ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SİMETRİK ORTOGONAL FONKSİYON AİLELERİ

Beyzanur Ülkü ÇELİK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2020

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SİMETRİK ORTOGONAL FONKSİYON AİLELERİ

Beyzanur Ülkü ÇELİK

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç.Dr. Rabia AKTAŞ

Bu tez yedi bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde temel kavramlar ve ön bilgiler hatırlatılmıştır.

Üçüncü bölümde Sturm-Liouville teoremi genelleştirilerek simetrik ortogonal fonksiyon ailelerini tanımlamak için temel bir teorem verilmiştir.

Dördüncü bölümde dört bağımsız parametreli simetrik ortogonal polinom ailelerinin bir sınıfı verilmiş olup bu polinomların özel durumu olan genelleştirilmiş ultraküresel polinomlar, genelleştirilmiş Hermite polinomları ve $(-\infty, \infty)$ aralığında ortogonal olan polinomların iki sonlu sınıfının çeşitli özellikleri verilmiştir.

Beşinci ve altıncı bölümde beş ve altı parametreli simetrik ortogonal fonksiyon aileleri tanımlanmıştır ve yine bunların özel durumları olarak genelleştirilmiş ultraküresel polinomlari, genelleştirilmiş Hermite polinomları ve $(-\infty, \infty)$ aralığında ortogonal olan sonlu polinomların bazı genellemeleri verilmiştir.

Son olarak yedinci bölüm sonuç kısmına ayrılmış olup bu tezde neler yapıldığı hakkında bilgi verilmiştir.

Temmuz 2020, 75 sayfa

Anahtar Kelimeler: Simetrik fonksiyon, ortogonal polinom, Jacobi polinomları, genelleştirilmiş ultraküresel polinomlar, genelleştirilmiş Hermite polinomları, rekürans bağıntısı, diferensiyel denklem

ABSTRACT

Master Thesis

FAMILIES OF SYMMETRIC ORTHOGONAL FUNCTIONS

Beyzanur Ülkü ÇELİK

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc.Prof. Dr. Rabia AKTAŞ

This thesis consists of seven chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, basic concepts and preliminaries are reminded.

In the third chapter, by generalizing Sturm-Liouville theorem a fundamental theorem for Sturm-Liouville problems is given in order to define families of symmetric orthogonal functions.

In the fourth chapter, a class of symmetric orthogonal polynomials with four independent parameters is given. As a special case of these polynomials, generalized ultraspherical polynomials, generalized Hermite polynomials and two other sequences of finite symmetric orthogonal polynomials on $(-\infty, \infty)$ are presented and their properties are discussed.

In the fifth and sixth chapters, families of symmetric orthogonal functions with five and six parameters are defined. In the special cases, some generalizations of generalized ultraspherical polynomials, generalized Hermite polynomials and finite symmetric orthogonal polynomials on $(-\infty, \infty)$ are given.

Finally, the seventh chapter is devoted to the conclusion part and the information about what has been done in thesis is given.

July 2020, 75 pages

Key Words: Symmetric function, orthogonal polynomial, Jacobi polynomials, generalized ultraspherical polynomials, generalized Hermite polynomials, recurrence relation, differential equation

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında görüş ve önerileriyle beni yönlendiren, yardımını hiçbir zaman eksik etmeyen değerli danışman hocam Doç. Dr. Rabia AKTAŞ (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a ve benden bugüne kadar desteğini hiç esirgemeyen değerli aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Beyzanur Ülkü ÇELİK
Ankara, Temmuz 2020

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI
ETİK ..... **i**
ÖZET ..... **ii**
ABSTRACT ..... **iii**
TEŞEKKÜR ..... **iv**
SİMGELER DİZİNİ ..... **vii**
1. GİRİŞ **1**
2. TEMEL KAVRAMLAR VE ÖN BİLGİLER **3**
3. STURM-LIOUVILLE PROBLEMİNİN SİMETRİK BİR GENELLEMESİ **9**
3.1 Geliştirilmiş Legendre Fonksiyonlarının Simetrik Genelleştirilmesi **11**
4. DÖRT BAĞIMSIZ PARAMETRELİ SİMETRİK ORTOGONAL POLİNOMLARIN BİR SINIFI **17**
4.1 $S_n(x; a, b, c, d)$ Polinomlarının Dört Ana Sınıfı **30**
4.1.1 Genelleştirilmiş ultraküresel polinomlar **30**
4.1.2 Genellestirilmiş Hermite polinomları **32**
4.1.3 $(-\infty,\infty)$ aralığında simetrik ortogonal polinomların sonlu bir sınıfı **33**
4.1.4 $(-\infty,\infty)$ aralığında simetrik ortogonal polinomların başka sonlu bir sınıfı **35**
5. BEŞ PARAMETRELİ SİMETRİK ORTOGONAL FONKSİYONLARIN BİR SINIFI **36**
5.1 $S_n^{(9)}(x; a, b, c, d)$ Fonksiyonunun Dört Ana Sınıfı. **44**
5.1.1 Genelleştirilmiş ultraküresel polinomların bir genellemesi **45**
5.1.2 Genelleştirilmiş Hermite polinomlarının bir genellemesi **49**
5.1.3 $(-\infty,\infty)$ aralığında $x^{-2w}(1+x^2)^{-v}$ ağırlık fonksiyonuna göre simetrik ortogonal fonksiyonların sonlu bir sınıfı **50**
5.1.4 $(-\infty,\infty)$ aralığında $x^{-2w}\exp(-1/x^2)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan simetrik fonksiyonların sonlu bir sınıfı. **54**
6. ALTI BAĞIMSIZ PARAMETRELİ SİMETRİK ORTOGONAL FONKSİYONLARIN BİR SINIFI **57**
6.1 $S_n^{(\alpha,\beta)}(x; a, b, c, d)$ Fonksiyonunun Dört Ana Sınıfı **65**
6.1.1 Genelleştirilmiş ultraküresel polinomların bir genellemesi **65**

6.1.2 Genelleştirilmiş Hermite polinomlarının bir genellemesi 66
6.1.3 $(-\infty,\infty)$ aralığında $x^{-2w}(1+x^2)^{-v}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan simetrik fonksiyonların sonlu bir sınıfı.. 67
6.1.4 $(-\infty,\infty)$ aralığında $x^{-2w}\exp(-1/x^2)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan simetrik ortogonal fonksiyonların sonlu bir sınıfı.....69
7. SONUÇ 72
KAYNAKLAR 73
ÖZGEÇMİŞ..... 75

SİMGELER DİZİNİ

$(a)_n$	Pochhammer sembolü
$\Gamma(x)$	Gamma fonksiyonu
$B(x,y)$	Beta fonksiyonu
${}_2F_1(a,b;c;x)$	Hipergeometrik fonksiyon
$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	Jacobi polinomları
$P_n(x)$	Legendre polinomları
$P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$	Ultraküresel polinomlar
$\overline{S}_n\left(\begin{array}{ccc} -2w-2v-2 & 2w & \\ -1 & 1 & \end{array}\middle\| x\right)$	Genelleştirilmiş ultraküresel polinomlar
$\overline{S}_n\left(\begin{array}{cc} -2 & 2w \\ 0 & 1 \end{array}\middle\| x\right)$	Genelleştirilmiş Hermite polinomları

1. GİRİŞ

Regüler bir Sturm-Liouville problemi

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d\varphi_n(x)}{dx}\right)+(\lambda_n w(x)-s(x))\varphi_n(x)=0$$

denklemi ve

$$\begin{cases}\gamma_1\varphi_n(c)+\zeta_1\varphi_n'(c)=0\\ \gamma_2\varphi_n(d)+\zeta_2\varphi_n'(d)=0\end{cases}$$

sınır koşullarıyla verilmektedir. Burada $p(x)>0, w(x)>0$ dır. $p(x), p'(x), w(x)$ ve $s(x)$ fonksiyonları $[c,d]$ aralığında süreklidir. Eğer $p(c)=0$ veya $p(d)=0$ ise bu durumda bu problem singüler Sturm-Liouville problemini verir.

Teorik ve matematiksel fizikteki birçok önemli özel fonksiyon bir regüler (ya da singüler) Sturm-Liouville probleminin çözümüdür ve

$$\int_c^d w(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx=\left(\int_c^d w(x)\varphi_n^2(x)dx\right)\delta_{n,m}$$

ortogonallik koşulunu sağlar. Burada $w(x)$ ağırlık fonksiyonu ve $\delta_{n,m}$ Kronecker deltadır. Örnek olarak geliştirilmiş Legendre fonksiyonları (Arfken 1985), Bessel fonksiyonları (Arfken 1985, Nikiforov ve Uvarov 1988), Fourier trigonometrik diziler (Abramowitz ve Stegun 1972), ultraküresel fonksiyonlar (Chihara 1978) ve Hermite fonksiyonlarını (Szegö 1975) verebiliriz. Bu fonksiyonların çoğu $\varphi_n(-x)=(-1)^n\varphi_n(x)$ simetri özelliğine sahiptir ve fizikte ve mühendislikte önemli uygulamaları vardır. Burada bahsedilen bu örnekler ortogonallik özelliğini koruyacak şekilde simetrik olarak genellenerek, fizik ve mühendislikteki daha önceki uygulamaları da içine alan ve yeni uygulamalar veren genelleştirilmiş klasik simetrik ortogonal polinomlar tanımlanmıştır. Bunun için yukarıda verilen Sturm-Liouville problemi, $\varphi_n(-x)=(-1)^n\varphi_n(x)$ simetri özelliğini sağlayan

$$\begin{cases}\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d\varphi_n(x)}{dx}\right)+\left(\lambda_n w(x)-s(x)+\frac{1-(-1)^n}{2}H(x)\right)\varphi_n(x)=0\\ \gamma_3\varphi_n(\delta)+\zeta_3\varphi_n'(\delta)=0,\quad -\delta<x<\delta\end{cases}$$

problemine genişletilmiştir (Masjed-Jamei 2007b). Burada $\{\varphi_n\}$ klasik ortogonal fonksiyonların genişletilmiş simetrik bir dizisidir. φ_n fonksiyonları kullanılarak Fourier analizi ile bağlantılı trigonometrik ortogonal diziler, geliştirilmiş Legendre fonksiyonları, simetrik tipte Bessel fonksiyonları gibi birçok simetrik ortogonal fonksiyon aileleri genelleştirilebilir.

Literatürde simetrik ortogonal fonksiyon ve polinom aileleri, simetrik q-ortogonal polinomlar, diskre değişkenli simetrik ortogonal polinomlar ve tam olmayan simetrik ortogonal polinomlar alanında birçok çalışmalar yapılmış ve halen yapılmaya devam etmektedir (Masjed-Jamei 2007a, 2007b, 2008, 2010; Masjed-Jamei ve Dehghan 2008, Masjed-Jamei ve Koepf 2010, Masjed-Jamei ve Koepf 2011; Masjed-Jamei ve Area 2013a, 2013b, 2014, 2017; Masjed-Jamei, Moalemi ve Saad 2020, Masjed-Jamei, Soleyman ve Koepf 2020). Bu tezde, simetrik fonksiyonlar için Sturm-Liouville teoremi uygulanarak, dört parametreli simetrik ortogonal polinomların temel bir sınıfı ortaya atılacak ve ikinci basamaktan diferensiyel denklem, ortogonallik bağıntısı, üç terimli rekürans bağıntısı gibi standart özellikleri incelenecektir. Bu polinomların özel durumu olarak simetrik ortogonal polinomların dört temel ailesi verilecektir. Bu polinomlar genelleştirilmiş ultraküresel polinomlar, genelleştirilmiş Hermite polinomları ve $(-\infty, \infty)$ aralığında ortogonal olan sonlu simetrik ortogonal polinomların iki dizisidir. Yine, özel durumda dört parametreli simetrik ortogonal polinomları veren beş ve altı parametreli simetrik ortogonal fonksiyon aileleri tanımlanacak ve bu fonksiyonlar için ortogonallik özellikleri, üç terimli rekürans formülleri ve ikinci basamaktan diferensiyel denklemler elde edilecektir. Ayrıca bu fonksiyonların özel durumlarında, genelleştirilmiş ultraküresel polinomların, genelleştirilmiş Hermite polinomlarının ve $(-\infty, \infty)$ aralığında ortogonal olan sonlu simetrik polinomların çeşitli genellemeleri verilip özellikleri tartışılacaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE ÖN BİLGİLER

Tanım 2.1 $\Gamma(\lambda)$ Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty x^{\lambda-1} e^{-x} dx,\ \lambda > 0 \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanır (Abramowitz ve Stegun 1972).

Tanım 2.2 $B(\lambda_1, \lambda_2)$ Beta fonksiyonu $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ için

$$\begin{aligned} B(\lambda_1, \lambda_2) &= \int_0^1 x^{\lambda_1-1}(1-x)^{\lambda_2-1} dx \\ &= \int_0^\infty \frac{x^{\lambda_1-1}}{(1+x)^{\lambda_1+\lambda_2}} dx = 2\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2\lambda_1-1}(\cos x)^{2\lambda_2-1} dx \\ &= \frac{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)}{\Gamma(\lambda_1+\lambda_2)} = B(\lambda_2, \lambda_1) \end{aligned} \tag{2.2}$$

formunda tanımlanır (Abramowitz ve Stegun 1972, Arfken 1985).

Tanım 2.3 τ reel yada kompleks bir sayı olmak üzere $(\tau)_n$ ifadesi aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$\begin{aligned} (\tau)_n &= \tau\ (\tau+1)\ (\tau+2)\ ...\ (\tau+n-1)\ ;\ n = 1, 2, ... \\ (\tau)_0 &= 1,\ \tau \neq 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Bu ifade Pochhammer sembolü olarak adlandırılır (Rainville 1960).

Lemma 2.1 Pochhammer sembolü aşağıda verilen özelliği sağlar.

$$(\tau)_{n-k} = \frac{(\tau)_n}{(-\tau-n+1)_k(-1)^k} \tag{2.4}$$

İspat.

$$\begin{aligned} (\tau)_{n-k} &= \tau\ (\tau+1)\ ...(\tau+n-k-1) \\ &= \frac{(\tau)_n}{(\tau+n-k)\ ...\ (\tau+n-1)} \\ &= \frac{(\tau)_n}{(-\tau-n+k)\ ...\ (-\tau-n+1)(-1)^k} \\ &= \frac{(\tau)_n}{(-\tau-n+1)_k(-1)^k} \end{aligned}$$

■

Tanım 2.4 ${}_2F_1(a,b;c;x)$ hipergeometrik fonksiyonu

$$ {}_2F_1(a,b;c;x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a)_i (b)_i}{(c)_i} \frac{x^i}{i!} \ , \ \ |x| < 1 \tag{2.5} $$

şeklinde tanımlanır (Rainville 1960).

Tanım 2.5 $n \in \mathbb{N}_0 := \{0,1,2,...\}$ ve $d_0, d_1, ..., d_n$ ler de $d_n \neq 0$ olmak üzere sabit sayılar olsunlar.

$$ p_n(x) = d_n x^n + d_{n-1} x^{n-1} + ... + d_1 x + d_0 \tag{2.6} $$

şeklinde tanımlanan $p_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna n-yinci dereceden bir polinom denir. Buradaki n sayısı polinomun derecesini gösterip, $d_0, d_1, ..., d_n$ sayıları polinomun katsayılarıdır.

Tanım 2.6 $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $w(x)$, I da tanımlı pozitif bir fonksiyon, $\varphi_n(x)$ ve $\varphi_m(x)$ fonksiyonları ise I aralığında reel değerli ve integrallenebilen fonksiyonlar olsunlar. $m, n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere $m \neq n$ için

$$ (\varphi_n, \varphi_m) = \int_I \varphi_n(x) \varphi_m(x) w(x) dx = 0 \tag{2.7} $$

sağlanıyorsa $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ...$ reel fonksiyon sistemine I aralığında $w(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir denir. $m = n$ durumunda ise $\varphi_n(x)$ fonksiyonunun normu

$$ \| \varphi_n(x) \| = \left[\int_I w(x) \varphi_n^2(x) dx \right]^{1/2} ; \ n = 0,1,2,... \tag{2.8} $$

ile tanımlanır (Chihara 1978).

İyi bilinen ortogonal polinom ailelerinden birisi Jacobi ortogonal polinomlarıdır.

$$ (1-x^2)y'' + (\beta - \alpha - (\beta + \alpha + 2)x)y' + n(n + \alpha + \beta + 1)y = 0 \tag{2.9} $$

diferensiyel denkleminin çözümü olan $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ Jacobi polinomları

$$ P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} \left\{ (1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} \right\} \tag{2.10} $$

Rodrigues formülü gösterimine sahiptir. Bu polinomlar $[-1,1]$ aralığında $\omega(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir ve

$$ \begin{aligned} & \int_{-1}^{1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_m^{(\alpha,\beta)}(x) dx \\ = \ & \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+n+1)}{n! (\alpha+\beta+2n+1) \Gamma(\alpha+\beta+n+1)} \delta_{n,m} \end{aligned} \tag{2.11} $$

ortogonallik bağıntısını gerçekler (Rainville 1960). Burada $\delta_{n,m}$ Kronecker deltadır ve

$$\begin{cases} 0 & , \quad n \neq m \\ 1 & , \quad n = m \end{cases}$$

şekline tanımlıdır. Jacobi polinomlarının bazı özel durumları aşağıdaki gibidir:

i) $\alpha = \beta = 0$ için Jacobi polinomlarının bir özel hali $P_n(x) := P_n^{(0,0)}(x)$ Legendre polinomlarıdır ve

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \tag{2.12}$$

diferensiyel denkleminin çözümüdür. $P_n(x)$ Legendre polinomları

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left\{(1-x^2)^n\right\} \tag{2.13}$$

Rodrigues formülü gösterimine sahip olup

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{n,m}$$

ortogonallik bağıntısını sağlar.

ii) $\alpha = \beta$ için Jacobi polinomlarının diğer bir özel hali $P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$ ultraküresel polinomlarıdır ve

$$(1-x^2)y'' - (2\alpha+2)xy' + n(n+2\alpha+1)y = 0 \tag{2.14}$$

diferensiyel denkleminin çözümüdür (Rainville 1960). $P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$ Ultraküresel polinomları

$$P_n^{(\alpha,\alpha)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x^2)^{-\alpha} \frac{d^n}{dx^n} \left\{(1-x^2)^{n+\alpha}\right\} \tag{2.15}$$

Rodrigues formülüne sahip olup bu polinomlar $[-1,1]$ aralığından $\omega(x) = (1-x^2)^\alpha$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir, yani

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{1} (1-x^2)^\alpha P_n^{(\alpha,\alpha)}(x) P_m^{(\alpha,\alpha)}(x) dx \\ = \; & \frac{2^{2\alpha+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\alpha+n+1)}{n!(2\alpha+2n+1)\Gamma(2\alpha+n+1)} \delta_{n,m} \end{aligned} \tag{2.16}$$

ortogonallik bağıntısını gerçekler.

Teorem 2.1 $I \subset \mathbb{R}$ aralığında $\omega(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan n-yinci dereceden $\varphi_n(x)$ polinom ailesi

$$\varphi_{n+1}(x) - (xA_n + B_n)\varphi_n(x) + D_n \varphi_{n-1}(x) = 0, \;\; n = 0, 1, 2, ... \tag{2.17}$$

üç terimli rekürans bağıntısını gerçekler. Burada $A_n,\ B_n\ ve\ D_n$ katsayıları n'ye bağlı sabitlerdir ve $\varphi_{-1}(x) = 0$ dır (Szegö 1975).

Teorem 2.2 (Favard Teoremi)

$$x\varphi_n(x) = \varphi_{n+1}(x) + B_n\varphi_n(x) + D_n\varphi_{n-1}(x);\ \varphi_{-1}(x) = 0,\ \varphi_0(x) = 1 \tag{2.18}$$

rekürans bağıntısını sağlayan $\{\varphi_n\}$ polinom dizisi

$$\int_a^b w(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = \left(\prod_{i=0}^{n-1} D_{i+1}\int_a^b w(x)dx\right)\delta_{n,m} \tag{2.19}$$

ortogonallik bağıntısını sağlar (Chihara 1978).

Tanım 2.7 (c, d) aralığında tanımlı bir sınır değer problemi

$$(p(x)\varphi_n'(x))' + (\lambda_n w(x) - s(x))\varphi_n(x) = 0;\ p(x) > 0,\ w(x) > 0 \tag{2.20}$$

$$\begin{cases} \gamma_1\varphi_n(c) + \zeta_1\varphi_n'(c) = 0 \\ \gamma_2\varphi_n(d) + \zeta_2\varphi_n'(d) = 0 \end{cases} \tag{2.21}$$

olarak verilsin. Burada γ_1, γ_2, ζ_1 ve ζ_2 sabitler ve $p(x)$, $p'(x)$, $s(x)$ ve $w(x)$ fonksiyonları $[c, d]$ aralığında sürekli fonskiyonlardır. Verilen bu problem regüler Sturm-Liouville problemi olarak tanımlanmaktadır. Ayrıca c veya d sınır değerlerinden biri singüler ($p(c) = 0$ veya $p(d) = 0$) ise bu problem singüler Sturm-Liouville problemi olarak adlandırılır.

Teorem 2.3 (2.20)-(2.21) Sturm-Liouville sisteminde $p(x),\ w(x)$ ve $s(x)$ katsayıları $[c, d]$ aralığında sürekli olsunlar. Ayrıca λ_n ve λ_m özdeğerlerine karşılık gelen φ_n ve φ_m özfonksiyonları aynı aralıkta türevlenebilir olsunlar. Bu durumda φ_n ve φ_m özfonksiyonları $[c, d]$ aralığında $w(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir (Altın 2011).

İspat. $\varphi_n(x)$ ve $\varphi_m(x)$ fonksiyonları (2.20) diferensiyel denkleminin λ_n ve λ_m özdeğerlerine karşılık gelen iki çözümü olsunlar. $\varphi_n(x)$ fonksiyonu (2.20)-(2.21) probleminin bir çözümü ise

$$(p(x)\varphi_n'(x))' + (\lambda_n w(x) - s(x))\varphi_n(x) = 0 \tag{2.22}$$

ve

$$\begin{cases} \gamma_1\varphi_n(c) + \zeta_1\varphi_n'(c) = 0 \\ \gamma_2\varphi_n(d) + \zeta_2\varphi_n'(d) = 0 \end{cases}$$

sağlanacaktır. Benzer şekilde $\varphi_m(x)$ fonksiyonu (2.20)-(2.21) probleminin bir çözümü ise

$$(p(x)\varphi_m'(x))' + (\lambda_m w(x) - s(x))\varphi_m(x) = 0 \tag{2.23}$$

ve

$$\begin{cases} \gamma_1\varphi_m(c) + \zeta_1\varphi_m'(c) = 0 \\ \gamma_2\varphi_m(d) + \zeta_2\varphi_m'(d) = 0 \end{cases}$$

gerçeklenir. (2.22) denklemi $\varphi_m(x)$ ile (2.23) denklemi $\varphi_n(x)$ ile çarpılıp taraf tarafa çıkarılırsa

$$(p(x)\varphi_n'(x))'\varphi_m(x) - (p(x)\varphi_m'(x))'\varphi_n(x) + \varphi_n(x)\varphi_m(x)[\lambda_n - \lambda_m]w(x) = 0$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{d}{dx}[p(x)(\varphi_n(x)\varphi_m'(x) - \varphi_n'(x)\varphi_m(x)] = (\lambda_m - \lambda_n)w(x)\varphi_m(x)\varphi_n(x)$$

yazılabilir. Her iki tarafın (c, d) aralığında integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & (\lambda_m - \lambda_n)\int_c^d w(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx \\ = \;& p(d)[\varphi_n(d)\varphi_m'(d) - \varphi_n'(d)\varphi_m(d)] - p(c)[\varphi_n(c)\varphi_m'(c) - \varphi_n'(c)\varphi_m(c)] \end{aligned}$$

elde edilir. $\varphi_n(x)$ ve $\varphi_m(x)$ sınır koşullarını sağladığından

$$\varphi_n(d)\varphi_m'(d) - \varphi_n'(d)\varphi_m(d) = 0 \text{ ve } \varphi_n(c)\varphi_m'(c) - \varphi_n'(c)\varphi_m(c) = 0$$

olup buradan

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_c^d w(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0$$

elde edilir.

$$m \neq n \text{ için } \int_c^d w(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0$$

sağlanır. Bu durumda $\varphi_n(x)$ ve $\varphi_m(x)$ çözümleri, (c, d) aralığında (2.21) sınır koşulları altında $w(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir. Yani,

$$\int_c^d w(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = \left(\int_c^d w(x)\varphi_n^2(x)dx\right)\delta_{n,m} \tag{2.24}$$

sağlanır. ■

Tanım 2.8 Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\varphi_n(-x) = (-1)^n\varphi_n(x)$ eşitliğini sağlayan $\varphi_n(x)$ fonksiyonuna simetrik bir fonksiyon denir.

