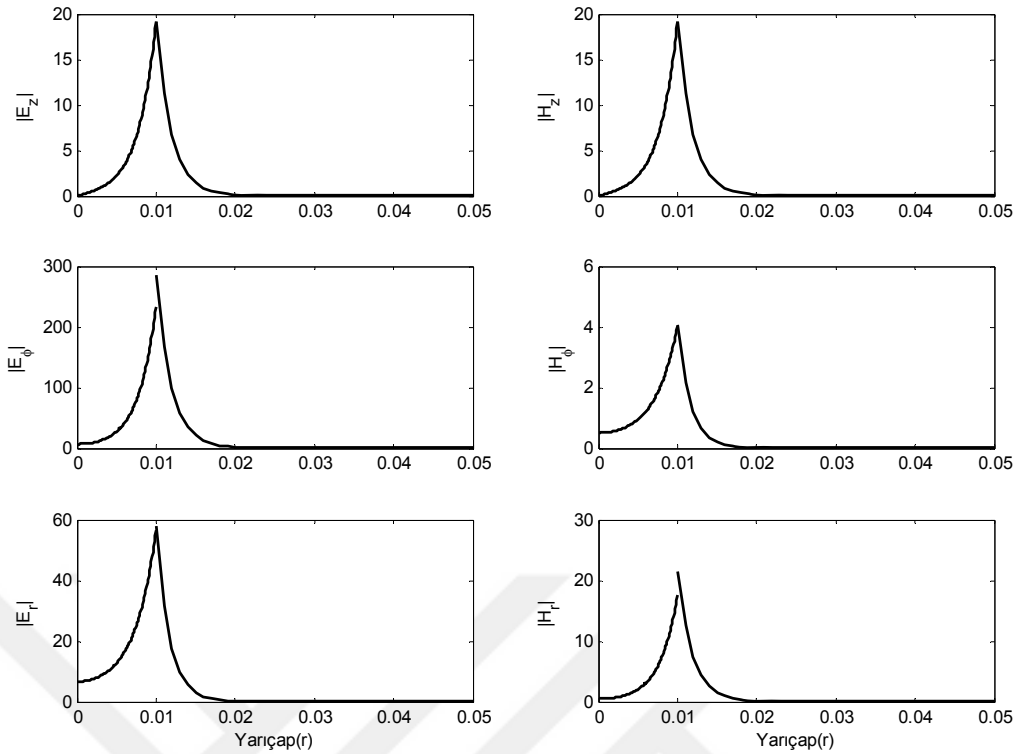
Şekil 3.14. f=7,65x10^8 Hz'de TEM_{12} için alanların genlik değişimleri

f=8x10^8 Hz için elde edilen geriye dalga modu için yayılım sabiti γ= 0,411843274706138 için k_2= 37,6162 elde edilir ve alan bileşenleri aşağıdaki gibidir.



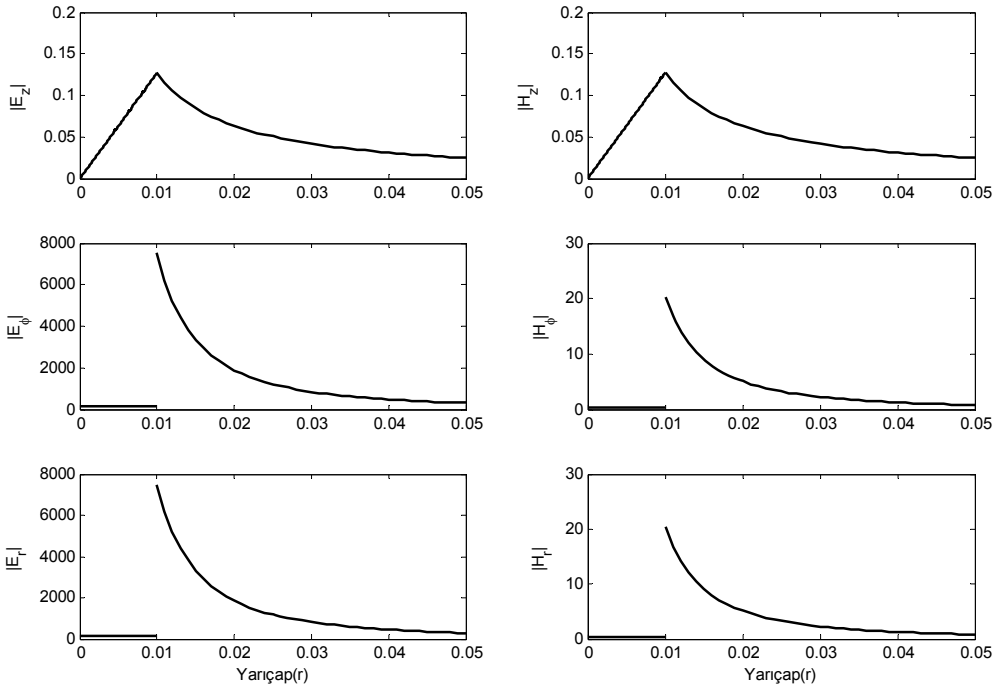
Şekil 3.15. f=8x10^8 Hz'de TEM_{11} için alanların genlik değişimleri

f=8x10^8 Hz için elde edilen ileri yönlü dalga modu için yayılım sabiti γ= 4,735907078249420 için k_2= 473,2934 elde edilir ve alan bileşenleri aşağıdaki gibidir.



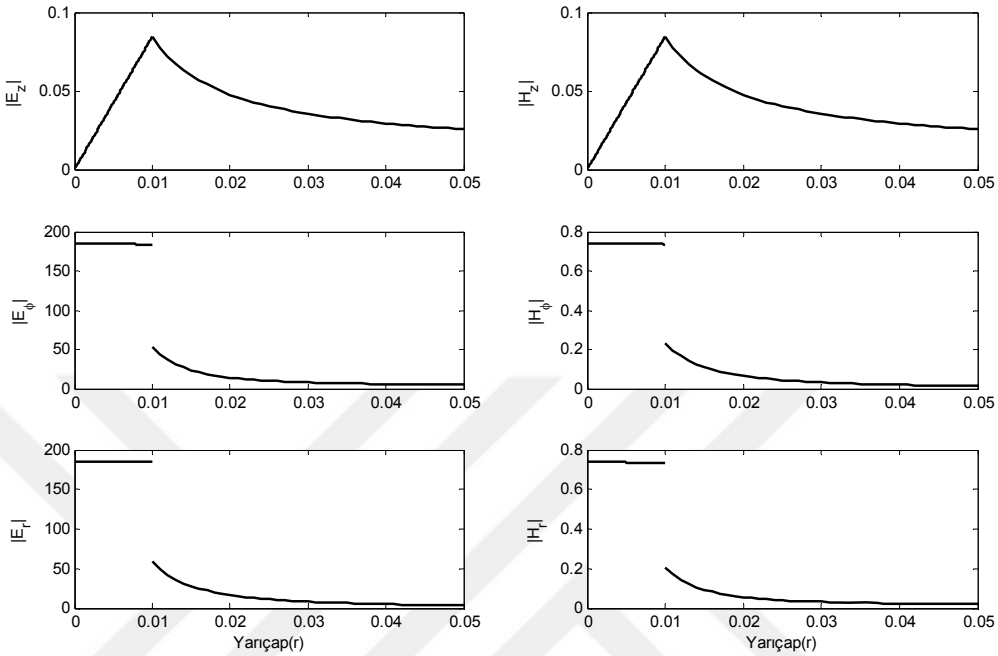
Şekil 3.16. f=8x10^8 Hz'de 'de TEM_{12} için alanların genlik değişimleri

f=8x10^8 Hz için elde edilen ileri yönlü dalga modu için yayılım sabiti γ= 0,170832516700885 için k_2= 3,2729 elde edilir ve alan bileşenleri aşağıdaki gibidir.



Şekil 3.17. f=8x10^8 Hz'de TEM_{13} için alanların genlik değişimleri

f=8,5x10^8 Hz frekansında elde edilen sönümlü mod yayılım sabiti γ= 0,251373122929649i için k_2=30,8099i elde edilir ve alan değişimleri aşağıdaki gibidir.



Şekil 3.18. f=8,5x10^8 Hz'de TEM_{11} için alanların genlik değişimleri

Şekillerde de görüldüğü ve analitik olarak ispatlandığı gibi açık plazma sütun dalga kılavuzu için kullanılan eşitliklerin çözümünde kullanılan MATLAB fonksiyonları yalnızca uygun modların varlığına izin vermektedir. Tablo 3.1'de verilen silindirik açık plazma sütun dalga kılavuzu yapısında iletilen modlarda ve kompleks modlarda olası uygunsuz modlar, sayısal hesaplamalarda karşımıza çıkmamaktadır ve sayısal hesaplamalar sonucunda elde edilen tüm modlar uygun modlara karşı düşmektedir.

3.4. Açık Dalga Kılavuzları İçin Kompleks Dalga Tipleri

Genel olarak kompleks modlar yayılım sabitinin kompleks olduğu modları ifade eder. Bununla birlikte açık dalga kılavuzları için elektromanyetik dalganın iletim yönündeki karakteristiğini temsil eden yayılım sabiti yanında enine (kılavuz dışına) iletim karakteristiğinin davranışı da incelenir. Elde edilen sonuçların fiziksel sınır koşulu olan sonsuzdaki sınır koşullarını sağlaması gerekmektedir. Dikdörtgensel geometriye sahip açık dalga kılavuzları için elektromanyetik dalganın enine karakteristiği [2], [47]-[49] çalışmalarında ele alınmıştır. [49] çalışmasında ayrıca silindirik geometriye sahip açık dalga kılavuzları için elektromanyetik dalganın enine

karakteristiği verilmiştir. [2] ve [48] çalışmalarında açık dalga kılavuzları için kompleks dalga tipleri sunulmuştur.

Karakteristik eşitlikler sistemi Eşitlik (Ek B.1)'de verilen yapı için $\gamma = \beta - j\alpha$ ve $k_2 = a + jb$ olmak üzere aşağıdaki kompleks modlar Tablo 3.2. Açık dalga kılavuzları için kompleks dalga tipleri Tablo 3.2'deki gibi sınıflandırılabilir.

Tablo 3.2. Açık dalga kılavuzları için kompleks dalga tipleri

İletim Yönü Karakteristiğine göre Mod Sınıfları	γ		k_2		Modların Uygunluğu Uygunsuzluğu	Açık Kılavuzlar için Kompleks Dalga Tipleri
	β	α	a	b		
İletilen Modlar	+	0	+	+	Uygun	Hapsedilmiş yüzey dalgası (Trapped surface wave)
	+	0	+	0	Uygun	Kılavuz modları (Fast wave-Waveguide modes)
	+	0	+	0	Uygun	Düzlem dalga durumu (Plane wave incidence)
	+	0	+	-	Uygunsuz	Hapsedilmemiş yüzey dalga (Untrapped surface wave)
Kompleks Modlar	+	+	-	+	Uygun	Zenneck dalga (Zenneck wave)
	+	-	+	+	Uygun	Geriye doğru sızıntılı dalga (Backward leaky wave)
	+	-	-	-	Uygunsuz	
	+	+	+	-	Uygunsuz	İleri yönlü sızıntılı dalga (Forward leaky wave)

Tablo 3.2'de verilen açık dalga kılavuzu kompleks mod tipleri [2] ve [48] çalışmaları referans alınarak hazırlanmıştır. Bu referanslara ek olarak, Tablo 3.2'de sol sütunda verilen mod sınıfları sadece iletim yönüne göre karakteristik dikkate alınarak yapılan sınıflandırmayı göstermektedir. İlgili referanslarda sönümlü modlara karşılık gelen yayılım sabitinin saf sanal olması ($\beta=0$ ve $\alpha\neq0$) durumuna yer verilmediği için ilgili modlar tabloya eklenmemiştir.

3.5. Silindirik Açık Plazma Sütun Dalga Kılavuzu Modlarının Moment Metodu Kullanılarak Elde Edilmesi

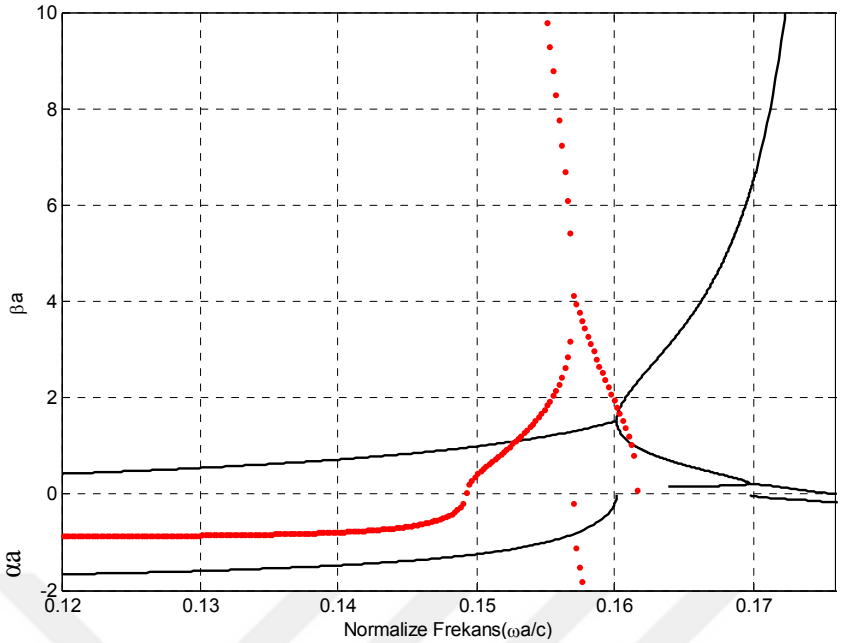
Silindirik açık plazma sütun dalga kılavuzuna ait tam çözüm kullanılarak elde edilen modlar ve dispersiyon eğrileri bölüm 3.1'te ve bölüm 3.2 sunulmuştur. Ayrıca elde edilen modların uygun modlar olduğu gösterilmiştir. Modların uygun mod olmaları yapının Moment Metodu ile modellenebilmesi için gereklidir. Moment Metodunun geçerliliği dielektrik yüklü kapalı silindirik dalga kılavuzu için [40], [50], [51] çalışmalarında gösterilmiştir. Açık dalga kılavuzu için yöntemin kullanılabilmesinin başlıca koşulu yapıyı kapalı hale dönüştürmektir. Bu yöntem uygulanabilirliği çeşitli

dikdörtgensel açık dielektrik kılavuz yapıları için [29], [30] ve [38] çalışmalarında gösterilmiştir. Dielektrik çubuk (veya izotropik plazma sütun) yüklü dışı boşluk ortamla dolu silindirik kapalı dalga kılavuzu için MoM eşitlikleri bölüm 2.2'de sunulmuştur.

Moment Metodunda modelleme metalik kapalı boş boruya ait çözümler kullanılarak yapılmaktadır. Bu yapıya ait sınır koşulları cidarda, elektrik alanın teğetsel bileşeninin ve manyetik alanın ise dik bileşeninin sıfıra eşit olmasıdır. Uygunsuz modlar için plazma sütundan uzaklaştıkça alan bileşenlerinin genlikleri arttığı için kapalı yapıya ait sınır koşullarını sağlamaları mümkün değildir. Uygun modlar için ise, plazma sütundan uzaklaştıkça alan bileşenlerinin genlikleri azaldığı için eğer cidar plazma sütundan yeterince uzağa yerleştirilirse açık plazma sütun dalga kılavuzunu kapalı yapı ile modellemek mümkündür. Bu durum kapalı yapıya ait farklı yarıçap değerleri kullanılarak MoM'dan elde edilen dispersiyon eğrileri ile tam çözümden elde edilen dispersiyon eğrilerinin karşılaştırılarak verilmesi ile gösterilmiştir.

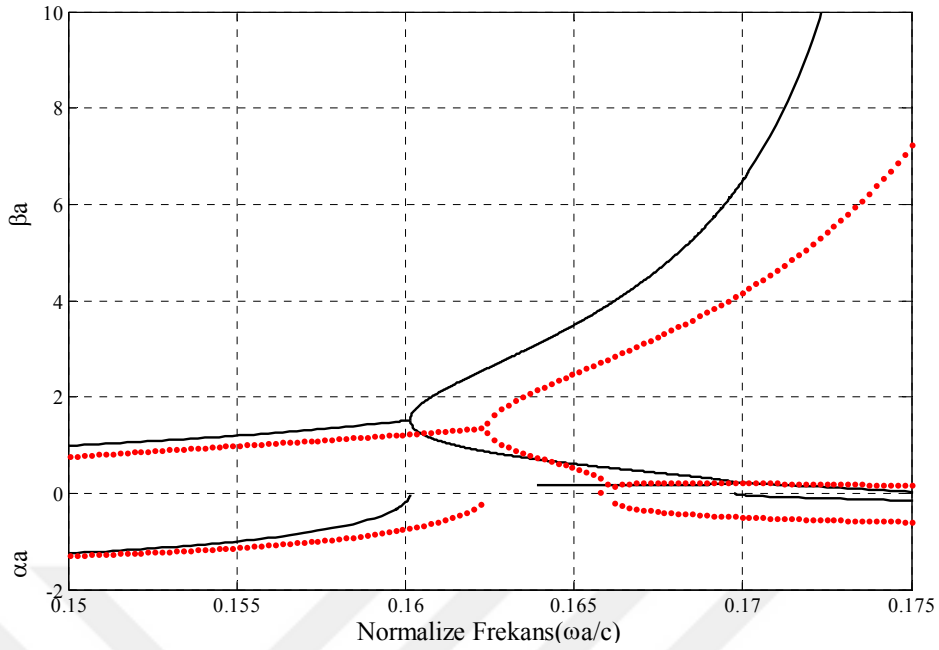
Bu bölümde, Bölüm 3.2'de silindirik açık plazma sütun dalga kılavuzu için elde edilen tüm modlar, plazma sütun yüklü metalik kapalı dalga kılavuzuna ait MoM çözümleri kullanılarak elde edilmiştir. Nümerik hesaplamalarda model, kapalı yapının farklı cidar yarıçap (b) değerleri için MoM'dan elde edilen sonuçlar ve tam çözümden elde edilen sonuçlarla karşılaştırmalı olarak sunulmuştur. MoM için kullanılan matlab kodları, elimizde mevcut olan kapalı dielektrik çubuğa ait kodlardır. Bu kodlar üzerinde dielektrik sabitinin "for" döngüsü ile her frekans için tekrar hesaplanmasını sağlayan küçük bir değişiklik yapılarak ilgili modlar elde edilmiştir. MoM için hesaplamalar boş borunun 150TM ve 150TE modu kullanılarak elde edilmiştir.

Şekil 3.19'te tam çözümden elde edilen açık plazma sütun dispersiyon eğrileri ile b=20mm (yarıçap oranı=0,5) alınarak MoM'dan elde edilen dispersiyon eğrileri karşılaştırmalı olarak sunulmuştur. Şekiller üzerinde siyah kesintisiz çizgi "Gerçek Çözümü", koyu kırmızı nokta çizimleri ise "MoM" çözümlerini göstermektedir.



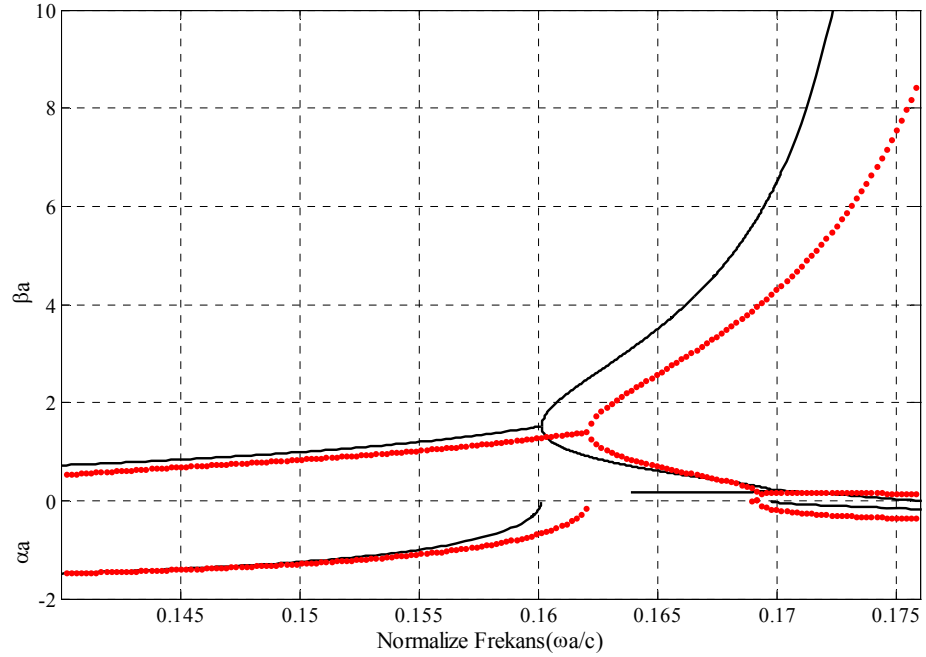
Şekil 3.19. Açık plazma sütun ve b=20mm için MoM'dan elde edilen dispersiyon eğrileri

Şekilde görüldüğü gibi bu yarıçap oranı için de MoM'dan elde edilen sonuçlar tam çözümden elde edilen sonuçlarla uyuşmamaktadır. Şekil 3.20'te tam çözümden elde edilen açık plazma sütun dispersiyon eğrileri ile b=33,3mm (yarıçap oranı=0,3) alınarak MoM'dan elde edilen dispersiyon eğrileri karşılaştırmalı olarak sunulmuştur. Şekil 3.20'da görüldüğü gibi bu yarıçap oranı için MoM'dan elde edilen sonuçların tam çözümden elde edilen sonuçlarla uyumu daha büyük yarıçap oranlarına göre artmaktadır.



Şekil 3.20. Açık plazma sütun ve b=33,3mm için MoM'dan elde edilen dispersiyon eğrileri

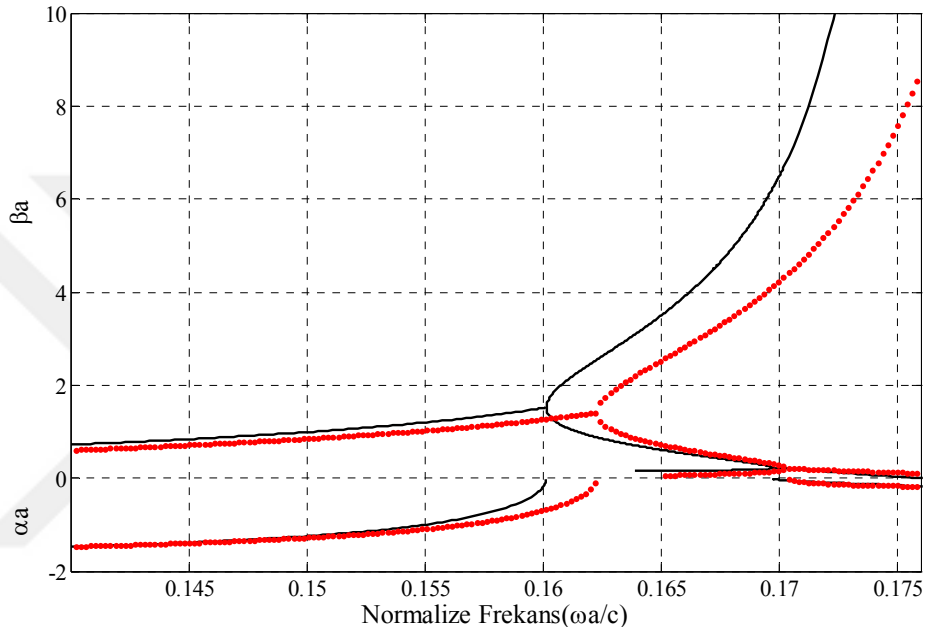
Şekil 3.21'da tam çözümden elde edilen açık plazma sütun dispersiyon eğrileri ile b=50mm (yarıçap oranı=0,2) alınarak MoM'dan elde edilen dispersiyon eğrileri karşılaştırmalı olarak sunulmuştur.



Şekil 3.21. Açık plazma sütun ve b=50mm için MoM'dan elde edilen dispersiyon eğrileri

Şekilde görüldüğü gibi bu yarıçap oranı için MoM'dan elde edilen sonuçların tam çözümden elde edilen sonuçlarla uyumu daha büyük yarıçap oranlarına göre artmaktadır.

Şekil 3.22'de tam çözümden elde edilen açık plazma sütun dispersiyon eğrileri ile b=100mm (yarıçap oranı=0,1) alınarak MoM'dan elde edilen dispersiyon eğrileri karşılaştırmalı olarak sunulmuştur.



Şekil 3.22. Açık plazma sütun ve b=100mm için MoM'dan elde edilen dispersiyon eğrileri

Şekillerde görüldüğü gibi tam çözümle en uyumlu sonuçlar dış yarıçap değerinin b=100mm olduğu durumda elde edilmiştir.

Yapılan nümerik hesaplamalar sonucunda modellemede kullanılan kapalı yapının dış yarıçap değeri arttıkça elde edilen sonuçların açık kılavuzun tam çözüm değerlerine yaklaştığı görülmektedir. Bununla birlikte cidar yarıçapı arttırıldıkça analitik çözümle uyumlu değerlerin elde edilebilmesi için MoM hesaplamalarında daha fazla sayıda TE ve TM öz çözümünün kullanılması ihtiyacı doğmaktadır. Daha fazla öz çözüm kullanılarak yapılacak hesaplamalar hesaplama yükünü ve zamanını arttıracağı için yarıçap oranının ileriki çalışmalarda 0,1 olarak kullanılması uygun olacaktır.

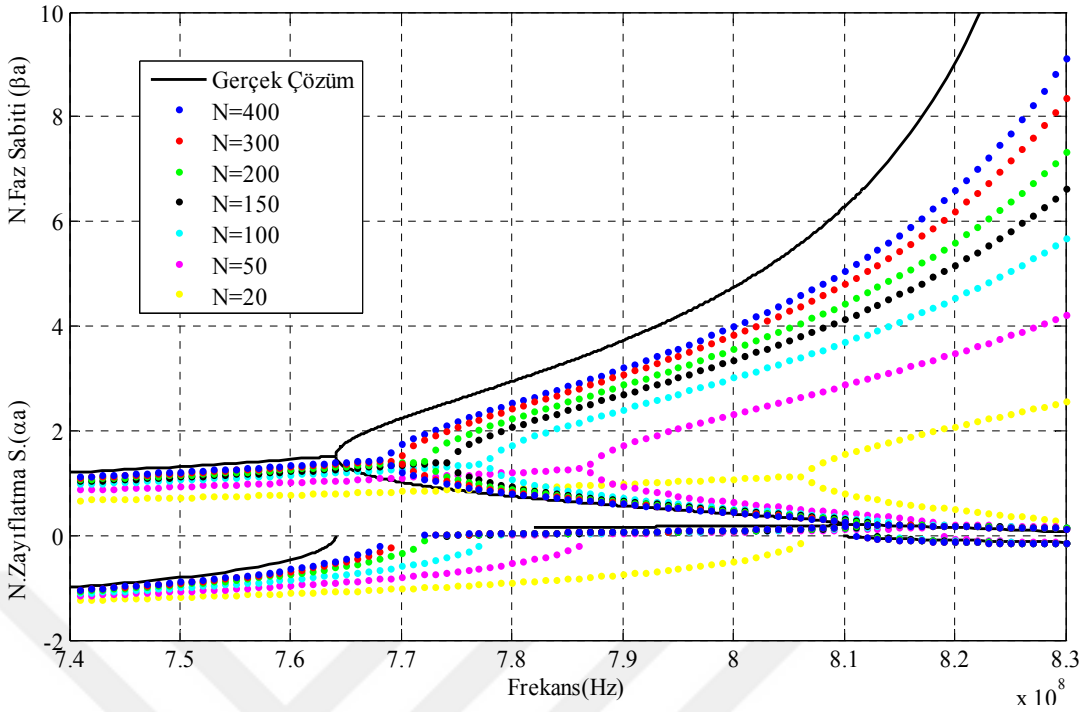
3.5.1. Farklı seri açılım değerleri için MoM'dan elde edilen silindirik açık plazma sütun dalga kılavuzu modları

Önceki bölümde açık plazma silindirik dalga kılavuzu yapısı, plazma sütun yüklü silindirik kapalı dalga kılavuzuna ait MoM çözümleri kullanılarak modellenmiştir. Ayrıca sabit plazma sütun yarıçapı için kapalı kılavuzun dış cidar yarıçapı arttıkça elde edilen sonuçların açık kılavuzun tam çözüm değerlerine yaklaştığı gösterilmiştir. Bununla birlikte cidar yarıçapı arttırıldıkça analitik çözümle uyumlu değerlerin elde edilebilmesi için MoM hesaplamalarında daha fazla sayıda TE ve TM öz çözümünün kullanılması ihtiyacı doğmaktadır. Daha fazla öz çözüm kullanılarak yapılacak hesaplamaların hesaplama yükünü ve zamanını arttıracağı aşikardır.

