İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONSUZ ORTAMDA SİLİNDİRİK BİR DELİKTE ANİ PATLAMA

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Ahmet TEMUGAN
501031102

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 08.05.2006
Tezin Savunulduğu Tarih : 15.06.2006

Tez Danışmanı : Doç.Dr. Necla KADIOĞLU
Diğer Jüri Üyeleri: Prof.Dr. Faruk YÜKSELER (Y.T.Ü)
Yrd.Doç.Dr. Şenol ATAOĞLU (İ.T.Ü)

HAZİRAN 2006

ÖNSÖZ

Bu çalışmam esnasında değerli bilgi ve tecrübe birikimini özveri ile bana aktarmaya çalışan ve çalışmanın her safhasında yapıcı, yol gösterici teşvik ve tavsiyeleri ile bana destek olan sayın hocam Doç. Dr. Necla KADIOĞLU'na teşekkür etmeyi bir borç sayarım.

Her konuda göstermiş oldukları samimi ilgi ve yardımlarından dolayı anabilim dalımız öğretim görevlilerine teşekkür ederim.

Mayıs 2006 Ahmet TEMUGAN

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ **iv**
SEMBOL LİSTESİ **v**
ÖZET **vi**
SUMMARY **vii**

1.FORMÜLASYON **1**
1.1.Birinci Elastodinamik Halin Teşkili 1
1.2.İkinci Elastodinamik Halin Teşkili 18

2.ÖRNEK PROBLEMLER **39**
2.1.Örnek Problem 1: Delik Yüzeyine Etkiyen Sabit İç Basıncın Olması Hali 39
2.2.Örnek Problem 2: Delik Yüzeyine Etkiyen İç Basıncın Zamanla Değişken Olması Hali 55

SONUÇLAR **64**

KAYNAKLAR **65**

ÖZGEÇMİŞ **66**

ŞEKİL LİSTESİ

. **Sayfa No**

Şekil 1.1 : y_1, y_2 yükleme noktalarının gösterimi.....15
Şekil 2.1 : Sabit basınç altında sınırdaki u_R^* boyutsuz yerdeğiştirmesinin boyutsuz zamanla değişimi.....54
Şekil 2.2 : Sabit basınç altında sınırdaki $\frac{\tau_{\theta\theta}^*}{p_0}$ boyutsuz gerilmesinin boyutsuz zamanla değişimi.....55
Şekil 2.3 : Gerçek değişken basıncın zamanla değişimi.....56
Şekil 2.4 : Boyutsuz basıncın boyutsuz zamanla değişimi.....57
Şekil 2.5 : Değişken basınç altında sınırdaki u_R^* boyutsuz yerdeğiştirmesinin boyutsuz zamanla değişimi.....59
Şekil 2.6 : Değişken basınç altında sınırdaki $\frac{\tau_{\theta\theta}^*}{p_0}$ boyutsuz gerilmesinin boyutsuz zamanla değişimi.....60
Şekil 2.7 : $\frac{R_1}{a} = 2$ için $u_{R_1}^*$ boyutsuz yerdeğiştirmesinin boyutsuz zamanla değişimi.....61
Şekil 2.8 : $\frac{R_1}{a} = 3$ için $u_{R_1}^*$ boyutsuz yerdeğiştirmesinin boyutsuz zamanla değişimi.....62
Şekil 2.9 : $\frac{R_1}{a} = 4$ için $u_{R_1}^*$ boyutsuz yerdeğiştirmesinin boyutsuz zamanla değişimi.....62
Şekil 2.10 : $\frac{R_1}{a} = 5$ için $u_{R_1}^*$ boyutsuz yerdeğiştirmesinin boyutsuz zamanla değişimi.....63

SEMBOL LİSTESİ

$\boldsymbol{u}$	:	Yer değiştirme vektörü
$\boldsymbol{f}$	:	Kütle kuvveti
ρ	:	Ortamın yoğunluğu
λ, μ	:	Lamé sabitleri
ν	:	Poisson oranı
R, θ, z	:	Silindirik kordinatlar
$\boldsymbol{T}$	:	Yüzey gerilme vektörü
u^*	:	Boyutsuz radyal yerdeğiştirme bileşeni
$E(\alpha), F(\alpha), \pi(\alpha)$	:	Tam Eliptik fonksiyonlar
t	:	Boyutlu zaman
t^*	:	Boyutsuz zaman
$\boldsymbol{e}_R, \boldsymbol{e}_\theta$	:	Silindirik kordinatlarda baz vektörleri
$\epsilon_{RR}, \epsilon_{\theta\theta}$	:	Şekil değiştirme tansörü bileşenleri
p	:	Basınç
p_0	:	$t = 0$ daki basınç
a	:	Silindirik oyuğun yarıçapı
$\delta(x)$	:	Dirac Deltası
$H(x)$	:	Heaviside birim adım fonksiyonu
$\boldsymbol{\nabla}$	:	Gradyan oparatörü

SONSUZ ORTAMDA SİLİNDİRİK BİR DELİKTE ANİ PATLAMA

ÖZET

Bu çalışmada amaç sonsuz ortamda gömülü sonsuz bir silindirik boruda meydana gelen ani bir patlama sonucu ortamda meydana gelen yer değiştirme ve gerilme alanlarının elde edilmesidir. Bu problemin çözümü için Dinamik Karşıtlık Teoremi kullanılmıştır. Dinamik Karşıtlık Teoremi iki elastodinamik hal arasında yazılır. Belli bir bölgede hareket denklemini ve bünye denklemlerini sağlayan gerilme ve yerdeğiştirme alanları aynı bölgenin içinde tanımlanan kütle kuvveti ile birlikte bir elastodinamik hal oluşturur. Elastodinamik hal tanımı Wheeler ve Sternberg tarafından verilmiştir. Burada ilk aranan silindirik borunun sınırında ani patlama sonucu etkiyen iç basınca bağlı olarak yine sınırda meydana gelen yer değiştirme alanının bulunmasıdır. Bunun için karşıtlık teoreminde birinci elastodinamik hal olarak problemin kendisi seçilir, ikinci elastodinamik hal olarak ise daha önce Kadıoğlu ve Ataoğlu tarafından verilen dönel simetrik düzlem problemler için inşaa edilmiş elastodinamik hal kullanılmıştır. Bu elastodinamik hal veya temel çozümün nasıl teşkil edildiği metin içinde detaylı olarak açıklanmıştır. Sınırdaki yer değiştirme alanı bulunduktan sonra ikinci yapılacak işlem bölge içinde herhangi bir noktadaki etkileri hesaplamaktır. Bunun içinse yine dönel simetrik problemler için geçerli olan yeni bir elastodinamik hale ihtiyaç vardır. Bu elastodinamik hal de inşaa edilmiştir. Literatürde bu tip problemler için benzer çözümler Bessel fonksiyonları ile ifade edilirken ikinci elastodinamik hal Eliptik fonksiyonların bir kompozisyonu olarak ortaya çıkmıştır. Sonuçları kontrol amacıyla önce sabit iç basınç etkisi altında boru problemi birinci örnek problem olarak tekrar çözülmüştür. İkinci örnek problem ise ani patlamayı temsil eden değişken basınç problemidir. Her iki problemde de sınırdaki yerdeğiştirme bileşeni için bir integral denklem bulunmakta ve bu integral denklem çözülerek sınır değerler elde edilmektedir. Bundan sonra bölge içindeki herhangi bir noktadaki yer değiştirme değeri ikinci elastodinamik hal ve probleme ait elastodinamik hal arasında yazılarak elde edilmiştir.

A SUDDEN EXPLOSION OF A CYLINDRICAL CAVITY IN AN INFINITE MEDIUM

SUMMARY

The aim of this work is to obtain displacement and stress fields which was produced by an explosion in a cylindrical cavity in an infinite plane region. In order to solve this problem, Dynamic Reciprocal Identity is used. The theorem is written between two elastodynamic states. In a certain region, diplacement and stress fields, which satisfy the equations of motion and the constituve equations, form an elastodynamic state with a body force field given in the same region. The definition of the elastodynamic state is given by Wheeler and Sternberg. At first the diplacement field on the boundary must be determined. This field comes out as a result of a sudden explosion in the cavity. In the reciprocity theorem first elastodynamic state is selected as the problem to be solved. While second one is fundamental solution constructed by Kadioglu and Ataoglu for the solutions of axially symetric plane problems. This state is explained in the text in details. After the displacement field is found, the second problem is to calculate the effects at an arbitrary point. To calculate this; a new elastodynamic state is necessary which is also valid for axial symetric problems. This state is also constructed. In literature; the solutions corresponding to this are defined in terms of Bessel functions. But here second elastodynamic state arise as a composition of Elliptic functions. In order to check the results the cavity problem under constant pressure is solved as the first sample problem. The second sample problem is a variable pressure problem representing a sudden explosion. In both problems formulation yields to an integral equation of which dependent variable is the radial displacement component on the boundary. Solving this integral equation, boundary values are obtained. After this the radial displacement component on an arbitrary point of the region is found writing dynamic reciprocal identity between second state and the state representing the problem.

1. FORMÜLASYON

1.1 Birinci Elastodinamik Halin Teşkili

Lineer elastodinamikte hareket denklemi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\mu \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{u} + (\lambda + 2\mu)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} + \rho \boldsymbol{f} = \rho \boldsymbol{u}^{\cdot\cdot} \tag{1.1}$$

burada $\boldsymbol{u}$ yerdeğiştirme vektörünü, $\boldsymbol{f}$ kütle kuvvetini, ρ ortamın yoğunluğunu, $\boldsymbol{u}^{\cdot\cdot}$ ise yerdeğiştirme vektörünün zamana göre ikinci türevini göstermektedir. λ ve μ ortamı Lame sabitlerini gösterirler. Şimdi sonsuz ortamda

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) = \delta(t)\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\boldsymbol{e}_k \tag{1.2}$$

şeklinde bir kütle kuvveti tanımlayalım. Burada $\boldsymbol{x}$ ve $\boldsymbol{y}$ sırası ile ortamdaki herhangi bir noktanın ve sabit bir noktanın konum vektörleridirler. $\delta(\boldsymbol{x})$ Dirac delta fonksiyonudur ve aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$\int_V \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{x}) dV_x = f(\boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{y} \in V$$

$$= 0, \qquad \boldsymbol{y} \notin V \tag{1.3}$$

Üç boyutlu ortamda $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$ vektör fonksiyonuna bağlı bir $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, t)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\boldsymbol{e}_k \delta(t)\delta(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{y})}{\mid \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi} \mid} dV_\xi = -\frac{1}{4\pi} \boldsymbol{e}_k \frac{\delta(t)}{r} \tag{1.4}$$

$$r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} \tag{1.5}$$

Bu fonksiyon V hacmi içerisinde

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{W} = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{W} - \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{W} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{1.6}$$

denklemini sağlar. Şimdi:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\nabla}\varphi + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\psi} \tag{1.7}$$

şeklinde skaler bir φ fonksiyonu ile vektörel $\boldsymbol{\psi}$ vektör fonksiyonu tanımlansın. Bunu (1.1) denklemine yerleştirirsek:

$$\mu\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla}\varphi + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\psi}) - \mu\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla}\varphi + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\psi})$$

$$+(\lambda + \mu)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla}\varphi + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\psi}) + \rho(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{W} - \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{W})$$

$$= \rho(\boldsymbol{\nabla}\varphi^{\cdot\cdot} + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\psi}^{\cdot\cdot})$$

Sıfır olan terimler atılırsa:

$$(\lambda + 2\mu)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla}\varphi) - \mu\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\psi} + \rho\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{W} - \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{W}$$

$$= \rho(\boldsymbol{\nabla}\varphi^{\cdot\cdot} + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\psi}^{\cdot\cdot})$$

Gradyan ve rotasyonel alanlar ayrılırsa:

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla}\varphi) - \varphi^{\cdot\cdot} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{W} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot (-\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{e}_k \frac{\delta(t)}{r}) \tag{1.8}$$

$$\frac{-\mu}{\rho}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\psi}^{\cdot\cdot}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{W}=\boldsymbol{\nabla}\times(-\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{e}_k\frac{\delta(t)}{r}) \tag{1.9}$$

denklemleri elde edilir. Şimdi

$$\varphi=\boldsymbol{\nabla}\cdot F\boldsymbol{e}_k=\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F}^k \tag{1.10}$$

$$\boldsymbol{\psi}=-\boldsymbol{\nabla}\times G\boldsymbol{e}_k=-\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{G}^k \tag{1.11}$$

dönüşümü ve

$$\frac{\lambda+2\mu}{\rho}={c_1}^2, \qquad\qquad \frac{\lambda}{\rho}={c_2}^2 \tag{1.12}$$

kısaltmaları yapılırsa (1.8) ve (1.9) denklemleri

$$c_1^2\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot F\boldsymbol{e}_k)-\boldsymbol{\nabla}\cdot(F^{\cdot\cdot}\boldsymbol{e}_k)=\frac{1}{4\pi}\delta(t)\boldsymbol{\nabla}\cdot(\frac{\boldsymbol{e}_k}{r}) \tag{1.13}$$

$$-c_2^2\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times(-G\boldsymbol{e}_k)+\boldsymbol{\nabla}\times(G^{\cdot\cdot}\boldsymbol{e}_k)=-\frac{1}{4\pi}\delta(t)\boldsymbol{\nabla}\times(\frac{\boldsymbol{e}_k}{r}) \tag{1.14}$$

şeklini alır. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot F\boldsymbol{e}_k=\frac{\partial F}{\partial x_k}$$

$$(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot F\boldsymbol{e_k})_i=\frac{\partial^2 F}{\partial x_k\partial x_i}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot F\boldsymbol{e}_k)=\frac{\partial^3 F}{\partial x_k\partial x_j\partial x_j}$$

$$c_1^2\frac{\partial^3 F}{\partial x_k\partial x_j\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial x_k}(F^{\cdot\cdot})=\frac{1}{4\pi}\delta(t)\boldsymbol{\nabla}\frac{\partial}{\partial x_k}(\frac{1}{r})$$

(1.8) denklemi aşağıdaki forma indirgenir.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{1}{c_1^2} F^{\cdot\cdot} = \frac{1}{4\pi c_1^2} \delta(t)(\frac{1}{r}) \tag{1.15}$$

Ayrıca

$$(\boldsymbol{\nabla} \times G\boldsymbol{e}_k)_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial G}{\partial x_j}$$

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times G\boldsymbol{e}_k)_i = \varepsilon_{ilm} \frac{\partial}{\partial x_l} (\varepsilon_{mjk} \frac{\partial G}{\partial x_j}) = \varepsilon_{ilm}\varepsilon_{mjk} \frac{\partial^2 G}{\partial x_l \partial x_j}$$

$$= \varepsilon_{mil}\varepsilon_{mjk} \frac{\partial^2 G}{\partial x_l \partial x_j} = (\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ik}\delta_{lj}) \frac{\partial^2 G}{\partial x_l \partial x_j}$$

$$= \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_k} - \delta_{ik} \frac{\partial^2 G}{\partial x_l \partial x_l}$$

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times (G\boldsymbol{e}_k))_i = \varepsilon_{int} \frac{\partial}{\partial x_n} (\frac{\partial^2 G}{\partial x_t \partial x_k} - \delta_{tk} \frac{\partial^2 G}{\partial x_l \partial x_l})$$

$$= \varepsilon_{int} \frac{\partial^3 G}{\partial x_n \partial x_t \partial x_k} - \varepsilon_{ink} \frac{\partial^3 G}{\partial x_n \partial x_l \partial x_l} = -\varepsilon_{ink} \frac{\partial^3 G}{\partial x_n \partial x_l \partial x_l}$$

$$(\boldsymbol{\nabla} \times (G^{\cdot\cdot}\boldsymbol{e}_k))_i = \varepsilon_{ink} \frac{\partial}{\partial x_n} (G^{\cdot\cdot})$$

$$\{-\boldsymbol{\nabla} \times (\frac{1}{4\pi}\delta(t)(\frac{\boldsymbol{e}_k}{r}))\}_i = -\varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} (\frac{1}{4\pi} \frac{\delta(t)}{r})$$

olarak hesaplanırsa (1.14) denklemi de aşağıdaki formu alır.

$$-{c_2}^2 \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} (\frac{\partial^2 G}{\partial x_l \partial x_l}) + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} (G^{\cdot\cdot}) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} (-\frac{1}{4\pi r}\delta(t))$$

Sonuçta

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x_l \partial x_l} - \frac{1}{{c_2}^2}(G^{\cdot\cdot}) = \frac{1}{4\pi r}\delta(t)\frac{1}{{c_2}^2} \tag{1.16}$$

Bu durumda (1.15) ve (1.16) denklemleri çözüldükten sonra:

$$\varphi = \boldsymbol{\nabla} \cdot (F\boldsymbol{e}_k) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F}^k, \qquad \boldsymbol{\psi} = -\boldsymbol{\nabla} \times G\boldsymbol{e}_k = -\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{G}^k$$

potansiyelleri bulunup

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\nabla}\varphi + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\psi} = (\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot (F\boldsymbol{e}_k)) - \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times (G\boldsymbol{e}_k) \tag{1.17}$$

şeklinde yerdeğiştirmeler bulunacaktır. F'in sadece r ve t'nin fonksiyonu olduğu düşünülürse (1.15) denklemi

$$\frac{\partial F}{\partial x_l} = \frac{\partial F}{\partial r}\frac{x_l}{r}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_l \partial x_k} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\frac{x_l}{r}\frac{x_k}{r} + \frac{\partial F}{\partial r}(\frac{\delta_{kl}}{r} - \frac{x_l x_k}{r^3})$$

$k = l$ için

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_l \partial x_l} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\frac{x_l x_l}{r^2} + \frac{\partial F}{\partial r}(\frac{3}{r} - \frac{x_l x_l}{r^3}) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial F}{\partial r}$$

yazılmalı.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{c^2}F^{\cdot\cdot} = \frac{1}{4\pi r}\frac{1}{c^2}\delta(t) \tag{1.18}$$

formunu alır.

$$F = \frac{\chi(r,t)}{r} \tag{1.19}$$

denirse

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial \chi}{\partial r}\frac{1}{r} - \frac{\chi}{r^2} \tag{1.20}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{2\chi}{r^3} \tag{1.21}$$

(1.20) ve (1.21) denklemleri (1.18) denklemine yerleştirildiğinde sonuç denklem:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\chi^{\cdot\cdot}\frac{1}{{c_1}^2} = \frac{1}{4\pi r}\frac{1}{{c_1}^2}\delta(t) \tag{1.22}$$

formunu alır. (1.22) denkleminin zaman üzerinde Laplace transformu alınacaktır. Bir fonksiyonun Laplace transformu

$$\bar{\chi}(s) = \int_0^\infty \boldsymbol{e}^{-st}\chi(t,r)dt$$

olarak tanımlanmaktadır.

$$\bar{g}(s) = \int_0^\infty \boldsymbol{e}^{-st}\delta(t)dt, \qquad \bar{\chi}^{\cdot\cdot}(s) = s^2\bar{\chi}(s)$$

yazılırsa

$$\frac{\partial^2 \bar{\chi}}{\partial r^2} - \frac{s^2}{{c_1}^2}\bar{\chi} = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{{c_1}^2}\bar{g}(s)$$

bulunur.

$$\bar{\chi_p} = A$$

$$-\frac{s^2}{{c_1}^2}A = \frac{1}{4\pi r}\frac{1}{{c_1}^2}\bar{g}(s)$$

$$\bar{\chi}_p = -\frac{\bar{g}(s)}{s^2 4\pi}$$

olarak bulunur. Homojen denklemin çözümü ise

$$\frac{\partial^2\bar{\chi}}{\partial r^2} - \frac{s^2}{{c_1}^2}\bar{\chi} = 0$$

$$\bar{\chi} = \boldsymbol{e}^{\alpha r}$$

dönüşümü ile

$$\alpha^2 - \frac{s^2}{{c_1}^2} = 0$$

$$\alpha_1 = -\frac{s}{c_1} \qquad\qquad \alpha_2 = +\frac{s}{c_1}$$

$$\bar{\chi}_h = C_1\boldsymbol{e}^{-\frac{s}{c_1}r} + C_2\boldsymbol{e}^{+\frac{s}{c_1}r}$$

olarak bulunur. Burada C_1 ve C_2 integral sabitleridir. $r \Rightarrow \infty$ da $\bar{\chi}(r,t)$ nin sonlu olmasından dolayı C_2 düşer ve $\bar{\chi}(s,r)$ fonksiyonu

$$\bar{\chi}(s,r) = C_1\boldsymbol{e}^{-\frac{s}{c_1}r} - \frac{\bar{g}(s)}{s^2 4\pi} \tag{1.23}$$

olur. C_1 ise $r = 0$ da $\bar{\chi}(s,0) = 0$ koşulu yazılarak

$$C_1 = -\frac{\bar{g}(s)}{s^2 4\pi} \tag{1.24}$$

bulunur. Sonuçta $\bar{\chi}(s,r)$ fonksiyonu

$$\bar{\chi}(s,r) = \frac{\bar{g}(s)}{s^2 4\pi}(\boldsymbol{e}^{-\frac{s}{c_1}r} - 1) \tag{1.25}$$

şeklini alır. Laplace transformunda

$L^{-1}(\bar{g}(s)) = g(t)$ ise $L^{-1}(\frac{1}{s^2}\bar{g}(s)) = \int_0^t \boldsymbol{\tau} g(t-\boldsymbol{\tau})d\boldsymbol{\tau}$

$L(f(t)) = \bar{f}\,(s) = \int_0^\infty \boldsymbol{e}^{-st} f(t)dt$ ise $L(f(t-a)) = \boldsymbol{e}^{-as} f(\bar{s})$

olur. Yukarıdaki formüller kullanılarak (1.25) deki $\bar{\chi}(s,r)$ nin invers transformu

$$\chi(t,r) = \frac{1}{4\pi}\left(\int_0^{t-\frac{r}{c_1}} \boldsymbol{\tau}\delta(t-\frac{r}{c_1}-\boldsymbol{\tau})d\tau - \int_0^t \boldsymbol{\tau}\delta(t-\boldsymbol{\tau})d\boldsymbol{\tau}\right) \tag{1.26}$$