3. STURM-LİOUVİLLE PROBLEMİNİN SİMETRİK BİR GENELLEMESİ

$D(x), E(x), F(x), G(x)$ ve $H(x)$ keyfi fonksiyonlar ve $\{\lambda_n\}$ sabitler dizisi olmak üzere

$$D(x)\varphi_n''(x) + E(x)\varphi_n'(x) + \left(\lambda_n F(x) + G(x) + \frac{1-(-1)^n}{2}H(x)\right)\varphi_n(x) = 0 \quad (3.1)$$

diferensiyel denklemini sağlayan simetrik fonksiyonların bir dizisi $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ olsun. $H(x) = 0$ durumunda (3.1) denklemi, (2.20) denklemine eş değer olur. $\varphi_n(x)$, (3.1) denkleminin $\varphi_n(-x) = (-1)^n\varphi_n(x)$ koşulunu sağlayan simetrik çözümü olduğundan $D(x)$, $F(x)$, $G(x)$ ve $H(x)$ çift fonksiyon, $E(x)$ ise tek fonksiyondur.
(3.1) denklemini self-adjoint forma dönüştürmek için pozitif bir $Z(x)$ fonksiyonu ile çarparsak

$$Z(x)D(x)\varphi_n''(x)+Z(x)E(x)\varphi_n'(x)+Z(x)(\lambda_n F(x)+G(x)+\frac{1-(-1)^n}{2}H(x))\varphi_n(x) = 0$$

yazılabilir. Bu denklemin self-adjoint olabilmesi için

$$[Z(x)D(x)]' = Z(x)E(x)$$

olmalıdır. Buradan

$$Z(x) = \exp\left(\int \frac{E(x)-D'(x)}{D(x)}dx\right) = \frac{1}{D(x)}\exp\left(\int \frac{E(x)}{D(x)}dx\right) \quad (3.2)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} Z(-x) &= \frac{1}{D(-x)}\exp\left(\int \frac{E(-x)}{D(-x)}d(-x)\right) = \frac{1}{D(x)}\exp\left(\int \frac{-E(x)}{D(x)}(-dx)\right) \\ &= \frac{1}{D(x)}\exp\left(\int \frac{E(x)}{D(x)}dx\right) = Z(x) \end{aligned}$$

olduğundan $Z(x)$ çift fonksiyondur. (3.1) denklemi self-adjoint formda

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(D(x)Z(x)\frac{d\varphi_n(x)}{dx}\right) &= -(\lambda_n F(x)+G(x))Z(x)\varphi_n(x) \\ &\quad -\frac{1-(-1)^n}{2}H(x)Z(x)\varphi_n(x) \end{aligned} \quad (3.3)$$

şeklinde yazılır. Bu denklem $\varphi_m(x)$ fonksiyonu için yazılırsa

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(D(x)Z(x)\frac{d\varphi_m(x)}{dx}\right) &= -(\lambda_m F(x)+G(x))Z(x)\varphi_m(x)\\ &\quad -\frac{1-(-1)^m}{2}H(x)Z(x)\varphi_m(x) \qquad (3.4)\end{aligned}$$

elde edilir. (3.3) denklemi $\varphi_m(x)$ ile, (3.4) denklemi $\varphi_n(x)$ ile çarpılıp taraf tarafa çıkarılırsa

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\left(D(x)Z(x)(\varphi_n'(x)\varphi_m(x)-\varphi_n(x)\varphi_m'(x))\right)\\ =\;&(\lambda_m-\lambda_n)F(x)Z(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)\\ &-\frac{(-1)^m-(-1)^n}{2}H(x)Z(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x) \qquad (3.5)\end{aligned}$$

bulunur. $D(x)Z(x)$ çift fonksiyon olduğundan ortogonallik aralığı $[-\delta,\delta]$ olmalıdır. $D(x)Z(x)$ çarpımının $x=\delta$ da sıfır olacağı kabul edilip (3.5) eşitliğinin her iki yanının $[-\delta,\delta]$ aralığında integrali alınırsa

$$\begin{aligned}&\left[D(x)Z(x)(\varphi_n'(x)\varphi_m(x)-\varphi_n(x)\varphi_m'(x))\right]_{-\delta}^{\delta}\\ =\;&(\lambda_m-\lambda_n)\int_{-\delta}^{\delta}F(x)Z(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx\\ &-\frac{(-1)^m-(-1)^n}{2}\int_{-\delta}^{\delta}H(x)Z(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx \qquad (3.6)\end{aligned}$$

elde edilir. (3.6) denkleminin sol tarafı sıfıra eşit olduğundan ortogonallik özelliğini göstermek için

$$B(n,m)=\frac{(-1)^m-(-1)^n}{2}\int_{-\delta}^{\delta}H(x)Z(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx$$

fonksiyonunun her $m,n\in\mathbb{Z}^+$ için sıfıra eşit olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Burada m ve n nin genel dört durumu düşünülmelidir.

a) m ve n'nin ikisi de çift (ya da tek) ise $B(n,m)=0$ olur. Çünkü,

$$\frac{(-1)^{2i}-(-1)^{2j}}{2}=0$$

olduğundan $B(n,m)=0$ olacaktır.

b) Eğer m tek ve n çift ise (ya da tam tersi)

$$\begin{aligned}B(2i,2j+1) &= \frac{(-1)^{2j+1}-(-1)^{2i}}{2}\int_{-\delta}^{\delta}H(x)Z(x)\varphi_{2j+1}(x)\varphi_{2i}(x)dx\\ &= -\int_{-\delta}^{\delta}H(x)Z(x)\varphi_{2j+1}(x)\varphi_{2i}(x)dx \qquad (3.7)\end{aligned}$$

sağlanır. $H(x), Z(x)$ ve $\varphi_{2i}(x)$ çift fonksiyonlar ve $\varphi_{2j+1}(x)$ tek fonksiyon olduğundan (3.7) denkleminde integrand tek fonksiyondur. Buradan $B(2i, 2j+1) = 0$ olduğu açıktır. Benzer olarak $B(2j+1, 2i) = 0$ olduğu da görülür (Masjed-Jamei 2007a). Bunların bir sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1 $\varphi_n(-x) = (-1)^n \varphi_n(x)$ simetriklik koşulunu sağlayan $\varphi_n(x)$ fonksiyonu (3.1) denkleminin bir çözümü ise

$$\int_{-\delta}^{\delta} W^*(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = \left(\int_{-\delta}^{\delta} W^*(x)\varphi_n^2(x)dx\right)\delta_{n,m} \tag{3.8}$$

ortogonallik özelliğini sağlar. Burada

$$\begin{aligned} W^*(x) &= F(x)Z(x) = F(x)\exp\left(\int \frac{E(x)-D'(x)}{D(x)}dx\right) \\ &= \frac{F(x)}{D(x)}\exp\left(\int \frac{E(x)}{D(x)}dx\right) \end{aligned} \tag{3.9}$$

ağırlık fonksiyonudur. $F(x) > 0$ için $W^*(x)$ pozitif ve $[-\delta, \delta]$ aralığında çift olan bir fonksiyondur (Masjed-Jamei 2007a, 2020).

3.1 Geliştirilmiş Legendre Fonksiyonlarının Simetrik Genelleştirilmesi

Geliştirilmiş Legendre fonksiyonları

$$(1-x^2)\frac{d^2\Psi}{dx^2} - 2x\frac{d\Psi}{dx} + \left(\mu_n - \frac{\nu}{1-x^2}\right)\Psi = 0 \tag{3.10}$$

diferensiyel denklemini sağlar (Abramowitz ve Stegun 1972, Arfken 1985, Masjed-Jamei 2007a). Burada μ_n özdeğer ve ν sabittir. μ_n ve ν'nün farklı değerleri için (3.10) denkleminin üç tip çözümü vardır.

i) $\mu_n = (n+\alpha)(n+\alpha+1)$ ve $\nu = \alpha^2$; $n \in \mathbb{Z}^+, \alpha > -1$ için (3.10) denkleminin bir çözümü, $P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$ ultraküresel polinomlar olmak üzere

$$\Psi(x) = U_n^{(\alpha)}(x) = (1-x^2)^{\frac{\alpha}{2}} P_n^{(\alpha,\alpha)}(x) \tag{3.11}$$

fonksiyonlarıdır. Bunu görmek için (2.15) ile tanımlanan $P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$ ultraküresel polinomların sağladığı

$$(1-x^2)v'' - (2\alpha+2)xv' + n(n+2\alpha+1)v = 0$$

diferensiyel denkleminde

$$v = (1-x^2)^{\frac{-\alpha}{2}}\Psi$$

değişken değiştirmesi yapılırsa gerekli düzenlemelerden sonra

$$(1-x^2)\Psi''(x) - 2x\Psi'(x) + \left((n+\alpha)(n+\alpha+1) - \frac{\alpha^2}{1-x^2}\right)\Psi(x) = 0$$

elde edilir. Bu da gösterir ki (3.11) fonksiyonları, (3.10) diferensiyel denkleminin bir çözümüdür. Ultraküresel polinomların (2.16) ortogonallik bağıntısından yararlanarak kolaylıkla görülür ki $U_n^{(\alpha)}(x) = (1-x^2)^{\alpha/2}P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$ fonksiyonları $[-1,1]$ aralığında $\omega(x) = 1$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\alpha}P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)P_m^{(\alpha,\alpha)}(x)dx \\
= &\int_{-1}^{1}U_n^{(\alpha)}(x)U_m^{(\alpha)}(x)dx = \left(\int_{-1}^{1}(U_n^{(\alpha)}(x))^2dx\right)\delta_{n,m} \\
= &\frac{2^{2\alpha+1}\Gamma^2(n+\alpha+1)}{n!(2n+2\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}\delta_{n,m}
\end{aligned}$$

sağlanır.

ii) $\mu_n = n(n+1)$ ve $\nu = k^2$; $n, k \in \mathbb{Z}^+$ için (3.10) denkleminin bir çözümü,

$$\Psi(x) = P_n^k(x) = (1-x^2)^{\frac{k}{2}}\frac{d^k(P_n(x))}{dx^k} \tag{3.12}$$

dır. Burada $P_n(x)$ polinomları (2.13) ile tanımlanan Legendre polinomlarıdır. $v = P_n(x)$ Legendre polinomları

$$(1-x^2)v'' - 2xv' + n(n+1)v = 0$$

diferensiyel denklemini sağlar. Bu denklemin birinci ve ikinci mertebeden türevleri alınırsa sırasıyla

$$(1-x^2)v''' - 4xv'' + [n(n+1)-2]v' = 0$$

ve

$$(1-x^2)v^{(4)} - 6xv''' + [n(n+1)-6]v'' = 0$$

elde edilir. Böyle devam edilerek k-yıncı mertebeden türev alınırsa

$$(1-x^2)\frac{d^{k+2}v}{dx^{k+2}} - 2(k+1)\frac{d^{k+1}v}{dx^{k+1}} + (n-k)(n+k+1)\frac{d^kv}{dx^k} = 0$$

bulunur. Burada $\frac{d^k v}{dx^k} = v_1$ denilirse,

$$(1-x^2)v_1'' - 2(k+1)v_1' + (n-k)(n+k+1)v_1 = 0$$

elde edilir. Bu denklemde

$$v_1 = (1-x^2)^{\frac{-k}{2}}\Psi$$

değişken değiştirmesi yapılıp bulunanlar yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & (1-x^2)^{\frac{-k}{2}+1}\Psi'' + 2xk(1-x^2)^{\frac{-k}{2}}\Psi' + [x^2k(k+2)(1-x^2)^{\frac{-k}{2}-1} \\ & +k(1-x^2)^{\frac{-k}{2}}]\Psi \\ & -2(k+1)xk(1-x^2)^{\frac{-k}{2}-1}\Psi - 2(k+1)x(1-x^2)^{\frac{-k}{2}}\Psi' \\ & +(n-k)(n+k+1)(1-x^2)^{\frac{-k}{2}}\Psi \\ = \; & 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Denklem $(1-x^2)^{\frac{k}{2}}$ ile çarpılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$(1-x^2)\Psi''(x) - 2x\Psi'(x) + \left(n(n+1) - \frac{k^2}{1-x^2}\right)\Psi(x) = 0$$

bulunur. Bu da gösterir ki (3.12) fonksiyonları (3.10) denkleminin bir çözümüdür. Şimdi de $P_n^k(x)$ fonksiyonlarının

$$\int_{-1}^{1} P_i^k(x)P_j^k(x)dx = \left(\int_{-1}^{1}(P_i^k(x))^2 dx\right)\delta_{i,j} = \frac{2(i+k)!}{(2i+1)(i-k)!}\delta_{i,j}$$

ortogonallik bağıntısını sağladığını gösterelim.

$$P_n^k(x) = (1-x^2)^{\frac{k}{2}}\frac{d^k}{dx^k}P_n(x) \text{ ve } P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,\ U = x^2-1$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} P_i^k(x)P_j^k(x)dx &= \left(\int_{-1}^{1}(-U)^{\frac{k}{2}}\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1}{2^i i!}\frac{d^i}{dx^i}U^i\right)(-U)^{\frac{k}{2}}\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1}{2^j j!}\frac{d^j}{dx^j}U^j\right)dx\right) \\ &= \frac{(-1)^k}{2^{i+j}i!j!}\int_{-1}^{1}U^k\left(\frac{d^{i+k}}{dx^{i+k}}U^i\right)\left(\frac{d^{j+k}}{dx^{j+k}}U^j\right)dx = \frac{(-1)^k}{2^{i+j}i!j!}I \end{aligned}$$

yazılabilir.

I integralinde

$$U^k\frac{d^{i+k}}{dx^{i+k}}U^i = u \text{ ve } \frac{d^{j+k}}{dx^{j+k}}U^j dx = dv$$

denilip $j+k$ kez kısmi integrasyon uygulanırsa ve $U=x^2-1$ fonksiyonunun $x=1$ ve $x=-1$ de sıfır olduğu göz önünde tutulursa

$$\int_{-1}^{1} P_i^k(x)P_j^k(x)dx = \frac{(-1)^k(-1)^{j+k}}{2^{i+j}i!j!}\int_{-1}^{1}\frac{d^{j+k}}{dx^{j+k}}\left(U^k\frac{d^{i+k}}{dx^{i+k}}U^i\right)U^j dx \tag{3.13}$$

elde edilir. Leibniz formulünden,

$$U^j\frac{d^{j+k}}{dx^{j+k}}\left(U^k\frac{d^{i+k}}{dx^{i+k}}U^i\right) = U^j\sum_{l=0}^{j+k}\frac{(j+k)!}{l!(j+k-l)!}\frac{d^{i+k+l}}{dx^{i+k+l}}U^i\frac{d^{j+k-l}}{dx^{j+k-l}}U^k \tag{3.14}$$

olduğundan bu eşitliğin sıfırdan farklı olması için

$$j+k-l \le 2k \text{ ve } i+k+l \le 2i$$

olmalıdır. Buradan

$$j-k \le l \le i-k$$

olup $i<j$ için çözüm yoktur. Diğer yandan

$$U^k\frac{d^{j+k}}{dx^{j+k}}U^j = u \text{ ve } \frac{d^{i+k}}{dx^{i+k}}U^i dx = dv$$

denilip benzer işlemler uygulandığında $i>j$ için de çözüm olmadığı görülür. O halde sadece $i=j$ için çözüm vardır.

(3.14) ifadesi (3.13) de yerine yazıldığında $i=j$ ve $l=i-k$ için

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}[P_i^k(x)]^2dx &= \frac{(-1)^{i+2k}(i+k)!}{2^{2i}(2k)!i!i!(i-k)!}\int_{-1}^{1}U^i\left(\frac{d^{2k}}{dx^{2k}}U^k\right)\left(\frac{d^{2i}}{dx^{2i}}U^i\right)dx\\ &= \frac{(-1)^{i+2k}(2i)!(i+k)!}{2^{2i}i!i!(i-k)!}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^i dx\end{aligned}$$

elde edilir. $x=\cos\theta$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}[P_i^k(x)]^2dx &= \frac{(-1)^{i+2k}(2i)!(i+k)!}{2^{2i}i!i!(i-k)!}(-1)^i\int_0^{\pi}(\sin\theta)^{2i+1}d\theta\\ &= \frac{(-1)^{i+2k}(2i)!(i+k)!}{2^{2i}i!i!(i-k)!}\frac{(-1)^i 2^{2i+1}i!i!}{(2i+1)!}\\ &= \frac{2(i+k)!}{(2i+1)(i-k)!}\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buradan

$$\int_{-1}^{1}P_i^k(x)P_j^k(x)dx = \left(\int_{-1}^{1}[P_i^k(x)]^2dx\right)\delta_{i,j} = \frac{2(i+k)!}{(2i+1)(i-k)!}\delta_{i,j}$$

ortogonallik bağıntısı sağlanır (Arfken 1985).

iii) Son olarak (3.10) denkleminin bir çözümü $\mu_n = n(n+1)$ ve $\nu = \eta^2$; $-1 < \eta < 1$ için

$$\Psi(x) = V_n^{(\eta)}(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{\eta}{2}} P_n^{(\eta,-\eta)}(x),$$

fonksiyonlarıdır ve birinci tipteki çözüme benzer olarak

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} V_n^{(\eta)}(x)V_m^{(\eta)}(x)dx &= \left(\int_{-1}^{1}(V_n^{(\eta)}(x))^2dx\right)\delta_{n,m} \\ &= \left(\int_{-1}^{1}(1-x)^{\eta}(1+x)^{-\eta}\left(P_n^{(\eta,-\eta)}\right)^2dx\right)\delta_{n,m} \\ &= \frac{2\Gamma(n+\eta+1)\Gamma(n+1-\eta)}{(n!)^2(2n+1)}\delta_{n,m}\end{aligned}$$

ortogonallik bağıntısını sağlarlar (Masjed-Jamei 2007a).

Şimdi de geliştirilmiş Legendre fonksiyonlarını genişletmek için (3.1) denkleminde,

$$\begin{aligned}D(x) &= 1-x^2 = D(-x); \quad E(x) = -2x = -E(-x), \\ F(x) &= 1 = F(-x); \quad G(x) = -\frac{\nu}{1-x^2} = G(-x), \\ \lambda_n &= \mu_n; \quad H(x) = H(-x) \text{ (keyfi)},\end{aligned} \tag{3.15}$$

seçilsin.

$$(1-x^2)\varphi_n''(x) - 2x\varphi_n'(x) + \left(\mu_n - \frac{\nu}{1-x^2} + \frac{1-(-1)^n}{2}H(x)\right)\varphi_n(x) = 0 \tag{3.16}$$

denkleminin bir çözümü $\varphi_n(x) = Q_n(x;\nu,H(x))$ ise Teorem 3.1 gereğince, $W^*(x) = F(x)Z(x) = \exp\left(\int \frac{-2x-(-2x)}{1-x^2}dx\right) = e^0 = 1$ ağırlık fonksiyonuna göre $H(x) = H(-x)$ koşulu altında

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x;\nu,H(x))Q_m(x;\nu,H(x))dx = \left(\int_{-1}^{1} Q_n^2(x;\nu,H(x))dx\right)\delta_{n,m} \tag{3.17}$$

ortogonallik bağıntısı sağlanır. Burada $D(x)Z(x) = 1-x^2$ fonksiyonu $x=-1$ ve $x=1$ noktalarında sıfır olduğundan Teorem 3.1 gereğince $\delta = 1$ dir.

$H(x)$ için çeşitli seçimler yapılabilir. Örnek olarak $H(x) = 0$ seçilirse geliştirilmiş Legendre fonksiyonlarının daha önce incelenilen üç tipi elde edilir.

(3.16) denkleminin bir çözümü olarak bilinen $Q_n(x;v,H(x))$ dizisi önceden belirlenmiş $H(x) = H(-x)$ koşulu altında ortogonaldir (Masjed-Jamei 2007a).

Matematiksel fiziğin sınır değer problemlerinin çoğu bir Sturm-Liouville probleminin özfonksiyonları cinsinden fonksiyon açılımı kullanılarak çözülebilmektedir.

f fonksiyonu belirli koşullar altında

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n Q_n(x; v, H(x)) \tag{3.18}$$

şeklinde düzgün yakınsak bir seriye açılabilir. (3.18) ifadesi $Q_m(x; \nu, H(x))$ ile çarpılıp $[-1, 1]$ aralığında integral alınırsa (3.17) den,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(x) Q_m dx &= \int_{-1}^{1} \sum_{n=0}^{\infty} q_n Q_m Q_n dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} q_n \int_{-1}^{1} Q_m Q_n dx \\
&= \sum_{\substack{n=0 \\ (n \neq m)}}^{\infty} q_n \int_{-1}^{1} Q_m Q_n dx + q_n \int_{-1}^{1} Q_n^2 dx \\
&= q_n \int_{-1}^{1} Q_n^2 dx
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan da

$$q_n = \frac{\int_{-1}^{1} f(x) Q_n(x; \nu, H(x)) dx}{\int_{-1}^{1} (Q_n(x; \nu, H(x))^2 dx}$$

olarak bulunur (Masjed-Jamei 2007a).

4. DÖRT BAĞIMSIZ PARAMETRELİ SİMETRİK ORTOGONAL POLİNOMLARIN BİR SINIFI

Bu bölümde, (3.1) diferensiyel denklemini ve Teorem 3.1'i kullanarak simetrik ortogonal fonksiyonların temel sınıfı tanımlanacak ve ortogonal polinomların bilinen simetrik dizileri daha da genellenecektir (Masjed-Jamei 2007a, 2020).
(3.1) diferensiyel denkleminde,

$$\begin{aligned} D(x) &= x^2(ax^2+b) = D(-x) \\ E(x) &= x(cx^2+d) = -E(-x) \\ F(x) &= x^2 = F(-x) \\ G(x) &= 0 = G(-x) \\ H(x) &= -d = H(-x) \end{aligned} \tag{4.1}$$

ve $\lambda_n = -n(c+(n-1)a)$ olarak seçilirse,

$$\begin{aligned} &x^2(ax^2+b)\varphi_n''(x) + x(cx^2+d)\varphi_n'(x) \\ &-(n(c+(n-1)a)x^2 + (1-(-1)^n)d/2)\varphi_n(x) = 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin serisel çözümlerini arayalım. İlk olarak $n = 2m$ için

$$x(ax^2+b)\varphi_{2m}''(x) + (cx^2+d)\varphi_{2m}'(x) - 2m(c+(2m-1)a)x\varphi_{2m}(x) = 0 \tag{4.3}$$

denkleminin serisel çözümünü araştıralım. Burada

$$h_0(x) = x(ax^2+b),\ h_1(x) = cx^2+d \text{ ve } h_2(x) = -2m(c+(2m-1)a)x$$

şeklindedir. $h_0(0) = 0$ olduğundan $x = 0$ bu denklemin bir aykırı noktasıdır.

$$\lim_{x\longrightarrow 0}(x-0)\frac{h_1(x)}{h_0(x)} = \frac{d}{b} \text{ ve } \lim_{x\longrightarrow 0}(x-0)^2\frac{h_2(x)}{h_0(x)} = 0$$

limitleri sınırlı olduğundan $x = 0$ bu denklemin bir düzgün aykırı noktasıdır. O halde (4.3) denkleminin $y = \sum_{k=0}^{\infty} e_k x^{k+t}$ formunda bir çözümünü arayalım.