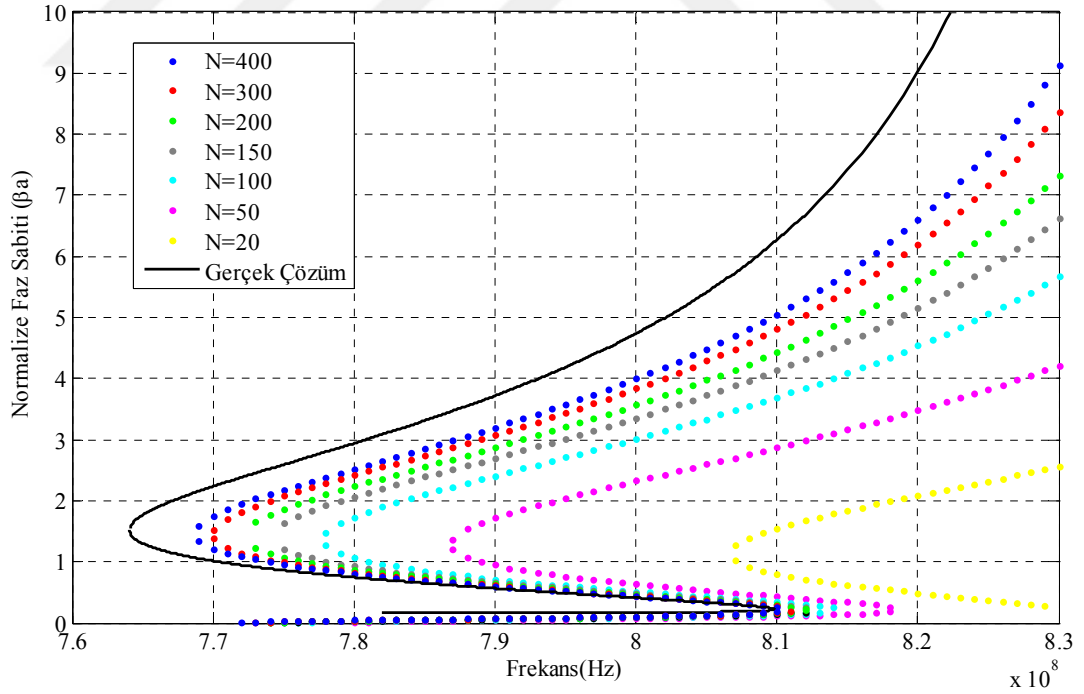
Çalışmamızda MoM hesaplamalarında kullanılan seri açılım sayısı "N" ile gösterilmiştir. MoM hesaplamalarında N seri açılım sayısı için N adet TE ve N adet TM öz çözümü kullanılmaktadır ve lineer sistem boyutu NxN olarak elde edilmektedir.

Çalışmamızda öncelikle; plazma sütun yarıçapı a=10mm, azimutal değişim m=1, normalize plazma frekansı=0,25 sabit silindirik açık plazma sütun dalga kılavuzu değerleri ve plazma-dış cidar yarıçap oranı 0,1 (dış cidar yarıçapı b=100mm) için farklı seri açılım sayıları (N) kullanılarak MoM hesaplamaları gerçekleştirilmiştir. Bu nümerik hesaplamalar $f=7x10^8$-$9x10^8$ Hz frekans aralığı için gerçekleştirilmiştir. Çeşitli seri açılım değerleri kullanılarak MoM'dan elde edilen dispersiyon eğrileri ile tam çözümden elde edilen dispersiyon eğrileri aynı şekil üzerinde verilerek seri açılım sayısı arttıkça elde edilen sonuçların tam çözümle uyumu aşağıda şekiller üzerinde gösterilmiştir ve çalışmasında sunulmuştur [52].

Şekil 3.23'de seri açılım sayısı N=20, 50, 100, 150, 200, 300 ve 400 alınarak MoM'dan elde edilen dispersiyon eğrileri tam çözümden elde edilen dispersiyon eğrileri (ileri/geri yönlü dalgalar- kompleks modlar) ile karşılaştırılmalı olarak sunulmuştur. Sonuçların daha ayrıntılı biçimde gösterilebilmesi amacıyla Şekil 3.24'de ise yalnızca iletilen modlar karşılaştırılmalı olarak sunulmuştur. Şekillerde de görüldüğü gibi seri açılım katsayısı arttıkça MoM'dan elde edilen sonuçlar beklendiği üzere tam çözüme yaklaşmaktadır. Bununla birlikte seri açılımda terim sayısını arttırmak, hesaplama yükünü ve zamanını arttırmaktadır.



Şekil 3.23.Tam çözümden ve MoM'dan elde edilen dispersiyon eğrileri

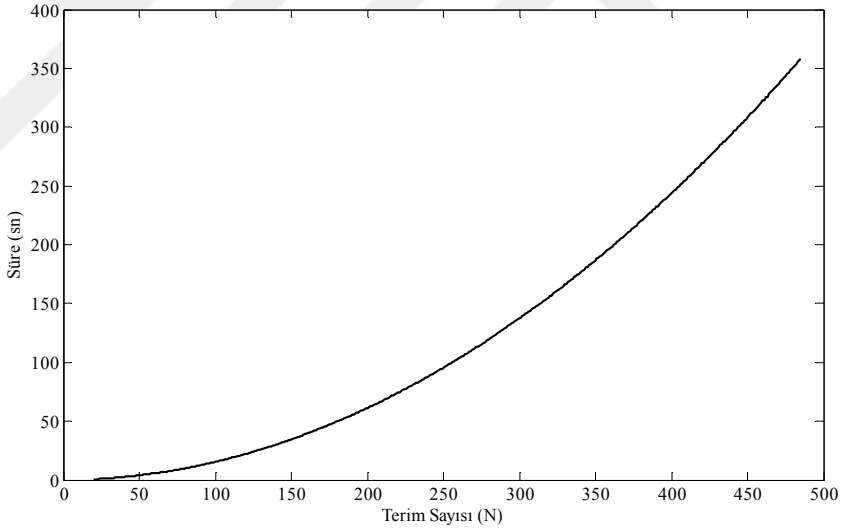


Şekil 3.24. Tam çözümden ve MoM'dan elde edilen dispersiyon eğrileri (İletilen Modlar)

3.5.2. MoM'da kullanılan seri açılım terim sayısının yüzde hata ve hesaplama zamanı ile ilişkisi

Bu bölümde öncelikle seri açılım terim sayısının hesaplama yüküne ve hesaplama zamanına etkisi araştırılacaktır. Bölüm 3.5.1'de verilen plazma parametreleri ve N=20-300 arasındaki seri açınımda kullanılan terim sayıları için MoM nümerik hesaplamaları f=7x10^8-9x10^8 Hz frekans aralığında gerçekleştirilmiştir. Terim sayısının hesaplama zamanına etkisini belirlemek için sabit bir frekans noktasında farklı seri açılım terim sayıları için MoM hesaplamaları gerçekleştirilerek hesaplama süreleri kaydedilmiştir. Elde edilen sonuçlar, seri açılım sayılarına göre aşağıda şekil üzerinde sunulmuştur.

Şekil 3.25'de tek bir frekans değerinde farklı seri açılım sayıları için MoM hesaplamalarının gerçekleşme süreleri verilmiştir.

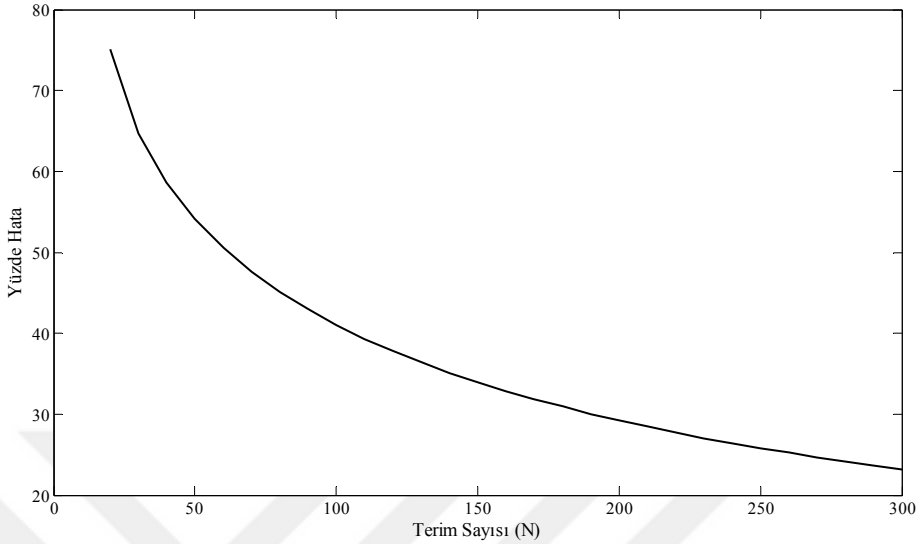


Şekil 3.25. Seri açılım sayısı – hesaplama süresi eğrisi

Şekilde görüldüğü gibi sabit bir frekans değeri için seri açılım sayısı doğrusal olarak artarken, hesaplama süresi doğrusal olmayan bir artış karakteristiği göstermektedir.

Bu çalışmada amaçlardan bir diğeri de seri açılım sayısındaki değişiminin hataya olan etkisini göstermektir. Hesaplamalar sonucu f=810 MHz frekansında, MoM'dan elde edilen sayısal değerlerin gerçek değerlerden farkı yüzde olarak hesaplatılarak ilgili terim sayısı için yüzde hata değerleri elde edilmiştir. Şekil 3.26'te,

f=810MHz'de iletilen mod için hesaplamalar sonucu elde edilen seri açılımda kullanılan terim sayısı – yüzde hata eğrisi verilmiştir.



Şekil 3.26. f=810 MHz'de iletilen mod için seri açılım sayısı – yüzde hata eğrisi

Beklendiği üzere MoM hesaplamalarında kullanılan seri açılım değeri arttıkça yüzde hata değeri düşmektedir.

Bölüm 3'te gerçekleştirlen çalışmalar şöyle özetlenebilir; öncelikle açık silindirik plazma sütun dalga kılavuzu için karakteristik eşitlikler sisteminden elde edilen tam çözümler ve ilgili yapının kapalı modeline ait MoM çözümlerinden elde edilen dispersiyon eğrileri aynı şekil üzerinde verilerek yöntemin geçerliliği gösterilmiştir. Yapılan nümerik hesaplamalar ve ilgili sonuçlar için verilen şekiller sonucunda modellemede kullanılan kapalı yapının dış yarıçap değeri arttıkça elde edilen sonuçların açık kılavuzun tam çözüm değerlerine yaklaştığı gösterilmiştir. Bununla birlikte cidar yarıçapı arttırıldıkça analitik çözümle uyumlu değerlerin elde edilebilmesi için MoM hesaplamalarında daha fazla sayıda TE ve TM öz çözümünün kullanılması ihtiyacı doğmaktadır. Daha fazla öz çözüm kullanılarak yapılacak hesaplamalar hesaplama yükünü ve zamanını arttırmaktadır. Çalışmamızda MoM hesaplamalarında kullanılan seri açılım sayısı "N" ile gösterilmiştir. MoM hesaplamalarında N seri açılım sayısı için N adet TE ve N adet TM öz çözümü kullanılmaktadır ve lineer sistem boyutu NxN olarak elde edilmektedir. Bu nedenle bu bölümde, çeşitli seri açılım değerleri kullanılarak MoM'dan elde edilen dispersiyon eğrileri ile tam çözümden elde edilen dispersiyon eğrileri aynı şekil

üzerinde verilerek seri açılım sayısı arttıkça elde edilen sonuçların tam çözümle uyumunun arttığı gösterilmiştir. Ayrıca yapılan nümerik hesaplamalar sonucunda elde edilen terim sayısı-yüzde hata ve terim sayısı-hesaplama süresi eğrileri verilmiştir.

4. İLETİM HATTI EŞİTLİKLERİ CİNSİNDEN FOSTER REAKTANS TEOREMİ

4.1. Foster Reaktans Teoremi

Foster reaktans Teoremi, herhangi bir kayıpsız devrenin giriş empedansının en genel formunu verir. Bu empedans birbirlerini takip eden rezonans ve anti-rezonans frekanslarına sahip saf reaktanstır [54]. Yani tamamıyla reaktiftir (Z = jX ve tabiki Y = jB). Herhangi bir kapılı reaktif sonlandırıcı devre için en genel formda Foster reaktans teoremi, $\partial B/\partial\omega > 0$ veya $\partial X/\partial\omega > 0$ koşullarını sağladığında geçerlidir. Bu frekans eksenine karşı reaktans (veya suseptans) fonksiyonunun eğiminin daima pozitif olduğunu belirtir. Bobin ve kondansatör içeren bir devre için empedans ve admitans sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$Z = R + jX \qquad \text{ve} \qquad Y = G + jB$$

Burada, Z empedans, R rezistans, X reaktans, Y admitans, G kondüktans ve B süseptans olarak adlandırılır. Bir elektrik devresinde reaktans frekansa bağlı olarak bobin veya kondansatör tarafından akıma karşı gösterilen zorluğun genel adıdır. Bobin için endüktif reaktans (endüktif direnç) ve kapasitif reaktans aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$$X_L = \omega L = 2\pi fL \qquad \text{ve} \qquad X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi fC}$$

Foster reaktans teoremi empedansın Z=jX ve admitansın Y=jB saf sanal durumları için oluşturulmuş bir teoremdir. Her bir empedans, rezistans (reel direnç) ihmal edilebilecek kadar küçük olduğu için basit rezonans devreleri birleştirilerek veya basit anti-rezonans devreleri birleştirilerek fiziksel olarak gerçekleştirilebilir[54].

Foster reaktans teoremi, giriş empedansı kavramını temel alır. Giriş empedansı frekans domeninde (s veya jω domeni) bir filtrenin giriş empedansının matematiksel temsilidir. Tek kapılı devre, sürekli kesir veya kısmi kesir açılımları kullanılarak

ifade edilir. Elde edilen ifade elektrik elemanlarından oluşan bir elektrik devresine dönüştürülür. Bu devrenin sonundan bir çıkış alınarak arzu edilen bir transfer fonksiyonuna sahip iki kapılı bir filtre devresi elde edilir [55]. Giriş empedansı S ile gösterilmektedir.

Sonlu dirençsiz (saf reaktans) devre vasıtasıyla elde edilebilir olan giriş empedansı, frekansın ($\omega/2\pi$) tek rasyonel fonksiyonu olan ve sabit bir H faktörü hariç rezonans ve anti-resonans frekanslarının tümü belirtilerek tanımlanan bir saf reaktanstır. Her bir empedans $j\omega L+(j\omega C)^{-1}$ formunda empedansa sahip seri bağlı rezonans devrelerinin birleştirilmesiyle veya $[j\omega C+(j\omega L)^{-1}]^{-1}$ formunda empedansa sahip paralel bağlı anti-rezonans devrelerinin birleştirilmesiyle fiziksel olarak gerçeklenebilir [54], [56]. Daha kesin formda giriş empedansı,

$$S = -jH\frac{\left(\omega_1^2-\omega^2\right)\left(\omega_3^2-\omega^2\right)...\left(\omega_{2n-1}^2-\omega^2\right)}{\omega\left(\omega_2^2-\omega^2\right)...\left(\omega_{2n-2}^2-\omega^2\right)} \tag{4.1}$$

olarak tanımlıdır. Burada, $H\geq 0$ ve $0=\omega_0\leq \omega_1\leq \omega_2\leq\ldots\leq \omega_{2n-1}\leq \omega_{2n}=\infty$. Foster [54] çalışmasında teoreminin ispatını karmaşık matematiksel doğası ve analitik mekanikte benzerlerinin yapılmış olması nedeniyle vermemiştir [57]. Bununla birlikte Foster reaktans teoreminin ispatı [58],[59]'da verilmiştir [57].

Foster reaktans teoremi genel olarak tek kapılı kayıpsız elektrik devrelerine uygulanmıştır. [57] çalışmasında Nedlin kayıpsız ve düşük-kayıplı devrelerde enerjiyi temel alarak bu devreler için Foster reaktans teoreminin sağladığını göstermiştir. B devre süseptansı ve X devre reaktansı olmak üzere, devre toplam enerjisi $\partial B/\partial\omega$ veya $\partial X/\partial\omega$ ile orantılı olduğu gösterilerek Foster teoreminin alternatif basit bir ispatı verilmiştir. Nedlin bir kapılı kayıpsız bir devrenin güç ifadesinden ($p=iv$) yola çıkarak, devredeki akım ve gerilim büyüklüklerini süseptans ve reaktans cinsinden ifade ederek kayıpsız devrede depolanan ortalama enerjiyi (W_N) aşağıdaki gibi elde etmiştir.

$$W_N = \frac{1}{2}\frac{dB}{d\omega}V_{rms}^2 \quad \text{ve} \quad W_N = \frac{1}{2}\frac{dX}{d\omega}I_{rms}^2$$

Devrede enerji pozitif olduğundan her reaktif devre için $\partial B/\partial\omega > 0$ veya $\partial X/\partial\omega > 0$ sonucu elde edilir [57]. Diğer bir çalışmada Geyi ve arkadaşları

Poynting teoreminin kompleks frekans bölgesindeki bir versiyonunu kullanarak antenler için Foster reaktans teoreminin geçerliliğini göstermişlerdir [60]. Foster reaktans teoremi sadece kayıpsız devreler için geçerlidir ve devre teorisi açısından, bir anten kayıplı bir kapılı devredir. Kayıp, antenden saçılan gücü temsil eder ve bu kayıp Foster reaktans teoreminin direkt kullanımına izin vermez. Bununla birlikte, Geyi ve arkadaşları rastgele bir anten sistemi için Foster reaktans teoreminin sağladığını bir kompleks frekans düzlemi yaklaşımı kullanarak göstermişlerdir. Ayrıca Foster reaktans teoremini kullanarak elde ettikleri anten eşdeğer devresinden anten kalite faktörü Q'nün elde edilebileceğini göstermişleridir [60].

Foster reaktans teoremini sağlayan devreler pasif devrelerdir. Yükselteç veya transistor gibi aktif eleman barındıran devreler Foster reaktans teoremini sağlamazlar [61]. Aktif elemanların reaktans veya suseptansları frekansa göre negatif eğimli olağan dışı davranış sergilerler, bu yüzden non-Foster elemanlar olarak adlandırılırlar [61], [62], [63], [64]. Non-Foster elemanların basit örnekleri negatif kapasite ve negatif indüktör aktif devrelerle gerçekleştirilirler. Ayrıca pasif kayıpsız materyaller içinde depolanan enerji daima pozitiftir ve boşlukta aynı büyüklükteki hacimde depolanan enerjiden daha büyüktür [65], [66], [67]. Depolanan enerji negatif veya boşlukta depolanan enerjiden daha küçük olması metamateryal yapı içerisine aktif elemanlar gömülmesi ile mümkün olur ve bu durumda Foster reaktans teoremi geçerliliğini kaybeder [67].

4.2. Metamateryaller İçin Foster Reaktans Teoreminin Geçerliliği

Metamateryaller pek çok elemanın birleştirilmesiyle meydana gelen ve belirli bir frekans bandı için negatif elektriksel ve manyetik geçirgenliğe sahip yapılardır. Metamateryaller, elektromanyetik özellikleri bakımından doğal ortamda bulunmayan veya doğal materyallerde elde edilmesi zor olan fiziksel olarak gerçeklenebilen yapay tasarlanmış materyallerdir [68]. Metamateryaller, elektrik veya manyetik geçirgenliklerden yalnız birinin belirli bir frekans aralığında negatif olduğu "negatif-indis" (negative-index) metamateryaller veya "sol-elli" (left-handed) materyaller, ve elektrik ve manyetik geçirgenliklerin her ikisinin belirli bir frekans aralığında aynı anda negatif olduğu "çift-negatif" (double-negative) metametaryaller veya "geriye doğru-dalga" (backward-wave) ortam olarak adlandırılırlar [69], [70]. Bu ortam

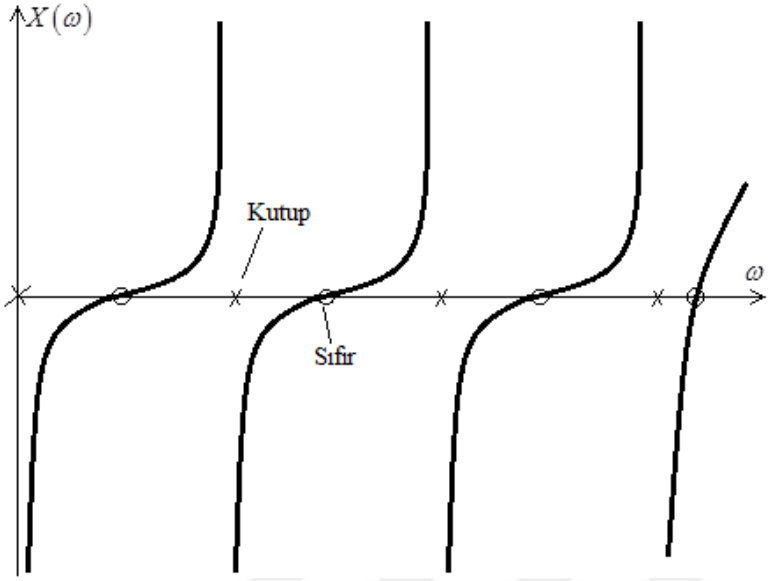
teorik olarak Victor Veselago [71] tarafından 1960'larda önerilmiş ve çalışılmıştır. Pendry'nin [72], [73] çalışmalarından ilham alarak, Shelby, Smith ve Schultz [74] çalışmasında ilk sol elli materyalli 2001 yılında kablo dizilerini (negatif elektriksel geçirgenliği verir) ve açık halka dizlerini (negatif manyetik geçirgenliği verir) kullanarak mikrodalga frekanslarda deneysel gerçeklemişlerdir [69]. Elektrik mühendisliği topluluğunda, mikrodalgalarda iletim hatlarının iki boyutlu (2-D) ağları kullanılarak farklı bir gerçekleme yaklaşımı [75], [76] daha ele alınmıştır. Bu sonrasında optik rejime [77] genişletilmiştir [69].

Metamateryaller için Foster reaktans teoremi Munk tarafından ifade edilmiştir [78]. Hem elektrik hem de manyetik geçirgenliklerin her ikisinin belirli bir frekans aralığında aynı anda negatif olduğu çift-negatif (DNG) materyaller için Foster reaktans teoreminin uygulanabilirliği Munk ve Engheta'nın kişisel paylaşımları sonucunda ortaya çıkmış ilginç bir konu olmuştur [79]. Eğer mikrodalga devresinde bir kapılı reaktif kayıpsız terminal varsa, böyle bir tek kapı terminalin giriş empedansı saf sanaldır ($Z_{in} = jX_{in}$ ve tabiki $Y_{in} = jB_{in}$). Yani tamamıyla reaktiftir. Herhangi bir kapılı reaktif son bulan devre için en genel formda Foster reaktans teoremi aşağıdaki koşullar sağladığında geçerlidir [56], [79]-[81].

$$\frac{\partial X_{in}}{\partial \omega} > 0 \qquad \text{ve} \qquad \frac{\partial B_{in}}{\partial \omega} > 0 \tag{4.2}$$

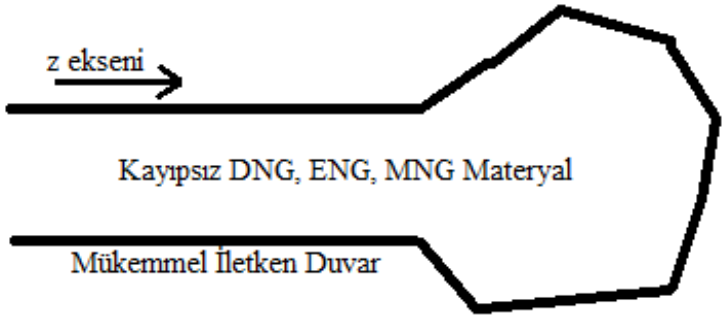
Bu frekans eksenine karşı reaktans (veya suseptans) fonksiyonunun eğiminin daima pozitif olduğunu belirtir. Bununla birlikte reaktans (veya suseptans) fonksiyonunun kutupları ve sıfırları frekans ekseni boyunca birbirlerini takip ederler [79]-[81]. Şekil 4.1'de bu karakteristik en genel formda sunulmuştur.

Bu noktada cevabını aradığımız soru, hem elektrik hem de manyetik geçirgenliklerin her ikisinin belirli bir frekans aralığında aynı anda negatif olduğu "çift negatif" metamateryallerin (DNG), yalnız elektrik geçirgenliğin belirli bir frekans aralığında negatif olduğu metamateryellerin (ENG) ve yalnız manyetik geçirgenliğin belirli bir frekans aralığında negatif olduğu metamateryellerin (MNG) de Foster reaktans teoremini sağlayıp sağlamadığıdır.



Şekil 4.1.Foster reaktans fonksiyonu

Engheta [79] çalışmasında DNG materyallerin Foster reaktans teoremini sağlayıp sağlamadığını konusunda bir kısım bulgular sunmuştur. [80] çalışmasında ise ENG, MNG durumları ile birlikte DNG durumlar için Foster reaktans teoremini sağlayıp sağlamadığını araştırmıştır. Bu çalışmalarda Şekil 4.2'de verilen kayıpsız metamateryal dolu mükemmel duvar ile kapatılmış rastgele şekilli oyuk (cavity) yapıyı ele alınmıştır.



Şekil 4.2. Problemin Geometrisi

Bu geometri ile yapı kayıpsız materyallerden (DNG, ENG, MNG) birinin yüklü olduğu bir-kapılı kayıpsız sonlandırma (termination) şeklini alır. [79] ve [80] çalışmalarında, terminal (uç/başlangıç) düzlemi oyuk duvarının açık noktasından yeteri kadar uzakta olduğu var sayılarak dalga kılavuzunun baskın modunun (iletilen veya sönümlü mod) terminal düzleminde mevcut olan tek mod olduğu varsayılmıştır. Terminal düzleminde Z_{in} enine giriş empedansını tanımlanarak, bu empedansın

$Z_{in}=jX_{in}$ şeklinde saf sanal olduğu belirtilmiştir. Bu saf sanal empedans Foster reaktans için elde edilen eşitliklerinde ilgili yerleştirilerek zamana göre ortalama depolanmış elektrik ve manyetik enerji yoğunluğu ifadelerinin işaretini $\partial X_{in}/\partial\omega$ 'nın işaretinin belirleyeceği sonucu elde edilmiştir. Sonuç olarak hem elektrik hem de manyetik geçirgenliklerin her ikisinin belirli bir frekans aralığında aynı anda negatif olduğu "çift negatif" metamateryallerin (DNG), veya yalnız elektrik geçirgenliğin belirli bir frekans aralığında negatif olduğu metamateryellerin (ENG) veya yalnız manyetik geçirgenliğin belirli bir frekans aralığında negatif olduğu metamateryellerin (MNG) de Foster reaktans teoremini sağlayabildiği sonucu elde edilmiştir.

