KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

DURUM DEĞİŞKENİNE BAĞLI GECİKME TERİMİ İÇEREN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ANALİZİ

SERTAÇ ERMAN

KOCAELİ 2016

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

DURUM DEĞİŞKENİNE BAĞLI GECİKME TERİMİ İÇEREN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ANALİZİ

SERTAÇ ERMAN

Doç.Dr. Ali DEMİR **Danışman, Kocaeli Üniv.**	.....
Doç.Dr. Abdülkadir AYGÜNOĞLU **Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv.**	.....
Yrd.Doç.Dr. Ali Fuat YENİÇERİOĞLU **Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv.**	.....
Prof.Dr. Halim ÖZDEMİR **Jüri Üyesi, Sakarya Üniv.**	.....
Doç.Dr. Şevket GÜR **Jüri Üyesi, Sakarya Üniv.**	.....

Tezin Savunulduğu Tarih: 22.07.2016

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması, durum değişkenine bağlı gecikme terimi içeren diferansiyel denklemlerin çözümlerinin incelenmesi ve asimptotik karakterinin analizini yapmak amacıyla gerçekleştirilmiştir.

Tez çalışmamda desteğini esirgemeyen, çalışmalarıma yön veren, bana güvenen ve yüreklendiren danışman hocam Doç. Dr. Ali DEMİR 'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Doktora öğrenime başlama süreciden, son zamanına kadar desteğini esirgemeyen, kendisini her anlamda örnek aldığım hocam Prof. Dr. Halis AYGÜN 'e teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmamın her aşamasında yanımda olan, bilgi ve görüşlerini paylaşan, kader ortaklığı yaptığımız arkadaşım Arş.Gör. Berrak ÖZGÜR 'e teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca her zaman yaptıklarımın arkasında olan, sorunlarıma ortak olup, maddi ve manevi destelerini esirgemeyerek bu tezin yazılmasında katkıları olan sevgili annem Nevin Erman 'a ve babam Nafiz Erman 'a başta olmak üzere tüm aileme teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, her zaman bana inanan ve güvenen, bu zorlu sürecin her anına şahit olan ve büyük sabır gösteren, vermiş olduğu moral ve destekle yolumu aydınlatan sevgili eşim Gülay ERMAN 'a teşekkürlerimi sunarım.

Doktora çalışmalarım süresince beni maddi olarak destekleyen TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı'na da teşekkürü bir borç bilirim.

Temmuz – 2016 Sertaç ERMAN

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR i
İÇİNDEKİLER ii
ŞEKİLLER DİZİNİ iii
TABLOLAR DİZİNİ iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ v
ÖZET vi
ABSTRACT vii
GİRİŞ 1
1. GENEL BİLGİLER 5
1.1. Varlık ve Teklik Teoremleri 10
2. GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ 13
2.1. Adımlar Yöntemi 13
2.2. Legendre Polinomları ile Seri Çözüm 16
2.1.1. Legendre polinomları ile yaklaşık çözümün elde edilmesi 19
3. ÇÖZÜMÜN BELLİ BİR ARALIKTA VARLIĞI VE TEKLİĞİ 26
4. KARARLILIK ANALİZİ 34
4.1. Kararlılık Analizi 35
4.2. Durum Gecikmeli Diferansiyel Denklemin Lineerleştirilmesi 39
4.3. Lyapunov Fonksiyoneli 40
4.4. D-Parçalanma Metodu 45
4.4.1. İki gecikme terimli diferansiyel denklemin kararlılık analizi 48
4.4.1.1. $(\alpha_1 - \alpha_2)$ parametre uzayı 49
4.4.1.2. $(\beta_1 - \beta_2)$ parametre uzayı 55
4.4.2. Gecikme fonksiyonunun değer aralığına bağlı kararlılık bölgesi 58
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 69
KAYNAKLAR 71
KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER 75
ÖZGEÇMİŞ 76

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. y_t fonksiyonunun tanımı. 6
Şekil 2.1. Adımlar Metodu. 15
Şekil 2.2. Örnek 2.2.1 de elde edilen çözüm fonksiyonunun grafiğidir. 23
Şekil 2.3. Problem (2.14) 'ün başlangıç, $t \in [0,1]$ için çözüm ve gecikme fonksiyonları 24
Şekil 4.1. Asimptotik kararlı, kararlı ve kararsız sistemler. 37
Şekil 4.2. Denklem (4.9)'un (K_0, K_1) parametre uzayında (4.11) fonksiyoneli ile elde edilen kararlılık bölgesi. 43
Şekil 4.3. Sistem (4.23)-(4.24) 'ün $\beta_1 = 1{,}4$, $\beta_2 = 0{,}4$, $\theta_1 = 1{,}25$, $\theta_2 = 1$ iken D-eğrileri ve kararlık bölgeleri. Gecikme değerleri a) $r_1 = 1$ ve $r_2 = 0{,}25$, b) $r_1 = 1$ ve $r_2 = 0{,}5$, c) $r_1 = 1$ ve $r_2 = 1$, d) $r_1 = 1$ ve $r_2 = 1{,}5$ e) $r_1 = 1$ ve $r_2 = 1{,}8$, f) $r_1 = 1$ ve $r_2 = 0{,}25$, $0{,}5$, 1, $1{,}5$, $1{,}8$ 52
Şekil 4.4. Sistem (4.23)-(4.24) 'ün $\beta_1 = 1{,}4$, $\beta_2 = 0{,}4$, $\theta_1 = 1{,}25$, $\theta_2 = 1$ iken D-eğrileri ve kararlık bölgeleri. Gecikme değerleri a) $r_1 = 0{,}25$ ve $r_2 = 1$ b) $r_1 = 0{,}5$ ve $r_2 = 1$, c) $r_1 = 1$ ve $r_2 = 1$, d) $r_1 = 1{,}5$ ve $r_2 = 1$ e) $r_1 = 1{,}8$ ve $r_2 = 1$, f) $r_1 = 0{,}25$, $0{,}5$, 1, $1{,}5$, $1{,}8$ ve $r_2 = 1$ 53
Şekil 4.5. Sistem (4.23)-(4.24) 'ün $\alpha_1 = 0{,}2$, $\alpha_2 = 0{,}2$, $\theta_1 = 1{,}25$, $\theta_2 = 1$, iken D-eğrileri ve kararlık bölgeleri. Gecikme değerleri a) $r_1 = 1$, $r_2 = 0{,}25$, $0{,}5$, 1, $1{,}5$, 2 b) a ile aynı gecikme değerleri için daha küçük aralıkta c) $r_1 = 0{,}25$, $0{,}5$, 1, $1{,}5$, 2, 3 ve $r_2 = 1$. 57
Şekil 4.6. $C_k(h)$ eğri ailesinin $C_k(1)$ üyesinin grafiği. 62
Şekil 4.7. $h = 0{,}25$, $0{,}75$, 1, $1{,}3$ için $C_0(h)$ eğrileri. 64

TABLOLAR DİZİNİ

Tablo 2.1. Legendre polinomlarının ilk on terimi 17
Tablo 2.2. Örnek 2.2.1 'de elde edilen ab-ötelenmiş Legendre polinomlarının katsayıları 22

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

IR	:	Reel sayılar kümesi
IR^+	:	Pozitif reel sayılar kümesi
IR^n	:	n boyutlu reel sayılar kümesi
Z	:	Tam sayılar kümesi
IN	:	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar kümesi
C([a,b],IR)	:	[a,b] kapalı aralığından IR 'ye tanımlı olan sürekli fonksiyonların uzayı
J	:	IR 'in bir açık alt kümesi
D	:	IR^n 'in bir açık alt kümesi
C_h	:	[-h,0] aralığından D 'ye tanımlı olan sürekli fonksiyonların kümesi
C	:	[t,t+h]aralığından D 'ye tanımlı olan sürekli fonksiyonların kümesi
sign	:	İşaret fonksiyonu

DURUM DEĞİŞKENİNE BAĞLI GECİKME TERİMİ İÇEREN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ANALİZİ

ÖZET

Bu çalışmanın amacı, durum değişkenine bağlı gecikme terimi içeren diferansiyel denklemlerin çözümlerinin incelenmesi ve asimptotik kararlılığının analizini yapmaktır.

Öncelikle, durum değişkenine bağlı gecikme terimi içeren diferansiyel denklemler ile ilgili temel kavramlar ve teoremler ifade edilmiştir.

İncelenen sistemin katsayıları cinsinden elde edilen bir aralıkta çözümünün varlığı ve tekliği gösterilmiştir. Bununla beraber gecikme fonksiyonunun pozitifliğini garantilemek için katsayılar cinsinden kriterler elde edilmiştir. Daha sonra, iki gecikme terimi içeren gecikmeli diferansiyel denklemler için asimptotik kararlılık ve kararsızlık koşulları bulunmuş ve bazı parametre uzaylarında kararlılık bölgeleri gösterilmiştir. Son olarak, durum değişkenine bağlı gecikme terimi içeren diferansiyel denklemler için gecikme teriminin değer aralığına bağlı asimptotik kararlılık koşulları elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler: Asimptotik Kararlılık, Durum Değişkenine Bağlı Gecikme, Gecikmeli Diferansiyel Denklemler.

ANALYSIS OF STATE DEPENDENT DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS

ABSTRACT

Purpose of this study is investigating the solutions of state dependent delay differential equations and analyzing asymptotic stability of them.

First, fundamental notions and theorems of state dependent delay differential equations are given.

Existence and uniqueness of the solution for the given system are shown in terms of the coefficients of it in an obtained interval. Moreover, in order to guarantee the positiveness of the delay function, conditions are determined in terms of coefficients. Later, asymptotic stability and instability conditions for delay differential equations, with two delay terms are obtained and stability regions are shown in some parameter spaces. Finally, asymptotic stability conditions which depends on the range of the delay term, for differential equations with state dependent delay term are determined

Key words: Asymptotic Stability, State Dependent Delay, Delay Differential Equation.

GİRİŞ

Adi diferansiyel denklemler kullanılarak modelleme yapılırken, sistemdeki mevcut gecikmeler daima göz ardı edilir. Ancak, sistemdeki küçük bir gecikme miktarı bile sistemde büyük değişiklikler görülmesine neden olabilir. Bu nedenle, karşılaşılan problemlerin bir çoğunun modellemesi yapılırken, gecikmeli diferansiyel denklemlerin kullanılması daha gerçekçidir.

Örneğin, parmak ucunda kalemi dengede tutma problemini ele alalım (Schürer, 1948). $m>0$ kalemin kütlesi, $l>0$ kalemin uzunluğu olsun. Eğer dışarıdan bir kuvvet uygulanmıyorsa bu sistemin matematiksel modeli,

$$ml\theta'' + \gamma l\theta' - mg\sin(\theta) = 0$$

şeklindedir. Burada γ sönüm katsayısı, g yerçekimine bağlı hızlanma ve θ kalemin dik pozisyonu ile arasındaki açıyı göstermektedir.

Kalemin dengesini sağlamak için parmak, kalemin dikeyle olan açısı θ 'ya ve açısal hızı $\frac{d\theta}{dt}$ 'ye bağlı bir kuvvet uygulamalıdır. Kalemin pozisyonunun ve hızının algılanması ile kuvvetin uygulanması arasında belli bir süre geçecektir. Bu reaksiyon süresini $\tau>0$ ile gösterelim. Yukarıdaki matematiksel modele τ gecikme terimini ekleyerek daha gerçekçi

$$ml\theta'' + \gamma l\theta' - mg\sin(\theta) = f(\theta(t-\tau), \theta'(t-\tau))$$

matematiksel modeli elde etmiş oluruz (Campbell, 2007). Çünkü verilecek tepki ile algılanma arasında geçen sürede kalem, açısal hızına bağlı olarak, bir miktar daha açısını değiştirecektir.

Bir başka örnek olarak Driver (1977) tarafından tanımlanan tuzlu su karışım problemi ele alınabilir. İçinde B litre tuzlu su karışımı bulunan bir tank olsun. Bu tankın üstünde ve altında bulunan iki vanadan, sırasıyla, dakikada q litre saf su

doldurulsun ve yine dakikada q litre karışım dışarı boşaltılsın. Bu işlem sırasında karışım sürekli karıştırılsın. $y(t)$, t anında karışımdaki tuz miktarını (kg) olarak göstersin. Bu işlem sırasında tank içinde homojen bir karışım olduğu kabul edilirse, tank içinde litre başına $\frac{y(t)}{B}$ (kg) oranında tuz bulunur. Herhangi bir t anında tank içindeki tuz miktarının değişimi, dakikada q litre karışım tanktan boşaltıldığından dolayı,

$$y'(t) = -q\frac{y(t)}{B}$$

diferansiyel denklemi ile modelleyebiliriz. Ancak, aynı anda saf su girişi ve tuzlu su çıkışı olduğundan ve karıştırılsa da karışımın homojen hale gelmesi zaman alacağından, gerçekte herhangi bir t anında çıkan suyun tuz oranı deponun her yeriyle eşit olamaz. Yani homojen bir karışım elde edilmesi mümkün değildir. Bu durumda t anında depodan ayrılan tuz miktarı, h kadar önceki bir andaki tuz oranına bağlı olacaktır. Sistem yeniden modellendiğinde,

$$y'(t) = -q\frac{y(t-h)}{B}$$

gecikmeli diferansiyel denklemi elde edilir.

Yukarıda verilen örnek sistemlerin ikisi de sabit gecikmeler ile modellenmişlerdir. Fakat bazı sistemlerde, gecikmeler sistemin kendi içsel etkenlerine göre değişmektedir. Bu durumda, duruma bağlı gecikme terimi kullanarak daha gerçekçi bir modelleme yapmış oluruz. Örneğin, popülasyon dinamiklerinin temel modellerinde, ergenliğe geçiş süresi sabit bir gecikme olarak alınmaktadır (Murray, 2002). Fakat, Antarktika balinalarının ve fok balıklarının ergenliğe geçiş sürelerinin, popülasyonun durumuna göre değiştiği gösterilmiştir (Gambell, 1985). Dahası, durum değişkenine bağlı gecikme terimi içeren diferansiyel denklemeler ile bu sistem modellenmiştir (Aiello ve diğ., 1992). Bu tip denklemleri biz kısaca durum gecikmeli diferansiyel denklemler olarak adlandıracağız.

Literatürde bir çok farklı alanda durum gecikmeli diferansiyel denklemler ile modellemeler yapılmıştır. Bunlardan bazıları şöyledir. Öncü nötrofillerin

olgunlaşması ve RNA sentezi gibi bazı biyolojik gecikmelerin durum değişkenine bağlı olduğu gösterilmiştir (Price ve diğ., 1996). Biyolojik çalışmalara bir diğer örnekte, kırmızı kan hücrelerinin üretimini sağlayan kemik iliği kök hücrelerinin popülasyon dinamiklerinin durum gecikmeli diferansiyel denklemler ile modellenmesidir (Mahaffy ve diğ., 1998), (Kirk ve diğ., 1970), (Mackey ve Milton, 1990).

Mekanik ve mühendislik alanında da durum gecikmeli diferansiyel denklemler kullanılmaktadır. Örneğin, çelik haddeleme işleminde kontrol sistemi (Johnson, 1972), otomatik yumuşak iniş modeli (Walter, 2003), frezeleme ve kesme işlemleri modelleri (Insperger ve diğ., 2005), (Insperger ve diğ., 2007) durum gecikmeli diferansiyel denklemlerin yardımıyla oluşturulmuştur. Ek olarak, duruma göre üretim ve depolama gecikmelerinin bulunduğu tek emtia pazarında ücret ayarlaması durum gecikmeli diferansiyel denklemler ile modellenmiştir (Mackey, 1989).

Son 50 yıldır, durum gecikmeli diferansiyel denklemler ile ilgili araştırmalar yapılmaktadır. Driver (1963a, 1963b) ve Driver ve Norris (1967), durum gecikmeli diferansiyel denklemler için temel teoriyi kurmuş ve Lipschitz sürekli başlangıç fonksiyonuna sahip denklemlerin çözümlerinin varlık ve tekliğini ispatlamıştır. Daha sonra Winston (1974) başlangıç fonksiyonunun sürekli olmasının yanı sıra bazı koşulları da sağlayan durum gecikmeli diferansiyel denklemlerin tek çözüme sahip olduğunu göstermiştir.

Bunlara ek olarak, durum gecikmeli diferansiyel denklemler üzerine yapılan ilk çalışmalar, özel bir tip durum gecikmeli diferansiyel denklemler için asimptotik teorinin ele alınması (Cooke, 1967) ve periyodik çözümlerin araştırılmasıdır (Nussbaum, 1974), (Alt, 1978).

Daha sonra, denklemin yavaş salınımlı periyodik çözümleri üzerine araştırmalar yapılmıştır (Mallet-Paret ve diğ., 1994), (Arino ve diğ, 1998), (Magal, 2000). Bir parametreli durum gecikmeli diferansiyel denklemlerin yavaş salınımlı periyodik çözümlerinin, singüler limit noktasında asimptotik karakteri üzerine Mallet-Paret ve Nussbaum (1992, 1996, 2003) tarafından bir dizi araştırma yayınlanmıştır.

Krisztin ve Arino (2001) ve Humphries (2012) periyodik orbitlerle ilgili sonuçlar elde etmişlerdir. Demir (2007) periyodik zaman gecikmeleri içeren matematiksel modeller için kararlılık analizi yapmıştır. Ayrıca, durum gecikmeli diferansiyel denklemler için merkez manifold teorisi de bir çok araştırmanın konusu olmuştur (Hartung ve diğ., 2006), (Krisztin, 2006), (Qesmi ve Walther, 2009), (Stumpf, 2011), (Stumpf, 2012), (Arino ve Sanchez, 2005).

1. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, tezin ana konusu olan gecikmeli diferansiyel denklemler ile ilgili temel tanım ve teoremler verilecek ve gecikmeli diferansiyel denklemlerin bazı özellikleri açıklanacaktır.

Tanım 1.1: t bir bağımsız değişken olmak üzere, bilinmeyen fonksiyon $y(t)$'yi, $y(t)$'nin türevini ve bağımsız değişkenin başka bir fonksiyonu $u(t)$'ye bağlı şekilde $y(u(t))$'yi içeren diferansiyel denkleme fonksiyonel diferansiyel denklem denir (Driver, 1977).

Fonksiyonel diferansiyel denklemlerin mertebesi, adi diferansiyel denklemlerde olduğu gibi denklemde bulunan en yüksek merteben türevin mertebesidir. Bu durumda, birinci mertebeden fonksiyonel diferansiyel denklemin genel ifadesi

$$y'(t) = f(t, y(t), y(u(t)))$$

şeklinde verilir.

Tanım 1.2: Bir diferansiyel denklemde en yüksek mertebeden türev içeren terimin argümanı, düşük mertebeden terimlerin argümanından daha küçük değilse bu diferansiyel denkleme gecikmeli diferansiyel denklem denir (Driver, 1977).

Gecikmeli diferansiyel denklemler, fonksiyonel diferansiyel denklemlerin özel bir halidir. Birinci mertebeden ve tek zaman gecikmeli diferansiyel denklemin genel ifadesi

$$y'(t) = f(t, y(t), y(t-h)), \quad h \in IR^{+} \tag{1.1}$$

şeklindedir. Eğer birden fazla zaman gecikmesi varsa denklemin genel ifadesi, $n \in Z$ ve $i = 1,2,\cdots,n$ olmak üzere

$$y'(t) = f(t, y(t), y(t-h_1), y(t-h_2), \cdots, y(t-h_n)), \quad h_i \in IR^{+}$$

olur. Gecikme terimi durum değişkenine bağlı ise denklemin genel ifadesi

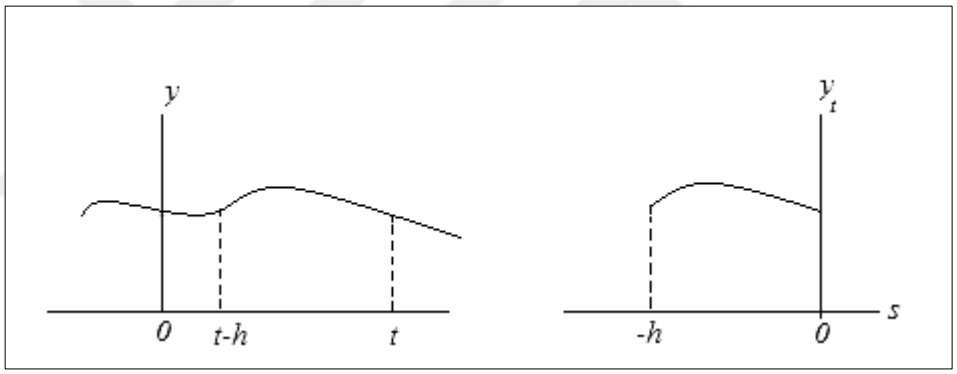
$$y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(y(t))) \tag{1.2}$$

şeklindedir. Burada $\tau : IR \to [0,h]$ sürekli bir fonksiyondur ve gecikme terimi olarak adlandırılır. Denklem (1.2) lineer olmayan bir diferansiyel denklemdir.

Eğer $y : [t-h,t] \to IR^n$ ise yeni bir $y_t : [-h,0] \to IR^n$ fonksiyonu tanımlayabiliriz öyle ki ;

$$y_t(s) = y(t+s), \quad -h \le s \le 0.$$

Şekil 1.1 'den de açıkça görüldüğü gibi eğer y, $[t-h,t]$ üzerinde sürekli ise y_t, $[-h,0]$ üzerinde süreklidir.



Şekil 1.1. y_t fonksiyonunun tanımı

Diğer taraftan, $J \subseteq IR$ ve $D \subseteq IR^n$ açık kümeleri, $C = C([t,t+h],D)$ ile $[t,t+h]$ aralığından D 'ye tanımlı olan sürekli fonksiyonların kümesini ve $C_h = C([-h,0],D)$ ile $[-h,0]$ aralığından D 'ye tanımlı olan sürekli fonksiyonların kümesini gösterelim. Bu durumda $F : J \times C \times C_h \to IR^n$ fonksiyoneli olmak üzere Denklem (1.1) ve Denklem (1.2)

$$y'(t) = F(t, y, y_t) \tag{1.3}$$

genel formunda yazılabilir. Burada $u \in C$ ve $v \in C_h$ için eğer $F(t,u,v) = f(t,u,v(-h))$ veya $F(t,u,v) = f(t,u,v(-\tau(v(0))))$ alınırsa, Denklem (1.3), sırasıyla, Denklem (1.1) veya Denklem (1.2) 'nin genel forumu olur.

Tanım 1.3: $\varphi \in C_h$ olmak üzere C_h üzerinde

$$\|\varphi\|_h = \sup_{-h \le \theta \le 0} \|\varphi(\theta)\|$$

normunu tanımlayalım. Burada $\|.\|$ normu, IR^n de Öklid normudur.

Tanım 1.4: $F : J \times C \times C_h \to IR^n$ olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyor ise

(i) $y \in C([t_0 - h, \beta], D)$,

(ii) $[t_0 - h, \beta) \subset J$,

(iii) $y(t)$ fonksiyonu, $t \in [t_0 - h, \beta)$ için Denklem (1.3)'ü sağlayacak şekilde $t_0 \in IR$ ve $\beta > t_0$ vardır,

$y(t)$ fonksiyonu Denklem (1.3)'ün $[t_0 - h, \beta]$ aralığında bir çözümüdür denir.

Tanım 1.5: $t_0 \in IR$ ve $\varphi_0 \in C_h$ verilsin.

$$\begin{cases} y'(t) = F(t, y, y_t) & \\ & t \ge t_0 \\ y_{t_0} = \varphi_0 & \end{cases} \tag{1.4}$$

veya

$$\begin{cases} y'(t) = F(t, y, y_t), & t \ge t_0 \\ y_{t_0} = \varphi_0(t - t_0), & t_0 - h \le t \le t_0 \end{cases} \tag{1.5}$$

problemlerine Denklem (1.3) ile ilişkili başlangıç değer problemi denir.