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{k=0}^{\infty}(k+t)e_k x^{k+t-1} \\ y'' &= \sum_{k=0}^{\infty}(k+t)(k+t-1)e_k x^{k+t-2} \end{aligned}$$

türevleri denklemde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} & x(ax^2+b)\sum_{k=0}^{\infty}(k+t)(k+t-1)e_k x^{k+t-2} + (cx^2+d)\sum_{k=0}^{\infty}(k+t)e_k x^{k+t-1} \\ & -2m(c+(2m-1)a)x\sum_{k=0}^{\infty}e_k x^{k+t} \\ = & \sum_{k=0}^{\infty}\left[a(k+t)(k+t-1)+(k+t)c-2m(c+(2m-1)a\right]e_k x^{k+t+1} \\ & +\sum_{k=0}^{\infty}\left[b(k+t)(k+t-1)+d(k+t)\right]e_k x^{k+t-1}=0 \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & \left[bt(t-1)+dt\right]e_0 x^{t-1} + \left[b(t+1)t+d(t+1)\right]e_1 x^t \\ & +\sum_{k=0}^{\infty}\left[\begin{array}{c}(a(k+t)(k+t-1)+(k+t)c-2m(c+(2m-1)a))e_k \\ +(b(k+t+2)(k+t+1)+d(k+t+2))e_{k+2}\end{array}\right]x^{k+t+1} \\ = & \ 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $e_0 \neq 0$ için

$$bt(t-1)+dt=0 \ \Rightarrow t=0 \text{ ve } t=1-\frac{d}{b}$$

indisel denklemi elde edilir. $t=0$ için

$$\left[b(t+1)t+d(t+1)\right]e_1=0$$

$$d.e_1=0 \Rightarrow e_1=0 \qquad (d\neq 0)$$

bulunur. Bu durumda $e_1=0$ olduğundan $e_{2k+1}=0$ $(k=0,1,2,...)$ elde edilir.

$$\begin{aligned} & \left(a(k+t)(k+t-1)+(k+t)c-2m(c+(2m-1)a)\right)e_k \\ & +(b(k+t+2)(k+t+1)+d(k+t+2))e_{k+2} \\ = & \ 0 \end{aligned}$$

genel indirgeme formülünden $t=0$ için

$$e_{k+2}=-\frac{k(a(k-1)+c)-2m(c+(2m-1)a)}{(k+2)(b(k+1)+d)}e_k \ ; \ k=0,1,2,...$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
k &= 0 \text{ için } e_2 = \frac{2m(c+(2m-1)a)}{2(b+d)} \\
k &= 2 \text{ için } e_4 = -\frac{2(a+c)-2m(c+(2m-1)a)}{4(3b+d)}e_2 \\
k &= 4 \text{ için } e_6 = -\frac{4(3a+c)-2m(c+(2m-1)a)}{6(5b+d)}e_4 \\
&\quad . \\
&\quad . \\
&\quad . \\
k &= 2k-2 \text{ için } e_{2k} = -\frac{(2k-2)(a(2k-3)+c)-2m(c+(2m-1)a)}{2k(b(2k-1)+d)}e_{2k-2}
\end{aligned}$$

olup e_k lar taraf tarafa çarpıldığında

$$e_{2k} = \frac{\left\{ \begin{array}{c} (-1)^{k-1}2^k\left[m(c+(2m-1)a\right]\left[(a+c)-m(c+(2m-1)a)\right] \\ \ldots\left[(k-1)(a(2k-3)+c)-m(c+(2m-1)a)\right] \end{array} \right\}}{2.4.6\ldots 2k(b+d)(3b+d)(5b+d)\ldots(b(2k-1)+d)}$$

$$= \frac{\left\{ \begin{array}{c} (-1)^{k-1}\left[m(c+(2m-1)a\right]\left[-(m-1)(a(2m+1)+c)\right] \\ \ldots\left[-(m-k+1)((2m+2k-3)a+c)\right] \end{array} \right\}}{k!\prod_{j=0}^{k-1}(b(2j+1)+d)}$$

$$= \frac{\left\{ \begin{array}{c} (m-k)!m(m-1)\ldots(m-k+1)\left[c+(2m-1)a)\right]\left[c+(2m+1)a\right] \\ \ldots\left[c+(2m+2k-3)a\right] \end{array} \right\}}{(m-k)!k!\prod_{j=0}^{k-1}(b(2j+1)+d)}$$

$$= \frac{m!}{(m-k)!k!}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{c+a(2m+2j-1)}{b(2j+1)+d}$$

formunda bulunur. $k > m$ için $e_{2k} = 0$'dır. Buradan $k = 0, 1, 2, ..., m$ için

$$e_{2k} = \binom{m}{m-k}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{c+a(2m+2j-1)}{b(2j+1)+d}$$

olup

$$\begin{aligned} y &= \sum_{k=0}^{m} e_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{m} e_{2k+1} x^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{m-k} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{c + a(2m+2j-1)}{b(2j+1)+d} x^{2k} \end{aligned}$$

polinom çözümüne varılır. Burada $k \longrightarrow m-k$ yazılırsa

$$y = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \prod_{j=0}^{m-(k+1)} \frac{c + a(2m+2j-1)}{b(2j+1)+d} x^{2m-2k}$$

bulunur. Bu durumda $n = 2m$ için (4.3) denkleminin polinom çözümü

$$S_{2m}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} |x\right) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left(\prod_{j=0}^{m-(k+1)} \frac{c + a(2m+2j-1)}{b(2j+1)+d} \right) x^{2m-2k}$$

şeklinde elde edilir.

Benzer şekilde (4.2) denkleminde $n = 2m+1$ alınırsa

$$\begin{aligned} & x^2(ax^2+b)\varphi''_{2m+1}(x) + x(cx^2+d)\varphi'_{2m+1}(x) \\ & -((2m+1)(c+2ma)x^2+d)\varphi_{2m+1}(x) = 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

elde edilir. Bu denklemin $x = 0$ düzgün aykırı noktası civarında $y = \sum_{k=0}^{\infty} e_k x^{k+t}$ formunda serisel çözümü aranırsa

$$S_{2m+1}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} |x\right) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left(\prod_{j=0}^{m-(k+1)} \frac{(2m+2j+1)a + c}{(2j+3)b+d} \right) x^{2m+1-2k} \tag{4.5}$$

çözümü bulunur. $S_{2m}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} |x\right)$ ve $S_{2m+1}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} |x\right)$ çözümleri birleştirilirse, (4.2) denkleminin polinom çözümü,

$$S_n\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} |x\right) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{[n/2]}{k} \left(\prod_{i=0}^{[n/2]-(k+1)} \frac{(2i + (-1)^{n+1} + 2[n/2])a + c}{(2i+(-1)^{n+1}+2)b+d} \right) x^{n-2k} \tag{4.6}$$

olarak elde edilir (Masjed-Jamei 2007b). Burada $\prod_{r=0}^{-1} h_r = 1$ olarak kabul edilmektedir. (4.6) çözümünde ne b ve d ne de a ve c parametreleri aynı anda yok olamazlar.

(4.6) polinom çözümünün başkatsayısı

$$M_n = \prod_{i=0}^{[n/2]-1} \frac{(2i+(-1)^{n+1}+2[n/2])a+c}{(2i+(-1)^{n+1}+2)b+d} \tag{4.7}$$

olmak üzere monik polinom çözümleri

$$\overline{S}_n \left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} |x \right) = \frac{1}{M_n} S_n \left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} |x \right) \tag{4.8}$$

formunda yazılabilir. Bu monik polinomların ilk birkaçı aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
\overline{S}_0 \left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} |x \right) &= 1 \\
\overline{S}_1 \left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} |x \right) &= x \\
\overline{S}_2 \left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} |x \right) &= x^2 + \frac{b+d}{a+c} \\
\overline{S}_3 \left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} |x \right) &= x^3 + \frac{3b+d}{3a+c} x \\
\overline{S}_4 \left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} |x \right) &= x^4 + 2\frac{3b+d}{5a+c} x^2 + \frac{(b+d)(3b+d)}{(3a+c)(5a+c)} \\
\overline{S}_5 \left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} |x \right) &= x^5 + 2\frac{5b+d}{7a+c} x^3 + \frac{(3b+d)(5b+d)}{(5a+c)(7a+c)} x
\end{aligned}$$

Sonuç 4.1 (4.6) ve (4.8) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
\overline{S}_{2n+1} \left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} |x \right) &= \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(2i+3)b+d}{(2i+1+2n)a+c} \\
&\quad \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \prod_{i=0}^{n-(k+1)} \left(\frac{(2i+1+2n)a+c}{(2i+3)b+d} \right) x^{2n+1-2k}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\overline{S}_{2n} \left(\begin{array}{cc} c+2a & d+2b \\ a & b \end{array} | \, x \right) &= \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(2i+3)b+d}{(2i+1+2n)a+c} \\
&\quad \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \prod_{i=0}^{n-(k+1)} \left(\frac{(2i+1+2n)a+c}{(2i+3)b+d} \right) x^{2n-2k}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\overline{S}_{2n+1}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array}|x\right) = x\overline{S}_{2n}\left(\begin{array}{cc} c+2a & d+2b \\ a & b \end{array}|\, x\right) \tag{4.9}$$

eşitliği sağlanır. Böylelikle (4.9)'dan $\varphi_n(x)$ simetrik dizisi için

$$\varphi_{2n}(x) = \overline{S}_{2n}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array}|x\right),\ \varphi_{2n+1}(x) = x\overline{S}_{2n}\left(\begin{array}{cc} c+2a & d+2b \\ a & b \end{array}|\, x\right) \tag{4.10}$$

eşitlikleri gerçeklenir ve (4.10) polinomları (4.2) genelleştirilmiş Sturm-Liouville denkleminin bir çözümüdür (Masjed-Jamei 2008).

Teorem 4.1 $\overline{S}_n\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array}|x\right)$ polinomları

$$\begin{aligned}\overline{S}_n\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array}|x\right) &= x^n {}_2F_1\left(-[n/2], (b-d)/2b - [(n+1)/2];\right. \\ &\qquad \left. -(c+(2n-3)a)/2a; -\frac{b}{ax^2}\right)\end{aligned}$$

hipergeometrik gösterimine sahiptir (Masjed-Jamei 2007b).

İspat. (4.6) polinomlarının açık bir formunun genel hipergeometrik gösterimini ifade edebilmek için bu polinomların katsayıları Pochhammer sembolü kullanılarak yazılabilir (Masjed-Jamei 2007b)

$$\begin{aligned}&\prod_{i=0}^{[n/2]-(k+1)} (2i+(-1)^{n+1}+2[n/2])a+c \\ =\ & (a/2)^{[n/2]-k}(c/2a+[n/2]+(-1)^{n+1}/2)_{[n/2]-k}\end{aligned}$$

için

$$\begin{aligned}\overline{S}_n &= \sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{[n/2]}{k}\left(\prod_{i=0}^{[n/2]-(k+1)}\frac{(2i+(-1)^{n+1}+2[n/2])a+c}{(2i+(-1)^{n+1}+2)b+d}\right)x^{n-2k} \\ &\quad\times\prod_{i=0}^{[n/2]-1}\frac{(2i+(-1)^{n+1}+2)b+d}{(2i+(-1)^{n+1}+2[n/2])a+c}\end{aligned}$$

$$= x^n \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{[n/2]}{k} \left(\frac{(a/2)^{[n/2]-k}(c/2a+[n/2]+(-1)^{n+1}/2)_{[n/2]-k}}{\prod_{i=0}^{[n/2]-(k+1)} (2i+(-1)^{n+1}+2)b+d} \right)$$
$$\times \prod_{i=0}^{[n/2]-1} \frac{(2i+(-1)^{n+1}+2)b+d}{(2i+(-1)^{n+1}+2[n/2])a+c} x^{-2k} \tag{4.11}$$

olduğu söylenebilir.

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{-n(-n+1)...(-n+k-1)}{k!}(-1)^k \\ &= \frac{(-n)_k(-1)^k}{k!} \end{aligned}$$

için (4.11) ifadesi

$$\overline{S}_n = x^n \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-[n/2])_k}{k!}(-1)^k \left(\frac{(a/2)^{[n/2]-k}(c/2a+[n/2]+(-1)^{n+1}/2)_{[n/2]-k}}{\prod_{i=0}^{[n/2]-(k+1)} (2i+(-1)^{n+1}+2)b+d} \right)$$
$$\times \prod_{i=0}^{[n/2]-1} \frac{(2i+(-1)^{n+1}+2)b+d}{(2i+(-1)^{n+1}+2[n/2])a+c} x^{-2k}$$

$$= x^n \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-[n/2])_k}{k!}(-1)^k (a/2)^{[n/2]-k}(c/2a+[n/2]+(-1)^{n+1}/2)_{[n/2]-k}\ x^{-2k}$$
$$\times \left(\prod_{i=[n/2]-k}^{[n/2]-1} (2i+(-1)^{n+1}+2)b+d \right) \left(\prod_{i=0}^{[n/2]-1} \frac{1}{(2i+(-1)^{n+1}+2[n/2])a+c} \right)$$

$$= x^n \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-[n/2])_k}{k!}(-1)^k (a/2)^{[n/2]-k} \frac{(c/2a+[n/2]+(-1)^{n+1}/2)_{[n/2]}}{(-c/2a-2[n/2]-(-1)^{n+1}/2+1)_k(-1)^k}\ x^{-2k}$$
$$\times \left(\prod_{i=[n/2]-k}^{[n/2]-1} (2i+(-1)^{n+1}+2)b+d \right)$$
$$\times \frac{1}{(a/2)^{[n/2]}(c/2a+[n/2]+(-1)^{n+1}/2)_{[n/2]}} \tag{4.12}$$

halini alır.

$$\begin{aligned}\prod_{i=[n/2]-k}^{[n/2]-1}(2i+(-1)^{n+1}+2)b+d &= ((2[n/2]-2k+(-1)^{n+1}+2)b+d)\\ &\quad\times((2[n/2]-2k+2+(-1)^{n+1}+2)b+d)\\ &\quad.\\ &\quad.\\ &\quad.\\ &\quad\times((2[n/2]-2k+2k+(-1)^{n+1}+2k)b+d)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= 2^k b^k(-1)^k(-[n/2]+k+(-1)^n/2-1-d/2b)\\ &\quad\times(-[n/2]+k+(-1)^n/2-2-d/2b)\\ &\quad.\\ &\quad.\\ &\quad.\\ &\quad\times(-[n/2]+k+(-1)^n/2-k-d/2b)\\ &= 2^k b^k(-1)^k((b-d)/2b-[(n+1)/2])_k\end{aligned}$$

ve

$$(-c/2a-2[n/2]+(-1)^n/2+1)_k=(-(c+(2n-3)a)/2a)_k$$

olup bunlar (4.12) de yerine yazılırsa,

$$\overline{S}_n=x^n\sum_{k=0}^{[n/2]}\left(-\frac{b}{ax^2}\right)^k\frac{1}{k!}\frac{(-[n/2])_k}{(-(c+(2n-3)a)/2a)_k}((b-d)/2b-[(n+1)/2])_k$$

elde edilir. Bu ifade

$${}_2F_1\left(\alpha,\beta;\gamma;x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k}\frac{x^k}{k!}$$

hipergeometrik fonksiyonlarının terimleri cinsinden

$$\begin{aligned}\overline{S}_n\left(\begin{array}{cc}c & d\\ a & b\end{array}\mid x\right) &= x^n\ {}_2F_1\left(-[n/2],(b-d)/2b-[(n+1)/2];\right.\\ &\qquad\left.-(c+(2n-3)a)/2a;-\frac{b}{ax^2}\right)\end{aligned}\tag{4.13}$$

formunda yazılabilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 4.2 $\overline{S}_n\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right)$ monik polinomları

$$\overline{S}_{n+1}(x) = x\overline{S}_n(x) + K_n\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array}\right)\overline{S}_{n-1}(x),\ n = 1, 2, ... \tag{4.14}$$

üç terimli rekürans bağıntısını gerçekler. Burada $K_n\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array}\right)$ katsayısı

$$K_n\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array}\right) = \frac{abn^2 + ((c-2a)b - (-1)^n ad)n + (c-2a)d(1-(-1)^n)/2}{(2an + c - a)(2an + c - 3a)}$$

şeklinde tanımlıdır (Masjed-Jamei 2007a, 2020).

İspat. $\bar{S}_n\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right)$ polinomları için

$$\overline{S}_{n+1} = x\overline{S}_n A_n + B_n\overline{S}_n - D_n\overline{S}_{n-1} \tag{4.15}$$

formunda üç terimli bir rekürans bağıntısı arayalım. (4.8) den

$$\begin{aligned}
&\overline{S}_{n+1}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right) \\
&= \prod_{i=0}^{[\frac{n+1}{2}]-1} \frac{(2i + (-1)^{n+2} + 2)b + d}{(2i + (-1)^{n+2} + 2[(n+1)/2])a + c} S_{n+1}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right), \\
&\overline{S}_n\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right) \\
&= \prod_{i=0}^{[n/2]-1} \frac{(2i + (-1)^{n+1} + 2)b + d}{(2i + (-1)^{n+1} + 2[n/2])a + c} S_n\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right), \\
&\overline{S}_{n-1}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right) \\
&= \prod_{i=0}^{[\frac{n-1}{2}]-1} \frac{(2i + (-1)^{n} + 2)b + d}{(2i + (-1)^{n} + 2[(n-1)/2])a + c} S_{n-1}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right)
\end{aligned}$$

formunda olup bunlar (4.15) da yerine yazılıp polinom eşitliğinden x^{n+1} ve x^n nin katsayıları kıyaslandığında $A_n = 1$ ve $B_n = 0$ bulunur. $n = 2m$ için (4.15) eşitliği

$$\overline{S}_{2m+1} = x\overline{S}_{2m} - D_{2m}\overline{S}_{2m-1} \tag{4.16}$$

formuna indirgenir. Buradan x^{2m-1} in katsayıları eşitlendiğinde D_{2m} katsayısı bulunabilir. $\overline{S}_{2m+1}(x)$ polinomunda x^{2m-1} in katsayısı,

$$\prod_{i=0}^{m-1}\frac{(2i+1)b+d}{(2i+1+2m)a+c}\binom{m}{1}\left(\prod_{i=0}^{m-2}\frac{(2i+1+2m)a+c}{(2i+1)b+d}\right)$$

$x\overline{S}_{2m}(x)$ polinomunda x^{2m-1} in katsayısı,

$$\prod_{i=0}^{m-1}\frac{(2i+1)b+d}{(2i-1+2m)a+c}\binom{m}{1}\left(\prod_{i=0}^{m-2}\frac{(2i-1+2m)a+c}{(2i+1)b+d}\right)$$

ve $\overline{S}_{2m-1}(x)$ polinomunda x^{2m-1} in katsayısı 1′dir. (4.16) da polinom eşitliğinden

$$\frac{(2m+1)b+d}{(4m-1)a+c}m=\frac{(2m-1)b+d}{(4m-3)a+c}m-D_{2m}$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow\quad D_{2m}&=\left[\frac{(2m-1)b+d}{(4m-3)a+c}-\frac{(2m+1)b+d}{(4m-1)a+c}\right]m\\ &=\frac{(2mb-b+d)(4ma-a+c)-(2mb+b+d)(4ma-3a+c)}{(4ma-3a+c)(4ma-a+c)}m\\ &=\frac{-4mab+4ab-2bc+2ad}{(4ma-3a+c)(4ma-a+c)}m\end{aligned}\tag{4.17}$$

elde edilir. $n=2m-1$ için (4.15) eşitliği

$$\overline{S}_{2m}=x\overline{S}_{2m-1}-D_{2m-1}\overline{S}_{2m-2}\tag{4.18}$$

olur. x^{2m-2} nin katsayılarının eşitlenmesiyle D_{2m-1} bulunabilir. $\overline{S}_{2m}(x)$ polinomunda x^{2m-2} nin katsayısı,

$$\prod_{i=0}^{m-1}\frac{(2i+1)b+d}{(2i-1+2m)a+c}\binom{m}{1}\left(\prod_{i=0}^{m-2}\frac{(2i-1+2m)a+c}{(2i+1)b+d}\right)$$

$x\overline{S}_{2m-1}(x)$ polinomunda x^{2m-2} nin katsayısı,

$$\prod_{i=0}^{m-2}\frac{(2i+3)b+d}{(2i-1+2m)a+c}\binom{m-1}{1}\left(\prod_{i=0}^{m-3}\frac{(2i-1+2m)a+c}{(2i+3)b+d}\right)$$

ve $\overline{S}_{2m-2}(x)$ polinomunda x^{2m-2} nin katsayısı 1'dir. (4.18)'den

$$\frac{(2m-1)b+d}{(4ma-3a+c)}m=\frac{(2m-1)b+d}{(4ma-5a+c)}(m-1)-D_{2m-1}$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow\quad D_{2m-1}&=\frac{(2m-1)b+d}{(4ma-5a+c)}(m-1)-\frac{(2m-1)b+d}{(4ma-3a+c)}m\\ &=\frac{-4m^2ab+8mab-2mbc-2mad-bc+3ad-3ab-cd}{(4ma-5a+c)(4ma-3a+c)}\end{aligned}\tag{4.19}$$

elde edilir. (4.17) ve (4.19) eşitliklerinden

$$D_n = -\frac{abn^2 + ((c-2a)b - (-1)^n ad)n + (c-2a)d(1-(-1)^n)/2}{(2an+c-a)(2an+c-3a)} \tag{4.20}$$

olarak bulunur. $D_n = -K_n \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$ olmak üzere (4.14) bağıntısı gerçeklenir. ■

Şimdi de (4.14) rekürans bağıntısı bilindiğinden Favard Teoremi'ni uygulayarak polinomların normunu bulalım.

Teorem 4.3 $\overline{S}_n \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} |x$ monik polinomları

$$\begin{aligned} &\int_{-\delta}^{\delta} W \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} |x \, \overline{S}_n \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} |x \, \overline{S}_m \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} |x \, dx \\ &= \left((-1)^n \prod_{i=1}^{n} K_i \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \int_{-\delta}^{\delta} W \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} |x \, dx \right) \delta_{n,m} \end{aligned}$$

ortogonallik bağıntısını sağlarlar. Burada

$$\begin{aligned} W \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} |x &= x^2 \exp\left(\int \frac{(c-4a)x^2 + (d-2b)}{x(ax^2+b)} dx \right) \\ &= \exp\left(\int \frac{(c-2a)x^2 + d}{x(ax^2+b)} dx \right) \end{aligned} \tag{4.21}$$

şeklindedir (Masjed-Jamei 2007a, 2020).