Çalışmamızda, Foster reaktans teoreminin tek kapalı bir mikrodalga devrenin giriş empedansı için sorgulayan [79]-[80] çalışmalarından farklı olarak metamateryal yapıların Foster reaktans teoremini sağlayıp sağlamadığı sorusunun cevabı, iletim hattı eşdeğerlikleri cinsinden araştırılmıştır. Çünkü doğal malzeme ile yüklü kayıpsız kılavuzlarda iletim hattı eşdeğerliklerindeki katsayı matrisleri Z ve Y nin Foster matrisi olduğu bilinmektedir [80]. Dolayısıyla soru metamateryal ile yüklü kayıpsız kılavuzlarda bu matrislerin Foster reaktans teoremini sağlamaya devam edip etmediğidir. Bu aşamada öncelikle Foster reaktans teoremi genel ifadelerini elde edebilmek için zamana göre ortalaması alınmış elektromanyetik enerji ifadesini ele alalım.

$$\iiint_V \nabla.(\vec{E}\times\frac{\partial\vec{H}^*}{\partial\omega}+\frac{\partial\vec{E}^*}{\partial\omega}\times\vec{H})dV \tag{4.3}$$

Burada, V, düzgün dalga kılavuzunun bir bölgesinin hacmidir. Eşitlik (4.3) ifadesini elde edebilmek için öncelikle Eşitlikler (2.1) ve (2.2) kayıpsız ve kaynaksız ortama ait Maxwell denklemlerini ele alalım. Her iki ifadenin kompleks eşleniklerinin ω' ya göre türevini alırsak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\nabla\times\frac{\partial\vec{E}^*}{\partial\omega}=j\frac{\partial(\omega\mu)}{\partial\omega}\vec{H}^*+j\omega\mu\frac{\partial\vec{H}^*}{\partial\omega} \tag{4.4}$$

$$\nabla \times \frac{\partial \vec{H}^*}{\partial \omega} = -j\frac{\partial(\omega\varepsilon)}{\partial \omega}\vec{E}^* - j\omega\varepsilon\frac{\partial \vec{E}^*}{\partial \omega} \tag{4.5}$$

Eşitlik (4.3)'de $\nabla.(\vec{E} \times \frac{\partial \vec{H}^*}{\partial \omega} + \frac{\partial \vec{E}^*}{\partial \omega} \times \vec{H})$ ifadesini, $\nabla.(\vec{A}x\vec{B}) = -\vec{A}.(\nabla x\vec{B}) + \vec{B}.(\nabla x\vec{A})$ özdeşliğini kullanarak açık yazarsak

$$\nabla.(\vec{E} \times \frac{\partial \vec{H}^*}{\partial \omega}) = -\vec{E} \cdot \left(\nabla \times \frac{\partial \vec{H}^*}{\partial \omega} \right) + \frac{\partial \vec{H}^*}{\partial \omega} \cdot \left(\nabla \times \vec{E} \right)$$

$$\nabla.(\frac{\partial \vec{E}^*}{\partial \omega} \times \vec{H}) = -\frac{\partial \vec{E}^*}{\partial \omega} \cdot \left(\nabla \times \vec{H} \right) + \vec{H} \cdot \left(\nabla \times \frac{\partial \vec{E}^*}{\partial \omega} \right)$$

eşitlikleri ve

$$\nabla.(\vec{E} \times \frac{\partial \vec{H}^*}{\partial \omega} + \frac{\partial \vec{E}^*}{\partial \omega} \times \vec{H}) = -\vec{E} \cdot \left(\nabla \times \frac{\partial \vec{H}^*}{\partial \omega} \right) + \frac{\partial \vec{H}^*}{\partial \omega} \cdot \left(\nabla \times \vec{E} \right) - \frac{\partial \vec{E}^*}{\partial \omega} \cdot \left(\nabla \times \vec{H} \right) + \vec{H} \cdot \left(\nabla \times \frac{\partial \vec{E}^*}{\partial \omega} \right)$$

sonucu elde edilir. Eşitlikler (4.4) ve (4.5) yerine konulursa ifade aşağıdaki şekli alır.

$$\nabla.(\vec{E} \times \frac{\partial \vec{H}^*}{\partial \omega} + \frac{\partial \vec{E}^*}{\partial \omega} \times \vec{H}) = -\vec{E} \cdot \left(-j\frac{\partial(\omega\varepsilon)}{\partial \omega}\vec{E}^* - j\omega\varepsilon\frac{\partial \vec{E}^*}{\partial \omega} \right) + \frac{\partial \vec{H}^*}{\partial \omega} \cdot \left(-j\omega\mu\vec{H} \right)$$
$$-\frac{\partial \vec{E}^*}{\partial \omega} \cdot \left(j\omega\varepsilon\vec{E} \right) + \vec{H} \cdot \left(j\frac{\partial(\omega\mu)}{\partial \omega}\vec{H}^* + j\omega\mu\frac{\partial \vec{H}^*}{\partial \omega} \right)$$

Elde edilen ifade düzenlenirse ve ters işaretli ifadeler sadeleştirilirse Eşitlik (4.6) elde edilir.

$$\nabla.(\vec{E} \times \frac{\partial \vec{H}^*}{\partial \omega} + \frac{\partial \vec{E}^*}{\partial \omega} \times \vec{H}) = j\left(\vec{E} \cdot \frac{\partial(\omega\varepsilon)}{\partial \omega}\vec{E}^* + \vec{H} \cdot \frac{\partial(\omega\mu)}{\partial \omega}\vec{H}^* \right) \tag{4.6}$$

Her iki tarafın hacim üzerinde integrali alınırsa,

$$\iiint_V \nabla.(\vec{E} \times \frac{\partial \vec{H}^*}{\partial \omega} + \frac{\partial \vec{E}^*}{\partial \omega} \times \vec{H})dV = j\iiint_V \left(\vec{E} \cdot \frac{\partial(\omega\varepsilon)}{\partial \omega}\vec{E}^* + \vec{H} \cdot \frac{\partial(\omega\mu)}{\partial \omega}\vec{H}^* \right)dV$$

ve sol tarafa Diverjans teoremi uygulanırsa eşitlik aşağıdaki şekle dönüşür.

$$\oiint_S (\vec{E}\times\frac{\partial\vec{H}^*}{\partial\omega}+\frac{\partial\vec{E}^*}{\partial\omega}\times\vec{H})\cdot\vec{n}dS = j\iiint_V\left(\vec{E}\cdot\frac{\partial(\omega\varepsilon)}{\partial\omega}\vec{E}^*+\vec{H}\cdot\frac{\partial(\omega\mu)}{\partial\omega}\vec{H}^*\right)dV \tag{4.7}$$

Burada, $\vec{n}$, V hacminin sınırından dışarı doğru birim normaldir. Zamana göre ortalama depolanmış elektrik ve manyetik enerji yoğunluk ifadeleri [15] çalışmasında aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$W_m = \frac{1}{4}\iiint_V \vec{H}\cdot\vec{H}^*\frac{\partial(\omega\mu)}{\partial\omega}dV \tag{4.8}$$

$$W_e = \frac{1}{4}\iiint_V \vec{E}\cdot\vec{E}^*\frac{\partial(\omega\varepsilon)}{\partial\omega}dV \tag{4.9}$$

Eşitlik (4.8) ve (4.9) ifadeleri Eşitlik (4.7)'de yerine konulursa ifade aşağıdaki şekli alır.

$$\oiint_S (\vec{E}\times\frac{\partial\vec{H}^*}{\partial\omega}+\frac{\partial\vec{E}^*}{\partial\omega}\times\vec{H})\cdot\vec{n}dS = 4j(W_e+W_m) \tag{4.10}$$

4.3. İletim Hattı Eşitlikleri Cinsinden Foster Reaktans Teoremi

Bu bölümde elektrik alan ve manyetik alan vektörlerinin iletim hattı eşitlikleri cinsinden ifadeleri yazılarak önceki bölümde elde edilen Foster reaktans teoreminin iletim hattı gerilim ve akımları cinsinden ifadesi elde edilecektir. Transmisyon hattı denklemlerinin elde edilme basamakları ve en genel formu bölüm 2'de sunulmuştur. Kapalı bir dalga kılavuzu içerisinde elektromanyetik dalganın iletimini sonsuz sayıda iletim hattı üzerinde akım ve gerilim büyüklüklerinin iletimi olarak modellenmesinde kullanılan elektrik ve manyetik alan bileşenlerinin genel koordinat sisteminde ifadeleri Eşitlikler (2.24) ve (2.25) şeklinde tanımlıdır. Ayrıca A, u ve v 'den bağımsız bir ifade olmak üzere aşağıdaki tanımlar geçerlidir.

$$\nabla\times(A\,grad_t T) = -\frac{\partial A}{\partial z}flux_t T$$

$$\nabla\times(A\,flux_t T) = \frac{\partial A}{\partial z}grad_t T + \vec{a}_z\chi^2 AT$$

$$\nabla\times\left(\vec{a}_z AT\right)=A\text{flux}_t T$$

Eşitlik (4.10)'un iletim hattı eşitlikleri cinsinden elde edilebilmesi için öncelikle Eşitlikler (2.24) ve (2.25)'da verilen elektrik alan ve manyetik alan ifadeleri eşleniklerinin ω'ya göre tüverini alalım.

$$\frac{\partial\vec{E}^*}{\partial\omega}=\frac{\partial V^*_{(n)}}{\partial\omega}\text{grad}_t T_{(n)}+\frac{\partial V^*_{[n]}}{\partial\omega}\text{flux}_t T_{[n]}+\vec{a}_z\chi_{(n)}\frac{\partial V^*_{z,(n)}}{\partial\omega}T_{(n)} \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial\vec{H}^*}{\partial\omega}=-\frac{\partial I^*_{(n)}}{\partial\omega}\text{flux}_t T_{(n)}+\frac{\partial I^*_{[n]}}{\partial\omega}\text{grad}_t T_{[n]}+\vec{a}_z\chi_{[n]}\frac{\partial I^*_{z,[n]}}{\partial\omega}T_{[n]} \tag{4.12}$$

Ek olarak, Eşitlikler (4.4) ve (4.5)'i iletim hattı eşdeğerliği büyüklükleri cinsinden elde edilim.

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial V_{(n)}}{\partial z}\text{flux}_t T_{(n)}+\frac{\partial V_{[n]}}{\partial z}\text{grad}_t T_{[n]}+\vec{a}_z\chi^2_{[n]}V_{[n]}T_{[n]}+\chi_{(n)}V_{z,(n)}\text{flux}T_{(n)} \tag{4.13}$$

$$\nabla\times\vec{H}=-\frac{\partial I_{(n)}}{\partial z}\text{grad}_t T_{(n)}-\vec{a}_z\chi^2_{(n)}I_{(n)}T_{(n)}-\frac{\partial I_{[n]}}{\partial z}\text{flux}_t T_{[n]}+\chi_{[n]}I_{z,[n]}\text{flux}_t T_{[n]} \tag{4.14}$$

$$\nabla\times\frac{\partial\vec{E}^*}{\partial\omega}=-\frac{\partial^2 V^*_{(n)}}{\partial\omega\partial z}\text{flux}_t T_{(n)}+\frac{\partial^2 V^*_{[n]}}{\partial\omega\partial z}\text{grad}_t T_{[n]}+\vec{a}_z\chi^2_{[n]}\frac{\partial V^*_{[n]}}{\partial\omega}T_{[n]} \tag{4.15}$$
$$+\chi_{(n)}\frac{\partial V^*_{z,(n)}}{\partial\omega}\text{flux}_t T_{(n)}$$

$$\nabla\times\frac{\partial\vec{H}^*}{\partial\omega}=-\frac{\partial^2 I^*_{(n)}}{\partial\omega\partial z}\text{grad}_t T_{(n)}-\vec{a}_z\chi^2_{(n)}\frac{\partial I^*_{(n)}}{\partial\omega}T_{(n)}-\frac{\partial^2 I^*_{[n]}}{\partial\omega\partial z}\text{flux}_t T_{[n]} \tag{4.16}$$
$$+\chi_{[n]}\frac{\partial I^*_{z,[n]}}{\partial\omega}\text{flux}T_{[n]}$$

Bu durumda,

$$\iint_S \left(\frac{\partial \vec{H}^*}{\partial \omega} \cdot \nabla \times \vec{E} \right) dS = \frac{\partial I^*_{(n)}}{\partial \omega} \frac{\partial V_{(n)}}{\partial z} \iint_S flux_t T_{(n)} flux_t T_{(n)} dS$$

$$- \frac{\partial I^*_{(n)}}{\partial \omega} \frac{\partial V_{[n]}}{\partial z} \iint_S flux_t T_{(n)} grad_t T_{[n]} dS$$

$$- \frac{\partial I^*_{(n)}}{\partial \omega} \chi^2_{[n]} V_{[n]} \iint_S flux_t T_{(n)} \cdot \vec{a}_z T_{[n]} dS - \frac{\partial I^*_{(n)}}{\partial \omega} \chi_{(n)} V_{z,(n)} \iint_S flux_t T_{(n)} flux_t T_{(n)} dS$$

$$- \frac{\partial I^*_{[n]}}{\partial \omega} \frac{\partial V_{(n)}}{\partial z} \iint_S grad_t T_{[n]} flux_t T_{(n)} dS + \frac{\partial I^*_{[n]}}{\partial \omega} \frac{\partial V_{[n]}}{\partial z} \iint_S grad_t T_{[n]} grad_t T_{[n]} dS$$

$$+ \frac{\partial I^*_{[n]}}{\partial \omega} \chi^2_{[n]} V_{[n]} \iint_S grad_t T_{[n]} \cdot \vec{a}_z T_{[n]} dS + \frac{\partial I^*_{[n]}}{\partial \omega} \chi_{(n)} V_{z,(n)} \iint_S grad_t T_{[n]} flux_t T_{(n)} dS$$

$$- \frac{\partial I^*_{z,[n]}}{\partial \omega} \frac{\partial V_{(n)}}{\partial z} \chi_{[n]} \iint_S \vec{a}_z T_{[n]} \cdot flux_t T_{(n)} dS + \frac{\partial I^*_{z,[n]}}{\partial \omega} \frac{\partial V_{[n]}}{\partial z} \chi_{[n]} \iint_S \vec{a}_z T_{[n]} \cdot grad_t T_{[n]} dS$$

$$+ \frac{\partial I^*_{z,[n]}}{\partial \omega} \chi_{[n]} V_{[n]} \iint_S \chi^2_{[n]} T^2_{[n]} dS + \frac{\partial I^*_{z,[n]}}{\partial \omega} \chi_{[n]} \chi_{(n)} V_{z,(n)} \iint_S \vec{a}_z T_{[n]} \cdot flux_t T_{(n)} dS$$

ve diklik koşullarından Eşitlik (4.17) elde edilir.

$$\iint_S \left(\frac{\partial \vec{H}^*}{\partial \omega} \cdot \nabla \times \vec{E} \right) dS = \frac{\partial I^*_{(n)}}{\partial \omega} \frac{\partial V_{(n)}}{\partial z} + \frac{\partial I^*_{[n]}}{\partial \omega} \frac{\partial V_{[n]}}{\partial z} + \frac{\partial I^*_{z,[n]}}{\partial \omega} \chi_{[n]} V_{[n]} - \frac{\partial I^*_{(n)}}{\partial \omega} \chi_{(n)} V_{z,(n)} \qquad (4.17)$$

$$\iint_S \left(\vec{E} \cdot \nabla \times \frac{\partial \vec{H}^*}{\partial \omega} \right) dS = -V_{(n)} \frac{\partial^2 I^*_{(n)}}{\partial \omega \partial z} \iint_S grad_t T_{(n)} grad_t T_{(n)} dS$$

$$- V_{(n)} \frac{\partial I^*_{(n)}}{\partial \omega} \iint_S grad_t T_{(n)} \cdot \vec{a}_z \chi^2_{(n)} T_{(n)} dS$$

$$- V_{(n)} \frac{\partial^2 I^*_{[n]}}{\partial \omega \partial z} \iint_S grad_t T_{(n)} flux_t T_{[n]} dS + V_{(n)} \chi_{[n]} \frac{\partial I^*_{z,[n]}}{\partial \omega} \iint_S grad_t T_{(n)} fluxT_{[n]} dS$$

$$- V_{[n]} \frac{\partial^2 I^*_{(n)}}{\partial \omega \partial z} \iint_S flux_t T_{[n]} grad_t T_{(n)} dS - V_{[n]} \frac{\partial I^*_{(n)}}{\partial \omega} \iint_S flux_t T_{[n]} \cdot \vec{a}_z \chi^2_{(n)} T_{(n)} dS$$

$$- V_{[n]} \frac{\partial^2 I^*_{[n]}}{\partial \omega \partial z} \iint_S flux_t T_{[n]} flux_t T_{[n]} dS + V_{[n]} \chi_{[n]} \frac{\partial I^*_{z,[n]}}{\partial \omega} \iint_S flux_t T_{[n]} fluxT_{[n]} dS$$

$$- V_{z,(n)} \frac{\partial^2 I^*_{(n)}}{\partial \omega \partial z} \chi_{(n)} \iint_S \vec{a}_z T_{(n)} \cdot grad_t T_{(n)} dS - \chi_{(n)} V_{z,(n)} \frac{\partial I^*_{(n)}}{\partial \omega} \iint_S \chi^2_{(n)} T^2_{(n)} dS$$

$$- V_{z,(n)} \frac{\partial^2 I^*_{[n]}}{\partial \omega \partial z} \chi_{(n)} \iint_S \vec{a}_z T_{(n)} \cdot flux_t T_{[n]} dS + V_{z,(n)} \chi_{(n)} \chi_{[n]} \frac{\partial I^*_{z,[n]}}{\partial \omega} \iint_S \vec{a}_z T_{(n)} \cdot fluxT_{[n]} dS$$

ve diklik koşullarından,

$$\iint_S \left(\vec{E} \cdot \nabla \times \frac{\partial \vec{H}^*}{\partial \omega} \right) dS = -V_{(n)} \frac{\partial^2 I^*_{(n)}}{\partial \omega \partial z} - V_{[n]} \frac{\partial^2 I^*_{[n]}}{\partial \omega \partial z} + V_{[n]} \chi_{[n]} \frac{\partial I^*_{z,[n]}}{\partial \omega} - \chi_{(n)} V_{z,(n)} \frac{\partial I^*_{(n)}}{\partial \omega} \qquad (4.18)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
&\iint_s \left(\vec{H} \cdot \nabla \times \frac{\partial \vec{E}^*}{\partial \omega} \right) dS = I_{(n)} \frac{\partial^2 V^*_{(n)}}{\partial \omega \partial z} \iint_S flux_t T_{(n)} flux_t T_{(n)} dS \\
&- I_{(n)} \frac{\partial^2 V^*_{[n]}}{\partial \omega \partial z} \iint_S flux_t T_{(n)} grad_t T_{[n]} dS \\
&- I_{(n)} \chi^2_{[n]} \frac{\partial V^*_{[n]}}{\partial \omega} \iint_s flux_t T_{(n)} \cdot \vec{a}_z T_{[n]} dS - I_{(n)} \chi_{(n)} \frac{\partial V^*_{z,(n)}}{\partial \omega} \iint_S flux_t T_{(n)} flux_t T_{(n)} dS \\
&- I_{[n]} \frac{\partial^2 V^*_{(n)}}{\partial \omega \partial z} \iint_S grad_t T_{[n]} flux_t T_{(n)} dS + I_{[n]} \frac{\partial^2 V^*_{[n]}}{\partial \omega \partial z} \iint_S grad_t T_{[n]} grad_t T_{[n]} dS \\
&+ I_{[n]} \chi^2_{[n]} \frac{\partial V^*_{[n]}}{\partial \omega} \iint_s grad_t T_{[n]} \cdot \vec{a}_z T_{[n]} dS + I_{[n]} \chi_{(n)} \frac{\partial V^*_{z,(n)}}{\partial \omega} \iint_S grad_t T_{[n]} flux_t T_{(n)} dS \\
&- \chi_{[n]} I_{z,[n]} \frac{\partial^2 V^*_{(n)}}{\partial \omega \partial z} \iint_S \vec{a}_z T_{[n]} \cdot flux_t T_{(n)} dS + \chi_{[n]} I_{z,[n]} \frac{\partial^2 V^*_{[n]}}{\partial \omega \partial z} \iint_S \vec{a}_z T_{[n]} \cdot grad_t T_{[n]} dS \\
&+ \chi_{[n]} I_{z,[n]} \frac{\partial V^*_{[n]}}{\partial \omega} \iint_s \chi^2_{[n]} T^2_{[n]} dS + \chi_{[n]} I_{z,[n]} \chi_{(n)} \frac{\partial V^*_{z,(n)}}{\partial \omega} \iint_S \vec{a}_z T_{[n]} \cdot flux_t T_{(n)} dS
\end{aligned}$$

ve diklik koşullarından,

$$\iint_s \left(\vec{H} \cdot \nabla \times \frac{\partial \vec{E}^*}{\partial \omega} \right) dS = I_{(n)} \frac{\partial^2 V^*_{(n)}}{\partial \omega \partial z} - I_{(n)} \chi_{(n)} \frac{\partial V^*_{z,(n)}}{\partial \omega} + I_{[n]} \frac{\partial^2 V^*_{[n]}}{\partial \omega \partial z} + \chi_{[n]} I_{z,[n]} \frac{\partial V^*_{[n]}}{\partial \omega} \qquad (4.19)$$

elde edilir.

Ayrıca,

$$\iint_S \left(\frac{\partial \vec{E}^*}{\partial \omega} \cdot \nabla \times \vec{H} \right) = -\frac{\partial V^*_{(n)}}{\partial \omega} \frac{\partial I_{(n)}}{\partial z} \iint_S \mathrm{grad}_t T_{(n)} \mathrm{grad}_t T_{(n)} dS$$

$$-\frac{\partial V^*_{(n)}}{\partial \omega} \chi^2_{(n)} I_{(n)} \iint_S \mathrm{grad}_t T_{(n)} \cdot \vec{a}_z T_{(n)} dS$$

$$-\frac{\partial V^*_{(n)}}{\partial \omega} \frac{\partial I_{[n]}}{\partial z} \iint_S \mathrm{grad}_t T_{(n)} \mathrm{flux}_t T_{[n]} dS + \frac{\partial V^*_{(n)}}{\partial \omega} \chi_{[n]} I_{z,[n]} \iint_S \mathrm{grad}_t T_{(n)} \mathrm{flux}_t T_{[n]} dS$$

$$-\frac{\partial V^*_{[n]}}{\partial \omega} \frac{\partial I_{(n)}}{\partial z} \iint_S \mathrm{flux}_t T_{[n]} \mathrm{grad}_t T_{(n)} dS - \frac{\partial V^*_{[n]}}{\partial \omega} \chi^2_{(n)} I_{(n)} \iint_S \mathrm{flux}_t T_{[n]} \cdot \vec{a}_z T_{(n)} dS$$

$$-\frac{\partial V^*_{[n]}}{\partial \omega} \frac{\partial I_{[n]}}{\partial z} \iint_S \mathrm{flux}_t T_{[n]} \mathrm{flux}_t T_{[n]} dS + \frac{\partial V^*_{[n]}}{\partial \omega} \chi_{[n]} I_{z,[n]} \iint_S \mathrm{flux}_t T_{[n]} \mathrm{flux}_t T_{[n]} dS$$

$$-\chi_{(n)} \frac{\partial V^*_{z,(n)}}{\partial \omega} \frac{\partial I_{(n)}}{\partial z} \iint_S \vec{a}_z T_{(n)} \cdot \mathrm{grad}_t T_{(n)} dS - \chi_{(n)} \frac{\partial V^*_{z,(n)}}{\partial \omega} I_{(n)} \iint_S \chi^2_{(n)} T^2_{(n)} dS$$

$$-\chi_{(n)} \frac{\partial V^*_{z,(n)}}{\partial \omega} \frac{\partial I_{[n]}}{\partial z} \iint_S \vec{a}_z T_{(n)} \cdot \mathrm{flux}_t T_{[n]} dS + \chi_{(n)} \frac{\partial V^*_{z,(n)}}{\partial \omega} \chi_{[n]} I_{z,[n]} \iint_S \vec{a}_z T_{(n)} \cdot \mathrm{flux}_t T_{[n]} dS$$

ve diklik koşullarından,

$$\iint_S \left(\frac{\partial \vec{E}^*}{\partial \omega} \cdot \nabla \times \vec{H} \right) = -\frac{\partial V^*_{(n)}}{\partial \omega} \frac{\partial I_{(n)}}{\partial z} - \frac{\partial V^*_{[n]}}{\partial \omega} \frac{\partial I_{[n]}}{\partial z} + \frac{\partial V^*_{[n]}}{\partial \omega} \chi_{[n]} I_{z,[n]} - \chi_{(n)} \frac{\partial V^*_{z,(n)}}{\partial \omega} I_{(n)} \qquad (4.20)$$

elde edilir. Eğer

$$e = \iiint_V \left[-\vec{E} \cdot \left(\nabla \times \frac{\partial \vec{H}^*}{\partial \omega} \right) + \frac{\partial \vec{H}^*}{\partial \omega} \cdot \left(\nabla \times \vec{E} \right) - \frac{\partial \vec{E}^*}{\partial \omega} \cdot \left(\nabla \times \vec{H} \right) + \vec{H} \cdot \left(\nabla \times \frac{\partial \vec{E}^*}{\partial \omega} \right) \right] dV$$

$$f = \iint_S \left[-\vec{E} \cdot \left(\nabla \times \frac{\partial \vec{H}^*}{\partial \omega} \right) + \frac{\partial \vec{H}^*}{\partial \omega} \cdot \left(\nabla \times \vec{E} \right) - \frac{\partial \vec{E}^*}{\partial \omega} \cdot \left(\nabla \times \vec{H} \right) + \vec{H} \cdot \left(\nabla \times \frac{\partial \vec{E}^*}{\partial \omega} \right) \right] dS$$

olarak tanımlanırsa f aşağıdaki gibi elde edilir.

$$
\begin{aligned}
f = {} & \frac{\partial I^{*}_{(n)}}{\partial \omega}\frac{\partial V_{(n)}}{\partial z} + \frac{\partial I^{*}_{[n]}}{\partial \omega}\frac{\partial V_{[n]}}{\partial z} + \frac{\partial I^{*}_{z,[n]}}{\partial \omega}\chi_{[n]}V_{[n]} - \frac{\partial I^{*}_{(n)}}{\partial \omega}\chi_{(n)}V_{z,(n)} \\
& + V_{(n)}\frac{\partial^2 I^{*}_{(n)}}{\partial \omega \partial z} + V_{[n]}\frac{\partial^2 I^{*}_{[n]}}{\partial \omega \partial z} - V_{[n]}\chi_{[n]}\frac{\partial I^{*}_{z,[n]}}{\partial \omega} + \chi_{(n)}V_{z,(n)}\frac{\partial I^{*}_{(n)}}{\partial \omega} \\
& + I_{(n)}\frac{\partial^2 V^{*}_{(n)}}{\partial \omega \partial z} - I_{(n)}\chi_{(n)}\frac{\partial V^{*}_{z,(n)}}{\partial \omega} + I_{[n]}\frac{\partial^2 V^{*}_{[n]}}{\partial \omega \partial z} + \chi_{[n]}I_{z,[n]}\frac{\partial V^{*}_{[n]}}{\partial \omega} \\
& + \frac{\partial V^{*}_{(n)}}{\partial \omega}\frac{\partial I_{(n)}}{\partial z} + \frac{\partial V^{*}_{[n]}}{\partial \omega}\frac{\partial I_{[n]}}{\partial z} - \frac{\partial V^{*}_{[n]}}{\partial \omega}\chi_{[n]}I_{z,[n]} + \chi_{(n)}\frac{\partial V^{*}_{z,(n)}}{\partial \omega}I_{(n)}
\end{aligned}
$$

İfadesini düzenlersek,

$$
\begin{aligned}
f = {} & \frac{\partial I^{*}_{(n)}}{\partial \omega}\frac{\partial V_{(n)}}{\partial z} + \frac{\partial I^{*}_{[n]}}{\partial \omega}\frac{\partial V_{[n]}}{\partial z} + \frac{\partial V^{*}_{(n)}}{\partial \omega}\frac{\partial I_{(n)}}{\partial z} + \frac{\partial V^{*}_{[n]}}{\partial \omega}\frac{\partial I_{[n]}}{\partial z} \\
& I_{(n)}\frac{\partial^2 V^{*}_{(n)}}{\partial \omega \partial z} + I_{[n]}\frac{\partial^2 V^{*}_{[n]}}{\partial \omega \partial z} + V_{(n)}\frac{\partial^2 I^{*}_{(n)}}{\partial \omega \partial z} + V_{[n]}\frac{\partial^2 I^{*}_{[n]}}{\partial \omega \partial z}
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

elde edilir. Ek olarak,

$$
\begin{aligned}
& \underline{v} = \begin{bmatrix} V_{(\,)} \\ V_{[\,]} \end{bmatrix}, \qquad \underline{i} = \begin{bmatrix} I_{(\,)} \\ I_{[\,]} \end{bmatrix} \\
& \underline{v} = v e^{-\gamma z}, \qquad \underline{i} = i e^{-\gamma z}
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

olarak tanımlı olduğundan z'ye göre türev $-\gamma$ ile çarpmaya karşı gelmektedir. ($^{+}$) kompleks eşlenik transpoz olmak üzere,

$$
\frac{\partial I^{*}_{(n)}}{\partial \omega}\frac{\partial V_{(n)}}{\partial z} + \frac{\partial I^{*}_{[n]}}{\partial \omega}\frac{\partial V_{[n]}}{\partial z} = -\gamma\frac{\partial \underline{i}^{+}}{\partial \omega}\underline{v} \tag{4.23}
$$

$$
\frac{\partial V^{*}_{(n)}}{\partial \omega}\frac{\partial I_{(n)}}{\partial z} + \frac{\partial V^{*}_{[n]}}{\partial \omega}\frac{\partial I_{[n]}}{\partial z} = -\gamma\frac{\partial \underline{v}^{+}}{\partial \omega}\underline{i} \tag{4.24}
$$

elde edilir.