şeklini alır. Şimdi (1.26) denklemindeki integraller hesaplanacaktır.

$$I = \int_0^t \tau\delta(t-\tau)d\tau$$

$\tau = t - u$ denirse sınırlar

$$u_1 = t \qquad u_2 = 0$$

olacaktır.

$$d\tau = -du$$

$$I = \int_0^t (t-u)\delta(u)du$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} (H(t-u) - H(-u))(t-u)\delta(u)du = H(t)t$$

olur ve (1.26) denklemi

$$\chi(r,t) = \frac{1}{4\pi}\{H(t-\frac{r}{c_1})(t-\frac{r}{c_1}) - H(t)t\} \tag{1.27}$$

şeklini alır. Bu durumda (1.19) da

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi r}\{H(t-\frac{r}{c_1})(t-\frac{r}{c_1}) - H(t)t\}\boldsymbol{e}^k \tag{1.28}$$

ve benzer şekilde

$$\boldsymbol{G} = \frac{1}{4\pi r}\{H(t-\frac{r}{c_2})(t-\frac{r}{c_2}) - H(t)t\}\boldsymbol{e}^k \tag{1.29}$$

olacaktır. Yerdeğiştirme vektörü ise;

$$\boldsymbol{u}^k = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{F}\boldsymbol{e}_k)) - \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{G}\boldsymbol{e}_k) \tag{1.30}$$

şeklinde hesaplanır. Şimdi (1.28) ve (1.29) dan düzlem haldeki sonuçları bulmaya çalışalım. Düzlem halde

$$\boldsymbol{f} = \delta(x_1 - y_1)\boldsymbol{e}_k \qquad\qquad k = 1, 2$$

olacaktır. $\boldsymbol{F}$ den hareket edilirse düzlem hal için $\boldsymbol{F}^k$

$$\boldsymbol{F}^k = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi r}\{H(t-\frac{r}{c_1})(t-\frac{r}{c_1}) - H(t)t\}\boldsymbol{e}^k dy_3 \tag{1.31}$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

şeklinde hesaplanır. (1.31) integralindeki sınırlar tam anlamı ile doğru değildir. Bir x_1, x_2 noktasına belli bir t anında en fazla

$$y_3 = x_3 + \sqrt{c_1^2 t^2 - \rho^2} \qquad\qquad y_3 = x_3 - \sqrt{c_1^2 t^2 - \rho^2}$$

aralığından sinyal ulaşabilir. İntegral sınırları buna göre düzenlenirse

$$\boldsymbol{F}^k = \int_{x_3-\sqrt{c_1^2t^2-\rho^2}}^{x_3+\sqrt{c_1^2t^2-\rho^2}} \frac{1}{4\pi}\{H(t-\frac{r}{c_1})(\frac{t}{r}-\frac{1}{c_1}) - H(t)\frac{t}{r}\}\boldsymbol{e}^k dy_3 \qquad (1.32)$$

elde edilir. Önce $u = x_3 - y_3$ dönüşümünü yapılırsa:

$$r = \sqrt{\rho^2 + (x_3 - y_3)^2} = \sqrt{\rho^2 + u^2} \qquad du = -dy_3$$

sınırlar

$$u_1 = \sqrt{c_1^2t^2 - \rho^2} \qquad u_2 = -\sqrt{c_1^2t^2 - \rho^2}$$

olur ve integral aşağıdaki şekli alır.

$$\boldsymbol{F}^k = \int_{-\sqrt{c_1^2t^2-\rho^2}}^{+\sqrt{c_1^2t^2-\rho^2}} \frac{1}{4\pi}\{H(t-\frac{r}{c_1})(\frac{t}{r}-\frac{1}{c_1}) - H(t)\frac{t}{r}\}\boldsymbol{e}^k du = I\boldsymbol{e}_k \qquad (1.33)$$

burada I

$$I = \int_{-\sqrt{c_1^2t^2-\rho^2}}^{+\sqrt{c_1^2t^2-\rho^2}} \{H(t-\frac{r}{c_1})(\frac{t}{r}-\frac{1}{c_1}) - H(t)\frac{t}{r}\}du \qquad (1.34)$$

şeklinde tanımlanır. I integrali

$$I = 2\int_0^{\sqrt{c_1^2t^2-\rho^2}} \{H(t-\frac{r}{c_1})(\frac{t}{r}-\frac{1}{c_1})\}du - 2\int_0^{\sqrt{c_1^2t^2-\rho^2}} \{H(t)\frac{t}{r}\}du \qquad (1.35)$$

şeklinde ayrılırsa birinci integrali almak için

$$t - \frac{r}{c_1} = z$$

dönüşümü yapılarak

$$r = \sqrt{\rho^2 + u^2} \qquad t - \frac{\sqrt{\rho^2 + u^2}}{c_1} = z$$

$$t - z = \frac{\sqrt{\rho^2 + u^2}}{c_1} \qquad \sqrt{\rho^2 + u^2} = (t - z)c_1$$

$$u^2 = c_1^2(t - z)^2 - \rho^2 \qquad u = \sqrt{c_1^2(t - z)^2 - \rho^2}$$

$$dz = -\frac{u}{\sqrt{\rho^2 + u^2}}\frac{1}{c_1}du \qquad dz = \frac{\sqrt{c_1^2(t - z)^2 - \rho^2}}{(t - z)c_1^2}du$$

$$du = -\frac{c_1\sqrt{\rho^2 + u^2}}{u}dz = \frac{c_1^2(t - z)}{\sqrt{c_1^2(t - z)^2 - \rho^2}}dz$$

Birinci integralde sınırlar

$$z_1 = t - \frac{\rho}{c_1} \qquad z_2 = t - \frac{\sqrt{\rho^2 + c_1^2t^2 - \rho^2}}{c_1} = t - t = 0$$

$$I_1 = -2\int_{t-\frac{\rho}{c_1}}^{0} H(z)\{\frac{t}{(t - z)c_1} - \frac{1}{c_1}\}\frac{c_1^2(t - z)}{\sqrt{c_1^2(t - z)^2 - \rho^2}}dz$$

$$I_1 = 2\int_0^{t-\frac{\rho}{c_1}} \{H(z)(\frac{c_1t}{\sqrt{c_1^2(t - z)^2 - \rho^2}}) - H(z)(\frac{c_1(t - z)}{\sqrt{c_1^2(t - z)^2 - \rho^2}})\}dz$$

Bu integral

$$I_1 = 2\int_0^{t-\frac{\rho}{c_1}} \{H(z)f_1'(z) + H(z)f_2'(z)\}dz$$

olarak yazılırsa

$$I_1 = 2\{H(z)f_1(z) + H(z)f_2(z)|_0^{t-\frac{\rho}{c_1}} - \int_0^{t-\frac{\rho}{c_1}} \delta(z)(f_1(z) + f_2(z)dz)\}$$

şeklini alır. Bu ifade için $f_1(z)$ ve $f_2(z)$ fonksiyonlarının hesaplanması gerekir.

$$f_1^{'}(z) = \frac{c_1 t}{\sqrt{c_1^2(t-z)^2 - \rho^2}} \Rightarrow f_1(z) = -tln(\frac{c_1(t-z) + \sqrt{c_1^2(t-z)^2 - \rho^2}}{\rho}) \quad (1.36)$$

ve

$$f_2^{'}(z) = -\frac{c_1(t-z)}{\sqrt{c_1^2(t-z)^2 - \rho^2}} \Rightarrow f_2(z) = \frac{1}{c_1}\sqrt{c_1^2(t-z)^2 - \rho^2}$$

olarak bulunur. $f_1(z)$ ve $f_2(z)$ fonksiyonlarının bulunmasıyla I_1 integrali

$$I_1 = 2\{H(z)(-tln(\frac{c_1(t-z) + \sqrt{c_1^2(t-z)^2 - \rho^2}}{\rho}) + \frac{1}{c_1}\sqrt{c_1^2(t-z)^2 - \rho^2})|_0^{t-\frac{\rho}{c_1}}$$

$$-\int_0^{t-\frac{\rho}{c_1}} \delta(z)(-tln(\frac{c_1(t-z) + \sqrt{c_1^2(t-z)^2 - \rho^2}}{\rho})$$

$$+\frac{1}{c_1}\sqrt{c_1^2(t-z)^2 - \rho^2})dz\} \quad (1.37)$$

şeklini alır. Uç değerler yerine konarak ve integral hesaplanarak

$$I_1 = 2\{H(t - \frac{\rho}{c_1})(-tln(\frac{c_1(\frac{\rho}{c_1}) + \sqrt{c_1^2(\frac{\rho}{c_1})^2 - \rho^2}}{\rho}) + \frac{1}{c_1}(0))$$

$$-H(0)(-tln(\frac{c_1 t + \sqrt{c_1^2 t^2 - \rho^2}}{\rho}) + \frac{1}{c_1}\sqrt{c_1^2 t^2 - \rho^2}\ )$$

$$-\int_0^{t-\frac{\rho}{c_1}} \delta(z)(-tln(\frac{c_1(t-z) + \sqrt{c_1^2(t-z)^2 - \rho^2}}{\rho}) + \frac{1}{c_1}\sqrt{c_1^2(t-z)^2 - \rho^2})dz\}$$

$$I_1 = -2\int_0^{t-\frac{\rho}{c_1}} \{\delta(z)(-tln(\frac{c_1(t-z) + \sqrt{c_1^2(t-z)^2 - \rho^2}}{\rho})$$

$$+\frac{1}{c_1}\sqrt{c_1^2(t-z)^2-\rho^2})dz\}$$

$$I_1=-2\,lim_{u\Rightarrow 0}\{H(t-\frac{\rho}{c_1}-u)-H(-u)\}\{-tln(\frac{c_1(t-z)+\sqrt{c_1^2(t-z)^2-\rho^2}}{\rho})$$

$$+\frac{1}{c_1}\sqrt{c_1^2(t-z)^2-\rho^2}\}$$

$$I_1=2H(t-\frac{\rho}{c_1})\{tln(\frac{c_1t+\sqrt{c_1^2t^2-\rho^2}}{\rho})-\frac{1}{c_1}\sqrt{c_1^2t^2-\rho^2}\} \tag{1.38}$$

bulunur. Şimdi (1.35) ifadesindeki ikinci integrali

$$I_2=-2\int_0^{\sqrt{c_1^2t^2-\rho^2}}H(t)\frac{t}{r}du \quad r=\sqrt{\rho^2+u^2}$$

$$I_2=-2\int_0^{\sqrt{c_1^2t^2-\rho^2}}H(t)\frac{t}{\sqrt{\rho^2+u^2}}du=-2H(t)t\int_0^{\sqrt{c_1^2t^2-\rho^2}}\frac{1}{\sqrt{\rho^2+u^2}}du$$

$u=\rho\,sh\alpha$ dönüşümü yapılırsa

$$u=\rho\,sh\alpha \qquad du=\rho\,ch\alpha\,d\alpha$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{\rho^2+u^2}}du=\int\frac{\rho\,ch\alpha\,d\alpha}{\rho\,ch\alpha}=\alpha$$

$$sh\alpha=\frac{u}{\rho}=\frac{e^\alpha-e^{-\alpha}}{2} \qquad e^\alpha=x$$

$$x^2-2\frac{u}{\rho}x-1=0 \qquad x_{1,2}=\frac{u}{\rho}\mp\sqrt{\frac{u^2}{\rho^2}+1}$$

$u=0$ da $\alpha=0$ olacaktır. Bu yüzden + kök kullanılır ve

$$I_2=-2H(t)t\;ln(\frac{u}{\rho}+\frac{\sqrt{u^2+\rho^2}}{\rho})|_0^{\sqrt{c_1^2t^2-\rho^2}}$$

$$I_2 = -2H(t)t\ ln(\frac{\sqrt{c_1^2t^2-\rho^2}}{\rho}+\frac{\sqrt{c_1^2t^2-\rho^2+\rho^2}}{\rho})$$

$$I_2 = -2H(t)t\ ln(\frac{c_1t+\sqrt{c_1^2t^2-\rho^2}}{\rho}) \tag{1.39}$$

bulunur. (1.38) ve (1.39), (1.35) de kullanılırsa

$$\boldsymbol{F}^k = \boldsymbol{e}_k\frac{1}{2\pi}(H(t-\frac{\rho}{c_1})\{tln(\frac{c_1t+\sqrt{c_1^2t^2-\rho^2}}{\rho})-\frac{1}{c_1}\sqrt{c_1^2t^2-\rho^2}\}) = F^k\boldsymbol{e}_k \tag{1.40}$$

bulunur. Diğer terim hesaplar sonucu kaybolacağı için göz önüne alınmamıştır Şimdi bu yükle ilgili yer değiştirme ve gerilme alanları

$$\bar{\boldsymbol{u}}^k = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\bar{\boldsymbol{F}}^k) - \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times(\bar{\boldsymbol{G}}^k) \tag{1.41}$$

$$\bar{\tau}_{ij}^k = \lambda\bar{\boldsymbol{u}}_{l,l}^k\delta_{ij} + \mu(\bar{\boldsymbol{u}}_{i,j}^k\bar{\boldsymbol{u}}_{j,i}^k) \tag{1.42}$$

şeklinde hesaplanırlar. Sonsuz bir ortamda $\bar{\boldsymbol{u}}^k$ ve $\bar{\tau}_{ij}^k$ çifti ani olarak $\boldsymbol{y}(y_1,y_2)$ noktasına yüklenen $\delta(t)$ siddetinde ve $\boldsymbol{e}_k$ doğrultusunda tekil bir yükten dolayı herhangi bir $\boldsymbol{x}(x_1,x_2)$ noktasında oluşan yerdeğiştirme ve gerilme alanlarını gösterirler. Elastodinamiğin iki boyutlu problemleri için bu çift, karşıtlık teoreminde temel çözüm olarak S^* şeklinde kullanılacaktır.

Şimdi farklı bir temel çözüm veya bir tekil elastodinamik halde $S' = (\boldsymbol{u}', \tau')$ çıkartılacaktır. Bu yeni $S' = (\boldsymbol{u}', \tau')$ elastodinamik halinin teşkilinde silindirik kordinatlar (R, θ, z) kullanılacaktır. Başlangıç noktası $\bar{\boldsymbol{F}}^k$ ve $\bar{\boldsymbol{G}}^k$ dır. Herhangi bir $\boldsymbol{y}_1(R_1,\theta_1)$ noktasında baz vektörü $\boldsymbol{e}_{R_1}$ kartezyen baz vektörleri $\boldsymbol{e}_1$ ve $\boldsymbol{e}_2$ cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\boldsymbol{e}_{R_1} = cos\theta_1\boldsymbol{e}_1 + sin\theta_1\boldsymbol{e}_2 \tag{1.43}$$

Şimdi $\boldsymbol{y}_1(R_1,\theta_1)$, $\boldsymbol{y}_2(R_1,\pi+\theta_1)$ noktalarına şiddetleri $\delta(t)/2R_1$ ve doğrultuları

sırasıyla $\boldsymbol{e}_{R_1}$ ve $\boldsymbol{e}_{R_2}$ olan iki tekil kuvvetin etkidiği düşünülecektir. Bu iki kütle kuvvetinden dolayı bir $\boldsymbol{x}(R,\theta)$ noktasında oluşan $\bar{\boldsymbol{F}}^s$ ve $\bar{\boldsymbol{G}}^s$ fonksiyonları süperpozisyonla

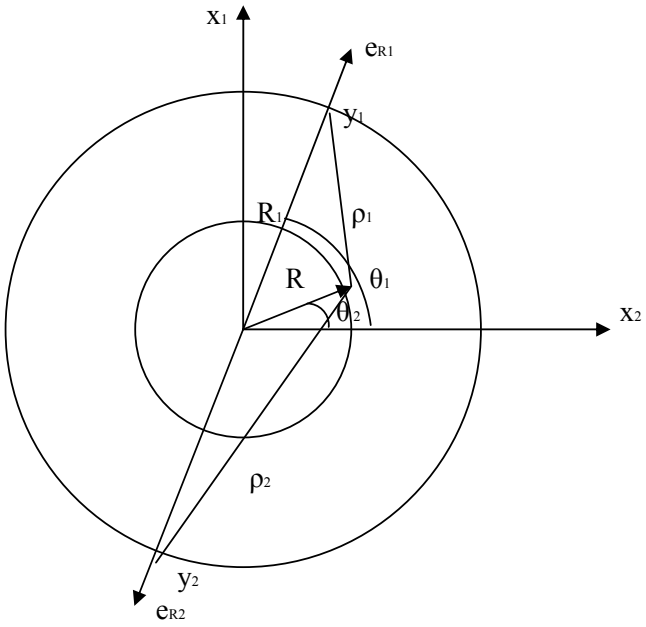
$$\bar{\boldsymbol{F}}^s = \frac{1}{4\pi R_1}\{H(t-\frac{\bar{\rho}_1}{c_1})\{\frac{t\,ln(c_1 t+\sqrt{c_1^2t^2-\bar{\rho}_1^2})}{\bar{\rho}_1}-\frac{1}{c_1}\sqrt{c_1^2t^2-\bar{\rho}_1^2}\}\}\boldsymbol{e}_{R_1}$$

$$+\frac{1}{4\pi R_1}\{H(t-\frac{\bar{\rho}_2}{c_1})\{\frac{t\,ln(c_1 t+\sqrt{c_1^2t^2-\bar{\rho}_2^2})}{\bar{\rho}_1}-\frac{1}{c_1}\sqrt{c_1^2t^2-\bar{\rho}_2^2}\}\}\boldsymbol{e}_{R_2}\,, \qquad (1.44)$$

$$\bar{\boldsymbol{G}}^s = \frac{1}{4\pi R_1}\{H(t-\frac{\bar{\rho}_1}{c_2})\{\frac{t\,ln(c_2 t+\sqrt{c_2^2t^2-\bar{\rho}_1^2})}{\bar{\rho}_1}-\frac{1}{c_2}\sqrt{c_2^2t^2-\bar{\rho}_1^2}\}\}\boldsymbol{e}_{R_1}$$

$$+\frac{1}{4\pi R_1}\{H(t-\frac{\bar{\rho}_2}{c_2})\{\frac{t\,ln(c_2 t+\sqrt{c_2^2t^2-\bar{\rho}_2^2})}{\bar{\rho}_1}-\frac{1}{c_2}\sqrt{c_2^2t^2-\bar{\rho}_2^2}\}\}\boldsymbol{e}_{R_2} \qquad (1.45)$$

olarak bulunur. y_1, y_2 yükleme noktalarının gösterimi **Şekil 1.1** de verilmiştir.



Şekil 1.1 : y_1, y_2 yükleme noktalarının gösterimi

$$\bar{\rho}_1^2 = R^2 + R_1^2 - 2R\,R_1\,cos(\theta-\theta_1)\,, \qquad (1.46)$$

$$\bar{\rho}_2^2 = R^2 + R_1^2 + 2R\,R_1\,cos(\theta-\theta_1)\,, \qquad (1.47)$$

R_1 yarıçaplı daire üzerinde yayılı bir yük yüklenmesi halinde buna karşı gelen fonksiyonları elde etmek için (1.44) ve (1.45) ifadeleri πR_1‘ e bölünerek R_1 yarıçaplı daire üzerinde $0-\pi$ aralığında integre edilecektir ve $R_1 = 0$ da yüklü bir çembersel yükten dolayı oluşan alanı bulmak için integral içinde $R_1 \to 0$ için limit alınacaktır.

$$f(\rho_i) = \frac{t\,ln(c_1 t + \sqrt{c_1^2 t^2 - \rho_i^2})}{\rho_i} - \frac{1}{c_1}\sqrt{c_1^2 t^2 - \rho_i^2} \tag{1.48}$$

$$\boldsymbol{F'} = \int_0^{\pi} \{H(t - \frac{\rho_1}{c_1}) f(\rho_1) \boldsymbol{e}_{R_1} + H(t - \frac{\rho_2}{c_1}) f(\rho_2) \boldsymbol{e}_{R_2}\} \frac{1}{4\pi R_1} \frac{1}{\pi} d\theta \tag{1.49}$$

$$\boldsymbol{F'} = lim_{R_1 \Longrightarrow 0} \int_0^{\pi} \{H(t - \frac{\rho_1}{c_1}) f(\rho_1) \boldsymbol{e}_{R_1} + H(t - \frac{\rho_2}{c_1}) f(\rho_2) \boldsymbol{e}_{R_2}\} \frac{1}{4\pi R_1} \frac{1}{\pi} d\theta \tag{1.50}$$