İspat. Favard Teoremi'ne göre (4.14) rekürans bağıntısında $B_n = 0$, $D_n = -K_n \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$ olup

$$\begin{aligned} &\int_{-\delta}^{\delta} W \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} |x \, \overline{S}_n \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} |x \, \overline{S}_m \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} |x \, dx \\ &= \left(\prod_{i=0}^{n-1} -K_{i+1} \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \int_{-\delta}^{\delta} W \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} |x \, dx \right) \delta_{n,m} \\ &= \left(\prod_{i=1}^{n} -K_i \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \int_{-\delta}^{\delta} W \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} |x \, dx \right) \delta_{n,m} \end{aligned}$$

$$= \left((-1)^n \prod_{i=1}^{n} K_i \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \int_{-\delta}^{\delta} W \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} |x \right) dx \Bigg) \delta_{n,m} \qquad (4.22)$$

sağlanır. Burada ağırlık fonksiyonu,

$$\begin{aligned} W \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} |x \Bigg) &= x^2 \exp\left(\int \frac{(c-4a)x^2 + (d-2b)}{x(ax^2+b)} dx \right) \\ &= \exp\left(\int \frac{(c-2a)x^2 + d}{x(ax^2+b)} dx \right) \qquad (4.23) \end{aligned}$$

dir. (3.2) ve (4.1) eşitliklerine göre $D(x)Z(x) = (ax^2 + b)\exp\left(\int \frac{(c-2a)x^2+d}{x(ax^2+b)}dx\right)$ fonksiyonu $x = \delta$'da (ve $x = -\delta$'da) sıfır olmalıdır. Burada standart değerler $\delta = 1$ ya da $\delta = \infty$ şeklindedir. ■

Şimdi (4.2) denkleminin daha genel bir durumunu ele alalım ve ortogonal çözümlerini araştıralım (Masjed-Jamei 2007a).

$$x^2(px^\eta + q)y'' + x(rx^\eta + s)y' + (\alpha_n x^\eta + \beta(1-(-1)^n)/2)y = 0 \qquad (4.24)$$

diferensiyel denklemi verilsin. p, q, r, s, η ve β reel sayılar ve $\{\alpha_n\}$ sabitler dizisi olsun. (4.24) denklemi, (3.1) denkleminin

$$\begin{aligned} D(x) &= x^2(px^\eta + q) \;\; ; \;\; E(x) = x(rx^\eta + s) \\ F(x) &= x^\eta \;\; ; \;\; G(x) = 0 \;\; ; \;\; H(x) = \beta \end{aligned}$$

özel halidir. Amacımız, (4.24) denkleminin Teorem 3.1'in koşullarını sağlayan bir çözümünü bulmaktır. Bu amaçla (4.2) denkleminde $x = t^{\eta/2}$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{2}{\eta} t^{1-\frac{\eta}{2}} \frac{dy}{dt} \\ y'' &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{\eta} t^{1-\frac{\eta}{2}} \frac{dy}{dt}\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{2}{\eta} t^{1-\frac{\eta}{2}} \frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} \\ &= \left(\frac{2}{\eta}(1-\frac{\eta}{2}) t^{-\frac{\eta}{2}} \frac{dy}{dt} + \frac{2}{\eta} t^{1-\frac{\eta}{2}} \frac{d^2y}{dt^2}\right)\left(\frac{2}{\eta} t^{1-\frac{\eta}{2}}\right) \\ &= \frac{4}{\eta^2} t^{-\eta+2} \frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{4}{\eta^2} - \frac{2}{\eta}\right) t^{-\eta+1} \frac{dy}{dt} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu türevler (4.2) denkleminde yerine yazılır ve denklem $\frac{\eta^2}{4}$ ile çarpılırsa,

$$t^2(at^\eta+b)\frac{d^2y}{dt^2}+t\left[t^\eta\left(a\left(1-\frac{\eta}{2}\right)+c\frac{\eta}{2}\right)+\left(1-\frac{\eta}{2}\right)b+\frac{\eta}{2}d\right]\frac{dy}{dt}$$
$$-\left[\frac{\eta^2}{4}n(c+(n-1)a)t^\eta+\frac{\eta^2}{4}d\left(\frac{1-(-1)^n}{2}\right)\right]y=0 \tag{4.25}$$

bulunur ve bu denklemin çözümü

$$y=S_n\left(\begin{array}{cc|c} c & d & \\ & & t^{\frac{\eta}{2}} \\ a & b & \end{array}\right)$$

şeklindedir. (4.24) ve (4.25) denklemleri karşılaştırılırsa,

$$a=p,\ b=q\ ,\ \frac{\eta}{2}c+\left(1-\frac{\eta}{2}\right)a=r\ ,\ \frac{\eta}{2}d+\left(1-\frac{\eta}{2}\right)b=s \tag{4.26}$$

olduğu görülür. (4.24) denkleminde gerekli değişimler yapılırsa,

$$\alpha_n=-\frac{\eta}{4}n(2r+(\eta n-2)p)\text{ ve }\beta=-\frac{\eta}{4}(2s+(\eta-2)q) \tag{4.27}$$

olarak elde edilir. Böylece (4.24) denkleminin çözümü

$$y=S_n\left(\begin{array}{cc|c} c & d & \\ & & t^{\frac{\eta}{2}} \\ a & b & \end{array}\right)=S_n\left(\begin{array}{cc|c} \frac{2}{\eta}r+(1-\frac{2}{\eta})p & \frac{2}{\eta}s+(1-\frac{2}{\eta})q & \\ p & q & x^{\frac{\eta}{2}} \end{array}\right)$$
$$=\sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{[n/2]}{k}\left(\prod_{i=0}^{[n/2]-(k+1)}\frac{(2i+(-1)^{n+1}+2[n/2]+1-2/\eta)p+2r/\eta}{(2i+(-1)^{n+1}+3-2/\eta)q+2s/\eta}\right)x^{(n-2k)(\eta/2)} \tag{4.28}$$

halini alır. (4.24) denklemi ve bu denklemin çözümü olan (4.28)'in Teorem 3.1'in koşullarını sağlaması için aşağıdaki koşulları sağlaması gerekir:

i) (4.28) çözümü simetrik olmalıdır.

ii) (4.24) denklemindeki katsayılar Teorem 3.1'deki çift ve tek fonksiyon olma koşullarını sağlamalıdır. Dolayısıyla,

$$\left\{\begin{array}{c}(-x)^{\frac{\eta}{2}}=-x^{\frac{\eta}{2}}\\ (-x)^\eta=x^\eta\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{c}(-1)^{\frac{\eta}{2}}=-1\\ (-1)^\eta=1\end{array}\right.;\eta\in\mathbb{R}$$

olmalıdır. Bu koşullar altında η için birçok seçenek seçilebilir. Örneğin $\eta=2/3$ seçilirse (4.25), (4.26) ve (4.27) eşitliklerinden yeni diferensiyel denklem,

$$x^2(px^{\frac{2}{3}}+q)y''+x(rx^{\frac{2}{3}}+s)y'-\left\{\frac{n}{3}\left(r+\left(\frac{n}{3}-1\right)p\right)x^{2/3}\right.$$
$$\left.+\tfrac{1}{6}\left(s-\tfrac{2}{3}q\right)(1-(-1)^n)\right\}y=0$$

olarak elde edilir. Buna karşılık gelen Teorem 3.1'in şartlarını sağlayan simetrik çözüm ise

$$y = S_n \left(\begin{array}{cc|c} 3r-2p & 3s-2q & \\ p & q & \sqrt[3]{x} \end{array} \right)$$

olarak bulunur. Bu fonksiyonlara karşılık gelen ağırlık fonksiyonu

$$W_1(x) = x^{2/3} \exp\left(\int \frac{(r-8p/3)x^{2/3} + (s-2q)}{px^{5/3} + qx} dx \right)$$

dir. Diğer taraftan ortogonallik bağıntısı da

$$\int_{-\delta^3}^{\delta^3} W_1(t) \overline{S}_n \left(\begin{array}{cc|c} 3r-2p & 3s-2q & \\ p & q & \sqrt[3]{t} \end{array} \right) \overline{S}_m \left(\begin{array}{cc|c} 3r-2p & 3s-2q & \\ p & q & \sqrt[3]{t} \end{array} \right) dt$$

$$= \left((-1)^n \prod_{i=1}^{n} K_i \left(\begin{array}{cc} 3r-2p & 3s-2q \\ p & q \end{array} \right) \int_{-\delta^3}^{\delta^3} W_1(t) dt \right) \delta_{n,m}$$

formundadır. Şimdi (4.24) denkleminin özel durumlarını inceleyelim.

4.1 $\mathbf{S}_n(x; a, b, c, d)$ Polinomlarının Dört Ana Sınıfı

Şimdi $\bar{S}_n(x; a, b, c, d)$ polinomlarının bazı özel durumlarını inceleyelim.

4.1.1 Genelleştirilmiş ultraküresel polinomlar

Bu polinomlar ilk defa Chihara (1978) tarafından çalışılmıştır. Chihara, Jacobi ortogonal polinomları ile genelleştirilmiş ultraküresel polinomlar arasında direkt bağlantı kurarak genelleştirilmiş ultraküresel polinomların temel özelliklerini elde etmiştir. Ultraküresel polinomlar yine Al-Salam, Allaway, Askey ve Dette tarafından da çalışılmıştır (Al-Salam, Allaway ve Askey 1984, Dette 1996)

Özel olarak (4.28) çözümünde

$$(p, q, r, s, \eta) = (-1, 1, -2w - 2v - 2, 2w, 2) \tag{4.29}$$

olarak seçildiğinde, genelleştirilmiş ultraküresel polinomların monik formu

$$\overline{S}_n \left(\begin{array}{cc|c} -2w-2v-2 & 2w & \\ -1 & 1 & |x \end{array} \right) = \prod_{i=0}^{[n/2]-1} \frac{2i + 2w + 2 - (-1)^n}{-2i - (2v + 2w + 2 - (-1)^n + 2[n/2])}$$

$$\times \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{[n/2]}{k} \left(\prod_{i=0}^{[n/2]-(k+1)} \frac{(-2i - (2v + 2w + 2 - (-1)^n + 2[n/2]))}{2i + 2w + 2 - (-1)^n} \right) x^{n-2k}$$

şeklindedir. Teorem 4.3 gereğince bu polinomlar için ağırlık fonksiyonu

$$W\left(\begin{array}{cc} -2w-2v-2 & 2w \\ -1 & 1 \end{array}\Big| x\right) = x^{2w}(1-x^2)^v$$

dir ve $D(x)Z(x) = x^{2w}(1-x^2)^{v+1}$ fonksiyonu $x=-1$ ve $x=1$'de sıfır olduğundan ortogonallik aralığı $[-1,1]$ aralığıdır. Dolayısıyla

$$\int_{-1}^{1} x^{2w}(1-x^2)^v \, \overline{S}_n\left(\begin{array}{cc} -2w-2v-2 & 2w \\ -1 & 1 \end{array}\Big| x\right) \overline{S}_m\left(\begin{array}{cc} -2w-2v-2 & 2w \\ -1 & 1 \end{array}\Big| x\right) dx$$
$$= \left((-1)^n \prod_{i=1}^{n} K_i\left(\begin{array}{cc} -2w-2v-2 & 2w \\ -1 & 1 \end{array}\Big| x\right) \int_{-1}^{1} x^{2w}(1-x^2)^v dx\right) \delta_{n,m}$$

ortogonallik bağıntısı sağlanır. Burada,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} x^{2w}(1-x^2)^v dx &= 2\int_0^1 x^{2w}(1-x^2)^v dx \\ &= B(w+\frac{1}{2}, v+1) = \frac{\Gamma(w+\frac{1}{2})\Gamma(v+1)}{\Gamma(w+v+\frac{3}{2})} \end{aligned} \tag{4.30}$$

olup $w+1/2>0,\ (-1)^{2w}=1$ ve $v+1>0$ dır. (4.24) denkleminde (4.27) ve (4.29) değerleri yerine yazıldığında genelleştirilmiş ultraküresel polinomların sağladığı

$$\begin{aligned} &x^2(-x^2+1)\varphi_n''(x) - 2x((w+v+1)x^2 - w)\varphi_n'(x) \\ &+\left\{n(2w+2v+n+1)x^2 + ((-1)^n-1)w\right\}\varphi_n(x) = 0 \end{aligned} \tag{4.31}$$

diferensiyel denklemi elde edilir (Masjed-Jamei 2007a).

(4.31) denkleminde

$$G_n(x;i,j) = x^i(1-x^2)^{j/2}\overline{S}_n\left(\begin{array}{cc} -2i-2j-2 & 2i \\ -1 & 1 \end{array}\Big| x\right);\ i>-\frac{1}{2},\ j>-1 \tag{4.32}$$

değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\begin{aligned} &(1-x^2)G_n''(x) - 2xG_n'(x) + ((n+i+j)(n+i+j+1) \\ &-\frac{j^2}{1-x^2} + \frac{i((-1)^n-i)}{x^2}\Big) G_n(x) = 0 \end{aligned} \tag{4.33}$$

denklemi elde edilir. Bu denklem (3.16) denklemi ile kıyaslandığında,

$$Q_n\left(x; j^2, -\frac{2}{x^2}\right) = G_n(x;1,j);\quad j>-1 \tag{4.34}$$

çözümü $\mu_n = (n+j+1)(n+j+2)$, $v = j^2$ ve $H(x) = -2/x^2$ için (4.2) denkleminin bir çözümüdür ve bu polinomlar

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} Q_n(x; v, H(x)) Q_m(x; v, H(x)) dx = \int_{-1}^{1} G_n(x; 1, j) G_m(x; 1, j) dx \\
= &\int_{-1}^{1} x^2 (1-x^2)^j \overline{S}_n \left(\begin{array}{cc} -2i-2j-2 & 2i \\ -1 & 1 \end{array} \Big| x \right) \overline{S}_m \left(\begin{array}{cc} -2i-2j-2 & 2i \\ -1 & 1 \end{array} \Big| x \right) dx \\
= &\left(\prod_{l=1}^{n} \frac{(l+1-(-1)^l)(l+1-(-1)^n+2j)}{(2l+2j+3)(2l+2j+1)} \right) \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(j+1)}{2\Gamma(j+5/2)} \delta_{n,m}
\end{aligned}$$

ortogonallik bağıntısını sağlar (Masjed-Jamei 2007a).

4.1.2 Genelleştirilmiş Hermite polinomları

Bu polinomların çeşitli özellikleri daha önce Szegö (1975), Chihara (1978) ve Dette (1978) tarafından çalışılmıştır. Ayrıca Masjed-Jamei (2007a) tarafından verilen dört parametreli simetrik ortogonal polinomların özel durumu olarak karşımıza çıkmaktadır. Gerçekten genelleştirilmiş Hermite polinomlarının sağladığı diferensiyel denklem (4.24) denkleminin $\eta = 2$, $p = 0$, $q = 1$, $r = -2$ ve $s = 2w$ için bir özel hali olup

$$x^2 \varphi_n''(x) - 2x(x^2 - w)\varphi_n'(x) + \left(2nx^2 - ((-1)^n - 1)w\right) \varphi_n(x) = 0$$

formundadır. Bu denklemin çözümü olan genelleştirilmiş Hermite polinomlarının monik formu (4.6) ve (4.7) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
\overline{S}_n \left(\begin{array}{cc} -2 & 2w \\ 0 & 1 \end{array} \Big| x \right) = &\prod_{i=0}^{[n/2]-1} \frac{2i + (-1)^{n+1} + 2 + 2w}{-2} \\
\times &\sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{[n/2]}{k} \left(\prod_{i=0}^{[n/2]-(k+1)} \frac{-2}{2i + (-1)^{n+1} + 2 + 2w} \right) x^{n-2k}
\end{aligned}$$

şeklindedir. Buna karşılık gelen ağırlık fonksiyonu (4.23)'den

$$W \left(\begin{array}{cc} -2 & 2w \\ 0 & 1 \end{array} \Big| x \right) = x^{2w} e^{-x^2}$$

dir ve Teorem 4.3'den $D(x)Z(x) = x^{2w}\exp(-x^2)$ olup $x = -\infty$ ve $x = \infty$ da sıfır olacağından bu polinomlar $(-\infty, \infty)$ aralığında ortogonaldir. Yani

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} x^{2w}e^{-x^2}\overline{S}_n\left(\begin{array}{cc} -2 & 2w \\ 0 & 1 \end{array}\Big|x\right)\overline{S}_m\left(\begin{array}{cc} -2 & 2w \\ 0 & 1 \end{array}\Big|x\right)dx \\
= &\left((-1)^n\prod_{i=1}^{n}K_i\left(\begin{array}{cc} -2 & 2w \\ 0 & 1 \end{array}\right)\right)\Gamma(w+\frac{1}{2})\delta_{n,m}
\end{aligned}$$

ortogonallik bağıntısını sağlar. Burada $w+1/2 > 0$ ve $(-1)^{2w} = 1$ dir (Masjed-Jamei 2007a).

4.1.3 $(-\infty, \infty)$ aralığında simetrik ortogonal polinomların sonlu bir sınıfı

Bu polinomlar Masjed-Jamei (2007a) tarafından verilen dört parametreli simetrik ortogonal polinomların özel durumu olarak karşımıza çıkmaktadır. Gerçekten

$$(p, q, r, s, \eta) = (1, 1, -2w - 2v + 2, -2w, 2)$$

özel seçimi altında (4.24) denklemi

$$\begin{aligned}
&x^2(x^2+1)\varphi_n''(x) - 2x((w+v-1)x^2+w)\varphi_n'(x) \\
&+\left(n(2w+2v-(n+1))x^2 + (1-(-1)^n)w\right)\varphi_n(x) = 0 \qquad (4.35)
\end{aligned}$$

formuna indirgenir. Bu denklemin bir çözümü

$$\begin{aligned}
\overline{S}_n\left(\begin{array}{cc} -2w-2v+2 & -2w \\ 1 & 1 \end{array}\Big|x\right) &= \prod_{i=0}^{[n/2]-1}\frac{2i+(-1)^{n+1}+2-2w}{2i+2[n/2]+(-1)^{n+1}+2-2w-2v} \\
\times\sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{[n/2]}{k}&\left(\prod_{i=0}^{[n/2]-(k+1)}\frac{\left(2i+2[n/2]+(-1)^{n+1}+2-2w-2v\right)}{2i+(-1)^{n+1}+2-2w}\right)x^{n-2k}
\end{aligned}$$

dir. (4.35) denkleminin self-adjoint formu

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(x^{-2w}(1+x^2)^{-v+1}\frac{d\varphi_n(x)}{dx}\right) \\
= &-(n(2w+2v-(n+1)x^2)x^{-2w-2}(x^2+1)^{-v}\varphi_n(x) \\
&+(1-(-1)^n)x^{-2w-2}(x^2+1)^{-v}\varphi_n(x) \qquad (4.36)
\end{aligned}$$

şeklindedir. $\overline{S}_n(x)$, (4.35) denkleminin bir çözümü ise

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx}\left(x^{-2w}(1+x^2)^{-v+1}\frac{d\overline{S}_n(x)}{dx}\right) \\ = \; & -(n(2w+2v-(n+1)x^2)x^{-2w-2}(x^2+1)^{-v}\overline{S}_n(x) \\ & +(1-(-1)^n)\,x^{-2w-2}(x^2+1)^{-v}\overline{S}_n(x) \end{aligned} \tag{4.37}$$

sağlanır. $\overline{S}_m(x)$, (4.35) denkleminin bir çözümü ise

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx}\left(x^{-2w}(1+x^2)^{-v+1}\frac{d\overline{S}_m(x)}{dx}\right) \\ = \; & -(m(2w+2v-(m+1)x^2)x^{-2w-2}(x^2+1)^{-v}\overline{S}_m(x) \\ & +(1-(-1)^m)\,x^{-2w-2}(x^2+1)^{-v}\;\overline{S}_m(x) \end{aligned} \tag{4.38}$$

sağlanır. (4.37) denklemi $\overline{S}_m(x)$ ile (4.38) denklemi $\overline{S}_n(x)$ ile çarpılıp taraf tarafa çıkarılıp $(-\infty,\infty)$ aralığında integral alınırsa Teorem 3.1 gereğince

$$x^{-2w}(1+x^2)^{-v+1}[\overline{S}'_n(x)\overline{S}_m(x)-\overline{S}'_m(x)\overline{S}_n(x)]_{-\infty}^{\infty}=0 \tag{4.39}$$

olmalıdır. Burada ağırlık fonksiyonu,

$$W\left(\begin{array}{cc} -2w-2v+2 & -2w \\ 1 & 1 \end{array}\Big|x\right)=x^{-2w}(x^2+1)^{-v}$$

şeklindedir. $\overline{S}_n(x)$, n-yinci dereceden bir polinom olduğundan,

$$\max\deg(\overline{S}'_n(x)\overline{S}_m(x)-\overline{S}'_m(x)\overline{S}_n(x))=n+m-1 \tag{4.40}$$

dır. Burada (4.39) eşitliğinin sağlanabilmesi için

$$-2w+2(-v+1)+n+m-1\leq 0$$

olmalıdır.

Sonuç 4.2 $\{\overline{S}_n(p,q,r,s;x)\}_{n=0}^{n=N}$; $p=q=1$, $r=-2w-2v+2$, $s=-2w$, sonlu polinom ailesi $(-\infty,\infty)$ aralığında $x^{-2w}(1+x^2)^{-v}$ ağırlık fonksiyonuna göre $N\leq w+v-1/2$, $w<1/2$, $v>0$ koşulları altında ortogonaldir.

Yani Favard Teoremi'nden,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{-2w}}{(1+x^2)^v}\overline{S}_n\left(\begin{array}{cc} -2w-2v+2 & -2w \\ 1 & 1 \end{array}\Big|x\right)\overline{S}_m\left(\begin{array}{cc} -2w-2v+2 & -2w \\ 1 & 1 \end{array}\Big|x\right)dx$$

$$= \left((-1)^n \prod_{i=1}^{n} K_i \begin{pmatrix} -2w-2v+2 & -2w \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \frac{\Gamma(-w+1/2)\Gamma(w+v-1/2)}{\Gamma(v)} \delta_{n,m}$$

$(N = \max\{m,n\} \leq w+v-1/2,\ w<1/2,\ v>0)$

ortogonallik özelliği sağlanır (Masjed-Jamei 2002, 2007a).

4.1.4 $(-\infty,\infty)$ aralığında simetrik ortogonal polinomların başka sonlu bir sınıfı

Önceki duruma benzer olarak, belirtilen ana özelliklere sahip olan simetrik ortogonal polinomların bir başka sonlu bir dizisi

$$(p,q,r,s,\eta) = (1,0,-2w+2,2,2)$$

ile elde edilebilir. Buna karşılık gelen diferensiyel denklem

$$x^4\varphi_n''(x) + 2x((1-w)x^2+1)\varphi_n'(x) - (n(n+1-2w)x^2+1-(-1)^n)\varphi_n(x) = 0 \quad (4.41)$$

dır. Bu denklemin monik polinom çözümü ise

$$\overline{S}_n \begin{pmatrix} -2w+2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} | x \Big) = \prod_{i=0}^{[n/2]-1} \frac{2}{2i+(-1)^{n+1}+2[n/2]-2w+2}$$
$$\times \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{[n/2]}{k} \left(\prod_{i=0}^{[n/2]-(k+1)} \frac{2i+(-1)^{n+1}+2[n/2]-2w+2}{2} \right) x^{n-2k}$$

şeklindedir. Buna karşılık gelen ağırlık fonksiyonu

$$W \begin{pmatrix} -2w+2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} | x \Big) = x^{-2w} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

dır. Ortogonallik bağıntısı ise $N = \max\{n,m\} \leq w-1/2$ ve $(-1)^{2w}=1$ için

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{-2w} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \overline{S}_n \begin{pmatrix} -2w+2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} | x \Big) \overline{S}_m \begin{pmatrix} -2w+2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} | x \Big) dx$$
$$= \left((-1)^n \prod_{i=1}^{n} K_i \begin{pmatrix} -2w+2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \Gamma(w-1/2)\, \delta_{n,m}$$

olarak elde edilir (Masjed-Jamei 2007a). Dikkat edilirse, Bölüm 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3 ve 4.1.4'de verilen polinom sınıflarının herbiri simetrik genelleştirilmiş bir Sturm-Liouville problemlerinin özel durumudur.

5. BEŞ PARAMETRELİ SİMETRİK ORTOGONAL FONKSİYONLARIN BİR SINIFI

Önceki bölümde Sturm-Liouville teoremini kullanarak

$$x^2(ax^2+b)\varphi_n''(x)+x(cx^2+d)\varphi_n'(x)-(n(c+(n-1)a)x^2+(1-(-1)^n)d/2)\varphi_n(x)=0$$

diferensiyel denklemini sağlayan simetrik ortogonal polinomların temel bir sınıfı ele alındı ve çeşitli özellikleri incelendi. Ayrıca bu simetrik ortogonal polinomların özel durumu olarak dört temel sınıf ele alındı ve herbir polinom ailesinin çeşitli özellikleri verildi.

Bu bölümde ise yine Sturm-Liouville teoremi kullanılarak

$$x^2(ax^2+b)\varphi_n''(x)+x(cx^2+d)\varphi_n'(x)-(\alpha_n x^2+(1-(-1)^n)\beta/2)\varphi_n(x)=0$$

diferensiyel denkleminin çözümü olan simetrik ortogonal fonksiyonların temel bir sınıfı tanımlanacak ve standart özellikleri elde edilecektir (Masjed-Jamei 2008, 2020). Tanımlanacak olan simetrik ortogonal fonksiyonların temel sınıfı, $\beta=d$ olduğu durumda (4.2) denkleminin simetrik ortogonal polinom çözümü olan $\overline{S}_n$ fonksiyonunun bir genellemesidir.

(3.1) diferensiyel denkleminde

$$\begin{aligned} D(x) &= x^2(ax^2+b)\ ,\ E(x)=x(cx^2+d)\ ,\ F(x)=x^2>0\ , \\ G(x) &= 0\ ,\ H(x)=-\beta\in\mathbb{R} \end{aligned} \tag{5.1}$$

olarak seçilirse

$$x^2(ax^2+b)\varphi_n''(x)+x(cx^2+d)\varphi_n'(x)-(\alpha_n x^2+(1-(-1)^n)\beta/2)\varphi_n(x)=0 \tag{5.2}$$

denklemi elde edilir. Burada a,b,c,d ve β bağımsız parametreler ve $\lambda_n=-\alpha_n$ özdeğerdir. (5.2) diferensiyel denklemi $n=2m;\ n\in\mathbb{Z}^+$ için β dan bağımsız olduğundan, genelliğini kaybetmeden (5.2) denkleminin çözümünün (4.10)'a benzer

olarak,

$$\begin{aligned}\varphi_{2n}(x) &= \overline{S}_{2n}\left(\begin{array}{cc|c} c & d & \\ & & x \\ a & b & \end{array}\right) \\ \varphi_{2n+1}(x) &= x^{\vartheta}\overline{S}_{2n}\left(\begin{array}{cc|c} c^* & d^* & \\ & & x \\ a^* & b^* & \end{array}\right),\ \vartheta \in \mathbb{R}-\{0\} \end{aligned} \tag{5.3}$$

formunda olduğunu kabul edelim ve a^*, b^*, c^*, d^* ve ϑ parametrelerini bilinmeyen a, b, c, d ve β parametreleri cinsinden elde edelim. Ayrıca $-\alpha_n$ özdeğerlerini belirleyelim. (5.3) ile verilen fonksiyonlar simetrik olacağından $\varphi_{2n+1}(-x) = -\varphi_{2n+1}(x)$'in sağlanabilmesi için $(-1)^{\vartheta} = -1$ koşuluna ihtiyaç duyulmaktadır.