$$
V_{(n)}\frac{\partial^2 I^{*}_{(n)}}{\partial \omega \partial z} = V_{(n)}\frac{\partial}{\partial \omega}\left[-\gamma^{*}I^{*}_{(n)}\right] = -V_{(n)}\frac{d\gamma^{*}}{d\omega}I^{*}_{(n)} - V_{(n)}\gamma^{*}\frac{\partial I^{*}_{(n)}}{\partial \omega} \tag{4.25}
$$

$$V_{[n]}\frac{\partial^2 I^*_{[n]}}{\partial\omega\partial z}=V_{[n]}\frac{\partial}{\partial\omega}\left[-\gamma^* I^*_{[n]}\right]=-V_{[n]}\frac{d\gamma^*}{d\omega}I^*_{[n]}-V_{[n]}\gamma^*\frac{\partial I^*_{[n]}}{\partial\omega} \tag{4.26}$$

Eşitlik (4.25) ve Eşitlik (4.26) ifadelerini toplarsak Eşitlik (4.27) ifadesi elde edilir.

$$V_{(n)}\frac{\partial^2 I^*_{(n)}}{\partial\omega\partial z}+V_{[n]}\frac{\partial^2 I^*_{[n]}}{\partial\omega\partial z}=-\frac{d\gamma^*}{d\omega}\underline{i}^{+}\underline{v}-\gamma^*\frac{\partial\underline{i}^{+}}{\partial\omega}\underline{v} \tag{4.27}$$

Benzer şekilde işlemleri aşağıdaki eşitlikler için takip edelim.

$$I_{(n)}\frac{\partial^2 V^*_{(n)}}{\partial\omega\partial z}=I_{(n)}\frac{\partial}{\partial\omega}\left[-\gamma^* V^*_{(n)}\right]=-I_{(n)}\frac{d\gamma^*}{d\omega}V^*_{(n)}-I_{(n)}\gamma^*\frac{\partial V^*_{(n)}}{\partial\omega} \tag{4.28}$$

$$I_{[n]}\frac{\partial^2 V^*_{[n]}}{\partial\omega\partial z}=I_{[n]}\frac{\partial}{\partial\omega}\left[-\gamma^* V^*_{[n]}\right]=-I_{[n]}\frac{d\gamma^*}{d\omega}V^*_{[n]}-I_{[n]}\gamma^*\frac{\partial V^*_{[n]}}{\partial\omega} \tag{4.29}$$

Eşitlik (4.28) ve Eşitlik (4.29) ifadelerini toplarsak Eşitlik (4.30) ifadesi elde edilir.

$$I_{(n)}\frac{\partial^2 V^*_{(n)}}{\partial\omega\partial z}+I_{[n]}\frac{\partial^2 V^*_{[n]}}{\partial\omega\partial z}=-\frac{d\gamma^*}{d\omega}\underline{v}^{+}\underline{i}-\gamma^*\frac{\partial\underline{v}^{+}}{\partial\omega}\underline{i} \tag{4.30}$$

elde edilir. Bu durumda f, Eşitlik (4.31) şeklinde elde edilir.

$$f=-\gamma\left(\frac{\partial\underline{i}^{+}}{\partial\omega}\underline{v}+\frac{\partial\underline{v}^{+}}{\partial\omega}\underline{i}\right)-\frac{d\gamma^*}{d\omega}\underline{i}^{+}\underline{v}-\gamma^*\frac{\partial\underline{i}^{+}}{\partial\omega}\underline{v}-\frac{d\gamma^*}{d\omega}\underline{v}^{+}\underline{i}-\gamma^*\frac{\partial\underline{v}^{+}}{\partial\omega}\underline{i} \tag{4.31}$$

ifadeyi düzenlersek, f aşağıdaki gibi elde edilir.

$$f=-\left(\gamma+\gamma^*\right)\left(\frac{\partial\underline{i}^{+}}{\partial\omega}\underline{v}+\frac{\partial\underline{v}^{+}}{\partial\omega}\underline{i}\right)-\frac{d\gamma^*}{d\omega}\left(\underline{i}^{+}\underline{v}+\underline{v}^{+}\underline{i}\right) \tag{4.32}$$

Ayrıca,

$$\frac{d}{dz}\begin{bmatrix}\underline{v}\\ \underline{i}\end{bmatrix}=-\gamma\begin{bmatrix}\underline{v}\\ \underline{i}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -Z\\ -Y & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{v}\\ \underline{i}\end{bmatrix} \tag{4.33}$$

ve,

$$-\gamma \underline{v} = -Z\underline{i} \tag{4.34}$$

$$-\gamma \underline{i} = -Y\underline{v} \tag{4.35}$$

olarak tanımlıdır. Eşitlikler (4.34) ve (4.35) ifadelerinin ω ya göre türevi alınırsa,

$$\frac{d\gamma^*}{d\omega}\underline{v}^+ + \gamma^* \frac{\partial \underline{v}^+}{\partial \omega} = \frac{dZ^+}{d\omega}\underline{i}^+ + Z^+ \frac{\partial \underline{i}^+}{\partial \omega} \tag{4.36}$$

$$\frac{d\gamma^*}{d\omega}\underline{i}^+ + \gamma^* \frac{\partial \underline{i}^+}{\partial \omega} = \frac{dY^+}{d\omega}\underline{v}^+ + Y^+ \frac{\partial \underline{v}^+}{\partial \omega} \tag{4.37}$$

Eşitlik (4.36) ifadesini soldan $\underline{i}$ ile çapılırsak,

$$\left(\frac{d\gamma^*}{d\omega}\underline{v}^+ + \gamma^* \frac{\partial \underline{v}^+}{\partial \omega}\right)\underline{i} = \left(\frac{dZ^+}{d\omega}\underline{i}^+ + Z^+ \frac{\partial \underline{i}^+}{\partial \omega}\right)\underline{i} \tag{4.38}$$

ve [50] ve [53] çalışmalarında sunulan kayıpsızlık koşulunu (Z^+=-Z ve Y^+=-Y) kullanılarak düzenlersek, ifade Eşitlik (4.39) şeklinde elde edilir.

$$\frac{d\gamma^*}{d\omega}\underline{v}^+\underline{i} = -\gamma^* \frac{\partial \underline{v}^+}{\partial \omega}\underline{i} - \underline{i}^+ \frac{dZ}{d\omega}i - \frac{\partial \underline{i}^+}{\partial \omega}Z\underline{i} \tag{4.39}$$

Eşitlik (4.37) ifadesini soldan $\underline{v}$ ile çapılırsak,

$$\left(\frac{d\gamma^*}{d\omega}\underline{i}^+ + \gamma^* \frac{\partial \underline{i}^+}{\partial \omega}\right)\underline{v} = \left(\frac{dY^+}{d\omega}\underline{v}^+ + Y^+ \frac{\partial \underline{v}^+}{\partial \omega}\right)\underline{v} \tag{4.40}$$

ve kayıpsızlık koşulunu kullanılarak düzenlersek, ifade Eşitlik (4.41) şeklinde elde edilir.

$$\frac{d\gamma^*}{d\omega}\underline{i}^+\underline{v} = -\gamma^* \frac{\partial \underline{i}^+}{\partial \omega}\underline{v} - \underline{v}^+ \frac{dY}{d\omega}\underline{v} - \frac{\partial \underline{v}^+}{\partial \omega}Y\underline{v} \tag{4.41}$$

elde edilir. Eşitlikler (4.39) ve (4.41) ifadelerini birbiriyle toplarsak, Eşitlik (4.42) elde edilir.

$$\frac{d\gamma^*}{d\omega}\left(\underline{v}^+\underline{i}+\underline{i}^+\underline{v}\right)+\gamma^*\left(\frac{\partial\underline{v}^+}{\partial\omega}\underline{i}+\frac{\partial\underline{i}^+}{\partial\omega}\underline{v}\right)=-\underline{v}^+\frac{dY}{d\omega}\underline{v}-\frac{\partial\underline{v}^+}{\partial\omega}Y\underline{v}-\underline{i}^+\frac{dZ}{d\omega}\underline{i}-\frac{\partial\underline{i}^+}{\partial\omega}Z\underline{i} \qquad (4.42)$$

Eşitlik (4.42) ifadesini Eşitlik (4.32)'de yerine yazarsak,

$$f=-\gamma\frac{\partial\underline{i}^+}{\partial\omega}\underline{v}-\gamma\frac{\partial\underline{v}^+}{\partial\omega}\underline{i}+\underline{v}^+\frac{dY}{d\omega}\underline{v}+\frac{\partial\underline{v}^+}{\partial\omega}Y\underline{v}+\underline{i}^+\frac{dZ}{d\omega}i+\frac{\partial\underline{i}^+}{\partial\omega}Z\underline{i}$$

ve Eşitlik (4.34) ve (4.35)'yı kullanarak düzenlersek, f aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$f=\underline{v}^+\frac{dY}{d\omega}\underline{v}+\underline{i}^+\frac{dZ}{d\omega}\underline{i} \qquad (4.43)$$

Bu durumda, e ifadesi aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$e=\int_z\left[\iint_S\nabla.(\vec{E}\times\frac{\partial\vec{H}^*}{\partial\omega}+\frac{\partial\vec{E}^*}{\partial\omega}\times\vec{H})dS\right]dz \qquad (4.44)$$

z'ye göre değişim $e^{-\gamma z}$ şeklinde tanımlıdır. Eşitlik (4.44)'daki her iki toplam ifadesi $e^{-\gamma z}$ ve $e^{-\gamma^* z}$ ortak çarpanlarını içerdiğinden, Eşitlik (4.44), $e^{-(\gamma+\gamma^*)z}$ ortak parantezinde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}e&=\int_{z_1}^{z_2}\left[\iint_S\nabla.(\tilde{E}\times\frac{\partial\tilde{H}^*}{\partial\omega}+\frac{\partial\tilde{E}^*}{\partial\omega}\times\tilde{H})dS\right]e^{-\left(\gamma+\gamma^*\right)z}dz\\&=\frac{e^{-\left(\gamma+\gamma^*\right)z}}{-\left(\gamma+\gamma^*\right)}\Bigg|_{z=z_1}^{z_2}\iint_S\nabla.(\tilde{E}\times\frac{\partial\tilde{H}^*}{\partial\omega}+\frac{\partial\tilde{E}^*}{\partial\omega}\times\tilde{H})dS\\&=\frac{e^{-\left(\gamma+\gamma^*\right)z_2}-e^{-\left(\gamma+\gamma^*\right)z_1}}{-\left(\gamma+\gamma^*\right)}\iint_S\nabla.(\tilde{E}\times\frac{\partial\tilde{H}^*}{\partial\omega}+\frac{\partial\tilde{E}^*}{\partial\omega}\times\tilde{H})dS\end{aligned} \qquad (4.45)$$

Burada,

$$\vec{E}=\tilde{\vec{E}}e^{-\gamma z} \text{ ve } \vec{H}=\tilde{\vec{H}}e^{-\gamma z}$$

şeklinde tanımlıdır. Eşitlik (4.43), (4.44) ve e=4j(W_m+W_e) ifadelerinden, W_m+W_e aşağıdaki gibi elde edilir.

$$W_m + W_e = -\frac{1}{4}\frac{e^{-(\gamma+\gamma^*)z_2} - e^{-(\gamma+\gamma^*)z_1}}{(\gamma+\gamma^*)}\left[v^+ \frac{dY}{dj\omega} v + i^+ \frac{dZ}{dj\omega} i\right] \tag{4.46}$$

Eğer γ saf sanal olursa (iletilen mod) e için 0/0 belirsizliği meydana gelir. L'Hospital kuralından,

$$e = \frac{-z_2 e^{-(\gamma+\gamma^*)z_2} + z_1 e^{-(\gamma+\gamma^*)z_1}}{-1} f = (z_2 - z_1) f$$

elde edilir ve iletilen modlar için W_m+W_e aşağıdaki gibi elde edilir.

$$W_m + W_e = \frac{1}{4}(z_2 - z_1)\left[v^+ \frac{dY}{dj\omega} v + i^+ \frac{dZ}{dj\omega} i\right]$$

Sönümlü ve kompleks modlar (α=Re{γ}>0) için W_m+W_e aşağıdaki gibi elde edilir.

$$W_m + W_e = -\frac{1}{4}\frac{e^{-2\alpha z_2} - e^{-2\alpha z_1}}{2\alpha}\left[v^+ \frac{dY}{dj\omega} v + i^+ \frac{dZ}{dj\omega} i\right]$$

Bu iki durumda

$$\underline{v}^+ \frac{dY}{dj\omega} \underline{v} + \underline{i}^+ \frac{dZ}{dj\omega} \underline{i}$$

ifadesinin işareti W_m+W_e'nin işaretini belirler.

Artık Foster reaktans teoremini iletim hattı eşdeğerlikleri büyüklükleri cinsinden ifade edebiliriz. Eğer ortam kayıpsız ise ve doğal materyalden oluşuyor ise $W_e + W_m \geq 0$ olmaktadır. Dolayısıyla

$$\underline{v}^+ \frac{dY}{dj\omega} \underline{v} + \underline{i}^+ \frac{dZ}{dj\omega} \underline{i} > 0$$

olmalıdır. Dolgu ortamı kayıpsız ve metamateryal ise

$$\underline{v}^{+}\frac{dY}{dj\omega}\underline{v}+\underline{i}^{+}\frac{dZ}{dj\omega}\underline{i}<0$$

olabileceğinden Y ve/veya Z artık Foster matrisi olmayacak ve Foster teoremini oluşturan bu eşitsizlik sağlanmayacaktır.

4.4. Depolanan Elektrik ve Manyetik Enerjilerin Zaman Ortalamaları İçin Ayrı Ayrı İfadeler

İletim hattı eşdeğerliği büyüklükleri cinsinden W_m ve W_e yi 'ayrı ayrı elde etmek mümkündür. Bunun için g tanımını aşağıdaki gibi yapalım.

$$g=\iiint_V \nabla.(\vec{E}\times\frac{\partial\vec{H}^*}{\partial\omega}-\frac{\partial\vec{E}^*}{\partial\omega}\times\vec{H})dV$$

ise,

$$g=\int_z\left\{\iint_S\left[-\vec{E}\cdot\left(\nabla\times\frac{\partial\vec{H}^*}{\partial\omega}\right)+\frac{\partial\vec{H}^*}{\partial\omega}\cdot\left(\nabla\times\vec{E}\right)+\frac{\partial\vec{E}^*}{\partial\omega}\cdot\left(\nabla\times\vec{H}\right)-\vec{H}\cdot\left(\nabla\times\frac{\partial\vec{E}^*}{\partial\omega}\right)\right]dS\right\}dz$$

ve

$$g=\int_z\left\{\iint_S\left[-\vec{E}\cdot\left(-j\frac{\partial\left(\omega\hat{\varepsilon}^*\right)}{\partial\omega}\vec{E}^*-j\omega\hat{\varepsilon}^*\frac{\partial\vec{E}^*}{\partial\omega}\right)+\frac{\partial\vec{H}^*}{\partial\omega}\cdot\left(-j\omega\hat{\mu}\vec{H}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\partial\vec{E}^*}{\partial\omega}\cdot\left(j\omega\hat{\varepsilon}\vec{E}\right)-\vec{H}\cdot\left(j\frac{\partial\left(\omega\hat{\mu}^*\right)}{\partial\omega}\vec{H}^*+j\omega\hat{\mu}^*\frac{\partial\vec{H}^*}{\partial\omega}\right)\right]dS\right\}dz$$

şeklinde yazılabilir. Kayıpsızlıktan ötürü $\hat{\mu}^*=\hat{\mu}^T$ ve $\hat{\varepsilon}^*=\hat{\varepsilon}^T$;

$$g=\iiint_V j\vec{E}^*\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\hat{\varepsilon}\right)\vec{E}dV-\iiint_V j\vec{H}^*\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\hat{\mu}^*\right)\vec{H}dV$$
$$+\iiint_V\left\{\frac{\partial\vec{H}^*}{\partial\omega}\cdot\left(-j\omega\hat{\mu}\vec{H}\right)+\frac{\partial\vec{E}^*}{\partial\omega}\cdot\left(j\omega\hat{\varepsilon}\vec{E}\right)-\frac{\partial\vec{H}^*}{\partial\omega}j\omega\hat{\mu}^*\vec{H}+\frac{\partial\vec{E}^*}{\partial\omega}j\omega\hat{\varepsilon}\vec{E}\right\}dV$$

şeklinde elde edilir. Eşitlikler (4.8) ve (4.9)'dan, g aşağıdaki gibi elde edilir.

$$g = 4j\left(W_e - W_m\right) + 2\iiint_V \frac{\partial \vec{H}^*}{\partial \omega} \cdot \left(-j\omega\hat{\mu}\vec{H}\right) dV + 2\iiint_V \frac{\partial \vec{E}^*}{\partial \omega} \cdot \left(j\omega\hat{\varepsilon}\vec{E}\right) \tag{4.47}$$

Eşitlik (2.1)'de verilen Maxwell denklemleri kullanılarak ifade aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$g = 4j\left(W_e - W_m\right) + 2\iiint_V \left[\frac{\partial \vec{H}^*}{\partial \omega} \cdot \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{E}^*}{\partial \omega} \cdot \nabla \times \vec{H}\right] dV \tag{4.48}$$

Eşitlik (4.48) ifadesini düzenlersek $W_e - W_m$ aşağıdaki gibi elde edilir.

$$W_e - W_m = \frac{1}{4j} g - \frac{1}{2j} \iiint_V \left[\frac{\partial \vec{H}^*}{\partial \omega} \cdot \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{E}^*}{\partial \omega} \cdot \nabla \times \vec{H}\right] dV \tag{4.49}$$

Eşitlik (4.49)'te verilen g ifadesini elde etmek için h'yi aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$h = \iint_S \left[-\vec{E} \cdot \left(\nabla \times \frac{\partial \vec{H}^*}{\partial \omega}\right) + \frac{\partial \vec{H}^*}{\partial \omega} \cdot \left(\nabla \times \vec{E}\right) + \frac{\partial \vec{E}^*}{\partial \omega} \cdot \left(\nabla \times \vec{H}\right) - \vec{H} \cdot \left(\nabla \times \frac{\partial \vec{E}^*}{\partial \omega}\right)\right] dS$$

Eşitlikler (4.17), (4.18), (4.19) ve (4.20) yerlerine yazılırsa, h aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} h = {} & \frac{\partial I^*_{(n)}}{\partial \omega}\frac{\partial V_{(n)}}{\partial z} + \frac{\partial I^*_{[n]}}{\partial \omega}\frac{\partial V_{[n]}}{\partial z} + \frac{\partial I^*_{z,[n]}}{\partial \omega}\chi_{[n]}V_{[n]} - \frac{\partial I^*_{(n)}}{\partial \omega}\chi_{(n)}V_{z,(n)} \\ & + V_{(n)}\frac{\partial^2 I^*_{(n)}}{\partial \omega \partial z} + V_{[n]}\frac{\partial^2 I^*_{[n]}}{\partial \omega \partial z} - V_{[n]}\chi_{[n]}\frac{\partial I^*_{z,[n]}}{\partial \omega} + \chi_{(n)}V_{z,(n)}\frac{\partial I^*_{(n)}}{\partial \omega} \\ & - I_{(n)}\frac{\partial^2 V^*_{(n)}}{\partial \omega \partial z} + I_{(n)}\chi_{(n)}\frac{\partial V^*_{z,(n)}}{\partial \omega} - I_{[n]}\frac{\partial^2 V^*_{[n]}}{\partial \omega \partial z} - \chi_{[n]}I_{z,[n]}\frac{\partial V^*_{[n]}}{\partial \omega} \\ & - \frac{\partial V^*_{(n)}}{\partial \omega}\frac{\partial I_{(n)}}{\partial z} - \frac{\partial V^*_{[n]}}{\partial \omega}\frac{\partial I_{[n]}}{\partial z} + \frac{\partial V^*_{[n]}}{\partial \omega}\chi_{[n]}I_{z,[n]} - \chi_{(n)}\frac{\partial V^*_{z,(n)}}{\partial \omega}I_{(n)} \end{aligned}$$

İfadeyi düzenlersek, h Eşitlik (4.50) şeklinde elde edilir.

$$h = \frac{\partial I^*_{(n)}}{\partial \omega}\frac{\partial V_{(n)}}{\partial z} + \frac{\partial I^*_{[n]}}{\partial \omega}\frac{\partial V_{[n]}}{\partial z} + V_{(n)}\frac{\partial^2 I^*_{(n)}}{\partial \omega \partial z} + V_{[n]}\frac{\partial^2 I^*_{[n]}}{\partial \omega \partial z}$$
$$-I_{(n)}\frac{\partial^2 V^*_{(n)}}{\partial \omega \partial z} - I_{[n]}\frac{\partial^2 V^*_{[n]}}{\partial \omega \partial z} - \frac{\partial V^*_{(n)}}{\partial \omega}\frac{\partial I_{(n)}}{\partial z} - \frac{\partial V^*_{[n]}}{\partial \omega}\frac{\partial I_{[n]}}{\partial z} \tag{4.50}$$

Eşitlikler (4.22), (4.23), (4.24), (4.27) ve (4.30)'ü Eşitlik (4.50)'da yerine koyarsak, h aşağıdaki gibi elde edilir.

$$h = -\gamma\left(\frac{\partial \underline{i}^+}{\partial \omega}\underline{v} - \frac{\partial \underline{v}^+}{\partial \omega}\underline{i}\right) - \frac{d\gamma^*}{d\omega}\underline{i}^+\underline{v} - \gamma^*\frac{\partial \underline{i}^+}{\partial \omega}\underline{v} + \frac{d\gamma^*}{d\omega}\underline{v}^+\underline{i} + \gamma^*\frac{\partial \underline{v}^+}{\partial \omega}\underline{i} \tag{4.51}$$

Eşitlik (4.51) düzenlenirse, h şeklinde elde edilir.

$$h = -\left(\gamma + \gamma^*\right)\left(\frac{\partial \underline{i}^+}{\partial \omega}\underline{v} - \frac{\partial \underline{v}^+}{\partial \omega}\underline{i}\right) - \frac{d\gamma^*}{d\omega}\left(\underline{i}^+\underline{v} - \underline{v}^+\underline{i}\right) \tag{4.52}$$

Eşitlikler (4.33) ve (4.34)'da verilen ek iletim hattı denklemlerini ve Eşitlikler (4.39) ve (4.41)'i kullanırsak,

$$\frac{d\gamma^*}{d\omega}\underline{v}^+\underline{i} - \frac{d\gamma^*}{d\omega}\underline{i}^+\underline{v} = -\gamma^*\frac{\partial \underline{v}^+}{\partial \omega}\underline{i} - \frac{\partial \underline{i}^+}{\partial \omega}Z\underline{i} + \underline{v}^+\frac{dY}{d\omega}\underline{v} + \frac{\partial \underline{v}^+}{\partial \omega}Y\underline{v} - \underline{i}^+\frac{dZ}{d\omega}\underline{i} + \gamma^*\frac{\partial \underline{i}^+}{\partial \omega}\underline{v}$$

olur ve Eşitlik (4.52) aşağıdaki gibi elde edilir.

$$h = -\left(\gamma + \gamma^*\right)\left(\frac{\partial \underline{i}^+}{\partial \omega}\underline{v} - \frac{\partial \underline{v}^+}{\partial \omega}\underline{i}\right) - \gamma^*\frac{\partial \underline{v}^+}{\partial \omega}\underline{i} - \frac{\partial \underline{i}^+}{\partial \omega}Z\underline{i} + \underline{v}^+\frac{dY}{d\omega}\underline{v}$$
$$+\frac{\partial \underline{v}^+}{\partial \omega}Y\underline{v} - \underline{i}^+\frac{dZ}{d\omega}\underline{i} + \gamma^*\frac{\partial \underline{i}^+}{\partial \omega}\underline{v}$$

İfade düzenlenirse,

$$h = -\frac{\partial \underline{i}^+}{\partial \omega}\gamma\underline{v} + \frac{\partial \underline{v}^+}{\partial \omega}\gamma\underline{i} - \frac{\partial \underline{i}^+}{\partial \omega}Z\underline{i} - \underline{i}^+\frac{dZ}{d\omega}\underline{i} + \underline{v}^+\frac{dY}{d\omega}\underline{v} + \frac{\partial \underline{v}^+}{\partial \omega}Y\underline{v}$$

şeklinde elde edilir. Eşitlikler (4.34) ve (4.35)'den ifade aşağıdaki şekli alır.

$$h = -\frac{\partial \underline{i}^{+}}{\partial \omega} Z \underline{i} + \frac{\partial \underline{v}^{+}}{\partial \omega} Y \underline{v} - \frac{\partial \underline{i}^{+}}{\partial \omega} Z \underline{i} - \underline{i}^{+} \frac{dZ}{d\omega} \underline{i} + \underline{v}^{+} \frac{dY}{d\omega} \underline{v} + \frac{\partial \underline{v}^{+}}{\partial \omega} Y \underline{v} \tag{4.53}$$

Eşitlik (4.53) tekrar düzenlenirse, h aşağıdaki gibi elde edilir.

$$h = 2\left(\frac{\partial \underline{v}^{+}}{\partial \omega} Y \underline{v} - \frac{\partial \underline{i}^{+}}{\partial \omega} Z \underline{i} \right) + \left(\underline{v}^{+} \frac{dY}{d\omega} \underline{v} - \underline{i}^{+} \frac{dZ}{d\omega} \underline{i} \right) \tag{4.54}$$

Bu durumda g aşapğıdaki şekilde elde edilir.

$$g = \int_{z} \left[2\left(\frac{\partial \underline{v}^{+}}{\partial \omega} Y \underline{v} - \frac{\partial \underline{i}^{+}}{\partial \omega} Z \underline{i} \right) + \left(\underline{v}^{+} \frac{dY}{d\omega} \underline{v} - \underline{i}^{+} \frac{dZ}{d\omega} \underline{i} \right) \right] dz \tag{4.55}$$

Eşitlik (4.49) tekrar ele alırsak ve h ifadesini yerine yazarsak, Eşitlik (4.49) aşağıdaki şekli alır.

$$\begin{aligned} W_e - W_m = {} & \frac{1}{4j} \int_{z} \left[2\left(\frac{\partial \underline{v}^{+}}{\partial \omega} Y \underline{v} - \frac{\partial \underline{i}^{+}}{\partial \omega} Z \underline{i} \right) + \left(\underline{v}^{+} \frac{dY}{d\omega} \underline{v} - \underline{i}^{+} \frac{dZ}{d\omega} \underline{i} \right) \right] dz \\ & - \frac{1}{2j} \iiint_{V} \left[\frac{\partial \vec{H}^{*}}{\partial \omega} \cdot \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{E}^{*}}{\partial \omega} \cdot \nabla \times \vec{H} \right] dV \end{aligned} \tag{4.56}$$

Eşitlikler (4.17) ve (4.20)'da elde edilen ifadeler Eşitlik (4.56)'de yerine konulursa $W_e - W_m$ aşağıdaki şekli alır.

$$\begin{aligned} W_e - W_m = {} & \frac{1}{4j} \int_{z} \left[2\left(\frac{\partial \underline{v}^{+}}{\partial \omega} Y \underline{v} - \frac{\partial \underline{i}^{+}}{\partial \omega} Z \underline{i} \right) + \left(\underline{v}^{+} \frac{dY}{d\omega} \underline{v} - \underline{i}^{+} \frac{dZ}{d\omega} \underline{i} \right) \right] dz \\ & - \frac{1}{2j} \int_{z} \left[\frac{\partial I^{*}_{(n)}}{\partial \omega} \frac{\partial V_{(n)}}{\partial z} + \frac{\partial I^{*}_{[n]}}{\partial \omega} \frac{\partial V_{[n]}}{\partial z} + \chi_{[n]} \frac{dI^{*}_{z,[n]}}{d\omega} V_{[n]} - \chi_{(n)} V_{z,(n)} \frac{\partial I^{*}_{(n)}}{\partial \omega} \right. \\ & \left. - \frac{\partial V^{*}_{(n)}}{\partial \omega} \frac{\partial I_{(n)}}{\partial z} - \frac{\partial V^{*}_{[n]}}{\partial \omega} \frac{\partial I_{[n]}}{\partial z} + \chi_{[n]} I_{z,[n]} \frac{\partial V^{*}_{[n]}}{\partial \omega} - \chi_{(n)} \frac{dV^{*}_{z,(n)}}{d\omega} I_{(n)} \right] dz \end{aligned}$$