Bu durumda integral içindeki terim $\frac{0}{0}$ formunu alır. Gerekli türevler alınırsa

$$\boldsymbol{F'} = lim_{R_1 \Longrightarrow 0} \int_0^{\pi} \{\{\delta(t - \frac{\rho_1}{c_1}) f(\rho_1)(-\frac{1}{c_1}) + H(t - \frac{\rho_1}{c_1}) \frac{\partial f(\rho_1)}{\partial \rho_1}\} \frac{\partial \rho_1}{\partial R_1}$$

$$-\{\delta(t - \frac{\rho_2}{c_1}) f(\rho_2)(-\frac{1}{c_1}) - H(t - \frac{\rho_2}{c_1}) \frac{\partial f(\rho_2)}{\partial \rho_2}\} \frac{\partial \rho_2}{\partial R_1}\} \frac{1}{4\pi} \boldsymbol{e}^{R_1} \frac{d\theta}{\pi} \tag{1.51}$$

$$\frac{\partial f(\rho_1)}{\partial \rho_1} = \frac{1}{c_1} \frac{\sqrt{c_1^2 t^2 - \rho_1^2}}{\rho_1} \tag{1.52}$$

$$\boldsymbol{F'} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\pi} H(t - \frac{R}{c_1}) \frac{1}{c_1} \{2 \frac{\sqrt{c_1^2 t^2 - R^2}}{R}\} \boldsymbol{e}_{R_1} cos(\theta - \theta_1) d\theta_1$$

$$\boldsymbol{F'} = \frac{1}{2\pi^2} H(t - \frac{R}{c_1}) \frac{1}{c_1} \frac{\sqrt{c_1^2 t^2 - R^2}}{R} \int_0^{\pi} (\boldsymbol{e}_1 cos\theta_1 + \boldsymbol{e}_2 sin\theta_1) cos(\theta - \theta_1) d\theta_1$$

$$F' = \frac{1}{4\pi} H(t - \frac{R}{c_1}) \frac{1}{c_1} \frac{\sqrt{c_1^2 t^2 - R^2}}{R} \tag{1.53}$$

ve benzer şekilde

$$G' = \frac{1}{4\pi} H(t - \frac{R}{c_2}) \frac{1}{c_2} \frac{\sqrt{c_2^2 t^2 - R^2}}{R} \tag{1.54}$$

bulunur. $\boldsymbol{F'}$ ve $\boldsymbol{G'}$ ye karşı gelen u' ve τ' ise

$$u' = \nabla \nabla \cdot F' \tag{1.55}$$

$$\nabla \cdot F' = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (F' \cdot R) = \frac{\partial F'}{\partial R} + \frac{F'}{R}$$

$$\frac{\partial F'}{\partial R} = \frac{1}{4\pi} H(t - \frac{R}{c_1}) \frac{1}{c_1} (\frac{-R}{R\sqrt{c_1^2 t^2 - R^2}} - \frac{1}{R^2} \sqrt{c_1^2 t^2 - R^2})$$

$$\nabla \cdot F' = \frac{1}{4\pi} H(t - \frac{R}{c_1}) \frac{1}{c_1} (\frac{-1}{\sqrt{c_1^2 t^2 - R^2}} - \frac{1}{R^2} \sqrt{c_1^2 t^2 - R^2} + \frac{1}{R^2} \sqrt{c_1^2 t^2 - R^2})$$

$$= \frac{1}{4\pi} H(t - \frac{R}{c_1}) \frac{1}{c_1} (\frac{-1}{\sqrt{c_1^2 t^2 - R^2}})$$

$$\nabla \nabla \cdot F' = \frac{1}{4\pi} H(t - \frac{R}{c_1}) \frac{1}{c_1} (\frac{-R}{\sqrt{c_1^2 t^2 - R^2}^3}) + \frac{1}{4\pi} \delta(t - \frac{R}{c_1}) \frac{1}{c_1^2} (\frac{1}{\sqrt{c_1^2 t^2 - R^2}}) \boldsymbol{e}_R$$

$$u'_R = \frac{1}{4\pi} \{H(t - \frac{R}{c_1}) \frac{1}{c_1} (\frac{-R}{\sqrt{c_1^2 t^2 - R^2}^3}) + \delta(t - \frac{R}{c_1}) \frac{1}{c_1^2} (\frac{1}{\sqrt{c_1^2 t^2 - R^2}})\} \tag{1.56}$$

$$\epsilon'_{RR} = \frac{\partial u'_R}{\partial R} = \frac{1}{4\pi} \{H(t - \frac{R}{c_1}) \frac{1}{c_1} (\frac{-1}{\sqrt{c_1^2 t^2 - R^2}^3} - \frac{3R^2}{\sqrt{c_1^2 t^2 - R^2}^5})$$

$$+\delta(t - \frac{R}{c_1}) \frac{1}{c_1^2} (\frac{R}{\sqrt{c_1^2 t^2 - R^2}^3}$$

$$+\frac{R}{\sqrt{c_1^2 t^2 - R^2}^3}) + \delta^{\cdot}(t - \frac{R}{c_1}) \frac{1}{c_1^3} (\frac{-1}{\sqrt{c_1^2 t^2 - R^2}})\} \tag{1.57}$$

$$\epsilon'_{\theta\theta} = \frac{1}{R}u'_R = \frac{1}{4\pi}\{H(t-\frac{R}{c_1})\frac{1}{c_1}(\frac{-1}{\sqrt{c_1^2t^2-R^2}^3})$$

$$+\delta(t-\frac{R}{c_1})\frac{1}{c_1^2}(\frac{1}{R\sqrt{c_1^2t^2-R^2}})\} \tag{1.58}$$

$$\triangle = \epsilon'_{RR} + \epsilon'_{\theta\theta} = \frac{1}{4\pi}\{H(t-\frac{R}{c_1})\frac{1}{c_1}(\frac{-2}{\sqrt{c_1^2t^2-R^2}^3} - \frac{-3R^2}{\sqrt{c_1^2t^2-R^2}^5})$$

$$+\delta(t-\frac{R}{c_1})\frac{1}{c_1^2}(\frac{2R}{\sqrt{c_1^2t^2-R^3}} + \frac{1}{R\sqrt{c_1^2t^2-R^2}})$$

$$+\delta^{\cdot}(t-\frac{R}{c_1})\frac{1}{c_1^3}(\frac{R}{R\sqrt{c_1^2t^2-R^3}})\} \tag{1.59}$$

$$\tau'_{RR} = \lambda\triangle + 2\mu\epsilon'_{RR} = \lambda(\epsilon_{RR}+\epsilon_{\theta\theta}) + 2\mu\epsilon_{RR} \tag{1.60}$$

$$\tau'_{\theta\theta} = \lambda\triangle + 2\mu\epsilon'_{\theta\theta} = (\lambda+2\mu)\epsilon_{RR} + \lambda\epsilon_{\theta\theta} \tag{1.61}$$

$$\tau'_{zz} = \lambda\triangle \tag{1.62}$$

şeklinde bulunacaklardır.

1.2 İkinci Elastodinamik Halin Teşkili

Silindirik koordinatlarda baz vektörleri $\boldsymbol{e}_R$ ve $\boldsymbol{e}_\theta$ bir (R,θ) noktasında kartezyen baz vektörleri $\boldsymbol{e}_1$ ve $\boldsymbol{e}_2$ ye

$$\boldsymbol{e}_R = \boldsymbol{e}_1\, cos\theta + \boldsymbol{e}_2\, sin\theta$$

$$\boldsymbol{e}_\theta = -\boldsymbol{e}_1\, sin\theta + \boldsymbol{e}_2\, cos\theta \tag{1.63}$$

şeklinde bağlanır. Şimdi bir R_1, θ_1 noktasında

$$\boldsymbol{e}_{R_1} = \boldsymbol{e}_1 \, cos\theta_1 + \boldsymbol{e}_2 \, sin\theta_1$$

baz vektörü doğrultusunda $\frac{g(t)}{2\pi R_1}$ şiddetinde bir tekil kuvvet etkisin. Bu kuvvetten dolayı bir R, θ noktasında oluşan $\boldsymbol{F}^{R_1}$ fonksiyonu

$$\boldsymbol{F}^{R_1} = \frac{1}{2\pi}\{H(t - \frac{\rho}{c_1})\frac{1}{c_1}\left[c_1 t \;\; ln(c_1 t + \sqrt{c_1^2 t^2 - \rho^2}) - c_1 t \;\; ln\rho - \sqrt{c_1^2 t^2 - \rho^2}\right]$$

$$+H(t) t \;\; ln\rho\}\boldsymbol{e}_{R_1} \tag{1.64}$$

$$\rho = \sqrt{R^2 + R_1^2 - 2RR_1 cos(\theta - \theta_1)} \tag{1.65}$$

olacaktır. Şimdi bu kuvvetin R_1 yarıçaplı daire üzerinde her noktaya aynı anda etkidiğini düşünülecektir. Bu kuvvetlerden dolayı bir R, θ noktasına gelen etkiyi bulmak için $\boldsymbol{e}_{R_1}$,

$$\boldsymbol{e}_{R_1} = cos(\theta - \theta_1)\boldsymbol{e}_R - sin(\theta - \theta_1)\boldsymbol{e}_\theta \tag{1.66}$$

şeklinde yazılarak

$$\boldsymbol{F}^{R_1} = \frac{1}{2\pi}\{H(t - \frac{\rho}{c_1})\frac{1}{c_1}\left[c_1 t \;\; ln(c_1 t + \sqrt{c_1^2 t^2 - \rho^2}) - c_1 t \;\; ln\rho - \sqrt{c_1^2 t^2 - \rho^2}\right]$$

$$+H(t) t \;\; ln\rho\}\frac{1}{2\pi R_1}\left[cos(\theta - \theta_1)\boldsymbol{e}_R - sin(\theta - \theta_1)\boldsymbol{e}_\theta\right] \tag{1.67}$$

ifadesi θ_1 yarıçaplı çember üzerinde integre edilirse dönel simetrik alan için geçerli $\boldsymbol{F}^s$ fonksiyonu

$$\boldsymbol{F}^s = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{H(t-\frac{\rho}{c_1})\frac{1}{c_1}\left\{c_1 t\ \ ln(c_1 t+\sqrt{c_1^2t^2-\rho^2}) - c_1 t\ \ ln\rho - \sqrt{c_1^2t^2-\rho^2}\right\}$$

$$+H(t)t\ \ ln\rho\}\frac{1}{2\pi R_1}\left[cos(\theta-\theta_1)\boldsymbol{e}_R - sin(\theta-\theta_1)\boldsymbol{e}_\theta\right]R_1 d\theta_1 \tag{1.68}$$

olarak bulunur. ρ nun ifadesi (1.65) de verilmişti. Burada $\boldsymbol{F}^s$ deki integralleri dört integrale indirgenebilir.

$$\boldsymbol{F}^s = \frac{1}{(2\pi)^2}\left[I_1\boldsymbol{e}_R + I_2\boldsymbol{e}_\theta + I_3\boldsymbol{e}_R + I_4\boldsymbol{e}_\theta\right] \tag{1.69}$$

Bu integraller yazılırsa

$$I_1 = \int_0^{2\pi} H(t-\frac{\rho}{c_1})\frac{1}{c_1}\left\{c_1 t\ \ ln(c_1 t+\sqrt{c_1^2t^2-\rho^2}) - c_1 t\ \ ln\rho - \sqrt{c_1^2t^2-\rho^2}\right\}$$

$$cos(\theta-\theta_1)d\theta_1 \tag{1.70}$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} H(t-\frac{\rho}{c_1})\frac{1}{c_1}\left\{c_1 t\ \ ln(c_1 t+\sqrt{c_1^2t^2-\rho^2}) - c_1 t\ \ ln\rho - \sqrt{c_1^2t^2-\rho^2}\right\}$$

$$\left\{-sin(\theta-\theta_1)\right\}d\theta_1 \tag{1.71}$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} H(t)t\ \ ln\rho\, cos(\theta-\theta_1)d\theta_1 \tag{1.72}$$

$$I_4 = \int_0^{2\pi} H(t)t\ \ ln\rho\left\{-sin(\theta-\theta_1)\right\}d\theta_1 \tag{1.73}$$

olarak tanımlanabilirler. I_4 ve I_2 integralleri sıfırdır. I_1 integralinde sınırlar tamamen doğru değildir. $c_1 t < R_1 - R$ için I_1 integrali kalkar. Zira R_1 yarıçaplı daireden hiçbir etki bu anda R yarıçaplı daireye ulaşamaz. I_1 de

$$\theta - \theta_1 = \varphi$$

dönüşümü yapılırsa

$$d\theta_1 = -d\varphi$$

sınırlar

$$\varphi_1 = -\theta_1 \qquad\qquad \varphi_2 = 2\pi - \theta_1$$

$$\rho = \sqrt{R^2 + R_1^2 - 2RR_1 cos(\varphi)}$$

olarak bulunur ve $f(\rho)$ fonksiyonu

$$f(\rho) = H(t - \frac{\rho}{c_1})\frac{1}{c_1}\left[c_1 t\ \ ln(c_1 t + \sqrt{c_1^2 t^2 - \rho^2}) - c_1 t\ \ ln\rho - \sqrt{c_1^2 t^2 - \rho^2}\right] \quad (1.74)$$

şeklinde tanımlanarak I_1 integrali

$$I_1 = -\left[\int_{-\theta_1}^{0} f(\rho)\ cos\varphi\ d\varphi + \int_0^{2\pi} f(\rho)\ cos\varphi\ d\varphi - \int_{-\theta_1}^{0} f(\rho)\ cos\varphi\ d\varphi\right]$$

$$= \int_0^{2\pi} f(\rho)\ cos\varphi\ d\varphi = \int_0^{\pi} f(\rho)\ cos\varphi\ d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} f(\rho)\ cos\varphi\ d\varphi$$

yazılıp ikinci integralde

$$\varphi = 2\pi - \beta$$

dönüşümü yapılırsa

$$d\varphi = -d\beta \qquad\qquad cos\varphi = cos\beta$$

sınırlar

$$\beta_1 = \pi \qquad\qquad \beta_2 = 0$$

olacağından I_1 integrali

$$I_1 = \int_0^{\pi} f(\rho(\varphi))\, cos\varphi\, d\varphi - \int_{\pi}^{0} f(\rho(\varphi))\, cos\beta\, d\beta = 2\int_0^{\pi} f(\rho(\varphi))\, cos\varphi\, d\varphi$$

$$I_1 = 2\int_0^{\pi} H(t-\frac{\rho}{c_1})\frac{1}{c_1}(c_1 t\ \ ln(\frac{c_1 t + \sqrt{c_1^2 t^2 - \rho^2}}{\rho}) - \sqrt{c_1^2 t^2 - \rho^2})cos(\varphi)\, d\varphi \quad (1.75)$$

formunu alır. Şimdi bunu yarım açıya indirgeyelim

$$cos\varphi = cos^2\frac{\varphi}{2} - sin^2\frac{\varphi}{2}$$

$$\rho = \sqrt{4RR_1 sin^2\frac{\varphi}{2} + (R_1 - R)^2} \quad (1.76)$$

yazılıp

$$\frac{\varphi}{2} = \theta$$

dönüşümü yapılırsa sınırlar

$$\theta_1 = 0 \qquad \theta_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$d\varphi = 2d\theta$$

bulunur ve I_1 integrali

$$I_1 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} H(t-\frac{\rho}{c_1})\frac{1}{c_1}\left\{c_1 t\ \ ln(\frac{c_1 t + \sqrt{c_1^2 t^2 - \rho^2}}{\rho}) - \sqrt{c_1^2 t^2 - \rho^2}\right\}$$

$$(cos^2\theta - sin^2\theta)\, d\theta \tag{1.77}$$

şeklini alır.

$$u = t - \frac{\rho}{c_1} = t - \frac{\sqrt{(R_1 - R)^2 + 4RR_1 sin^2\theta}}{c_1} \tag{1.78}$$

dönüşümü yapılırsa

$$\rho = c_1(t - u)$$

olur, sınırlar ise

$$u_1 = t - \frac{R_1 - R}{c_1} \qquad u_2 = t - \frac{R_1 + R}{c_1} \tag{1.79}$$

olacaktır. Bu dönüşümle

$$\left\{ c_1 t \;\; ln(\frac{c_1 t + \sqrt{c_1^2 t^2 - \rho^2}}{\rho}) - \sqrt{c_1^2 t^2 - \rho^2} \right\} (cos^2\theta - sin^2\theta)\, d\theta = f(u)du \tag{1.80}$$

olarak kabul edilirse I_1 integrali

$$I_1 = 4 \int_{u_1}^{u_2} H(u) \frac{1}{c_1} f(u)du$$

$$I_1 = -4 \int_{u_2}^{u_1} H(u) \frac{1}{c_1} f(u)du$$

olarak yazılır. $f(u) = \frac{dk}{du} = k'(u)$ şeklinde bir $k(u)$ fonksiyonu tanımlanırsa bu integral

$$I_1 = -4 \left[H(u) \frac{1}{c_1} k(u)|_{u_2}^{u_1} - \int_{u_2}^{u_1} \delta(u) \frac{1}{c_1} k(u)du \right]$$

$$I_1 = -4\left[H(u)\frac{1}{c_1}k(u)|_{u_2}^{u_1} - lim_{u\to 0}\left\{(H(u_1-u)-H(u_2-u))k(u)\right\}\frac{1}{c_1}\right]$$

$$I_1 = -4\left[H(u_1)\frac{1}{c_1}k(u_1) - H(u_2)\frac{1}{c_1}k(u_2)\right] + 4\left[(H(u_1)-H(u_2))k(0)\frac{1}{c_1}\right]$$

$$= -4\left[H(u_1)\frac{1}{c_1}(k(u_1)-k(0)) - H(u_2)\frac{1}{c_1}(k(u_2)-k(0))\right]$$

$$= -4\left[H(u_1)\frac{1}{c_1}\int_0^{u_1} k'(u)du - H(u_2)\frac{1}{c_1}\int_0^{u_2} k'(u)du\right]$$

formunu alacaktır. $f(u) = k'(u)$ olduğu için bu integral

$$I_1 = -4\left[H(u_1)\frac{1}{c_1}\int_0^{u_1} f(u)du - H(u_2)\frac{1}{c_1}\left\{\int_0^{u_1} f(u)du - \int_{u_2}^{u_1} f(u)du\right\}\right]$$

$$I_1 = -4\left[(H(u_1)\frac{1}{c_1} - H(u_2)\frac{1}{c_1})\int_0^{u_1} f(u)du + H(u_2)\frac{1}{c_1}\int_{u_2}^{u_1} f(u)du\right]$$

formuna getirilebilir. Şimdi integrallerde u değişkeni yerine (1.78) dönüşümü ile θ ya dönülürse $u = 0$ da $\theta = \alpha$ olur. α açısı ise $\frac{R_1-R}{c_1} \le t \le \frac{R_1+R}{c_1}$ aralığında

$$sin\alpha = \sqrt{\frac{c_1^2t^2 - (R_1-R)^2}{4RR_1}}$$

olarak tanımlanır. $u = u_1$ de $\theta = 0$ ve $u = u_2$ de $\theta = \pi/2$ olur. Bu dönüşümler yapılırsa I_1 integrali

$$I_1 = \left\{H(t - \frac{R_1-R}{c_1}) - H(t - \frac{R_1+R}{c_1})\right\}\frac{4}{c_1}\int_0^{\alpha} f(\rho)cos2\theta\, d\theta$$

$$+H(t - \frac{R_1+R}{c_1})\frac{4}{c_1}\int_0^{\pi/2} f(\rho)cos2\theta\, d\theta \qquad (1.81)$$

halini alır. Burada

$$\rho = \sqrt{(R_1 - R)^2 + 4RR_1 sin^2\theta}$$

$$f(\rho) = c_1 t \ \ ln(\frac{c_1 t + \sqrt{c_1^2 t^2 - \rho^2}}{\rho}) - \sqrt{c_1^2 t^2 - \rho^2} \tag{1.82}$$

olduğunuda anımsamak gerekecektir. I_3 integrali ise kompleks integrasyon tekniği kullanılarak

$$I_3 = -H(t)t\pi\frac{R}{R_1} \tag{1.83}$$

şeklinde bulunur. Hesaplanan I_1, I_2, I_3 ve I_4 integralleri (1.69) denklemine yerleştirildiğinde $\boldsymbol{F}^s$ fonksiyonu

$$\boldsymbol{F}^s = \frac{1}{(2\pi)^2}\{\Big[H(t - \frac{R_1 - R}{c_1}) - H(t - \frac{R_1 + R}{c_1})\Big]\frac{4}{c_1}\int_0^{\alpha} f(\rho)cos2\theta \ d\theta$$

$$+H(t - \frac{R_1 + R}{c_1})\frac{4}{c_1}\int_0^{\pi/2} f(\rho)cos2\theta \ d\theta - H(t)t\pi\frac{R}{R_1}\}\boldsymbol{e}_R = F^s(R, R_1)\boldsymbol{e}_R \tag{1.84}$$

şeklini alır. Şimdi $\boldsymbol{u}^s$ yerdeğiştirme alanı

$$\boldsymbol{u}^s = \nabla\nabla \cdot \boldsymbol{F}^s = \nabla\nabla \cdot F^s\boldsymbol{e}_R$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F}^s = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(F^s R) = \frac{\partial F^s}{\partial R} + \frac{F^s}{R}$$

$$\boldsymbol{u}^s = \nabla\nabla \cdot \boldsymbol{F}^s = \frac{\partial}{\partial R}(\frac{\partial F^s}{\partial R} + \frac{F^s}{R})\boldsymbol{e}_R = u_R^s\boldsymbol{e}_R \tag{1.85}$$

şeklinde hesaplanacaktır. $F^s(R, R_1)$ ifadesindeki son terim (1.85) e yerleştirilince düşer. Dolayısıyla bundan sonra sadece $F^s(R, R_1)$ deki ilk iki terim göz önüne alınacaktır.

$$\frac{\partial F^s}{\partial R} = \frac{4}{(2\pi)^2}\{\left[\delta(t-\frac{R_1-R}{c_1})\frac{1}{c_1^2}+\delta(t-\frac{R_1+R}{c_1})\frac{1}{c_1^2}\right]\int_0^\alpha f(\rho)cos2\theta\, d\theta$$

$$-\delta(t-\frac{R_1+R}{c_1})\frac{1}{c_1^2}\int_0^{\pi/2} f(\rho)cos2\theta\, d\theta+\left[H(t-\frac{R_1-R}{c_1})\frac{1}{c_1}-H(t-\frac{R_1+R}{c_1})\frac{1}{c_1}\right]$$

$$\left[f(\alpha)\, cos2\alpha\frac{d\alpha}{dR}+\int_0^\alpha \frac{\partial f(\rho)}{\partial R}cos2\theta d\theta\right]$$

$$+H(t-\frac{R_1+R}{c_1})\frac{1}{c_1}\int_0^{\pi/2}\frac{\partial f(\rho)}{\partial R}cos2\theta\, d\theta\} \tag{1.86}$$