$n = 2m$ için (5.2) denklemi (4.3) ile verilen

$$x(ax^2+b)\varphi''_{2m}(x) + (cx^2+d)\varphi'_{2m}(x) - 2m(c+(2m-1)a)x\varphi_{2m}(x) = 0 \tag{5.4}$$

denklemine dönüşür. Bu denklemin çözümü (4.6)'dan

$$\varphi_{2m}(x) = S_{2m}\left(\begin{array}{cc|c} c & d & \\ & & x \\ a & b & \end{array}\right) = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\left(\prod_{j=0}^{m-(k+1)}\frac{(2j-1+2m)a+c}{(2j+1)b+d}\right)x^{2m-2k}$$

şeklindedir. (5.4) denkleminde $\overline{S}_{2m}(x) = x^{-\vartheta}\varphi_{2m+1}(x)$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned}\overline{S}'_{2m}(x) &= -\vartheta x^{-\vartheta-1}\varphi_{2m+1}(x) + x^{-\vartheta}\varphi'_{2m+1}(x) \\ \overline{S}''_{2m}(x) &= \vartheta(\vartheta+1)x^{-\vartheta-2}\varphi_{2m+1}(x) - \vartheta x^{-\vartheta-1}\varphi'_{2m+1}(x) \\ &\quad -\vartheta x^{-\vartheta-1}\varphi'_{2m+1}(x) + x^{-\vartheta}\varphi''_{2m+1}(x)\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan türevler (5.4)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}&x(a^*x^2+b^*)\frac{d^2}{dx^2}(x^{-\vartheta}\varphi_{2m+1}(x)) + (c^*x^2+d^*)\frac{d}{dx}(x^{-\vartheta}\varphi_{2m+1}(x)) \\ &-2m(c^*+(2m-1)a^*)x^{1-\vartheta}\varphi_{2m+1}(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}= \;& x(a^*x^2+b^*)x^{-\vartheta}\phi''_{2m+1}(x) - 2x(a^*x^2+b^*)\vartheta x^{-\vartheta-1}\varphi'_{2m+1}(x) \\ & +(c^*x^2+d^*)x^{-\vartheta}\varphi'_{2m+1}(x) + x(a^*x^2+b^*)\vartheta(\vartheta+1)x^{-\vartheta-2}\varphi_{2m+1}(x) \\ & -\vartheta(c^*x^2+d^*)x^{-\vartheta-1}\varphi_{2m+1}(x) - 2m(c^*+(2m-1)a^*)x^{1-\vartheta}\varphi_{2m+1}(x) \\ = \;& 0\end{aligned}$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılıp denklem x ile çarpıldığında

$$\begin{aligned} & x^2(a^*x^2+b^*)\varphi''_{2m+1} + x((c^*-2\vartheta a^*)x^2 + d^* - 2\vartheta b^*)\varphi'_{2m+1} \\ & + \left\{-2m(c^*+(2m-1)a^*)x^2 - \vartheta(c^*-(\vartheta+1)a^*)x^2\right. \\ & \left. + \vartheta((\vartheta+1)b^*-d^*\right\}\varphi_{2m+1}(x) \\ = \; & 0 \end{aligned} \tag{5.5}$$

denklemi elde edilir. $n = 2m+1$ için (5.2) denklemi

$$x^2(ax^2+b)\varphi''_{2m+1}(x) + x(cx^2+d)\varphi'_{2m+1}(x) - (\alpha_{2m+1}x^2+\beta)\varphi_{2m+1}(x) = 0 \tag{5.6}$$

şeklindedir. (5.5) ve (5.6) denklemleri karşılaştırıldığında

$$\begin{aligned} a^* &= a,\ b^* = b \\ c^* - 2\vartheta a^* &= c \Rightarrow c^* = c + 2\vartheta a \\ d^* - 2\vartheta b^* &= d \Rightarrow d^* = d + 2\vartheta b \end{aligned}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan $-\alpha_{2m+1}$ ve $-\beta$ değerlerinin de

$$\begin{aligned} -\alpha_{2m+1} &= -2m(c^*+(2m-1)a^*) - \vartheta(c^*-(\vartheta+1)a^*) \\ &= -2m(c+2\vartheta a+(2m-1)a) - \vartheta(c+2\vartheta a-(\vartheta+1)a) \\ &= -2mc - 4m\vartheta a - 2m(2m-1)a - \vartheta c - 2\vartheta^2 a + \vartheta(\vartheta+1)a \\ &= -2mc - 4m\vartheta a - 4m^2 a + 2ma - \vartheta c - \vartheta^2 a + \vartheta a \\ &= -2mc - 2m\vartheta a - 4m^2 a + 2ma - \vartheta c - 2m\vartheta a - \vartheta^2 a + \vartheta a \\ &= -2mc - 2m(\vartheta+2m-1)a - \vartheta c - \vartheta(\vartheta+2m-1)a \\ &= -c(2m+\vartheta) - (\vartheta+2m-1)a(2m+\vartheta) \\ &= -(2m+\vartheta)(c+a(\vartheta+2m-1)) \end{aligned} \tag{5.7}$$

ve

$$\begin{aligned} -\beta &= \vartheta((\vartheta+1)b^*-d^*) \\ &= \vartheta((\vartheta+1)b-d-2\vartheta b) \\ &= \vartheta(b-d-\vartheta b) \\ &= -\vartheta(d+b(\vartheta-1)) \end{aligned} \tag{5.8}$$

olduğu görülür. Bu durumda (5.2) denklemi,

$$\begin{aligned}
&x^2(ax^2+b)\varphi_n''(x)+x(cx^2+d)\varphi_n'(x)\\
&-\left\{\left(n+(\vartheta-1)\frac{(1-(-1)^n)}{2}\right)\left(c+\left(n-1+(\vartheta-1)\frac{(1-(-1)^n)}{2}\right)a\right)x^2\right.\\
&\left.+\vartheta(d+(\vartheta-1)b)\frac{(1-(-1)^n)}{2}\right\}\varphi_n(x)=0
\end{aligned} \tag{5.9}$$

halini alır. Bütün bu bulunanlar aşağıdaki sonuca götürür.

Sonuç 5.1 (5.3)'den

$$\begin{aligned}
\varphi_n(x) &= S_n^{(\vartheta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right)\\
&= x^{((1-(-1)^n)/2)\vartheta}\\
&\quad\times\overline{S}_{2[n/2]}\left(\begin{array}{cc} c+(1-(-1)^n)\vartheta a & d+(1-(-1)^n)\vartheta b \\ a & b \end{array} \mid x\right)
\end{aligned} \tag{5.10}$$

simetrik dizisi

$$\begin{aligned}
&S_n^{(\vartheta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right)\\
&=\prod_{j=0}^{[n/2]-1}\frac{(2j+1+(1-(-1)^n)\vartheta)b+d}{(2j-1+n+(1-(-1)^n)(\vartheta-1/2))a+c}x^{((1-(-1)^n)/2)(\vartheta-1)}\\
&\quad\times\sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{[n/2]}{k}\left(\prod_{j=0}^{[n/2]-(k+1)}\frac{(2j-1+n+(1-(-1)^n)(\vartheta-1/2))a+c}{(2j+1+(1-(-1)^n)\vartheta)b+d}\right)x^{n-2k}
\end{aligned} \tag{5.11}$$

açılımına sahiptir ve

$$x^2(ax^2+b)\varphi_n''(x)+x(cx^2+d)\varphi_n'(x)-(\alpha_n x^2+(1-(-1)^n)\beta/2)\varphi_n(x)=0 \tag{5.12}$$

denklemini sağlar (Masjed-Jamei 2008, 2020). Burada

$$\begin{aligned}
\alpha_{2m+1} &= (\vartheta+2m)(c+(\vartheta+2m-1)a)\\
\alpha_{2m} &= 2m(c+(2m-1)a)
\end{aligned}$$

olduğundan α_n ve β değerleri

$$\alpha_n=\left(n+(\vartheta-1)\frac{1-(-1)^n}{2}\right)\left(c+\left(n-1+(\vartheta-1)\frac{1-(-1)^n}{2}\right)a\right)$$

ve

$$\beta = \vartheta(d + (\vartheta - 1)b)$$

şeklindedir. (5.10) açılımı, (4.8) ve (4.9) eşitliklerinden yararlanarak $\overline{S}_n$ polinomlarının terimlerinde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} & S_n^{(\vartheta)} \left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x \right) \\ = \; & x^{((1-(-1)^n)/2)(\vartheta-1)} \\ & \times \overline{S}_n \left(\begin{array}{cc} c+(1-(-1)^n)(\vartheta-1)a & d+(1-(-1)^n)(\vartheta-1)b \\ a & b \end{array} \mid x \right) \end{aligned} \tag{5.13}$$

Bu eşitlik yardımıyla $S_n^{(\vartheta)}(x; a, b, c, d)$ fonksiyonunun sağladığı rekürans bağıntısı aşağıdaki gibi kolaylıkla gösterilebilir.

Teorem 5.1 $S_n^{(\vartheta)} \left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x \right)$ simetrik fonksiyonları

$$\begin{aligned} S_{n+1}^{(\vartheta)} \left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x \right) = \; & x^{1+(-1)^n(\vartheta-1)} S_n^{(\vartheta)} \left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x \right) \\ & + K_n^{(\vartheta)} \left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \right) S_{n-1}^{(\vartheta)} \left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x \right) \end{aligned}$$

rekürans bağıntısını gerçekler (Masjed-Jamei 2008, 2020).

İspat. İstenilen rekürans bağıntısını elde etmek için öncelikle

$$\overline{S}_n \left(\begin{array}{cc} c + (1-(-1)^n)(\vartheta-1)a & d + (1-(-1)^n)(\vartheta-1)b \\ a & b \end{array} \mid x \right) = \bar{Q}_n(x) \tag{5.14}$$

diyelim. $\bar{Q}_n(x)$ monik simetrik bir polinomdur ve sağladığı üç terimli rekürans bağıntısı

$$\bar{Q}_{n+1}(x) = x\bar{Q}_n(x) + K_n^{(\vartheta)} \left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \right) \bar{Q}_{n-1}(x); \; \bar{Q}_0(x) = 1, \; \bar{Q}_1(x) = x \tag{5.15}$$

şeklindedir. Burada $K_n^{(\vartheta)}\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$ katsayısı, (4.20) eşitliğinden

$$\begin{aligned} & K_n^{(\vartheta)}\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \qquad (5.16) \\ = & \frac{\left((1+(-1)^n(\vartheta-1))abn^2+(\vartheta-3+3(-1)^n(1-\vartheta))ab\right)n}{(((-1)^n(1-\vartheta)+2n+\vartheta-2)a+c)(((-1)^n(1-\vartheta)+2n+\vartheta-4)a+c)} \\ & +\frac{((1+(-1)^n(\vartheta-1))bc-(-1)^n\vartheta ad)n}{(((-1)^n(1-\vartheta)+2n+\vartheta-2)a+c)(((-1)^n(1-\vartheta)+2n+\vartheta-4)a+c)} \\ & +\frac{((1-\vartheta)(a-c)b+((\vartheta-3)a+c)d)\,(1-(-1)^n)/2}{(((-1)^n(1-\vartheta)+2n+\vartheta-2)a+c)(((-1)^n(1-\vartheta)+2n+\vartheta-4)a+c)} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. (5.13) ve (5.14) eşitliklerinden

$$\bar{Q}_n(x) = x^{-((1-(-1)^n)/2)(\vartheta-1)}S_n^{(\vartheta)}(x;a,b,c,d)$$

olup

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{n+1}(x) &= x^{-((1-(-1)^{n+1})/2)(\vartheta-1)}S_{n+1}^{(\vartheta)}(x;a,b,c,d) \\ \bar{Q}_{n-1}(x) &= x^{-((1-(-1)^{n-1})/2)(\vartheta-1)}S_{n-1}^{(\vartheta)}(x;a,b,c,d) \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu eşitlikler (5.15) rekürans bağıntısında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} S_{n+1}^{(\vartheta)}\left(\begin{matrix} c & d \\ a & b \end{matrix} \mid x\right) &= x^{1+(-1)^n(\vartheta-1)}S_n^{(\vartheta)}\left(\begin{matrix} c & d \\ a & b \end{matrix} \mid x\right) \\ & \quad +K_n^{(\vartheta)}\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}S_{n-1}^{(\vartheta)}\left(\begin{matrix} c & d \\ a & b \end{matrix} \mid x\right) \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Örnek olarak $n = 0,1,2,3,4,5$ için $S_n^{(\vartheta)}\left(\begin{matrix} c & d \\ a & b \end{matrix} \mid x\right)$ fonksiyonları açık formda

yazılırsa

$$
\begin{aligned}
S_0^{(\vartheta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right) &= 1, \quad S_1^{(\vartheta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right) = x^{\vartheta} \\
S_2^{(\vartheta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right) &= \frac{b+d}{a+c}\left\{\binom{1}{0}\frac{a+c}{b+d}x^2 + \binom{1}{1}1x^0\right\} \\
&= x^2 + \frac{b+d}{a+c} \\
S_3^{(\vartheta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right) &= \frac{(2\vartheta+1)b+d}{(2\vartheta+1)a+c}\, x^{\vartheta-1}\left\{\binom{1}{0}\frac{(2\vartheta+1)a+c}{(2\vartheta+1)b+d}.x^3 + \binom{1}{1}1x\right\} \\
&= x^{\vartheta}\left\{x^2 + \frac{(2\vartheta+1)b+d}{(2\vartheta+1)a+c}\right\} \\
S_4^{(\vartheta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right) &= x^4 + 2\frac{3b+d}{5a+c}x^2 + \frac{(b+d)(3b+d)}{(5a+c)(3a+c)} \\
S_5^{(\vartheta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right) &= x^{\vartheta}\left\{x^4 + 2\frac{(2\vartheta+3)b+d}{(2\vartheta+5)a+c}x^2\right. \\
&\quad \left. + \frac{((2\vartheta+1)b+d)((2\vartheta+3)b+d)}{((2\vartheta+3)a+c)((2\vartheta+5)a+c)}\right\} \qquad (5.17)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. (5.17) eşitliği ile verilen $S_n^{(\vartheta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right)$ fonksiyonlarının açılımlarından görünür ki, $S_{2n}^{(\vartheta)}(x;a,b,c,d)$ fonksiyonları ϑ'dan bağımsızdır.

$S_n^{(\vartheta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right)$ fonksiyonlarının simetrik olması, yani $S_n^{(\vartheta)}(-x;a,b,c,d) = (-1)^n S_n^{(\vartheta)}(x;a,b,c,d)$ eşitliğinin sağlanabilmesi için n tek olduğunda $(-1)^{\vartheta} = -1$ sağlanmalıdır.

Teorem 5.2 $S_n^{(\vartheta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right)$ fonksiyonları

$$
\int_{-\delta}^{\delta} W\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right) S_n^{(\vartheta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right) S_m^{(\vartheta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right) dx = N_n \delta_{n,m} \qquad (5.18)
$$

ortogonallik bağıntısını sağlar. Burada N_n

$$\begin{aligned} N_n &= \prod_{i=1}^{2[n/2]} K_i \left(\begin{array}{cc} c+(1-(-1)^n)\vartheta a & d+(1-(-1)^n)\vartheta b \\ a & b \end{array} \right) \\ &\quad \times \int_{-\delta}^{\delta} W \left(\begin{array}{cc} c+(1-(-1)^n)\vartheta a & d+(1-(-1)^n)\vartheta b \\ a & b \end{array} \mid x \right) dx \end{aligned}$$

şeklindedir (Masjed-Jamei 2008, 2020).

İspat. Teorem 3.1 deki (3.9) bağıntısı ve (5.2) diferensiyel denkleminden görülür ki $S_n^{(\vartheta)} \left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x \right)$ simetrik ortogonal fonksiyonlarının temel sınıfına karşılık gelen ağırlık fonksiyonu (4.21) eşitliği ile verilen $W(x;a,b,c,d)$ fonksiyonu ile aynıdır. O halde Teorem 3.1'e göre

$$\int_{-\delta}^{\delta} W \left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x \right) S_n^{(\vartheta)} \left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x \right) S_m^{(\vartheta)} \left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x \right) dx = N_n \delta_{n,m} \qquad (5.19)$$

olduğu söylenebilir. Burada

$$N_n = \int_{-\delta}^{\delta} W \left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x \right) \left(S_n^{(\vartheta)} \left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x \right) \right)^2 dx \qquad (5.20)$$

formundadır ve yine $(ax^2+b)W(x;a,b,c,d)$ ifadesi $x=\delta$ da yok olmalıdır. N_n'yi elde etmek için (4.22) bağıntısı kullanılabilir. $n=2m$ için,

$$\begin{aligned} N_{2m} &= \int_{-\delta}^{\delta} W \left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x \right) \left(S_{2m}^{(\vartheta)} \left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x \right) \right)^2 dx \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} W \left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x \right) \left(\overline{S}_{2m} \left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x \right) \right)^2 dx \\ &= \left(\prod_{i=1}^{2m} K_i \left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \right) \right) \int_{-\delta}^{\delta} W \left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x \right) dx \qquad (5.21) \end{aligned}$$

ve $n = 2m+1$ için,

$$\begin{aligned}
N_{2m+1} &= \int_{-\delta}^{\delta} W\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right)\left(S_{2m+1}^{(\vartheta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right)\right)^2 dx \\
&= \int_{-\delta}^{\delta} W\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right) x^{2\vartheta}\left(\overline{S}_{2m}\left(\begin{array}{cc} c+2\vartheta a & d+2\vartheta b \\ a & b \end{array} \mid x\right)\right)^2 dx \\
&= \int_{-\delta}^{\delta} \exp\left(\int \frac{(c-2a)x^2+d}{x(ax^2+b)}dx\right)\exp\left(\int \frac{2\vartheta}{x}dx\right) \\
&\quad \times\left(\overline{S}_{2m}\left(\begin{array}{cc} c+2\vartheta a & d+2\vartheta b \\ a & b \end{array} \mid x\right)\right)^2 dx \\
&= \int_{-\delta}^{\delta} \exp\left(\int \frac{(c+2\vartheta a-2a)x^2+d+2\vartheta b}{x(ax^2+b)}dx\right) \\
&\quad \times\left(\overline{S}_{2m}\left(\begin{array}{cc} c+2\vartheta a & d+2\vartheta b \\ a & b \end{array} \mid x\right)\right)^2 dx \\
&= \int_{-\delta}^{\delta} W\left(\begin{array}{cc} c+2\vartheta a & d+2\vartheta b \\ a & b \end{array} \mid x\right)\left(\overline{S}_{2m}\left(\begin{array}{cc} c+2\vartheta a & d+2\vartheta b \\ a & b \end{array} \mid x\right)\right)^2 dx \\
&= \left(\prod_{i=1}^{2m} K_i\left(\begin{array}{cc} c+2\vartheta a & d+2\vartheta b \\ a & b \end{array}\right)\right) \\
&\quad \times\int_{-\delta}^{\delta} W\left(\begin{array}{cc} c+2\vartheta a & d+2\vartheta b \\ a & b \end{array} \mid x\right) dx \qquad (5.22)
\end{aligned}$$

elde edilir. (5.21) ve (5.22) eşitliklerinden $S_n^{(\vartheta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right)$ fonksiyonlarının normunun karesi

$$\begin{aligned}
N_n &= \prod_{i=1}^{2[n/2]} K_i\left(\begin{array}{cc} c+(1-(-1)^n)\vartheta a & d+(1-(-1)^n)\vartheta b \\ a & b \end{array}\right) \\
&\quad \times\int_{-\delta}^{\delta} W\left(\begin{array}{cc} c+(1-(-1)^n)\vartheta a & d+(1-(-1)^n)\vartheta b \\ a & b \end{array} \mid x\right) dx \qquad (5.23)
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Teorem 5.3 $S_n^{(\vartheta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right)$ fonksiyonları ${}_2F_1$ hipergeometrik fonksiyonları cinsin-

den

$$S_n^{(\vartheta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right) = x^{(n+(1-(-1)^n)(\vartheta-1)/2)} \times {}_2F_1\left(-[n/2], \frac{2-\vartheta+(-1)^n(\vartheta-1)}{2} - \frac{d}{2b} - [(n+1)/2]; \frac{4-\vartheta-2n+(-1)^n(\vartheta-1)}{2} - \frac{c}{2a}; -\frac{b}{ax^2}\right) \tag{5.24}$$

açılımına sahiptir (Masjed-Jamei 2008).

■

İspat. Teorem 4.3'de verilen $\bar{S}_n\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right)$ polinomlarının hipergeometrik gösteriminden ve (5.13) eşitliğinden yararlanılarak (5.24) kolaylıkla elde edilir. ■

5.1 $\mathbf{S}_n^{(\vartheta)}(x;a,b,c,d)$ Fonksiyonunun Dört Ana Sınıfı

Şimdi de $S_n^{(\vartheta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right)$ fonksiyonlarının özel durumlarını inceleyelim (Masjed-Jamei 2008).

(4.23) ağırlık fonksiyonu

$$x\frac{d}{dx}((ax^2+b)W(x)) = (cx^2+d)W(x) \tag{5.25}$$

diferensiyel denklemini sağlar. Burada $\begin{cases} c_1 = c+2a \\ d_1 = d+2b \end{cases}$ için (4.23) fonksiyonunun sağladığı denklem

$$\begin{aligned}
& x\frac{d}{dx}\left((ax^2+b)\exp\left(\int \frac{(c+2a-2a)x^2+d+2b}{x(ax^2+b)}dx\right)\right) \\
= \;& (c_1x^2+d_1)\exp\left(\int \frac{(c+2a-2a)x^2+d+2b}{x(ax^2+b)}dx\right) \\
\Longrightarrow \;& x\frac{d}{dx}\left((ax^2+b)\exp\left(\int \frac{(c-2a)x^2+d}{x(ax^2+b)}dx + \int \frac{2(ax^2+b)}{x(ax^2+b)}dx\right)\right) \\
= \;& (c_1x^2+d_1)\exp\left(\int \frac{(c-2a)x^2+d}{x(ax^2+b)}dx + \int \frac{2(ax^2+b)}{x(ax^2+b)}dx\right) \\
\Longrightarrow \;& x\frac{d}{dx}\left(x^2(ax^2+b)\exp\left(\int \frac{(c-2a)x^2+d}{x(ax^2+b)}dx\right)\right) \\
= \;& x^2(c_1x^2+d_1)\exp\left(\int \frac{(c-2a)x^2+d}{x(ax^2+b)}dx\right)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dx}\left(x^2(ax^2+b)W(x)\right) = x(c_1x^2+d_1)W(x)$$

halini alır. Bölüm 4.1.1 - 4.1.4'de $W\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right)$ ağırlık fonksiyonunun dört özel durumu incelenmişti. Bu ağırlık fonksiyonları sırasıyla

$$\begin{aligned} W\left(\begin{array}{cc} -2w-2v-2 & 2w \\ -1 & 1 \end{array} \mid x\right) &= x^{2w}(1-x^2)^v, \ -1 \le x \le 1; \qquad (5.26) \\ (w+1/2 &> 0,\ v+1>0) \\ W\left(\begin{array}{cc} -2 & 2w \\ 0 & 1 \end{array} \mid x\right) &= x^{2w}\exp(-x^2); \ -\infty < x < \infty; \qquad (5.27) \\ (w+1/2 &> 0) \\ W\left(\begin{array}{cc} -2w-2v+2 & -2w \\ 1 & 1 \end{array} \mid x\right) &= \frac{x^{-2w}}{(1+x^2)^v}; \ -\infty < x < \infty; \qquad (5.28) \\ (v &> 0,\ w<1/2;\ v+w>1/2) \\ W\left(\begin{array}{cc} -2w+2 & 2 \\ 1 & 0 \end{array} \mid x\right) &= x^{-2w}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right); \qquad (5.29) \\ -\infty &< x<\infty;\ (w>1/2) \end{aligned}$$

formundadır.

5.1.1 Genelleştirilmiş ultraküresel polinomların bir genellemesi

Önceki bölümde (4.2) denkleminin özel durumu olarak bu dört ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan genelleştirilmiş ultraküresel polinomlar, genelleştirilmiş Hermite polinomları ve simetrik ortogonal polinomların iki sonlu sınıfı ele alınmıştı. Şimdi de (5.2) denkleminin özel durumu olarak genelleştirilmiş ultraküresel polinomlar, genelleştirilmiş Hermite polinomları ve simetrik ortogonal polinomların iki sonlu sınıfının çeşitli genellemelerini inceleyelim.