Elde edilen ifadeyi Eşitlikler (4.23), (4.24) kullanarak düzenlersek,

$$W_e - W_m = \frac{1}{4j}\int_z \left[2\left(\frac{\partial \underline{v}^+}{\partial\omega} Y \underline{v} - \frac{\partial \underline{i}^+}{\partial\omega} Z \underline{i} \right) + \left(\underline{v}^+ \frac{dY}{d\omega} \underline{v} - \underline{i}^+ \frac{dZ}{d\omega} \underline{i} \right) \right] dz$$
$$- \frac{1}{2j}\int_z \left[-\gamma \left(\frac{\partial \underline{i}^+}{\partial\omega} \underline{v} - \frac{\partial \underline{v}^+}{\partial\omega} \underline{i} \right) + \chi_{[n]} \frac{dI^*_{z,[n]}}{d\omega} V_{[n]} - \chi_{(n)} V_{z,(n)} \frac{\partial I^*_{(n)}}{\partial\omega} \right.$$
$$\left. + \chi_{[n]} I_{z,[n]} \frac{\partial V^*_{[n]}}{\partial\omega} - \chi_{(n)} \frac{dV^*_{z,(n)}}{d\omega} I_{(n)} \right] dz$$

ve Eşitlik (4.34)'i ifadede yerine yazarsak, Eşitlik (4.57) elde edilir.

$$W_e - W_m = \frac{1}{4j}\int_z \left[2\frac{\partial \underline{v}^+}{\partial\omega} Y \underline{v} - 2\frac{\partial \underline{i}^+}{\partial\omega} Z \underline{i} + \underline{v}^+ \frac{dY}{d\omega} \underline{v} - \underline{i}^+ \frac{dZ}{d\omega} \underline{i} \right.$$
$$\left. - 2\frac{\partial \underline{v}^+}{\partial\omega} Y \underline{v} + 2\frac{\partial \underline{i}^+}{\partial\omega} Z \underline{i} \right] dz$$
$$- \frac{1}{2j}\int_z \left[\chi_{[n]} \frac{dI^*_{z,[n]}}{d\omega} V_{[n]} - \chi_{(n)} V_{z,(n)} \frac{\partial I^*_{(n)}}{\partial\omega} + \chi_{[n]} I_{z,[n]} \frac{\partial V^*_{[n]}}{\partial\omega} - \chi_{(n)} \frac{dV^*_{z,(n)}}{d\omega} I_{(n)} \right] dz \quad (4.57)$$

Eşitlik (4.57) düzenlenirse, ifade aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$W_e - W_m = \frac{1}{4}\int_z \left[\underline{v}^+ \frac{dY}{dj\omega} \underline{v} - \underline{i}^+ \frac{dZ}{dj\omega} \underline{i} \right] dz$$
$$- \frac{1}{2j}\int_z \left[\chi_{[n]} I_{z,[n]} \frac{\partial V^*_{[n]}}{\partial\omega} + \chi_{[n]} \frac{dI^*_{z,[n]}}{d\omega} V_{[n]} - \chi_{(n)} V_{z,(n)} \frac{\partial I^*_{(n)}}{\partial\omega} - \chi_{(n)} \frac{dV^*_{z,(n)}}{d\omega} I_{(n)} \right] dz \quad (4.58)$$

İfadeler eşlenik transpozlar dikkate alınarak tekrar düzenlenirse Eşitlik (4.58) aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$W_e - W_m = \frac{1}{4}\int_z \left[\underline{v}^+ \frac{dY}{dj\omega} \underline{v} - \underline{i}^+ \frac{dZ}{dj\omega} \underline{i} \right] dz$$
$$- \frac{1}{2j}\int_z \left[\frac{\partial V^+_{[n]}}{\partial\omega} \chi_{[n]} I_{z,[n]} + \frac{dI^+_{z,[n]}}{d\omega} \chi_{[n]} V_{[n]} - \frac{\partial I^+_{(n)}}{\partial\omega} \chi_{(n)} V_{z,(n)} - \frac{dV^+_{z,(n)}}{d\omega} \chi_{(n)} I_{(n)} \right] dz \quad (4.59)$$

Jirotropik ortam yüklü kapalı dalga kılavuzu yapıları için empedans ve admitans matrisleri aşağıdaki gibi tanımlıdır [50].

$$Z = j\omega\begin{bmatrix} Z_{(\,)(\,)} & Z_{(\,)[\,]} \\ Z_{[\,](\,)} & Z_{[\,][\,]} \end{bmatrix} + \frac{1}{j\omega}\begin{bmatrix} Z_A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{Z} + \frac{1}{j\omega}\begin{bmatrix} Z_A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.60}$$

$$Y = j\omega\begin{bmatrix} Y_{(\,)(\,)} & Y_{(\,)[\,]} \\ Y_{[\,](\,)} & Y_{[\,][\,]} \end{bmatrix} + \frac{1}{j\omega}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y_B \end{bmatrix} = \bar{Y} + \frac{1}{j\omega}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y_B \end{bmatrix} \tag{4.61}$$

Ve

$$\chi_{(n)} V_{z,(n)} = -\frac{1}{j\omega} Z_A I_{(n)} \tag{4.62}$$

$$\chi_{[n]} I_{z,[n]} = -\frac{1}{j\omega} Y_B V_{[n]} \tag{4.63}$$

Kayıpsız ortam için $\mathrm{Im}\{\varepsilon_{zz}\}=\mathrm{Im}\{\mu_{zz}\}=0$ şeklinde tanımlıdır. Ayrıca Z_A ve Y_B aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$Z_A = \chi_{(n)} P^{-1} \chi_{(n)} \tag{4.64}$$

$$Y_B = \chi_{[n]} Q^{-1} \chi_{[n]} \tag{4.65}$$

Ayrıca $Y_B=Y_B^*$ ve $Z_A=Z_A^*$ (Ayrıca Y_B ve Z_A simetriktir) olarak tanımlı olduğundan, P'nin (n,m) elemanı ve Q'nun (n,m) elemanı reeldir [50].

$$P_{(n)(m)} = \iint_S \chi_{(n)} \chi_{(m)} \varepsilon_{zz} T_{(n)} T_{(m)} dS \tag{4.66}$$

$$Q_{[n][m]} = \iint_S \chi_{[n]} \chi_{[m]} \mu_{zz} T_{[n]} T_{[m]} dS \tag{4.67}$$

Eşitlik (4.58) yukarıda verilen tanımlar kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$W_e - W_m = \frac{1}{4}\int_z \left[\underline{v}^+ \frac{d\overline{Y}}{dj\omega}\underline{v} - \underline{i}^+ \frac{d\overline{Z}}{dj\omega}\underline{i} - V_{[n]}^+ \frac{d}{d\omega}\left(\frac{Y_B}{\omega}\right)V_{[n]} + I_{(n)}^+ \frac{d}{d\omega}\left(\frac{Z_A}{\omega}\right)I_{(n)} \right] dz$$
$$-\frac{1}{2j}\int_z \left[-\frac{\partial V_{[n]}^+}{\partial\omega}\frac{1}{j\omega}Y_B V_{[n]} + \frac{d}{d\omega}\left(V_{[n]}^+ \frac{1}{j\omega}Y_B\right)V_{[n]} \right. \tag{4.68}$$
$$\left. + \frac{\partial I_{(n)}^+}{\partial\omega}\left(\frac{1}{j\omega}Z_A I_{(n)}\right) - \frac{d}{d\omega}\left(I_{(n)}^+ \frac{1}{j\omega}Z_A\right)I_{(n)} \right] dz$$

İfade düzenlenirse, Eşitlik (4.69) şekline dönüşür.

$$W_e - W_m = \frac{1}{4}\int_z \left[\underline{v}^+ \frac{d\overline{Y}}{dj\omega}\underline{v} - \underline{i}^+ \frac{d\overline{Z}}{dj\omega}\underline{i} - V_{[n]}^+ \frac{d}{d\omega}\left(\frac{Y_B}{\omega}\right)V_{[n]} + I_{(n)}^+ \frac{d}{d\omega}\left(\frac{Z_A}{\omega}\right)I_{(n)} \right] dz$$
$$-\frac{1}{2}\int_z \left[\frac{\partial V_{[n]}^+}{\partial\omega}\left(\frac{Y_B}{\omega}\right)V_{[n]} - \frac{\partial V_{[n]}^+}{\partial\omega}\left(\frac{Y_B}{\omega}\right)V_{[n]} - V_{[n]}^+ \frac{d}{d\omega}\left(\frac{Y_B}{\omega}\right)V_{[n]} \right. \tag{4.69}$$
$$\left. - \frac{\partial I_{(n)}^+}{\partial\omega}\left(\frac{Z_A}{\omega}\right)I_{(n)} + \frac{\partial I_{(n)}^+}{\partial\omega}\left(\frac{Z_A}{\omega}\right)I_{(n)} + I_{(n)}^+ \frac{d}{d\omega}\left(\frac{Z_A}{\omega}\right)I_{(n)} \right] dz$$

Eşitlik (4.69) düzenlenirse, eşitlik

$$W_e - W_m = \frac{1}{4}\int_z \left[\underline{v}^+ \frac{d\overline{Y}}{dj\omega}\underline{v} - \underline{i}^+ \frac{d\overline{Z}}{dj\omega}\underline{i} - V_{[n]}^+ \frac{d}{d\omega}\left(\frac{Y_B}{\omega}\right)V_{[n]} + I_{(n)}^+ \frac{d}{d\omega}\left(\frac{Z_A}{\omega}\right)I_{(n)} \right] dz$$
$$-\frac{1}{2}\int_z \left[-V_{[n]}^+ \frac{d}{d\omega}\left(\frac{Y_B}{\omega}\right)V_{[n]} + I_{(n)}^+ \frac{d}{d\omega}\left(\frac{Z_A}{\omega}\right)I_{(n)} \right] dz \tag{4.70}$$

Sonuç olarak $W_e - W_m$ aşağıdaki gibi elde edilir.

$$W_e - W_m = \frac{1}{4}\int_z \left[\underline{v}^+ \frac{d\overline{Y}}{dj\omega}\underline{v} - \underline{i}^+ \frac{d\overline{Z}}{dj\omega}\underline{i} + V_{[n]}^+ \frac{d}{d\omega}\left(\frac{Y_B}{\omega}\right)V_{[n]} - I_{(n)}^+ \frac{d}{d\omega}\left(\frac{Z_A}{\omega}\right)I_{(n)} \right] dz \tag{4.71}$$

z'ye göre değişim göz önüne alındığında eşitlik aşağıdaki gibi elde edilir.

$$W_e - W_m = \frac{1}{4}\frac{e^{-\left(\gamma+\gamma^*\right)z_2} - e^{-\left(\gamma+\gamma^*\right)z_1}}{-\left(\gamma+\gamma^*\right)}\left[v^+ \frac{d\overline{Y}}{dj\omega}v - i^+ \frac{d\overline{Z}}{dj\omega}i \right.$$
$$\left. - \tilde{V}_{[n]}^* \frac{d}{d\omega}\left(\frac{Y_B}{\omega}\right)\tilde{V}_{[n]} + \tilde{I}_{(n)}^* \frac{d}{d\omega}\left(\frac{Z_A}{\omega}\right)\tilde{I}_{(n)} \right] \tag{4.72}$$

Burada, $\tilde{V}_{[\,]} = V_{[\,]} e^{-\gamma z}$ ve $\tilde{I}_{(\,)} = I_{(\,)} e^{-\gamma z}$ şeklinde tanımlıdır. Eşitlikler (4.43), (4.60) ve (4.61) kullanılarak W_e+W_m ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$W_e + W_m = \frac{1}{4} \frac{e^{-(\gamma+\gamma^*)z_2} - e^{-(\gamma+\gamma^*)z_1}}{-(\gamma+\gamma^*)} \left[v^+ \frac{d\bar{Y}}{dj\omega} v + i^+ \frac{d\bar{Z}}{dj\omega} i \right.$$
$$\left. - \tilde{V}^*_{[n]} \frac{d}{d\omega}\left(\frac{Y_B}{\omega}\right) \tilde{V}_{[n]} - \tilde{I}^*_{(n)} \frac{d}{d\omega}\left(\frac{Z_A}{\omega}\right) \tilde{I}_{(n)} \right] \tag{4.73}$$

Eşitlik (4.72) ve Eşitlik (4.73) toplanır ve W_e tek başına bırakılırsa, iletim hattı nicelikleri cinsinden zamana göre ortalama depolanmış elektrik enerji ifadesi Eşitlik (4.74) şeklinde elde edilir.

$$W_e = \frac{1}{4} \frac{e^{-(\gamma+\gamma^*)z_2} - e^{-(\gamma+\gamma^*)z_1}}{(\gamma+\gamma^*)} \left[v^+ \frac{d\bar{Y}}{dj\omega} v - \tilde{I}^+_{(n)} \frac{d}{d\omega}\left(\frac{Z_A}{\omega}\right) \tilde{I}_{(n)} \right] \tag{4.74}$$

Benzer şekilde Eşitlik (4.46) ve Eşitlik (4.72) toplanır ve W_m tek başına bırakılırsa, iletim hattı nicelikleri cinsinden zamana göre ortalama depolanmış elektrik enerji ifadesi Eşitlik (4.75) şeklinde elde edilir.

$$W_m = \frac{1}{4} \frac{e^{-(\gamma+\gamma^*)z_2} - e^{-(\gamma+\gamma^*)z_1}}{(\gamma+\gamma^*)} \left[i^+ \frac{d\bar{Z}}{dj\omega} i - \tilde{V}^+_{[n]} \frac{d}{d\omega}\left(\frac{Y_B}{\omega}\right) \tilde{V}_{[n]} \right] \tag{4.75}$$

Eşitlikler (4.74) ve (4.75)'da $\bar{Z}, \bar{Y}, Z_A$ve Y_B Eşitlikler (4.60) ve (4.61)'de tanımlandığı gibidir. Eşitlikler (4.74) ve (4.75) bağıntıları literatürde MoM büyüklükleri cinsinden ayrı ayrı depolanan elektrik ve manyetik enerjilerin zaman ortalamalarını veren ilk bağıntılar olduğu bilinmektedir.

Bölüm 4'te gerçekleştirlen çalışmaları özetlersek, öncelikle elektrik alan ve manyetik alan vektörlerinin modal gösterimleri ve iletim hattı eşdeğeri eşitlikleri kullanılarak Foster reaktans teoreminin ifadesi iletim hattı eşdeğeri eşitlikleri cinsinden elde edilmiştir. Gerçekleştirilen işlemler sonucunda zamana göre ortalama depolanmış elektrik ve manyetik enerji toplamlarının işaretinin, yani ilgili yapının Foster reaktans teoremini sağlayıp sağlamadığının iletim hattı eşdeğeri eşitlikleri cinsiden elde edilen ifade ile belirlenebileceği sonucu elde edilmiştir. Daha öncede belirtildiği

gibi bu çalışmada Foster reaktans teoremini sağlayıp sağlamadığı araştırılan matrisler, MoM yaklaşımında karşılaşılan katsayı matrisleri Z ve Y dir. Gerçekleştirilen işlemler sonucunda zamana göre ortalama depolanmış elektrik ve manyetik enerji toplamlarının işaretini, yani ilgili yapının Foster reaktans teoremini sağlayıp sağlamadığını,

$$\underline{v}^{+}\frac{dY}{d\omega}\underline{v}+\underline{i}^{+}\frac{dZ}{d\omega}\underline{i}$$

ifadesinin işaretinin belirlediği sonucu elde edilmiştir. Bu bölümde ek olarak literatürde ilk kez iletim hattı eşdeğeri eşitlikleri cinsinden zamana göre ortalama depolanmış elektrik ve manyetik enerji ifadeleri ayrı ayrı elde edilmiştir.

5. METAMATERYAL YÜKLÜ KAPALI ÜNİFORM DALGA KILAVUZLARINDA GERİYE DOĞRU DALGALAR İÇİN GEREK VE YETER KOŞULLAR

Kayıpsız, jirotropik doğal materyal yüklü kapalı dalga kılavuzlarında geriye doğru dalgaların varlığı için gerek ve yeter koşullar Yener tarafından [51] çalışmasında elde edilmiştir. Bu bölümde öncelikle [51] çalışmasında elde edilen sonuçlar tekrar elde edilecektir ve metamateryal dolu kapalı üniform dalga kılavuzlarında geriye doğru dalgalar için gerek ve yeter koşulların elde edilmesinde kullanılacaktır.

5.1. Kayıpsız, Jirotropik Doğal Materyal Yüklü Kapalı Dalga Kılavuzlarında Geriye Doğru Dalgaların Varlığı İçin Gerek ve Yeter Koşullar

Öncelikle iletim hattı eşitliklerinin elde edilmesinde kullanılan modal alan ifadeleri kullanılarak grup hızı için bir ifade türetilecektir. Eşitlik (2.35)'te kayıpsız, jirotropik natural materyal yüklü kapalı dalga kılavuzları için verilen iletim hattı eşdeğeri eşitlikleri sistemini ele alalım. Bölüm 4'te verildiği üzere, X=-jZ ve B=-jY şeklinde tanımlıdır ve Z(p) ve Y(p) Foster matris olduğundan hermityendir. Ayrıca $Z^{-1}(p)$ ve

$Y^{-1}(p)$ var olsun. Eşitlik (2.35) sisteminden Eşitlik (5.1) üretilebilir.

$$Z(p)Y(p)v(p) = \gamma^2(p)v(p) \tag{5.1}$$

Bu yüzden reel frekanslarda γ^2 (yayılım sabitinin karesi) niceliği $Z(j\omega)Y(j\omega)$ çarpım matrisinin bir özdeğeridir ve iletim hattı gerilimleri olarak belirtilen kolon vektör v'ye karşı düşen özvektörü verir. İndis n ile gösterilen özdeğer ve özvektör için Eşitlik (5.2)

$$-X(j\omega)B(j\omega)v_n(j\omega) = \gamma_n^2(j\omega)v_n(j\omega) \tag{5.2}$$

ve tekil olmayan X ile Eşitlik (5.3)

$$B(j\omega)v_n(j\omega)+\gamma_n^2(j\omega)X^{-1}(j\omega)v_n(j\omega)=0 \tag{5.3}$$

elde edilir. Burada $Z(j\omega)=jX(j\omega)$ ve $Y(j\omega)=jB(j\omega)$ notasyonları kullanılmıştır. $X^{-1}(j\omega)$, $B(j\omega)$, γ_n^2 ve $\underline{v}_n$'nin ω'ya göre türevlenebildiği açısal frekans aralığında dikkate alalım. Öyleyse Eşitlik (5.3)'ün ω'ya göre türevi Eşitlik (5.4) olarak elde edilir.

$$\begin{aligned}&\left[\frac{dB(j\omega)}{d\omega}+\frac{d\gamma_n^2(j\omega)}{d\omega}X^{-1}(j\omega)+\gamma_n^2(j\omega)\frac{dX^{-1}(j\omega)}{d\omega}\right]v_n(j\omega)\\&+\left[B(j\omega)+\gamma_n^2(j\omega)X^{-1}(j\omega)\right]\frac{dv_n(j\omega)}{d\omega}=0\end{aligned} \tag{5.4}$$

γ^2'nin saf reel olduğu jω ekseni üzerindeki aralıkları düşünerek eşitliğin ekini (adjoint) alırsak ve sağ taraftan $v_n(j\omega)$ ile çarparsak, o zaman Eşitlik (5.3), Eşitlik (5.4)'in sol tarafındaki ikinci terimi elimine etmek için kullanılabilir. Böylece aşağıdaki ifade elde edilir.

$$v_n^+(j\omega)\left[\frac{dB(j\omega)}{d\omega}+\frac{d\gamma_n^2(j\omega)}{d\omega}X^{-1}(j\omega)+\gamma_n^2(j\omega)\frac{dX^{-1}(j\omega)}{d\omega}\right]v_n(j\omega)=0 \tag{5.5}$$

Sonuç olarak bu eşitliğin ekini alarak Eşitlik (5.6) yazılabilir.

$$\begin{aligned}&v_n^+(j\omega)X^{-1}(j\omega)v_n(j\omega)\left[-\frac{d\gamma_n^2(j\omega)}{d\omega}\right]\\&=v_n^+(j\omega)\left[\frac{dB(j\omega)}{d\omega}+\gamma_n^2(j\omega)\frac{dX^{-1}(j\omega)}{d\omega}\right]v_n(j\omega)\end{aligned} \tag{5.6}$$

İletilen modlar için $\gamma_n(j\omega)$ saf sanaldır ve $\gamma_n(j\omega)=j\beta_n(j\omega)$ eşitliği kullanılarak grup hızı için aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\frac{1}{\frac{d\beta_n(j\omega)}{d\omega}}=2\beta_n(j\omega)\frac{v_n^+(j\omega)X^{-1}(j\omega)v_n(j\omega)}{v_n^+(j\omega)\left[\frac{dB(j\omega)}{d\omega}-\beta_n^2(j\omega)\frac{dX^{-1}(j\omega)}{d\omega}\right]v_n(j\omega)} \tag{5.7}$$

Şimdi Eşitlik (5.3)'ü tekrar ele alalım. Eğer $\gamma_n^2(j\omega)$ bir iletilen moda karşı geliyorsa, Eşitlik (5.9) olduğunda Eşitlik (5.8) elde edilecektir (ve tersi).

$$v_n^+(j\omega)B(j\omega)v_n(j\omega) < 0 \tag{5.8}$$

$$v_n^+(j\omega)X^{-1}(j\omega)v_n(j\omega) < 0 \tag{5.9}$$

Diğer taraftan Y(p) ve $Z^{-1}(p)$ matrisleri rasyonel Foster matrisleri olduklarından, Foster reaktans teorisinden

$$\left[\frac{dB(j\omega)}{d\omega}\right] \text{ ve } \left[-\frac{dX^{-1}(j\omega)}{d\omega}\right]$$

pozitif kesin tanımlıdır [51]. Bu yüzden aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$v_n^+(j\omega)\left[\frac{dB(j\omega)}{d\omega} - \beta_n^2(j\omega)\frac{dX^{-1}(j\omega)}{d\omega}\right]v_n(j\omega) > 0 \tag{5.10}$$

Şimdi, kayıpsız ve jirotropik natural materyal yüklü kapalı dalga kılavuzlarında geriye doğru dalgaların varlığı için gerek ve yeter koşulların elde edilebilmesi için bir modun iletiminin frekans aralığını dikkate alarak Eşitlik (5.7)'de verilen grup hızı ifadesini şöyle yazabiliriz.

$$\begin{aligned} &2\left[\beta_n(j\omega)\frac{d\beta_n(j\omega)}{d\omega}\right]\cdot\left[v_n^+(j\omega)X^{-1}(j\omega)v_n(j\omega)\right] \\ &= v_n^+(j\omega)\left[\frac{dB(j\omega)}{d\omega} - \beta_n^2(j\omega)\frac{dX^{-1}(j\omega)}{d\omega}\right]v_n(j\omega) \end{aligned} \tag{5.11}$$

Bilindiği üzere bu yapıdaki dalga kılavuzları jω ekseninde belirli bölgelerde geriye doğru dalga modlarını destekler. Bu durum Eşitlik (5.11)'de sol taraftaki parantez içindeki ilk terimin işaretinin negatif hale gelmesini sağlar. Fakat Eşitlikler (5.8), (5.9) ve (5.10) ışığında şu sonuç ortaya çıkar ki o bu dalga kılavuzu yapılarında geriye doğru dalga modalarının varlığı için aşağıdaki koşulları ortaya çıkarır.

$$v_n^+(j\omega)X^{-1}(j\omega)v_n(j\omega)<0 \tag{5.12}$$

$$v_n^+(j\omega)B(j\omega)v_n(j\omega)<0 \tag{5.13}$$

Diğer taraftan eğer $\beta_n(j\omega)$, jω ekseninde bir aralık üzerinde sabit bir değer olduğu farz edilmez ise, Eşitlik (5.14) tüm aralık üzerinde sağlamaz.

$$\beta_n(j\omega)\frac{d\beta_n(j\omega)}{d\omega}=0 \tag{5.14}$$

Bu durumda Eşitlikler (5.12) ve (5.13) koşullarının sağladığı bölgede Eşitlik (5.15) doğru olacaktır.

$$\beta_n(j\omega)\frac{d\beta_n(j\omega)}{d\omega}<0 \tag{5.15}$$

Yani, n'inci modun faz sabitinin jω ekseninde bir aralık üzerinde sabit bir değer olduğu varsayılmadığında, geriye doğru dalga modu için bu modun gerek ve yeter koşulları kuadratik form P_n ve Q_n için aşağıda verilen eşitsizlikler bu frekans aralığı için sağlamalıdır.

$$P_n=v_n^+(j\omega)X^{-1}(j\omega)v_n(j\omega)<0 \tag{5.16}$$

$$Q_n=v_n^+(j\omega)B(j\omega)v_n(j\omega)<0 \tag{5.17}$$

Benzer adımlar takip edilerek geriye doğru dalga modlarının varlığı için gerek ve yeter koşullar kümesinin bir eşdeğerini modal akımlar için elde edebiliriz. Yani, geriye doğru dalga modlarının varlığı için gerek ve yeter koşullar aynı aralık üzerinde Eşitlikler (5.18) ve (5.19) şeklinde de ifade edilebilir.

$$\overline{P}_n=i_n^+(j\omega)B^{-1}(j\omega)i_n(j\omega)<0 \tag{5.18}$$

$$\overline{Q}_n=i_n^+(j\omega)X(j\omega)i_n(j\omega)<0 \tag{5.19}$$

Burada $i_n(j\omega)$, bilindiği üzere $Y(j\omega)Z(j\omega)$'nın n'inci özvektörüdür. [51] çalışmasında kayıpsız, jirotropik natural materyal yüklü kapalı dalga kılavuzlarında

geriye doğru dalgaların varlığı için elde edilen gerek ve yeter koşullar geçerliliği dielektrik çubuk yüklü kapalı silindirik dalga kılavuzu için geriye doğru dalgaların var olduğu bölgelerde sayısal örnek üzerinde de gösterilmiştir.

5.2. Kayıpsız, Jirotropik Metamateryal Yüklü Kapalı Dalga Kılavuzu Yapılarında Geriye Doğru Dalga Modları İçin Gerek ve Yeter Koşullar

Bu bölümde, [51] çalışmasında Yener tarafından elde edilen ve çalışmamızda Eşitlik (5.7)'de verilen grup hızı ifadesinde yararlanılarak metamateryal yüklü kapalı dalga kılavuzu yapılarında geriye doğru dalga modları için gerek ve yeter koşullar araştırılacaktır. Jirotropik metamateryal dolu kılavuz yapılarında geriye doğru dalga modları için gerek ve yeter koşulların elde edilmesi amacıyla n.inci mod için Eşitlik (5.7)'yi aşağıdaki gibi yazalım.

$$2\beta_n(j\omega)\frac{d\beta_n(j\omega)}{d\omega}=\frac{\underline{v}^{+}_{n}(j\omega)\left[\frac{dB(j\omega)}{d\omega}-\beta_n^2(j\omega)\frac{dX^{-1}(j\omega)}{d\omega}\right]\underline{v}_{n}(j\omega)}{\underline{v}^{+}_{n}(j\omega)X^{-1}(j\omega)\underline{v}_{n}(j\omega)} \tag{5.20}$$

Burada $\underline{v}$ Eşitlik (4.22) şeklinde tanımlıdır. Eşitlik (5.20)'de sağ taraftaki pay bir iletilen mod için

$$\underline{i}^{+}_{n}\frac{dZ(j\omega)}{dj\omega}\underline{i}_{n}+\underline{v}^{+}_{n}\frac{dY(j\omega)}{dj\omega}\underline{v}_{n}$$

ifadesine eşittir. Ayrıca $X(j\omega)$, $B(j\omega)$ ve $X^{-1}(j\omega)$ hermityendir [50] ve bu yüzden $\underline{v}^{+}_{n}X^{-1}\underline{v}_{n}$ ifadesi reeldir. Bölüm 4.3'te kılavuzun bir kesitinde zamana göre ortalama depolanmış elektromanyetik enerjinin Eşitlik (5.21) ile aynı işaretli olduğu sonucu elde edilmiştir.

$$\underline{v}^{+}\frac{dY}{d\omega}\underline{v}+\underline{i}^{+}\frac{dZ}{d\omega}\underline{i} \tag{5.21}$$

Bu ifadenin negatif veya pozitif olabileceği bu bölümde gösterilecektir. Bu yüzden jirotropik metamateryal dolu kapalı kılavuz içerisinde geriye doğru dalganın varlığı için veya Eşitlik (5.20)'nin her iki tarafının negatif olması için gerek ve yeter koşullar Eşitlik (5.21)'in niceliğinin işaretine bağlıdır. İletilen mod için bu niceliğin

işareti pozitif olduğunda geriye doğru dalga için yeter ve gerek koşul Eşitlik (5.22a) şeklinde olur.

$$\underline{v}_n^{+} X^{-1} \underline{v}_n < 0 \tag{5.22a}$$

Bu, Eşitlik (5.21b) ifadesini beraberinde getirir.(Bakınız Bölüm 5.1)

$$\underline{v}_n^{+} B \underline{v}_n < 0 \tag{5.21b}$$

İletilen mod için aynı niceliğin işareti negatif olduğunda geriye doğru dalga için yeter ve gerek koşul Eşitlik (5.22a) şeklinde olur.

$$\underline{v}_n^{+} X^{-1} \underline{v}_n > 0 \tag{5.22a}$$

Bu Eşitlik (5.22b) ifadesini beraberinde getirir.

$$\underline{v}_n^{+} B \underline{v}_n > 0 \tag{5.22b}$$

Geriye doğru dalgaların varlık koşulları olarak elde edilen ifadelerin sağladığı avantaj geriye doğru dalgaların varlık koşulları için özdeğer ve özvektörlerin türevleri ile uğraşmak yerine türev içermeyen kuadratik formlarını ve bilinen $dZ/dj\omega$ ve $dY/dj\omega$ şeklindeki katsayılar matrislerinin türev ifadeleri kullanmaktır.