Gecikmeli diferansiyel denklemlerle ile ilgi bazı özel durumları incelenmesi aşağıda verilmiştir. Bu özel durumlar, gecikmeli diferansiyel denklemlerin adi diferansiyel denklemlerden farklı olan özelliklerini açıklar.

Durum 1.1: Birinci mertebeden, lineer, reel katsayılı homojen gecikmeli diferansiyel denklemler aşikar olmayan salınımlı bir çözüme sahip olabilir. Yani sıfırdan farklı $y(t)$ çözümü, yeterince büyük t_0 değeri için $y(t_0)=0$ ve $t \neq t_0$ için $y(t) \neq 0$ 'dır. Bu durum adi diferansiyel denklemler için imkansızdır (Driver, 1977).

Örnek 1.1: c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere

$$y'(t) = -y(t - \frac{\pi}{2})$$

denklemi $y(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$ çözümüne sahiptir (Driver, 1977).

Durum 1.2: Problem (1.5) 'in başlangıç koşulu sürekli olsun. $t \leq t_0$ için sürekli bir çözüm fonksiyonu bulunamayabilir. Bu durum, geçmişe doğru süreksizlik olarak tanımlanır. Geçmişe doğru süreksizliğin olması, sistemin sürekli bir geçmiş bilgisinin oluşturulamaması demektir. Dolayısıyla $t > t_0$ için elde edilecek çözüm IR 'nin yarı açık alt aralıklarında parçalı bir fonksiyon formunda olur.

Örnek 1.2: a, b ve k sıfırdan farkı reel sayı, h pozitif reel sayı olmak üzere $a \neq b$ olsun.

$$\begin{cases} y'(t) = ay(t) + by(t-h) \\ \\ y(t) = k, \qquad\qquad t \in [-h, 0] \end{cases}$$

probleminin $[-2h, -h]$ aralığında çözümü $y(t) = -\frac{ak}{b}$ dir. Diğer taraftan, $a \neq b$ olduğundan $-k\frac{a}{b} \neq -k$ dır ve $t = -h$ da çözüm sürekli değildir (Driver, 1977).

Durum 1.3: Seçilen bir başlangıç koşulu ile $t \leq t_0$ geçmişe doğru süreklilik sağlansın. Bu durumda da çözüm tek olmayabilir.

Örnek 1.3:

$$y'(t) = -y(t - |y(t)|)$$

Durum gecikmeli diferansiyel denklem için $\varphi(t)$ başlangıç fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\varphi(t) = \begin{cases} -1, & t \le -1, \\ \frac{3}{2}(t+1)^{\frac{1}{3}} - 1 & -1 < t \le -\frac{7}{8}, \\ \frac{10}{7}t + 1 & -\frac{7}{8} < t \le 0. \end{cases}$$

$t > 0$ için $y(t) = t + 1$ ve $y(t) = t + 1 - t^{\frac{3}{2}}$ fonksiyonlarının ikisi de çözüm fonksiyonudur (Winston, 1970).

Durum 1.4: Problem (1.5) 'in çözümünün karakteri ile gecikme terimi içeren terim yerine onun Maclaurin serisinin ilk bir kaç teriminin yazılmasıyla elde edilen adi diferansiyel denklemin çözümün karakteri farklı olabilir. Bu durumda, bu yolla yaklaşık bir sonuç elde etmek doğru olmayacaktır.

Örnek 1.4:

$$y'(t) = -3y(t) - 2y(t-1)$$

denkleminin bütün asimptotik çözümleri sınırlıdır. Ancak, denklemde $y(t-1)$ in yerine onun Maclaurin serisinin ilk iki terimi $y(t) - y'(t)$ yazılmasıyla elde edilen adi diferansiyel denklemin çözümü $y(t) = ce^{5t}$ üstel olarak artandır (Driver, 1977).

Durum 1.5: Problem (1.3) 'ün çözümünün, $t = t_0$ anında türevi olmayabilir. Dahası sabit h gecikmeli diferansiyel denklemlerde böyle bir durum, $t = t_0 + h$, $t = t_0 + 2h$, $t = t_0 + 3h$, $\cdots$ noktalarında da türevin olmamasına neden olur.

Örnek 1.5:

$$\begin{cases} y'(t) = y(t-h), & t > 0 \\ y(t) = k, & -h \le t \le 0 \end{cases}$$

problemini ele alalım. $k \neq 0$ olmak üzere $y'(0^-) = 0$ ve $y'(0^+) = k$ olduğundan dolayı çözümün $t = 0$ da türevi yoktur.

1.1. Varlık ve Teklik Teoremleri

Tanım 1.1.1: $\tilde{F} : J \times C_h^m \to IR^n$ ve $G \subset J \times C_h^m$ olsun. $(t,u_1,\cdots,u_m)$, $(t,\tilde{u}_1,\cdots,\tilde{u}_m) \in G$ olmak üzere eğer

$$\left\| \tilde{F}(t,u_1,\cdots,u_m) - \tilde{F}(t,\tilde{u}_1,\cdots,\tilde{u}_m) \right\| \le K \underset{i=1,\cdots m}{maks} \|u_i - \tilde{u}_i\|_h$$

olacak şekilde $K \in IR$ varsa, $\tilde{F}$ fonksiyonuna G üzerinde Lipschitz süreklidir denir (Driver, 1977).

Tanım 1.1.2: $\tilde{F} : J \times C_h^m \to IR^n$ ve $G \subset J \times C_h^m$ olsun. Eğer her bir $(t,u_1,\cdots,u_m) \in G$ için $B_j = \{u \in C \mid \|u - u_j\| \le b,\ j = 1,\cdots,m$ iken

$$\Gamma = ([t-a, t+a] \cap J) \times B_1 \times \cdots \times B_m \subset J \times C_h^m$$

olacak şekilde $a > 0$ ve $b > 0$ sayıları var ve $\tilde{F}$ fonksiyonu Γ üzerinde Lipschitz sürekli ise $\tilde{F}$ yerel Lipschitz süreklidir denir (Driver, 1977).

Tanım 1.1.3: x, $[t_0 - h, \beta_1]$ aralığında ve y, $[t_0 - h, \beta_2]$ aralığında Problem (1.5) 'in iki çözümü olsunlar. Eğer $\beta_2 > \beta_1$ ve $t \in [t_0 - h, \beta_1]$ için $x(t) = y(t)$ ise, y 'ye x 'in genişleme fonksiyonu denir veya x çözümünün, $[t_0 - h, \beta_2]$ aralığına genişletilmesidir denir. Eğer Problem (1.5) 'in bir çözümü genişleme fonksiyonuna sahip değilse genişletilemez denir (Driver, 1977).

Tanım 1.1.4: D 'nin kapalı ve sınırlı bir alt kümesi A, $t_0 < \beta < \alpha$ ve $C^A = C([t-h,t],A)$ olsun. Eğer $F:[t_0,\alpha]\times C^A \times C_h^A \to IR^n$ fonksiyoneli, $[t_0,\beta]\times C^A \times C_h^A$ şeklindeki her küme üzerinde sınırlı ise quasi sınırlıdır denir (Driver, 1977).

Teorem 1.1.1: $F:[t_0,\alpha]\times C\times C_h \to IR^n$ sürekli, yerel Lipschitz sürekli ve quasi sınırlı olsun. Her φ_0 başlangıç koşulu için bir $\beta > 0$ vardır öyle ki Başlangıç Değer Problemi (1.5) için $[t_0 - h,\beta)$ üzerinde genişletilemez tek y çözümü vardır (Driver, 1977).

Teorem 1.1.2:

$$\begin{cases} y'(t) = F(t,y,y(t-\tau(t))), & t_0 \le t \le \alpha \\ y_{t_0} = \varphi_0 \end{cases} \tag{1.6}$$

problemini ele alalım. $F(t,u,v)$ fonksiyonu, $\tilde{A} \subset [t_0,\alpha]\times C\times C_h$ bölgesinde sürekli ve yerel Lipschitz sürekli olsun. Aynı zamanda, $\tau(t) \ge 0$ gecikme fonksiyonu $[t_0,\alpha)$ aralığında sürekli, $\tau(t_0) = 0$ ve $\exists \xi > 0$ için $(t_0, t_0+\xi)$ aralığında $t - \tau(t) \ge t_0$ olsun. Bu durumda Problem (1.6), $\exists \delta > 0$ için $[t_0, t_0+\delta)$ aralığında tek çözüme sahiptir (Bellen, 2003).

Teorem 1.1.3:

$$\begin{cases} y'(t) = F(t,y,y(t-\tau(t,y(t)))), & t_0 \le t \\ y_{t_0} = \varphi_0 & t \le t_0 \end{cases} \tag{1.6}$$

problemini ele alalım. $U \subset IR^n$ ve $V \subset IR^n$ sırasıyla $\varphi_0(t_0)$ ve $\varphi_0(t_0 - \tau(t_0,\varphi(t_0)))$ 'ın komşulukları olsunlar. Kabul edelim ki, $F(t,u,v)$ fonksiyonu, t 'ye göre sürekli ve $[t_0,t_0+h]\times C([t_0,t_0+h],U)\times C([t_0-h,t_0],V)$ 'de u ve v 'ye göre Lipschitz sürekli olsun. Aynı zamanda, $\varphi_0(t)$ başlangıç fonksiyonu $t < t_0$ için Lipschitz

sürekli ve $\tau(t,y) \geq 0$ gecikme fonksiyonu t 'ye göre sürekli ve $[t_0, t_0+h] \times C([t_0, t_0+h], U)$ 'da y 'ye göre Lipschitz sürekli olsun. Bu durumda, Problem (1.6), $\delta > 0$ için $[t_0, t_0+\delta)$ aralığında tek çözüme sahiptir (Bellen, 2003).

Teorem 1.1.4 (Global Varlık ve Teklik Teoremi): Teorem 1.1.3 'de verilen hipotezler altında, $M(t)$ ve $N(t)$ fonksiyonları $[t_0, \alpha)$ aralığında pozitif değerli sürekli fonksiyonlar olmak üzere, $F(t,u,v)$ fonksiyonu, tanımlı olduğu aralıkta

$$\|F(t,u,v)\| \leq M(t) + N(t)(\|u\|_h + \|v\|_h)$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda Problem (1.6) 'nın çözümü vardır ve $[t_0, \alpha)$ aralığında çözüm tektir (Bellen, 2003).

2. GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Bu bölümde, öncelikle sabit gecikmeli lineer diferansiyel denklemler için adımlar yöntemi ile çözümün elde edilişi ele alınacaktır.

El'sgol'ts ve Norkin (1973) bu tip denklemlerin çözümünün, adi diferansiyel denklemler için geçerli olan Euler metodu ile elde edilebileceğini de göstermiştir. Ayrıca, sabit gecikmeli lineer denklemlerin çözümü için Laplace dönüşümünün kullanımı bir çok kaynakta açıklanmıştır ve bunlardan bazıları (Burton, 1985), (Driver, 1977), (El'sgol'ts ve Norkin, 1973) ve (Bellman ve Cooke, 1963) olarak verilebilir.

Durum gecikmeli diferansiyel denklemler, lineer olmayan denklemler olduğundan adımlar yöntemini kullanarak analitik bir çözüm elde etmek mümkün değildir. Bu nedenle, bu bölümde, durum gecikmeli diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümü için adımlar yöntemi ile birlikte Legendre polinomları kullanıldı.

2.1. Adımlar Yöntemi

Birinci mertebeden sabit gecikmeli diferansiyel denklemi

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y, y(t-h)), & t \geq t_0, \quad h > 0 \\ y(t) = \varphi_0(t), & t_0 - h \leq t \leq t_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

$\varphi_0(t)$ başlangıç koşulu ile ele alalım. Burada $\varphi_0(t) : IR \to IR^n$ sürekli başlangıç fonksiyondur.

Eğer t, değişkeni $t \in [t_0, t_0 + h]$ olarak alınırsa, $t - h \in [t_0 - h, t_0]$ olur ve bu aralıkta $y(t-h) = \varphi_0(t-h)$ olduğu açıktır. O halde Problem (2.1)

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y, \varphi_0(t-h)), & t_0 \leq t \leq t_0 + h, \quad h > 0 \\ y(t_0) = \varphi_0(t_0), \end{cases} \tag{2.2}$$

adi diferansiyel denklem içeren başlangıç değer problemine dönüşür. Adi diferansiyel denklemin varlık ve teklik teoreminden dolayı aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 2.1: Eğer $f(t,y,u)$ fonksiyonu, t ve y değişkenlerine göre sürekli ve y değişkenine göre $(t_0,\varphi_0(t_0))$ 'ın bir komşuluğunda yerel Lipschitz sürekli ve φ_0 fonksiyonu da t 'ye göre t_0 'ın bir komşuluğunda sürekli ise Problem (2.1) 'in, $(t_0,\varphi_0(t_0))$ 'ın bir komşuluğunda tek çözümü vardır.

Böylece, eğer Problem (2.2) 'nin çözümü, $[t_0,t_0+h]$ aralığının tümünde sürekli ise Problem (2.1) 'in bu aralıktaki çözümü olur. Bu çözüm fonksiyonunu $\varphi_1(t)$ ile gösterelim. Bu durumda, $t\in[t_0,t_0+h]$ için $\varphi_1(t)$, Problem (2.1) 'in $[t_0+h,t_0+2h]$ aralığındaki çözümü için bir başlangıç fonksiyonu olur.

O halde, $t\in[t_0+h,t_0+2h]$ için Problem (2.1)

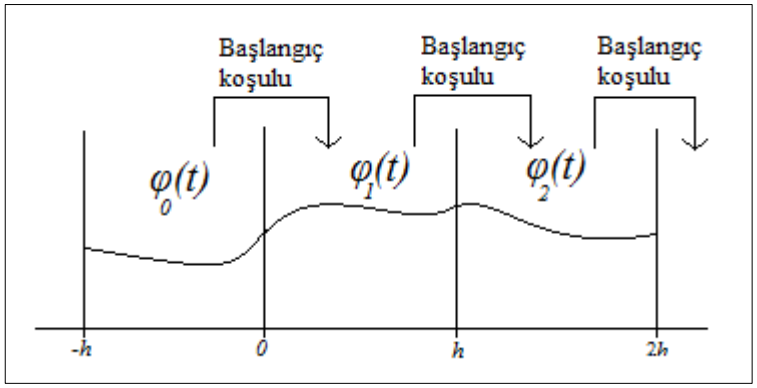
$$\begin{cases} y'(t)=f(t,y,\varphi_1(t-h)), \quad t_0+h\le t\le t_0+2h, \quad h>0 \\ y(t_0+h)=\varphi_1(t_0+h), \end{cases} \tag{2.3}$$

adi diferansiyel denklem içeren başlangıç değer problemine dönüşür.

Bu yöntemle, çözüm sonlu bir aralık için genişletilebilir. Adımlar yöntemi kullanılarak elde edilen çözümün varlık ve tekliği adi diferansiyel denklemlerin varlık ve teklik teoreminden sağlanır.

Şekil 2.1 'de, adımlar metodunda bir aralıktaki çözümün diğer aralık için başlangıç koşulu olduğu gösterilmiştir.

Örnek 2.1: Giriş bölümünde açıklanan tuzlu su karışım problemini çözelim. Kabul edelim ki başlangıçta su tankında $\phi_0\in IR$ kg tuz olan B litre tuzlu su bulunsun. Tankın muslukları t_0 anında açılsın.



Şekil 2.1. Adımlar metodu

Bu durumda $c=-\frac{q}{B}$ olmak üzere, problemimiz sabit başlangıç koşullu

$$\begin{cases} y'(t)=-cy(t-h), & t>t_0 \\ y(t)=\phi_0, & t\le t_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

problemi olur. $t\in[t_0,t_0+h]$ için Problem (2.4)

$$\begin{cases} y'(t)=-c\phi_0 \\ y(t_0)=\phi_0 \end{cases}$$

başlangıç değer problemine dönüşür ve çözümü $y_1(t)=\phi_0(1-c(t-t_0))$ olarak elde edilir. Benzer şekilde $t\in[t_0+h,t_0+2h]$ için Problem (2.4)

$$\begin{cases} y'(t)=-c\phi_0(1-c(t-h-t_0)) \\ y(t_0+h)=\phi_0(1-ch) \end{cases}$$

başlangıç değer problemine dönüşür ve çözümü

$$y_2(t)=\frac{c^2\phi_0 t^2}{2}-c\phi_0(1+c(h+t_0))t+k$$

olarak elde edilir. Başlangıç değeri kullanılarak

$$k = -\frac{c^2\phi_0(h+t_0)^2}{2} + c\phi_0(h+t_0)(1+c(h+t_0)) - c\phi_0 h + \phi_0$$

olarak bulunur.

2.2. Legendre Polinomları ile Seri Çözüm

Durum gecikmeli diferansiyel denklemleri adımlar metodu ile çözerken, elde edilen adi diferansiyel denklemler çoğunlukla lineer olmayan denklemlerdir. Bu bölümde, lineer olmayan denklemlerin yaklaşık çözümü için Legendre polinomları kullanılacaktır.

Legendre polinomları lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümü için çok fazla kullanılan ortogonal polinomlardır. Bu polinomlarla verilen serinin yakınsaklığı ve kullanım alanları ile ilgili daha ayrıntılı bilgiler (El-Mikkawy ve Cheon, 2005), (Elbarbary, 2002), (Phillips, 2003) kaynaklarından bulunabilir.

Öncelikle Legendre polinomlarının tanımını ve temel özelliklerini açıklayalım.

Tanım 2.2.1: $z \in [-1,1]$ için

$$L_{k+1}(z) = \frac{2k+1}{k+1} zL_k(z) - \frac{k}{k+1} L_{k-1}(z), \quad k = 1,2\cdots$$

$$L_0(z) = 1, \quad L_1(z) = z$$

özyineleme bağıntısı ile tanımlı polinomlara Legendre polinomları denir (Bell, 1968).

Tanımdan da açıkça görülüyor ki L_n , $n.$ dereceden bir polinomdur.

Legendre polinomlarının en önemli özelliği L^2 iç çarpımına göre $z \in [-1,1]$ için ortogonal polinomlar olmalarıdır. Yani

$$\int_{-1}^{1} L_n(z)L_m(z)dz = \begin{cases} \dfrac{2}{2n+1}, & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

Tablo 2.1 de Legendre polinomlarının ilk on terimi gösterilmiştir.

Tablo 2.1. Legendre polinomlarının ilk on terimi

k	L_k
0	1
1	x
2	$\frac{1}{2}(3x^2-1)$
3	$\frac{1}{2}(5x^3-3x)$
4	$\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$
5	$\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$
6	$\frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5)$
7	$\frac{1}{16}(429x^7-693x^5+315x^3-35x)$
8	$\frac{1}{128}(6435x^8-12012x^6+6930x^4-1260x^2+35)$
9	$\frac{1}{128}(12155x^9-25740x^7+18018x^5-4620x^3-315x)$
10	$\frac{1}{128}(46189x^{10}-109395x^8+90090x^6-30030x^4+3465x^2-63)$

Teorem 2.2.1: $n.$ dereceden Legendre polinomunun $[-1,1]$ aralığında bir birine eşit olmayan n tane kökü vardır (Phillips, 2003).

Literatürde ki bir çok çalışmada, $x \in [0,1]$ aralığında Legendre polinomlarını kullanabilmek için $z = 2x-1$ değişken değişimi ile ötelenmiş Legendre polinomları kullanılır. Bu değişken değişimi bir afin dönüşümdür.

Adımlar metoduyla birlikte, $[a,b]$ aralığında Legendre polinomlarını kullanabilmek için $z = \frac{-2t+a+b}{a-b}$ afin dönüşümü yapılır. Burada $a \geq 0$, $b > 0$ reel sayılardır.

Tanım 2.2.2: $t \in [a,b]$ için,

$$P_{k+1}^{a,b}(t)=\frac{(2k+1)(-2t+a+b)}{(k+1)(a-b)}P_k^{a,b}(t)-\frac{k}{k+1}P_{k-1}^{a,b}(t),\quad k=1,2\cdots$$

$$P_0^{a,b}(t)=1,\quad P_1^{a,b}(t)=\frac{-2t+a+b}{a-b}$$

özyineleme bağıntısı ile tanımlı polinomlara ab-ötelenmiş Legendre polinomları denir.

ab-ötelenmiş Legendre polinomları için $L^2[a,b]$ iç çarpımı

$$\int_a^b P_n^{a,b}(t)P_m^{a,b}(t)dt=\begin{cases}\dfrac{b-a}{2n+1}, & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases}$$

şeklinde hesaplanır. Ayrıca, ab-ötelenmiş Legendre polinomlarının kapalı formu

$$P_k^{a,b}(t)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k+i}\frac{(k+i)!}{(k-i)!(i!)^2}\left(\frac{a-t}{a-b}\right)^i,\quad k=0,1,2\cdots$$

şeklinde ifade edilir.

Eğer $y(t)$ fonksiyonu, $[a,b]$ aralığında karesi integrallenebiliyorsa, ab-ötelenmiş Legendre polinomlarının terimleri ile

$$y(t)=\sum_{i=0}^{\infty}c_iP_i^{a,b}(t)$$

şeklinde ifade edilebilir (Phillips, 2003). Burada c_i katsayıları

$$c_i=\frac{2i+1}{b-a}\int_a^b y(t)P_i^{a,b}(t)dt,\quad i=0,1,\cdots \tag{2.5}$$

eşitliği ile hesaplanır.

Tanım 2.2.3: $i=0,1,2,\cdots,m$ olmak üzere c_i katsayıları Eşitlik (2.5) teki gibi tanımlanmak üzere.

$$y_m(t) = \sum_{i=0}^{m} c_i P_i^{a,b}(t)$$

polinomuna, $y(t)$ fonksiyonunun m. dereceden ab-ötelenmiş Legendre polinom yaklaşımı denir.

Önerme 2.2.1: $y_m(t)$, $y(t)$ fonksiyonunun m. dereceden Legendre polinom yaklaşımı olsun.

$$\frac{dy_m(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{k} (-1)^{k+i} c_k d_{i,k} \left(\frac{a-t}{a-b}\right)^{i-1}, \quad m = 1,2\cdots$$

şeklinde hesaplanır, burada $d_{i,k} = \dfrac{(k+i)!i}{(k-i)!(i!)^2(b-a)}$.

2.2.1. Legendre polinomları ile yaklaşık çözümün elde edilmesi

Birinci mertebeden durum gecikmeli diferansiyel denklem içeren

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t-\tau(y(t)))), & t \geq t_0 \\ y(t) = \varphi_0(t), & t_0 - h \leq t \leq t_0 \end{cases} \tag{2.6}$$

başlangıç değer problemini ele alalım. Burada $\varphi_0(t) : IR \to IR^n$ ve $\tau : IR \to [0,h]$ sürekli fonksiyonlardır.

$t_m = t_0 + h$ olsun. Eğer t değişkeni $[t_0, t_m]$ aralığında alınırsa, $t - h \in [t_0 - h, t_0]$ olur ve Problem (2.6)

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y, \varphi_0(t-\tau(y(t)))), & t_0 \leq t \leq t_0 + h, \\ y(t_0) = \varphi_0(t_0), \end{cases} \tag{2.7}$$

adi diferansiyel denklem içeren başlangıç değer problemine dönüşür. Burada $\varphi_0(t-\tau(y(t)))$, t ve $y(t)$ 'nin fonksiyonu olduğundan dolayı Problem (2.7)

$$\begin{cases} y'(t) = \tilde{f}(t, y(t)), \quad t_0 \le t \le t_0 + h \\ y(t_0) = \varphi_0(t_0), \end{cases} \tag{2.8}$$

şeklinde yazılabilir.