Bölüm 4.1.1'de gösterildi ki (4.2) denkleminin özel durumu olan

$$\begin{aligned} & x^2(1-x^2)\varphi_n''(x) - 2x((w+v+1)x^2-w)\varphi_n'(x) \\ & +(n(2w+2v+n+1)x^2+(1-(-1)^n)w)\varphi_n(x) \\ = \ & 0 \end{aligned}$$

diferensiyel denklemi

$$\varphi_n(x) = S_n^{(1)} \left(\begin{array}{cc|c} -2w-2v-2 & 2w & \\ -1 & 1 & x \end{array} \right)$$

çözümüne sahiptir ve

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{1} W \left(\begin{array}{cc|c} -2w-2v-2 & 2w & \\ -1 & 1 & x \end{array} \right) S_n^{(1)} \left(\begin{array}{cc|c} -2w-2v-2 & 2w & \\ -1 & 1 & x \end{array} \right) \\ &\times S_m^{(1)} \left(\begin{array}{cc|c} -2w-2v-2 & 2w & \\ -1 & 1 & x \end{array} \right) dx \\ &= \left((-1)^n \prod_{i=1}^{n} K_i \left(\begin{array}{cc} -2w-2v-2 & 2w \\ -1 & 1 \end{array} \right) \int_{-1}^{1} W \left(\begin{array}{cc|c} -2w-2v-2 & 2v & \\ -1 & 1 & x \end{array} \right) dx \right) \delta_{n,m} \end{aligned}$$

ortogonallik özelliğini sağlar. Burada

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{1} W \left(\begin{array}{cc|c} -2w-2v-2 & 2w & \\ -1 & 1 & x \end{array} \right) dx \\ &= \int_{-1}^{1} x^{2w}(1-x^2)^v dx \\ &= 2\int_{0}^{1} x^{2w}(1-x^2)^v dx \\ &= B\left(w+1/2, v+1\right) = \frac{\Gamma(w+1/2)\Gamma(v+1)}{\Gamma(w+v+3/2)} \\ &\quad \left(w+1/2>0,\ (-1)^{2w}=1 \text{ ve } v+1>0\right) \end{aligned} \tag{5.30}$$

ve

$$\begin{aligned} &K_n \left(\begin{array}{cc} -2w-2v-2 & 2w \\ -1 & 1 \end{array} \right) \\ &= \frac{-(n+w(1-(-1)^n)+2v)(n+(1-(-1)^n)w)}{(2n+2w+2v+1)(2n+2w+2v-1)} \end{aligned} \tag{5.31}$$

formundadır.

Şimdi de aynı ağırlık fonksiyonu ve aynı ortogonallik aralığına sahip genelleştirilmiş ultraküresel polinomların bir genellemesini düşünelim. (5.2) diferensiyel denkleminde

$$(a,b,c,d) = (-1,1,-2w-2v-2,2w)$$

olarak seçilirse

$$x^2(1-x^2)\varphi_n''(x) - 2x((w+v+1)x^2 - w)\varphi_n'(x)$$
$$+\left\{\left(n+(\vartheta-1)\frac{1-(-1)^n}{2}\right)\left(n+2w+2v+1+(\vartheta-1)\frac{1-(-1)^n}{2}\right)x^2\right.$$
$$\left.-\vartheta(2w+\vartheta-1)\frac{1-(-1)^n}{2}\right\}\varphi_n(x) = 0 \tag{5.32}$$

diferensiyel denklemi elde edilir ve bu denklemin bir temel çözümü

$$\varphi_n(x) = S_n^{(\vartheta)}\left(\begin{array}{cc} -2w-2v-2 & 2w \\ -1 & 1 \end{array} \mid x\right) \tag{5.33}$$

şeklindedir. Teorem 5.2 gereğince (5.33) çözümü aşağıdaki ortogonallik özelliğini sağlar.

$$\int_{-1}^{1} x^{2w}(1-x^2)^v S_n^{(\vartheta)}\left(\begin{array}{cc} -2w-2v-2 & 2w \\ -1 & 1 \end{array} \mid x\right) S_m^{(\vartheta)}\left(\begin{array}{cc} -2w-2v-2 & 2w \\ -1 & 1 \end{array} \mid x\right) dx$$
$$= \prod_{i=1}^{2[n/2]} K_i\left(\begin{array}{cc} -2w-2v-2-(1-(-1)^n)\vartheta & 2w+(1-(-1)^n)\vartheta \\ -1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\times\left(\int_{-1}^{1} W\left(\begin{array}{cc} -2w-2v-2-(1-(-1)^n)\vartheta & 2w+(1-(-1)^n)\vartheta \\ -1 & 1 \end{array} \mid x\right) dx\right)\delta_{n,m}$$
$$= \prod_{i=1}^{2[n/2]} K_i\left(\begin{array}{cc} -2w-2v-2-(1-(-1)^n)\vartheta & 2w+(1-(-1)^n)\vartheta \\ -1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\times\left(\int_{-1}^{1} \exp\left(\int \frac{(-2w-2v-(1-(-1)^n)\vartheta)x^2+2w+(1-(-1)^n)\vartheta}{x(1-x^2)}dx\right)dx\right)\delta_{n,m}$$
$$= \prod_{i=1}^{2[n/2]} K_i\left(\begin{array}{cc} -2w-2v-2-(1-(-1)^n)\vartheta & 2w+(1-(-1)^n)\vartheta \\ -1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\times\left(\int_{-1}^{1} \exp\left(\int \frac{2w+(1-(-1)^n)\vartheta}{x}dx + \int \frac{-2vx}{1-x^2}dx\right)dx\right)\delta_{n,m}$$

$$= \prod_{i=1}^{2[n/2]} K_i\left(\begin{array}{cc} -2w-2v-2-(1-(-1)^n)\vartheta & 2w+(1-(-1)^n)\vartheta \\ -1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\times\left(\int_{-1}^{1} x^{2w+(1-(-1)^n)\vartheta}(1-x^2)^v dx\right)\delta_{n,m}$$
$$= \prod_{i=1}^{2[n/2]} K_i\left(\begin{array}{cc} -2w-2v-2-(1-(-1)^n)\vartheta & 2w+(1-(-1)^n)\vartheta \\ -1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\times B\left(w+\frac{1-(-1)^n}{2}\vartheta+\frac{1}{2}; v+1\right)\delta_{n,m}$$

Buradan açıkça görülür ki $w+1/2>0,\ w+\vartheta+1/2>0,\ v+1>0,\ (-1)^{2w}=1$ ve $(-1)^{\vartheta}=-1$ olmalıdır (Masjed-Jamei 2008).

Not: $w=0, v=-1/2$ veya $w=0, v=1/2$ için (5.33) fonksiyonunun iki önemli durumu vardır. Çünkü bu durumlar düşünülerek Fourier açılımları genelleştirilebilir. Örneğin, (5.32) denkleminde $w=0$ ve $v=-1/2$ için $x=\cos z$ değişken değiştirmesi yapılarak Fourier trigonometrik dizilerinin diferensiyel denkleminin genelleştirilmiş hali aşağıdaki gibi elde edilir.

$$x=\cos z \Rightarrow dx=-\sin z dz \Longrightarrow \frac{dz}{dx}=-\frac{1}{\sin z}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dx} &= \frac{d\varphi}{dz}\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{\sin z}\frac{d\varphi}{dz}\\ \frac{d^2\varphi}{dx^2} &= \frac{d}{dz}\left(-\frac{1}{\sin z}\frac{d\varphi}{dz}\right)\frac{dz}{dx}=\left(\frac{\cos z}{\sin^2 z}\frac{d\varphi}{dz}-\frac{1}{\sin z}\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)-\frac{1}{\sin z}\end{aligned}$$

bulunur. Bunlar $w=0$ ve $v=-1/2$ için (5.32) denkleminde yerine yazılırsa

$$\varphi_n''(z)+\left(\left(n+(\vartheta-1)\frac{1-(-1)^n}{2}\right)^2-\frac{\vartheta(\vartheta-1)}{\cos^2 z}\frac{1-(-1)^n}{2}\right)\varphi_n(z)=0$$

elde edilir. $\vartheta=1$ için bu denklem, çözümleri Fourier trigonometrik fonksiyonları $\varphi_n(z)=\cos nz$ ve $\varphi_n(z)=\sin nz$ olan

$$\varphi_n''(z)+n^2\varphi_n(z)=0$$

denklemini verir.

5.1.2 Genelleştirilmiş Hermite polinomlarının bir genellemesi

Bölüm 4.1.2'de gösterildi ki (4.2) denkleminin özel durumu olan

$$x^2\varphi_n''(x)-2x(x^2-w)\varphi_n'(x)+(2nx^2+((-1)^n-1)w)\varphi_n(x)=0$$

diferensiyel denkleminin çözümü

$$\varphi_n(x)=S_n^{(1)}\left(\begin{array}{cc|c}-2 & 2w & \\ 0 & 1 & x\end{array}\right)$$

genelleştirilmiş Hermite polimomlarıdır.

$$W\left(\begin{array}{cc|c}-2 & 2w & x\\ 0 & 1 & \end{array}\right)=x^{2w}\exp(-x^2) \text{ ve } K_n\left(\begin{array}{cc}-2 & 2w\\ 0 & 1\end{array}\right)=\frac{n+w(1-(-1)^n)}{-2}$$

olup

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} x^{2w}\exp(-x^2)S_n^{(1)}\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2w & \\ 0 & 1 & \end{array} x\right) S_m^{(1)}\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2w & \\ 0 & 1 & \end{array} x\right) dx \\
&= \left((-1)^n\prod_{i=1}^{n}\frac{i+w(1-(-1)^i)}{-2}\int_{-\infty}^{\infty} x^{2w}\exp(-x^2)dx\right)\delta_{n,m} \\
&= \left(\frac{1}{2^n}\prod_{i=1}^{n}(i+w(1-(-1)^i)\right)\Gamma\left(w+\frac{1}{2}\right)\delta_{n,m}
\end{aligned}$$

ortogonallik özelliği $w+1/2>0$ ve $(-1)^{2w}=1$ için sağlanır. Şimdi de bir önceki bölümde yapıldığı gibi genelleştirilmiş Hermite polinomlarının bir genellemesini verelim. (5.2) denkleminde $(a,b,c,d)=(0,1,-2,2w)$ alınırsa

$$\begin{aligned}
&x^2\varphi_n''(x)-2x(x^2-w)\varphi_n'(x)+\left\{2\left(n+(\vartheta-1)\frac{1-(-1)^n}{2}\right)x^2\right. \\
&\left.-\vartheta(2w+\vartheta-1)\frac{1-(-1)^n}{2}\right\}\varphi_n(x)=0
\end{aligned}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin bir çözümü

$$\varphi_n(x)=S_n^{(\vartheta)}\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2w & \\ 0 & 1 & \end{array} x\right)$$

şeklindedir ve

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} W\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2w & \\ 0 & 1 & \end{array} x\right) S_n^{(\vartheta)}\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2w & \\ 0 & 1 & \end{array} x\right) S_m^{(\vartheta)}\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2w & \\ 0 & 1 & \end{array} x\right) dx \\
&= \left(\prod_{i=1}^{2[n/2]} K_i\left(\begin{array}{cc} -2 & 2w+(1-(-1)^n)\vartheta \\ 0 & 1 \end{array}\right)\right. \\
&\left.\times\int_{-\infty}^{\infty} W\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2w+(1-(-1)^n)\vartheta & \\ 0 & 1 & \end{array} x\right) dx\right)\delta_{n,m} \\
&= \left(\prod_{i=1}^{2[n/2]}\frac{i+(1-(-1)^i)(w+\vartheta(1-(-1)^i)/2)}{-2}\int_{-\infty}^{\infty} x^{2w+(1-(-1)^n)\vartheta}e^{-x^2}dx\right)\delta_{n,m} \\
&= \left(2^{-2[n/2]}\prod_{i=1}^{2[n/2]} i+(1-(-1)^i)(w+\vartheta(1-(-1)^i)/2)\right) \\
&\times\Gamma\left(w+(1-(-1)^n)/2+1/2\right)\delta_{n,m}
\end{aligned}$$

olup $w+1/2>0$, $w+\vartheta+1/2>0$, $(-1)^{2w}=1$ ve $(-1)^{\vartheta}=-1$ için ortogonallik özelliği sağlanır (Masjed-Jamei 2008).

5.1.3 $(-\infty,\infty)$ aralığında $\mathbf{x}^{-2w}(1+x^2)^{-v}$ ağırlık fonksiyonuna göre simetrik ortogonal fonksiyonların sonlu bir sınıfı

Bölüm 4.1.3'te $\overline{S}_n\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right)$ polinomlarının bir özel durumu olan

$$\overline{S}_n^{(1)}\left(\begin{array}{cc} -2w-2v+2 & -2w \\ 1 & 1 \end{array} \mid x\right)$$

simetrik sonlu ortogonal polinomların bir ailesi ele alınmıştı. Gösterildi ki bu polinomlar $(-\infty,\infty)$ aralığında $\frac{x^{-2w}}{(1+x^2)^v}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir ve $v>0,\ w<1/2,\ w+v-1/2>0,\ N=\max\{n,m\}\leq w+v-1/2$ koşulları altında

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{-2w}}{(1+x^2)^v}\overline{S}_n^{(1)}\left(\begin{array}{cc} -2w-2v+2 & -2w \\ 1 & 1 \end{array} \mid x\right)\overline{S}_m^{(1)}\left(\begin{array}{cc} -2w-2v+2 & -2w \\ 1 & 1 \end{array} \mid x\right)dx$$

$$=\left((-1)^n\prod_{i=1}^{n}K_i\left(\begin{array}{cc} -2w-2v+2 & -2w \\ 1 & 1 \end{array} \mid x\right)\right)\frac{\Gamma(-w+1/2)\Gamma(w+v-1/2)}{\Gamma(v)}\delta_{n,m}$$

ortogonallik bağıntısını sağlarlar. Burada

$$K_n\left(\begin{array}{cc} -2w-2v+2 & -2w \\ 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$=\frac{(n-w(1-(-1)^n)(n-w(1-(-1)^n)-2v)}{(2n-2w-2v+1)(2n-2w-2v-1)}$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi de

$$\varphi_n(x)=S_n^{(\vartheta)}\left(\begin{array}{cc} -2w-2v+2 & -2w \\ 1 & 1 \end{array} \mid x\right) \tag{5.34}$$

genelleştirilmiş fonksiyonlarını düşünelim. Bu fonksiyonlar (5.9) diferensiyel denkleminin $(a,b,c,d)=(1,1,-2w-2v+2,-2w)$ özel durumu olarak

$$\begin{aligned}&x^2(x^2+1)\varphi_n''(x)-2x((w+v-1)x^2+w)\varphi_n'(x)\\&-\left\{\left(n+(\vartheta-1)\frac{1-(-1)^n}{2}\right)\left(n-2w-2v+1+(\vartheta-1)\frac{1-(-1)^n}{2}\right)x^2\right.\\&\left.-\vartheta(-2w+\vartheta-1)\frac{1-(-1)^n}{2}\right\}\varphi_n(x)=0\end{aligned} \tag{5.35}$$

diferensiyel denklemini gerçekler. (5.18) ve (5.23) eşitliklerine göre (5.34) dizisi,

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} x^{-2w}(1+x^2)^{-v} S_n^{(\vartheta)}\left(\begin{array}{cc} -2w-2v+2 & -2w \\ 1 & 1 \end{array} \mid x\right) \\
&\times S_m^{(\vartheta)}\left(\begin{array}{cc} -2w-2v+2 & -2w \\ 1 & 1 \end{array} \mid x\right) dx \\
&= \prod_{i=1}^{2[n/2]} K_i\left(\begin{array}{cc} -2w-2v+2+(1-(-1)^n)\vartheta & -2w+(1-(-1)^n)\vartheta \\ 1 & 1 \end{array}\right) \\
&\times \left(\int_{-\infty}^{\infty} W\left(\begin{array}{cc} -2w-2v+2+(1-(-1)^n)\vartheta & -2w+(1-(-1)^n)\vartheta \\ 1 & 1 \end{array} \mid x\right) dx\right) \delta_{n,m} \\
&= \prod_{i=1}^{2[n/2]} K_i\left(\begin{array}{cc} -2w-2v+2+(1-(-1)^n)\vartheta & -2w+(1-(-1)^n)\vartheta \\ 1 & 1 \end{array}\right) \\
&\times \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\int \tfrac{(-2w-2v+(1-(-1)^n)\vartheta)x^2+(-2w+(1-(-1)^n)\vartheta)}{x(1+x^2)} dx\right) dx\right) \delta_{n,m} \\
&= \prod_{i=1}^{2[n/2]} K_i\left(\begin{array}{cc} -2w-2v+2+(1-(-1)^n)\vartheta & -2w+(1-(-1)^n)\vartheta \\ 1 & 1 \end{array}\right) \\
&\times \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\int -\tfrac{2w}{x} dx + \int \tfrac{(1-(-1)^n)\vartheta}{x} dx + \int \tfrac{-2vx}{1+x^2} dx\right) dx\right) \delta_{n,m} \\
&= \prod_{i=1}^{2[n/2]} K_i\left(\begin{array}{cc} -2w-2v+2+(1-(-1)^n)\vartheta & -2w+(1-(-1)^n)\vartheta \\ 1 & 1 \end{array}\right) \\
&\times \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^{-2w+(1-(-1)^n)\vartheta}(x^2+1)^{-v} dx\right) \delta_{n,m} \\
&= \prod_{i=1}^{2[n/2]} K_i\left(\begin{array}{cc} -2w-2v+2+(1-(-1)^n)\vartheta & -2w+(1-(-1)^n)\vartheta \\ 1 & 1 \end{array}\right) \\
&\times \tfrac{\Gamma(w-(1-(-1)^n)\vartheta/2+v-1/2)\Gamma(-w+(1-(-1)^n)\vartheta/2+1/2)}{\Gamma(v)} \delta_{n,m}
\end{aligned}
\tag{5.36}
$$

ortogonallik özelliğini sağlar. Buradaki önemli soru (5.36) eşitliğindeki parametrelerin nasıl kısıtlanacağıdır. Bu problemi çözmek için (5.35) denkleminin self-adjoint formu kullanılarak (3.6) eşitliği uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
&[D(x)Z(x)(\varphi_n'(x)\varphi_m(x)-\varphi_m'(x)\varphi_n(x))]_{-\infty}^{\infty} = 0 \\
&\Rightarrow \left[\exp\left(\int \frac{(-2w-2v+2)x^2-2w}{x(x^2+1)} dx\right)(\varphi_n'(x)\varphi_m(x)-\varphi_m'(x)\varphi_n(x))\right]_{-\infty}^{\infty} = 0 \\
&\Rightarrow \left[x^{-2w}(x^2+1)^{-v+1}(\varphi_n'(x)\varphi_m(x)-\varphi_m'(x)\varphi_n(x))\right]_{-\infty}^{\infty} = 0
\end{aligned}
\tag{5.37}
$$

sağlanmalıdır. Diğer taraftan yine (5.34) ile verilen $\varphi_n(x)$ fonksiyonunun derecesi en fazla $n+(\vartheta-1)(1-(-1)^n)/2$ olup buradan

$$\max\deg[\varphi_n'(x)\varphi_m(x)-\varphi_m'(x)\varphi_n(x)] = n+m-1+(\vartheta-1)(2-(-1)^n-(-1)^m)/2 \quad (5.38)$$

olduğu söylenebilir. Bu durumda (5.37) ve (5.38) den

$$-2w+2(1-v)+n+m-1+(\vartheta-1)(2-(-1)^n-(-1)^m)/2 \leq 0 \qquad (5.39)$$

olması gerektiği açıktır. Dahası (5.36) eşitliğinin sağ yanından

$$w+v-1/2>0, w+v-1/2-\vartheta>0, -w+1/2>0, -w+1/2+\vartheta>0 \text{ ve } v>0$$

olduğu görülür. Bunun sonucu olarak da

$$w+v-1/2>0,\ w<1/2,\ v>0 \text{ ve } w-1/2<\vartheta<v+w-1/2$$

sağlanmalıdır. Şimdi de (5.39) ile verilen

$$-2w-2v+n+m+1+(\vartheta-1)(2-(-1)^n-(-1)^m)/2 \leq 0 \qquad (5.40)$$

eşitsizliğini m ve n'nin durumlarına göre inceleyelim. Genel olarak (5.40) eşitsizliğinde m ve n'nin tek ya da çift olması durumuna göre dört durum ortaya çıkar.

$$(i)\begin{cases} n=2i \\ m=2j+1 \end{cases} \quad (ii)\begin{cases} n=2i+1 \\ m=2j \end{cases}$$
$$(iii)\begin{cases} n=2i \\ m=2j \end{cases} \quad (iv)\begin{cases} n=2j+1 \\ m=2j+1 \end{cases} \qquad (5.41)$$

$N=\max\{m,n\}$ olmak üzere yukarıdaki durumların herbiri (5.40) eşitliğinde dikkate alınırsa

$$\begin{cases} N \leq v+w-\vartheta/2\ , & \text{birinci ve ikinci durumlar için} \\ N \leq v+w-1/2, & \text{üçüncü durum için} \\ N \leq v+w-\vartheta+1/2, & \text{dördüncü durum için} \end{cases} \qquad (5.42)$$

elde edilir. Son olarak $\min\{v+w-\vartheta/2; v+w-1/2; v+w-\vartheta+1/2\} = M_\vartheta^{(v+w)}$ olduğu kabul edilirse aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.2 $\left\{S_n^{(\vartheta)}(1,1,-2w-2v+2,-2w;x)\right\}|_{n=0}^{n=N}$ simetrik sonlu dizisi $N \leq M_\vartheta^{(v+w)}$; $w<1/2;\ v>0,\ v+w-1/2>0;\ w-1/2<\vartheta<v+w-1/2;\ (-1)^{2w}=1$ ve $(-1)^\vartheta=-1$ koşulları altında $x^{-2w}(1+x^2)^{-v}$ ağırlık fonksiyonuna göre $(-\infty,\infty)$ aralığında ortogonaldir (Masjed-Jamei 2008).

Örnek olarak $(-\infty,\infty)$ aralığında $x^{-2/3}(1+x^2)^{-10}$ çift ağırlık fonksiyonu verilmiş olsun. Burada $w=1/3<1/2,\ v=10>0$ ve $-1/6<\vartheta<59/6$ şeklindedir. Sonuç olarak $(-1)^\vartheta=-1$ koşulunu sağlayan $(-1/6,59/6)$ aralığında ki her ϑ için $M_\vartheta^{(31/3)}=\min\left\{\frac{62}{6}-\frac{\vartheta}{2};\frac{61}{6};\frac{63}{6}-\vartheta\right\}$ şeklindedir. Diğer bir deyişle

$$\left\{S_n^{(\vartheta)}(1,1,-56/3,-2/3;x)\right\}|_{n=0}^{N\leq M_\vartheta^{(31/3)}}$$

sonlu fonksiyon dizisi $(-\infty,\infty)$ aralığında $x^{-2/3}(1+x^2)^{-10}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir. Mesela $\vartheta=\frac{1}{3}\in(-1/6,59/6)$ ise $(-1)^{-1/3}=-1,\ M_{1/3}^{(31/3)}=\min\left\{\frac{61}{6},\frac{61}{6},\frac{61}{6}\right\}$ ve $N=10$ için

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}(1+x^2)^{10}}S_n^{(1/3)}\left(\begin{array}{cc}-56/3 & -2/3\\ 1 & 1\end{array}\mid x\right)S_m^{(1/3)}\left(\begin{array}{cc}-56/3 & -2/3\\ 1 & 1\end{array}\mid x\right)dx\\ =&\prod_{i=1}^{2[n/2]}K_i\left(\begin{array}{cc}-(55+(-1)^n)/3 & -(1+(-1)^n)/3\\ 1 & 1\end{array}\right)\\ &\times\frac{\Gamma((58+(-1)^n)/6)\Gamma((2-(-1)^n)/6)}{9!}\delta_{n,m}\ ,\ (m,n\leq 10)\end{aligned}$$

ortogonallik bağıntısı sağlanır.