5.3. Genel Hususlar

Bu bölümde pozitif reel matris durumunu bozan yani tipik olmayan kutba sahip yapılara karşı düşen yapılar incelenecektir. Kayıpsız veya kayıplı metamateryal yüklü kılavuzlar sınıfında çalıştığımızda, Y(p) matrisi rasyonel matris olmakla beraber pozitif reel olma özelliğini kaybedebilmektedir. Bu yüzden öncelikle pozitif reel matris olma koşulları ele alınacaktır. Varsayalım ki H(p), elemanları kompleks bir p değişkeninin fonksiyonu olan NxN boyutlu reel, rasyonel matristir [83].

Tanım: H(p) matrisi pozitif reel ise, (1) Re{p}>0 için, yani sağ açık yarı düzlemde H(p)'nin tüm elemanları analitiktir. (2) $H(p)+ H^{T}(p^{*})$ matrisi tüm Re{p}>0 için bir pozitif yarı-kesin tanımlı hermityen matristir.

Burada koşul (2) şuna eşdeğerdir; (1`) Eğer jω, H(p)'nin herhangi bir elemanının bir kutbu değil ise, o zaman $\forall\omega \in R^1$ için $H^T(-j\omega)+ H(j\omega)\geq 0$ dır. Burada, $R^1$ bir boyutlu reel Öklid uzayıdır. (2`) Eğer $j\omega_0$, H(p)'nin herhangi bir elemanının basit bir kutbu ise o basit bir kutuptur ve rezidü matris , ω_0'ın sonlu olması durumunda, $K_0 = \lim_{p\to j\omega_0} (p - j\omega_0)H(p)$ veya ω_0'ın sonsuz olması durumunda $K_\infty = \lim_{\omega\to\infty} H(j\omega)/j\omega$ ifadesi bir non-negatif tanımlı olan hermityen matristir.

Bu bölümde özel olarak negatif zamana göre ortalama depolanmış enerji aralığına neden olan, Y(p) matrisi içinde tipik olmayan kutba sahip yapılar ele alınacaktır. Görülecektir ki; böyle bir kutup ve neden olduğu böyle bir aralık bir geriye doğru dalga modu aralığına neden olur.

Yukarıda verilen pozitif reel matris tanımına göre tipik olmayan bu kutupların üç tür olabileceği gözlenmektedir. Bunlardan birincisi basit olmayan(=katlı) kutuptur. Bu tür kutbun varlığı halinde Foster reaktans teoreminin geçersiz olduğu koşullar ve bunlara bağlı olarak geriye doğru dalga koşulları 5.3.1 alt bölümünde ve buna ait örnek yapı 5.4.1 alt bölümünde ele alınmıştır.

İkinci tür tipik olmayan kutup non-negatif tanım özelliği bozulan bir rezidü matrisine sahip jω ekseni üzerindeki kutuptur. Bu tür kutbun varlığı halinde Foster reaktans teoreminin geçersiz olduğu koşullar ve bunlara bağlı olarak geriye doğru dalga koşulları 5.3.2 alt bölümünde ve buna ait örnek yapı 5.4.2 alt bölümünde ele alınmıştır.

Üçüncü tür tipik olmayan kutup sağ yarı düzlemdedir ve ortamın kararsız olmasına yol açar. Bu tür kutba ait örnek yapı 5.4.3 alt bölümünde ele alınmıştır. Bu bölüm, bölüm 5.4'deki ilk iki özel örnek için temelleri verir.

5.3.1. Dielektrik geçirgenlik matrisinde jω ekseninde basit olmayan kutup

Y(p) matrisi $\hat{\varepsilon}$ dielektrik geçirgenlik matrisinde $p = j\bar{\alpha}$'da bir basit olmayan kutup nedeniyle, basit olmayan kutba sahip olduğu zaman aşağıdaki gibi temsil edilebilir.

$$Y(p) = pC_{\infty} + p^{-1}C_0 + \frac{p}{2}\frac{\overline{C}}{(p - j\overline{\alpha})^q} \tag{5.26}$$

Burada, Ç$_{\infty}$, C_0 ve $\overline{C}$, NxN matrislerdir ve q>1 bir tam sayıdır. O zaman,

$$Y(j\omega) = j\omega C_{\infty} + \frac{1}{j\omega}C_0 + \frac{j\omega}{2}\frac{\overline{C}}{(j)^q(\omega - \overline{\alpha})^q} \tag{5.27}$$

Şimdi, B(jω)= Y(jω)/j hermityendir [50], ki o şu anlama gelir;

$$\underline{v}^{+}_{n}\frac{\omega\overline{C}}{2(j)^q(\omega - \overline{\alpha})^q}\underline{v}_{n}$$

n inci mod için reeldir. Y(jω) ifadesinin jω'ya göre türevini alalım.

$$\frac{dY(j\omega)}{dj\omega} = C_{\infty} - C_0(j\omega)^{-2} + \frac{2\overline{C}(j)^q(\omega - \overline{\alpha})^q - 2j\omega\overline{C}q(j)^q(\omega - \overline{\alpha})^{q-1}}{\left[(j)^q(\omega - \overline{\alpha})^q\right]^2}$$

İfadeyi düzenlersek,

$$\frac{dY(j\omega)}{dj\omega} = C_{\infty} + \frac{C_0}{\omega^2} + \frac{\overline{C}\left[2(j)^q(\omega - \overline{\alpha})^q\right]\left[1 - j\omega q(j\omega - j\overline{\alpha})^{-1}\right]}{\left[(j)^q(\omega - \overline{\alpha})^q\right]^2}$$

elde edilir. İfadeyi tekrar düzenlersek, Y(jω)'nın jω'ya göre türevini için Eşitlik (5.28)'te verilen ifade elde edilir.

$$\frac{dY(j\omega)}{dj\omega} = C_{\infty} + \frac{C_0}{\omega^2} + \frac{\overline{C}}{2(j)^q}\frac{\left[(1-q)\omega - \overline{\alpha}\right]}{(\omega - \overline{\alpha})^{q+1}} \tag{5.28}$$

Eşitlik (5.28) için, $\omega = \overline{\alpha}$ yakın komşuluğunda

$$\underline{v}^{+}_{n}\frac{\overline{C}}{2(j)^q}\frac{\left[(1-q)\omega - \overline{\alpha}\right]}{(\omega - \overline{\alpha})^{q+1}}\underline{v}_{n}$$

terimi $\underline{i}^{+}_{n}\frac{dZ}{dj\omega}\underline{i}_{n} + \underline{v}^{+}_{n}\frac{dY}{dj\omega}\underline{v}_{n}$ ifadesini domine edecektir, ve bu yaklaşık olarak aşağıdaki ifadeye eşit olacaktır.

$$\underline{v}^{+}_{n}\frac{\overline{C}}{2(j)^{q}}\frac{[-q\omega]}{(\omega-\overline{\alpha})^{q+1}}\underline{v}_{n}$$

Reel form $\underline{v}^{+}_{n}\overline{C}/2(j)^{q}\underline{v}_{n}$, $p=j\omega=j\overline{\alpha}$'de pozitif veya negatif olduğundaki durumlar aşağıda işlenmiştir. Biz, $\underline{v}^{+}_{n}\overline{C}/2(j)^{q}\underline{v}_{n}=0$ ekstrem durumunu hariç bıraktık ve incelemedik. O zaman $\omega=\overline{\alpha}$ yakın komşuluğunda iki mümkün olasılık aşağıda durum A ve B olarak listelenmiştir.

Durum A, Eğer $\underline{v}^{+}_{n}\frac{\overline{C}}{2(j)^{q}}\underline{v}_{n}>0$ ise,

$\omega=\overline{\alpha}+\delta\left(0<\delta\ll\overline{\alpha}\right)$ için durum A.1:

$$\underline{i}^{+}_{n}\frac{dZ}{dj\omega}\underline{i}_{n}+\underline{v}^{+}_{n}\frac{dY}{dj\omega}\underline{v}_{n}\cong\underline{v}^{+}_{n}\frac{\overline{C}}{2(j)^{q}}\frac{[-q\omega]}{(\omega-\overline{\alpha})^{q+1}}\underline{v}_{n}<0,$$

q tek veya çift için elde edilecektir.(Foster reaktans teoreminin sağlamaması)

$\omega=\overline{\alpha}-\delta\left(0<\delta<<\overline{\alpha}\right)$ için durum A.2:

$$\underline{i}^{+}_{n}\frac{dZ}{dj\omega}\underline{i}_{n}+\underline{v}^{+}_{n}\frac{dY}{dj\omega}\underline{v}_{n}\cong\underline{v}^{+}_{n}\frac{\overline{C}}{2(j)^{q}}\frac{[-q\omega]}{(\omega-\overline{\alpha})^{q+1}}\underline{v}_{n}\begin{cases}<0 & q\,\text{tek}\\ >0 & q\,\text{çift}\end{cases},$$

elde edilecektir.(Foster reaktans teoreminin q tek için sağlamaması)

A.1 koşulu altında (5.27)'nin yardımıyla,

$$\underline{v}^{+}_{n}B\underline{v}_{n}\cong\underline{v}^{+}_{n}\omega\frac{\overline{C}}{2(j)^{q}}\frac{1}{(\omega-\overline{\alpha})^{q}}\underline{v}_{n}>0,$$

q tek veya çift için doğrudur, eğer q tek veya çift ve mod iletilen ise bir geriye doğru dalga $\underline{v}^{+}_{n}B\underline{v}_{n}>0$'den dolay var olur.

A.2 koşulu altında geriye doğru dalga var olmaz. Çünkü (5.27)'den dolayı

$$\underline{v}^{+}_{n}B\underline{v}_{n}\cong\underline{v}^{+}_{n}\omega\frac{\overline{C}}{2(j)^{q}}\frac{[-q\omega]}{(\omega-\overline{\alpha})^{q}}\underline{v}_{n}\begin{cases}<0 & q\,\text{tek}\\ >0 & q\,\text{çift}\end{cases},$$

elde edilir ve q tek ve q çift için Eşitlik (5.20)'de sağ taraf pozitif olur.

Durum B, eğer $\underline{v}^{+}_{n}\dfrac{\overline{C}}{2(j)^{q}}\underline{v}_{n}<0$ şeklinde ise,

$\omega=\overline{\alpha}+\delta\left(0<\delta<<\overline{\alpha}\right)$ için koşul B.1:

$$\underline{i}^{+}_{n}\frac{dZ}{dj\omega}\underline{i}_{n}+\underline{v}^{+}_{n}\frac{dY}{dj\omega}\underline{v}_{n}\cong\underline{v}^{+}_{n}\frac{\overline{C}}{2(j)^{q}}\frac{[-q\omega]}{(\omega-\overline{\alpha})^{q+1}}\underline{v}_{n}>0,$$

q tek veya çift için elde edilir. $\omega=\overline{\alpha}-\delta\left(0<\delta<<\overline{\alpha}\right)$ için koşul B.2:

$$\underline{i}^{+}_{n}\frac{dZ}{dj\omega}\underline{i}_{n}+\underline{v}^{+}_{n}\frac{dY}{dj\omega}\underline{v}_{n}\cong\underline{v}^{+}_{n}\frac{\overline{C}}{2(j)^{q}}\frac{[-q\omega]}{(\omega-\overline{\alpha})^{q+1}}\underline{v}_{n}\begin{cases}>0 & q\,\text{tek}\\ <0 & q\,\text{çift}\end{cases},$$

elde edilir (q çift için Foster reaktans teoremi sağlamaması).

Koşul B.1 altında, (5.27) yardımıyla,

$$\underline{v}^{+}_{n}B\underline{v}_{n}\cong\underline{v}^{+}_{n}\omega\frac{\overline{C}}{2(j)^{q}}\frac{1}{(\omega-\overline{\alpha})^{q}}\underline{v}_{n}<0,\ q$$

tek veya çift için doğrudur. Eğer mod iletilen (q tek ve çift) ise, geriye doğru dalga $\underline{v}^{+}_{n}B\underline{v}_{n}<0$ 'den dolayı var olacaktır.

B.2 koşulu altında, geriye doğru dalga var olmaz. Çünkü Eşitlik (5.27)'den dolayı

$\underline{v}^{+}_{n}B\underline{v}_{n}\cong\underline{v}^{+}_{n}\omega\dfrac{\overline{C}}{2(j)^{q}}\dfrac{1}{(\omega-\overline{\alpha})^{q}}\underline{v}_{n}\begin{cases}>0 & q\,\text{tek}\\ <0 & q\,\text{çift}\end{cases}$, elde edilir.

ve q tek ve q çift için Eşitlik (5.20)'de sağ taraf pozitif olur

Durum B gösterir ki; q tek olduğunda bir geriye doğru dalga bölgesi negatif zamana göre ortalama depolanmış enerji frekans aralığı olmaksızın var olabilir. Yani bu çalışmanın bir sonucu olan "bir negatif enerji aralığı, bir geriye doğru dalga aralığını belirtir", önermesinin tersi doğru değildir. A ve B koşulları altında her zaman bir negatif zamana göre ortalama depolanmış enerji aralığı var olursa (ki bu; Foster reaktans teoremini sağlamaması nedeniyle bir tipik olmayan kutbun varlığını

gösterir; Y(p) artık pozitif reel değildir), eğer mod bu aralıkta iletiliyorsa, tipik olmayan kutupta başlayan bir geriye doğru dalga modu frekans aralığı gözlenir.

5.3.2. jω ekseninde bir kutupta rezidü matrisinin non-negatif tanım özelliğinin bozulması

Y(p) matrisi, $p = j\omega_0$'da negatif olmayan rezidü matrisine sahip olmayan bir kutba sahip olduğunda şöyle temsil edilebilir [50].

$$Y(p) = pC_\infty + p^{-1}C_0 + \frac{p}{2}\frac{\overline{C}}{p^2 + \omega_0^2} \tag{5.29}$$

Burada, $\overline{C}$, non-negatif tanımlı olmamak üzere C_∞, C_0 ve $\overline{C}$ NxN matrislerdir. Bu kutupun hemen civarında mod n için

$$\underline{v}^+_n \frac{dY(j\omega)}{dj\omega}\underline{v}_n \cong \underline{v}^+_n \frac{\overline{C}}{2}\frac{\omega^2 + \omega_0^2}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2}\underline{v}_n$$

terimi $\underline{i}^+_n \frac{dZ}{dj\omega}\underline{i}_n + \underline{v}^+_n \frac{dY}{dj\omega}\underline{v}_n$ ifadesini domine eder.

Şimdi $B(j\omega) = Y(j\omega)/j$ hermityendir [50], bunun anlamı; mod n için

$$\underline{v}^+_n \frac{\omega\overline{C}}{2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}\underline{v}_n$$

veya $\underline{v}^+_n\overline{C}\underline{v}_n$ 'nın reel olmasıdır. $\underline{v}^+_n\overline{C}\underline{v}_n$, $p = j\omega_0$'da pozitif veya negatif olduğundaki koşullar aşağıda işlenmiştir. Biz $\underline{v}^+_n\overline{C}\underline{v}_n = 0$ ekstrem durumunu hariç tuttuk ve işlemedik. O zaman $\omega = \omega_0$ yakın komşuluğunda iki olası durum A ve B olarak aşağıda listelenmiştir.

Durum A, eğer $\underline{v}^+_n\overline{C}\underline{v}_n > 0$ şeklinde ise, ω_0'ın her iki tarafında

$$\underline{i}^+_n \frac{dZ}{dj\omega}\underline{i}_n + \underline{v}^+_n \frac{dY}{dj\omega}\underline{v}_n \cong \underline{v}^+_n \frac{dY}{dj\omega}\underline{v}_n > 0$$

olur ve (5.29)'e bakarak $\omega > \omega_0$ için bir geriye doğru dalga gösteren

$$\underline{v}^{+}_{n} B \underline{v}_{n} \cong \underline{v}^{+}_{n} \frac{\omega}{2} \frac{\overline{C}}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} \underline{v}_{n} < 0$$

ifadesi elde edilir.

Durum B, eğer $\underline{v}^{+}_{n} \overline{C} \underline{v}_{n} < 0$ şeklinde ise, o zaman ω_0'ın her iki tarafında (Foster reaktans teoremi sağlamaması)

$$\underline{i}^{+}_{n} \frac{dZ}{dj\omega} \underline{i}_{n} + \underline{v}^{+}_{n} \frac{dY}{dj\omega} \underline{v}_{n} \cong \underline{v}^{+}_{n} \frac{dY}{dj\omega} \underline{v}_{n} < 0$$

ifadesi elde edilir, ve (5.29)'e bakarak $\omega > \omega_0$ için geriye doğru dalgayı işaret eden

$$\underline{v}^{+}_{n} B \underline{v}_{n} \cong \underline{v}^{+}_{n} \frac{\omega}{2} \frac{\overline{C}}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} \underline{v}_{n} > 0$$

ifadesi elde edilir.

Durum A gösterir ki; bir geriye doğru dalga bölgesi negatif zamana göre ortalama depolanmış enerji aralığı olmaksızın var olabilir. Yani; "bir negatif enerji aralığı, bir geriye doğru dalga aralığını belirtir" önermesinin tersi doğru değildir. Durum B gösterir ki; her zaman bir negatif zamana göre ortalama depolanmış enerji aralığı var olursa (ki Foster reaktans teoremini sağlamaması nedeniyle bir tipik olmayan kutbun varlığını gösterir; Y(p)'nin pozitif reel özelliği artık var olamaz), eğer mod bu aralıkta iletiliyorsa, tipik olmayan kutupta başlayan bir geriye doğru dalga modu frekans aralığı gözlenir.

5.4. Tipik Olmayan Kutba Sahip Dalga Kılavuzu Yapıları Örnekleri

Bu bölümde, metametaryal dielektrik geçirgenlik matrisine odaklanacağız, bununla birlikte aynı benzer işlemler metametaryal manyetik geçirgenlik matrislerine de uygulanabilir. Yine bu bölümde, metametaryal yüklü üç tür üniform dalga kılavuzu yapısını ele alacağız. Bölüm 5.3'te de belirtildiği gibi kayıpsız veya kayıplı metamateryal yüklü kılavuzlar sınıfında çalıştığımızda, Y(p) matrisi rasyonel matris olmakla beraber pozitif reel olma özelliğini kaybedebilmektedir. Bölüm 5.3'te

verilen pozitif reel matris olma koşulları dikkate alındığında, bu bölümde ele alınan metametaryal yüklü üniform dalga kılavuzu yapıları MoM'dan elde edilen Y(p) matrislerinin pozitif reel matris koşullarından birini ihlal etmektedir. Ele alınan dalga kılavuzu yapıları π birim kenarlı kare (π=a=b) kesite sahiptir. Birinci yapı için dolgu ortamı tek eksenli anizotropiktir. Daha sonra ele alınan yapılar izotropik ortam yüklüdür. Örnek olarak ele alınan bu iki yapı için ise geçirgenlik ifadesi 3x3 birim matrisle çarpılarak elde edilen dielektrik geçirgenlik matrisi kullanılarak aynı matris yapısı elde edilmiştir. Bu yolla, MoM içinde Eşitlik (2.35)'te verilen cebirsel eşitlikler sisteminin Z(p) ve Y(p) matrislerini elde edilmektedir. Bu yapılar çift eksenel ortam yüklü kılavuzların özel durumlarıdır ve bu kılavuzlar için MoM, 2x2 Z(p) ve Y(p) matris çiftleri bloklarının analizine indirgenir. Bu matris çiftlerinin her biri dalga kılavuzunun bir gerçek moduna karşı düşer [50]. Manyetik geçirgenlik boşluk ortamın manyetik geçirgenliği (μ_0) olarak alınmaktadır ve dielektrik geçirgenlik aşağıdaki gibi $\hat{\varepsilon}$ olarak alınmaktadır.

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Öyleyse Z(p) ve Y(p) matrisleri Eşitlik (5.30)'da ki gibi elde edilecektir [50].

$$Z(p) = \begin{bmatrix} p\mu_0 + \dfrac{2}{p\varepsilon_z} & 0 \\ 0 & p\mu_0 \end{bmatrix}, \qquad Y(p) = \begin{bmatrix} \dfrac{p}{2}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right) & \dfrac{p}{2}\left(\varepsilon_y - \varepsilon_x\right) \\ \dfrac{p}{2}\left(\varepsilon_y - \varepsilon_x\right) & \dfrac{p}{2}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right) + \dfrac{2}{p\mu_0} \end{bmatrix} \tag{5.30}$$

5.4.1. Tek eksenel soğuk sürüklenen plazma ile yüklü dalga kılavuzu

Bölüm 5.3.1'de verilen durum için, aşağıdaki dielektrik geçirgenlik matrisine sahip tek eksenel soğuk sürüklenen plazma ile yüklü dalga kılavuzunu alalım.

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \dfrac{\omega_p^2}{\left(p - jp_y v_0\right)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Burada, $p_y = n\pi/b, (n = 0,1,2...)$, y yönündeki dalga sayısıdır, b kare klıavuzun enine boyutudur, ω_p plazma frekansıdır, p kompleks frekanstır, v_0 plazma ortalama sürüklenme hızıdır ve ε_0 boşluk ortam için dielektrik geçirgenliktir [84]. x yönündeki dalga sayısı $p_x = m\pi/a, (m = 0,1,2...)$ (a=b),1'e (m=1) eşit ve p_y=1 olduğunda jω ekseni üzerinde

$$Z(j\omega) = \begin{bmatrix} j\omega\mu_0 + \dfrac{2}{j\omega\varepsilon_0} & 0 \\ 0 & j\omega\mu_0 \end{bmatrix}$$

$$Y(j\omega) = \begin{bmatrix} \dfrac{j\omega}{2}\left(2 - \dfrac{\omega_p^2}{(\omega - p_y v_0)^2}\right) & -\dfrac{j\omega}{2}\left(\dfrac{\omega_p^2}{(\omega - p_y v_0)^2}\right) \\ -\dfrac{j\omega}{2}\left(\dfrac{\omega_p^2}{(\omega - p_y v_0)^2}\right) & \dfrac{j\omega}{2}\left(2 - \dfrac{\omega_p^2}{(\omega - p_y v_0)^2}\right) + \dfrac{2}{j\omega\varepsilon_0\mu_0} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Dielektrik geçirgenlik matrisi formundan dolayı Y(p) jω ekseninde basit olmayan kutba sahiptir. Yani pozitif reel değildir.

Eğer $\bar{\alpha} = p_y v_0$, ve eğer $\beta = \mathrm{Im}\{\gamma\}$ ise, MoM yaklaşımı kullanılarak; $-\gamma \underline{v} = -Z\underline{i}$ ve $-\gamma \underline{i} = -Y\underline{v}$ 'den dolayı $Z(j\omega)Y(j\omega)$'nın özdeğerinin kare kökünden

$$\beta(\omega) = \sqrt{\left[\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - 1\right]\left[1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - \bar{\alpha})^2}\right]} - 1 \qquad (5.31)$$

sonucu çıkar. (5.31) aynı zamanda [84]'de verilen kesin analizden de çıkar.

Z(jω) ve Y(jω)'nin jω'ya göre türetirsek aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\frac{dZ(j\omega)}{dj\omega} = \mu_0 \begin{bmatrix} 1 + \dfrac{2c^2}{\omega^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (5.32)$$

$$\frac{dY(j\omega)}{dj\omega} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \begin{bmatrix} 2+\dfrac{(\omega+\bar{\alpha})\omega_p^2}{(\omega-\bar{\alpha})^3} & \dfrac{(\omega+\bar{\alpha})\omega_p^2}{(\omega-\bar{\alpha})^3} \\ \dfrac{(\omega+\bar{\alpha})\omega_p^2}{(\omega-\bar{\alpha})^3} & 2+\dfrac{(\omega+\bar{\alpha})\omega_p^2}{(\omega-\bar{\alpha})^3}+\dfrac{4c^2}{\omega^2} \end{bmatrix} \tag{5.33}$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2+\dfrac{4c^2}{\omega^2} \end{bmatrix} + \frac{(\omega+\bar{\alpha})\omega_p^2}{(\omega-\bar{\alpha})^3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\dfrac{dZ(j\omega)}{dj\omega}$ ve (5.33)'in en sağındaki parantezlerin içindeki ilk matris pozitif tanımlıdır. Bu yüzden

$$W_m + W_e = \frac{1}{4}(z_2 - z_1)\left[v^+ \frac{dY}{dj\omega} v + i^+ \frac{dZ}{dj\omega} i \right]$$

nedeniyle, W_m+W_e'nin işareti sadece

$$\underline{v}_n^+ \frac{(\omega+\bar{\alpha})\omega_p^2}{(\omega-\bar{\alpha})^3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{v}_n$$

ifadesi negatif ise negatiftir. (5.33)'nin en sağındaki parantezlerin içinde ikinci matris non-negatif tanımlı olduğundan, $(\omega-\bar{\alpha})^3$'nin negatif olduğu $\bar{\alpha}$ tarafında, $\bar{\alpha}$'nin yakın ω komşuluğunda, yani $\omega < \bar{\alpha}$ olduğunda, $(\omega+\bar{\alpha})/(\omega-\bar{\alpha})^3$ ifadesi sınırsız olarak negatif olacaktır. Böylece Eşitlik (5.33) non-pozitif olacaktır. Gösterilebilir ki; $Z(j\omega)Y(j\omega)$'nin özvektörü olan bir $\underline{v}$ vektörü için

$$\underline{v}_n^+ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{v}_n$$

ifadesi $\bar{\alpha}$'nin yakın ω komşuluğunda asla sıfır olmaz, ve alt bölüm 5.3.1'deki durum B geçerlidir. Bu yüzden bölüm 5.3.1'de not edilen ekstrem durum olasılığı imkansızdır. Bu yüzden bu komşulukta, W_m+W_e , $(\omega-\bar{\alpha})^3$'ün negatif olduğu $\bar{\alpha}$ tarafında, yani $\omega < \bar{\alpha}$ olduğunda, daima negatiftir.

$\omega > \bar{\alpha}$ için W_m+W_e pozitif tanımlıdır. Şimdi $\bar{\alpha}$'nin hemen üzerinde $\omega = \bar{\alpha} + \delta$ frekansını düşüneceğiz. (5.31)'den,

$$\frac{d\beta^2(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left\{2\frac{\omega}{c^2}\varepsilon_{yy} + \left[\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - 1\right]\frac{d\varepsilon_{yy}}{d\omega}\right\}$$

geçerli olduğu için,

$$\left.\frac{d\beta^2}{d\omega}\right|_{\omega=\bar{\alpha}+\delta} = 2\frac{\bar{\alpha}+\delta}{c^2}\left[1 - \frac{\omega_p^2}{(\bar{\alpha}+\delta-\bar{\alpha})^2}\right] + \left[\left(\frac{\bar{\alpha}+\delta}{c}\right)^2 - 1\right]\left[\frac{2\omega_p^2}{(\bar{\alpha}+\delta-\bar{\alpha})^3}\right] \tag{5.34}$$

elde edilir. Yukarıda sağdaki ilk terim negatiftir. Eşitlik (5.34)'de ikinci terim de negatiftir, çünkü $(\bar{\alpha}+\delta/c)^2 < 1$'dir, aksi halde (5.31)'daki β sanal olur, böyle bir durum geriye doğru dalga bakımından ilgilendiğimiz bir durumdur. Bunun anlamı şudur; $d\beta^2/d\omega \,|_{\omega=\bar{\alpha}+\delta} < 0$ dur ve bu bir geriye doğru dalga belirtir.

Başka bir ifadeyle, Y(p)'nin zamana göre ortalaması alınmış depolanmış enerjinin negatif olduğu frekans aralığı içinde konumlanmış $p = j\bar{\alpha}$ tipik olmayan kutbunda başlayan (bu durumda, kutup zamana göre ortalaması alınmış depolanmış negatif enerji aralığının uç noktasıdır), bir geriye doğru dalga frekans aralığı var olur.