Bu ifadede $\delta(t-\frac{R_1-R}{c_1})$ in çarpanı $t=\frac{R_1-R}{c_1}$ de sıfır olur. Dolayısıyla bu terim $f(0)=0$ sa $\delta(x)f(x)=0$ olacağından düşer. Bu ifadedeki ikinci ve üçüncü terimlerin toplamı da sıfırdır. Zira $t=\frac{R_1+R}{c_1}$ de $\alpha=\pi/2$ olmaktadır. Ayrıca $\rho(\alpha)=c_1t$ olduğunda (1.82) ifadesi incelenirse $f(\alpha)=0$ olduğu görülür. Sonuçta

$$\frac{\partial F^s}{\partial R}+\frac{F^s}{R}=\frac{4}{(2\pi)^2}\left\{H(t-\frac{R_1-R}{c_1})\frac{1}{c_1}-H(t-\frac{R_1+R}{c_1})\frac{1}{c_1}\right\}\int_0^\alpha(\frac{\partial f(\rho)}{\partial R}$$

$$+\frac{f(\rho)}{R})cos2\theta d\theta+H(t-\frac{R_1+R}{c_1})\frac{1}{c_1}\int_0^{\pi/2}(\frac{\partial f(\rho)}{\partial R}+\frac{f(\rho)}{R})cos2\theta d\theta \tag{1.87}$$

bulunur. (1.85) den $\boldsymbol{u}^s$ nin R bileşeni

$$u_R^s=\frac{4}{(2\pi)^2}\{\left[\delta(t-\frac{R_1-R}{c_1})\frac{1}{c_1^2}+\delta(t-\frac{R_1+R}{c_1})\frac{1}{c_1^2}\right]\int_0^\alpha(\frac{\partial f(\rho)}{\partial R}+\frac{f(\rho)}{R})\, cos2\theta\, d\theta$$

$$\left[H(t-\frac{R_1-R}{c_1})\frac{1}{c_1}-H(t-\frac{R_1+R}{c_1})\frac{1}{c_1}\right]\left[\frac{d\alpha}{dR}(\frac{\partial f(\rho)}{\partial R}+\frac{f(\rho)}{R})cos2\theta\right|_{\theta=\alpha}$$

$$+\int_0^\alpha(\frac{\partial^2 f(\rho)}{\partial R^2}+\frac{\partial f(\rho)}{\partial R}\frac{1}{R}-\frac{f(\rho)}{R^2})\, cos2\theta\, d\theta\Big]$$

$$-\delta(t-\frac{R_1+R}{c_1})\frac{1}{c_1^2}\int_0^{\pi/2}(\frac{\partial f(\rho)}{\partial R}+\frac{f(\rho)}{R})\, cos2\theta\, d\theta$$

$$+H(t-\frac{R_1+R}{c_1})\frac{1}{c_1}\int_0^{\pi/2}(\frac{\partial^2 f(\rho)}{\partial R^2}+\frac{\partial f(\rho)}{\partial R}\frac{1}{R}-\frac{f(\rho)}{R^2})\,cos2\theta\,d\theta\} \tag{1.88}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadede $\delta(t-\frac{R_1-R}{c_1})$ çarpanı $t=\frac{R_1-R}{c_1}$ de $\alpha=0$ olacağından düşer. $\delta(t-\frac{R_1+R}{c_1})$ in çarpanı olan iki terim ise $t=\frac{R_1+R}{c_1}$ de $\alpha=\pi/2$ olacağından birbirini yok eder.

$$\frac{\partial f(\rho)}{\partial R}=\frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial R}=\frac{\sqrt{c_1^2t^2-\rho^2}}{\rho}\frac{(R_1-R)-2R_1sin^2\theta}{\rho} \tag{1.89}$$

terimi ise $\theta=\alpha$ da $\rho=c_1t$ olacağından kaybolur. $f(\rho(\alpha))=0$ olduğu daha önce de belirtilmişti. Sonuçta kalan terimler yazılırsa

$$u_R^s=\frac{4}{(2\pi)^2}\{(H(t-\frac{R_1-R}{c_1})\frac{1}{c_1}-H(t-\frac{R_1+R}{c_1})\frac{1}{c_1})$$

$$\int_0^{\alpha}(\frac{\partial^2 f(\rho)}{\partial R^2}+\frac{\partial f(\rho)}{\partial R}\frac{1}{R}-\frac{f(\rho)}{R^2})\,cos2\theta\,d\theta$$

$$+H(t-\frac{R_1+R}{c_1})\frac{1}{c_1}\int_0^{\pi/2}(\frac{\partial^2 f(\rho)}{\partial R^2}+\frac{\partial f(\rho)}{\partial R}\frac{1}{R}-\frac{f(\rho)}{R^2})\,cos2\theta\,d\theta\} \tag{1.90}$$

olarak dönel simetrik problem için u_R^s bulunmuş olur. Bu ifadelerdeki integrandı basitleştirmek için

$$\frac{\partial f(\rho)}{\partial R}=\frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial R}$$

$$\frac{\partial^2 f(\rho)}{\partial R^2}=\frac{\partial^2 f(\rho)}{\partial \rho^2}(\frac{\partial \rho}{\partial R})^2+\frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho}\frac{\partial^2 \rho}{\partial R^2} \tag{1.91}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial R}=\frac{-(R_1-R)+2R_1sin^2\theta}{\rho} \tag{1.92}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta}=\frac{4RR_1\,sin\theta\,cos\theta}{\rho} \tag{1.93}$$

$$(\frac{\partial\rho}{\partial R})^2 + \frac{1}{4R^2}(\frac{\partial\rho}{\partial\theta})^2 = 1 \tag{1.94}$$

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial R^2} = \frac{1}{\rho} - \frac{(-(R_1 - R) + 2R_1 sin^2\theta)^2}{\rho^3} \tag{1.95}$$

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial\theta^2} = \frac{4RR_1(cos^2\theta - sin^2\theta)}{\rho} - \frac{16R^2R_1^2\, cos^2\theta\, sin^2\theta}{\rho^3} \tag{1.96}$$

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial\rho}{\partial R} + \frac{1}{4R^2}\frac{\partial^2\rho}{\partial\theta^2} = \frac{1}{\rho} \tag{1.97}$$

ifadeleri teşkil edilerek (1.89), (1.91) ve (1.97) kullanılırsa integrand

$$\frac{\partial^2 f(\rho)}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial f(\rho)}{\partial R} - \frac{f(\rho)}{R^2} = \frac{\partial^2 f(\rho)}{\partial\rho^2}(\frac{\partial\rho}{\partial R})^2 + \frac{\partial f(\rho)}{\partial\rho}(\frac{\partial^2\rho}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial\rho}{\partial R}) - \frac{f(\rho)}{R^2}$$

$$= \frac{\partial^2 f(\rho)}{\partial\rho^2}(1 - \frac{1}{4R^2}(\frac{\partial\rho}{\partial\theta})^2) + \frac{\partial f(\rho)}{\partial\rho}(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{4R^2}\frac{\partial^2\rho}{\partial\theta^2}) - \frac{f(\rho)}{R^2}$$

$$= \frac{\partial^2 f(\rho)}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f(\rho)}{\partial\rho} - \frac{f(\rho)}{R^2} - \frac{1}{4R^2}(\frac{\partial^2 f(\rho)}{\partial\theta^2}) \tag{1.98}$$

şeklinde yazılabilir. (1.90) deki integraller

$$= \int_0^\beta (\frac{\partial^2 f(\rho)}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f(\rho)}{\partial\rho} - \frac{f(\rho)}{R^2})\, cos2\theta\, d\theta$$

$$-\frac{1}{4R^2}\int_0^\beta \frac{\partial^2 f(\rho)}{\partial\theta^2}\, cos2\theta\, d\theta \qquad (\beta = \alpha, \pi/2) \tag{1.99}$$

formuna indirgenmiş olur. (1.99) deki ikinci integral ise kısmi integrasyon ile

$$= -\frac{1}{4R^2}\left[\frac{\partial f(\rho)}{\partial\theta} cos2\theta\Big|_0^\beta - \int_0^\beta \frac{\partial f(\rho)}{\partial\theta}(-2\, sin2\theta)\, d\theta\right]$$

$$= -\frac{1}{4R^2}\left[\frac{\partial f(\rho)}{\partial\theta} cos2\theta\Big|_0^\beta + 2f(\rho) sin2\theta\Big|_0^\beta - \int_0^\beta f(\rho) 4\, cos2\theta\, d\theta\right] \qquad (\beta = \alpha, \pi/2$$

halinde yazılabilir.

$$\frac{\partial f(\rho)}{\partial \theta} = \frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho)}{\partial \theta} = -\frac{\sqrt{c_1^2 t^2 - \rho^2}}{\rho} \cdot \frac{4RR_1 \, sin\theta \, cos\theta}{\rho}$$

olduğu için $\beta = \alpha$ da $\frac{\partial f(\rho)}{\partial \theta}$ ifadesi $\theta = \alpha$ için $\rho = c_1 t$ olacağından kaybolur. $f(\rho(\alpha)) = 0$ olduğu daha önce de belirtilmişti. $\theta = 0$ için $\frac{\partial f(\rho)}{\partial \theta}$ sıfırdır. Aynı nedenlerle $f(\theta) sin2\theta$ ifadesi $\theta = 0, \alpha$ için düşer. $\beta = \pi/2$ de $\frac{\partial f(\rho)}{\partial \theta}$ ifadesi sıfırdır. $f(\theta) sin2\theta$ ifadesi $\theta = \pi/2, 0$ için $sin\pi = 0$ ve $sin0 = 0$ olduğu için düşer. Sonuçta (1.99) deki ikinci integral

$$-\frac{1}{4R^2} \int_0^\beta \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \, cos2\theta \, d\theta = \int_0^\beta \frac{1}{R^2} f(\rho) \, cos2\theta \, d\theta \qquad (\beta = \alpha, \pi/2) \qquad (1.100)$$

olacaktır. Bu ifadeler (1.99) ve (1.90) de kullanılırsa radyal yerdeğiştirme

$$u_R^s = \frac{4}{(2\pi)^2} \{ (H(t - \frac{R_1 - R}{c_1}) \frac{1}{c_1} - H(t - \frac{R_1 + R}{c_1}) \frac{1}{c_1}) \int_0^\alpha (\frac{\partial^2 f(\rho)}{\partial \rho^2} + \frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho} \frac{1}{\rho}) \, cos2\theta \, d\theta$$

$$+ H(t - \frac{R_1 + R}{c_1}) \frac{1}{c_1} \int_0^{\pi/2} (\frac{\partial^2 f(\rho)}{\partial \rho^2} + \frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho} \frac{1}{\rho}) \, cos2\theta \, d\theta \} \qquad (1.101)$$

olarak bulunur.

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = -\frac{\sqrt{c_1^2 t^2 - \rho^2}}{\rho} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} = \frac{c_1^2 t^2}{\rho^2 \sqrt{c_1^2 t^2 - \rho^2}} \qquad (1.102)$$

ifadeleri kullanılarak

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{c_1^2 t^2 - \rho^2}} \qquad (1.103)$$

olarak bulunur. Böylece (1.101) denklemi

$$u_R^s = \frac{4}{(2\pi)^2}\{(H(t-\frac{R_1-R}{c_1})\frac{1}{c_1} - H(t-\frac{R_1+R}{c_1})\frac{1}{c_1})\int_0^\alpha \frac{1}{\sqrt{c_1^2t^2-\rho^2}}\, cos2\theta\, d\theta$$

$$+H(t-\frac{R_1+R}{c_1})\frac{1}{c_1}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{c_1^2t^2-\rho^2}}\, cos2\theta\, d\theta\} \tag{1.104}$$

şeklini alır.

$$\int_0^\alpha \frac{1}{\sqrt{c_1^2t^2-\rho^2}}\, cos2\theta\, d\theta$$

integrali

$$\rho = \sqrt{(R_1-R)^2 + 4RR_1 sin^2\theta}$$

olduğuna göre

$$\int_0^\alpha \frac{1}{\sqrt{c_1^2t^2-(R_1-R)^2-4RR_1sin^2\theta}}\, cos2\theta\, d\theta$$

olarak yazılır.

$$sin\alpha = \sqrt{\frac{c_1^2t^2-(R_1-R)^2}{4RR_1}} \qquad c_1t > R_1-R \quad c_1t \le R_1+R \tag{1.105}$$

olduğu anımsanıp

$$sin\theta = sin\alpha\, sin\varphi \tag{1.106}$$

değişken dönüşümü yapılırsa sınırlar

$$\theta = 0 \quad da \qquad sin\varphi = 0 \rightarrow \varphi = 0$$

$$\theta = \alpha \quad da \qquad sin\varphi = 1 \rightarrow \varphi = \pi/2$$

olacaktır.

$$\sqrt{c_1^2 t^2 - (R_1 - R)^2 - 4RR_1 sin^2\theta} = \sqrt{4RR_1}\, sin\alpha\, cos\varphi$$

$$cos2\theta = 1 - 2sin^2\theta = 1 - 2\, sin^2\alpha\, sin^2\varphi$$

$$cos\theta\, d\theta = sin\alpha cos\varphi\, d\varphi$$

$$\sqrt{1 - sin^2\alpha\, sin^2\varphi} d\theta = sin\alpha\, cos\varphi\, d\varphi$$

$$d\theta = \frac{sin\alpha}{\sqrt{1 - sin^2\alpha\, sin^2\varphi}}\, cos\varphi\, d\varphi$$

yukarıdaki ifadeler kullanıldığında u_R

$$= \frac{4}{(2\pi)^2}\{\Big[H(t - \frac{R_1 - R}{c_1})\frac{1}{c_1} - H(t - \frac{R_1 + R}{c_1})\frac{1}{c_1}\Big]$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{4RR_1}} \frac{1 - 2\, sin^2\alpha\, sin^2\varphi}{\sqrt{1 - sin^2\alpha\, sin^2\varphi}}\, d\varphi$$

$$+H(t - \frac{R_1 + R}{c_1})\frac{1}{c_1}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{c_1^2 t^2 - \rho^2}}\, cos2\theta\, d\theta\}$$

$$= \frac{4}{(2\pi)^2}\{\Big[H(t - \frac{R_1 - R}{c_1})\frac{1}{c_1} - H(t - \frac{R_1 + R}{c_1})\frac{1}{c_1}\Big]$$

$$\int_0^{\pi/2} \{2\sqrt{1 - sin^2\alpha\, sin^2\varphi} - \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2\alpha\, sin^2\varphi}}\} \frac{1}{\sqrt{4RR_1}}\, d\varphi$$

$$+H(t - \frac{R_1 + R}{c_1})\frac{1}{c_1}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{c_1^2 t^2 - \rho^2}}\, cos2\theta\, d\theta\} \tag{1.107}$$

olarak bulunur. (1.107) deki son integralde ρ ifadesi açık yazılırsa

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{c_1^2 t^2 - \rho^2}}\, cos2\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{c_1^2 t^2 - (R_1 - R)^2 - 4RR_1 sin^2\theta}}\, cos2\theta\, d\theta$$

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{c_1^2 t^2 - (R_1 - R)^2}} \frac{cos2\theta}{\sqrt{1 - \frac{4RR_1 sin^2\theta}{c_1^2 t^2 - (R_1 - R)^2}}}\, d\theta$$

$$sin^2\beta = \frac{4RR_1}{c_1^2 t^2 - (R_1 - R)^2} \qquad c_1 t > R_1 + R \tag{1.108}$$

denirse

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{sin\beta}{\sqrt{4RR_1}} \frac{cos2\theta}{\sqrt{1 - sin^2\beta\, sin^2\theta}}\, d\theta$$

$$= \frac{sin\beta}{\sqrt{4RR_1}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2\beta\, sin^2\theta}}\, d\theta + 2\frac{sin\beta}{\sqrt{4RR_1}} \int_0^{\pi/2} \frac{-sin^2\theta}{\sqrt{1 - sin^2\beta\, sin^2\theta}}\, d\theta$$

ikinci integral $sin^2\beta$ ile çarpılıp bölündükten sonra pay kısmına ± 1 eklenip integral

$$I_2 = \frac{sin\beta}{\sqrt{4RR_1}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2\beta\, sin^2\theta}}\, d\theta$$

$$+2\frac{sin\beta}{\sqrt{4RR_1} sin^2\beta} \int_0^{\pi/2} \{\sqrt{1 - sin^2\beta\, sin^2\theta} - \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2\beta\, sin^2\theta}}\}\, d\theta$$

$$E(\beta) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - sin^2\beta\, sin^2\theta}\, d\theta \quad F(\beta) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2\beta\, sin^2\theta}}\, d\theta \tag{1.109}$$

tanımları yapılırsa

$$\frac{1}{\sqrt{4RR_1} sin\beta} \left[F(\beta)(-2 + sin^2\beta) + 2E(\beta)\right] \tag{1.110}$$

olarak bulunur. Böylelikle

$$U_R = \frac{4}{(2\pi)^2}\left[\left[H(t-\frac{R_1-R}{c_1})\frac{1}{c_1} - H(t-\frac{R_1+R}{c_1})\frac{1}{c_1}\right][2E(\alpha)-F(\alpha)]\frac{1}{\sqrt{4RR_1}}\right.$$

$$\left. + H(t-\frac{R_1+R}{c_1})\frac{1}{c_1}\frac{1}{\sqrt{4RR_1}sin\beta}\left[F(\beta)(-2+sin^2\beta)+2E(\beta)\right]\right] \quad (1.111)$$

halini alır. Şimdi gerilme bileşenleri hesaplanacaktır. Silindirik kordinatlarda dönel simetrik halde yerdeğiştirme ve gerilme tansörleri bu elastodinamik hal için

$$\epsilon_{RR} = \frac{\partial U_R}{\partial R}$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{U_R}{R}$$

$$t^s_{RR} = \lambda(\epsilon_{RR}+\epsilon_{\theta\theta}) + 2\mu\,\epsilon_{RR}$$

$$t^s_{\theta\theta} = \lambda(\epsilon_{RR}+\epsilon_{\theta\theta}) + 2\mu\,\epsilon_{\theta\theta}$$

olduğundan U_R nin türevini almak yeterlidir.

$$\frac{\partial U_R}{\partial R} = \frac{4}{(2\pi)^2}\{(\delta(t-\frac{R_1-R}{c_1})\frac{1}{c_1^2} + \delta(t-\frac{R_1+R}{c_1})\frac{1}{c_1^2})[2E(\alpha)-F(\alpha)]\frac{1}{\sqrt{4RR_1}}$$

$$-\delta(t-\frac{R_1+R}{c_1})\frac{1}{c_1^2}\frac{1}{\sqrt{4RR_1}sin\beta}\left[F(\beta)(-2+sin^2\beta)+2E(\beta)\right]$$

$$+\left[H(t-\frac{R_1-R}{c_1})\frac{1}{c_1} - H(t-\frac{R_1+R}{c_1})\frac{1}{c_1}\right]\left[\frac{d}{dR}([2E(\alpha)-F(\alpha)]\frac{1}{\sqrt{4RR_1}})\right]$$

$$+H(t-\frac{R_1+R}{c_1})\frac{1}{c_1}\frac{d}{dR}(\frac{1}{\sqrt{4RR_1}sin\beta}\left[F(\beta)(-2+sin^2\beta)+2E(\beta)\right])\} \quad (1.112)$$

Bu ifadede $\delta(t-\frac{R_1-R}{c_1})$ çarpanı $t=\frac{R_1-R}{c_1}$ de düşmez. $\delta(t-\frac{R_1+R}{c_1})$ in çarpanı olan iki terim ise $t=\frac{R_1+R}{c_1}$ de $\alpha_{i,\beta}=\pi/2$ olacağından birbirini yok eder. Böylelikle denklem

$$\frac{\partial U_R}{\partial R} = \frac{4}{(2\pi)^2}\{\delta(t-\frac{R_1-R}{c_1})\frac{1}{c_1^2}\left[2E(\alpha)-F(\alpha)\right]\frac{1}{\sqrt{4RR_1}}$$

$$+(H(t-\frac{R_1-R}{c_1})\frac{1}{c_1}-H(t-\frac{R_1+R}{c_1})\frac{1}{c_1})\frac{d}{dR}([2E(\alpha)-F(\alpha)]\frac{1}{\sqrt{4RR_1}})$$

$$+H(t-\frac{R_1+R}{c_1})\frac{1}{c_1}\frac{d}{dR}(\frac{1}{\sqrt{4RR_1}sin\beta}\left[F(\beta)(-2+sin^2\beta)+2E(\beta)\right])\} \quad (1.113)$$

şeklini alır.

$$I_1 = \frac{d}{dR}([2E(\alpha)-F(\alpha)]\frac{1}{\sqrt{4RR_1}}) = [2E(\alpha)-F(\alpha)]'\frac{1}{\sqrt{4RR_1}}$$

$$+\left[2E(\alpha)-F(\alpha)\right](\frac{1}{\sqrt{4RR_1}})'$$

hesaplanacaktır.

$$(E(\alpha))' = \frac{d}{dR}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-sin^2\alpha\, sin^2\theta}d\theta = \int_0^{\pi/2}\frac{-sin^2\theta}{2\sqrt{1-sin^2\alpha\, sin^2\theta}}d\theta(sin^2\alpha)'$$

$$(sin^2\alpha)' = A = (\frac{c_1^2t^2-(R_1-R)^2}{4RR_1})' = \frac{R_1^2-R^2-c_1^2t^2}{4R^2R_1}$$

$$= \frac{1}{R}(-sin^2\alpha+\frac{1}{2})-\frac{1}{2R_1} \quad (1.114)$$

integrali $sin^2\alpha$ ile çarpıp bölüp paya ± 1 eklenirse

$$= \frac{A}{sin^2\alpha}\int_0^{\pi/2}\frac{1-1-sin^2\alpha\, sin^2\theta}{2\sqrt{1-sin^2\alpha\, sin^2\theta}}d\theta$$

$$= \frac{A}{2sin^2\alpha}\int_0^{\pi/2}\left[\frac{1-sin^2\alpha\, sin^2\theta}{\sqrt{1-sin^2\alpha\, sin^2\theta}}-\frac{1}{\sqrt{1-sin^2\alpha\, sin^2\theta}}\right]d\theta$$

$$(E(\alpha))' = \frac{A}{2sin^2\alpha}(E(\alpha) - F(\alpha)) \tag{1.115}$$

$$(F(\alpha))' = \frac{d}{dR}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2\alpha\, sin^2\theta}}\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{sin^2\theta}{2\sqrt{1 - sin^2\alpha\, sin^2\theta}^3}\, d\theta\, (sin^2\alpha)'$$

integrali $sin^2\alpha$ ile çarpıp bölüp paya ± 1 eklenirse

$$= \frac{A}{2sin^2\alpha}\int_0^{\pi/2} \frac{1 - 1 + sin^2\theta\, sin^2\alpha}{\sqrt{1 - sin^2\alpha\, sin^2\theta}^3}\, d\theta$$

$$= \frac{A}{2sin^2\alpha}\int_0^{\pi/2} \left[-\frac{1 - sin^2\theta\, sin^2\alpha}{\sqrt{1 - sin^2\alpha\, sin^2\theta}^3} + \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2\alpha\, sin^2\theta}^3}\right] d\theta$$

$$= \frac{A}{2sin^2\alpha}\left[-F(\alpha) + \pi(\alpha)\right]$$

$$\pi(\alpha) = \frac{E(\alpha)}{cos^2\alpha} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2\alpha\, sin^2\theta}^3} d\theta \tag{1.116}$$

tanımı yapılırsa

$$(F(\alpha))' = \frac{A}{2sin^2\alpha}\left[-F(\alpha) + \frac{E(\alpha)}{cos^2\alpha}\right] \tag{1.117}$$

olarak bulunur.

$$(\frac{1}{\sqrt{4RR_1}})' = -\frac{2R_1}{\sqrt{4RR_1}^3} = -\frac{1}{\sqrt{4RR_1}}\frac{1}{2R} \tag{1.118}$$

$$[2E(\alpha) - F(\alpha)]' \frac{1}{\sqrt{4RR_1}} + [2E(\alpha) - F(\alpha)]\,(\frac{1}{\sqrt{4RR_1}})'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4RR_1}}\left[\frac{A}{2sin^2\alpha}(2E(\alpha) - 2F(\alpha)) - \frac{A}{2sin^2\alpha}(-F(\alpha) + \frac{E(\alpha)}{cos^2\alpha})\right]$$

$$-\frac{1}{\sqrt{4RR_1}}\frac{1}{2R}\left[2E(\alpha) - F(\alpha)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4RR_1}}\left[\frac{A}{2sin^2\alpha}(2E(\alpha) - F(\alpha) - \frac{E(\alpha)}{cos^2\alpha})\right] - \frac{1}{\sqrt{4RR_1}}\frac{1}{2R}\left[2E(\alpha) - F(\alpha)\right]$$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4RR_1}}\{\frac{1}{R}\left[E(\alpha)(\frac{1}{4cos^2\alpha sin^2\alpha} - 2) + F(\alpha)(1 - \frac{1}{4sin^2\alpha})\right]$$

$$+\frac{1}{R_1}\left[E(\alpha)(\frac{1}{4cos^2\alpha} - \frac{1}{4sin^2\alpha}) + \frac{F(\alpha)}{4sin^2\alpha}\right]\} \tag{1.119}$$

elde edilir.

$$I_2 = \frac{d}{dR}(\frac{1}{\sqrt{4RR_1}sin\beta}\left[F(\beta)(-2 + sin^2\beta) + 2E(\beta)\right])$$

$$= \frac{d}{dR}\int_0^{\pi/2} \frac{cos2\theta}{\sqrt{c_1^2t^2 - (R_1 - R)^2 - 4RR_1sin^2\theta}}\, d\theta$$

hesaplanacaktır.