$y(t)$ fonksiyonunun m. dereceden $t_0 t_m$-ötelenmiş Legendre polinom yaklaşımı

$$y_m(t) = \sum_{i=0}^{m} c_i P_i^{t_0, t_m}(t)$$

olsun ve Problem (2.8) 'de yerine yazılsın. Önerme 2.2.1 'den

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{i} (-1)^{k+i} c_i d_{i,k} \left(\frac{a-t}{a-b} \right)^{i-1} = f(t, \sum_{i=0}^{m} c_i P_i^{a,b}(t)) \tag{2.9}$$

elde edilir. Eşitlik (2.9), t_p, $p = 1,2 \cdots, m$, noktalarındaki değerleri için düzenlenirse m tane lineer veya lineer olmayan

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{i} (-1)^{k+i} c_i d_{i,k} \left(\frac{a-t_p}{a-b} \right)^{i-1} = f(t, \sum_{i=0}^{m} c_i P_i^{a,b}(t_p)) \tag{2.10}$$

cebirsel denklemleri elde edilir. Burada t_p noktalarını belirlerken $P_m^{t_0, t_m}$ polinomunun köklerini kullanmak daha uygun sonuçlar verir.

Problem (2.8) 'in başlangıç koşulundan da

$$\sum_{i=0}^{m} c_i P_i^{a,b}(t_0) = \varphi_0(t_0) \tag{2.11}$$

cebirsel denklemi elde edilir.

Sonuç olarak, Eşitlik (2.10) ve (2.11) bize $m+1$ tane lineer veya lineer olmayan cebirsel denklem verir. Bu cebirsel denklemler, bilinmeyen c_n, $n = 0,1, \cdots, m$, katsayıları için çözülür ve $y(t)$ çözüm fonksiyonunun m. dereceden $t_0 t_m$-ötelenmiş Legendre polinom yaklaşımı bulunur.

Adımlar metodunda da açıklandığı gibi daha sonra elde edilen çözüm fonksiyonu bir sonraki adım için başlangıç koşulu olarak alınır.

Örnek 2.2.1: Aşağıdaki durum gecikmeli diferansiyel denklem içeren

$$\begin{cases} y'(t) = -2y(t) - y(t - \tau(y(t))), & 0 \le t, \quad \tau(y(t)) = 1 + y(t) \\ y(t) = -\frac{2}{3}t^2 + \frac{1}{2}, & -\frac{3}{2} \le t \le 0 \end{cases} \tag{2.12}$$

başlangıç değer probleminin çözümünü inceleyelim. $t \in [0, \frac{3}{2}]$ için Problem (2.12)

$$\begin{cases} y'(t) = -2y(t) + \frac{2}{3}(t - 1 - y(t))^2 + \frac{1}{2}, & 0 \le t \le \frac{3}{2} \\ y(0) = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

lineer olmayan adi diferansiyel denklem problemine dönüşür. $[0, \frac{3}{2}]$ aralığında $m = 4$ için yaklaşık çözüm

$$y_4(t) = \sum_{i=0}^{4} c_i P_i^{0,\frac{3}{2}}(t)$$

adi diferansiyel denklem probleminde yerine yazılırsa,

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{k=1}^{i}(-1)^{k+i} c_i d_{i,k} \left(\frac{2t_p}{3}\right)^{i-1} = -2\sum_{i=0}^{4} c_i P_i^{0,\frac{3}{2}}(t_p) + \frac{2}{3}(t_p - 1 - \sum_{i=0}^{4} c_i P_i^{0,\frac{3}{2}}(t_p))^2 + \frac{1}{2} \tag{2.13}$$

cebirsel denklemi elde edilir. t_p, $p = 1,2,3,4$, noktaları $P_4^{0,\frac{3}{2}}(t)$ polinomunun kökleri olmak üzere

$$t_1 = -\frac{1}{35}\sqrt{525 + 70\sqrt{30}}, \quad t_2 = \frac{1}{35}\sqrt{525 + 70\sqrt{30}},$$

$$t_3 = -\frac{1}{35}\sqrt{525 - 70\sqrt{30}}, \quad t_4 = \frac{1}{35}\sqrt{525 - 70\sqrt{30}}$$

şeklinde bulunur.

Başlangıç koşulundan $t_0 = 0$ için elde edilen

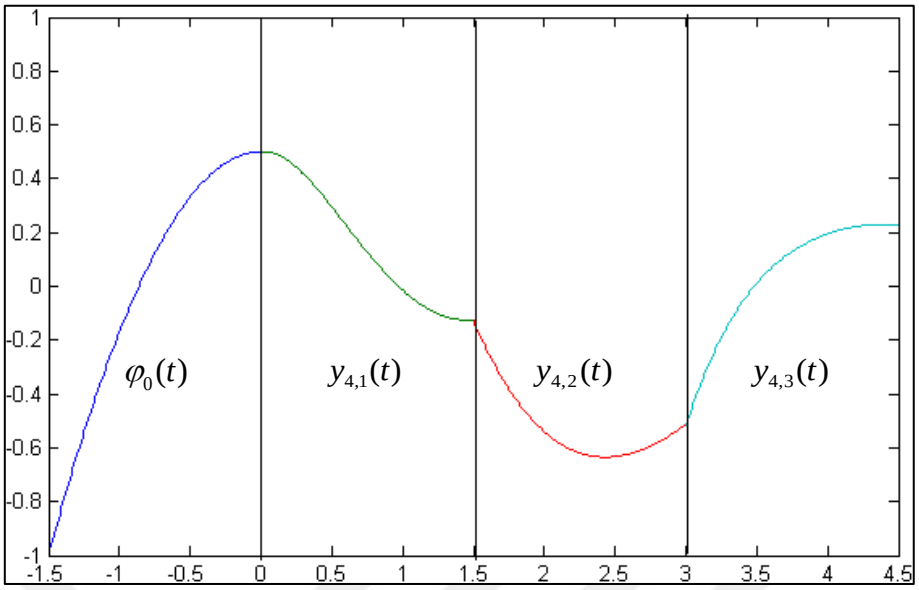
$$\sum_{i=0}^{4} c_i P_i^{0,\frac{3}{2}}(t_0) = c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + c_4 = \frac{1}{2}$$

Tablo 2.2. Örnek 2.2.1 'de elde edilen ab-ötelenmiş Legendre polinomlarının katsayıları

Adım	Aralık	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4
1	$[0,\frac{3}{2}]$	0,1562	-0,3815	0,0461	0,0686	-0,0152
2	$[\frac{3}{2},3]$	-0,5196	-0,1691	0,1992	-0,025	0,0006
3	$[3,\frac{9}{2}]$	0,0448	0,3267	-0,178	0,0429	-0,0111

cebirsel denklem ile birlikte Eşitlik (2.13) denklemleri çözülerek c_i katsayıları bulunabilir. Bulunan bu c_i katsayıları ile elde edilen çözümü $y_{4,1}(t)$ ile gösterelim. $y_{4,1}(t)$, $t \in [\frac{3}{2},3]$ için başlangıç koşulu olacaktır.

Maple 7 de fsolve komutu ile $P_k^{0,\frac{3}{2}}(t)$, $P_k^{\frac{3}{2},3}(t)$ ve $P_k^{3,\frac{9}{2}}(t)$ polinomları kullanılarak Problem (2.12) için hesaplanan c_i katsayıları Tablo 2.2 de gösterilmektedir. Ayrıca, Problem (2.12) 'nin başlangıç koşulu ve elde edilen polinomların bulundukları aralıklardaki grafikleri Şekil 2.2'de çizdirilmiştir. Şekil 2.2'de $\varphi_0(t)$ başlangıç koşulunu, $y_{4,i}(t)$, i. adımda elde edilen 4. dereceden Legendre polinomlarını göstermektedir



Şekil 2.2. Örnek 2.2.1 de elde edilen çözüm fonksiyonunun grafiğidir

Durum gecikmeli diferansiyel denklemlerde, gecikme miktarı çözüm fonksiyonuna göre değiştiği için başlangıç koşulunun hangi aralıkta alınacağının belirlenmesi çok önemlidir.

Eğer uygun bir başlangıç koşulu belirlenmezse gecikme negatif değer alabilir. Bu tip denklemlere öncü (advanced) diferansiyel denklemler denir ve gecikmeli diferansiyel denklemlerden farklı bir denklem sınıfıdır.

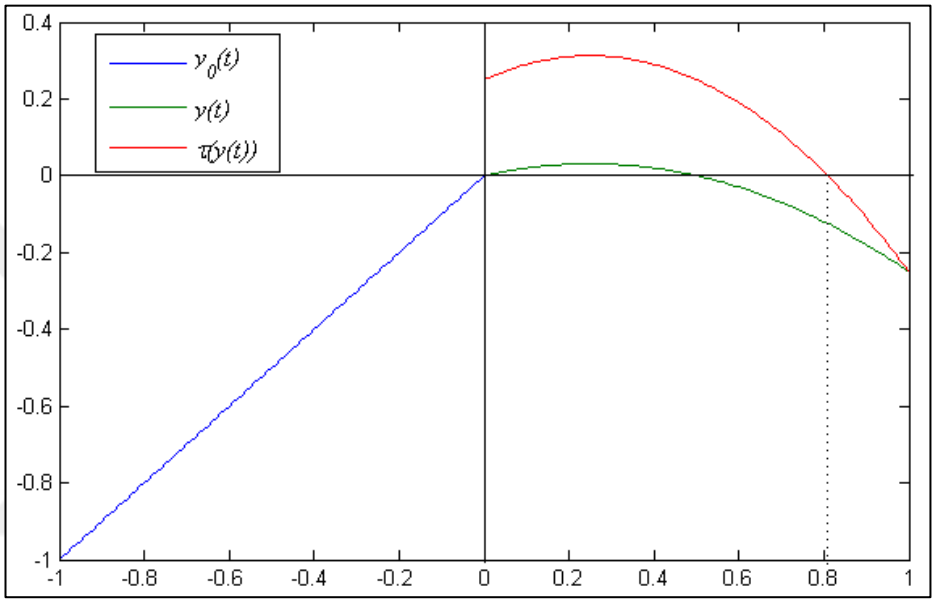
Örnek 2.2.2:

$$\begin{cases} y'(t) = -2y(t) - y(t - \tau(y(t))), & 0 \le t, \quad \tau(y(t)) = \dfrac{1}{4} + 2y(t) \\ y(t) = t, & -1 \le t \le 0 \end{cases} \tag{2.14}$$

başlangıç değer problemi $t \in [0,1]$ için

$$\begin{cases} y'(t) = -t + \dfrac{1}{4}, & 0 \le t \le 1 \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

problemine dönüşür. Bu problemin çözümünün $y(t) = -\frac{t^2}{2} + \frac{t}{4}$ olduğu açıktır. Bu durumda gecikme terimi de $\tau(y(t)) = -t^2 + \frac{t}{2} + \frac{1}{4}$ 'dir. Şekil 2.3'te de görüldüğü gibi gecikme fonksiyonu $t \in \left[\frac{1+\sqrt{5}}{4}, 1\right]$ aralığında negatif değer alır. Yani Problem (2.14) bir gecikmeli diferansiyel denklem problemi değildir.



Şekil 2.3. Problem (2,14) 'ün başlangıç, $t \in [0,1]$ için çözüm ve gecikme fonksiyonları

Ayrıca, çözümün ileri ki adımlarında gecikme fonksiyonunun aldığı en büyük değer bir önceki adımın uzunluğundan daha büyük olabilir. Bu durumda adımlar yöntemi ile çözüm elde edebilmek için adımların bir daha ayarlanması gerekebilir.

Örnek 2.2.3:

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t) - y(t - \tau(y(t))), & 0 \le t, \quad \tau(y(t)) = 1 + y(t) \\ y(t) = 1, & -1 \le t \le 0 \end{cases} \tag{2.15}$$

başlangıç değer problemi $t \in [0,1]$ için

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t) - 1, \quad 0 \le t \le 1 \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

problemine dönüşür. Bu problemin çözümünün $y(t) = 2e^{-t} - 1$ olduğu açıktır. Bu durumda, $t \in [0,1]$ için $maks(\tau(y(t))) = 2$ dir. Yani problemin başında tanımlanan başlangıç fonksiyonun tanım aralığının uzunluğundan daha büyüktür. Bu durumu düzeltmek için başlangıç fonksiyonunun tanım aralığını genişletmek yeterli olabilir. Fakat, benzer bir durum problemin çözümünün ileri ki adımlarında da karşımıza çıkabilir. Bu durumda, başlangıç fonksiyonu bir önceki çözümden daha önceki çözümleri de içermesi gerekeceğinden, elde edilen çözüm hatalı olacaktır.

Sonuç olarak, denklemin tipinin tam olarak belirlenmesi ve gecikme miktarının önceden hesaplanabilmesi için durum gecikmeli denklemlerde çözümün değer aralığının önceden bilinmesi oldukça önemlidir.

Sonraki bölümde, bazı durum gecikmeli diferansiyel denklemler için belli bir aralıkta değer alan çözümün varlığı ve tekliği incelenecektir.

3. ÇÖZÜMÜN BELLİ BİR ARALIKTA VARLIĞI VE TEKLİĞİ

Bu bölümde, $A_0, A_1 \in IR^+$, $a, b, c, d \in IR$ ve a ve c sıfırdan farklı, b veya d 'nin en az biri sıfırdan farklı olmak üzere

$$u'(t) = -A_0 u(t) - A_1 u(t - \tau(u(t)))$$
$$\tau(u(t)) = \frac{a + bu(t)}{c + du(t)} > 0, \qquad \forall t \in IR^+ \tag{3.1}$$

denklemini ele alacağız.

Denklem (3.1) in çözüm fonksiyonunun değer aralığını parametreler cinsinden elde edeceğiz. Ayrıca, $\tau(u(t)) = \frac{a + bu(t)}{c + du(t)}$ gecikme teriminin pozitifliğini garanti etmek için (3.1) denkleminin parametrelerine bağlı bazı koşullar getirmemiz gerekecektir.

Teorem 3.1: $A_0, A_1 \in IR^+$ ve $\tau(u(t)) = \frac{a + bu(t)}{c + du(t)}$ olsun.

$$u'(t) = -A_0 u(t) - A_1 u(t - \tilde{\tau}(u(t)))$$
$$\tilde{\tau}(u(t)) = \max\{0, \tau(u(t))\} \geq 0, \qquad \forall t \in IR^+ \tag{3.2}$$

gecikmeli diferansiyel denklemi

$$(L_0, M_0) = \begin{cases} (\sigma, -\frac{\sigma A_1}{A_0}); & \mu < \sigma < 0 \quad (3.3) \\ (-\frac{\sigma A_1}{A_0}, \sigma); & 0 < \sigma < \mu \quad (3.4) \\ (\sigma, \mu); & \sigma < 0 < \mu, \quad -\frac{\sigma A_1}{A_0} < \mu \quad (3.5) \\ (\mu, \sigma); & \mu < 0 < \sigma, \quad \mu < -\frac{\sigma A_1}{A_0} \quad (3.6) \end{cases}$$

$\tau = \max_{u(t)\in(L_0,M_0)} \{\tilde{\tau}(u(t))\} > 0$, $\mu = -\frac{c}{d}$, ve $\sigma = -\frac{a}{b}$ olmak üzere eğer $u_0(t) : [-\tau, 0] \to (L_0, M_0)$ başlangıç fonksiyonu Lipschitz sürekli ise tek $u(t) \in C^1([0,\infty),(L_0,M_0))$ çözümüne sahiptir.

İspat. İspat için 4 durum incelenecektir.

Durum 1: $\mu < \sigma < 0$ iken her $t > 0$ için $u(t) \in (L_0, M_0)$ olduğunu gösterelim. Tersine, bir $t_0 > 0$ bulunsun öyle ki her $t < t_0$ için $u(t) \in (L_0, M_0)$ fakat $u(t_0) = L_0$ veya $u(t_0) = M_0$ olsun. Öncelikle, $u(t_0) = L_0$ olarak ele alalım. Bu durumda $u'(t_0) \le 0$ olacaktır. Diğer taraftan

$$u(t_0 - \tilde{\tau}(u(t_0))) = u(t_0) = \sigma$$

ve

$$u'(t_0) = -A_0 u(t_0) - A_1 u(t_0 - \tilde{\tau}(u(t_0))) = -\sigma(A_0 + A_1) > 0$$

olur ve bu bir çelişkidir. Benzer şekilde eğer $u(t_0) = M_0$ ise $u'(t_0) \ge 0$. Diğer taraftan

$$u'(t_0) = -A_0 u(t_0) - A_1 u(t_0 - \tilde{\tau}(u(t_0))) < A_0 \frac{\sigma A_1}{A_0} - \sigma A_1 = 0$$

bulunur ve bu bir çelişkidir.

Durum 2: $0 < \sigma < \mu$ iken her $t > 0$ için $u(t) \in (L_0, M_0)$ olduğunu gösterelim. Tersine, bir $t_0 > 0$ bulunsun öyle ki her $t < t_0$ için $u(t) \in (L_0, M_0)$ fakat $u(t_0) = L_0$ veya $u(t_0) = M_0$ olsun. Öncelikle, $u(t_0) = L_0$ olarak ele alalım. Bu durumda $u'(t_0) \le 0$ olacaktır. Diğer taraftan

$$u'(t_0) = -A_0 u(t_0) - A_1 u(t_0 - \tilde{\tau}(u(t_0))) > A_0 \frac{\sigma A_1}{A_0} - \sigma A_1 = 0$$

olur ve bu bir çelişkidir. Benzer şekilde eğer $u(t_0) = M_0$ ise $u'(t_0) \ge 0$. Diğer taraftan

$$u'(t_0) = -A_0 u(t_0) - A_1 u(t_0 - \tilde{\tau}(u(t_0))) = -\sigma(A_0 + A_1) < 0$$

bulunur ve bu bir çelişkidir.

Durum 3: $\sigma < 0 < \mu$, $-\frac{\sigma A_1}{A_0} < \mu$ iken her $t > 0$ için $u(t) \in (L_0, M_0)$ olduğunu gösterelim. Tersine, bir $t_0 > 0$ bulunsun öyle ki her $t < t_0$ ve her $\varepsilon > 0$ için $u(t) \in (L_0, M_0 - \varepsilon)$ fakat $u(t_0) = L_0$ veya $u(t_0) = M_0 - \varepsilon$ olsun. Öncelikle, $u(t_0) = L_0$ olarak ele alalım. Bu durumda $u'(t_0) \le 0$ olacaktır. Diğer taraftan

$$u(t_0 - \tilde{\tau}(u(t_0))) = u(t_0) = \sigma$$

ve

$$u'(t_0) = -A_0 u(t_0) - A_1 u(t_0 - \tilde{\tau}(u(t_0))) = -\sigma(A_0 + A_1) > 0$$

bulunur ve bu bir çelişkidir. Benzer şekilde eğer her $\varepsilon > 0$ için $u(t_0) = M_0 - \varepsilon$ ise $u'(t_0) \ge 0$. Diğer taraftan

$$u'(t_0) = -A_0 u(t_0) - A_1 u(t_0 - \tilde{\tau}(u(t_0))) < -A_0(\mu - \varepsilon) - A_1\sigma < A_0 \frac{\sigma A_1}{A_0} + A_0\varepsilon - A_1\sigma = A_0\varepsilon$$

bulunur ve ε sıfıra giderken $u(t_0)$ ve $A_0\varepsilon$ sırasıyla μ ve 0 gittiğinden $u'(t_0) \ge 0$ ile çelişir.

Durum 4: $\mu < 0 < \sigma$, $\mu < -\frac{\sigma A_1}{A_0}$ iken her $t > 0$ için $u(t) \in (L_0, M_0)$ olduğunu gösterelim. Tersine, bir $t_0 > 0$ bulunsun öyle ki her $t < t_0$ ve her $\varepsilon > 0$ için $u(t) \in (L_0 + \varepsilon, M_0)$ fakat $u(t_0) = L_0 + \varepsilon$ veya $u(t_0) = M_0$ olsun. Öncelikle, $u(t_0) = L_0 + \varepsilon$ olarak ele alalım. Bu durumda $u'(t_0) \le 0$ olacaktır. Diğer taraftan

$$u'(t_0) = -A_0 u(t_0) - A_1 u(t_0 - \tilde{\tau}(u(t_0))) > -A_0(\mu + \varepsilon) - A_1\sigma > A_0 \frac{\sigma A_1}{A_0} - A_0\varepsilon - A_1\sigma = -A_0\varepsilon$$

bulunur ve ε sıfıra giderken $u(t_0)$ ve $-A_0\varepsilon$ sırasıyla μ ve 0 gittiğinden $u'(t_0) \le 0$ ile çelişir.

Benzer şekilde eğer $u(t_0) = M_0$ ise $u'(t_0) \geq 0$. Diğer taraftan

$$u'(t_0) = -A_0 u(t_0) - A_1 u(t_0 - \tilde{\tau}(u(t_0))) = -\sigma(A_0 + A_1) < 0$$

bulunur ve bu bir çelişkidir. Sonuç olarak, eğer çözüm fonksiyonu varsa, (L_0, M_0) aralığındadır.

Ayrıca,

$$f(t,u,v) = -A_0 u(t) - A_1 v(t), \quad \tau(u(t)) = \frac{a + bu(t)}{c + du(t)}$$

fonksiyonları varlık ve teklik teoremi Teorem 1.1.3 'ün koşullarını sağladığından çözümün yerel varlığı ve tekliği sağlanır.

Teorem 3.2: $A_0, A_1 \in IR^+$, $A_0^2 - A_1^2 \geq 0$ olsun. (3.2) gecikmeli diferansiyel denklemi için

$$(L_0, M_0) = \begin{cases} (-\frac{\mu A_0}{A_1}, \mu), & 0 < \mu \leq \sigma \quad (3.7) \\ (-\frac{\mu A_0}{A_1}, \mu), & \sigma < 0 < \mu, \quad -\frac{\sigma A_1}{A_0} \geq \mu \quad (3.8) \\ (\mu, -\frac{\mu A_0}{A_1}), & \sigma \leq \mu < 0 \quad (3.9) \\ (\mu, -\frac{\mu A_0}{A_1}), & \mu < 0 < \sigma, \quad \mu \geq -\frac{\sigma A_1}{A_0} \quad (3.10) \end{cases}$$

$\tau = \max_{u(t) \in (L_0, M_0)} \{\tilde{\tau}(u(t))\} > 0$, $\mu = -\frac{c}{d}$, ve $\sigma = -\frac{a}{b}$ olmak üzere eğer $u_0(t) : [-\tau, 0] \to (L_0, M_0)$ başlangıç fonksiyonu Lipschitz sürekli ise tek $u(t) \in C^1([0,\infty), (L_0, M_0))$ çözümüne sahiptir

İspat. İspat için 2 durum incelenecektir.

Durum 1: $0 < \mu \le \sigma$ veya $\sigma < 0 < \mu,\ -\frac{\sigma A_0}{A_1} \ge \mu$ iken her $t > 0$ için $u(t) \in (L_0, M_0)$ olduğunu gösterelim. Tersine, bir $t_0 > 0$ bulunsun öyle ki her $t < t_0$ ve her $\varepsilon > 0$ için $u(t) \in (L_0, M_0 - \varepsilon)$ fakat $u(t_0) = L_0$ veya $u(t_0) = M_0 - \varepsilon$ olsun. Öncelikle, $u(t_0) = L_0$ olarak ele alalım. Bu durumda $u'(t_0) \le 0$ olacaktır. Diğer taraftan

$$u'(t_0) = -A_0 u(t_0) - A_1 u(t_0 - \tilde{\tau}(u(t_0))) > \frac{\mu(A_0^2 - A_1^2)}{A_1} > 0$$

dır ve bu bir çelişkidir. Benzer şekilde eğer her $\varepsilon > 0$ için $u(t_0) = M_0 - \varepsilon$ ise $u'(t_0) \ge 0$. Diğer taraftan

$$u'(t_0) = -A_0 u(t_0) - A_1 u(t_0 - \tilde{\tau}(u(t_0))) < -A_0 \mu + A_0 \varepsilon + A_1 \frac{\mu A_1}{A_0} = A_0 \varepsilon$$

bulunur ve ε sıfıra giderken $u(t_0)$ ve $A_0\varepsilon$ sırasıyla μ ve 0 gittiğinden $u'(t_0) \ge 0$ ile çelişir.