Dahası, jω ekseninde kutbun $(p = j\bar{\alpha})$ yakın civarında dielektrik geçirgenlik fonksiyonu

$$1 + \frac{\omega_p^2}{(p - jp_y v_0)^2}$$

ifadesi ortamın metametaryal doğasını gösteren şekilde negatiftir.

5.4.2. İzotropik, kayıpsız metametaryal yüklü kare dalga kılavuzu

İkinci durum olarak, izotropik kayıpsız metametaryal yüklü kare kılavuzu ele alalım. Önceki bölümdeki formülasyona bağlı kalmak için dolgu ortamı bir dielektrik geçirgenlik matrisi ile temsil edeceğiz.

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} 1 \pm \dfrac{\omega_p^2}{\left(p^2 + \omega_0^2 + 2p\Gamma\right)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 \pm \dfrac{\omega_p^2}{\left(p^2 + \omega_0^2 + 2p\Gamma\right)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \pm \dfrac{\omega_p^2}{\left(p^2 + \omega_0^2 + 2p\Gamma\right)} \end{bmatrix}$$

Manyetik geçirgenlik boşluk ortamın manyetik geçirgenliğine sahiptir. Burada ±'yi eksi işaret olarak alacağız çünkü elektrik geçirgenliğin bu tipi bir aktif metamateryale karşı düşer [85]. Genelliği kaybetmeden, yine p_x=p_y=1 alacağız. Bir kayıpsız (non-dissipative) ortam için Γ=0 belirleyelim ve aynı zamanda $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_p^2}$ olarak belirleyelim. Öyleyse, jω ekseninde,

$$Z(j\omega) = \begin{bmatrix} j\omega\mu_0 + \dfrac{2}{j\omega\varepsilon_0}\dfrac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2 - \omega_1^2} & 0 \\ 0 & j\omega\mu_0 \end{bmatrix}$$

$$Y(j\omega) = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} j\omega\dfrac{\omega^2 - \omega_1^2}{\omega^2 - \omega_0^2} & 0 \\ 0 & j\omega\dfrac{\omega^2 - \omega_1^2}{\omega^2 - \omega_0^2} + \dfrac{2}{j\omega\varepsilon_0\mu_0} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Geçirgenlik matrisinin şeklinden dolayı Y(p), $p = j\omega_0$'da bir non-pozitif rezidü matrisine sahiptir, çünkü

$$\lim_{p \to j\omega_0} \left(p - j\omega_0\right)\varepsilon_0 p\left[1 + \frac{p^2 + \omega_1^2}{\left(p - j\omega\right)\left(p + j\omega\right)}\right] = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\omega_1^2 - \omega_0^2\right)$$

ve $\omega_1 < \omega_0$ dır. Bu yüzden Y(p) pozitif reel değildir.

$-\gamma \underline{v} = -Z\underline{i}$ ve $-\gamma \underline{i} = -Y\underline{v}$ 'den dolayı $Z(j\omega)Y(j\omega)$'nın özdeğerinin kare kökünden Eşitlik (5.35) ifadesi çıkarılır.

$$\beta(\omega)=\sqrt{\left[\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-1\right]\left[\frac{\omega^2-\omega_1^2}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)}\right]-2} \tag{5.35}$$

Z(jω) ve Y(jω)'yi jω'ya göre türetirsek aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\frac{dZ(j\omega)}{dj\omega}=\begin{bmatrix}\mu_0-\dfrac{2}{(j\omega)^2\varepsilon_0}\dfrac{\omega^2-\omega_0^2}{\omega^2-\omega_1^2}+\dfrac{4}{\varepsilon_0}\dfrac{\omega_1^2-\omega_0^2}{\left(\omega^2-\omega_1^2\right)^2} & 0\\ 0 & \mu_0\end{bmatrix}$$

$$\frac{dY(j\omega)}{dj\omega}=\varepsilon_0\begin{bmatrix}\dfrac{\omega^2-\omega_1^2}{\omega^2-\omega_0^2}-2\omega^2\dfrac{\omega_0^2-\omega_1^2}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2} & 0\\ 0 & \dfrac{\omega^2-\omega_1^2}{\omega^2-\omega_0^2}-2\omega^2\dfrac{\omega_0^2-\omega_1^2}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2}-\dfrac{2}{(j\omega)^2\varepsilon_0\mu_0}\end{bmatrix}$$

ω_0'ın ω yakın komşuluğunda,

$$\underline{i}_n^+\frac{dZ}{dj\omega}\underline{i}_n+\underline{v}_n^+\frac{dY}{dj\omega}\underline{v}_n$$

İfadesinde ki baskın terim payda daki $\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2$ teriminden dolayı olacaktır. Özetle,

$$\varepsilon_0\underline{v}^+\begin{bmatrix}-2\omega^2\dfrac{\omega_0^2-\omega_1^2}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2} & 0\\ 0 & -2\omega^2\dfrac{\omega_0^2-\omega_1^2}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2}\end{bmatrix}\underline{v} \tag{5.36}$$

negatif tanımlıdır, çünkü $\omega_1<\omega_0$ dır. Bunu anlamı W_m+W_e'nin ω_0'ın ω yakın komşuluğunda daima negatif olmasıdır.

Eşitlik (5.36) içindeki ifade kesinlikle negatif tanımlıdır ve $\underline{v}$, $Z(j\omega)Y(j\omega)$'nin bir özvektörüdür ve sıfır olmaz. Diğer bir deyişle, bölüm 5.3.2'nin B durumu geçerlidir ve yine bölüm 5.3.2'de belirtilen ekstrem durum olasılığı mümkün değildir.

Diğer taraftan, Eşitlik (5.35) nedeniyle β^2 'nın ω'ya göre türevi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{d\beta^2}{d\omega} = \frac{2\omega}{c^2}\left(\frac{\omega^2-\omega_1^2}{\omega^2-\omega_0^2}\right) + \frac{\omega^2}{c^2}\frac{2\omega\left(\omega_1^2-\omega_0^2\right)}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2}$$

Öyleyse, $\omega = \omega_0 \pm \delta$'da,

$$\left.\frac{d\beta^2}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_0\pm\delta} = \frac{2(\omega_0\pm\delta)}{c^2}\left[\frac{(\omega_0\pm\delta)^2-\omega_1^2}{(\omega_0\pm\delta)^2-\omega_0^2}\right] + \frac{(\omega_0\pm\delta)^2}{c^2}\frac{2(\omega_0\pm\delta)\left(\omega_1^2-\omega_0^2\right)}{\left[(\omega_0\pm\delta)^2-\omega_0^2\right]^2} \qquad (5.37)$$

ω_0 'ın yakın komşuluğunda (çok küçük $\pm\delta$ için), Eşitlik (5.37)'teki baskın terim olan ikinci terim negatiftir. Öyle ki, ω_0 'ın her iki tarafında geriye doğru dalgaya sahip olduğumuz düşünülebilir.

Diğer taraftan Eşitlik (5.35)'dan dolayı, bu komşulukta geriye doğru dalgayı test etmek için $j\omega$ ekseninde $j\omega_0$'ın daha yukarı tarafında kalmak zorundayız. Aksi halde β saf sanal olur.

Dahası $p=j\omega_0$'nın hemen komşuluğunda, $j\omega$ ekseninde kutbun ($p=j\omega_0$) daha aşağı tarafında dielektrik geçirgenlik fonksiyonu $1-\omega_p^2/\left(p^2+\omega_0^2\right)$, negatiftir ki bu; ortamın metametaryel doğasını işaret eder.

Diğer bir deyişle negatif zamana göre ortalama depolanmış enerji aralığı içinde konumlanmış Y(p)'nin $p=j\omega_0$ tipik olamayan kutbunda başlayan bir geriye doğru dalga frekans aralığı var olur.

5.4.3. Negatif sönüm katsayısına sahip metamateryal ile yüklü dalga kılavuzu

Üçüncü örnek olarak ikinci örnekteki dielektrik geçirgenlik matrisine sahip, ancak sönüm katsayısı sıfır değil, negatif olan ($\Gamma < 0$) ve manyetik geçirgenliği boşluk ortamın manyetik geçirgenliğine eşit bir malzeme ile yüklü kare kılavuzu ele alalım. Ayrıca ikinci örnekteki $\hat{\varepsilon}$ matrisinde işaretini bu kez + alalım:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1+\dfrac{\omega_p^2}{p^2+\omega_0^2+2p\Gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 1+\dfrac{\omega_p^2}{p^2+\omega_0^2+2p\Gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 1+\dfrac{\omega_p^2}{p^2+\omega_0^2+2p\Gamma} \end{bmatrix}$$

$p_x = p_y = 1$, alındığında ve $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}$ tanımı yapıldığında

$$Z(p) = \begin{bmatrix} p\mu_0 + \dfrac{2}{p\varepsilon_0}\left(\dfrac{p^2+\omega_0^2+2p\Gamma}{p^2+\omega_1^2+2p\Gamma}\right) & 0 \\ 0 & p\mu_0 \end{bmatrix},$$

$$Y(p) = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} p\left(1+\dfrac{\omega_p^2}{p^2+\omega_0^2+2p\Gamma}\right) & 0 \\ 0 & p\left(1+\dfrac{\omega_p^2}{p^2+\omega_0^2+2p\Gamma}\right)+\dfrac{2}{p\mu_0\varepsilon_0} \end{bmatrix}$$

yazılabilir. Öte yandan Lorentz atom modelinde uygulanan bir elektrik alanına bir elektronun cevabı klasik harmonik bir osilatörün davranışı gibi düşünülür. Elektronun denge konumundan uzaklığı

$$\ddot{X} + 2\Gamma\dot{X} + \omega_0^2 X = -\frac{q}{m}E(t)$$

olarak verilir. Burada q elektron yükü, m kütlesi, $E(t)$ elektrik alanı, ve Γ ve ω_0 sönüm katsayısı ve doğal frekanstır. Bu denkleme ilişkin karakteristik polinom $p^2 + 2\Gamma p + \omega_0^2$ olup kökleri

$p = -\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2}$ dir. Yani diferansiyel denkleme ilişkin transfer fonksiyonu, diğer bir deyişle impuls cevabının Laplace dönüşümü

$$\tilde{H}(p) = \frac{1}{p^2 + 2\Gamma p + \omega_0^2}$$

olarak verilir. Bu ise kompleks düzlemde iki kutba sahiptir. Aynı zamanda $\tilde{H}(p)$ bir zaman bölgesi fonksiyonu $H(t)$ nin Laplace dönüşümüdür ve $H(t)$ ise

$$\chi(t) = \omega_p^2 H(t)$$

bağıntısı ile elektrik suseptibilite fonksiyonu $\tilde{\chi}(s)$ nin zaman bölgesindeki ifadesini verir. Burada $\omega_p^2 = \frac{q^2 N}{m\varepsilon_0}$ olup, N elektronların yoğunluğudur.

Kompleks düzlemin sağ yarı düzleminde kutuplarla karakterize edilen dalga şekilleri zaman ile üstel olarak büyürler. Dolayısı ile sağ yarı düzlemde kutba sahip bir sistemin impuls cevabı sonsuza doğru belirsiz olarak artacaktır. Bu ise kararsız bir sisteme işaret eder. Bir sistemin kararlı olması için tüm kutupları sol yarı düzlemde olmalıdır [86]. Yani $\tilde{\chi}(s)$ ve dolayısı ile $\varepsilon(s) = \varepsilon_0[1 + \chi(s)]$ sağ yarı düzlemde kutba sahip olursa veya bu bölümde varsaymış olduğumuz gibi $\Gamma < 0$ olursa, $Y(p)$ pozitif reel bir matris olmaktan çıkacak ve üstelik kararlı olmayan bir problemle karşılaşılacaktır. $\Gamma < 0$ koşulu geçerli olduğunda $\hat{\varepsilon}$ matrisinin sağ yarı düzlemde kutba sahip olduğunu gördüğümüz bu bölümde dielektrik geçirgenlik ifadesi $j\omega$ ekseni üzerinde

$$\varepsilon = \frac{-\omega^2 + \omega_1^2 + j2\omega\Gamma}{-\omega^2 + \omega_0^2 + j2\omega\Gamma}$$

ile verilecek ve bu ifadenin reel kısmı

$$\mathrm{Re}\{\varepsilon\} = \left(\frac{\omega^4 - \omega^2(\omega_1^2 + \omega_0^2 - 4\Gamma^2) + \omega_0^2\omega_1^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega^2\Gamma^2}\right)$$

Olacaktır. Bu ifadenin payını sıfır yapan iki ω^2 değeri arasında $\mathrm{Re}\{\varepsilon\} < 0$ olacak ve bir meta-materyal etkisi gözlenecektir.

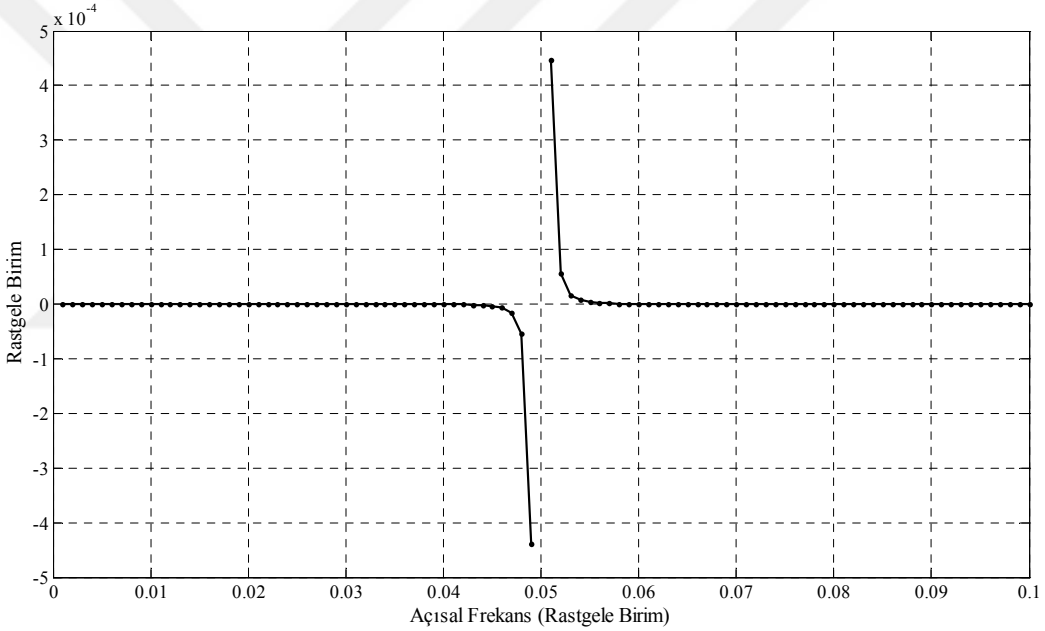
Bu bölümü sonlandırırken unutulmamalıdır ki $\Gamma < 0$ koşulu kararsız bir yapı anlamına gelmesine rağmen sadece kararsız bir ortamda soğurma değil kuvvetlenme olabileceği açıktır [87].

5.4.4. Sayısal örnek

Bölüm 5.4.1'de ele alınan dalga kılavuzunu $\omega_p = c = 1,\ \bar{\alpha} = 0.05$ nümerik değerleri için tekrar ele alalım.Şekil 5.1'de

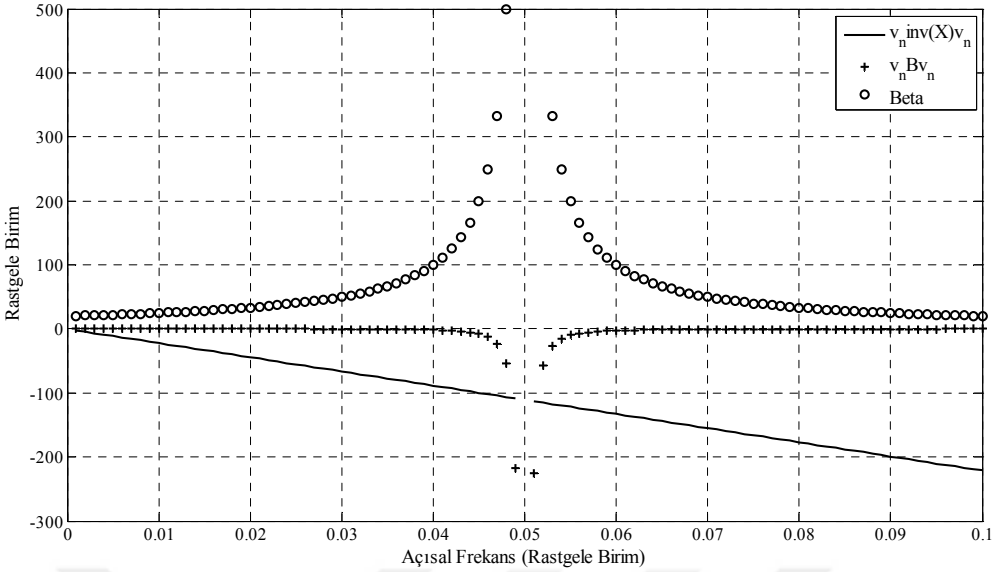
$$\underline{i}^{+}_{n} \frac{dZ}{dj\omega} \underline{i}_{n} + \underline{v}^{+}_{n} \frac{dY}{dj\omega} \underline{v}_{n}$$

formu çizdirilmiştir. Bu form $\omega < \bar{\alpha}$ için negatif olduğundan ve $\omega > \bar{\alpha}$ için o pozitif olduğundan bir geriye doğru dalga için, $\omega > \bar{\alpha}$ için $\underline{v}^{+}_{n} X^{-1} \underline{v}_{n} < 0$ ve $\underline{v}^{+}_{n} B \underline{v}_{n} < 0$ ifadeleri ve $\omega < \bar{\alpha}$ için $\underline{v}^{+}_{n} X^{-1} \underline{v}_{n} > 0$ ve $\underline{v}^{+}_{n} B \underline{v}_{n} > 0$ ifadeleri elde edilmelidir.



Şekil 5.1. ω_p=c=1, $\bar{\alpha}$=0,05 değerleri için $\underline{i}^{+}_{n} \frac{dZ}{dj\omega} \underline{i}_{n} + \underline{v}^{+}_{n} \frac{dY}{dj\omega} \underline{v}_{n}$ formu

Şekil 5.2'de $\underline{v}^{+}_{n} X^{-1} \underline{v}_{n}$ ve $\underline{v}^{+}_{n} B \underline{v}_{n}$ ifadeleri çizdirilmiştir. Görülür ki; $\omega > \bar{\alpha}$ için kuadratik formlar $\underline{v}^{+}_{n} X^{-1} \underline{v}_{n} < 0$ ve $\underline{v}^{+}_{n} B \underline{v}_{n} < 0$ eşitsizliklerini sağlar ki bu bir geriye doğru dalgayı gösterir. Bunun sağladığı aynı şekil içinde β'nın çizdirilmesiyle görülür.



Şekil 5.2. ω_p=c=1, $\bar{\alpha}$=0,05 değerleri için $\underline{v}^{+}_{n}X^{-1}\underline{v}_{n}$ ve $\underline{v}^{+}_{n}B\underline{v}_{n}$ ifadeleri ve β

Bölüm 5'te gerçekleştirilen çalışmalar şöyle özetlenebilir. Bu bölümde jirotropik doğal materyal yüklü kapalı dalga kılavuzlarında geriye doğru dalgaların varlığı için elde edilen gerek ve yeter koşullar referans alınarak jirotropik metamateryal dolu kılavuz yapılarında geriye doğru dalga modları için gerek ve yeter koşullar elde edilmiştir. Geriye doğru dalgaların varlık koşulları olarak elde edilen ifadelerin sağladığı avantaj geriye doğru dalgaların varlık koşulları için özdeğer ve özvektörlerin türevleri ile uğraşmak yerine türev içermeyen kuadratik formlarını ve bilinen dZ/djω ve dY/djω şeklindeki katsayılar matrislerinin türev ifadeleri kullanmaktır. Bununla birlikte negatif zamana göre ortalama depolanmış enerji aralığına neden olan, Y(p) matrisi içinde tipik olmayan kutba sahip yapılar için böyle bir kutup ve neden olduğu böyle bir aralığın, bir geriye doğru dalga modu aralığına neden olduğu gösterilmiştir. Bu dielektrik geçirgenlik matrisinde jω ekseninde basit olmayan kutup için olası durumlar, jω ekseninde bir kutupta rezidü matrisinin non-negatif tanım özelliğinin bozulması durumları ve sağ yarı düzlemde kutup durumları incelenerek ayrıntılandırılmıştır. Elde edilen sonuçlar tipik olmayan kutba sahip; tek eksenel soğuk sürüklenen plazma ile yüklü dalga kılavuzu, izotropik kayıpsız metametaryal yüklü kare dalga kılavuzu ve negatif sönüm katsayısına sahip metamateryal ortamla dolu kare dalga kılavuzu örnekleri üzerinde analitik olarak incelenmiştir. Ayrıca sonuçların geçerliliği tek eksenel soğuk sürüklenen plazma ile yüklü dalga kılavuzu için nümerik olarak da gösterilmiştir.

6. SONUÇLAR

Bu çalışmada öncelikle açık dalga kılavuzu yapılarına ait dispersiyon karateristiklerinin, ilgili yapının metalik bir cidar ile çerçevelenerek elde edilen kapalı modeline ait Moment Metodu (Method of Moment- MoM) çözümleri kullanılarak elde edilmesi amaçlanmıştır. Bu amaçla aşağıda verilen çalışmalar gerçekleştirilmiştir.

- Genel koordinat sisteminde üniform kayıpsız kaynaksız ve izotropik ortam yüklü kapalı dalga kılavuzu yapıları için enine alan ifadeleri ve modal gösterimler kullanılarak iletim hattı eşdeğeri eşitlikleri türetilmiştir.
- Hem anizotropik dielektrik geçirgenliğe hem de anizotropik manyetik geçirgenliğe sahip ortam yüklü kapalı dalga kılavuzu için elde edilen iletim hattı eşitliklerinin en genel formu sunulmuştur.

Açık dalga kılavuzu modlarının metalik kapalı modeli kullanılarak elde edilmesi sürecinde, kompleks değerli sızıntı modların matematiksel olarak uygunsuz olmaları, diğer bir deyişle sonsuzda sınır koşullarını ihlal etmeleri, bu mod grubunun ilgili yapıya ait MoM modeli ile elde edilememesi sonucunu ortaya çıkartmıştır. Çünkü MoM modelinde kullanılan kapalı kılavuz yapıları için sınır koşulları olan sınırda elektrik alanını teğetsel bileşeninin ve manyetik alanının dik bileşeninin sıfıra eşit olması kuralı otomatik olarak ihlal edilecektir. Ayrıca modellemede kullanılacak olan iletim hattı eşitlikleri dik baz fonksiyonların tam kümesinden oluşmaktadır. Fakat sızıntı modlar dik baz fonksiyonlarının bir tam kümesinin üyesi değildirler. Sızıntılı dalgaların sonsuzdaki sınır koşullarını ihlal etmesi ve dik baz fonksiyonlarının bir tam kümesinin üyesi olmamaları yöntemi çalışmaz hale getirmektedir. Bu bilgiler ışığında açık dalga kılavuzu modlarının metalik kapalı modeli kullanılarak elde edilmesi sürecinde aşağıdaki işlerler gerçekleştirilmiş ve sonuçlar elde edilmiştir.

- Yöntem sadece kompleks değerli uygun modları modellenmesinde, örnek yapı olarak açık silindirik plazma sütun dalga kılavuzu yapısı üzerinde uygulanmıştır.
- Yöntemin açık silindirik plazma sütun yapısına uygulanabilirliğini ispatlamak amacıyla yapıya ait modların uygun modları karşı düştüğü analitik ve nümerik olarak gösterilmiştir.
- Açık silindirik plazma sütun dalga kılavuzu için karakteristik eşitlikler sisteminden ve kapalı modeline ait MoM çözümlerinden elde edilen dispersiyon eğrileri aynı şekil üzerinde verilerek yöntemin geçerliliği gösterilmiştir.
- Yapılan nümerik hesaplamalar ve ilgili sonuçlar için verilen şekiller sonucunda modellemede kullanılan kapalı yapının dış yarıçap değeri arttıkça elde edilen sonuçların açık kılavuzun tam çözüm değerlerine yaklaştığı gösterilmiştir.
- Bununla birlikte cidar yarıçapı arttırıldıkça analitik çözümle uyumlu değerlerin elde edilebilmesi için MoM hesaplamalarında daha fazla sayıda TE ve TM öz çözümünün kullanılması ihtiyacı doğmaktadır. Daha fazla öz çözüm kullanılarak yapılacak hesaplamalar hesaplama yükünü ve zamanını arttırmaktadır. Çalışmamızda MoM hesaplamalarında kullanılan seri açılım sayısı "N" ile gösterilmiştir. MoM hesaplamalarında N seri açılım sayısı için N adet TE ve N adet TM öz çözümü kullanılmaktadır ve lineer sistem boyutu NxN olarak elde edilmektedir. Çeşitli seri açılım değerleri kullanılarak MoM'dan elde edilen dispersiyon eğrileri ile tam çözümden elde edilen dispersiyon eğrileri aynı şekil üzerinde verilerek seri açılım sayısı arttıkça elde edilen sonuçların tam çözümle uyumu arttığı gösterilmiştir.
- Ayrıca yapılar nümerik hesaplamalar sonucunda elde edilen terim sayısı-yüzde hata ve terim sayısı-hesaplama süresi eğrileri verilmiştir.

Çalışmamızın ikinci bir amacı olarak Foster reaktans teoreminin metamateryaller için sağlayıp sağlamadığı araştırılmıştır. Bu amaç doğrultusunda aşağıda listelenen çalışmalar gerçekleştirilmiştir.

- Öncelikle literetürde var olan Foster reaktans teoreminin zamana göre ortalama depolanmış elektrik ve manyetik enerji toplamları cinsinden ifadesi tekrar elde edilmiştir.
- Daha sonra elektrik alan ve manyetik alan vektörlerinin iletim hattı eşdeğeri eşitliklerinin elde edilmesinde kullanılan modal gösterimleri ve iletim hattı

eşdeğeri eşitlikleri kullanılarak Foster reaktans teoreminin iletim hattı eşdeğeri eşitlikleri cinsinden ifadesi elde edilmiştir.

- Gerçekleştirilen işlemler sonucunda zamana göre ortalama depolanmış elektrik ve manyetik enerji toplamlarının işaretini, yani ilgili yapının Foster reaktans teoremini sağlayıp sağlamadığını

  $$\underline{v}^{+}\frac{dY}{d\omega}\underline{v}+\underline{i}^{+}\frac{dZ}{d\omega}\underline{i}$$

  ifadesinin işaretinin belirlediği sonucu elde edilmiştir.
- Ek olarak literatürde ilk kez iletim hattı eşdeğerliği eşitlikleri cinsinden zamana göre ortalama depolanmış elektrik ve manyetik enerji ifadeleri ayrı ayrı elde edilmiştir.

Çalışmamızda son olarak kayıpsız, jirotropik metamateryal dolu kılavuz yapılarında geriye doğru dalga modları için gerek ve yeter koşulların elde edilmesi amaçlanmıştır. Bu amaçla gerçekleştirilen çalışmalar ve elde edilen sonuçlar aşağıda sıralanmıştır;

- Jirotropik doğal materyal yüklü kapalı dalga kılavuzlarında geriye doğru dalgaların varlığı için elde edilen gerek ve yeter koşullar referans alınarak jirotropik metamateryal dolu kılavuz yapılarında geriye doğru dalga modları için gerek ve yeter koşullar türetilmiştir.
- Geriye doğru dalgaların varlık koşulları olarak elde edilen ifadelerin sağladığı avantaj geriye doğru dalgaların varlık koşulları için özdeğerlerin ve özvektörlerin türevlerini içeren ifadeler ile uğraşmak yerine özdeğerlerin ve özvektörlerin türev içermeyen kuadratik formlarını ve $dZ/d\omega$ ve $dY/d\omega$ şeklindeki katsayılar matrislerinin bilinen türev ifadelerini kullanmaktır.
- Bununla birlikte, Y(p)'nin zamana göre ortalaması alınmış depolanmış enerjinin negatif olduğu frekans aralığı içinde konumlanmış Y(p) 'nin pozitif reel matris özelliğini bozan tipik olmayan kutbunda başlayan, bir geriye doğru dalga frekans aralığının var olduğu gösterilmiştir.
- Bu dielektrik geçirgenlik fonksiyonunda $j\omega$ ekseninde basit olmayan kutup için olası durumlar ve $j\omega$ ekseninde bir kutupta rezidü matrisinin non-negatif tanım özelliğinin bozulması durumları incelenerek ayrıntılandırılmıştır.