5.1.4 $(-\infty,\infty)$ aralığında $x^{-2w}\exp(-1/x^2)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan simetrik fonksiyonların sonlu bir sınıfı

Bölüm 4.1.4'te $\overline{S}_n\left(\begin{array}{cc}c & d\\ a & b\end{array}\mid x\right)$ polinomlarının özel bir durumu olan

$$\overline{S}_n^{(1)}\left(\begin{array}{cc}-2w+2 & 2\\ 1 & 0\end{array}\mid x\right)$$

simetrik sonlu ortogonal polinomlarının $(-\infty,\infty)$ aralığında $x^{-2w}\exp(-1/x^2)$ ağırlık

fonksiyonuna göre ortogonal olduğu yani,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{-2w}\exp(-1/x^2)\overline{S}_n^{(1)}\left(\begin{array}{cc} -2w+2 & 2 \\ 1 & 0 \end{array} \mid x\right)\overline{S}_m^{(1)}\left(\begin{array}{cc} -2w+2 & 2 \\ 1 & 0 \end{array} \mid x\right)dx$$

$$= \left((-1)^n\prod_{i=1}^{n}K_i\left(\begin{array}{cc} -2w+2 & 2 \\ 1 & 0 \end{array}\right)\right)\Gamma\left(w-\frac{1}{2}\right)\delta_{n,m}$$

ortogonallik bağıntısını sağladığı görülür.

Burada $\left\{\overline{S}_n^{(1)}(1,0,-2w+2,2;x)\right\}|_{n=0}^{n=N}$ polinom dizisinin $(-\infty,\infty)$ aralığında $x^{-2w}\exp(-1/x^2)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olabilmesi için gerek ve yeter şart $N \leq w-1/2$ ve $(-1)^{2w}=1$ olmasıdır. Şimdi de bu polinomların bir genellemesi olan

$$\varphi_n(x) = S_n^{(\vartheta)}\left(\begin{array}{cc} -2w+2 & 2 \\ 1 & 0 \end{array} \mid x\right) \tag{5.43}$$

fonksiyonlarını ele alalım. Bu fonksiyonlar (5.2) denkleminin bir özel durumu olan

$$\begin{aligned} &x^4\varphi_n''(x)+2x((1-w)x^2+1)\varphi_n'(x) \\ &-\left\{\left(n+(\vartheta-1)\frac{1-(-1)^n}{2}\right)\left(n+1-2w+(\vartheta-1)\frac{1-(-1)^n}{2}\right)x^2\right. \\ &\left.+\vartheta(1-(-1)^n)\right\}\varphi_n(x)=0 \end{aligned} \tag{5.44}$$

diferensiyel denkleminin çözümleridir ve Teorem 5.2'den

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{-2w}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)S_n^{(\vartheta)}\left(\begin{array}{cc} -2w+2 & 2 \\ 1 & 0 \end{array} \mid x\right)S_m^{(\vartheta)}\left(\begin{array}{cc} -2w+2 & 2 \\ 1 & 0 \end{array} \mid x\right)dx$$

$$\begin{aligned} &= \left(\prod_{i=1}^{2[n/2]}K_i\left(\begin{array}{cc} -2w+2+(1-(-1)^n)\vartheta & 2 \\ 1 & 0 \end{array}\right)\right. \\ &\left.\times\int_{-\infty}^{\infty}W\left(\begin{array}{cc} -2w+2+(1-(-1)^n)\vartheta & 2 \\ 1 & 0 \end{array} \mid x\right)dx\right)\delta_{n,m} \\ &= \prod_{i=1}^{2[n/2]}K_i\left(\begin{array}{cc} -2w+2+(1-(-1)^n)\vartheta & 2 \\ 1 & 0 \end{array}\right) \\ &\times\Gamma\left(w-\frac{1}{2}-\frac{1-(-1)^n}{2}\vartheta\right)\delta_{n,m} \end{aligned} \tag{5.45}$$

ortogonallik bağıntısını sağlar.

(5.45) deki parametrelerin kısıtlamalarını belirlemek için (5.44) eşitliği self-adjoint formda yazılıp (3.6) eşitliği uygulanırsa

$$[x^{2-2w}\exp(-1/x^2)(\varphi_n'(x)\varphi_m(x)-\varphi_n(x)\varphi_m'(x))]_{-\infty}^{\infty}=0$$

sağlanmalıdır. $\varphi_n(x)$ fonksiyonunun derecesi en fazla $n+(\vartheta-1)(1-(-1)^n)/2$ olacağından

$$\max\deg[\varphi_n'(x)\varphi_m(x)-\varphi_n(x)\varphi_m'(x)]=n+m-1+(\vartheta-1)(2-(-1)^n-(-1)^m)/2$$

olur. Buradan

$$-2w+n+m+1+(\vartheta-1)(2-(-1)^n-(-1)^m)/2\leq 0$$

koşulu elde edilir. Bu ifade $v=0$ için (5.40) eşitsizliğine eş değerdir. (5.41) ve (5.42) den, $M_\vartheta^{(w)}=\min\{w-\vartheta/2;w-1/2;w-\vartheta+1/2\}$ için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.3 $\left\{S_n^{(\vartheta)}(1,0,-2w+2,2;x\right\}|_{n=0}^{n=N}$ simetrik sonlu dizisi $N\leq M_\vartheta^{(w)}$; $w-1/2>0$; $w-\vartheta-1/2>0$; $(-1)^{2w}=1$ ve $(-1)^\vartheta=-1$ koşulları altında $x^{-2w}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ ağırlık fonksiyonuna göre $(-\infty,\infty)$ aralığında ortogonaldir (Masjed-Jamei 2008).

6. ALTI BAĞIMSIZ PARAMETRELİ SİMETRİK ORTOGONAL FONKSİYONLARIN BİR SINIFI

Dördüncü ve beşinci bölümlerdeki (4.1) ve (5.1) eşitliklerinin ikisinde de $G(x) = 0$ olduğu görülür. Bu bölümde ise $G(x) \neq 0$ olsaydı ne olurdu sorusunun cevabı aranacaktır. Bunun için altı parametreli diferensiyel denklemlerin bir sınıfı ele alınacak ve bu denklemin çözümleri ve standart özellikleri incelenecektir (Masjed-Jamei 2010, 2020).

Beşinci bölümde beş parametreli (5.2) eşitliği ile verilen diferensiyel denklemin simetrik çözümlerinin

$$\varphi_{2n}(x) = \overline{S}_{2n}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ & \\ a & b \end{array} \mid x\right) \quad \text{ve} \quad \varphi_{2n+1}(x) = x^{\vartheta}\overline{S}_{2n}\left(\begin{array}{cc} c+2\vartheta a & d+2\vartheta b \\ & \\ a & b \end{array} \mid x\right) \tag{6.1}$$

formunda olduğu gösterilmişti. Şimdi de genelliği bozmaksızın $(-1)^{\alpha} = 1$ ve $(-1)^{\beta} = -1$ koşulları altında

$$\varphi_{2n}(x) = x^{\alpha}\overline{S}_{2n}\left(\begin{array}{cc} c_1 & d_1 \\ & \\ a_1 & b_1 \end{array} \mid x\right) \quad \text{ve} \quad \varphi_{2n+1}(x) = x^{\beta}\overline{S}_{2n}\left(\begin{array}{cc} c_2 & d_2 \\ & \\ a_2 & b_2 \end{array} \mid x\right) \tag{6.2}$$

simetrik dizisini düşünelim. Açıkça görülür ki (6.2) tanımı $\alpha = 0$ için (6.1) tanımına denk olup (6.1)'in bir genellemesidir. Şimdi de (6.2) ile tanımlanan simetrik diziye karşılık gelen diferensiyel denklemi elde edelim. (4.2) denkleminden $n = 2m$ için

$$x(a_1x^2 + b_1)y''_{2m}(x) + (c_1x^2 + d_1)y'_{2m}(x) - 2m(c_1 + (2m-1)a_1)xy_{2m}(x) = 0 \tag{6.3}$$

diferensiyel denklemi

$$\begin{aligned} y_{2m}(x) &= \overline{S}_{2m}\left(\begin{array}{cc} c_1 & d_1 \\ & \\ a_1 & b_1 \end{array} \mid x\right) \\ &= \prod_{j=0}^{m-1} \frac{(2j+1)b_1 + d_1}{(2j-1+2m)a_1 + c_1} \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left(\prod_{j=0}^{m-(k+1)} \frac{(2j-1+2m)a_1 + c_1}{(2j+1)b_1 + d_1} \right) x^{2m-2k} \end{aligned}$$

monik çözümüne sahiptir. (6.3) denkleminde $x^{-\alpha}\varphi_{2m}(x) = \overline{S}_{2m}\left(\begin{array}{cc} c_1 & d_1 \\ a_1 & b_1 \end{array} \mid x\right)$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$x(a_1x^2+b_1)\frac{d^2}{dx^2}(x^{-\alpha}\varphi_{2m}(x)) + (c_1x^2+d_1)\frac{d}{dx}(x^{-\alpha}\varphi_{2m}(x))$$
$$-2m(c_1+(2m-1)a_1)x^{1-\alpha}\varphi_{2m}(x) = 0$$

denklemi elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & x^2(a_1x^2+b_1)\varphi''_{2m}(x) + x((c_1-2\alpha a_1)x^2 + d_1 - 2\alpha b_1)\varphi'_{2m}(x) \\ & +((-2m(c_1+(2m-1)a_1) \\ & -\alpha(c_1-(\alpha+1)a_1))x^2 + \alpha((\alpha+1)b_1 - d_1))\varphi_{2m}(x) \\ = \; & 0 \end{aligned} \tag{6.4}$$

denklemine varılır. Benzer şekilde yine (6.3) denkleminde

$$x^{-\beta}\varphi_{2m+1}(x) = \overline{S}_{2m}\left(\begin{array}{cc} c_2 & d_2 \\ a_2 & b_2 \end{array} \mid x\right)$$

değişken değiştirmesi yapılırsa gerekli hesaplamalardan sonra,

$$\begin{aligned} & x^2(a_2x^2+b_2)\varphi''_{2m+1}(x) + x((c_2-2\beta a_2)x^2 + d_2 - 2\beta b_2)\varphi'_{2m+1}(x) \\ & +((-2m(c_2+(2m-1)a_2) - \\ & \beta(c_2-(\beta+1)a_2))x^2 + \beta((\beta+1)b_2 - d_2))\varphi_{2m+1}(x) \\ = \; & 0 \end{aligned} \tag{6.5}$$

denklemi elde edilir. (6.4) ve (6.5) denklemleri karşılaştırıldığında,

$$a_2 = a_1, \;\; b_2 = b_1, \;\; c_2 = c_1 + 2a_1(\beta-\alpha), \;\; d_2 = d_1 + 2b_1(\beta-\alpha)$$

olduğu görülür. Bu eşitlikler (6.2)'de yerine yazıldığında

$$\sigma_n = \frac{1-(-1)^n}{2} = \begin{cases} 0 \;\; , & n = 2m \\ 1 \;\; , & n = 2m+1 \end{cases}$$

olmak üzere aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 6.1 (6.2) eşitliğinden

$$\begin{aligned} &S_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right) = x^{\alpha+(\beta-\alpha)\sigma_n} \\ &\times \overline{S}_{2[n/2]}\left(\begin{array}{cc} c+2a\left(\alpha+(\beta-\alpha)\sigma_n\right) & d+2b\left(\alpha+(\beta-\alpha)\sigma_n\right) \\ a & b \end{array} \mid x\right) \end{aligned} \tag{6.6}$$

simetrik dizisi

$$\begin{aligned} &S_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right) = \prod_{j=0}^{[n/2]-1} \tfrac{(2j+1+2\alpha+2(\beta-\alpha)\sigma_n)b+d}{(2j-1+n+2\alpha+(2\beta-2\alpha-1)\sigma_n)a+c} \\ &\times x^{\alpha+(\beta-\alpha-1)\sigma_n} \\ &\times \textstyle\sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{[n/2]}{k} \left(\prod_{j=0}^{[n/2]-(k+1)} \tfrac{(2j-1+n+2\alpha+(2\beta-2\alpha-1)\sigma_n)a+c}{(2j+1+2\alpha+2(\beta-\alpha)\sigma_n)b+d}\right) x^{n-2k} \end{aligned} \tag{6.7}$$

açılımına sahiptir ve

$$x^2(ax^2+b)\varphi_n''(x) + x(cx^2+d)\varphi_n'(x) - (\varepsilon_n x^2 + (-1)^n r + s)\varphi_n(x) = 0 \tag{6.8}$$

diferensiyel denklemini sağlar (Masjed-Jamei 2010, 2020). Burada (6.3) ve (6.4) denklemlerinden,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2m} &= 2m(c_1+(2m-1)a_1) + \alpha(c_1-(\alpha+1)a_1) \\ &= 2m(c+2\alpha a+(2m-1)a) + \alpha(c+2\alpha a-(\alpha+1)a) \\ &= 2mc+4m\alpha a+4m^2a-2ma+\alpha c+\alpha^2 a-\alpha a \\ &= 2m\alpha a+\alpha^2 a-\alpha a+2m\alpha a+4m^2a+\alpha c+2mc-2ma \\ &= \alpha a(2m+\alpha-1)+\alpha c+2m\alpha a-2ma+4m^2a+2mc \\ &= \alpha(c+(2m-1+\alpha)a)+2ma(\alpha-1+2m)+2mc \\ &= (\alpha+2m)(c+(2m-1+\alpha)a) \end{aligned}$$

ve (6.5) denkleminden

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2m+1} &= 2m(c_2+(2m-1)a_2)+\beta(c_2-(\beta+1)a_2) \\ &= (2m+\beta)(c+(2m-1+\beta)a) \end{aligned}$$

elde edilir. ε_{2m} ve ε_{2m+1} eşitliklerinden

$$\varepsilon_n = (n+\alpha+(\beta-\alpha-1)\sigma_n)(c+(n-1+\alpha+(\beta-\alpha-1)\sigma_n)a)$$

olarak bulunur.

(6.4) ve (6.8) denklemlerinden $n = 2m$ için

$$r + s = -\alpha((\alpha + 1)b_1 - d_1)$$

(6.5) ve (6.8) denklemlerinden $n = 2m + 1$ için

$$-r + s = -\beta((\beta + 1)b_2 - d_2)$$

şeklindedir. Bu eşitliklerden

$$\begin{aligned} 2s &= d(\alpha + \beta) + (\alpha(\alpha - 1) + \beta(\beta - 1))b \\ 2r &= d(\alpha - \beta) + (\alpha(\alpha - 1) - \beta(\beta - 1))b \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bulunanlar (6.8) denkleminde yerine yazıldığında açıkça görülür ki (6.8) denklemi (3.1) diferensiyel denkleminde

$$\begin{aligned} D(x) &= x^2(ax^2 + b), \quad E(x) = x(cx^2 + d), \quad F(x) = x^2 > 0 \\ G(x) &= -(r + s) = -\alpha(d + (\alpha - 1)b) \\ H(x) &= 2r = d(\alpha - \beta) + (\alpha(\alpha - 1) - \beta(\beta - 1))b \end{aligned}$$

özel seçimine denk gelir.

Sonuç 6.2 (6.7) ile verilen $S_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right)$ fonksiyonları (4.8) polinomları cinsinden

$$\begin{aligned} S_n^{(\alpha,\beta)}&\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right) = x^{\theta_{\alpha,\beta}} \\ &\times \overline{S}_n\left(\begin{array}{cc} c + 2a\theta_{\alpha,\beta} & d + 2b\theta_{\alpha,\beta} \\ a & b \end{array} \mid x\right) \end{aligned} \tag{6.9}$$

formunda yazılabilir (Masjed-Jamei 2010). Burada $\theta_{\alpha,\beta} = \alpha + (\beta - \alpha - 1)\sigma_n$ olarak tanımlanır.

Bu sonuçtan yararlanarak $S_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right)$ için rekürans formülü elde edilebilir.

Teorem 6.1 $S_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right)$ simetrik fonksiyonları

$$\begin{aligned} S_{n+1}^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right) &= x^{1+(-1)^n(\beta-\alpha-1)} S_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right) \\ &\quad + K_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array}\right) S_{n-1}^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right) \end{aligned}$$

rekürans bağıntısını gerçekler (Masjed-Jamei 2010, 2020).

İspat. Bu rekürans bağıntısını elde etmek için

$$\overline{S}_n\left(\begin{array}{cc} c+2a\theta_{\alpha,\beta} & d+2b\theta_{\alpha,\beta} \\ a & b \end{array} \mid x\right) = \bar{R}_n(x) \tag{6.10}$$

diyelim. (4.14) den $\bar{R}_n(x)$'in sağladığı üç terimli rekürans bağıntısı

$$\bar{R}_{n+1}(x) = x\bar{R}_n(x) + K_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array}\right)\bar{R}_{n-1}(x);\ \bar{R}_0(x) = x^\alpha,\ \bar{R}_1(x) = x^\beta \tag{6.11}$$

formundadır. Burada (6.10) ve (4.20) den

$$\begin{aligned} & K_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array}\right) \\ = \ & \frac{1}{((-1)^n(1-\beta+\alpha)+2n+\beta+\alpha-2)a+c)} \\ & \times\left\{\frac{(1+(\beta-\alpha-1)(-1)^n)abn^2+((1-\beta+\alpha)(1-2\alpha)a-c)b}{((-1)^n(1-\beta+\alpha)+2n+\beta+\alpha-4)a+c)}\right. \\ & +\frac{((\alpha+\beta-3)a+c)(d+2\alpha b))\sigma_n+((\alpha+\beta-3+(-1)^n(\alpha+3-3\beta))ab}{((-1)^n(1-\beta+\alpha)+2n+\beta+\alpha-4)a+c)} \\ & \left.\frac{+(1+(-1)^n(\beta-\alpha-1)bc+(-1)^n(\alpha-\beta)ad)n}{((-1)^n(1-\beta+\alpha)+2n+\beta+\alpha-4)a+c)}\right\} \end{aligned}$$

şeklindedir. (6.11) de $R_n(x) = x^{-\alpha-(\beta-\alpha-1)\sigma_n} S_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c,d)$ yerine yazılırsa (6.9) polinomlarının sağladığı rekürans bağıntısı

$$\begin{aligned} S_{n+1}^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right) &= x^{1+(-1)^n(\beta-\alpha-1)} S_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right) \\ &\quad + K_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array}\right) S_{n-1}^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right) \end{aligned} \tag{6.12}$$

olarak elde edilir. ■

Örnek olarak $n = 0, 1, .., 5$ için (6.7) polinomları

$$S_0^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right) = x^{\alpha}, \;\; S_1^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right) = x^{\beta}$$

$$S_2^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right) = x^{\alpha}\left(x^2 + \frac{(2\alpha+1)b+d}{(2\alpha+1)a+c}\right)$$

$$S_3^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right) = x^{\beta}\left(x^2 + \frac{(2\beta+1)b+d}{(2\beta+1)a+c}\right)$$

$$S_4^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right) = x^{\alpha}\left(x^4 + \frac{(2\alpha+3)b+d}{(2\alpha+5)a+c}x^2 + \frac{((2\alpha+1)b+d)((2\alpha+3)b+d)}{((2\alpha+3)a+c)((2\alpha+5)a+c)}\right)$$

$$S_5^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right) = x^{\beta}\left(x^4 + \frac{(2\beta+3)b+d}{(2\beta+5)a+c}x^2 + \frac{((2\beta+1)b+d)((2\beta+3)b+d)}{((2\beta+3)a+c)((2\beta+5)a+c)}\right)$$

formunda elde edilir.

$\alpha = 0$ ve $\beta = \vartheta$ için $S_n^{(\alpha,\beta)}(x; a, b, c, d)$ fonksiyonunun beşinci bölümde tanımlanan $S_n^{(\vartheta)}(x; a, b, c, d)$ fonksiyonuna eşit olduğu açıktır. $S_n^{(\alpha,\beta)}(x; a, b, c, d)$ fonksiyonlarının simetrik olabilmesi için yani $S_n^{(\alpha,\beta)}(-x; a, b, c, d) = (-1)^n S_n^{(\alpha,\beta)}(x; a, b, c, d)$ koşulunun sağlanabilmesi için $(-1)^{\alpha} = 1$ ve $(-1)^{\beta} = -1$ olmalıdır. (6.7) simetrik fonksiyonu için ilginç bir durum $\beta - \alpha = 1$ ve $(-1)^{\alpha} = 1$ olması durumudur. Çünkü bu durumda (6.12) bağıntısı aşağıdaki polinom tipindeki bir reküransa bağıntısına indirgenir.

$$\begin{aligned} S_{n+1}^{(\alpha,\alpha+1)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right) &= xS_n^{(\alpha,\alpha+1)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right) \\ &\quad + K_n^{(\alpha,\alpha+1)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array}\right) S_{n-1}^{(\alpha,\alpha+1)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right) \end{aligned}$$

Bu reküransa bağıntısının başlangıç değerleri $S_0^{(\alpha,\alpha+1)}(x) = x^{\alpha}$ ve $S_1^{(\alpha,\alpha+1)}(x) = x^{\alpha+1}$ dir ve $(-1)^{\alpha} = 1$ dir. Diğer taraftan $\beta - \alpha = 1$ için (6.9) ifadesi

$$S_n^{(\alpha,\alpha+1)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right) = x^{\alpha}\overline{S}_n\left(\begin{array}{cc} c+2\alpha a & d+2\alpha b \\ a & b \end{array} \mid x\right)$$

formuna indirgenir. Burada $\overline{S}_n(x;a,b,c+2\alpha a,d+2\alpha b)$ polinomlarının (4.23)'den

$$\begin{aligned} & \exp\left(\int \frac{(c+2\alpha a-2a)x^2+d+2\alpha b}{x(ax^2+b)}dx\right) \\ = \; & \exp\left(\int \frac{(c-2a)x^2+2\alpha(ax^2+b)}{x(ax^2+b)}dx\right) \\ = \; & x^{2\alpha}\exp\left(\int \frac{(c-2a)x^2+d}{x(ax^2+b)}dx\right) \\ = \; & x^{2\alpha}W(x) \end{aligned}$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olduğu söylenebilir. Şimdi de $S_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c,d)$ fonksiyonları için ortogonallik bağıntısını elde edelim.

Teorem 6.2 $S_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c,d)$ fonksiyonları

$$\int_{-\delta}^{\delta} W\left(\begin{array}{cc} c & d \\ & \\ a & b \end{array} \mid x\right) S_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ & \\ a & b \end{array} \mid x\right) S_m^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ & \\ a & b \end{array} \mid x\right) dx = H_n\delta_{n,m} \quad (6.13)$$

ortogonallik bağıntısını sağlar. Burada

$$H_n = \prod_{i=1}^{2[n/2]} K_i \left(\begin{array}{cc} c+2a(\alpha+(\beta-\alpha-1)\sigma_n & d+2b(\alpha+(\beta-\alpha-1)\sigma_n \\ a & b \end{array}\right)$$

$$\times \int_{-\delta}^{\delta} W\left(\begin{array}{cc} c+2a(\alpha+(\beta-\alpha-1)\sigma_n & d+2b(\alpha+(\beta-\alpha-1)\sigma_n) \\ a & b \end{array} \mid x\right) dx$$

şeklindedir (Masjed-Jamei 2010, 2020).