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{cos2\theta(R - R_1cos2\theta)}{\sqrt{c_1^2t^2 - (R_1 - R)^2}^3\sqrt{1 - \frac{4RR_1sin^2\theta}{c_1^2t^2 - (R_1 - R)^2}}^3}\, d\theta$$

$$sin\beta = \frac{4RR_1}{c_1^2t^2 - (R_1 - R)^2}$$

olduğu anımsanırsa

$$I_2 = \frac{sin^3\beta}{\sqrt{4RR_1}^3}\int_0^{\pi/2} \frac{cos2\theta(R - R_1cos2\theta)}{\sqrt{1 - sin^2\beta\, cos^2\beta}^3}\, d\theta$$

$$I_2 = \frac{R\, sin^3\beta}{\sqrt{4RR_1}^3}\int_0^{\pi/2} \frac{cos2\theta}{\sqrt{1 - sin^2\beta\, cos^2\beta}^3}\, d\theta - \frac{R_1sin^3\beta}{\sqrt{4RR_1}^3}\int_0^{\pi/2} \frac{(cos2\theta)^2}{\sqrt{1 - sin^2\beta\, cos^2\beta}^3}\, d\theta$$

olarak elde edilir. İlk integral hesaplanırsa

$$A = \frac{R\, sin^3\beta}{\sqrt{4RR_1}^3}\int_0^{\pi/2} \frac{cos2\theta}{\sqrt{1 - sin^2\beta\, cos^2\beta}^3}\, d\theta = \frac{R\, sin\beta}{\sqrt{4RR_1}^3}\int_0^{\pi/2} \frac{(1 - 2sin^2\theta)sin^2\beta}{\sqrt{1 - sin^2\beta\, cos^2\beta}^3}\, d\theta$$

$$X = \frac{R\, sin\beta}{\sqrt{4RR_1}^3} = \frac{sin\beta}{4R_1\sqrt{4RR_1}} \tag{1.120}$$

denirse $\pi(\beta)$, $E(\beta)$ ve $F(\beta)$ değerlerini kullanıp gerekli işlemler yapılarak A integrali

$$A = X\ sin^2\beta\ \pi(\beta) + 2X(-\pi(\beta) + F(\beta)) = X(E(\beta)(\frac{sin^2\beta}{cos^2\beta} - \frac{2}{cos^2\beta}) + 2F(\beta))$$

$$A = \frac{sin\beta}{\sqrt{4RR_1}}\frac{1}{R_1}\left[E(\beta)(\frac{sin^2\beta}{4cos^2\beta} - \frac{-1}{2cos^2\beta}) + \frac{F(\beta)}{2}\right] \tag{1.121}$$

olarak bulunur.I_2 denklemindeki ikinci integral

$$B = -\frac{R_1 sin^3\beta}{\sqrt{4RR_1}^3}\int_0^{\pi/2}\frac{(cos2\theta)^2}{\sqrt{1 - sin^2\beta\ cos^2\beta}^3}\ d\theta$$

$$= -\frac{R_1}{\sqrt{4RR_1}^3 sin\beta}\int_0^{\pi/2}\frac{(cos2\theta)^2 sin^4\beta}{\sqrt{1 - sin^2\beta\ cos^2\beta}^3}\ d\theta$$

$$Y = -\frac{R_1}{\sqrt{4RR_1}^3 sin\beta} = -\frac{1}{4R\sqrt{4RR_1}^3 sin\beta} \tag{1.122}$$

denirse $\pi(\beta)$, $E(\beta)$ ve $F(\beta)$ değerlerini kullanıp gerekli işlemler yapılarak B integrali

$$B = Y\left[E(\beta)(\frac{sin^4\beta}{cos^2\beta} - \frac{4sin^2\beta}{cos^2\beta} + \frac{4}{cos^2\beta} + 4) + F(\beta)(4sin^2\beta - 8)\right]$$

$$B = Y\left[E(\beta)(\frac{sin^4\beta}{cos^2\beta} + 8) + F(\beta)(4sin^2\beta - 8)\right]$$

$$B = \frac{sin\beta}{\sqrt{4RR_1}}\frac{1}{R}\left[E(\beta)(\frac{-sin^2\beta}{4cos^2\beta} - \frac{2}{sin^2\beta}) + F(\beta)(-1 + \frac{2}{sin^2\beta})\right] \tag{1.123}$$

olarak bulunur. Elde edilen A ve B değerleri toplanırsa I_2 denklemi

$$I_2 = \frac{sin\beta}{\sqrt{4RR_1}}\{\frac{1}{R}\left[E(\beta)(\frac{-sin^2\beta}{4cos^2\beta} - \frac{2}{sin^2\beta}) + F(\beta)(-1 + \frac{2}{sin^2\beta})\right]$$

$$+\frac{1}{R_1}\left[E(\beta)(\frac{sin^2\beta}{4cos^2\beta}-\frac{-1}{2cos^2\beta})+\frac{F(\beta)}{2}\right]\} \tag{1.124}$$

Bulunan I_1 ve I_2değerleri kullanılarak $\frac{\partial U}{\partial R}$

$$\frac{\partial U}{\partial R}=\frac{4}{(2\pi)^2}\{\delta(t-\frac{R_1-R}{c_1})\frac{1}{c_1^2}\left[2E(\alpha)-F(\alpha)\right]\frac{1}{\sqrt{4RR_1}}$$

$$+\left[H(t-\frac{R_1-R}{c_1})\frac{1}{c_1}-H(t-\frac{R_1+R}{c_1})\right]\frac{1}{\sqrt{4RR_1}}\{\frac{1}{R}\left[E(\alpha)(\frac{1}{4cos^2\alpha sin^2\alpha}-2)\right.$$

$$\left.+F(\alpha)(1-\frac{1}{4sin^2\alpha})\right]+\frac{1}{R_1}\left[E(\alpha)(\frac{1}{4cos^2\alpha}-\frac{1}{4sin^2\alpha})+\frac{F(\alpha)}{4sin^2\alpha}\right]\}$$

$$+H(t-\frac{R_1+R}{c_1})\frac{sin\beta}{\sqrt{4RR_1}}\{\frac{1}{R}\left[E(\beta)(\frac{-sin^2\beta}{4cos^2\beta}-\frac{2}{sin^2\beta})+F(\beta)(-1+\frac{2}{sin^2\beta})\right]$$

$$+\frac{1}{R_1}\left[E(\beta)(\frac{sin^2\beta}{4cos^2\beta}-\frac{1}{2cos^2\beta})+\frac{F(\beta)}{2}\right]\}\} \tag{1.125}$$

olarak bulunur. Böylelikle ϵ_{RR},$\epsilon_{\theta\theta}$,t^s_{RR} ve $t^s_{\theta\theta}$ yerdeğiştirme ve gerilme tansörleri rahatlıkla bulunur.

2. ÖRNEK PROBLEMLER

2.1 Örnek Problem 1: Delik Yüzeyine Etkiyen İç Basıncın Sabit Olması Hali

Problemle ilgili bölge yarıçapı a olan silindirik bir boşluk içeren, sonsuz bir elastik ortamdır. $t = 0$ da sabit bir $p(t)$ basıncı küresel boşluğun sınırına yüklenip bırakılmaktadır. Çözümde (R, θ, Z) koordinatları kullanılacaktır. Sınır $R = a$ olarak tanımlanır ve bu dış normali $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{e}_R$ dir. Problemde gerilme tansörü ve yerdeğiştirme vektörü:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{RR} & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{zz} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{u} = u_R \boldsymbol{e}_R \tag{2.2}$$

olarak yazılırlar ve bütün bileşenler sadece R ve t nin fonksiyonudurlar. $\boldsymbol{u}(t, R)$ ve $\boldsymbol{\tau}(t, R)$ çifti bir $S(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\tau})$ elastodinamik hali tanımlar. S hali ve S' elastodinamik hali için yüzey gerilmesi vektörleri

$$T_R(t, a) = p(t) H^+(t) \tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{T}'(t, a) = T'_R(t, a)\boldsymbol{e}_R = \boldsymbol{\tau}'(t, a) \cdot \boldsymbol{n} = -\boldsymbol{\tau}'(t, a)\boldsymbol{e}_R = -\tau_{RR}(t, a)\boldsymbol{e}_R$$

$$\Rightarrow T'_R(t, a) = -\tau'_{RR} \tag{2.4}$$

şeklindedir. Burada $H^+(t)$, $[0, \infty)$ aralığında bire eşit ve bütün türevleri sıfır olan bir fonksiyon olarak seçilmiştir. İlave olarak her $R \in [a, \infty)$ için

$$u_R(0, R) = 0 \tag{2.5}$$

olacaktır. S ve S' halleri arasında yazılan dinamik karşıtlık teoremi aşağıdaki formu alır.

$$\int_S \boldsymbol{T}'(t,a) * \boldsymbol{u}(t,a) dS = \int_S \boldsymbol{T}(t,a) * \boldsymbol{u}'(t,a) dS \tag{2.6}$$

Dinamik karşıtlık teoreminde $\boldsymbol{f} = 0$ olduğu için f' de bölge dışında olduğu için hacim integralleri bulunmaz.

$$\boldsymbol{T}(t,a) = p(t) H^+(t) \boldsymbol{e}_R, \tag{2.7}$$

$$\boldsymbol{T}'(t,a) = \tau'(t,a)\boldsymbol{n} = -\tau'(t,a)\boldsymbol{e}_R = -\tau'_{RR}(t,a)\boldsymbol{e}_R \tag{2.8}$$

$S[\boldsymbol{u}', \boldsymbol{\tau}']$ elastodinamik halinde yükleme $t = 0$ anında yapılmıştı Bu zamanı $t = -\frac{a}{c_1}$ e çekersek (1.60) arası ifadelerde t yerine $t + \frac{a}{c_1}$ koymak yeterlidir. Bu durumda (2.6) deki karşıtlık toremi

$$\int_S \boldsymbol{T}' * \boldsymbol{u} \ dS = \int_S \boldsymbol{\tau}'_{RR} * \boldsymbol{u}_R \ dS = \int_S p(t) H(t) * \boldsymbol{u}'_R \ dS \tag{2.9}$$

formu alır. Bu denklem $\boldsymbol{T}'_{RR}$ ve $\boldsymbol{u}'_R$ nin (1.56) (1.62) arası verilen ifadeleri kullanılarak

$$-\int_0^t \{(\frac{\lambda + 2\mu}{c_1})(H(t-\tau)g_0(t-\tau) + \delta(t-\tau)\frac{g_1}{c_1}(t-\tau) + \delta^{\cdot}(t-\tau)\frac{g_2}{c_1^2}(t-\tau))$$

$$+\frac{\lambda}{c_1}(H(t-\tau)f_0(t-\tau) + \delta(t-\tau)f_1(t-\tau))\}\boldsymbol{u}_R(a,\tau)d\tau$$

$$= \int_0^t \frac{a}{c_1}(H(t-\tau)f_0(t-\tau) + \frac{\delta(t-\tau)}{c_1}f_1(t-\tau)) * H^+(\tau)p(\tau)d\tau \tag{2.10}$$

Burada

$$g_0(t) = (-\frac{1}{\sqrt{c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2 - a^2}^3} - \frac{3a^2}{\sqrt{c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2 - a^2}^5})$$

$$g_1(t) = \frac{2a}{\sqrt{c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2 - a^2}^3}$$

$$g_2(t) = -\frac{1}{\sqrt{c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2 - a^2}}$$

$$f_0(t) = -\frac{1}{\sqrt{c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2 - a^2}^3}$$

$$f_1(t) = \frac{1}{a\sqrt{c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2 - a^2}}$$

(2.10) denklemindeki $\delta^{\cdot}(t-\tau)$ lu terim

$$\int_0^t \delta^{\cdot}(t-\tau)\frac{g_2(t-\tau)}{c_1^2}u(\tau)d\tau = -\delta(t-\tau)\frac{g_2(t-\tau)}{c_1^2}u(\tau))|_0^t$$

$$+\int_0^t \delta(t-\tau)\frac{1}{c_1^2}(-g_2^{\cdot}(t-\tau)u(\tau) + g_2(t-\tau)u^{\cdot}(\tau))d\tau \qquad (2.11)$$

(2.10) denklemine yerleştirilirse sağ tarafta kalan denklem

$$\frac{\lambda+2\mu}{c_1}\delta(t-\tau)\frac{g_2(t-\tau)}{c_1^2}u(\tau)|_0^t - \int_0^t \{(\frac{\lambda+2\mu}{c_1})(H(t-\tau)g_0(t-\tau)u(\tau)$$

$$+\delta(t-\tau)\frac{1}{c_1}(u(\tau)(g_1(t-\tau) - \frac{g_2^{\cdot}(t-\tau)}{c_1}) + u^{\cdot}(\tau)\frac{g_2(t-\tau)}{c_1})$$

$$+\frac{\lambda}{c_1}(H(t-\tau)f_0(t-\tau)u(\tau) + \frac{\delta(t-\tau)}{c_1}f_1(t-\tau)u(\tau))\}d\tau \qquad (2.12)$$

olur. Şimdi $\delta(t-\tau)$ lu terimleri integral dışına çıkaralım:

$$\frac{\lambda+2\mu}{c_1}(\delta(t-\tau)\frac{g_2(t-\tau)}{c_1^2}u(\tau)+H(t-\tau)((\frac{g_1(t-\tau)}{c_1}-\frac{\dot{g_2}(t-\tau)}{c_1^2})u(\tau)$$

$$+\frac{g_2(t-\tau)}{c_1}\frac{\dot{u}(\tau)}{c_1}))|_0^t+\frac{\lambda}{c_1}(H(t-\tau)\frac{1}{c_1}f_1(t-\tau)u(\tau))$$

$$-\int_0^t((\frac{\lambda+2\mu}{c_1})(H(t-\tau)(u(\tau)(g_0(t-\tau)-\frac{\dot{g_1}(t-\tau)}{c_1}+\frac{\ddot{g_2}(t-\tau)}{c_1^2})$$

$$+\frac{\dot{u}(\tau)}{c_1}(g_1(t-\tau)-\frac{2\dot{g_2}(t-\tau)}{c_1})+\frac{\ddot{u}(t-\tau)}{c_1^2}g_2(t-\tau))$$

$$+\frac{\lambda}{c_1}(H(t-\tau)(u(\tau)(f_0(t-\tau)-\frac{\dot{f_1}(t-\tau)}{c_1})+\dot{u}(\tau)\frac{1}{c_1}f_1(t-\tau))$$

$$=\frac{a}{c_1^2}(-H(t-\tau)f_1(t-\tau)p(t))+\int_0^t H(t-\tau)(f_0(t-\tau)+\frac{f_1(t-\tau)}{c_1})p(\tau) \quad (2.13)$$

İntegral içindeki ilk terim:

$$g_0(t)-\frac{\dot{g_1}(t)}{c_1}+\frac{g_2(t)^{\cdot\cdot}}{c_1^2}=-\frac{3c_1^2t^2}{\sqrt{c_1^2(t+\frac{a}{c_1})-a^2}^5}$$

u nun katsayısı $-(\frac{\lambda+2\mu}{c_1})$ li terimde u nun katsayısıdır. İkinci terim:

$$g_1(t)-\frac{2\dot{g_2}(t)}{c_1}=-\frac{2c_1t}{\sqrt{c_1^2(t+\frac{a}{c_1})-a^2}^3}$$

$-(\frac{\lambda+2\mu}{c_1})$ li terimde $\frac{\dot{u}}{c_1}$ nın katsayısıdır. Üçüncü terim:

$$g_2(t)=-\frac{1}{\sqrt{c_1^2(t+\frac{a}{c_1})-a^2}}$$

$-(\frac{\lambda+2\mu}{c_1})$ li terimde $\frac{\ddot{u}}{c_1}$ nın katsayısıdır. Dördüncü terim:

$$f_0(t)-\frac{\dot{f_1}(t)}{c_1}=\frac{c_1t}{a\sqrt{c_1^2(t+\frac{a}{c_1})-a^2}^3}$$

$-\frac{\lambda}{c_1}$ li terimde u nun katsayısıdır. Beşinci terim:

$$f_1(t) = \frac{1}{a\sqrt{c_1^2(t+\frac{a}{c_1}) - a^2}} \tag{2.14}$$

$-\frac{\lambda}{c_1}$ li terimde $\frac{u^{\cdot}}{c_1}$ nın katsayısıdır. Şimdi integral dışındaki terimleri hesaplayalım. $\frac{\lambda+2\mu}{c_1}$ in çarpanındaki birinci terim

$$T_1 = \delta(t-\tau)\frac{g_2(t-\tau)}{c_1^2}u(\tau)|_0^t = \delta(t-\tau)\frac{1}{c_1^2}(-\frac{1}{\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2 - a^2}})u(\tau)|_0^t$$

$$= \delta(0)\frac{1}{c_1^2}(-\frac{1}{\sqrt{0}})u(t) - \delta(t)\frac{1}{c_1^2}(\frac{1}{\sqrt{c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2 - a^2}})u(0) \tag{2.15}$$

İlk terim $\frac{0}{0}$ olur. Türevi alınırsa ilk terimin sonucu 0 olarak bulunur. İkinci terim $u(0) = 0$ olduğu için düşer. $\frac{\lambda+2\mu}{c_1}$ in çarpanındaki ikinci terim

$$T_2 = H(t-\tau)((\frac{g_1(t-\tau)}{c_1} - \frac{g_2^{\cdot}(t-\tau)}{c_1^2})u(\tau) + \frac{g_2(t-\tau)}{c_1}\frac{u^{\cdot}(\tau)}{c_1})|_0^t$$

$$\frac{g_1(t)}{c_1} - \frac{g_2^{\cdot}(t)}{c_1^2} = \frac{2a}{c_1\sqrt{c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2 - a^2}^3} - \frac{t+\frac{a}{c_1}}{\sqrt{c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2 - a^2}^3}$$

$$= \frac{1}{c_1\sqrt{c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2 - a^2}^3}(-c_1 t + a)$$

$$T_2 = H(t-\tau)(u(\tau)\frac{1}{c_1\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2 - a^2}^3}(a - c_1(t-\tau))$$

$$+\frac{u^{\cdot}(\tau)}{c_1}(-\frac{1}{c_1\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2 - a^2}}))|_0^t$$