Durum 2: $\sigma \le \mu < 0$, veya $\mu < 0 < \sigma,\ \mu \ge -\frac{\sigma A_0}{A_1}$ iken her $t > 0$ için $u(t) \in (L_0, M_0)$ olduğunu gösterelim. Tersine, bir $t_0 > 0$ bulunsun öyle ki her $t < t_0$ ve her $\varepsilon > 0$ için $u(t) \in (L_0 + \varepsilon, M_0)$ fakat $u(t_0) = L_0 + \varepsilon$ veya $u(t_0) = M_0$ olsun. Öncelikle, $u(t_0) = L_0 + \varepsilon$ olarak ele alalım. Bu durumda $u'(t_0) \le 0$ olacaktır. Diğer taraftan

$$u'(t_0) = -A_0 u(t_0) - A_1 u(t_0 - \tilde{\tau}(u(t_0))) > -A_0 \mu - A_0 \varepsilon + A_1 \frac{\mu A_1}{A_0} = -A_0 \varepsilon$$

bulunur ve ε sıfıra giderken $u(t_0)$ ve $-A_0\varepsilon$ sırasıyla μ ve 0 gittiğinden $u'(t_0) \le 0$ ile çelişir

Benzer şekilde eğer $u(t_0) = M_0$ ise $u'(t_0) \ge 0$. Diğer taraftan

$$u'(t_0) = -A_0 u(t_0) - A_1 u(t_0 - \tilde{\tau}(u(t_0))) < \frac{\mu(A_0^2 - A_1^2)}{A_1} < 0$$

bulunur ve bu bir çelişkidir Sonuç olarak, eğer çözüm fonksiyonu varsa, (L_0, M_0) aralığındadır.

Ayrıca,

$$f(t,u,v) = -A_0 u(t) - A_1 v(t), \quad \tau(u(t)) = \frac{a + bu(t)}{c + du(t)}$$

fonksiyonları varlık ve teklik teoremi Teorem 1.1.3 'ün koşullarını sağladığından çözümün yerel varlığı ve tekliği sağlanır.

$d = 0$ için teorem 3.2 den bahsedilemez ve teorem 3.1 de ki μ üzerinde ki koşullar ortadan kalkar. Ayrıca, $d = 0$, $c = 1$, $a > 0$ ve $b > 0$ özel durumu için teorem 3.1'den çözüm $(\sigma, -\frac{\sigma A_1}{A_0})$ aralığında bulunur ve bu sonuç daha önce Mallet-Paret ve Nussbaum (2011) tarafından gösterilmiştir.

$P(u(t)) = a + bu(t)$ ve $Q(u(t)) = c + du(t)$ olsunlar. $P(x)$ ve $Q(x)$ 'in kökleri sırasıyla $\sigma = -\frac{a}{b}$, $\mu = -\frac{c}{d}$ 'dir. Bu durumda, eğer

(i) $sign(b)sign(d) = 1$ ve $\mu < \sigma$ iken $u(t) > \sigma$ veya $u(t) < \mu$ olsun ,

(ii) $sign(b)sign(d) = 1$ ve $\sigma < \mu$ iken $u(t) > \mu$ veya $u(t) < \sigma$ olsun,

(iii) $sign(b)sign(d) = -1$ ve $\mu < \sigma$ iken $\mu < u(t) < \sigma$ olsun,

(iv) $sign(b)sign(d) = -1$ ve $\sigma < \mu$ iken $\sigma < u(t) < \mu$ olsun

koşullarından biri sağlanıyorsa, $\tau(u(t)) > 0$ olacaktır.

Sonuç 1: (L_0, M_0) aralığı Eşitlik (3.3) veya (3.4) de tanımlandığı gibi ve τ teorem 3.1 'deki gibi tanımlansın. Eğer $sign(b)sign(d) = 1$ ve Denklem (3.1) 'in başlangıç fonksiyonu $u_0(t) : [-\tau, 0] \to (L_0, M_0)$ Lipschitz sürekli ise Denklem (3.1) tek $u(t) \in C^1([0,\infty), (L_0, M_0))$ çözümüne sahiptir.

İspat. Yukarıdaki (i) ve (ii) koşulları göz önüne alındığında, Eşitlik (3.3) veya (3.4) deki (L_0, M_0) aralığının tanımlanma koşulları altında $\tau(u(t)) > 0$ 'dır. Yani bu koşullar altında $\tau(u(t))$ ve $\widetilde{\tau}(u(t))$ gecikme fonksiyonları bir birine eşittir. Dolayısıyla teorem 3.1, Denklem (3.1) içinde geçerlidir.

Sonuç 2: (L_0, M_0) aralığı Eşitlik (3.5) veya (3.6) 'da tanımlandığı gibi ve τ teorem 3.1 'deki gibi tanımlansın. Eğer $sign(b)sign(d) = -1$ ve Denklem (3.1) 'in başlangıç fonksiyonu $u_0(t) : [-\tau, 0] \to (L_0, M_0)$ Lipschitz sürekli ise Denklem (3.1) tek $u(t) \in C^1([0,\infty), (L_0, M_0))$ çözümüne sahiptir.

İspat. Yukarıdaki (ii) ve (iv) koşulları göz önüne alınarak, sonuç 1 in ispatına benzer şekilde ispat yapılır.

Sonuç 3: (L_0, M_0) aralığı Eşitlik (3.7) veya (3.9) 'da tanımlandığı gibi ve τ teorem 3.2 deki gibi tanımlansın. Eğer $A_0^2 - A_1^2 \geq 0$, $sign(b)sign(d) = 1$ ve Denklem (3.1) 'in başlangıç fonksiyonu $u_0(t) : [-\tau, 0] \to (L_0, M_0)$ Lipschitz sürekli ise Denklem (3.1) tek $u(t) \in C^1([0,\infty), (L_0, M_0))$ çözümüne sahiptir.

İspat. Sonuç 1 in ispatına benzer şekilde ispat yapılır.

Sonuç 4: (L_0, M_0) aralığı Eşitlik (3.8) veya (3.10) 'da tanımlandığı gibi ve τ teorem 3.2 deki gibi tanımlansın. Eğer $A_0^2 - A_1^2 \geq 0$, $sign(b)sign(d) = -1$ ve Denklem (3.1) 'in başlangıç fonksiyonu $u_0(t) : [-\tau, 0] \to (L_0, M_0)$ Lipschitz sürekli ise Denklem (3.1) tek $u(t) \in C^1([0,\infty), (L_0, M_0))$ çözümüne sahiptir.

İspat. Sonuç 2 nin ispatına benzer şekilde ispat yapılır.

Yukarıdaki sonuçlardan Denklem (3.1) 'i içeren başlangıç değer probleminin başlangıç koşulu için uygun tanım aralığı tespit edilebilir. Örneğin, örnek 2.2.2 'de $d = 0$, $c = 1$, $a = \frac{1}{4}$, $b = 2$, $A_0 = 2$ ve $A_1 = 1$ iken $t \in [-1,0]$ için $\varphi_0(t) = t$ başlangıç koşulu ile gecikme negatif değer almıştı. Sonuç 1 den görülüyor ki aynı problem

$t \in \left(-\frac{1}{8},0\right]$ için $\varphi_0(t) = t$ başlangıç koşulu ile alınırsa gecikme daima pozitif kalacaktır. Çünkü $L_0 = -\frac{1}{8}$ ve $M_0 = \frac{1}{16}$ dır ve $\varphi_0 : \left(-\frac{1}{8},0\right] \to \left(-\frac{1}{8},0\right] \subset \left(-\frac{1}{8},\frac{1}{16}\right)$ 'dir. Ancak bu durumda da en büyük gecikme miktarı $\tau = \frac{1}{4}$ dür. Yani başlangıç koşulunun tanım aralığının uzunluğundan daha büyüktür. Bu durumda başlangıç koşulunun tanım aralığı genişletilebilir fakat bu sefer de başlangıç koşulunun görüntüsü (L_0, M_0) aralığının alt kümesi olmayacağından pozitif kalma garantisini kaybetmiş oluruz.

Sonuç olarak, sonuç 1 'den diyebiliriz ki, örnek 2.2.2 'de eğer $t \in \left(-\frac{3}{8},0\right)$ için $\varphi_0(t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{16}$ başlangıç koşulu ile problemi ele alırsak $\forall t \in IR^+$ için gecikme fonksiyonu her zaman pozitiftir ve en büyük gecikme miktarı $\tau = \frac{3}{8}$ olur. Başlangıç fonksiyonu $\left(-\frac{1}{8},\frac{1}{16}\right) = (L_0, M_0)$ aralığında değer alır ve dolayısıyla çözüm fonksiyonu da $\left(-\frac{1}{8},\frac{1}{16}\right)$ aralığında değer alır.

4. KARARLILIK ANALİZİ

Kabaca kararlılık analizi, bir sistemin başlangıç koşullarında meydana gelen değişimin sisteme etkisinin analizidir. Kararlılık analizi sistemin uzun süreli davranışları hakkında bize bilgiler verir. Sistemin uzun süreli davranışı başlangıç fonksiyonuna önemli ölçüde bağımlı değilse sistem kararlı olarak değerlendirilebilir.

Genellikle çözümün bulunmasına gerek kalmadan sistemin davranışları hakkında bilgi edinmek oldukça avantajlıdır. Çünkü modellenen bir sistemin gerçek çözümünün elde edilmesi mümkün olmayabilir. Bu durumda kararlılık analizi sistemin dinamiklerini anlamamıza yardımcı olur. Böyle bir modele, yaklaşık bir problemin çözümünün her zaman uygun ve tutarlı sonuçlar vermesi kararlılıkla doğrudan bağlantılıdır.

Sistemin kararlılığı ile sistemin gecikme miktarı arasında yakın bir ilişki vardır. Bazı durumlarda sistemdeki küçük gecikmeler bile kararlılığı oldukça fazla etkileyebilmektedir. Örneğin Hale (1977)

$$y'(t) + 2y'(t) = -y(t)$$

denklemi kararlı iken

$$y'(t) + 2y'(t-h) = -y(t)$$

denkleminin her $h > 0$ gecikmesi için kararsız olduğunu göstermiştir. Bazı denklemlerde de gecikmeye bağımlı bir kararlılık elde edilebilir. Bu durumda bir sistemin dinamiklerini incelerken gecikmenin bu dinamikler üzerine etkisini mutlaka dikkate almalıyız.

Bu bölümde kararlılık ile ilgili temel kavram ve metotları açıkladıktan sonra, durum gecikmeli diferansiyel denklemlerde lineerleştirme yapmaktan ve iki gecikme terimli diferansiyel denklemlerin kararlılığından bahsedeceğiz. Daha sonra da lineerleştirme

yapmadan gecikme fonksiyonunun değer aralığına bağlı kararlılık kriterleri elde edeceğiz.

4.1. Kararlılık Analizi

$D \subset IR^n$ için $F:(\alpha,\infty)\times C_h \to IR^n$ olmak üzere

$$y'(t) = F(t, y_t) \tag{4.1}$$

gecikmeli diferansiyel denklem sistemini ve verilen herhangi $t_0 > \alpha$ ve $\phi \in C_h$ için

$$y_{t_0} = \varphi \tag{4.2}$$

başlangıç koşulunu ele alalım.

Problem (4.1)-(4.2) çözümünün varlığını kesinleştirmek için; her bir $t_0 > \alpha$ için F fonksiyonu $(t_0,\infty)\times C_h$ üzerinde süreklilik koşulunu sağladığını, yerel Lipschitz ve quasi-sınırlı olduğunu kabul edelim.

Tanım 4.1.1 : $\bar{y}:(\alpha-h,\infty)\to D$ fonksiyonu Denklem (4.1) 'in (α,∞) aralığında bir çözümü olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\left\|\varphi - \bar{y}_{t_0}\right\|_h < \delta$ olduğunda $[t_0 - h,\infty)$ aralığı üzerinde $y(t)$ çözümü için

$$\left\|y(t) - \bar{y}(t)\right\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 - h$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ sayısı var ise $\bar{y}$ çözümü $t_0 > \alpha$ da kararlıdır (Lyapunov anlamında kararlıdır) denir (El'sgol'ts ve Norkin, 1973).

Tersi durumda $\bar{y}$ çözümü t_0 da kararsızdır (Lyapunov anlamında kararsızdır) denir.

Sabit çözümün kararlılığını hatta daha özel olarak $y(t) = 0$ aşikar çözümün kararlılığını incelemek kararlılık analizini basitleştirir. Fakat $y(t) = 0$ Problem (4.1)-(4.2) 'nin çözümü olmayabilir veya başka bir çözümün kararlılık analizi ile ilgileniyor olabiliriz.

Bu durumda Denklem (4.1) 'in aşikar olmayan bir $\bar{y}$ çözümünü ele alalım. y başka bir çözüm olmak üzere $x(t) = y(t) - \bar{y}(t)$ tanımlayalım. Buradan ;

$$y'(t) = F(t, y_t) = F(t, \bar{y}_t + x_t) \tag{4.3}$$

ve

$$\bar{y}'(t) = F(t, \bar{y}_t) \tag{4.4}$$

elde edilir. Eşitlik (4.3) ve (4.4) taraf tarafa çıkarılır ise

$$x'(t) = F(t, \bar{y}_t + x_t) - F(t, \bar{y}_t)$$

bulunur. $G(t, \psi) := F(t, \bar{y}_t + \psi) - F(t, \bar{y}_t)$ dersek

$$x'(t) = G(t, x_t) \tag{4.5}$$

elde edilir.

$G(t,0) = 0$ olduğundan Denklem (4.5) 'in $x = 0$ aşikar bir çözümü vardır. Böylece Denklem (4.1) 'in aşikar olmayan bir $\bar{y}$ çözümünün kararlılık analizini yapmak için Denklem (4.5) 'in aşikar çözümünün analizini yapmak yeterli olacaktır.

Sonuç olarak, genelliği bozmadan $\forall t > \alpha$ için $0 \in D$ ve $F(t,0) = 0$ kabulünü yapabiliriz.

Tanım 4.1.2 : Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\|\phi\|_h < \delta$ olduğunda $[t_0 - h, \infty)$ aralığı üzerinde $y(t)$ çözümü için

$$\|y(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 - r$$

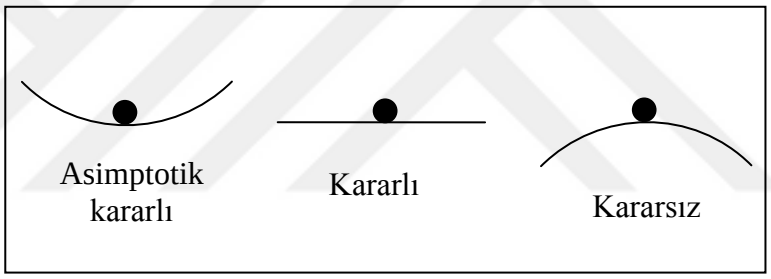
olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı var ise Denklem (4.1) 'in aşikar çözümü düzgün kararlıdır denir (El'sgol'ts ve Norkin, 1973).

Teorem 4.1.1 : Denklem (4.1) otonom bir denklem olsun. Eğer Denklem (4.1) in aşikar çözümü kararlı ise düzgün kararlıdır (Kuang, 1993).

Teorem 4.1.2 : Denklem (4.1) 'in aşikar çözümü $t_0 > \alpha$ da kararlı ise her $\tilde{t_0} \in (\alpha, t_0)$ da kararlıdır (El'sgol'ts ve Norkin, 1973).

Tanım 4.1.3: Eğer Denklem (4.1) 'in aşikar çözümü t_0 da kararlı ve $\delta_1 = \delta_1(t_0) > 0$ için $\|\phi\|_h < \delta_1$ iken $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ ise (1) in aşikar çözümü asimptotik kararlıdır denir (Kuang, 1993).

Bir diferansiyel denklemin çözümünün kararlı olması (Lyapunov anlamında), başlangıç değerinde oluşan küçük bir değişikliğin denklemin çözümünde de küçük bir değişikliğe sebep olması demektir. Asimptotik kararlı olan bir çözümün ise başlangıç değerinde oluşan küçük bir değişiklikle çözümde meydana gelen değişikliğin $t \to \infty$ iken sıfıra gitmesidir. Şekil 4.1. 'de Asimptotik kararlı, kararlı ve karasız sistemlere sembolik birer örnek verilmiştir.



Şekil 4.1. Asimptotik kararlı, kararlı ve kararsız sistemler

Lineer otonom bir diferansiyel denklemin $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere $y(t) = e^{\lambda t}$ çözümünden elde edilen denkleme karakteristik denklem denir. Bir denklemin karakteristik denkleminin bütün köklerinin reel kısmı negatif ise çözüm asimptotik kararlıdır. Karakteristik denklemin köklerinden bir veya daha fazla birbirinden farklı kökü imajiner eksen üzerinde, diğerlerinin de reel kısmı negatif ise çözüm kararlı yada kararsız olabilir. Ayrıca, karakteristik denklemin en az bir kökünün reel kısmı pozitifse çözüm kararsızdır.

Örneğin sabit katsayı matrisli ve sabit gecikmeli

$$y'(t) = -K_0 y(t) - \sum_{j=1}^{m} K_j y(t - h_j) \tag{4.6}$$

lineer sisteminin eğer

$$\det(\lambda I + K_0 + \sum_{j=1}^{m} K_j e^{-\lambda h_j}) = 0 \tag{4.7}$$

karakteristik denkleminin bütün kökleri negatif reel kısma sahipse çözüm her $t_0 \in IR$ için asimptotik kararlıdır.

Teorem 4.1.3: Eğer Denklem (4.7) 'nin her kökü negatif reel kısma sahipse Denklem (4.6) 'nın çözüm fonksiyonu y olmak üzere

$$\|y(t)\| \le M\|\phi\|_h e^{-\gamma(t-t_0)}$$

olacak şekilde M ve γ pozitif sabitleri vardır (Driver, 1977).

Tanım 4.1.4: Eğer Denklem (4.1) in aşikar çözümü düzgün kararlı ve dahası $\|\phi\|_h < \delta_1$ olduğunda $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ olacak şekilde t_0 dan bağımsız bir $\delta_1 > 0$ sayısı var ise düzgün asimptotik kararlıdır denir (El'sgol'ts ve Norkin, 1973).

Yani Denklem (4.1) in çözümü düzgün asimptotik kararlı ise her $\eta > 0$ için t_0 dan bağımsız bir $T = T(\eta) > 0$ vardır öyle ki

$$\|y(t)\| < \eta, \quad \forall t \ge t_0 + T$$

Örneğin (4.6) denkleminin çözümü $y(t)$ için $\|\phi\|_h < \delta_1$ olmak üzere teorem 4.1.3 den

$$\|y(t)\| \le M\delta_1 e^{-\gamma(t-t_0)}$$

yazılabilir. Eğer $M\delta_1 e^{-\gamma(t-t_0)} < \eta$ dersek $t - t_0 < \gamma^{-1}\ln(\frac{M\delta_1}{\eta})$ bulunur. O halde her $\eta > 0$ için herhangi $T(\eta) > \gamma^{-1}\ln(\frac{M\delta_1}{\eta})$ sayısı için

$$\|y(t)\| < \eta, \quad t - t_0 > T$$

olur. $T = T(\eta) > 0$ t_0 dan bağımsız olduğu için çözüm düzgün asimptotik kararlıdır.

Teorem 4.1.5: Denklem (4.1) otonom bir denklem olsun. Eğer Denklem (4.1) 'in aşikar çözümü asimptotik kararlı ise düzgün asimptotik kararlıdır.

Teorem 4.1.6: Denklem (4.1) 'in aşikar çözümü $t_0 > \alpha$ da asimptotik kararlı ise her $\tilde{t}_0 \in (\alpha, t_0)$ da asimptotik kararlıdır.

Otonom ve lineer olmayan bir diferansiyel denklemin aşikar çözümü civarında lineerleştirilme yapılarak aşikar çözüm civarında yerel kararlılık analizi yapılır.

4.2. Durum Gecikmeli Diferansiyel Denklemin Lineerleştirilmesi

Durum gecikmeli diferansiyel denklemler, lineer olmayan diferansiyel denklemlerdir. Bu denklemlerde gecikme fonksiyonu sınırlı ise aşikar çözüm civarında kararlılık analizi yapılabilir (Hartung ve diğ., 2006).

Literatürde gecikmeli diferansiyel denklemleri lineerleştirilmek için sezgisel olarak gecikme terimi, aşikar çözüm noktasında sabitlenir. Bu yöntemin doğruluğu daha sonra gecikme fonksiyonunun orijin civarında sınırlı olduğu kabul edilerek Hartung ve diğ. (2006) tarafından ispatlanmıştır.

Bu durumda,

$$y'(t) = -K_0 y(t) - \sum_{i=1}^{N} K_i y(t - \tau_i(y(t))) \ ; \ \tau_i > 0, i = 1, \cdots, N \tag{4.8}$$

sisteminin, her $i = 1, \cdots, N$ ve $t \in (0, \varepsilon)$ için $\tau_i(y(t))$ fonksiyonu sınırlı ise $y(t) = 0$ aşikar çözümü civarında yerel kararlılık analizi

$$y'(t) = -K_0 y(t) - \sum_{i=1}^{N} K_i y(t - \tau_i(0))$$

sisteminin kararlılık analizine denktir.

Durum gecikmeli diferansiyel denklemlerle ilgili yapılan çalışmaların çoğunda gecikme terimi aşikar çözümde sabitlenerek lineerleştirme yapılmıştır. Literatürde ki

son çalışmalardan biri ise Stumpf (2015) tarafından yapılan lineerleştirilmiş durum gecikmeli diferansiyel denklemin en az bir özdeğerinin imajiner eksen üzerinde, diğer özdeğerlerinin ise negatif reel kısma sahip olması durumunun incelenmesidir.

4.3 Lyapunov Fonksiyoneli

Düzgün kararlılık ve asimptotik kararlılık ile ilgili Lyapunov metodunu aşağıdaki teoremler ile açıklayalım.

Teorem 4.3.1: w ve W, $[0,H]$ aralığında sürekli, azalmayan, $(0,H)$ aralığında pozitif değer alan ve $w(0)=W(0)=0$ olan iki fonksiyon olsunlar. Eğer $(\alpha,\infty)\times C_D$ üzerinde negatif olmayan V fonksiyoneli var ve

(a) $V(t,\psi)\geq w(\|\psi(0)\|)$,

(b) $V(t,\psi)\leq W(\|\psi\|_h)$ ve

(c) $V(t,y_t)$ fonksiyonu $[t_0,\beta_1)$ üzerinde t nin artmayan bir fonksiyondur

koşullarını sağlıyor ise Denklem (4.1) 'in aşikar çözümü düzgün kararlıdır (Kuang, 1993).

Bu teoremde (a) koşulunu sağlayan V fonksiyoneline pozitif tanımlıdır, (b) koşulunu sağlayan V fonksiyoneline de supremumu var denir. Ayrıca (c) koşuluna denk olarak $t\in[t_0,\beta_1)$ için $\frac{d}{dt}V(t,y_t)\leq 0$ koşulu verilebilir.

Teorem 4.3.2: w, W ve w_1, $[0,H)$ aralığında sürekli, azalmayan, $(0,H)$ aralığında pozitif değer alan ve $w(0)=W(0)=w_1(0)=0$ olan fonksiyonlar olsunlar. Her $(t,\varphi)\in(\alpha,\infty)\times C_D$ ve herhangi $B>0$ sabiti için $\|F(t,\psi)\|\leq B$ olsun. Eğer $(\alpha,\infty)\times C_D$ üzerinde V fonksiyoneli var ve

(a) $V(t,\psi)\geq w(\|\psi(0)\|)$,

(b) $V(t,\psi)\leq W(\|\psi\|_r)$ ve

(c) $t\in[t_0,\beta_1)$ için $\frac{d}{dt}V(t,y_t)\leq -w_1(\|y(t)\|)$

koşullarını sağlıyor ise Denklem (4.1) in aşikar çözümü düzgün asimptotik kararlıdır (Kuang, 1993).