- Elde edilen sonuçlar tipik olayan kutba sahip; tek eksenel soğuk sürüklenen plazma ile yüklü dalga kılavuzu, izotropik kayıpsız metametaryal yüklü kare dalga kılavuzu ve negatif sönüm katsayısına sahip metamateryal ortamla dolu kare dalga kılavuzu örnekleri üzerinde analitik olarak incelenmiştir.
- Ayrıca sonuçların geçerliliği tek eksenel soğuk sürüklenen plazma ile yüklü dalga kılavuzu için nümerik olarak da gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Packard K. S., The origin of waveguides: A case of multiple rediscovery, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 1984, **32**(9), 961-969.

[2] Kim K. Y., Guided and Leaky Modes of Circular Open Electromagnetic Waveguides: Dielectric, Plasma, and Metamaterial Columns, Doctoral Thesis, The Graduate School Kyungpook National University, Korea, 2004.

[3] Balanis C. A., *Advanced Engineering Electromagnetics*, Jonh Wiley & Sons, New Jersey, 1989.

[4] Ida N., *Engineering electromagnetics*, 2nd ed., Springer, New York, 2004.

[5] Mrozowski M., *Guided Electromagnetic Waves Properties and Analysis*, John Wiley and Sons Inc., New Delhi, 1997.

[6] Pozar D. M., *Microwave engineering*, 3rd ed., Jonh Wiley & Sons, New Jersey, 2005.

[7] Cheng D. K., *Dalga ve alan elektromagnetizması*, Akademi Yayıncılık, Ankara, 2006.

[8] Ramo S., Whinnery J. R., Duzer T. V., *Fields and Waves in Communication Electronics*, 1st ed., John Wiley and Sons Inc., New Jersey, 1965.

[9] Jackson J. D., *Clasical Electrodynamics*, Jonh Wiley & Sons, New Jersey, 1962.

[10] Morse P. M. and Feshbach H., *Method of Theoretical Physics*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1953.

[11] Mahmoud S. F., *Electromagnetic waveguides: theory and applications*, Peter Peregrinus Ltd., London, 1991.

[12] Edminster J. A., *Elektromanyetik, Schaum's Outline Series*, Mc Graw Hill, Ankara, 2000,

[13] Wentworth S. M., *Fundamentals of Electromagnetics with Engineering Applications*, John Wiley & Sons Inc., New Jersey, 2005.

[14] Felsen L. B. and Marcuvitz N., *Radiation and Scattering of Waves* John Wiley & Sons Inc., New York, 1994.

[15] Collin R. E., *Field Theory of Guided Waves*, 5th ed., IEEE Press, NJ, 1990.

[16] Sadiku M. N. O., *Elements of electromagnetics*, Oxford University Press, New York, 2007.

[17] Jablonski D. G., Attenuation characteristics of circular dielectric waveguide at millimeter wavelengths, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 1978, **26**(9), 667-671.

[18] Jablonski D. G., Power-Handling Capabilities of Circular Dielectric Waveguide at Millimeter Wavelengths, *IEEE Transactions on Microwave Theory And Techniques*, 1985, **33**(2), 85-89.

[19] Rozzi T., Mongiardo M., Open electromagnetic wave guides, *London : Institute of Electrical Engineers*, 0852968965, 1997.

[20] Harmankuyu Ç., Fiber Optik Dalga Klavuzlarinda Elektromanyetik Dalgalarin İncelenmesi, Yüksek Lisans Tezi, Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, 2005, 198188.

[21] Oliner A. A., Leaky Waves: Basic Properties and Applications, *Asia Pacific Microwave Conference*, Hong Hong, PRC, 2-5 December 1997.

[22] Unger H. G., Optical Waveguides, *5th European Microwave Conference*, Hamburg, Germany, 1-4 September 1975.

[23] McLevige W. V., Itoh T., Mittra R., New Waveguide Structures for Millimeter-Wave and Optical Integrated Circuits, *IEEE Transactıons on Mıcrowave Theory And Technıques*, 1975, **10**(23), 788-794.

[24] Marcuse D., *Theory of Dielectric Optical Waveguides*, AT&T Academic Pres, Boston, 1991.

[25] Granatstein V. L., Schlesinger S. P. and Vigants A., The Open Plasmaguide in Extremes of Magnetic Field, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1963, **11**(4), 489-496.

[26] Clarricoats P. J. B., and Slinn K. R., Complex modes of propagation in dielectric loaded circular waveguide, *Electronics Letters*, 1965, **1**, 145-146.

[27] Raevskii S. B., Compleks Waves in a Two-Lawyer Circular Shielding Waveguide, *Gorkii Polytechnic Institute Journal*, 1972, 82-85.

[28] Yener N., Advancement of algebraic function approximation in eigenvalue problems of lossless metallic waveguides to infinite dimensions, part III: examples verifying the theory, *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 2006, **20**, 1861-1874.

[29] Ogusu K., Numerical Analysis of the Rectangular Dielectric Waveguide and its Modifications, *IEEE Transaction on Microwave Theory and Techniques*, 1977, **25**(11), 874-885.

[30] Yener N., Bazı Üniform Dalga Kılavuzlarında Özdeğerlerin Transmisyon Hattı Eşdeğerlikleri Yardımıyla Belirlenmesi, Doktora Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 2000, 100787.

[31] Hu J., and Menyuk C. R., Understanding leaky modes: slab waveguide revisited, *Advances in Optics and Photonics*, 2009, **1**(1), 58-106.

[32] Oliner A. A., Types and basic properties of leaky modes in microwave and millimeter-wave integrated circuits, *IEICE Trans. Electron*., 2000, **E83-C**(5), 675-686.

[33] Schelkunoff S. A., Generalized telegraphist's equation for waveguide, *Bell System Tech. Journ*., 1952, **31**, 785-801.

[34] Schelkunoff S. A., Transmission theory of plane electromagnetic waves, *Proc. Inst. Radio Engrs*., 1937, 1457-1492.

[35] Heldring A., Rius J. M., Tamayo J. M., Parron J., Ubeda E., Fast Direct Solution of the Method of Moments Linear System, *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, 2007, **55**, 3220-3228.

[36] Harrington R. F., *Field Computation by Moment Methods*, Macmillan, New York, 1992.

[37] Gouda M., The Method Of Moment For The Electromagnetic Scattering From Bodies of Revolution, Doctoral Thesis, Collage of Boras, Sweden, 2008.

[38] Yener N., E. Topuz, A novel MOM approach for obtaining accurate and efficient solutions in optical rib waveguide, *Turkish J. of Electric. Eng. and Computer Sciences*, 2002, **10**, 399-410.

[39] Kay D. C., *Tensor Calculus*, McGraw-Hill, New York, 1988.

[40] Kelebekler P., Kaplı Dalga Kılavuzlarında Karmaşık Propagasyon Sabitlerinin İncelenmesinde Bazı İlk Sonuçlar, Yüksek Lisans Tezi, Kocaeli Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kocaeli, 2009, 259440.

[41] Manenkov A. B., The excitation of open homogenous waveguides, *Radiophys. Quantum Electron*., 1970, **13**(5), 578–586.

[42] Manenkov A. B., Proper and improper modes of the left handed material waveguides, *Opt. Quant. Electron*., 2012, **44**, 717–729.

[43] Mesa F. and Horno M., Computation of proper and improper modes in multilayered bianisotropic waveguides, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 1995, **43**(1), 233-235.

[44] Chen J., Smolyaka G. A, Brueck S. R. J. and Malloy K. J., Surface plasmon modes of finite, planar, metal-insulator-metal plasmonic waveguides, *Optics Express*, 2008, **16**(19), 14902-14909.

[45] Baccarelli P., Burghignoli P., Frezza F., Galli A., Effects of leaky-wave propagation in metamaterial grounded slabs excited by a dipole source, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 2005, **53**(1), 32-43.

[46] Spiegel M. R., *Schaum's outline series; Mathematical handbook of formulas and tables*, McGraw-Hill, New York, 1999.

[47] Maier S. A., *Plasmanics: Fundamentals and Applications*, Springer, New York, 2007.

[48] Takunju P. L., Electromagnetic Surface Wave Propagation Applicable to UltraHigh Energy Neutrino Detection, Master's thesis, Department of Astronomy and Space Physics, Uppsala University**,** Uppsala, Sweden, 2007.

[49] Barlow H. M., Cullen A. L., Surface Waves, *Proceeding of IEE***,** 1953, **100**(68), 363-364.

[50] Noble D. F., Circuit Properties of Dispersive Coupled Transmission Lines and Waveguides, Doctoral Thesis, Cornell University, New York, 1971.

[51] Yener N., Necessary And Sufficient Conditions For The Existence Of Backward Waves İn Metallic Waveguides, *Journal of Electromagnetic Waves and Appl.*, 2003, **17**(12), 1713-1722, .

[52] Kelebekler P. and Yener N., Dispersion Characteristic Analysis of Open Cylindrical Waveguide and Its Metallic Closed Model, *PIERS Proceedings*, Prague, 6-9 July 2015.

[53] Nobel D. F., Carlin H. J., Circuit properties of coupled dispersive transmission lines, *IEEE Trans. on Circuit Theory*, 1973, **20**(1), 56-64.

[54] Foster R. M., A Reactance Theorem, *Bell System Technical Journal*, 1924, **3**, 259-267.

[55] http://en.wikipedia.org/wiki/Network_synthesis_filters#Driving_point impedance (Ziyaret tarihi: 25 Eylül 2014).

[56] Chen W. K., *Passive and Active Filters Theory and Implementations*, John Wiley and Sons, New York, 107-109, 1986.

[57] Nedlin G., Energy in lossless and low-loss networks, and Foster's reactance theorem, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1989, **36**(4), 561-567.

[58] Guillemin E. A., *Communication networks*, John Wiley and Sons, New York, 1935.

[59] Balabanian N. and Bickart T., *Linear network theory*, Matrix, Michigan, 1981.

[60] Geyi W., Jarmuszewski P., Qi Y., The Foster Reactance Theorem for Antennas and Radiation Q, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2000, **48**(3), 401-408.

[61] http://en.wikipedia.org/wiki/Foster%27s_reactance_theorem (Ziyaret tarihi: 25 Eylül 2014).

[62] Chen P. Y., Argyropoulos C., Alu A., Broadening the Bandwidth of Metamaterial Cloaks with Non-Foster Metasurfaces, *Phys. Rev. Lett*., 2013, **111,** 233001, 1-5.

[63] Mirzaei H., Eleftheriades G. V., Realizing Non-Foster Reactive Elements Using Negative-Group-Delay Networks, *IEEE Transactions On Microwave Theory And Techniques*, 2013, **61**(12), 4322-4332.

[64] Stearns S. D., Non-Foster Circuit and Stability Theory, *IEEE International Symposium on Antennas and Propagation* (*APSURSI*), Spokane, WA, 1942-1945, 3-8 July 2011.

[65] Hrabar S., Krois I., Bonic I., Kiricenko A., Dispersionless ENZ and MNZ metamaterials based on non-Foster elements*, IEEE International Symposium on Antennas and Propagation* (*APSURSI*), Spokane, WA, 1946-1949, 3-8 July 2011.

[66] Hrabar S., Krois I., Bonic I., Kiricenko A., Basic concepts of active dispersionless metamaterial based on non-foster elements, *International Conference on Applied Electromagnatics and Communications* (*ICECom*), Dubrovnik, Croatia, 20-23 September 2010.

[67] Munoz E. U., Hrabar S., Vargas D. S., Kiricenko A., Stability of Non-Foster Reactive Elements for Use in Active Metameterials and Antennas*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2012, **60**(7), 3490-3494.

[68] http://en.wikipedia.org/wiki/Metamaterial (Ziyaret tarihi: 17 Şubat 2016).

[69] Eleftheriades G. V. and Engheta N., Metamaterials: fundamentals and applications in the microwave and optical regimes, *Proceeding of the IEEE*, 2011, **99**(10), 1618-1621.

[70] Alu A. and Engheta N., Radiation from a Traveling-Wave Current Sheet at the Interface between a Conventional Material and a Material with Negative Permittivity and Permeability, *Microwave and Optical Technology Letters*, 2002, **35**(6), 460-463.

[71] Veselago V. G., The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ε and μ, *Sov. Phys. Usp*., 1968, **10**, 509-514.

[72] Pendry J. B., Holden A. J., Robbins D. J. and Stewart W. J., Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena, *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, 1999, **47**(11), 2075-2081.

[73] Pendry J. B., Holden A. J., Robbins D. J. and Stewart W. J., Low-frequency plasmons in thin wire structures, *Journal of Physics*, 1998, **10**, 4785-4809.

[74] Shelby R. A., Smith D. R. and Schultz S., Experimental verification of a negative index of refraction, *Science*, 2001, **292**, 77-79.

[75] Eleftheriades G. V., Iyer A. K. and Kremer P. C., Planar negative refractive index media using periodically L-C loaded transmission lines, *IEEE Trans. Microw. Theory Tech*., 2002, **50**(12), 2702-2712.

[76] Sanada A., Caloz C. and Itoh T., Planar distributed structures with negative refractive index, *IEEE Trans. Microw. Theory Tech*., 2004, **52**(4), 1252-1263.

[77] Alu A. and Engheta N., Three-dimensional nanotransmission lines at optical frequencies: A recipe for broadband negative-refraction optical metamaterials, *Phys. Rev. B*., 2007, **75**, 024304, 1-20.

[78] Carroll J. E., Metamaterials: Critique and Alternatives, by B.A. Munk, *Contemporary Physics*, 2010, **51**(5), 441-444.

[79] Engheta N., On Foster's reactance theorem for metamaterials with negative permittivity and permeability, *The XXVII Gen. Assembly of Int. Union of Radio Science* (*URSI GA'02*), Maastricht, The Netherlands, 17-24 August 2002.

[80] Engheta N., Is Foster's raectance theorem satisfied in double-negative and single-negative media, *Microwave and Optical Technology Letters***,** 2003, **39**(1), 11-14.

[81] Yarman B. S., *Design of ultra wideband power transfer networks*, John Wiley and Sons, New York, 2010.

[82] http://www.mathworks.com/help/optim/ug/equation-solving-algorithms.html (Ziyaret tarihi: 11 Ekim 2015).

[83] Enping W. and Chaozhu W., Some properties of the positive real matrix, *Acta Mathematicae Sinica*, 1984, **1**(1), 85-92.

[84] Kalluri D. and Prasad R., Waveguide modes of a warm, transversely drifting, electron plasma with a strong transverse magnetic field, *IEEE Trans. Plasma Science*, 1979, **7**(1), 6-9.

[85] Chiao R. Y., Superluminal (but causal) propagation of wave packets in transparentmedia with inverted atomic populations, *Phy. Rev. A*, 1993, **48**(1), 34-37.

[86] Meade M. L. and Dillon C. R., *Signals and Systems, Models and Behaviour*, Kluvver Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[87] Lifschitz E. M. and Pitaevskii L. P., *Physical Kinetics*, Elsevier, Amsterdam, 2008.

EKLER

Ek-A

Genel koordinat sisteminde, hem anizotropik dielektrik geçirgenliğe hem de anizotropik manyetik geçirgenliğe sahip ve/veya heterojen ortamla dolu dalga kılavuzları için en genel eşdeğer transmisyon hattı denklemleri eşitlikler (Ek A.1), (Ek A.2), (Ek A.3) ve (Ek A.4)'te verilmiştir.

$$\begin{aligned}
\frac{dV_{(m)}}{dz} &= -j\omega I_{(n)} \iint_s \left[\mu_{uu} \frac{\partial T_{(n)}}{e_2 \partial v} \frac{\partial T_{(m)}}{e_2 \partial v} - \mu_{vu} \frac{\partial T_{(n)}}{e_2 \partial v} \frac{\partial T_{(m)}}{e_1 \partial u} \right. \\
&\left. - \mu_{uv} \frac{\partial T_{(n)}}{e_1 \partial u} \frac{\partial T_{(m)}}{e_2 \partial v} + \mu_{vv} \frac{\partial T_{(n)}}{e_1 \partial u} \frac{\partial T_{(m)}}{e_1 \partial u} \right] dS \\
&+ j\omega I_{[n]} \iint_s \left[\mu_{uu} \frac{\partial T_{[n]}}{e_1 \partial u} \frac{\partial T_{(m)}}{e_2 \partial v} - \mu_{vu} \frac{\partial T_{[n]}}{e_1 \partial u} \frac{\partial T_{(m)}}{e_1 \partial u} \right. \\
&\left. - \mu_{uv} \frac{\partial T_{[n]}}{e_2 \partial v} \frac{\partial T_{(m)}}{e_2 \partial v} + \mu_{vv} \frac{\partial T_{[n]}}{e_2 \partial v} \frac{\partial T_{(m)}}{e_1 \partial u} \right] dS \\
&+ j\omega I_{z,[n]} \iint_s \left[\mu_{uz} \frac{\partial T_{(m)}}{e_2 \partial v} - \mu_{vz} \frac{\partial T_{(m)}}{e_1 \partial u} \right] \chi_{[n]} T_{[n]} dS + \chi_{(m)} V_{z,(m)}
\end{aligned} \qquad \text{(Ek A.1)}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dV_{[m]}}{dz} &= j\omega I_{(n)} \iint_s \left[\mu_{uu} \frac{\partial T_{(n)}}{e_2 \partial v} \frac{\partial T_{[m]}}{e_1 \partial u} + \mu_{vu} \frac{\partial T_{(n)}}{e_2 \partial v} \frac{\partial T_{[m]}}{e_2 \partial v} \right. \\
&\left. - \mu_{uv} \frac{\partial T_{(n)}}{e_1 \partial u} \frac{\partial T_{[m]}}{e_1 \partial u} - \mu_{vv} \frac{\partial T_{(n)}}{e_1 \partial u} \frac{\partial T_{[m]}}{e_2 \partial v} \right] dS \\
&- j\omega I_{[n]} \iint_s \left[\mu_{uu} \frac{\partial T_{[n]}}{e_1 \partial u} \frac{\partial T_{[m]}}{e_1 \partial u} + \mu_{vu} \frac{\partial T_{[n]}}{e_1 \partial u} \frac{\partial T_{[m]}}{e_2 \partial v} \right. \\
&\left. + \mu_{uv} \frac{\partial T_{[n]}}{e_2 \partial v} \frac{\partial T_{[m]}}{e_1 \partial u} + \mu_{vv} \frac{\partial T_{[n]}}{e_2 \partial v} \frac{\partial T_{[m]}}{e_2 \partial v} \right] dS \\
&- j\omega I_{z,[n]} \iint_s \left[\mu_{uz} \frac{\partial T_{[m]}}{e_1 \partial u} + \mu_{vz} \frac{\partial T_{[m]}}{e_2 \partial v} \right] \chi_{[n]} T_{[n]} dS
\end{aligned} \qquad \text{(Ek A.2)}$$

$$\frac{dI_{(m)}}{dz} = -j\omega V_{(n)} \iint_s \left[\varepsilon_{uu} \frac{\partial T_{(n)}}{e_1 \partial u} \frac{\partial T_{(m)}}{e_1 \partial u} + \varepsilon_{vu} \frac{\partial T_{(n)}}{e_1 \partial u} \frac{\partial T_{(m)}}{e_2 \partial v} \right.$$
$$\left. + \varepsilon_{uv} \frac{\partial T_{(n)}}{e_2 \partial v} \frac{\partial T_{(m)}}{e_1 \partial u} + \varepsilon_{vv} \frac{\partial T_{(n)}}{e_2 \partial v} \frac{\partial T_{(m)}}{e_2 \partial v} \right] dS$$
$$+ j\omega V_{[n]} \iint_s \left[-\varepsilon_{uu} \frac{\partial T_{[n]}}{e_2 \partial v} \frac{\partial T_{(m)}}{e_1 \partial u} + \varepsilon_{vu} \frac{\partial T_{[n]}}{e_2 \partial v} \frac{\partial T_{(m)}}{e_2 \partial v} \right. \qquad \text{(Ek A.3)}$$
$$\left. + \varepsilon_{uv} \frac{\partial T_{[n]}}{e_1 \partial u} \frac{\partial T_{(m)}}{e_1 \partial u} - \varepsilon_{vv} \frac{\partial T_{[n]}}{e_1 \partial u} \frac{\partial T_{(m)}}{e_2 \partial v} \right] dS$$
$$- j\omega V_{z,(n)} \iint_s \left[\varepsilon_{uz} \frac{\partial T_{(m)}}{e_1 \partial u} + \varepsilon_{vz} \frac{\partial T_{(m)}}{e_2 \partial v} \right] \chi_{(n)} T_{(n)} dS$$

$$\frac{dI_{[m]}}{dz} = j\omega V_{(n)} \iint_s \left[-\varepsilon_{uu} \frac{\partial T_{(n)}}{e_1 \partial u} \frac{\partial T_{[m]}}{e_2 \partial v} + \varepsilon_{vu} \frac{\partial T_{(n)}}{e_1 \partial u} \frac{\partial T_{[m]}}{e_1 \partial u} \right.$$
$$\left. - \varepsilon_{uv} \frac{\partial T_{(n)}}{e_2 \partial v} \frac{\partial T_{[m]}}{e_2 \partial v} + \varepsilon_{vv} \frac{\partial T_{(n)}}{e_2 \partial v} \frac{\partial T_{[m]}}{e_1 \partial u} \right] dS$$
$$- j\omega V_{[n]} \iint_s \left[\varepsilon_{uu} \frac{\partial T_{[n]}}{e_2 \partial v} \frac{\partial T_{[m]}}{e_2 \partial v} - \varepsilon_{vu} \frac{\partial T_{[n]}}{e_2 \partial v} \frac{\partial T_{[m]}}{e_1 \partial u} \right. \qquad \text{(Ek A.4)}$$
$$\left. - \varepsilon_{uv} \frac{\partial T_{[n]}}{e_1 \partial u} \frac{\partial T_{[m]}}{e_2 \partial v} + \varepsilon_{vv} \frac{\partial T_{[n]}}{e_1 \partial u} \frac{\partial T_{[m]}}{e_1 \partial u} \right] dS$$
$$+ j\omega V_{z,[n]} \iint_s \left[-\varepsilon_{uz} \frac{\partial T_{[m]}}{e_2 \partial v} + \varepsilon_{vz} \frac{\partial T_{[m]}}{e_1 \partial u} \right] \chi_{(n)} T_{(n)} ds + \chi_{[m]} I_{z,[m]}$$

Eşitlikler (Ek A.5) ve (Ek A.6)'da verilen ifadeler kullanılarak Eşitlikler (Ek A.1) ve (Ek A.4)'te var olan $\chi(m)Vz,(m)$ ve $\chi[m]Iz,[m]$ ifadeleri elde edilir.

$$I_{(m)} = -j\omega \sum_{n=1}^{\infty} V_{(n)} \iint_s \left[\varepsilon_{zu} \frac{\partial T_{(n)}}{e_1 \partial u} + \varepsilon_{zv} \frac{\partial T_{(n)}}{e_2 \partial v} \right] T_{(m)} dS$$
$$- j\omega \sum_{n=1}^{\infty} V_{[n]} \iint_s \left[\varepsilon_{zu} \frac{\partial T_{[n]}}{e_2 \partial v} - \varepsilon_{zv} \frac{\partial T_{[n]}}{e_1 \partial u} \right] T_{(m)} dS \qquad \text{(Ek A.5)}$$
$$- j\omega \sum_{n=1}^{\infty} V_{z,(n)} \iint_s \varepsilon_{zz} \chi_{(n)} T_{(n)} T_{(m)} dS$$

$$V_{[m]} = j\omega\sum_{n=1}^{\infty} I_{(n)} \iint_s \left[\mu_{zu} \frac{\partial T_{(n)}}{e_2 \partial v} - \mu_{zv} \frac{\partial T_{(n)}}{e_1 \partial u} \right] T_{[m]} ds$$
$$- j\omega\sum_{n=1}^{\infty} I_{[n]} \iint_s \left[\mu_{zu} \frac{\partial T_{[n]}}{e_1 \partial u} + \mu_{zv} \frac{\partial T_{[n]}}{e_2 \partial v} \right] T_{[m]} ds \qquad \text{(Ek A.6)}$$
$$- j\omega\sum_{n=1}^{\infty} I_{z,[n]} \iint_s \mu_{zz} \chi_{[n]} T_{[n]} T_{[m]} ds$$

Ek-B

Açık Silindirik; dielektrik çubuk ve izotropik plazma sütun dalga kılavuzu için karakteristik eşitlikler sistemi

$k_1^2 = k_0^2 \varepsilon_r \mu_r - \gamma^2$ ve $k_2^2 = \gamma^2 - k_0^2$ olmak üzere,

TEM modları

$$\begin{bmatrix} -\frac{m}{a}\frac{\beta}{k_1^2}J_m(k_1a) & j\frac{1}{\omega\varepsilon_0}\frac{k_0^2\mu_r}{k_1}J'_m(k_1a) & -\frac{m}{a}\frac{\beta}{k_2^2}K_m(k_2a) & j\frac{1}{\omega\varepsilon_0}\frac{k_0^2}{k_2}K'_m(k_2a) \\ 0 & J_m(k_1a) & 0 & -K_m(k_2a) \\ -j\frac{1}{\omega\mu_0}\frac{k_0^2\varepsilon_r}{k_1}J'_m(k_1a) & -\frac{m}{a}\frac{\beta}{k_1^2}J_m(k_1a) & -j\frac{1}{\omega\mu_0}\frac{k_0^2}{k_2}K'_m(k_2a) & -\frac{m}{a}\frac{\beta}{k_2^2}K_m(k_2a) \\ J_m(k_1a) & 0 & -K_m(k_2a) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = 0 \quad \text{(Ek B.1)}$$

TE Modları

$$\begin{bmatrix} J_0(k_1a) & -K_0(k_2a) \\ j\frac{\omega\mu_0}{k_1}J'_0(k_1a) & j\frac{\omega\mu_0}{k_2}K'_0(k_2a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} = 0 \quad \text{(Ek B.2)}$$

TM Modları

$$\begin{bmatrix} J_0(k_1a) & -K_0(k_2a) \\ -j\frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon_r}{k_1}J'_0(k_1a) & -j\frac{\omega\varepsilon_0}{k_2}K'_0(k_2a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = 0 \quad \text{(Ek B.3)}$$

Ek-C

Modifiye Bessel fonksiyonunu hesaplamak için kullanılan Matlab kodu;

```
Function Kn=Mbessel2(n,x)
gam=.5772156;
E1=(-1)^(n+1)*(log(x/2)+gam).*besseli(n,x);
E2=0;
for kk=0:n-1
   E2=E2+(-1)^kk*factorial(n-kk-1).*(x/2).^(2*kk-n);
end
E2=E2/2;
E3=0;
for kk=0:100
   if kk==0
      phikk=0;phinkk=0;
   else
      phikk=1;phinkk=1;
   end
   for d1=2:kk
      phikk=phikk+(1/d1);
   end
   for d1=2:n+kk
      phinkk=phinkk+(1/d1);
   end
   E3=E3+(((x/2).^(n+2*kk))/(factorial(kk)*factorial(n+kk)))*(phikk+phinkk);
end
E3=E3*((-1)^n)/2;
En=E1+E2+E3;
```

KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER

[1] **Kelebekler P.**, Yener N., Dispersion Characteristic Analysis of Open Cylindrical Waveguide and Its Metalic Closed Model, *Progress in* Electromagnetics *Research Symposium PIERS 2015*, Prague, Czech Republic, 6-9 July 2015.

[2] **İşak P.**, Kelebeler E., Yıldız A. B., Karşılıklı endüktans etkisinin anahtarlamalı devrelerde ifade edilmesi, *Kaynak Elektrik (Enerji, Elektrik, Aydınlatma, Elektronik ve Otomasyon Mühendisliği Dergisi)*, 2007, **222**, 180-184.

[3] **İşak P.**, Yıldız A. B., Zener Diyotlu Gerilim Regülatör Devresinin Geçici Hal Analizi, *Elektrik Elektronik Bilgisayar Biyomedikal Mühendisliği 12. Ulusal Kongresi*, Kocaeli, 20-22 Haziran 2007.

ÖZGEÇMİŞ

Pelin KELEBEKLER, 1980 yılında İstanbul'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini İstanbul'da tamamladıktan sonra 2003 yılında girdiği Kocaeli Üniversitesi Teknik Eğitim Fakültesi Elektronik Öğretmenliği Bölümü'nden 2006 yılında mezun oldu. 2006 yılında Kocaeli Üniversitesi Teknik Eğitim Fakültesi Elektronik ve Bilgisayar Eğitimi Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başladı ve 2009 yılında tamamladı. Aynı yıl Kocaeli Üniversitesi Teknik Eğitim Fakültesi Elektronik ve Bilgisayar Eğitimi Anabilim Dalı'nda doktora eğitimine başladı.