$\tau = t$ de ilk terim yine $\frac{0}{0}$ olur. İki kere türevi alınırsa $\tau = 0$ da ilk terim 0 olarak bulunur. Böylelikle T_2 terimi $\tau = 0$ da

$$T_2 = -H(t)\{\frac{u(0)}{c_1\sqrt{c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2 - a^2}}(a - c_1 t) + \frac{1}{c_1}(-\frac{u^{\cdot}(0)}{c_1\sqrt{c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2 - a^2}})\} \quad (2.16)$$

olarak bulunur. Dışarıdaki üçüncü terim $\frac{\lambda}{c_1}$ çarpanı:

$$T_3 = H(t-\tau)\frac{1}{c_1}f_1(t-\tau)u(\tau)|_0^t = H(t-\tau)\frac{1}{c_1}\frac{u(\tau)}{a\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2 - a^2}}|_0^t \quad (2.17)$$

$$= H(0)\frac{1}{c_1}\frac{1}{a\sqrt{0}}u(t) - H(t)\frac{1}{c_1}\frac{1}{a\sqrt{c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2 - a^2}}u(0) \quad (2.18)$$

ilk terim $\frac{0}{0}$ olur. Türev alınırsa ilk terim 0 olarak bulunur. Böylelikle

$$T_3 = -H(t)\frac{1}{c_1}\frac{1}{a\sqrt{c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2 - a^2}}u(0) \quad (2.19)$$

olarak bulunur. Şimdi denklemin sağ tarafını inceleyelim:

$$S = \int_0^t \frac{a}{c_1}(H(t-\tau)f_0(t-\tau) + \frac{\delta(t-\tau)}{c_1}f_1(t-\tau))H^+(\tau)p(\tau)d\tau \quad (2.20)$$

$$= \frac{a}{c_1}(-H(t-\tau)\frac{1}{c_1}f_1(t-\tau)p(\tau))H^+(\tau)|_0^t + \int_0^t (H(t-\tau)f_0(t-\tau)p(\tau)H^+(\tau)$$

$$+H(t-\tau)(-\frac{1}{c_1}f_1'(t-\tau)p(\tau)H^+(\tau)) + \frac{1}{c_1}f_1(t-\tau)p'(\tau)H^+(\tau))d\tau)$$

Dışarıdaki terim $(\frac{a}{c_1})$ in çarpanı

$$T_4 = H(t-\tau)\frac{1}{c_1}\frac{1}{a\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2 - a^2}}p(\tau))H^+(\tau)|_0^t \quad (2.21)$$

$$T_4 = H(0)\frac{1}{c_1}\frac{1}{a\sqrt{0}}p(t)H^+(t) - H(t)\frac{1}{c_1}\frac{1}{a\sqrt{c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2 - a^2}}p(0) \quad (2.22)$$

ilk terim $\frac{0}{0}$ olur. Türev alınırsa ilk terim 0 olarak bulunur. Böylelikle

$$T_4 = -H(t)\frac{1}{c_1}\frac{1}{a\sqrt{c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2 - a^2}}p(0) \tag{2.23}$$

olarak bulunur. İntegralde kalan terim

$$T_5 = \frac{a}{c_1}\int_0^t (H(t-\tau)f_0(t-\tau)p(\tau))H^+(\tau) + H(t-\tau)(-\frac{1}{c_1}f_1^{\cdot}(t-\tau)p(\tau)H^+(\tau)$$

$$+\frac{1}{c_1}f_1(t-\tau)p(\tau)^{\cdot}H^+(\tau))d\tau$$

$$T_5 = \frac{a}{c_1}\int_0^t \{H(t-\tau)(p(\tau)(\frac{c_1(t-\tau)}{a\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2 - a^2}^3})$$

$$+\frac{p'(\tau)}{c_1}(\frac{1}{a\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2 - a^2}}))\}d\tau$$

Sağ taraftaki denklem

$$S = \frac{a}{c_1}H(t)\frac{1}{c_1}\frac{1}{a\sqrt{c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2 - a^2}}p(0)$$

$$+\frac{a}{c_1}\int_0^t \{H(t-\tau)(p(\tau)(\frac{c_1(t-\tau)}{a\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2 - a^2}^3})$$

$$+\frac{p'(\tau)}{c_1}(\frac{1}{a\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2 - a^2}}))\}d\tau \tag{2.24}$$

olarak bulunur. Genel denklem

$$G = \frac{\lambda+2\mu}{c_1}\{\delta(t)\frac{1}{c_1^2}\frac{1}{\sqrt{c_1^2(t-\frac{a}{c_1})^2 - a^2}}u(0) + H(t)(\frac{1}{c_1}\frac{u(0)}{\sqrt{c_1^2(t-\frac{a}{c_1})^2 - a^2}^3}(-a+c_1t)$$

$$+\frac{u^{\cdot}(0)}{c_1}(\frac{1}{c_1\sqrt{c_1^2(t-\frac{a}{c_1})^2-a^2}}))\}+\frac{\lambda}{c_1}\{-H(t)u(0)\frac{1}{c_1\sqrt{c_1^2(t-\frac{a}{c_1})^2-a^2}}\}$$

$$+\int_0^t\{\frac{\lambda+2\mu}{c_1}H(t-\tau)(u(\tau)\frac{3c_1^2t^2}{\sqrt{c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2-a^2}^5}+\frac{u^{\cdot}(\tau)}{c_1}\frac{2c_1(t)}{\sqrt{c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2-a^2}^3}$$

$$+\frac{u^{\cdot\cdot}(\tau)}{c_1^2}\frac{1}{\sqrt{c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2-a^2}})+\frac{\lambda}{c_1}H(t-\tau)(u(\tau)(-\frac{c_1(t)}{a\sqrt{c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2-a^2}^3})$$

$$+\frac{u^{\cdot}(\tau)}{c_1}(-\frac{1}{a\sqrt{c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2-a^2}}))\}d\tau=\frac{a}{c_1}H(t)\frac{1}{c_1}\frac{1}{a\sqrt{c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2-a^2}}p(0)$$

$$+\frac{a}{c_1}\int_0^t\{H(t-\tau)(p(\tau)(\frac{c_1(t-\tau)}{a\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2}^3})$$

$$+\frac{p'(\tau)}{c_1}(\frac{1}{a\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2}}))\}d\tau \tag{2.25}$$

integral dışındaki terimler, $u(0)=0$ alınması durumunda:

$$\frac{\lambda+2\mu}{c_1}\{H(t)\frac{u^{\cdot}(0)}{c_1}(\frac{1}{c_1\sqrt{c_1^2(t-\frac{a}{c_1})^2-a^2}}))\}-\frac{a}{c_1}H(t)\frac{1}{c_1}\frac{1}{a\sqrt{c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2-a^2}}p(0)$$

Bu terimin 0 olması için

$$\frac{\lambda+2\mu}{c_1}\frac{1}{c_1^2}u^{\cdot}(0)=\frac{1}{c_1^2}p(0)$$

$$u^{\cdot}(0)=\frac{p(0)c_1}{\lambda+2\mu}$$

olarak bulunur. Kalan denklem:

$$\int_0^t(\frac{\lambda+2\mu}{c_1})H(t-\tau)(u(\tau)\frac{3c_1^2(t-\tau)^2}{\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2}^5}+\frac{u^{\cdot}(\tau)}{c_1}\frac{2c_1(t-\tau)}{\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2}^3}$$

$$+\frac{u^{\cdot\cdot}(\tau)}{c_1^2}\frac{1}{\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2}})d\tau+\int_0^t\frac{\lambda}{c_1}H(t-\tau)$$

$$(u(\tau)(-\frac{c_1(t-\tau)}{a\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2}^3})-\frac{u^{\cdot}(\tau)}{c_1}(\frac{1}{a\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2}}))d\tau$$

$$=\frac{a}{c_1}\int_0^t\{H(t-\tau)(p(\tau)(\frac{c_1(t-\tau)}{a\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2}^3})$$

$$+\frac{p'(\tau)}{c_1}(\frac{1}{a\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2}}))\}d\tau \tag{2.26}$$

Aşağıdaki $I(t)$ integrali

$$I(t)=\int_0^t H(t-\tau)f(t,\tau)d\tau=\int_0^t H(t-\tau)g'(\tau)d\tau=H(t-\tau)g(\tau)\mid_0^t$$

$$+\int_0^t\delta(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

$$=H(0)g(t)-H(t)g(0)-\int_t^0\delta(u)g(t-u)\,d\tau$$

$$=H(0)g(t)-H(t)g(0)+\int_0^t\delta(u)g(t-u)\,d\tau$$

$$=H(0)g(t)-H(t)g(0)+lim_{u\to0}\left[H(t-u)-H(-u)\right]g(t-u)$$

$$=H(0)g(t)-H(t)g(0)+\left[H(t)-H(0)\right]g(t)$$

$$=H(t)\left[g(t)-g(0)\right]=H(t)\int_0^t g'(\tau)d\tau \tag{2.27}$$

şeklinde tanımlanırsa denklem

$$\int_0^t(\frac{\lambda+2\mu}{c_1})(u(\tau)\frac{3c_1^2(t-\tau)^2}{\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2}^5}+\frac{u^{\cdot}(\tau)}{c_1}\frac{2c_1(t-\tau)}{\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2}^3}$$

$$+\frac{u^{\cdot\cdot}(\tau)}{c_1^2}\frac{1}{\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2}})d\tau+\int_0^t\frac{\lambda}{c_1}(u(\tau)(-\frac{c_1(t-\tau)}{a\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2}^3})$$

$$-\frac{u^{\cdot}(\tau)}{c_1}(\frac{1}{a\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2}}))d\tau=\frac{a}{c_1}\int_0^t\{(p(\tau)(\frac{c_1(t-\tau)}{a\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2}^3})$$

$$+\frac{p'(\tau)}{c_1}(\frac{1}{a\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2}}))\}d\tau \tag{2.28}$$

olarak bulunur.

$$u'(a,0)=\frac{c_1}{\lambda+2\mu}p(0)$$

olduğuna göre

$$t^*=\frac{c_1t}{a}$$

yazılırsa

$$t=\frac{at^*}{c_1}$$

elde edilir. Ayrıca

$$u^*=\frac{2\mu}{ap_0}u$$

olarak tanımlanırsa

$$u=\frac{u^*ap_0}{2\mu} \tag{2.29}$$

olarak bulunur. Şimdi t ve u ana denkleme yerleştirilirse

$$\int_0^{t^*}(\frac{\lambda+2\mu}{c_1})(\frac{ap_0}{2\mu}u^*\frac{3a^2(t^*-\tau^*)^2}{a^5\sqrt{(t^*-\tau^*+1)^2-1}^5}$$

$$+\frac{u^{\cdot *}(\tau^*)}{c_1}\frac{ap_0}{2\mu}\frac{c_1}{a}\frac{2a(t^*-\tau^*)}{a^3\sqrt{(t^*-\tau^*+1)^2-1}^3}$$

$$+\frac{u^{\cdot\cdot *}(\tau^*)}{c_1^2}\frac{c_1^2}{a^2}\frac{ap_0}{2\mu}\frac{1}{a\sqrt{(t^*-\tau^*+1)^2-1}})d\tau^*\frac{a}{c_1}$$

$$+\frac{\lambda}{c_1}\int_0^{t*}(-u^*(\tau^*)\frac{ap_0}{2\mu}\frac{a(t^*-\tau^*)}{a^4\sqrt{(t^*-\tau^*+1)^2-1}^3})$$

$$-\frac{u^{\cdot *}(\tau^*)}{c_1}\frac{ap_0}{2\mu}\frac{c_1}{a}\frac{1}{c_1}\frac{1}{a^2\sqrt{(t^*-\tau^*+1)^2-1}})d\tau^*\frac{a}{c_1}$$

$$=\frac{a}{c_1}\int_0^{t^*}(p(\tau^*)(\frac{a(t^*-\tau^*)}{a^4\sqrt{(t^*-\tau^*+1)^2-1}^3})$$

$$+\frac{p'(\tau^*)}{c_1}\frac{c_1}{a}(\frac{1}{a^2\sqrt{(t^*-\tau^*+1)^2-1}}))d\tau^* \tag{2.30}$$

şeklinde elde edilir. (2.30) numaralı denklem sistemine $p(t^*)=p_0$ sabit basıncı uygulandığında $p'=0$ olur. Böylelikle denklem sisteminde eşitlikten sonra gelen integrallerden ilki gerekli işlemler yapıldığında

$$\frac{a}{c_1}\int_0^t p(\tau)\frac{c_1(t-\tau)}{a\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2}^3}d\tau=\frac{p_0}{c_1^2a}\frac{\sqrt{c_1t}}{\sqrt{c_1t+2a}}=\frac{p_0}{c_1^2a}\frac{\sqrt{t^*}}{\sqrt{t^*+2}}$$

olarak bulunur. İkinci integral ise $p'=0$ olduğundan düşer. Sonuçta denklem sistemi

$$\frac{\lambda+2\mu}{2\mu}\int_0^{t^*}(u^*(\tau^*)\frac{3(t^*-\tau^*)^2}{\sqrt{(t^*-\tau^*+1)^2-1}^5}+u^{\cdot *}(\tau^*)\frac{2(t^*-\tau^*)}{\sqrt{(t^*-\tau^*+1)^2-1}^3}$$

$$+u^{\cdot\cdot *}(\tau^*)\frac{1}{\sqrt{(t^*-\tau^*+1)^2-1}})d\tau^* + \frac{\lambda}{2\mu}\int_0^{t*}(-u^*(\tau^*)\frac{(t^*-\tau^*)}{\sqrt{(t^*-\tau^*+1)^2-1}^3})$$

$$-u^{\cdot *}(\tau^*)\frac{1}{\sqrt{(t^*-\tau^*+1)^2-1}}))d\tau^* = \frac{\sqrt{t^*}}{\sqrt{t^*+2}} \tag{2.31}$$

olarak bulunur. Zamanı ΔT zaman dilimlerine bölüp $u^{*\text{`}}$ ı bu aralıklarda ikinci derece eğrisi olarak alalım. Ayrıca bir aralıktan diğerine geçerken fonksiyon ve birinci türevi sürekli olsun. Bir aralıkta başlangıç zamanı t_i bitiş zamanı t_{i+1} ve $u(t_i) = u_i$, $u(t_{i+1}) = u_{i+1}$, $u^{\cdot}(t_i) = u_i^{\cdot}$ alınırsa $[t_i, t_{i+1}]$ aralığında u fonksiyonu

$$u^* = \left[\frac{u_{i+1}^* - u_i^*}{\Delta t^2} - \frac{u_i^{*\cdot}}{\Delta t}\right](t^* - t_i^*)^2 + u_i^{*\cdot}(t^* - t_i^*) + u_i^*$$

$$t_i^* \le t^* \le t_{i+1}^*,\ \Delta t^* = t_{i+1}^* - t_i^* \tag{2.32}$$

şeklinde ifade edilir. $t = t_{n+1}$ olduğu zaman integral n aralık üzerinde alınmaktadır ve $t_1 = 0$ dır. Böylelikle (2.31) denklemi

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda+2\mu}{2\mu}(\int_{t_i}^{t_{i+1}}(\left[\frac{u_{i+1}^*-u_i^*}{\Delta t^2} - \frac{u_i^{*\cdot}}{\Delta t}\right]\frac{3(t_{n+1}^*-\tau^*)^2}{\sqrt{(t_{n+1}^*-\tau^*+1)^2-1}^5}(\tau^*-t_i^*)^2$$

$$+u_i^{*\cdot}\frac{3(t_{n+1}^*-\tau^*)^2}{\sqrt{(t_{n+1}^*-\tau^*+1)^2-1}^5}(\tau^*-t_i^*) + u_i^*\frac{3(t_{n+1}^*-\tau^*)^2}{\sqrt{(t_{n+1}^*-\tau^*+1)^2-1}^5}$$

$$+\left[\frac{u_{i+1}^*-u_i^*}{\Delta t^2} - \frac{u_i^{*\cdot}}{\Delta t}\right]2(\tau^*-t_i^*)\frac{2(t_{n+1}^*-\tau^*)}{\sqrt{(t_{n+1}^*-\tau^*+1)^2-1}^3}$$

$$+u_i^{*\cdot}\frac{2(t_{n+1}^*-\tau^*)}{\sqrt{(t_{n+1}^*-\tau^*+1)^2-1}^3}$$

$$\left[\frac{u_{i+1}^*-u_i^*}{\Delta t^2} - \frac{u_i^{*\cdot}}{\Delta t}\right]\frac{2}{\sqrt{(t_{n+1}^*-\tau^*+1)^2-1}})d\tau^*)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda}{2\mu}(-\int_{t_i}^{t_{i+1}}(\left[\frac{u_{i+1}^*-u_i^*}{\Delta t^2} - \frac{u_i^{*\cdot}}{\Delta t}\right](\tau^*-t_i^*)^2\frac{(t_{n+1}^*-\tau^*)}{\sqrt{(t_{n+1}^*-\tau^*+1)^2-1}^3}$$

$$+u_i^{*\cdot}(\tau^*-t_i^*)\frac{(t_{n+1}^*-\tau^*)}{\sqrt{(t_{n+1}^*-\tau^*+1)^2-1}^3}+u_i^*\frac{(t_{n+1}^*-\tau^*)}{\sqrt{(t_{n+1}^*-\tau^*+1)^2-1}^3}$$

$$\left[\frac{u_{i+1}^*-u_i^*}{\Delta t^2}-\frac{u_i^{*\cdot}}{\Delta t}\right]2(\tau^*-t_i^*)\frac{1}{\sqrt{(t^*-\tau^*+1)^2-1}}$$

$$u_i^*\frac{1}{\sqrt{(t^*-\tau^*+1)^2-1}})d\tau^*)=\frac{\sqrt{t_{n+1}^*}}{\sqrt{t_{n+1}^*+2}} \tag{2.33}$$

şeklini alır. Şimdi birinci integralde $\frac{\lambda+2\mu}{2\mu}$ katsayılı terimde u_{i+1}^* in katsayısı

$$K_1(i,n)=\int_{t_i}^{t_{i+1}}\frac{1}{(t_{i+1}^*-t_i^*)^2}(\frac{3(t_{n+1}^*-\tau^*)^2}{\sqrt{(t_{n+1}^*-\tau^*+1)^2-1}^5}(\tau^*-t_i^*)^2)$$

$$+\frac{4(t_{n+1}^*-\tau^*)}{\sqrt{(t_{n+1}^*-\tau^*+1)^2-1}^3}(\tau^*-t_i^*)+\frac{2}{\sqrt{(t_{n+1}^*-\tau^*+1)^2-1}})d\tau^*,$$

u_i^* in katsayısı

$$K_2(i,n)=\int_{t_i}^{t_{i+1}}(-\frac{1}{(t_{i+1}^*-t_i^*)^2}\frac{3(t_{n+1}^*-\tau^*)^2}{\sqrt{(t_{n+1}^*-\tau^*+1)^2-1}^5}(\tau^*-t_i^*)^2$$

$$-\frac{1}{(t_{i+1}^*-t_i^*)^2}\frac{4(t_{n+1}^*-\tau^*)}{\sqrt{(t_{n+1}^*-\tau^*+1)^2-1}^3}(\tau^*-t_i^*)$$

$$-\frac{2}{(t_{i+1}^*-t_i^*)^2}\frac{1}{\sqrt{(t_{n+1}^*-\tau^*+1)^2-1}}$$

$$+\frac{3(t_{n+1}^*-\tau^*)^2}{\sqrt{(t_{n+1}^*-\tau^*+1)^2-1}^5})d\tau^*,$$

$u_i^{*\cdot}$ in katsayısı

$$K_3(i,n)=\int_{t_i}^{t_{i+1}}(-\frac{1}{(t_{i+1}^*-t_i^*)}\frac{3(t_{n+1}^*-\tau^*)^2}{\sqrt{(t_{n+1}^*-\tau^*+1)^2-1}^5}(\tau^*-t_i^*)^2$$

$$+\frac{3(t^*_{n+1}-\tau^*)^2}{\sqrt{(t^*_{n+1}-\tau^*+1)^2-1}^5}(\tau^*-t^*_i)^2-\frac{1}{(t^*_{i+1}-t^*_i)}\frac{4(t^*_{n+1}-\tau^*)}{\sqrt{(t^*_{n+1}-\tau^*+1)^2-1}^3}(\tau^*-t^*_i)$$

$$+\frac{2(t^*_{n+1}-\tau^*)}{\sqrt{(t^*_{n+1}-\tau^*+1)^2-1}^3}-\frac{2}{(t^*_{i+1}-t^*_i)}\frac{1}{\sqrt{(t^*_{n+1}-\tau^*+1)^2-1}})d\tau^*$$

olacaktır. İkinci integralde $\frac{\lambda}{2\mu}$ katsayılı terimde u^*_{i+1} in katsayısı

$$K_4(i,n)=\int_{t_i}^{t_{i+1}}(u^*_{i+1}\frac{1}{(t^*_{i+1}-t^*_i)^2}(\frac{(t^*_{n+1}-\tau^*)}{\sqrt{(t^*_{n+1}-\tau^*+1)^2-1}^3}(\tau^*-t^*_i)^2$$

$$+\frac{2(\tau^*-t^*_i)}{\sqrt{(t^*_{n+1}-\tau^*+1)^2-1}})d\tau^*,$$

u^*_i in katsayısı

$$K_5(i,n)=\int_{t_i}^{t_{i+1}}(-\frac{1}{(t^*_{i+1}-t^*_i)^2}\frac{(t^*_{n+1}-\tau^*)}{\sqrt{(t^*_{n+1}-\tau^*+1)^2-1}^3}(\tau^*-t^*_i)^2$$

$$-\frac{1}{(t^*_{i+1}-t^*_i)^2}\frac{2(\tau^*-t^*_i)}{\sqrt{(t^*_{n+1}-\tau^*+1)^2-1}}+\frac{(t^*_{n+1}-\tau^*)}{\sqrt{(t^*_{n+1}-\tau^*+1)^2-1}^3})d\tau^*,$$