Şimdi Denklem (4.8) 'in katsayıları cinsinden kararlılık koşulları elde etmeye çalışacağız.

İlk olarak Denklem (4.8) 'i $N=1$ ve $h>0\in IR$ için $\tau_1(y(0))=h$ olarak alalım. $y=0$ aşikar çözümünün yerel kararlığının incelemek için durum gecikme terimini $y=0$ da sabitleyerek lineerleştirme yaparsak

$$y'(t)=-K_0y(t)-K_1y(t-h) \tag{4.9}$$

elde ederiz. Burada K_0, $K_1\in IR^+$ 'dır. $y_{t_0}=\varphi$ başlangıç koşulu olmak üzere $y:[t_0-h,\infty)\to IR$ Problem (4.9) 'un bir çözümü olsun.

$$v(t)=y^2(t)+|K_0|\int_{t-h}^{t}y^2(s)ds \tag{4.10}$$

fonksiyonelini tanımlayalım. $t\geq t_0$ için

$$v'(t)=2y(t)y'(t)+|K_0|y^2(t)-|K_0|y^2(t-h)$$

$$=-K_0y^2(t)-2K_1y(t)y(t-h)-K_0y^2(t-h)$$

$$\leq -K_0y^2(t)+K_1(y^2(t)+y^2(t-h))-K_0y^2(t-h)$$

$$=(-K_0+K_1)(y^2(t)+y^2(t-h))$$

olduğu görülür. Buradan $-K_0+K_1\leq 0$ için $v'(t)\leq 0$ olduğu açıktır. Diğer taraftan Eşitlik (4.10) 'dan

$$|y(t)|^2\leq v(t)\leq (1+K_0h)\|y_t\|_h^2$$

elde edilir. $y_{t_0}=\varphi$ olduğundan yukarıdaki eşitsizlikten $t\geq t_0$ için

$$|y(t)| \le [v(t)]^{1/2} \le (1+K_0 h)^{1/2} \|\varphi\|_h$$

olur. Sonuç olarak; her $\varepsilon > 0$ için eğer $\|\varphi\|_h < \delta = \varepsilon(1+K_0 h)^{-1/2}$ olacak şekilde seçilirse $|y(t)| < \varepsilon$ olur. Böylece tanım 4.1.1 den $K_1 \le K_0$ iken (4.9) denkleminin aşikar çözümü kararlıdır.

Ek olarak, Eşitlik (4.10) 'nun yardımıyla Lyapunov fonksiyonelini

$$V(t,\psi) = \psi^2(0) + K_0 \int_{-r}^{0} \psi^2(\sigma) d\sigma \tag{4.11}$$

şeklinde tanımlayalım. Buradan

$$|\psi(0)|^2 \le v(t) \le (1+K_0 h)\|\psi\|_h^2$$

elde edilir ki böylece teorem 4.3.2 nin (a) ve (b) koşulları sağlanmış olur.

$$V(t,y_t) = y^2(t) + K_0 \int_{t-h}^{t} y^2(s) ds$$

olduğundan yukarıdakine benzer işlem adımlarıyla

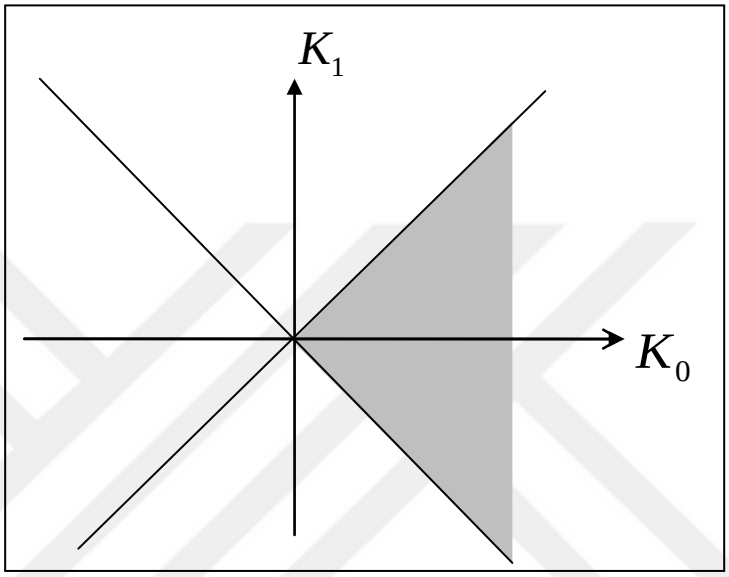
$$\frac{d}{dt} V(t,y_t) \le (-K_0 + K_1) y^2(t)$$

bulunur. $K_1 \le K_0$ olmak üzere $w_1(s) = (K_0 - K_1)s^2$ azalmayan fonksiyonu tanımlanabilir ve böylece teorem 4.3.2 'nin (c) koşuluda sağlanmış olur. Sonuç olarak $K_1 \le K_0$ iken Denklem (4.9) 'un aşikar çözümü asimptotik kararlıdır. Benzer işlemler $K_0 \in IR^+$ ve $K_1 \in IR^-$ için yapılırsa $-K_1 \le K_0$ iken Denklem (4.9) un aşikar çözümü asimptotik kararlı olduğu elde edilir.

Şekil 4.2 'de taralı bölge ile Denklem (4.9) 'un aşikar çözümünün (4.11) fonksiyoneli ile belirlediğimiz asimptotik kararlı olduğu bütün (K_0, K_1) değerlerinin kümesi gösterilmiştir. Bu kümenin bütün elemanları için Denklem (4.9) 'un aşikar çözümü asimptotik kararlıdır. Ancak bu küme Denklem (4.9) 'un aşikar çözümünün

asimptotik kararlı olduğu tüm (K_0, K_1) 'ları içermeyebilir. Yani daha geniş bir aralıkta sistem kararlı olabilir.

Lyapunov fonksiyoneli metodunda fonksiyonelin nasıl bulanacağı belli değildir. Ayrıca, aynı denklem için birden fazla fonksiyonel tanımlanabilir ve bu fonksiyonellerin verdiği sonuçlarda birbirinden farklı olabilir.



Şekil 4.2. Denklem (4.9) 'un (K_0, K_1) parametre uzayında (4.11) fonksiyoneli ile elde edilen kararlılık bölgesi

Denklem (4.8) 'i $h_i > 0 \in IR$, $i = 1, \cdots, N$ ve için $\tau_i(y(t)) = h_i - y(t)$ olarak alalım. $y = 0$ aşikar çözümünün yerel kararlığının karakteristik denklem ile inceleyelim. Denklem (4.8) 'in durum gecikme terimini $y = 0$ da dondurarak lineerleştirirsek

$$y'(t) = -K_0 y(t) - \sum_{j=1}^{N} K_j y(t - h_j)) \tag{4.12}$$

elde ederiz. Burada $j = 0, \cdots, N$ için $K_j \in IR^+$ 'dır. Kararlılık analizi için Denklem (4.12) 'nin karakteristik denklemi,

$$g(\lambda) = \lambda + K_0 + \sum_{j=1}^{N} K_j e^{-\lambda h_j} = 0 \tag{4.13}$$

ele alalım. $g(\lambda)$ pozitif katsayılardan oluştuğu için denklemi reel kökleri negatiftir. $\lambda = a + ib$ kompleks değerli kökleri dikkate alalım. Eşitlik (4.13) 'den

$$a + ib + K_0 + \sum_{j=1}^{N} K_j e^{-h_j(a+ib)} = 0$$

$$a + ib + K_0 + \sum_{j=1}^{N} [K_j e^{-h_j a}(\cos(-h_j b) + i\sin(-h_j b))] = 0$$

$$a + K_0 + \sum_{j=1}^{N} K_j e^{-h_j a}\cos(h_j b) + i(b - \sum_{j=1}^{N} K_j e^{-h_j a}\sin(h_j b)) = 0$$

bulunur ve buradan reel ve imajiner kısımların sıfıra eşitlenmesiyle

$$a + K_0 = -\sum_{j=1}^{N} K_j e^{-h_j a}\cos(h_j b)$$

$$b = \sum_{j=1}^{N} K_j e^{-h_j a}\sin(h_j b)$$

eşitlikleri elde edilir. Son eşitliklerde her iki tarafın kareleri alınıp taraf tarafa toplanırsa

$$(a + K_0)^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} K_j K_i e^{-(h_i+h_j)a}\cos(h_i b)\cos(h_j b)$$

$$b^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} K_j K_i e^{-(h_i+h_j)a}\sin(h_i b)\sin(h_j b)$$

$$(a + K_0)^2 + b^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} K_j K_i e^{-(h_i+h_j)a}(\cos(h_i b)\cos(h_j b) + \sin(h_i b)\sin(h_j b))$$

$$(a + K_0)^2 + b^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} K_j K_i e^{-(h_i+h_j)a}\cos((h_i - h_j)b) \qquad (4.14)$$

bulunur. Eğer $\mathrm{Re}(\lambda) = a \geq 0$ ise $e^{-(h_i+h_j)a} \leq 1$ dir. Ayrıca her θ için $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ olduğundan Eşitlik (4.14) 'ün sağ tarafı için

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} K_j K_i e^{-(h_i+h_j)a} \cos((h_i - h_j)b) \leq \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} K_j K_i = (\sum_{i=1}^{N} K_i)^2$$

bulunur. Eşitlik (4.14) 'ün sol tarafı için $K_0^2 < (a + K_0)^2 + b^2$ olduğu açıktır. Böylece eğer $\mathrm{Re}(\lambda) = a \geq 0$ ise $K_0 < \sum_{j=1}^{N} K_j$ elde edilir.

Sonuç olarak eğer $K_0 \geq \sum_{j=1}^{N} K_j$ ise $\mathrm{Re}(\lambda) = a < 0$ olur. Yani $K_0 \geq \sum_{j=1}^{N} K_j$ ise Denklem (4.12) 'nin aşikar çözümü asimptotik kararlıdır.

4.4. D-Parçalanma Metodu

Karakteristik denklem (4.13) 'de, $i, j = 0,..,N$ ve $i \neq j$ olmak üzere herhangi iki K_i ve K_j katsayıları parametre olarak alalım. D-parçalanma metodu iki parametreli $g(\lambda, K_i, K_j) = 0$ karakteristik denklemin, λ köklerinin K_i ve K_j parametrelerinin sürekli fonksiyonu olmasına dayanmaktadır. Kompleks düzlemde, λ kökleri K_i ve K_j parametreleri değiştikçe yer değiştirirler ve bir kök kompleks düzlemin sol yarı düzleminden sağ yarı düzlemine (veya sağ düzleminden sol yarı düzlemine) geçerken imajiner ekseni keser. Bir sistemin asimptotik kararlılığı karakteristik denklemin köklerinin reel kısımlarının negatif olmasına bağlı olduğu için, imajiner ekseni kesen bu kökler sistemin karakterini belirlemede önemli rol oynarlar.

Bu metot uygulanırken iki boyutlu $K_i - K_j$ katsayı uzayı hiperyüzeylerle bölgelere ayrılır. Bu hiperyüzeyin noktaları karakteristik denklemin imajiner eksen üzerindeki köklerine karşılık gelirler. $\lambda = 0$ durumu da hiperyüzeylere dahil edilir. Parametre uzayında bu şekilde oluşturulan bölgelere D-bölgeleri, bu bölgelerin sınırlarını oluşturan hiperyüzeylere de D-eğrileri denir.

İlk olarak Neimark (1949) bu metodu tanımlamıştır ve D-bölgelerinde karakteristik denklemin pozitif reel kısımlı köklerinin sayısının invariant olduğunu göstermiştir.

D-eğrilerini bulmak için $g(\lambda, K_i, K_j) = 0$ karakteristik denkleminde imajiner eksen üzerinde ki $\lambda = i\omega$ kökü yazılır ve reel ve imajiner kısımlar sıfıra eşitlenir. Böylece, $P_1(\omega)$, $Q_1(\omega)$, $R_1(\omega)$, $P_2(\omega)$, $Q_2(\omega)$ ve $R_2(\omega)$ uygun aralıkta tanımlı, sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$U(\omega, K_i, K_j) := \mathrm{Re}\, g(i\omega, K_i, K_j) = K_i P_1(\omega) + K_j Q_1(\omega) + R_1(\omega) = 0 \tag{4.15}$$

$$V(\omega, K_i, K_j) := \mathrm{Im}\, g(i\omega, K_i, K_j) = K_i P_2(\omega) + K_j Q_2(\omega) + R_2(\omega) = 0 \tag{4.16}$$

eşitlikleri elde edilir. K_i ve K_j parametreleri cinsinden yukarıdaki denklem sistemini çözersek

$$K_i = \frac{Q_1 R_2 - Q_2 R_1}{P_1 Q_2 - P_2 Q_1}, \quad K_j = \frac{P_2 R_1 - P_1 R_2}{P_1 Q_2 - P_2 Q_1}, \tag{4.17}$$

elde ederiz. ω, $-\infty$dan ∞ değişirken Eşitlik (4.17), $K_i - K_j$ parametre uzayında parametrik eğri denklemidir. Bu eğriler $K_i - K_j$ parametre uzayını D-bölgelerine ayıran hiperyüzeylerdir. Bu eğrilerle birlikte ayrıca Eşitlik (4.15) ve (4.16) 'nın singüler çözümleri de hiperyüzeylere dahil edilir.

Tanım 4.4.1: Parametrik Denklemler (4.17) ve Eşitlik (4.15) ve (4.16) 'nın singüler çözümleri ile elde edilen hiperyüzeylere $K_i - K_j$ parametre uzayının D-eğrileri denir.

Teorem 4.4.1: $K_i - K_j$ parametreleriyle verilen $g(\lambda, K_i, K_j) = 0$ karakteristik denklemi sanal bir köke sahiptir olması için gerek ve yeter koşul (K_i, K_j) noktalarının parametre uzayındaki D-eğrileri üzerinde olmasıdır.

İspat. D-eğrilerinin tanımından görülmektedir.

Teorem 4.4.2: $K_i - K_j$ parametre uzayında D-eğrileri tarafından bölünmüş her bir bölgede $g(\lambda, K_i, K_j) = 0$ karakteristik denkleminin pozitif reel kısma sahip köklerinin sayısı eşittir.

İspat. Kabul edelim ki $K_i - K_j$ parametre uzayında D-eğrileri tarafından bölünmüş aynı bölgeden iki farklı nokta için $g(\lambda, K_i, K_j) = 0$ karakteristik denkleminin pozitif reel kısma sahip köklerinin sayısı farklı olsun. Bu iki noktayı birleştiren herhangi bir eğrinin noktalarından en az biri için karakteristik denklemin imajiner eksen üzerinde bir kökü vardır. Teorem 4.4.1 den bu nokta parametre uzayında D-eğrisi üzerinde olmalıdır. Bu da çelişkidir.

Böylece, karakteristik denklemin k tane pozitif reel kısma sahip köklerin bölgesini u_k ile gösterirsek, asimptotik kararlılık bölgesi, eğer varsa, u_0 olacaktır. K_i ve K_j parametrelerinin özel bir değerleri için sistem asimptotik kararlı olsun. $K_i - K_j$ parametre uzayında bu noktayı kapsayan D-bölgesinin tamamında sistem asimptotik kararlı olacaktır. Böylece bu bölgeyi u_0 bölgesi olarak belirleyebiliriz. Diğer bölgelerdeki pozitif reel kısma sahip kök sayısını bulmak için K_i ve K_j parametrelerinden birine göre kısmi türev alınır ve türevin işaretine göre bir bölgeden diğer bölgeye geçerken reel kısma sahip kök sayında artma veya azalma olduğu belirlenir. Eğer en az bir bölgenin reel kısma sahip kök sayısı biliniyorsa diğer bölgelerdeki reel kısma sahip kök sayısı da bu şekilde bulunabilir.

Diekmann ve diğ. (1995) karakteristik denklemin pozitif reel kısma sahip kök sayısının D-bölgeleri arasında ki değişimini Jakobiyen matrisi ile ifade etmişlerdir. $\lambda = \mu + i\omega$ kökü karakteristik denklemde yerine yazılıp reel ve imajiner kısımları sıfıra eşitlenerek

$$G_1(\mu, \omega, K_i, K_j) := \mathrm{Re}\, g(\mu, i\omega, K_i, K_j) = 0 \tag{4.18}$$

$$G_2(\mu, \omega, K_i, K_j) := \mathrm{Im}\, g(\mu, i\omega, K_i, K_j) = 0 \tag{4.19}$$

eşitlikleri elde edilsin. Buradan elde edilen

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial K_i} & \frac{\partial G_1}{\partial K_j} \\ \frac{\partial G_2}{\partial K_i} & \frac{\partial G_2}{\partial K_j} \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

Jakobiyen matrisi ile köklerin hareketinin yönü aşağıdaki önerme ile gösterilebilir.

Önerme 4.4.1: Eğer $\det(J) < 0$ ise ($\det(J) > 0$ ise) parametre uzayında ω artarken çizilen D-eğrisinin doğrultusuna göre eğrinin soluna (sağına) geçerken karakteristik denklemin kökü sağ yarı düzeleme geçer.

Stepan'nın (1989) tanımladığı formüllerle de pozitif reel kısma sahip kök sayısını kolay bir yolla bulabiliriz. Bu teknikte kısmi türevlere gerek kalmadan sadece $U(\omega, K_i, K_j)$ ve $V(\omega, K_i, K_j)$ fonksiyonlarının gerekli analizini yapmak yeterlidir. Bir $A(\alpha, \beta)$ noktası u_k bölgesinin bir iç noktası olmak üzere, $U(\omega, \alpha, \beta)$ 'nun pozitif reel kökleri $\omega = \rho_i, \quad i = 1...s$ ve $\rho_1 \geq \cdots \geq \rho_s$, $V(\omega, \alpha, \beta)$ 'nin negatif olmayan reel kökleri $\omega = \sigma_i, \quad i = 1...s$ ve $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_s = 0$ olsun. Eğer Denklem (4.12) 'nin boyutu $n = 2m$, $m \in Z$ şeklinde çift sayı ise

$$k = m + (-1)^m \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i+1} \operatorname{sgn}(V(\rho_i, \alpha, \beta)) \tag{4.21}$$

olur. Eğer Denklem (4.12) 'nin boyutu $n = 2m+1, \quad m \in Z$ şeklinde tek sayı ise

$$k = m + \frac{1}{2} + (-1)^m \left(\frac{1}{2} (-1)^s \operatorname{sgn}(U(0, \alpha, \beta)) + \sum_{i=1}^{s-1} (-1)^i \operatorname{sgn}(U(\sigma_i, \alpha, \beta)) \right) \tag{4.22}$$

olur.

4.4.1. İki gecikme terimli diferansiyel denklemin kararlılık analizi

Bu bölümde iki gecikme terimi bulunduran

$$x'(t) = \alpha_1 x(t) + \beta_1 y(t) + \theta_1 y(t - r_1), \tag{4.23}$$

$$y'(t) = \alpha_2 x(t) + \beta_2 y(t) + \theta_2 y(t - r_2) \tag{4.24}$$

sistemini ele alalım. Burada $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \theta_1$ ve θ_2 katsayılar ve r_1, r_2 pozitif sabit gecikmelerdir. (4.23)-(4.24) denklem sisteminin karakteristik denklemi

$$g(\lambda) = \lambda^2 - (\alpha_1 + \beta_2)\lambda + (\alpha_1 - \lambda)\theta_2 e^{-\lambda r_2} - \alpha_2\theta_1 e^{-\lambda r_1} + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0 \tag{4.25}$$

şeklindedir. $\lambda = 0$ için

$$(\theta_2 + \beta_2)\alpha_1 = (\theta_1 + \beta_1)\alpha_2 \tag{4.26}$$

singüler doğrusunu elde ederiz. $\lambda = i\omega$ için reel ve imajiner kısımlardan

$$U = -\omega^2 - \theta_2\omega\sin(\omega r_2) + \alpha_1\theta_2\cos(\omega r_2) - \alpha_2\theta_1\cos(\omega r_1) + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0 \tag{4.27}$$

$$V = -\alpha_1\omega - \beta_2\omega - \theta_2\omega\cos(\omega r_2) - \alpha_1\theta_2\sin(\omega r_2) + \alpha_2\theta_1\sin(\omega r_1) = 0 \tag{4.28}$$

bulunur. Öncelikle $\alpha_1 - \alpha_2$ parametre uzayında D-eğrilerini elde edelim.

4.4.1.1. $(\alpha_1 - \alpha_2)$ parametre uzayı

Eşitlik (4.27) ve (4.28), α_1 ve α_2 için çözülürse

$$\alpha_1 = \frac{\theta_1(\omega\cos(\omega(r_1 - r_2)) + \omega^2\sin(\omega r_1) + \beta_2\omega\cos(\omega r_1)) + \beta_1\omega(\theta_2\cos(\omega r_2) + \beta_2)}{\theta_1\theta_2\sin(\omega(r_1 - r_2)) + \theta_1\beta_2\sin(\omega r_1) - \theta_2\beta_1\sin(\omega r_2) - \theta_1\omega\cos(\omega r_1) - \beta_1\omega}, \tag{4.29}$$

$$\alpha_2 = \frac{\omega^3 + (\theta_2{}^2 + \beta_2{}^2)\omega + 2\theta_2\beta_2\omega\cos(\omega r_2) + 2\theta_2\omega^2\sin(\omega r_2)}{\theta_1\theta_2\sin(\omega(r_1 - r_2)) + \theta_1\beta_2\sin(\omega r_1) - \theta_2\beta_1\sin(\omega r_2) - \theta_1\omega\cos(\omega r_1) - \beta_1\omega} \tag{4.30}$$

ω parametreli D-eğrilerini elde ederiz. Eşitlikler (4.29)-(4.30) 'da $\omega \to 0$ limiti alınırsa

$$p_1 := \lim_{\omega\to 0}\alpha_1(\omega) = -\frac{(\theta_1 + \beta_1)(\theta_2 + \beta_2)}{\theta_1 + \beta_1 - \theta_1 r_1(\theta_2 + \beta_2) + \theta_2 r_2(\theta_1 + \beta_1)} \tag{4.31}$$

$$p_2 := \lim_{\omega\to 0}\alpha_2(\omega) = -\frac{(\theta_2 + \beta_2)^2}{\theta_1 + \beta_1 - \theta_1 r_1(\theta_2 + \beta_2) + \theta_2 r_2(\theta_1 + \beta_1)} \tag{4.32}$$

bulunur ve $P(p_1, p_2)$ noktası Doğru (4.26) ile Eğri (4.29)-(4.30) 'un kesişim noktasıdır.

Lemma 4.4.1: r ve A pozitif reel sayılar ve $\frac{1}{rx_1} = \sup(\frac{-\sin x}{x}) \approx 0{,}218$ olsun. Eğer $0 \le 2A \le x_1$ ise $\forall x \in IR$ için $x^2 + 2Ax\sin(xr) \ge 0$ olur.

İspat. $f(x) = x^2 + 2Ax\sin(xr)$ bir çift fonksiyon olduğu için $\forall x \ge 0$ için $f(x) \ge 0$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. $\sin(xr) \ge 0$ veya $\sin(xr) < 0$ olacak şekilde iki durumda inceleyelim. Eğer $\sin(xr) \ge 0$ ise

$$x^2 + 2Ax\sin(xr) \ge x^2 \ge 0 \tag{4.33}$$

bulunur. Eğer $\sin(xr) < 0$ ise

$$x^2 + 2Ax\sin(xr) \ge x^2 + x_1 x\sin(xr) \tag{4.34}$$

bulunur. Kabul edelim ki $x^2 + x_1 x\sin(xr) < 0$ olsun. O halde

$$x + x_1 \sin(xr) < 0 \tag{4.35}$$

olur. $x = \frac{y}{r}$ dönüşümü yaparsak

$$\frac{y}{r} + x_1 \sin(y) < 0 \tag{4.36}$$

bulunur. Buradan

$$rx_1 \sin(y) < -y \tag{4.37}$$

$$\frac{1}{rx_1} < -\frac{\sin(y)}{y} \tag{4.38}$$

bulunur. Bu $\frac{1}{rx_1}$ tanımı ile çelişir. Sonuç olarak

$$\forall x \ge 0 \text{ için } x^2 + 2Ax\sin(xr) \ge 0 \tag{4.39}$$

bulunur.

Önerme 4.4.2: x_1 lemma 4.4.1 'deki gibi tanımlansın. Eşitlik (4.30) 'da eğer $r_1 = r_2 = r$, $\beta_2\theta_1 = \theta_2\beta_1$, $|\theta_1| < \beta_1$ ve $0 \le 2\theta_2 \le x_1$ ise $\forall \omega \in IR$ için $\alpha_2(\omega) < 0$ olur.

İspat. Teoremin koşulları altında (4.30) eşitliği $\forall \omega \in IR - \{0\}$ için

$$\alpha_2(\omega) = -\frac{\omega^2 + {\theta_2}^2 + {\beta_2}^2 + 2\theta_2\beta_2\cos(\omega r) + 2\theta_2\omega\sin(\omega r)}{\theta_1\cos(\omega r) + \beta_1} \tag{4.40}$$

olur.

(*i*) $|\theta_1| < \beta_1$ olduğundan $\forall \omega \in IR$ için $\theta_1\cos(\omega r) + \beta_1 > 0$ dır.

(*ii*) $\theta_2\beta_2 \ge 0$ iken ${\theta_2}^2 + {\beta_2}^2 + 2\theta_2\beta_2\cos(\omega r) \ge {\theta_2}^2 + {\beta_2}^2 - 2\theta_2\beta_2 = (\theta_2 - \beta_2)^2 \ge 0$ olur.

$\theta_2\beta_2 < 0$ iken de ${\theta_2}^2 + {\beta_2}^2 + 2\theta_2\beta_2\cos(\omega r) > {\theta_2}^2 + {\beta_2}^2 + 2\theta_2\beta_2 = (\theta_2 + \beta_2)^2 > 0$ olur.

Bu durumda, $\forall \omega \in IR$ için ${\theta_2}^2 + {\beta_2}^2 + 2\theta_2\beta_2\cos(\omega r) > 0$ dır.

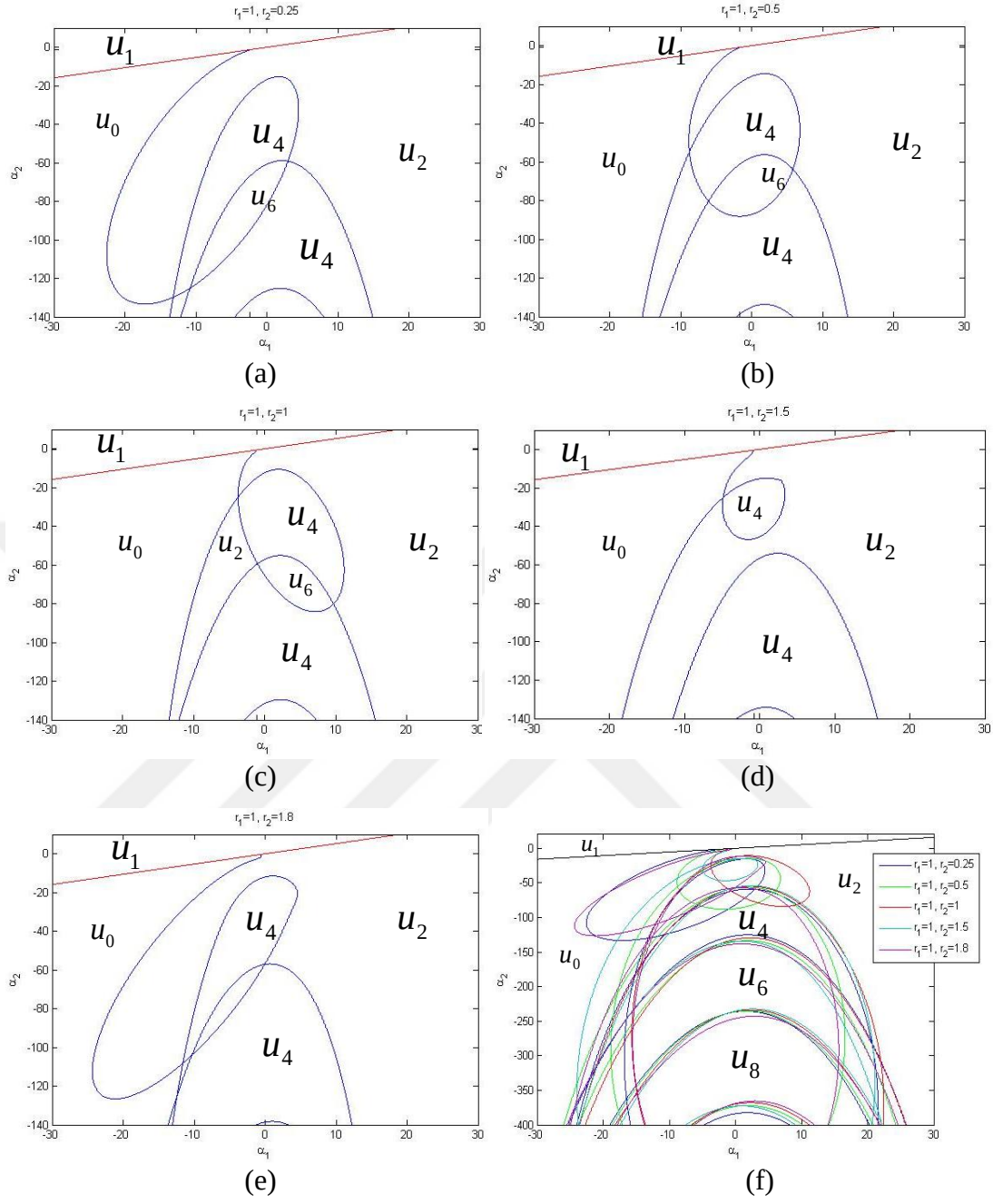
(*iii*) $0 \le 2\theta_2 \le x_1$ iken lemma 4.4.1 'den $\forall \omega \in IR$ için $\omega^2 + 2\theta_2\omega\sin(\omega r) \ge 0$ dır.

(*i*), (*ii*) ve (*iii*) den $\forall \omega \in IR - \{0\}$ için $\alpha_2(\omega) < 0$ elde edilir. Ayrıca, teoremin koşulları altında Eşitlik (4.32) 'den

$$\lim_{\omega \to 0} \alpha_2(\omega) = -\frac{(\theta_2 + \beta_2)^2}{\theta_1 + \beta_1}$$

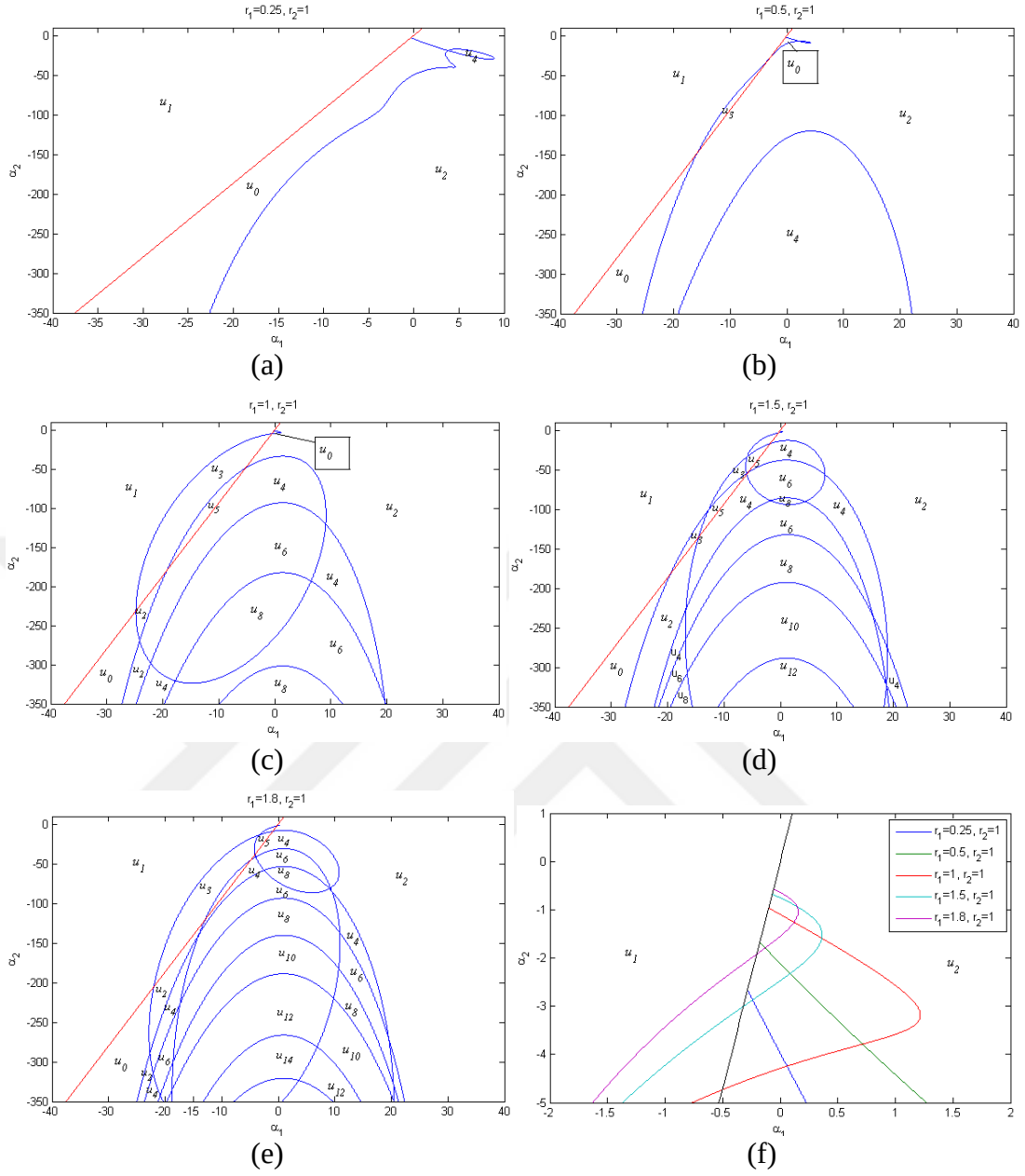
olur. $|\theta_1| < \beta_1$ olduğundan $\lim_{\omega \to 0} \alpha_2(\omega) < 0$ dır.

Şekil 4.3 'de $\beta_1 = 1{,}4$, $\beta_2 = 0{,}4$, $\theta_1 = 1{,}25$, $\theta_2 = 1$ $r_1 = 1$ ve $r_2 = 0{,}25$, $0{,}5$, 1, $1{,}5$, $1{,}8$ değerleri için D-eğrileri gösterilmektedir. Kararlılık bölgesi u_0 ve diğer D-bölgeleri Stepan Formülleri (4.21) ile hesaplanmıştır.



Şekil 4.3. Sistem (4.23)-(4.24) 'ün $\beta_1 = 1{,}4$, $\beta_2 = 0{,}4$, $\theta_1 = 1{,}25$, $\theta_2 = 1$ iken D-eğrileri ve kararlık bölgeleri. Gecikme değerleri a) $r_1 = 1$ ve $r_2 = 0{,}25$, b) $r_1 = 1$ ve $r_2 = 0{,}5$, c) $r_1 = 1$ ve $r_2 = 1$, d) $r_1 = 1$ ve $r_2 = 1{,}5$ e) $r_1 = 1$ ve $r_2 = 1{,}8$, f) $r_1 = 1$ ve $r_2 = 0{,}25$, $0{,}5$, 1, $1{,}5$, $1{,}8$.

Şekil 4.4 'de $\beta_1 = 1{,}4$, $\beta_2 = 0{,}4$, $\theta_1 = 1{,}25$, $\theta_2 = 1$ ve $r_1 = 0{,}25$, $0{,}5$, 1, $1{,}5$, $1{,}8$ ve $r_2 = 1$ değerleri için D-eğrileri gösterilmektedir. Kararlılık bölgesi u_0 ve diğer D-bölgeleri Stepan Formülleri (4.21) ile hesaplanmıştır.



Şekil 4.4. Sistem (4.23)-(4.24) 'ün $\beta_1 = 1{,}4$, $\beta_2 = 0{,}4$, $\theta_1 = 1{,}25$, $\theta_2 = 1$ iken D-eğrileri ve kararlık bölgeleri. Gecikme değerleri a) $r_1 = 0{,}25$ ve $r_2 = 1$ b) $r_1 = 0{,}5$ ve $r_2 = 1$, c) $r_1 = 1$ ve $r_2 = 1$, d) $r_1 = 1{,}5$ ve $r_2 = 1$ e) $r_1 = 1{,}8$ ve $r_2 = 1$, f) $r_1 = 0{,}25$, $0{,}5$, 1, $1{,}5$, $1{,}8$ ve $r_2 = 1$

Önerme 4.4.3: Eşitlik (4.30) 'da eğer $r_1 = r_2 = r$, $\beta_2\theta_1 = \theta_2\beta_1$, $|\theta_1| < \beta_1$ ve $2|\theta_2| \le |\beta_2|$ ise $\forall \omega \in IR$ için $\alpha_2(\omega) < 0$ dır.

İspat. Önerme 4.4.2 'ün ispatında, (*i*) den Eşitlik (4.40) 'ın paydasının teoremin koşulları altında pozitif olduğunu biliyoruz. O halde Eşitlik (4.40) 'ın payının $2|\theta_2| \le |\beta_2|$ iken pozitif olduğunu göstermek yeterlidir. $2|\theta_2| \le |\beta_2|$ eşitsizliği dört farklı durumda incelenir.

(*i*) $0 \le 2\theta_2 \le \beta_2$ ise

$$\omega^2 + {\theta_2}^2 + {\beta_2}^2 + 2\theta_2\beta_2\cos(\omega r) + 2\theta_2\omega\sin(\omega r) \ge \omega^2 + {\theta_2}^2 + {\beta_2}^2 - 2\theta_2\beta_2 - 2\theta_2\omega$$

$$= (\omega + \theta)^2 + {\beta_2}^2 - 2\theta_2\beta_2 \ge 0$$

(*ii*) $0 \le 2\theta_2 \le -\beta_2$ ise

$$\omega^2 + {\theta_2}^2 + {\beta_2}^2 + 2\theta_2\beta_2\cos(\omega r) + 2\theta_2\omega\sin(\omega r) \ge \omega^2 + {\theta_2}^2 + {\beta_2}^2 + 2\theta_2\beta_2 - 2\theta_2\omega$$

$$= (\omega - \theta)^2 + {\beta_2}^2 + 2\theta_2\beta_2 \ge 0$$

(*iii*) $0 \le -2\theta_2 \le \beta_2$ ise

$$\omega^2 + {\theta_2}^2 + {\beta_2}^2 + 2\theta_2\beta_2\cos(\omega r) + 2\theta_2\omega\sin(\omega r) \ge \omega^2 + {\theta_2}^2 + {\beta_2}^2 + 2\theta_2\beta_2 + 2\theta_2\omega$$

$$= (\omega + \theta)^2 + {\beta_2}^2 + 2\theta_2\beta_2 \ge 0$$

(*iv*) $\beta_2 \le 2\theta_2 \le 0$ ise

$$\omega^2 + {\theta_2}^2 + {\beta_2}^2 + 2\theta_2\beta_2\cos(\omega r) + 2\theta_2\omega\sin(\omega r) \ge \omega^2 + {\theta_2}^2 + {\beta_2}^2 - 2\theta_2\beta_2 + 2\theta_2\omega$$

$$= (\omega + \theta)^2 + {\beta_2}^2 - 2\theta_2\beta_2 \ge 0$$

Teorem 4.4.3 : Önerme 4.4.2 veya Önerme 4.4.3 'ün koşulları sağlansın. Eğer

$(i)\,(\theta_2+\beta_2)\alpha_1<(\theta_1+\beta_1)\alpha_2$

$(ii)\,\alpha_2>0$

sağlanıyor ise Denklem sistemi (4.23)-(4.24) kararsızdır.

İspat. Önerme 4.4.2 ve Önerme 4.4.3 'den $(\alpha_1-\alpha_2)$ parametre uzayında (*i*) ve (*ii*) eşitsizlik sisteminin belirlediği bölgeden Denklem sistemi (4.23)-(4.24) 'ün D-eğrisi geçmez. O halde (*i*) ve (*ii*) eşitsizlik sisteminin belirlediği bölgede Denklem sistemi (4.23)-(4.24) ün karakteristik denkleminin pozitif reel kısma sahip kök sayısı değişmeyecektir. Önerme 4.4.2 ve Önerme 4.4.3 ün koşullarını ve (*i*) (*ii*) koşullarını sağlayan $\beta_1=\beta_2=1{,}2$, $\theta_1=\theta_2=1$, $r_1=r_2=1$, $\alpha_1=0{,}1$, $\alpha_2=1$ için Stepan formülleri (4.21) ile pozitif reel kısma sahip kök sayısı $k=1$ olarak bulunur.

4.4.1.2. $(\beta_1-\beta_2)$ parametre uzayı

Eşitlik (4.27)-(4.28) β_1 ve β_2 için çözülürse

$$\beta_1(\omega)=-\frac{\omega^3+\theta_2\omega^2\sin(\omega r_2)+\alpha_2\theta_1(\omega\cos(\omega r_1)-\alpha_1\sin(\omega r_1))+\alpha_1^2(\omega+\theta_2\sin(\omega r_2))}{\omega\alpha_2}, \qquad (4.41)$$

$$\beta_2(\omega)=-\frac{\alpha_1\omega+\theta_2\omega\cos(\omega r_2)+\alpha_1\theta_2\sin(\omega r_2)-\alpha_2\theta_1\sin(\omega r_1)}{\omega} \qquad (4.42)$$

$(\beta_1-\beta_2)$ parametre uzayında D-eğrilerinin parametrik denklemini elde etmiş oluruz. Eşitlikler (4.41)-(4.42) 'de $\omega\to 0$ limiti alınırsa

$$p_1:=\lim_{\omega\to 0}\beta_1(\omega)=-\frac{\alpha_1^2(1+\theta_2 r_2)+\alpha_2\theta_1(1-\alpha_1 r_1)}{\alpha_2}$$

$$p_2:=\lim_{\omega\to 0}\beta_2(\omega)=-\alpha_1(1+\theta_2 r_2)-\theta_2+\alpha_2\theta_1 r_1.$$

elde edilir ve $P(p_1,p_2)$ noktası Doğru (4.26) ile Eğri (4.41)-(4.42) 'nin kesişim noktasıdır.

Şekil 4.5 'te $\alpha_1 = 0{,}2$, $\alpha_2 = 0{,}2$, $\theta_1 = 1{,}25$, $\theta_2 = 1$, $r_1 = 1$, $r_2 = 0{,}25$, $0{,}5$, 1, $1{,}5$, 2 ve $r_1 = 0{,}25$, $0{,}5$, 1, $1{,}5$, 2, 3 ve $r_2 = 1$ değerleri için D-eğrileri gösterilmektedir. Kararlılık bölgesi u_0 ve diğer D-bölgeleri Stepan Formülleri (4.21) ile hesaplanmıştır.

Önerme 4.4.4: $\forall \omega \in IR$ için $m < \beta_2(\omega) < M$ olacak şekilde m ve M reel sayıları vardır.

İspat. $\mu = \sup(\frac{-\sin x}{x}) \approx 0.218$ olsun. Eğer m ve M aşağıdaki gibi tanımlanırsa

$$m = \begin{cases} -\alpha_1 - \operatorname{sgn}(\theta_2)\theta_2 + \mu\alpha_1\theta_2 r_2 + \alpha_2\theta_1 r_1, & \alpha_1\theta_2 < 0, \quad \alpha_2\theta_1 < 0 \\ -\alpha_1 - \operatorname{sgn}(\theta_2)\theta_2 + \mu\alpha_1\theta_2 r_2 - \mu\alpha_2\theta_1 r_1, & \alpha_1\theta_2 < 0, \quad \alpha_2\theta_1 > 0 \\ -\alpha_1 - \operatorname{sgn}(\theta_2)\theta_2 - \alpha_1\theta_2 r_2 + \alpha_2\theta_1 r_1, & \alpha_1\theta_2 > 0, \quad \alpha_2\theta_1 < 0 \\ -\alpha_1 - \operatorname{sgn}(\theta_2)\theta_2 - \alpha_1\theta_2 r_2 - \mu\alpha_2\theta_1 r_1 & \alpha_1\theta_2 > 0, \quad \alpha_2\theta_1 > 0 \end{cases} \tag{4.43}$$

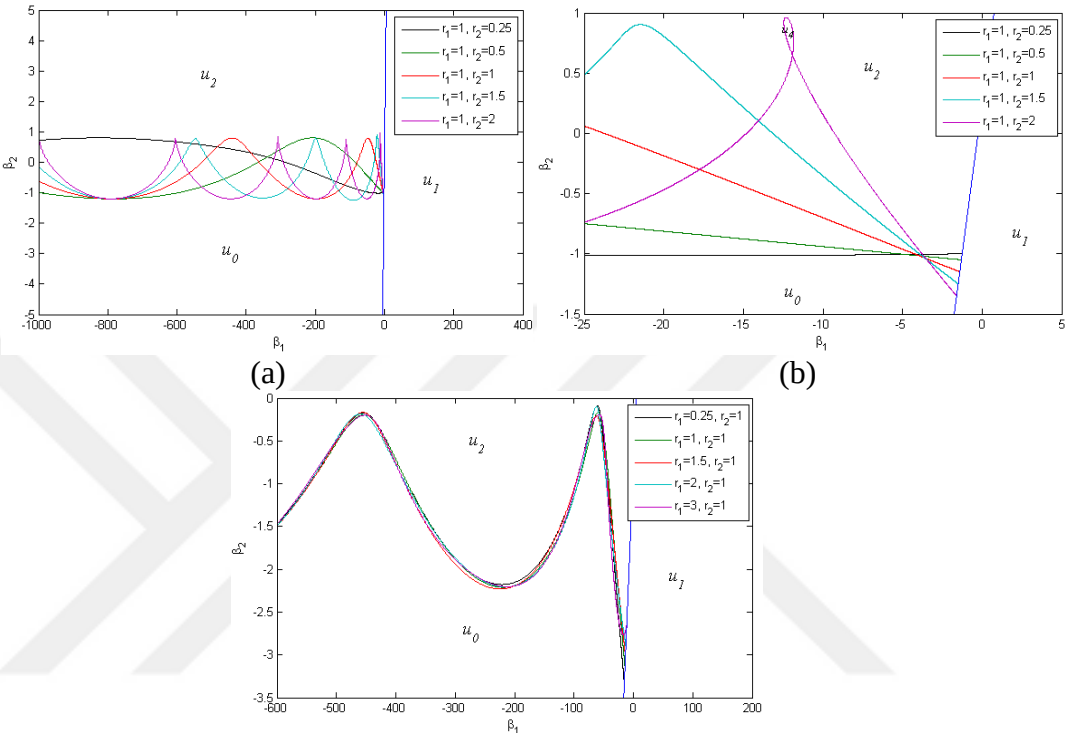
$$M = \begin{cases} -\alpha_1 + \operatorname{sgn}(\theta_2)\theta_2 - \alpha_1\theta_2 r_2 - \mu\alpha_2\theta_1 r_1, & \alpha_1\theta_2 < 0 \quad \alpha_2\theta_1 < 0 \\ -\alpha_1 + \operatorname{sgn}(\theta_2)\theta_2 - \alpha_1\theta_2 r_2 + \alpha_2\theta_1 r_1, & \alpha_1\theta_2 < 0 \quad \alpha_2\theta_1 > 0 \\ -\alpha_1 + \operatorname{sgn}(\theta_2)\theta_2 + \mu\alpha_1\theta_2 r_2 - \mu\alpha_2\theta_1 r_1 & \alpha_1\theta_2 > 0 \quad \alpha_2\theta_1 < 0 \\ -\alpha_1 + \operatorname{sgn}(\theta_2)\theta_2 + \mu\alpha_1\theta_2 r_2 + \alpha_2\theta_1 r_1 & \alpha_1\theta_2 > 0 \quad \alpha_2\theta_1 > 0 \end{cases} \tag{4.44}$$

$\forall \omega \in IR$ için $m < \beta_2(\omega) < M$ olduğu açıktır.