$u^{*\cdot}_i$ in katsayısı

$$K_{6in}=\int_{t_i}^{t_{i+1}}(-\frac{1}{(t^*_{i+1}-t^*_i)}\frac{(t^*_{n+1}-\tau^*)}{\sqrt{(t^*_{n+1}-\tau^*+1)^2-1}^3}(\tau^*-t^*_i)^2$$

$$-\frac{1}{(t^*_{i+1}-t^*_i)}\frac{2(\tau^*-t^*_i)}{\sqrt{(t^*_{n+1}-\tau^*+1)^2-1}}+\frac{(t^*_{n+1}-\tau^*)}{\sqrt{(t^*_{n+1}-\tau^*+1)^2-1}^3}(\tau^*-t^*_i)$$

$$+\frac{1}{\sqrt{(t^*_{n+1}-\tau^*+1)^2-1}})d\tau^*$$

olarak bulunur. Böylelikle sonuç denklem

$$\frac{\lambda+2\mu}{2\mu}\sum_{i=1}^{n} K_1(i,n)u_{i+1}^{*} + K_2(i,n)u_i^{*} + K_3(i,n)u_i^{*\cdot}$$

$$-\frac{\lambda}{2\mu}\sum_{i=1}^{n} K_4(i,n)u_{i+1}^{*} + K_5(i,n)u_i^{*} + K_6(i,n)u_i^{*\cdot} = \frac{\sqrt{t_{n+1}^{*}}}{\sqrt{t_{n+1}^{*}+2}} \tag{2.34}$$

halini alır. Aşağıdaki ifadeler

$$A(i,n) = \frac{\lambda+2\mu}{2\mu}K_1(i,n) - \frac{\lambda}{2\mu}K_4(i,n) \tag{2.35}$$

$$B(i,n) = \frac{\lambda+2\mu}{2\mu}K_2(i,n) - \frac{\lambda}{2\mu}K_5(i,n) \tag{2.36}$$

$$C(i,n) = \frac{\lambda+2\mu}{2\mu}K_3(i,n) - \frac{\lambda}{2\mu}K_6(i,n) \tag{2.37}$$

şeklinde tanımlanırsa n numaralı aralıkta denklem

$$A(n,n)u_{n+1}^{*} + B(n,n)u_n^{*} + C(n,n)u_n^{*\cdot}$$

$$= \frac{\sqrt{t_{n+1}^{*}}}{\sqrt{t_{n+1}^{*}+2}} - \sum_{i=1}^{n-1} A(i,n)u_{i+1}^{*} + B(i,n)u_i^{*} + C(i,n)u_i^{*\cdot}$$

$$u_{n+1}^{*} = \{\frac{\sqrt{t_{n+1}^{*}}}{\sqrt{t_{n+1}^{*}+2}} - (\sum_{i=1}^{n-1} A(i,n)u_{i+1}^{*} + B(i,n)u_i^{*} + C(i,n)u_i^{*\cdot})$$

$$-B(n,n)u_n^{*} - C(n,n)u_n^{*\cdot}\}\frac{1}{A(n,n)}$$

$$AR(n) = \sum_{i=1}^{n-1} A(i,n)u_{i+1}^{*} + B(i,n)u_i^{*} + C(i,n)u_i^{*\cdot} \tag{2.38}$$

denirse

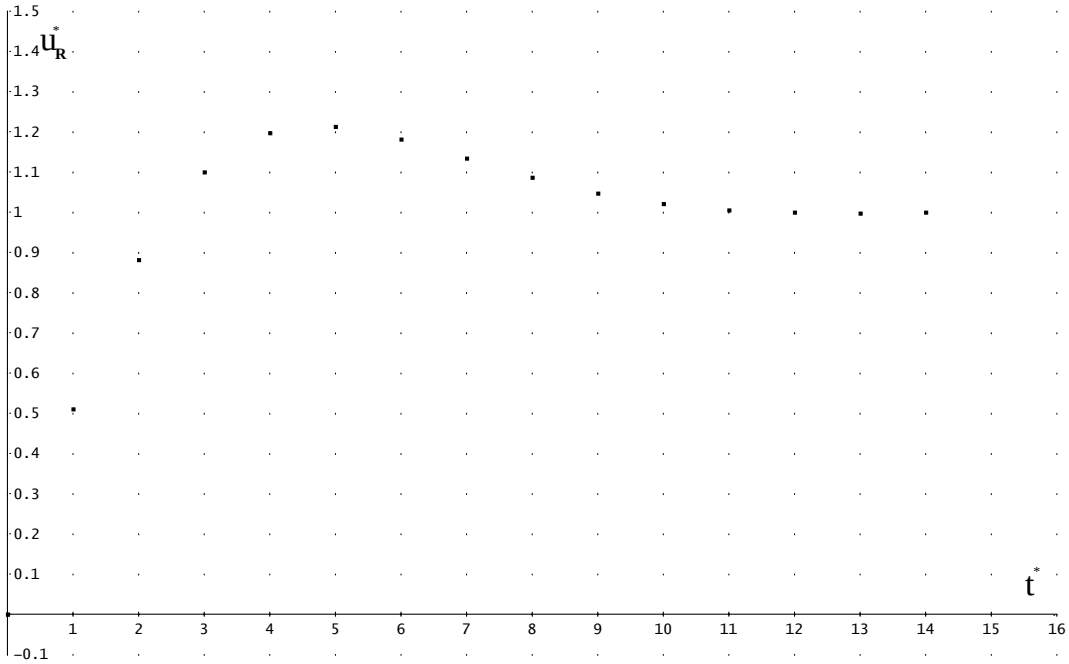
$$u^*_{n+1} = \{\frac{\sqrt{t^*_{n+1}}}{\sqrt{t^*_{n+1}+2}} - AR(n) - B(n,n)u^*_n - C(n,n)u^{*\cdot}_n\}\frac{1}{A(n,n)} \tag{2.39}$$

$$u^* = \left[\frac{u^*_{i+1}-u^*_i}{\Delta t^2} - \frac{u^{*\cdot}_i}{\Delta t}\right](t^*-t^*_i)^2 + u^{*\cdot}_i(t^*-t^*_i) + u^*_i$$

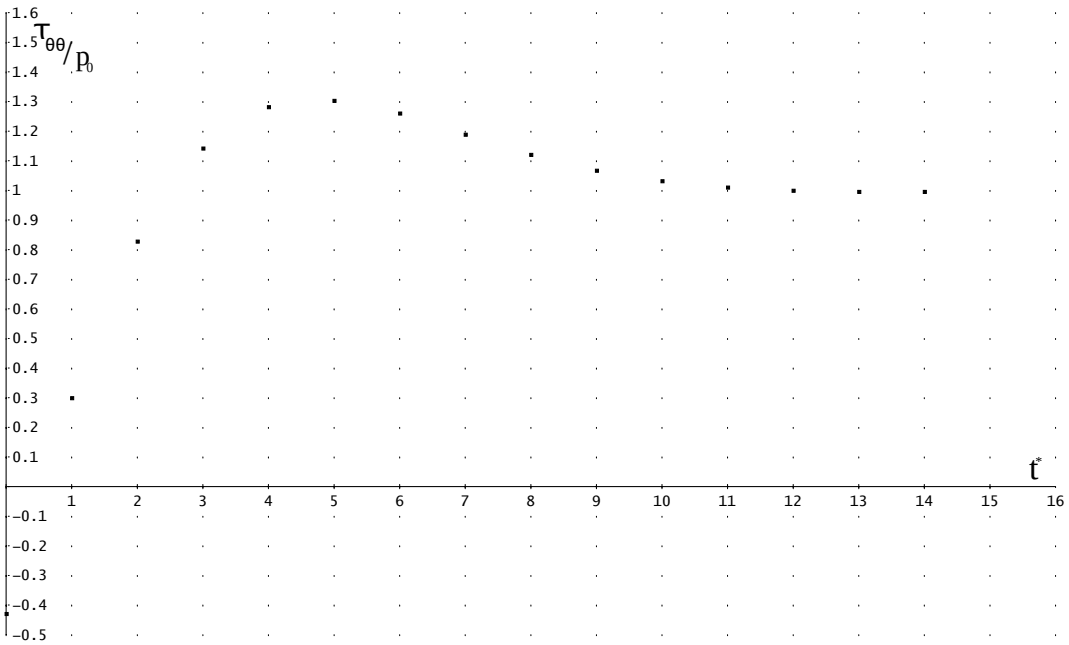
$$u^{*\cdot} = \frac{2(u^*_{i+1}-u^*_i)}{\Delta t} - u^{*\cdot}_i \tag{2.40}$$

olarak bulunur. $t^* = t^*_1$ de $u^* = u^*_1$ ve $u^* = u^{*\cdot}_1$ değerleri bilinmektedir. (2.39) denklemi kullanılarak $n = 1$ alındığı zaman $t^* = t^*_2$ de u^*_2 değeri hesaplanır. $n = 1$ olduğu için $AR(n)$ ifadesi düşer. (2.35), (2.36), (2.37) denklemleri kullanılarak $A(n,n)$, $B(n,n)$ ve $C(n,n)$ değerleri hesaplanır. t^*_2 değeri de bilindiğinden u^*_2 elde edilmiş olur. $t^* = t^*_2$ de $u^* = u^*_2$ olduğundan $u^{*\cdot}_2$ (2.40) denklemi kullanılarak bulunur. Aynı işlemler tekrarlanarak u^*_i ve $u^{*\cdot}_{i+1}$ değerleri hesaplanır. Ayrıca sınırdaki $\tau^*_{\theta\theta} = \frac{\tau_{\theta\theta}}{p_0}$ boyutsuz gerilmeside sabit basınç için hesaplanmıştır.

Her iki fonksiyonun t^* ile değişimi **Şekil 2.1** ve **Şekil 2.2** de verilmiştir.



Şekil 2.1: Sabit Basınç Altında Sınırdaki u^*_R Boyutsuz Yerdeğiştirmesinin Boyutsuz Zamanla Değişimi



Şekil 2.2: Sabit basınç altında sınırdaki $\frac{\tau^*_{\theta\theta}}{p_0}$ boyutsuz gerilmesinin boyutsuz zamanla değişimi

2.2 Örnek Problem 2: Delik Yüzeyine Etkiyen İç Basıncın Zamanla Değişken Olması Hali

$p(\tau) = p_0(1+40sin(200t)e^{-200t})$ şeklinde değişken bir basınç belirliyelim. t zaman aralığında bu fonksiyonun değişim grafiği **Şekil 2.3** de gösterilmiştir. Burada patlama yaklaşık 30 mili saniyede tamamlanmaktadır.

Yarıçap $a = 50$ cm, hız $c_1 = 200000$ cm/sn olarak alalım. Böylelikle $p(\tau)$ basıncı boyutsuz olarak $\frac{p(\tau^*)}{p_0} = 1 + 40sin(\frac{t^*}{20})e^{-\frac{t^*}{20}}$ şeklinde ifade edilir.Bu eğride **Şekil 2.4** de çizilmiştir Ancak boyutsuz basınç eğrisi her t^*_i, t^*_{i+1} aralığında integralleri üçüncü dereceden

$$f_i(t^*) = \frac{p(t^*)_i}{p_0} = A(t^* - t^*_i)^3 + B(t^* - t^*_i)^2 + C(t^* - t^*_i) + D \tag{2.41}$$

şeklinde bir 3. dereceden bir eğri ile temsil edilecektir. Bu denklem sisteminde A, B, C ve D katsayıları $t^* = t^*_i$ de $f(t^*) = f_i(t^*)$, $t^* = t^*_i$ de $f'(t^*) = f'_i(t^*)$, $t^* = t^*_{i+1}$ de $f(t^*) = f_{i+1}(t^*)$ ve $t^* = t^*_{i+1}$ de $f'(t^*) = f'_{i+1}(t^*)$ koşulları uygulanılarak

$$A_i = -\frac{2}{\Delta t^3}(f_{i+1}(t^*) - f_i(t^*)) + \frac{1}{\Delta t^2}(f'_{i+1}(t^*) + f'_i(t^*)) \tag{2.42}$$

$$B_i = \frac{3}{\Delta t^2}(f_{i+1}(t^*) - f_i(t^*)) - \frac{1}{\Delta t}(f'_{i+1}(t^*) + f'_i(t^*)) - \frac{1}{\Delta t}f'_i(t^*) \qquad (2.43)$$

$$C_i = f'_i(t^*) \qquad D = f_i(t^*) \qquad (2.44)$$

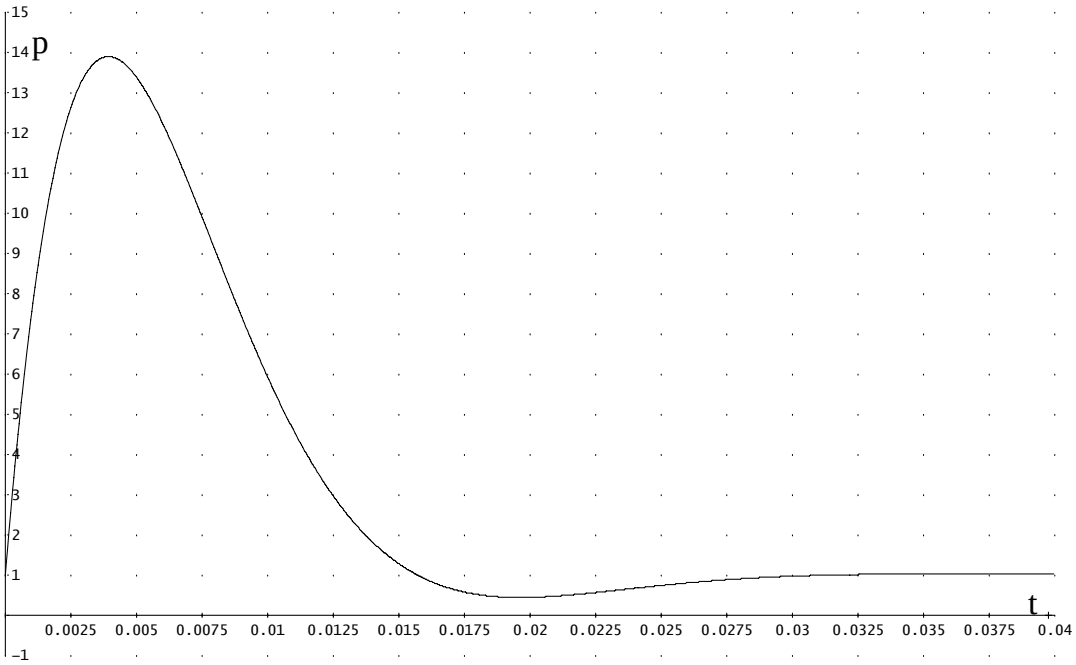
şeklinde elde edilir. Böylelikle (2.41) denkelemi

$$f_i(t^*) = \left[-\frac{2}{\Delta t^3}(f_{i+1}(t^*) - f_i(t^*)) + \frac{1}{\Delta t^2}(f'_{i+1}(t^*) + f'_i(t^*))\right](t - t_i)^3$$

$$+\left[\frac{3}{\Delta t^2}(f_{i+1}(t^*) - f_i(t^*)) - \frac{1}{\Delta t}(f'_{i+1}(t^*) + f'_i(t^*)) - \frac{1}{\Delta t}f'_i(t^*)\right](t - t_i)^2$$

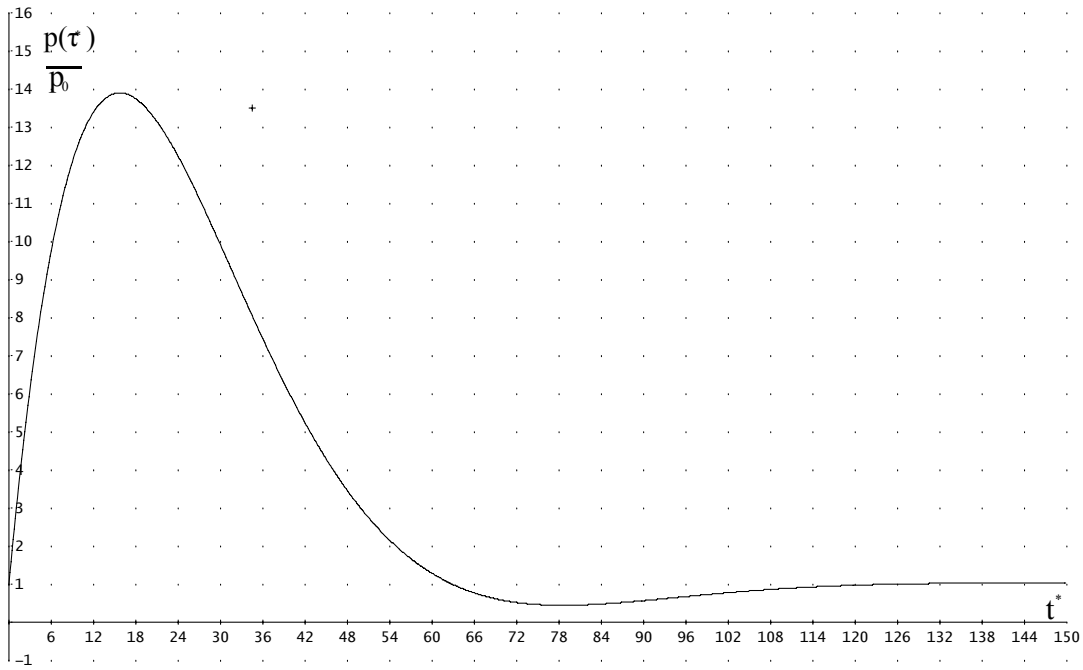
$$+f'_i(t^*)(t - t_i) + f_i(t^*) \qquad (2.45)$$

$$f'_i(t^*) = 3A_i(t - t_i)^2 + 2B_i(t - t_i) + C_i \qquad (2.46)$$



Şekil 2.3: Gerçek Değişken Basıncın Zamanla Değişimi

halini alır. (2.30) numaralı denklemin sağ tarafı



Şekil 2.4: Boyutsuz Basıncın Boyutsuz Zamanla Değişimi

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{t_i}^{t_{i+1}}(p(\tau^*)(\frac{(t^*_{n+1}-\tau^*)}{\sqrt{(t^*_{n+1}-\tau^*+1)^2-1}^3})+p'(\tau^*)(\frac{1}{\sqrt{(t^*_{n+1}-\tau+1)^2-1}}))d\tau^*$$

hesaplanacaktır. $p(\tau^*)=y$ ve $p(\tau^{*\prime})=y'$ denklem sisteminde yerine konularak

$$\sum_{i=1}^{n}(\int_{t_i}^{t_{i+1}}(A_i(\tau^*-t_i^*)^3(\frac{(t^*_{n+1}-\tau^*)}{\sqrt{(t^*_{n+1}-\tau^*+1)^2-1}^3})$$

$$+B_i(\tau^*-t_i^*)^2(\frac{(t^*_{n+1}-\tau^*)}{\sqrt{(t^*_{n+1}-\tau^*+1)^2-1}^3})$$

$$C_i(\tau^*-t_i^*)(\frac{(t^*_{n+1}-\tau^*)}{\sqrt{(t^*_{n+1}-\tau^*+1)^2-1}^3})+D_i(\frac{(t^*_{n+1}-\tau^*)}{\sqrt{(t^*_{n+1}-\tau^*+1)^2-1}^3}))d\tau^*$$

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}}(3A_i(\tau^*-t_i^*)^2\frac{1}{\sqrt{(t^*-\tau+1)^2-1}}+2B_i(\tau^*-t_i^*)(\frac{1}{\sqrt{(t^*-\tau+1)^2-1}})$$

$$+C_i(\frac{1}{\sqrt{(t^*-\tau+1)^2-1}}))d\tau^*) \tag{2.47}$$

halini alır. Buradaki integralleri

$$I_{1i} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} A_i(\tau^* - t_i^*)^3 \frac{(t_{n+1}^* - \tau^*)}{\sqrt{(t_{n+1}^* - \tau^* + 1)^2 - 1}^3} d\tau^*$$

$$I_{2i} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} B_i(\tau^* - t_i^*)^2 \frac{(t_{n+1}^* - \tau^*)}{\sqrt{(t_{n+1}^* - \tau^* + 1)^2 - 1}^3} d\tau^*$$

$$I_{3i} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} C_i(\tau^* - t_i^*) \frac{(t_{n+1}^* - \tau^*)}{\sqrt{(t_{n+1}^* - \tau^* + 1)^2 - 1}^3} d\tau^*$$

$$I_{4i} = D_i \frac{(t_{n+1}^* - \tau^*)}{\sqrt{(t_{n+1}^* - \tau^* + 1)^2 - 1}^3} d\tau^*$$

$$I_{5i} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} 3A_i(\tau^* - t_i^*)^2 \frac{1}{\sqrt{(t^* - \tau + 1)^2 - 1}} d\tau^*$$

$$I_{6i} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} 2B_i(\tau^* - t_i^*) \frac{1}{\sqrt{(t^* - \tau + 1)^2 - 1}} d\tau^*$$

$$I_{7i} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} C_i \frac{1}{\sqrt{(t^* - \tau + 1)^2 - 1}} d\tau^*$$

şeklinde isimlendirerek, bu integralleri (2.47) ifadesine yerleştirilirse ifade

$$\sum_{i=1}^{n} [I_{1i} + I_{2i} + I_{3i} + I_{4i} + I_{5i} + I_{6i} + I_{7i}] \tag{2.48}$$

halini alır. Böylelikle n numaralı aralıkta $p(\tau^*)$ değişken alındığında u_{n+1}^*

$$AR(n) = \sum_{i=1}^{n-1} I_{1i} + I_{2i} + I_{3i} + I_{4i} + I_{5i} + I_{6i} + I_{7i}$$

$$- \left[A(i,n)u_{i+1}^* + B(i,n)u_i^* + C(i,n)u_i^{*\cdot} \right] \tag{2.49}$$

$$u^*_{n+1} = [AR(n) - B(n,n)u^*_n - C(n,n)u^{*\cdot}_n]\,\frac{1}{A(n,n)} \tag{2.50}$$