Teorem 4.4.4: Eğer $\frac{\alpha_2\theta_1 - \alpha_1\theta_2 + \alpha_2\beta_1}{\alpha_1} < \beta_2 < m$ ise, Denklem Sistemi (4.23)-(4.24) asimptotik kararlıdır.

İspat. Eşitlik (4.26) ve önerme 4.4.4 'den $\frac{\alpha_2\theta_1 - \alpha_1\theta_2 + \alpha_2\beta_1}{\alpha_1} < \beta_2 < m$ eşitsizliğinin $(\beta_1 - \beta_2)$ parametre uzayında belirttiği bölgeden D-eğrisi geçmez. O halde bu bölgede pozitif reel kısma sahip kök sayısı değişmez. Bu durumda, teoremin

koşullarını sağlayan özel parametre değerleri için sistemin kararlı olduğunu göstermek yeterlidir. $\alpha_1 = 0{,}2$, $\alpha_2 = 0{,}2$, $\beta_1 = -5$, $\beta_2 = -2$, $\theta_1 = 1{,}25$, $\theta_2 = 1$, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, için Stepan Formülleri (4.21) kullanarak karakteristik denklemin pozitif reel kısma sahip kökünün olmadığı elde edilir.



Şekil 4.5. Sistem (4.23)-(4.24) 'ün $\alpha_1 = 0{,}2$, $\alpha_2 = 0{,}2$, $\theta_1 = 1{,}25$, $\theta_2 = 1$, iken D-eğrileri ve kararlık bölgeleri. Gecikme değerleri a) $r_1 = 1$, $r_2 = 0{,}25$, $0{,}5$, 1, $1{,}5$, 2 b) a ile aynı gecikme değerleri için daha küçük aralıkta c) $r_1 = 0{,}25$, $0{,}5$, 1, $1{,}5$, 2, 3 ve $r_2 = 1$

Teorem 4.4.5**:** Eğer aşağıdaki koşullardan biri sağlanıyor ise

(A1) $M < \beta_2 < \dfrac{\alpha_2\theta_1 - \alpha_1\theta_2 + \alpha_2\beta_1}{\alpha_1}$

(A2) $M < \beta_2$ ve $\dfrac{\alpha_2\theta_1 - \alpha_1\theta_2 + \alpha_2\beta_1}{\alpha_1} < \beta_2$

(A3) $\beta_2 < m$ ve $\beta_2 < \dfrac{\alpha_2\theta_1 - \alpha_1\theta_2 + \alpha_2\beta_1}{\alpha_1}$

Denklem sistemi (4.23)-(4.24) kararsızdır.

İspat. Teorem 4.4.4 'ün ispatına benzer şekilde ispat yapılabilir. Şekil 4.5 koşulları sağlayan parametre değerlerini bulmak için kullanılabilir.

Önerme 4.4.6: $\mu = \sup(\frac{-\sin x}{x}) \approx 0.218$ olsun. Eğer $0 \le \theta_2 \le \frac{1}{\mu r_2}$ ve $\alpha_2 > 0$ ise $\forall \omega \in IR$ için $\beta_1(\omega) < N$ olacak şekilde bir N reel sayısı vardır.

İspat. $\forall \omega \in IR$ için lemma 4.4.1 ve Denklem (4.41) 'den

$$\beta_1(\omega) < -\frac{\alpha_2\theta_1\cos(\omega r_1) + \alpha_1^2}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1^2\theta_2\sin(\omega r_2)}{\omega\alpha_2} + \frac{\theta_1\alpha_1\sin(\omega r_1)}{\omega},$$

elde edilir. Eğer N aşağıdaki gibi tanımlanmış ise

$$N = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{sgn}(\theta_1)\alpha_2\theta_1 + \alpha_1^2 + \mu\alpha_1^2\theta_2 r_2}{\alpha_2} + \theta_1\alpha_1 r_1, & \theta_1\alpha_1 > 0 \\ \dfrac{\mathrm{sgn}(\theta_1)\alpha_2\theta_1 + \alpha_1^2 + \mu\alpha_1^2\theta_2 r_2}{\alpha_2} - \mu\theta_1\alpha_1 r_1 & \theta_1\alpha_1 < 0 \end{cases}$$

$\forall \omega \in IR$ için $\beta_1(\omega) < N$ elde edilir.

Teorem 4.4.6: Eğer $N < \beta_1$ ise , Denklem Sistemi (4.23)-(4.24) kararsızdır.

İspat. Teorem 4.4.4 'ün ispatına benzer şekilde ispat yapılabilir. Şekil 4.5 koşulları sağlayan parametre değerlerini bulmak için kullanılabilir.

4.4.2. Gecikme fonksiyonunun değer aralığına bağlı kararlılık bölgesi

Bu bölümde,

$$y'(t) = -K_0 y(t) - K_1 y(t - \tau(y(t))) \tag{4.45}$$

durum gecikmeli diferansiyel denklemini denge noktasında dondurarak lineerleştirme yapmadan kararlılık analizi yapacağız. Denklem (4.45), gecikme fonksiyonu durum fonksiyonuna bağlı olduğundan dolayı çözümde ki değişimin bizzat kendisi gecikme miktarını değiştirir. Bu durumda, denge noktasında dondurarak yapılan lineerleştirme ile yapılan yerel kararlılık analizi sadece denge

noktasının dar bir aralığında yakın sonuçlar verebilir. Bu sebeple, bu bölümde gecikme fonksiyonu $\tau(u(t))$ 'nin değer aralığına göre kararlılık analizi yapacağız.

Kabul edelim ki gecikme fonksiyonu $\tau(u(t))$ bir üst sınıra sahip olsun. Yani, $\forall t \in IR^{+}$ için en bir M_1 pozitif reel sayısı vardır öyle ki $0 < \tau(u(t)) < M_1$.

Bu durumda, Bu durumda t değişirken Denklem (4.45) 'in gecikme miktarı da $(0, M_1)$ aralığında değişecektir. Çözümün kararlılığını incelemek için h, $(0, M_1)$ aralığında değer alan bağımsız bir parametre olmak üzere

$$g(\lambda) = \lambda + K_0 + K_1 e^{-\lambda h}$$

karakteristik denklemini ele alalım.

Şimdi Denklem (4.45) 'in $(K_0 - K_1)$ parametre uzayında D-eğrilerini elde edelim. Karakteristik denklemin $\lambda = 0$ kökünden

$$C_* : K_0 + K_1 = 0 \tag{4.46}$$

singüler doğrusu elde edilir. Karakteristik denklemde $\lambda = i\omega$ alınıp eşitliğin sağ tarafı ile sol tarafının reel ve sanal kısımlarını eşitleyerek

$$K_0 + K_1 \cos(\omega h) = 0 \tag{4.47}$$

$$\omega + K_1 \sin(\omega h) = 0 \tag{4.48}$$

denklemlerini elde ederiz ve bu denklemleri K_0 ve K_1 için çözersek

$$K_0(\omega, h) = -\frac{\omega \cos(\omega h)}{\sin(\omega h)} \tag{4.49}$$

$$K_1(\omega, h) = \frac{\omega}{\sin(\omega h)} \tag{4.50}$$

elde ederiz. $K_0(\omega, h)$ ve $K_1(\omega, h)$, ω 'ya göre çift fonksiyon olduklarından dolayı $\omega \in (0, \infty)$ almak yeterlidir. h bir sabit olmadığından dolayı Denklem (4.49)-(4.50)

bir eğri ailesi tanımlar. h 'nin bir sabit değeri için $K_0(\omega,h)$ ve $K_1(\omega,h)$, ω 'nın bir fonksiyonu olurlar ve bir eğrinin parametrik denklemini verirler. h 'nin her farklı değeri için $K_0(\omega,h)$ ve $K_1(\omega,h)$ eğri ailesinden farklı bir eğri tanımlanır. Bu eğri denklemleri $\omega h = k\pi$ için singüler olduklarından dolayı $J_k = (\frac{k\pi}{h}, \frac{(k+1)\pi}{h})$ aralıklarını tanımlayalım ve $\omega \in J_k$ için (4.49)-(4.50) eğrilerini $C_k(h)$ ile gösterelim.

$C_0(h)$ eğrisi $\omega \to 0$ iken

$$(\lim_{\omega\to 0} K_0(\omega,h), \lim_{\omega\to 0} K_1(\omega,h)) = (-\frac{1}{h}, \frac{1}{h}) \tag{4.51}$$

limit noktasına sahiptir ve bu limit noktası $C_0(h)$ eğrisi ile C_* doğrusunun kesim noktasıdır.

Ayrıca $k \in N - \{0\}$ olmak üzere aşağıdaki limitler

$$\lim_{\omega\to(\frac{(2k-1)\pi}{h})^-} K_0(\omega,h) = \lim_{\omega\to(\frac{(2k-1)\pi}{h})^-} K_1(\omega,h) = \lim_{\omega\to(\frac{2k\pi}{h})^-} K_0(\omega,h) = \lim_{\omega\to(\frac{2k\pi}{h})^+} K_1(\omega,h) = +\infty$$

$$\lim_{\omega\to(\frac{(2k-1)\pi}{h})^+} K_0(\omega,h) = \lim_{\omega\to(\frac{(2k-1)\pi}{h})^+} K_1(\omega,h) = \lim_{\omega\to(\frac{2k\pi}{h})^+} K_0(\omega,h) = \lim_{\omega\to(\frac{2k\pi}{h})^-} K_1(\omega,h) = -\infty$$

şeklinde hesaplanır.

Lemma 4.4.2: $C_0(h)$ eğrisi ile C_* doğrusu sadece $(-\frac{1}{h}, \frac{1}{h})$ limit noktasında kesişirler ve dahası $k \in N - \{0\}$ için $C_k(h)$ eğrisi ile C_* doğrusu ile kesişmez.

İspat. Eğer kesim noktaları var ise Eşitlik (4.49) ve (4.50) 'nin Eşitlik (4.46) 'yı sağlayacak şekilde $\omega \in J_k$ 'lar bulunmalı. Eşitlik (4.49) ve (4.50) 'yi (4.46) de sağlatırsak

$$\frac{\omega\cos(\omega h)}{\sin(\omega h)} = \frac{\omega}{\sin(\omega h)}$$

elde edilir. Bu eşitliğin $\omega \in J_k$ için çözümü yoktur. $\omega \to 0$ limit değeri için Eşitlik (4.51) 'de $C_0(h)$ eğrisi ile C_* doğrusunun $(-\frac{1}{h}, \frac{1}{h})$ noktasında kesiştiğini göstermiştik.

Lemma 4.4.3 $h_0 \in IR^+$ sabit olmak üzere $C_k(h_0)$ eğrileri birbirleriyle kesişmezler.

İspat. Farz edelim ki bir noktada kesişsinler. Yani $\omega_1 \neq \omega_2$ için $K_0(\omega_1) = K_0(\omega_2)$ ve $K_1(\omega_1) = K_1(\omega_2)$ olsun. O halde Eşitlik (4.49) ve (4.50) 'dan

$$\frac{\omega_1}{\sin(\omega_1 h_0)} = \frac{\omega_2}{\sin(\omega_2 h_0)} \quad \text{ve} \quad \frac{\omega_1 \cos(\omega_1 h_0)}{\sin(\omega_1 h_0)} = \frac{\omega_2 \cos(\omega_2 h_0)}{\sin(\omega_2 h_0)}$$

elde edilir. $\omega_1 \neq \omega_2$ olduğundan dolayı sol taraftaki eşitlikten $\omega_1 h_0 \neq \omega_2 h_0 + 2n\pi$, $n \in N$ bulunur. Ayrıca bu iki eşikliğin ortak çözümünden $\cos(\omega_1 h_0) = \cos(\omega_2 h_0)$ elde edilir ve bu çelişkidir.

Lemma 4.4.4: $h_0 \in IR^+$ sabit olmak üzere $K_0 = 0$ doğrusu, $C_k(h_0)$ eğrilerini birer kez keser ve $(0, P_k)$ kesişim noktası olmak üzere

$k = 2n$, $n \in N$ için $P_k < P_{k+2}$

$k = 2n+1$, $n \in N$ için $P_{k+2} < P_k$

olur.

İspat. $\omega \in J_k$ iken $K_0(\omega, h_0) = 0$ olması için $\omega = \frac{\pi + 2n\pi}{2h_0}$ olması gerekir. Dolayısıyla

$$P_k = \begin{cases} \frac{\pi + 2k\pi}{2h_0} & k = 2n \\ -\frac{\pi + 2k\pi}{2h_0} & k = 2n+1 \end{cases} \tag{4.52}$$

elde edilir.

Teorem 4.4.7 : $h \in IR^{+}$ sabit olmak üzere

$$y'(t) = -K_0 u(t) - K_1 y(t-h) \tag{4.53}$$

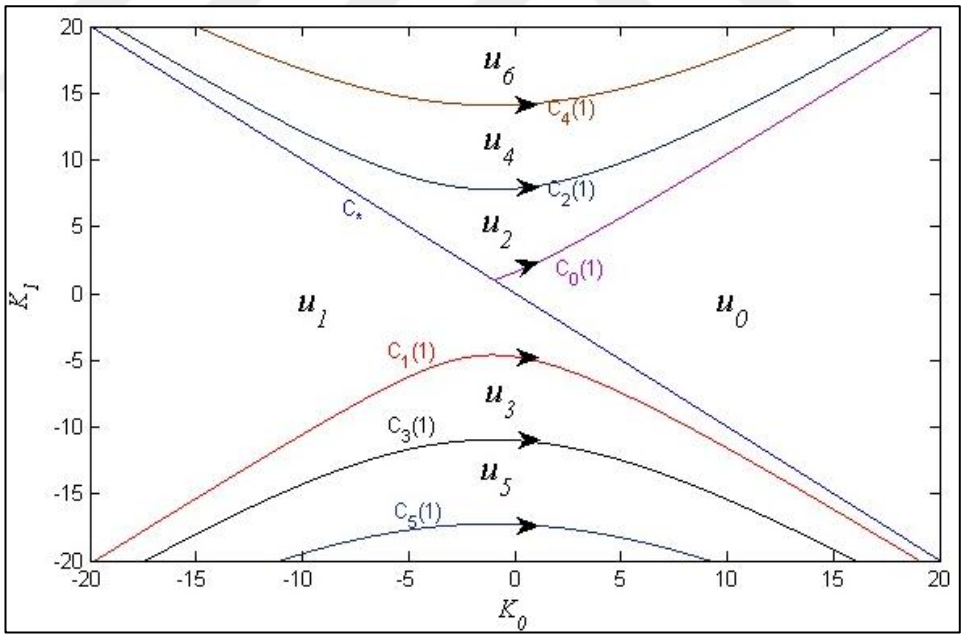
denklemi

$(a) -\frac{1}{h} < K_0$

$(b) -K_0 < K_1 < \frac{\omega}{\sin(\omega h)}$, burada ω, $(0, \frac{\pi}{h})$ aralığında $K_0 = \frac{-\omega\cos(\omega h)}{\sin(\omega h)}$ 'ın çözümüdür.

koşullarını sağlıyor ise asimptotik kararlıdır.

İspat. $K_0 > 0$ ve $K_1 = 0$ için denklemin kararlı olduğu açıktır. $(K_0 - K_1)$ parametre uzayında lemma 4.4.2 , lemma 4.4.3 ve lemma 4.4.4 'den denklemin kararlı olduğu bu bölgeyi kapsayan bölgenin sınırları $C_0(h)$ eğrisinin altı ile C_* doğrusunun üstünde kalan bölgedir. Bu bölgenin cebirsel ifadesi (*a*) ve (*b*) 'deki gibidir.



Şekil 4.6. $C_k(h)$ eğri ailesinin $C_k(1)$ üyesinin grafiği.

Eşitlik (4.20) 'de tanımlanan Jakobiyen matrisin determinantı hesaplanırsa

$\det(J) < 0 \quad \omega \in J_{2k}$

$\det(J) > 0 \quad \omega \in J_{2k+1}$

elde edilir. Önerme 4.4.1 'den $C_{2k}(h)$ eğrilerinin soluna doğru geçerken, $C_{2k+1}(h)$ eğrilerinin sağına doğru geçerken, karakteristik denklemin kökleri sağ yarı düzleme geçerler. Yukarıda hesaplanan limitlerden, ω artarken $C_{2k}(h)$ 'ın çizim doğrultusu saat yönün tersi ve $C_{2k+1}(h)$ 'ın çizim doğrultusu saat yönünedir.

Şekil 4.6 'te $h=1$ için D-eğrilerini gösterilmektedir. Burada, u_k bölgesi için karakteristik denklemin pozitif reel kısma sahip k tane kökü vardır. Dolayısıyla u_0 bölgesi kararlılık bölgesidir. Eğriler üzerindeki oklar ise ω artarken eğrilerin çizim doğrultusunu göstermektedir.

Teorem 4.4.7 'ye kadar h bir sabit olarak ele alındı. Şimdi h değişirken kararlılık bölgesinin nasıl değiştiğini inceleyeceğiz.

Lemma 4.4.4 : $k \in N$ sabit olmak üzere $C_k(h)$ eğri ailesinin üyeleri birbirleri ile kesişmezler.

İspat. $h_1 = h_2$ için kesişmedikleri lemma 4.4.3 'de gösterilmişti. Farz edelim ki $h_1 < h_2$ iken bir noktada kesişsinler. Yani ωh_1, $\omega h_2 \in (k\pi, (k+1)\pi)$ için Eşitlik (4.49) ve (4.50) 'den

$$\frac{\omega_1 \cos(\omega_1 h_1)}{\sin(\omega_1 h_1)} = \frac{\omega_2 \cos(\omega_2 h_2)}{\sin(\omega_2 h_2)} \tag{4.54}$$

$$\frac{\omega_1}{\sin(\omega_1 h_1)} = \frac{\omega_2}{\sin(\omega_2 h_2)} \tag{4.55}$$

olmalıdır. Bu iki eşikliğin ortak çözümünden $\cos(\omega_1 h_1) = \cos(\omega_2 h_2)$ elde edilir ve $\omega_1 h_1$, $\omega_2 h_2$ 'nin bulundukları aralıklarda $\cos(\omega h)$ bire bir olduğundan dolayı $\omega_1 h_1 = \omega_2 h_2$ olmasını gerektirir. Buradan $h_1 < h_2$ kabulümüzden dolayı $\omega_1 \neq \omega_2$ bulunur. Bu ise Eşitlik (4.55) ile çelişir.

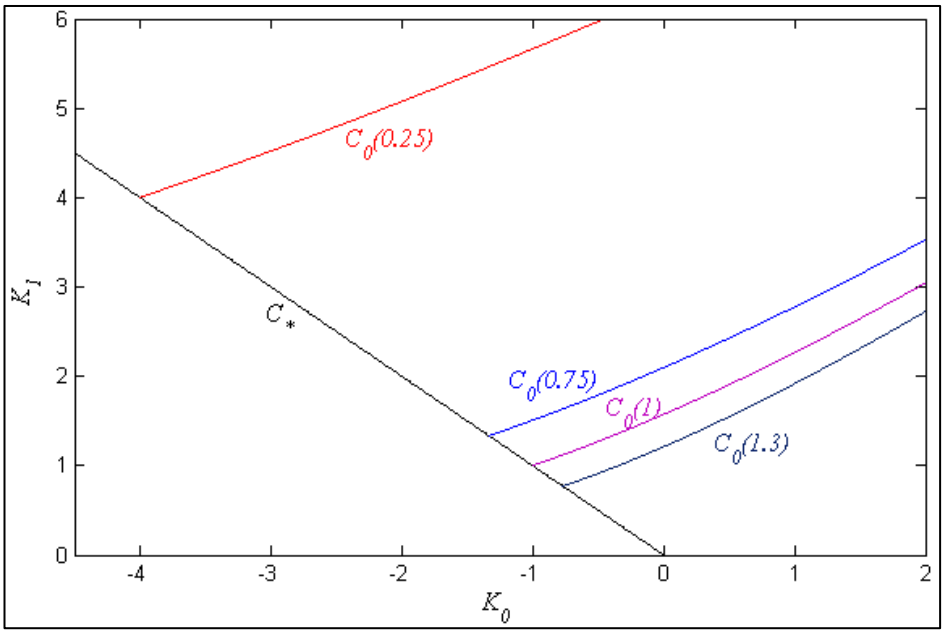
Lemma 4.4.5: Eğer $h_1 < h_2$ ise $C_0(h_2)$ eğrisi, $C_0(h_1)$ eğrisinin altında yer alır.

İspat. h değişirken eğrilerdeki değişimi göstermek için (4.49) ve (4.50) eşitliklerinin h'ye göre türevlerini alırsak

$$\frac{\partial K_0}{\partial h} = \frac{\omega^2}{\sin^2(\omega h)}$$

$$\frac{\partial K_1}{\partial h} = \frac{-\omega^2 \cos(\omega h)}{\sin^2(\omega h)}$$

bulunur. $\omega h \in (0, \frac{\pi}{2}]$ aralığında K_0 artan ve K_1 azalandır. Her bir $\omega h \in (0, \pi)$ değeri için $K_0(\omega, h)$ ve $K_1(\omega, h)$ fonksiyonları $C_0(h)$ eğrisinin koordinatlarını verir. Bundan dolayı, ωh_1, $\omega h_2 \in (0, \frac{\pi}{2}]$ için eğer $h_1 < h_2$ ise $(K_0(\omega, h_2), K_1(\omega, h_2))$ noktası $(K_0(\omega, h_1), K_1(\omega, h_1))$ noktasının altında yer alır. Kabul edelim ki, $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ aralığının bir bölümünde $C_0(h_2)$ eğrisi $C_0(h_1)$ eğrisinin üzerinde yer alsın. Bu durumda $C_0(h_2)$ eğrisi $C_0(h_1)$ eğrisini en az bir noktada kesmesi gerekir. Bu lemma 4.4.4 ile çelişir.



Şekil 4.7. $h = 0{,}25$, $0{,}75$, 1, $1{,}3$ için $C_0(h)$ eğrileri

Şekil 4.7 'de $h = 0.25,\ 0.75,\ 1,\ 1.3$ için $C_0(h)$ eğrileri gösterilmektedir.

Önerme 4.4.6: $S_h = \{(K_0, K_1) |\ K_0$ ve $K_1,\ h \in IR^+$ için (a) ve (b) koşullarını sağlasın$\}$ kümesi tanımlansın. Eğer $h_1 < h_2$ ise $S_{h_2} \subset S_{h_1}$ 'dir.

İspat. Lemma 4.4.5 'in sonucudur.

Teorem 4.4.8: Denklem (4.45) 'in gecikme terimi $\forall t \in IR^+$ için $0 < \tau(y(t)) < M_1$ olsun. Eğer Denklem (4.45) 'in katsayıları

$(\tilde{a})\ -\frac{1}{M_1} < K_0$

$(\tilde{b})\ -K_0 < K_1 < \frac{\omega}{\sin(\omega M_1)}$, burada ω, $(0, \frac{\pi}{M_1})$ aralığında $K_0 = \frac{-\omega\cos(\omega M_1)}{\sin(\omega M_1)}$ 'in köküdür.