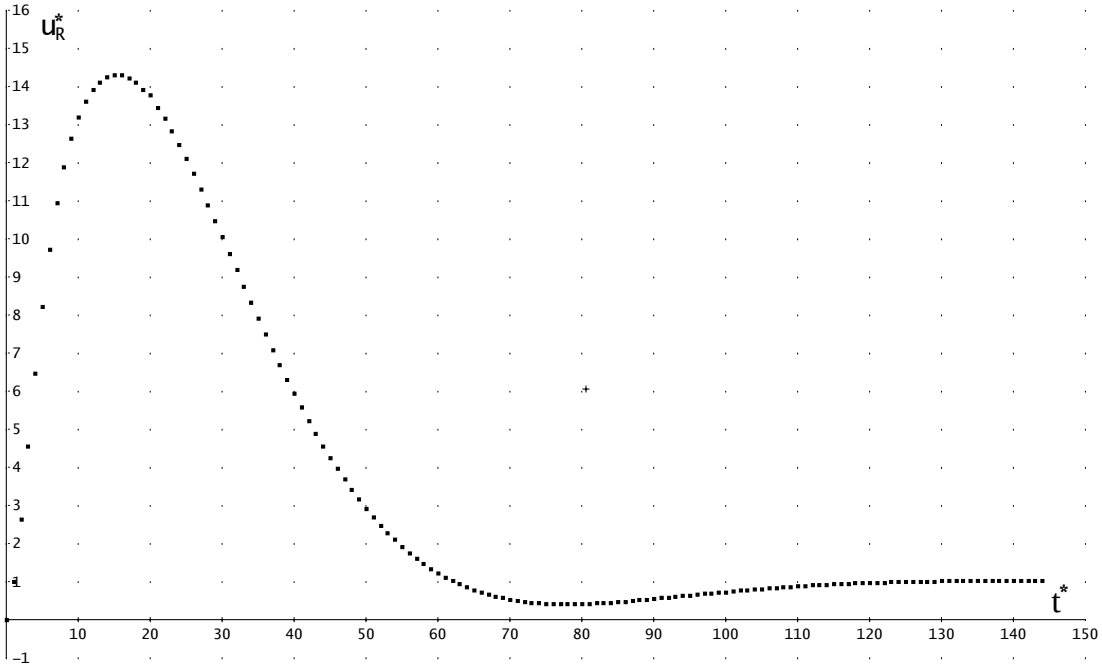
şeklinde u^*_{n+1} bulunur.(n=1,2,3.....) Bir aralıkta

$$u^* = \left[\frac{u^*_{i+1} - u^*_i}{\Delta t^2} - \frac{u^{*\cdot}_i}{\Delta t}\right](t^* - t^*_i)^2 + u^{*\cdot}_i(t^* - t^*_i) + u^*_i$$

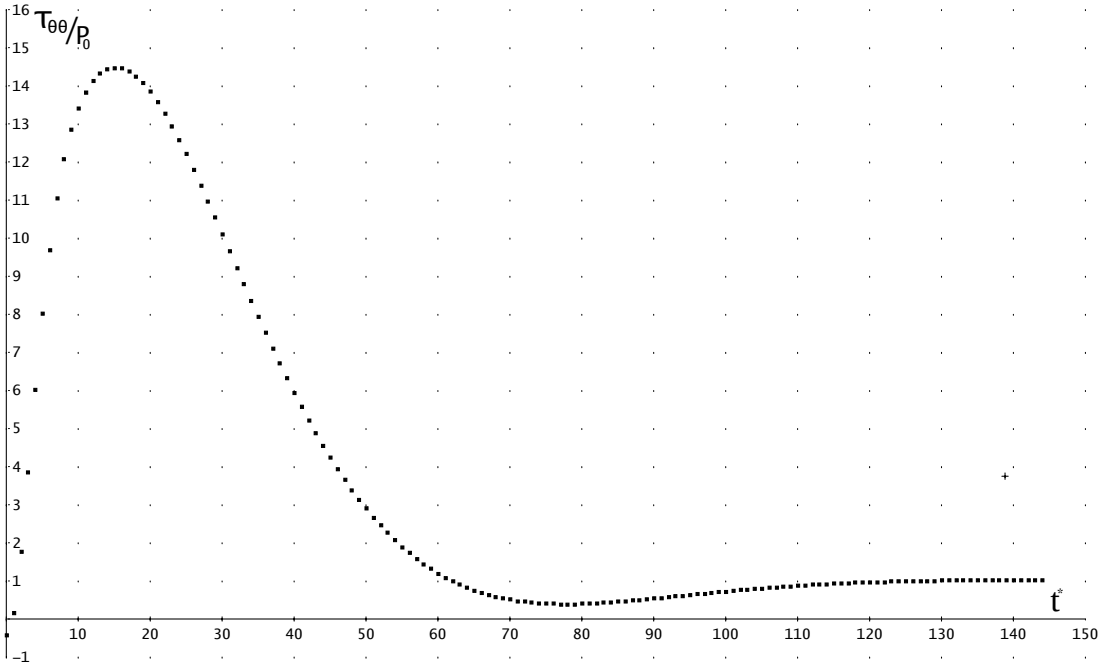
yazıldığına göre aralığın sonundaki türev değeri

$$u^{*\cdot} = \frac{2(u^*_{i+1} - u^*_i)}{\Delta t} - u^{*\cdot}_i$$

şeklinde bulunacaktır. Gerekli işlemler yapılarak u^*_{n+1} ve $u^{*\cdot}_{n+1}$ değerleri hesaplanır. Böylelikle değişken basınç altında u^*_R boyutsuz yerdeğiştirmesinin ve $\frac{\tau}{p_0}$ boyutsuz gerilmesinin değişim grafiği **Şekil 2.5** ve **Şekil 2.6** de verilmiştir. Sınırda yani $R = a$ da $\boldsymbol{u}(t,1)$ bulundu. Sınırdan uzakta herhangi bir y_1 noktasında $R_1 > R$ de $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{f})$ ve $(\boldsymbol{u'}, \boldsymbol{\tau'}, \boldsymbol{f'})$ halleri arasında yazılan dinamik karşıtlık teoremi aşağıdaki formu alır.



Şekil 2.5: Değişken Basınç Altında Sınırdaki u^*_R Boyutsuz Yerdeğiştirmesinin Boyutsuz Zamanla Değişimi



Şekil 2.6: Değişken Basınç Altında Sınırdaki $\frac{\tau^*_{\theta\theta}}{p_0}$ Boyutsuz Gerilmesinin Boyutsuz Zamanla Değişimi

$$\rho \int_V \boldsymbol{f} * \boldsymbol{u}' dV + \int_S \boldsymbol{T}' * \boldsymbol{u} dS = \int_S \boldsymbol{T} * \boldsymbol{u}' dS + \rho \int_V \boldsymbol{f}' * \boldsymbol{u} dV \tag{2.51}$$

$\boldsymbol{S}$ bizim probleme karşı gelmektedir. Dolayısıyla $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ olacağından birinci türevi düşer. Burada $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{T}'$ ve $\boldsymbol{f}'$ değerleri

$$\boldsymbol{T} = p(t) \cdot \boldsymbol{e}_R \qquad \boldsymbol{T}' = -\tau'_{RR} \qquad \boldsymbol{f}' = \delta(t)\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\boldsymbol{e}_R$$

olarak verilmişti. Böylelilkle dinamik karşıtlık teoremi

$$\int_S \boldsymbol{T}' * \boldsymbol{u} dS = \int_S \boldsymbol{T} * \boldsymbol{u}' dS + \rho \int_V \boldsymbol{f}' * \boldsymbol{u} dV$$

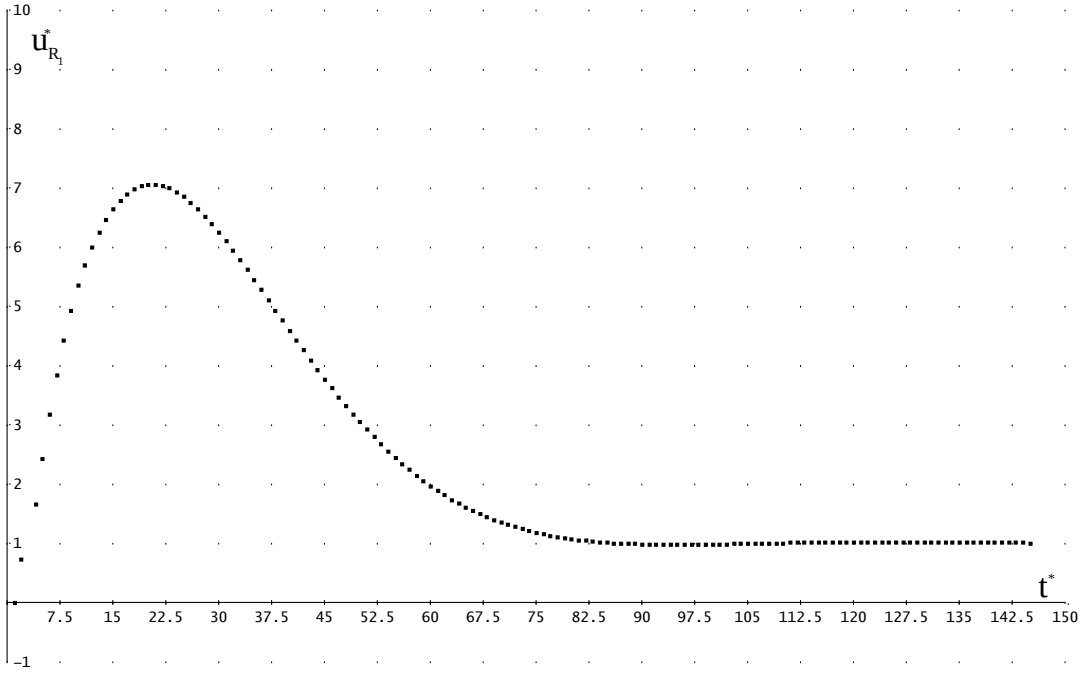
$$\rho\, u_{R_1}(R_1, t) = \int_S p(t) * \boldsymbol{u}'_R(R_1, t) + \int_S \tau'_{RR} * \boldsymbol{u}_R(R_1, t)$$

$$u_{R_1}(R_1, t) = \frac{1}{\rho} p(t) * \boldsymbol{u}'_R(t, R_1, a) + \frac{1}{\rho} \tau'_{RR} * \boldsymbol{u}_R(t, R_1, a) \tag{2.52}$$

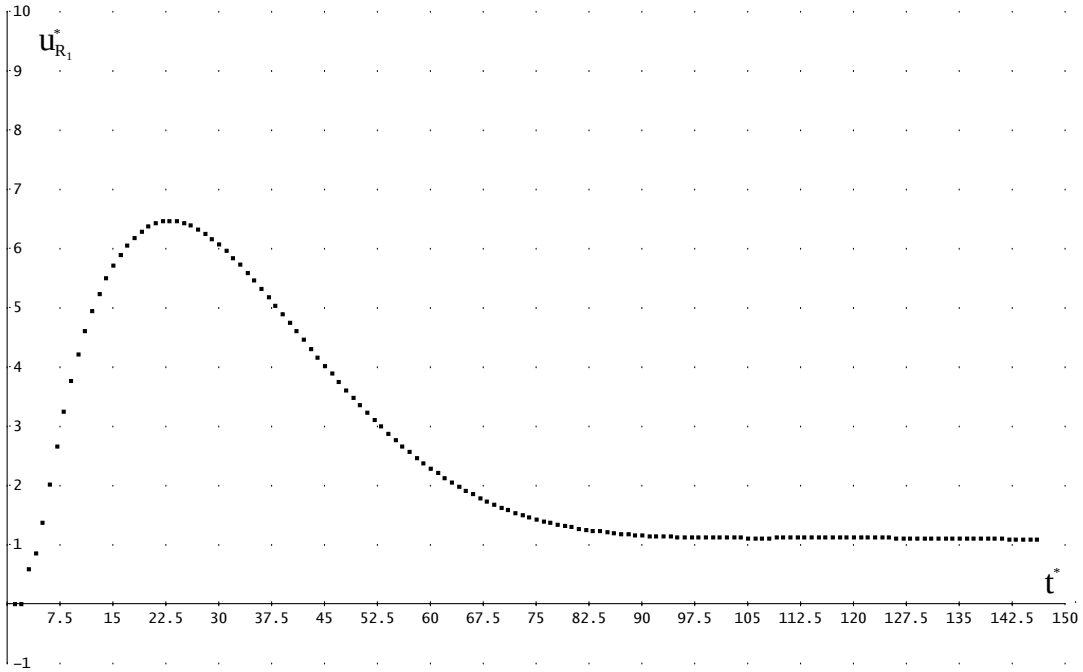
formunu alır. $t = \frac{R_1+a}{c_1}$ durumunda gerekli işlemler yapılıp

$$t = \frac{at^*}{c_1} \qquad u = \frac{u^* a p_0}{2\mu} \qquad r_1^* = \frac{R_1}{a}$$

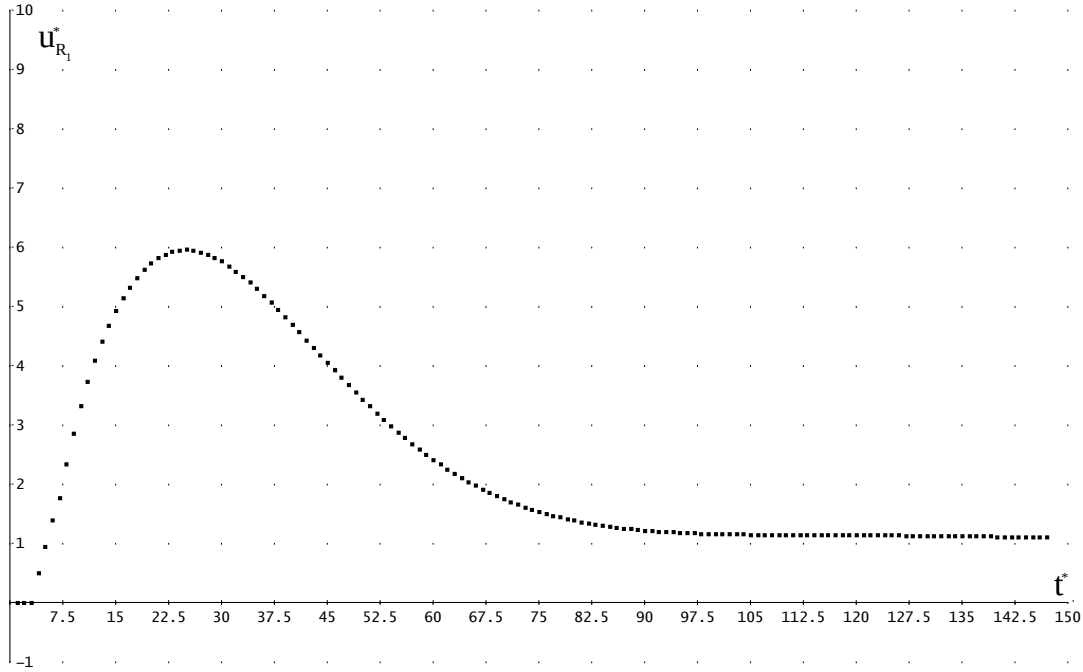
dönüşümleri kullanılarak boyutsuzlaştırılıp (2.52) denkleminde zaman ifadesi $t' = t - \frac{R_1-a}{c_1}$ şeklinde alınırsa R_1, θ_1 noktasında hareket $t' = 0$ da başlar. $p(t) = p_0 f(t)$ alınarak (1.125) denklemi kulanılırsa $\frac{R_1}{a} = 2, 3, 4, 5$ için $u^*_{R_1}$ boyutsuz yerdeğiştirmesinin boyutsuz zamanla değişim grafikleri aşağıdaki gibi elde edilir.



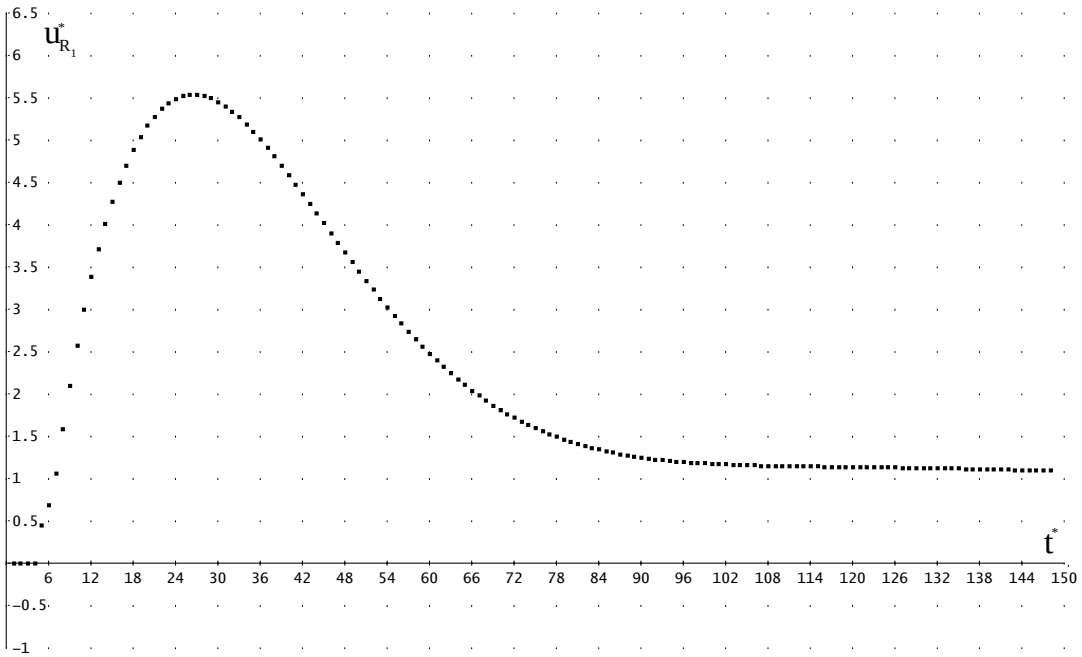
Şekil 2.7: $\frac{R_1}{a} = 2$ için $u^*_{R_1}$ boyutsuz yerdeğiştirmesinin boyutsuz zamanla değişimi



Şekil 2.8: $\frac{R_1}{a} = 3$ için $u^*_{R_1}$ boyutsuz yerdeğiştirmesinin boyutsuz zamanla değişimi



Şekil 2.9: $\frac{R_1}{a} = 4$ için $u^*_{R_1}$ boyutsuz yerdeğiştirmesinin boyutsuz zamanla değişimi



Şekil 2.10: $\frac{R_1}{a} = 5$ için $u^*_{R_1}$ boyutsuz yerdeğiştirmesinin boyutsuz zamanla değişimi

SONUÇLAR

Bu çalışmada amaç sonsuz ortamda gömülü sonsuz bir silindirik boruda meydana gelen ani bir patlama sonucu ortamda meydana gelen yer değiştirme ve gerilme alanlarının elde edilmesidir. Bu problemin çözümü için Dinamik Karşıtlık Teoremi kullanılmıştır. Dinamik Karşıtlık Teoremi iki elastodinamik hal arasında yazılır. Belli bir bölgede hareket denklemini ve bünye denklemlerini sağlayan gerilme ve yerdeğiştirme alanları aynı bölgenin içinde tanımlanan kütle kuvveti ile birlikte bir elastodinamik hal oluşturur. Elastodinamik hal tanımı Wheeler ve Sternberg tarafından verilmiştir. Burada ilk aranan silindirik borunun sınırında ani patlama sonucu etkiyen iç basınca bağlı olarak yine sınırda meydana gelen yer değiştirme alanının bulunmasıdır. Bunun için karşıtlık teoreminde birinci elastodinamik hal olarak problemin kendisi seçilir, ikinci elastodinamik hal olarak ise daha once Kadıoğlu ve Ataoğlu tarafından verilen dönel simetrik düzlem problemler için inşa edilmiş elastodinamik hal kullanılmıştır. Bu elastodinamik hal veya temel çozümün nasıl teşkil edildiği metin içinde detaylı olarak açıklanmıştır. Sınırdaki yer değiştirme alanı bulunduktan sonra ikinci yapılacak işlem bölge içinde herhangi bir noktadaki etkileri hesaplamaktır. Bunun içinse yine dönel simetrik problemler için geçerli olan yeni bir elastodinamik hale ihtiyaç vardır. Bu elastodinamik hal de inşaa edilmiştir. Literatürde bu tip problemler için benzer çözümler Bessel fonksiyonları ile ifade edilirken ikinci elastodinamik hal Eliptik fonksiyonların bir kompozisyonu olarak ortaya çıkmıştır. Sonuçları kontrol amacıyla önce sabit iç basınç etkisi altında boru problemi birinci örnek problem olarak tekrar çözülmüştür. İkinci örnek problem ise ani patlamayı temsil eden değişken basınç problemidir. Her iki problemde de sınırdaki yerdeğiştirme bileşeni için bir integral denklem bulunmakta ve bu integral denklem çözülerek sınır değerler elde edilmektedir. Bundan sonra bölge içindeki herhangi bir noktadaki yer değiştirme değeri ikinci elastodinamik hal ve probleme ait elastodinamik hal arasında yazılarak elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] **Achenbach, J.D,** 1973. Wave propagation in elastic solids, North-Holland, Amsterdam.

[2] **Wheeler, L.T ve Sternberg, E.,** 1968. Some theorems in classical elastodynamics, *Arch Rational Mech Anal*, **1**, $51-90$.

[3] **Kadıoğlu, N. ve Ataoğlu S.,** 2005. Use of the reciprocity theorem for axially symmetric transient problems, *Archive of Applied Mechanics*, **74**, $325-337$.

[4] **Kromm, V.A.,** 1948. Ausbreitung von Stowellen in Kreislochscheiben, *Z angew Math Mech*, **4**, $104-114$.

[5] **Kromm, V.A.,** 1948. Ausbreitung von Stowellen in Kreislochscheiben, *Z angew Math Mech*, **10**, $297-303$.

[6] **Abramowitz, M. ve Stegun, Irene A.,** 1972. Handbook of Mathematical Functions, U.S Goverment Printing Office, Washington, D.C.

[7] **Moon P. ve Spencer D.E.,** 1961. Field Theory Handbook, Springer-Verlag, Berlin.

ÖZGEÇMİŞ

Ahmet TEMUGAN 1980 yılında Sakarya'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Sakarya'da tamamladı. Yüksek öğrenimini, lisans (2003) İstanbul Teknik Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümünde tamamladı. Aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Bölümü Yapı Mühendisliği programında yüksek lisans öğrenimine başladı. Halen yüksek lisans eğitimi devam etmektedir.