Koşulları sağlanıyor ise denklemin çözümü $\forall t \in IR^+$ için asimptotik kararlıdır.

İspat. $(\tilde{a})$ ve $(\tilde{b})$ koşulları sağlanıyorken teorem 4.4.7 ve önerme 4.4.6 'dan dolayı $\forall t \in IR^+$ için Denklem (4.45) denkleminin karakteristik denkleminin kökleri daima sol yarı düzlemde kalacaktır.

Tanım 4.4.2: Gecikmeli diferansiyel denklemin reel kısmı sıfır olan veya sıfır özdeğerinin olduğu gecikmelerinin kümesine kritik gecikmelerin kümesi denir. Bu kümenin elemanlarına da kritik gecikmeler denir.

Bir denklemin kritik gecikmeleri, denklemin karakterinin değiştiği gecikme değerleridir. Denklemin diğer parametreleri sabit alındığında belli bir h gecikme değeri için denklemin çözümünün kararlı olduğu biliniyorsa h dan büyük ilk kritik gecikme değerine kadar olan tüm gecikme değerleri için denklemin çözümü kararlı olacaktır.

Şimdi Denklem (4.45) 'in kritik gecikmelerini parametreler cinsinden ifade edeceğiz

Tanım 4.4.3: $\omega \in IR,\quad h,\quad T \in IR^{+}$ olmak üzere $h = \frac{2}{\omega}(\arctan(\omega T) + p\pi),\quad p \in Z$ iken

$$e^{-i\omega h} = \frac{1 - i\omega T}{1 + i\omega T} \tag{4.56}$$

eşitliğine Rekasius dönüşümü denir.

Bu dönüşüm ilk olarak, Rekasius (1980) tarafından $h_k = kh > 0,\quad k = 1,2...n$ şeklinde reel gecikmeler içeren diferansiyel denklemlerde karakteristik denklemi, cebirsel denkleme dönüştürerek kritik gecikmelerin hesaplanması için önerilmiştir. Daha sonra Thowsen (1981) aynı tip denklemler için Dönüşüm (4.56) 'nın tam çemberi, yarım çembere dönüştürdüğü için bazı durumlarda hatalı sonuçlar verdiğini öne sürmüş ve

$$e^{-iwh} = \left(\frac{1 - iwT}{1 + iwT}\right)^2,$$

dönüşümünü kullanarak hatasız hesaplamalar yapmıştır. Fakat bunun ardından da Hertz ve diğ. (1984) de Rekasius dönüşümü (4.56) 'yla birlikte

(*i*) $T = \pm\infty$ iken $e^{-i\omega h} = -1$ olması ile

(*ii*) $T = 0$ iken $e^{-i\omega h} = 1$ olması

singüler durumlarını da ele alarak karakteristik denklem analizi ile hatasız sonuç elde edilmiştir

Önerme 4.4.7: $\lambda = i\omega$ 'nın Denklem (4.54) 'ün bir kökü olması için gerek ve yeter şart $h = \frac{2}{\omega}(\arctan(\omega T) + p\pi),\quad p \in Z$ iken $\lambda = i\omega$ 'nın

$$T\lambda^2 + (1 + K_0 T - K_1 T)\lambda + K_0 + K_1 = 0 \tag{4.57}$$

denkleminin bir kökü olmasıdır.

İspat. $\lambda = i\omega$ 'nın Denklem (4.54) 'ün bir kökü olsun. Denklem (4.54) 'te Dönüşüm (4.56) 'yı kullanarak

$$i\omega + K_0 + K_1 \frac{1 - i\omega T}{1 + i\omega T} = 0$$

elde edilir. Bu denklemi $1 + i\omega T$ ile çarpıp uygun şekilde düzenlersek

$$T(i\omega)^2 + (1 + K_0 T - K_1 T) i\omega + K_0 + K_1 = 0$$

elde ederiz. Bu eşitlikten, $h = \frac{2}{\omega}(\arctan(\omega T) + p\pi), \quad p \in Z$ iken $\lambda = i\omega$ 'nun Denklem (4.57) bir kökü olduğu görülür. Ayrıca, Dönüşüm (4.56) 'nın (*i*) ve (*ii*) singüler durumları, sırasıyla, $\lambda = K_1 - K_0$ ve $\lambda = -K_1 - K_0$ olacak şekilde Denklem (4.54) ve Denklem (4.57) için sağlanır.

Sonuç olarak, Denklem (4.57) çözülürse, $|K_0| < K_1$ olmak üzere $T = \frac{1}{K_1 - K_0}$, $\omega = \pm\sqrt{K_1^2 - K_0^2}$ ve kritik gecikmeler

$$h_p = \frac{2}{\sqrt{K_1^2 - K_0^2}}(\arctan(\frac{\sqrt{K_1^2 - K_0^2}}{K_1 - K_0} + p\pi)), \quad p \in Z \tag{4.58}$$

elde edilir. h_n, sıfırdan büyük en küçük kritik gecikme olsun. Bu durumda, $|K_0| < K_1$ iken $h \in (0, h_n)$ için Denklem (4.53) 'ün çözümü asimptotik kararlıdır. Böylece Denklem (4.45) 'in çözümünün kararlılığı ile ilgili aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Lemma 4.4.6: $h \in IR^+$ olmak üzere $K_0 = K_1$ doğrusu ile $C_0(h)$ eğrisi kesişmezler.

İspat. Tersine $K_0 = K_1$ doğrusu ile $C_0(h)$ eğrisi kesişsinler. Bu durumda, Eşitlik (4.49) ve (4.50) 'dan en az bir $\omega h \in (0, \pi)$ için

$$-\frac{\omega\cos(\omega h)}{\sin(\omega h)} = \frac{\omega}{\sin(\omega h)}$$

olmalıdır ve bu çelişkidir.

Teorem 4.4.9: Denklem (4.45) 'in gecikme terimi $\forall t \in IR^{+}$ için $0 < \tau(y(t)) < M_1$ olsun. Eğer $0 < K_0 + K_1$ ve $M_1 < h_n$ ise Denklem (4.45) 'in çözümü asimptotik kararlıdır.

İspat. Eğer $|K_0| < K_1$ ve $\tau(y(t)) = 0$ ise Denklem (4.45) 'in çözümü asimptotik kararlıdır. En küçük kritik gecikme değeri h_n 'nin tanımından $|K_0| < K_1$ iken $M_1 < h_n$ ise çözüm asimptotik kararlıdır.

Şimdi D-eğrilerinin yardımıyla $|K_1| < K_0$.için çözümün kararlı olduğunu gösterelim. Eşitlik (4.47) den her $\omega \in J_k$ için $|K_1(\omega)| \geq |K_0(\omega)|$ elde edilir. Bu durumda, D-eğrilerinin tamamı $|K_1(\omega)| \geq |K_0(\omega)|$ eşitsizliğini belirttiği bölgededir. Diğer bir deyişle, $|K_1(\omega)| < |K_0(\omega)|$ eşitsizliği ile belirtilen bölgede hiç bir D-eğrisi bulunmaz. Bu durumda, $K_0 > 0$ ve $K_1 = 0$ için çözüm asimptotik kararlı olduğundan dolayı $|K_1| < K_0$ iken çözüm asimptotik kararlıdır.

Lemma 4.4.6 ve Eşitlik (4.51) 'den çözüm $K_0 = K_1$ durumda asimptotik kararlıdır.

Sonuç olarak, eğer $0 < K_0 + K_1$ ve $M_1 < h_n$ ise çözüm asimptotik kararlıdır.

$\lambda = i\omega$ karakteristik denklemin kökü olmak üzere $K_0 = K_1$ durumunu Rekasius dönüşümü (4.56) ile ele alalım. $K_0 = K_1$ iken Eşitlik (4.58) 'in tanımsız olduğu açıktır. Rekasius dönüşümünün singüler durumlarından (*i*).'si için $\omega = 0$ ve kritik gecikme $h = \infty$ elde edilir. (*ii*). singüler durumdan ise her hangi bir $\omega \in IR$ ve $h \in IR$ bulunmaz. Bu durumda, $K_0 = K_1$ iken $h \in [0, \infty)$ aralığında kritik gecikme yoktur.

Teorem 4.4.9 ispatının ikinci kısmında gösterilen $|K_1| < K_0$ koşulu altında kararlılık durumu gecikmeden bağımsız kararlılık durumudur. Bu koşul altında gecikmeli diferansiyel denklemlerin kararlılığı, Lyapunov fonksiyoneli ile daha önceki bölümde de elde edilmişti. Bakınız Şekil 4.2.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Gerçek hayatta sistemlere baktığımızda, sistemin işleyişi içerisinde, olgunlaşma, etkiyi algılama ve tepkiyi verme gibi çeşitli bekleme süreleri doğal olarak bulunmaktadır. Bu bekleme süreleri kimi zaman sabit olsa da çoğunlukla zamana ve sistemin o an ki duruma göre değişiklik gösterebilir. Sistemlerin matematiksel modellemeleri yapılırken bu bekleme süreleri karşımıza gecikme terimi olarak çıkar. Çalışmalar göstermiştir ki sabit bir gecikme terimi bile sistemin karakterini değiştirebilmektedir.

Sistemdeki gecikmelerin içsel faktörlere göre değiştiği sistemler modellenirken, gecikme terimi, matematiksel modelin bağımlı değişkenin bir fonksiyonu olarak ifade edilir. Matematiksel modelde böyle bir terimin bulunması ise modelin yapısını karmaşıklaştırır ve bu modelin analitik çözümünün elde edilmesi her zaman mümkün değildir.

Bu durumda, durum değişkinine bağlı gecikme terimi içeren diferansiyel denklemlerin, yaklaşık çözümlerinin elde edilmesi, çözüm fonksiyonunun ve gecikme fonksiyonunun değer aralığının belirlenmesi ve kararlılığının incelenmesi oldukça önemlidir.

Bu çalışmada da durum gecikmeli diferansiyel denklemler bu doğrultuda ele alındı ve aşağıda sıralanan sonuçlar elde edildi.

1. Adımlar metodu ile Legendre polinomlarını kullanabilmek için ab-ötelenmiş Legendre polinomları tanımlandı. Adımlar metodunun her bir aralığına uygun şekilde ötelenmiş Legendre polinomlarını kullanarak durum gecikmeli diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri elde edildi.

2. Durum gecikmeli diferansiyel denklemlerde başlangıç koşuluna bağlı olarak denklemin yapısının bozulduğu iki özel durum açıklandı. Bunlar, gecikme teriminin negatif değer alması ve gecikme teriminin değer aralığının başlangıç fonksiyonunun

tanım aralığının alt aralığı olmamasıdır. Bu durumlara bağlı olarak gecikme teriminin pozitifliğini garantilemek için katsayılara bağlı koşullar elde edildi.

3. $\tau(y(t)) = \dfrac{a + by(t)}{c + dy(t)}$ şekilde gecikme terimi içeren diferansiyel denklemlerin çözüm fonksiyonun değer aralığı katsayılar cinsinde elde edildi, varlığı ve tekliği gösterildi. Durum değişkenine bağlı gecikme terimlerinde gecikme değeri, elde edilecek çözüm fonksiyonuna göre değişir. Bu durumda, çözüm fonksiyonun değer aralığının belirlenmesi, sistem analizi için oldukça önemlidir.

4. İki gecikme terimi içeren diferansiyel denklem sisteminin kararlılık analizi yapıldı. Bazı katsayı uzaylarında, özel parametre değerleri için asimptotik kararlılık bölgeleri gösterildi. Ayrıca, katsayılar ve gecikme değerlerine bağlı asimptotik kararlılık ve kararsızlık kriterleri elde edildi.

5. Denge noktasında, gecikme terimini sabitleyerek lineerleştirme yapılmadan, gecikme fonksiyonun değer aralığına bağlı kararlılık analizi yapıldı. Bu kararlılık analiziyle, gecikme fonksiyonun üst sınırının, sistemin asimptotik kararlılığında önemli bir rol oynadığı gösterildi.

KAYNAKLAR

Aiello W. G., Freedman H. I., Wu J., Analysis of a Model Representing Stage-Structured Population Growth with State Dependent Time Delay, *SIAM J. Appl. Math.*, 1992, **52**, 855-869.

Alt W., Some Periodicity Criteria for Functional Differential Equations, *Manuscripta Math*, 1978, **23**, 295-318.

Arino O., Sanchez E., A Saddle Point Theorem for Functional State-Dependent Delay Differential Equations, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2005, **12**, 687–722.

Arino O., Hadeler K. P., Hbid M. L., Existence of Periodic Solutions for Delay Differential Equations with State-Dependent Delay, *J. Differ. Equ.*,1998, **144**, 263–301.

Bell W. W., *Special Functions for Scientists and Engineers*, Dover Publications, New York, 2013.

Bellen A., Zennaro M., *Numerical Methods for Delay Differential Equations, Numerical Mathematics and Scientific Computation Series*, Oxford Science Publication, New York, 2003.

Bellman R., Cooke K., *Differential-Difference Equations*, Academic Press, New York, 1963.

Burton T. A., *Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations*, Academic Press, New York, 1985.

Campbell S. A., *Introduction to Delay Differential Equations*, University of Waterloo, Waterloo, 2007.

Cooke K. L., Asymptotic Theory for the Delay-Differential Equation u_(t)=-au(t - r(u(t))), *J. Math. Anal. Appl.*, 1967, **19**, 160-173.

Demir A., Lyapunov-Schmidt İndirgeme Metodu ile Elde Edilen İndirgenmiş Bifurkasyon Denklemi ve Analizi, Doktora Tezi, Kocaeli Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kocaeli, 2007, 197938.

Diekmann O., Gils S. A., van Lunel S. M. V., Walther H. *O., Delay Equations, Functional, Complex and Nonlinear Analysis*, Springer, New York, 1995.

Driver R. D., Existence Theory for a Delay-Differential System, *Contrib Differential Equations*, 1963a, **1**, 317-336.

Driver R. D., A Two-Body Problem of Classical Electrodynamics: The One-Dimensional Case, *Ann Physics*, 1963b, **21**, 122-142.

Driver R. D., Norris M. J., Note on Uniqueness for a One-Dimensional Two-Body Problem of Classical Electrodynamics, *Ann Physics*, 1967, **42**, 347-351.

Driver R. D., *Ordinary and Delay Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1977.

Elbarbary E. M. E., Legendre Expansion Method for the Solution of The Second-and Fourth-Order Elliptic Equations, *Mathematics and Computers in Simulation*, 2002, **59**, 389–399.

El-Mikkawy M. E. A., Cheon G. S., Combinatorial and Hypergeometric İdentities via The Legendre Polynomials - a Computational Approach, *Applied Mathematics and Computation*, 2005, **166**, 181–195.

El'sgol'ts L. E., Norkin S. B., *Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments*, Academic Pres, New York, London, 1973.

Gambell R., Bonner W. N., Walton D. W. H., *Birds and Mammals-Antarctic Whales in Antarctica*, Pergamon Press, New York, 1985

Hale J. K., *Theory* of *Functional Differential Equations***,** Springer-Verlag, New York, 1977.

Hartung F., Krisztin T., Wu J., Walther H. O., Functional Differential Equations with State-Dependent Delays: Theory and Applications , Editors: Canada, A., Drabek, P., Fonda, A., *Ordinary Differential Equations. Handbook of Differential Equations Volume 3*, Elsevier Science B. V., North-Holland, Amsterdam, 435-547, 2006.

Hertz J. D., Jury E., Zeheb E., Simplified Analytic Stability Test for Systems with Commensurate Time Delays, *IEE Proc., Part D*, 1984, **131**, 52–56.

Humphries A. R., Demasi O., Magpantay F. M. G., Upham F., Dynamics of a Delay Differential Equation with Multiple State-Dependent Delay, *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A*, 2012, **32(**8), 2701 – 2727.

Insperger T., Stépán G., Hartung F., Turi J., State Dependent Regenerative Delay in Milling Processes, *Proceedings of the ASME International Design Engineering Technical Conferences*, Long Beach, 24-28 September 2005.

Insperger T., Stépán G., Turi J., State-Dependent Delay in Regenarative Turning Processes, *Nonlinear Dyn.*, 2007, **47**, 275-283.

Johnson R. A., Functional Equations, Approximations, and Dynamic Response of Systems with Variable Timedelay, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1972, **17**, 398–401.

Kirk J., Orr J. S., Forrest J., The Role Of Chalone in the Control of the Bone Marrow Stem Cell Population, *Math. Biosci*., 1970, **6**, 129-143.

Krisztin T., C1-smoothness of center manifolds for differential equations with state-dependent delays. *Nonlinear Dynamics and Evolution Equations, Fields Inst. Commun.*, 2006, **48**, 213–226 ()

Krisztin T., Arino O., The 2-Dimensional Attractor of a Differential Equation with State-Dependent Delay, *J. Dyn. Differ. Equ.*, 2001, **13**, 453–522.

Kuang Y., *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*, Academic Press, London, 1993.

Mackey M. C., Commodity Price Fluctuations: Price Dependent Delays and Nonlinearities as Explanatory Factors, *J. Econ. Theory*,1989, **48**, 497-509.

Mackey M. C., Milton J. G., Feedback Delays and the Origins of Blood Cell Dynamics, *Comm. Theor. Biol.*,1990, **1**, 299-327.

Mahaffy J., Bélair J., Mackey M., Hematopoietic Model with Moving Boundary Condition and State Dependent Delay: Applications in Erythropoiesis, *J. Theoret. Biol.*, 1998, **190**, 135–146.

Magal P., Arino O., Existence of Periodic Solutions for a State-Dependent Delay Differential Equation, *J. Differ. Equ.*, 2000, **165**, 61–95.

Mallet-Paret J., Nussbaum R. D., Paraskevopoulos P., Periodic Solutions for Functional Differentialequations with Multiple State-Dependent Time Lags, *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 1994, **3**, 101–162.

Mallet-Paret J., Nussbaum R. D., Boundary Layer Phenomena for Differential-Delay Equations with State-Dependent Time-Lags: I., *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1992, **120**, 99–146.

Mallet-Paret J., Nussbaum R. D., Boundary Layer Phenomena for Differential-Delay Equations with State-Dependent Time-Lags: II., *J. Reine Angew. Math.*, 1996, **477**, 129–197.

Mallet-Paret J., Nussbaum R. D., Boundary Layer Phenomena for Differential-Delay Equations with State-Dependent Time-Lags: III., *J. Differ. Equ.*, 2003, **189**, 640–692.

Mallet-Paret J., Nussbaum R. D., Superstability and Rigorous Asymptotics in Singularly Perturbed State-Dependent Delay-Differential Equations, *J. Differ. Equ.*, 2011, **250**, 4037-4084.

Murray J. D., *Mathematical Biology I. An introduction*, 3rd ed., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2002.

Neimark J. I., D-Subdivision and Spaces of Quasi-Polynomials, *Prikl. Mat. Mekh.*, 1949, **13**, 349-380.

Nussbaum R. D., Periodic Solutions of Some Nonlinear Autonomous Functional Differential Equations, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 1974, **101,** 263-306.

Phillips G. M., *Interpolation and Approximation by Polynomials*, Springer-Verlag, New York, 2003.

Price T. H., Chatta G. S., Dale D. C., Effect of Recombinant Granulocyte Colony Stimulating Factor on Neutrophil Kinetics in Normal Young and Elderly Humans, *Blood*, 1996, **88**, 335-340.

Qesmi R., Walther H. O., Center-Stable Manifolds for Differential Equations with State-Dependent Delay, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2009, **23**, 1009-1033.

Rekasius Z., A Stability Test for Systems with Delays, *Proc. of Joint Autom. Contr. Conf.*, TP9–A, San Francisco, 1980.

Schürer F., Zur Theorie des Balancierens, *Mathematische Nachrichten*, 1948, **1**, 295-331.

Stepan G., *Retarded Dynamical Systems*, Longman, Harlow, 1989.

Stumpf E., Local Stability Analysis of Differential Equations with State-Dependent Delay, *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A*, 2015, **36**(6), 3445-3461.

Stumpf E., On A Differential Equation with State-Dependent Delay: A Global Center-Unstable Manifoldconnecting An Equilibrium and A Periodic Orbit, *J. Dyn. Differ. Equ.*, 2012, **24**, 197-248.

Stumpf E., The Existence and $C1$-Smoothness of Local Center-Unstable Manifolds for Differential Equations with State-Dependent Delay, *Rostock. Math. Kolloqu.*, 2011, **66**, 3-44.

Thowsen A., An Analytic Stability Test for Class of Time-Delay System, *IEEE Trans. Autom. Control*, 1981, **26** (3), 735-736.

Walter H. O., On a Model for Soft Landing with State Dependent Delay, *J. Dyn. Diff. Eqns.*, 2003, **19**, 593-622.

Winston E., Uniqueness of the Zero Solution for Differential Equations With State-Dependence, *J. Differential Equations*, 1970, **7**, 395–405.

Winston E., Uniqueness of Solutions of State Dependent Delay Differential Equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 1974, **47**, 620-625.

KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER

Demir A., **Erman S.**, Özgür B., Korkmaz E., Analysis of the new homotopy perturbation method for linear and nonlinear problems, *International Congress in Honour of Professor H. M. Srivastava*, Bursa, 23-26 August 2012.

Demir A., **Erman S.**, Özgür B., Korkmaz E., Analysis of fractional partial differential equations by Taylor series expansion, *International Congress in Honour of Professor H. M. Srivastava*, Bursa, 23-26 August 2012.

Demir A., Özkum G., **Erman S.**, Korkmaz E., Özgür B., On the Inverse Problem of the Fractional Heat-Like Partial Differential Equations: Determination of the Source Function, , *International Congress in Honour of Professor H. M. Srivastava*, Bursa, 23-26 August 2012.

Demir A., Korkmaz E., **Erman S.**, Özgür B., Inverse Problem of Determining Source Function in Linear Parabolic Equation by Adomian Decomposition Method, *International Congress in Honour of Professor H. M. Srivastava*, Bursa, 23-26 August 2012.

Demir A., **Erman S.**, Özgür B., Korkmaz E., Analysis of the new homotopy perturbation method for linear and nonlinear problems, *Boundary Value Problems*, 2013, **61**, 1-11.

Demir A., **Erman S.**, Özgür B., Korkmaz E., Analysis of fractional partial differential equations by Taylor series expansion, *Boundary Value Problems*, 2013, **68**, 1-12.

Özkum G., Demir A., **Erman S.**, Korkmaz E., Özgür B., On the Inverse Problem of the Fractional Heat-Like Partial Differential Equations: Determination of the Source Function, *Advances in Mathematical Physics*, 2013, **2013**, 1-8.

Erman S., Demir A., Local Stability Analysis of Strogatz Model with Two Delays, *International Congress in Honour of Professor Ravi P. Agarwal*, Bursa, 23-26 June 2014.

Erman S., Demir A., The stability Analysis of Delay Differential Equation with State Dependent Delay, *International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics*, Bodrum, 19-23 May 2016.

Erman S., Demir A., An analysis on the stability of a statedependent delay differential equation, *Open Mathematics*, 2016, **14**(1), 425-435.

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında İzmit 'te doğdu. İlk ve ortaokulu Turgut Reis İ.Ö. okulunda liseyi ise İzmit Lisesinde tamamladı. 2002 yılında Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde öğrenimine başladı. 2005-2006 bahar yarı yılında Belçika'da Ghent Universitesi'nde erasmus öğrencisi olarak öğrenim gördü. 2006 yılında lisans eğitimini dereceyle bitirdi. 2007 yılı Ocak ayında Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında başladığı Yüksek Lisans öğrenimini. 2009 yılında tamamladı. 2010 yılında Kocaeli Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Doktora öğrenimine başladı