İspat. (6.8) diferensiyel denklemine göre Teorem 3.1'deki (3.9) bağıntısı gösterir ki (6.7) simetrik fonksiyonları da (4.23) eşitliği ile verilen ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir. Yani,

$$\int_{-\delta}^{\delta} W\left(\begin{array}{cc} c & d \\ & \\ a & b \end{array} \mid x\right) S_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ & \\ a & b \end{array} \mid x\right) S_m^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ & \\ a & b \end{array} \mid x\right) dx = H_n\delta_{n,m}$$

ortogonallik bağıntısı gerçeklenir. Burada $S_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c,d)$ fonksiyonlarının normunun karesi

$$H_n = \int_{-\delta}^{\delta} W\left(\begin{array}{cc} c & d \\ & \\ a & b \end{array} \mid x\right)\left(S_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ & \\ a & b \end{array} \mid x\right)\right)^2 dx \quad (6.14)$$

ile tanımlanır. Yine Teorem 3.1 den söylenebilir ki $(ax^2+b)W(x;a,b,c,d)$ ifadesi $x=\delta$ için yok olmalıdır. H_n normunu hesaplamak için (4.22) bağıntısı kullanılabilir. Diğer bir deyişle (6.14) ifadesi $n=2m$ için H_{2m}

$$\begin{aligned}
&\int_{-\delta}^{\delta} W\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right)\left(S_{2m}^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right)\right)^2 dx \\
&= \int_{-\delta}^{\delta} W\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right) x^{2\alpha}\left(\overline{S}_{2m}\left(\begin{array}{cc} c+2\alpha a & d+2\alpha b \\ a & b \end{array} \mid x\right)\right)^2 dx \\
&= \int_{-\delta}^{\delta} \exp\left(\int \frac{(c-2a)x^2+d}{x(ax^2+b)}dx\right)\exp\left(\int \tfrac{2\alpha}{x}dx\right)\left(\overline{S}_{2m}\left(\begin{array}{cc} c+2\alpha a & d+2\alpha b \\ a & b \end{array} \mid x\right)\right)^2 dx \\
&= \int_{-\delta}^{\delta} \exp\left(\int \frac{(c+2\alpha a-2a)x^2+d+2\alpha b}{x(ax^2+b)}dx\right)\left(\overline{S}_{2m}\left(\begin{array}{cc} c+2\alpha a & d+2\alpha b \\ a & b \end{array} \mid x\right)\right)^2 dx \\
&= \int_{-\delta}^{\delta} W\left(\begin{array}{cc} c+2\alpha a & d+2\alpha b \\ a & b \end{array} \mid x\right)\left(\overline{S}_{2m}\left(\begin{array}{cc} c+2\alpha a & d+2\alpha b \\ a & b \end{array} \mid x\right)\right)^2 dx \\
&= \left(\prod_{i=1}^{2m} K_i\left(\begin{array}{cc} c+2\alpha a & d+2\alpha b \\ a & b \end{array}\right)\right)\int_{-\delta}^{\delta} W\left(\begin{array}{cc} c+2\alpha a & d+2\alpha b \\ a & b \end{array} \mid x\right) dx
\end{aligned} \tag{6.15}$$

olarak elde edilir. Burada $\alpha=0$ ve $\beta=1$ için $K_i(a,b,c,d)=K_i^{(0,1)}(a,b,c,d)$ dir. Benzer işlemler $n=2m+1$ için tekrarlandığında

$$\begin{aligned}
H_{2m+1} &= \textstyle\int_{-\delta}^{\delta} W\left(\begin{array}{cc} c+2\beta a & d+2\beta b \\ a & b \end{array} \mid x\right)\left(\overline{S}_{2m}\left(\begin{array}{cc} c+2\beta a & d+2\beta b \\ a & b \end{array} \mid x\right)\right)^2 \\
&= \left(\prod_{i=1}^{2m} K_i\left(\begin{array}{cc} c+2\beta a & d+2\beta b \\ a & b \end{array}\right)\right)\textstyle\int_{-\delta}^{\delta} W\left(\begin{array}{cc} c+2\beta a & d+2\beta b \\ a & b \end{array} \mid x\right) dx
\end{aligned} \tag{6.16}$$

formunda elde edilir. (6.15) ve (6.16) eşitliklerinden H_n normu

$$\begin{aligned}
H_n = &\prod_{i=1}^{2[n/2]} K_i\left(\begin{array}{cc} c+2a(\alpha+(\beta-\alpha-1)\sigma_n) & d+2b(\alpha+(\beta-\alpha-1)\sigma_n) \\ a & b \end{array}\right) \\
&\times\int_{-\delta}^{\delta} W\left(\begin{array}{cc} c+2a(\alpha+(\beta-\alpha-1)\sigma_n) & d+2b(\alpha+(\beta-\alpha-1)\sigma_n) \\ a & b \end{array} \mid x\right) dx
\end{aligned} \tag{6.17}$$

şeklinde tanımlanır. ■

Teorem 6.3 $S_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right)$ fonksiyonları, ${}_2F_1$ hipergeometrik fonksiyonları cinsinden

$$\begin{aligned} S_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right) &= x^{n+\theta_{\alpha,\beta}} \\ &\quad \times {}_2F_1\left(-[n/2], \frac{b-d}{2b} - \theta_{\alpha,\beta} - [(n+1)/2]; \right. \\ &\quad \left. -\frac{c}{2a} - \theta_{\alpha,\beta} - n + 3/2; -\frac{b}{ax^2}\right) \end{aligned} \tag{6.18}$$

açılımına sahiptir.

İspat. Teorem 4.3'de verilen $\bar{S}_n\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right)$ polinomlarının hipergeometrik gösteriminden (6.9) eşitliğinden yararlanılarak (6.18) kolaylıkla elde edilir. ■

6.1 $S_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c,d)$ Fonksiyonunun Dört Ana Sınıfı

Bu bölümde $S_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c,d)$ simetrik fonksiyonları için dört özel durum incelenecektir (Masjed-Jamei 2010).

6.1.1 Genelleştirilmiş ultraküresel polinomların bir genellemesi

(6.8) diferensiyel denkleminde $(a,b,c,d) = (-1,1,-2w-2v-2,2w)$ olarak seçilirse bu denklem

$$\begin{aligned} & x^2(1-x^2)\varphi_n''(x) - 2x((w+v+1)x^2 - w)\varphi_n'(x) \\ & + \Big\{(n+\alpha+(\beta-\alpha-1)\sigma_n)(n+2w+2v+1+\alpha+(\beta-\alpha-1)\sigma_n)x^2 \\ & + \frac{\beta(\beta-1+2w)-\alpha(\alpha-1+2w)}{2}(-1)^n \\ & - \frac{\beta(\beta-1+2w)+\alpha(\alpha-1+2w)}{2}\Big\}\varphi_n(x) = 0 \end{aligned}$$

formuna indirgenir. Bu denklemin bir çözümü

$$\varphi_n(x) = S_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{array}{cc} -2w-2v-2 & 2w \\ -1 & 1 \end{array} \mid x\right) \tag{6.19}$$

formundadır. $\alpha = 0$ ve $\beta = 1$ durumunda $S_n^{(0,1)}\left(\begin{array}{cc} -2w-2v-2 & 2w \\ -1 & 1 \end{array} \mid x\right)$ polinomları dördüncü bölümde verilen genelleştirilmiş ultraküresel polinomlara karşılık

gelir. $\alpha = 0$ ve $\beta = \vartheta$ durumunda ise $S_n^{(0,\vartheta)}\left(\begin{array}{cc} -2w-2v-2 & 2w \\ -1 & 1 \end{array} \mid x\right)$ fonksiyonları beşinci bölümde verilen $S_n^{(\vartheta)}\left(\begin{array}{cc} -2w-2v-2 & 2w \\ -1 & 1 \end{array} \mid x\right)$ genelleştirilmiş ultraküresel polinomların bir genellemesini verir. Teorem 6.2'den (6.19) fonksiyon çözümü (5.30) ve (5.31) eşitliklerinden aşağıdaki ortogonallik bağıntısını gerçekler.

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} x^{2w}(1-x^2)^v S_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{array}{cc} -2w-2v-2 & 2w \\ -1 & 1 \end{array} \mid x\right) \\
&\times S_m^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{array}{cc} -2w-2v-2 & 2w \\ -1 & 1 \end{array} \mid x\right) dx \\
&= \prod_{i=0}^{2[n/2]} K_i\left(\begin{array}{cc} -2w-2v-2-2\theta_{\alpha,\beta} & 2w+2\theta_{\alpha,\beta} \\ -1 & 1 \end{array}\right) \\
&\quad \times\left(\int_{-1}^{1} W\left(\begin{array}{cc} -2w-2v-2-2\theta_{\alpha,\beta} & 2w+2\theta_{\alpha,\beta} \\ -1 & 1 \end{array} \mid x\right) dx\right)\delta_{n,m} \\
&= \prod_{i=0}^{2[n/2]} K_i\left(\begin{array}{cc} -2w-2v-2-2\theta_{\alpha,\beta} & 2w+2\theta_{\alpha,\beta} \\ -1 & 1 \end{array}\right) \\
&\quad \times B\left(w+\alpha+(\beta-\alpha)\sigma_n+\frac{1}{2}, v+1\right)\delta_{n,m}
\end{aligned}$$

Bu da gösterir ki $w+\alpha+1/2>0,\ w+\beta+1/2>0,\ v+1>0,\ (-1)^{2w}=1,$ $(-1)^{\alpha}=1$ ve $(-1)^{\beta}=-1$ olmalıdır.

6.1.2 Genelleştirilmiş Hermite polinomlarının bir genellemesi

(6.8) diferensiyel denklemi $(a,b,c,d)=(0,1,-2,2w)$ özel durumunda

$$\begin{aligned}
&x^2\varphi_n''(x)-2x(x^2-w)\varphi_n'(x)+\Big\{2(n+\alpha+(\beta-\alpha-1)\sigma_n)x^2 \\
&+\frac{(-1)^n}{2}(\beta(\beta-1+2w)-\alpha(\alpha-1+2w)) \\
&-\frac{1}{2}(\beta(\beta-1+2w)+\alpha(\alpha-1+2w))\Big\}\varphi_n(x)=0
\end{aligned} \tag{6.20}$$

formuna dönüşür. Bu denklemin bir çözümü

$$\varphi_n(x)=S_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{array}{cc} -2 & 2w \\ 0 & 1 \end{array} \mid x\right)$$

fonksiyonlarıdır ve bu fonksiyonlar $(-\infty,\infty)$ aralığında $x^{2w}\exp(-x^2)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir. Yani,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2w}\exp(-x^2)S_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{array}{cc} -2 & 2w \\ 0 & 1 \end{array} \mid x\right) S_m^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{array}{cc} -2 & 2w \\ 0 & 1 \end{array} \mid x\right) dx$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{2[n/2]} K_i\left(\begin{array}{cc} -2 & 2w+2\theta_{\alpha,\beta} \\ 0 & 1 \end{array}\right)\int_{-\infty}^{\infty} W\left(\begin{array}{cc} -2 & 2w+2\theta_{\alpha,\beta} \\ 0 & 1 \end{array} \mid x\right) dx\right)\delta_{n,m}$$

olup $x^2=t$ değişken değiştirmesi yapılırsa, Gamma fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} x^{2w}\exp(-x^2)S_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{array}{cc} -2 & 2w \\ 0 & 1 \end{array} \mid x\right) S_m^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{array}{cc} -2 & 2w \\ 0 & 1 \end{array} \mid x\right) dx \\
&= \left(\frac{1}{2^{n-\sigma_n}}\prod_{i=0}^{2[n/2]}(i+\sigma_i(w+\alpha+(\beta-\alpha)\sigma_n)\right) \\
&\quad\times\Gamma(w+\alpha+(\beta-\alpha)\sigma_n+1/2)\delta_{n,m}
\end{aligned}$$

eşitliği $w+\alpha+1/2>0$, $w+\beta+1/2>0$, $(-1)^{2w}=1$, $(-1)^{\alpha}=1$ ve $(-1)^{\beta}=-1$ koşulları altında sağlanır (Masjed-Jamei 2010).

$\alpha=0$ ve $\beta=1$ durumunda $S_n^{(0,1)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right)$ polinomları dördüncü bölümde verilen genelleştirilmiş Hermite polinomlarını verir. $\alpha=0$ ve $\beta=\vartheta$ durumunda ise $S_n^{(0,\vartheta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right)$ polinomları beşinci bölümde verilen $S_n^{(\vartheta)}\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \mid x\right)$ fonksiyonlarına karşılık gelir.

6.1.3 $(-\infty,\infty)$ aralığında $x^{-2w}(1+x^2)^{-v}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan simetrik fonksiyonların sonlu bir sınıfı

(6.8) diferensiyel denkleminde $a=1,\ b=1,\ c=-2w-2v+2$ ve $d=-2w$ alınırsa

$$\begin{aligned}
&x^2(1+x^2)\varphi_n''(x)-2x((w+v-1)x^2+w)\varphi_n'(x) \\
&+\Big\{(n+\alpha+(\beta-\alpha-1)\sigma_n)(n-2w-2v+1+\alpha+(\beta-\alpha-1)\sigma_n)x^2 \\
&+\frac{(-1)^n}{2}(\alpha(\alpha-1-2w)-\beta(\beta-1-2w)) \\
&+\frac{1}{2}(\alpha(\alpha-1-2w)+\beta(\beta-1-2w))\Big\}\varphi_n(x)=0
\end{aligned} \tag{6.21}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin bir çözümü

$$\varphi_n(x) = S_n^{(\alpha,\beta)} \left(\begin{array}{cc|c} -2w-2v+2 & -2w & \\ 1 & 1 & x \end{array} \right) \tag{6.22}$$

şeklindedir ve bu çözüm Teorem 6.2'den

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{-2w}}{(1+x^2)^v} S_n^{(\alpha,\beta)} \left(\begin{array}{cc|c} -2w-2v+2 & -2w & \\ 1 & 1 & x \end{array} \right) \\ & \times S_m^{(\alpha,\beta)} \left(\begin{array}{cc|c} -2w-2v+2 & -2w & \\ 1 & 1 & x \end{array} \right) dx \\ = & \prod_{i=1}^{2[n/2]} K_i \left(\begin{array}{cc} -2w-2v+2+2\theta_{\alpha,\beta} & -2w+2\theta_{\alpha,\beta}) \\ 1 & 1 \end{array} \right) \\ & \times \left(\int_{-\infty}^{\infty} W \left(\begin{array}{cc|c} -2w-2v+2+2\theta_{\alpha,\beta} & -2w+2\theta_{\alpha,\beta} & \\ 1 & 1 & x \end{array} \right) dx \right) \delta_{n,m} \\ = & \prod_{i=1}^{2[n/2]} K_i \left(\begin{array}{cc} -2w-2v+2+2\theta_{\alpha,\beta} & -2w+2\theta_{\alpha,\beta} \\ 1 & 1 \end{array} \right) \\ & \times \frac{\Gamma(v+w-\theta_{\alpha,\beta}-1/2)\Gamma(-w+\theta_{\alpha,\beta}+1/2)}{\Gamma(v)} \delta_{n,m} \end{aligned} \tag{6.23}$$

ortogonallik bağıntısını sağlar. Fakat, buradaki önemli soru (6.23) deki parametrelerin sınırlarının nasıl belirleneceğidir. Bu problemin çözülebilmesi için (6.21) denk-lemi self-adjoint formda yazılıp (3.6) eşitliği uygulanırsa

$$[x^{-2w}(1+x^2)^{-v+1}(\varphi_n'(x)\varphi_m(x) - \varphi_n(x)\varphi_m'(x))]_{-\infty}^{\infty} = 0 \tag{6.24}$$

sağlanmalıdır. Diğer taraftan (6.22) de $\varphi_n(x)$ dizisinin maksimum derecesi $n+\alpha+(\beta-\alpha-1)\sigma_n$ olduğundan

$$\begin{aligned} & \max \deg \left[(\varphi_n'(x)\varphi_m(x) - \varphi_n(x)\varphi_m'(x) \right] \\ = & \; n+m-1+2\alpha+(\beta-\alpha-1)(\sigma_n+\sigma_m) \end{aligned} \tag{6.25}$$

dir. Bu durumda (6.24) eşitliğinin sağlanabilmesi için

$$-2w+2(-v+1)+n+m-1+2\alpha+(\beta-\alpha-1)(\sigma_n+\sigma_m) \leq 0 \tag{6.26}$$

olmalıdır. Ayrıca (6.23) eşitliğinin sağ tarafından

$$\begin{aligned} v+w-\alpha-1/2 &> 0; \quad v+w-\beta-1/2>0 \\ -w+\alpha+1/2 &> 0; \quad -w+\beta+1/2>0; \text{ ve } v>0 \end{aligned} \tag{6.27}$$

dır. (6.26) eşitsizliğinde m ve n'ler için dört durum ortaya çıkar.

$$\begin{aligned} (i)\begin{cases} n=2i \\ m=2j+1 \end{cases}; \quad (ii)\begin{cases} n=2i+1 \\ m=2j \end{cases}; \\ (iii)\begin{cases} n=2i \\ m=2j \end{cases}; \quad (iv)\begin{cases} n=2i+1 \\ m=2j+1 \end{cases} \end{aligned} \tag{6.28}$$

Bu durumların herbiri (6.26)'da yerine konulursa $N=\max\{n,m\}$ için

$$\begin{cases} N \le v+w-(\alpha+\beta)/2, & \text{(i) ve (ii) durumları için} \\ N \le v+w-\alpha-1/2, & \text{(iii) durumu için} \\ N \le v+w-\beta+1/2, & \text{(iv) durumu için} \end{cases} \tag{6.29}$$

koşulları elde edilir. Buradan $M_{\alpha,\beta}^{(v+w)}=\min\{v+w-(\alpha+\beta)/2;\ v+w-\alpha-1/2;\ v+w-\beta+1/2\}$ olarak alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 6.3 $\{S_n^{(\alpha,\beta)}(x;1,1,-2w-2v+2,-2w)\}\,|_{n=0}^{N}$ sonlu simetrik fonksiyon dizisinin $(-\infty,\infty)$ aralığında $x^{-2w}(1+x^2)^{-v}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olabilmesi için gerek ve yeter şart $N \le M_{\alpha,\beta}^{(w+v)}$; $v+w-\alpha-1/2>0$; $v+w-\beta-1/2>0$; $-w+\alpha+1/2>0$; $-w+\beta+1/2>0$; $v>0$; $(-1)^{2w}=1$; $(-1)^{\alpha}=1$ ve $(-1)^{\beta}=-1$ koşullarının sağlanmasıdır (Masjed-Jamei 2010).

6.1.4 $(-\infty,\infty)$ aralığında $x^{-2w}\exp(-1/x^2)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan simetrik ortogonal fonksiyonların sonlu bir sınıfı

(6.8) diferensiyel denklemi

$$(a,b,c,d)=(1,0,-2w+2,2)$$

özel durumunda

$$\begin{aligned} &x^4\varphi_n''(x)+2x((1-w)x^2+1)\varphi_n'(x) \\ &\big\{-(n+\alpha+(\beta-\alpha-1)\sigma_n)(n+1-2w+\alpha+(\beta-\alpha-1)\sigma_n)x^2 \\ &+(-1)^n(\alpha-\beta)+\alpha+\beta\big\}\,\varphi_n(x)=0 \end{aligned} \tag{6.30}$$

denklemine indirgenir. Bu denklemin bir çözümü

$$\varphi_n(x) = S_n^{(\alpha,\beta)} \left(\begin{array}{cc} -2w+2 & 2 \\ 1 & 0 \end{array} \mid x \right) \tag{6.31}$$

formundadır ve bu fonksiyonlar Teorem 6.2'den aşağıdaki ortogonallik bağıntısını sağlar.

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} x^{-2w} \exp(-1/x^2) S_n^{(\alpha,\beta)} \left(\begin{array}{cc} -2w+2 & 2 \\ 1 & 0 \end{array} \mid x \right) \\
&\times S_m^{(\alpha,\beta)} \left(\begin{array}{cc} -2w+2 & 2 \\ 1 & 0 \end{array} \mid x \right) dx \\
= &\prod_{i=1}^{2[n/2]} K_i \left(\begin{array}{cc} -2w+2+2(\alpha+(\beta-\alpha-1)\sigma_n) & 2 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \\
&\times \left(\int_{-\infty}^{\infty} W \left(\begin{array}{cc} -2w+2+2(\alpha+(\beta-\alpha-1)\sigma_n) & 2 \\ 1 & 0 \end{array} \mid x \right) dx \right) \delta_{n,m} \\
= &\prod_{i=1}^{2[n/2]} K_i \left(\begin{array}{cc} -2w+2+2(\alpha+(\beta-\alpha-1)\sigma_n) & 2 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \\
&\times \Gamma\left(w-1/2-(\alpha+(\beta-\alpha)(1-(-1)^n)/2)\right) \delta_{n,m}
\end{aligned} \tag{6.32}$$

(6.32) eşitliğindeki parametrelerin kısıtlamalarını belirlemek için daha önce uygulanan teknik uygulanmalıdır. (6.30) diferensiyel denklemi self-adjoint formda yazılıp (3.6) eşitliği uygulandığında

$$[x^{2-2w} \exp(-1/x^2)(\varphi_n'(x)\varphi_m(x) - \varphi_n(x)\varphi_m'(x))]_{-\infty}^{\infty} = 0 \tag{6.33}$$

olmalıdır. (6.33) ve (6.25) bağıntılarından

$$-2w+n+m+1+2\alpha+(\beta-\alpha-1)((1-(-1)^n)/2+(1-(-1)^m)/2) \leq 0 \tag{6.34}$$

eşitsizliği elde edilir ve (6.26) bağıntısının $v = 0$ için (6.34) eşitsizliğine eşdeğer olduğu açıktır. $M_{(\alpha,\beta)}^{(w)} = \min\{w-(\alpha+\beta)/2; w-\alpha-1/2; w-\beta+1/2\}$ olarak alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 6.4 $\left\{ S_n^{(\alpha,\beta)}(x;1,0,-2w+2,2) \right\} |_{n=0}^{N}$ sonlu simetrik fonksiyon dizisinin

$(-\infty, \infty)$ aralığında $x^{-2w}\exp(-1/x^2)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olabilmesi için gerek ve yeter şart $N \leq M_{\alpha,\beta}^{(w)}$; $w-\alpha-1/2>0$; $w-\beta-1/2>0$; $(-1)^{2w}=1; (-1)^{\alpha}=1$ ve $(-1)^{\beta}=-1$ koşullarının sağlanmasıdır (Masjed-Jamei 2010).

7. SONUÇ

Bu tez çalışmasında

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d\varphi_n(x)}{dx}\right)+(\lambda_n w(x)-s(x))\varphi_n(x)=0,$$
$$\begin{cases}\gamma_1\varphi_n(c)+\zeta_1\varphi_n'(c)=0\\ \gamma_2\varphi_n(d)+\zeta_2\varphi_n'(d)=0\end{cases}$$

Sturm-Liouville problemi, $\varphi_n(-x)=(-1)^n\varphi_n(x)$ simetri özelliğini sağlayan çözümlere sahip

$$D(x)\varphi_n''(x)+E(x)\varphi_n'(x)+\left(\lambda_n F(x)+G(x)+\tfrac{1-(-1)^n}{2}H(x)\right)\varphi_n(x)=0$$
$$(\gamma_3\varphi(\delta)+\zeta_3\varphi_n'(\delta)=0,\ \ -\delta<x<\delta\ )$$

problemine genişletilmiştir. $D(x), E(x), F(x), G(x)$ ve $H(x)$ fonksiyonlarının belli seçimleri için ilk olarak böylesi bir denklemin dört parametreli simetrik polinom çözümleri elde edilmiş ve bu polinomların sağladığı üç terimli rekürans bağıntısı ve ortogonallik bağıntısı verilmiştir. Bu polinomların özel durumu olarak simetrik ortogonal polinomların dört temel ailesi olan genelleştirilmiş ultraküresel polinomlar, genelleştirilmiş Hermite polinomları ve $(-\infty,\infty)$ aralığında ortogonal olan sonlu simetrik ortogonal polinomların iki dizisi incelenmiştir. Dahası dört parametreli simetrik ortogonal polinomlardan yararlanarak $D(x), E(x), F(x), G(x)$ ve $H(x)$ fonksiyonlarının uygun seçimleri için beş ve altı parametreli simetrik ortogonal fonksiyon aileleri tanımlanıp ve bu fonksiyonların ortogonallik özellikleri, üç terimli rekürans formülleri, hipergeometrik gösterimleri ve ikinci basamaktan diferensiyel denklemleri elde edilmiştir. Ayrıca bu fonksiyonların özel durumlarında, genelleştirilmiş ultraküresel polinomların, genelleştirilmiş Hermite polinomlarının ve $(-\infty,\infty)$ aralığında ortogonal olan sonlu simetrik polinomların çeşitli genellemeleri verilip özellikleri incelenmiştir (Masjed-Jamei 2007a, 2008, 2010).

KAYNAKLAR

Abramowitz, M. and Stegun, I.A. 1972, Handbook of Mathematical Functions with Formulas. Graphs and Mathematical Tables, 9th printing (New York: Dover).

Al-Salam, W., Allaway, W.R. and Askey, R. 1984. Sieved ultraspherical polynomials. Transactions of American Mathematical Society. 284, 39-55.

Altın, A. 2011. Uygulamalı Matematik. Gazi Yayınları, Ankara.

Arfken,G. 1985. Mathematical Methods for Physicists. Academic Press Inc.

Charris, J.A. and Ismail, M.E.H. 1993. Sieved orthogonal polynomials vii: Generalized polynomial mappings. Transactions of American Mathematical Society. 340, 71-93

Chihara, T.S. 1978. An Introduction to Orthogonal Polynomials. New York.

Dette, H. 1996. Characterizations of generalized Hermite and sieved ultraspherical polynomials. Proceedings of American Mathematical Society. 384, 691-711.

Koepf, W., 1988. Hypergeometric Summation. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden.

Masjed-Jamei, M. 2002. Three finite class of hypergeometric orthogonal polynomials. Integral Transforms and Special Functions. 13, 169-190.

Masjed-Jamei, M. 2004. Classical orthogonal polynomials with weight function $((ax+b)^2+(cx+d)^2)^{-p}\exp(q\arctan((ax+b)/(cx+d)));x\in(-\infty,\infty)$ and a generalization of T and F distributions. Integral Transforms and Special Functions. 15, 137-153.

Masjed-Jamei, M. 2007a. A generalization of classical symmetric orthogonal functions using a symmetric generalization of Sturm-Liouville problems. Integral Transforms and Special Functions 18(12), 871-883.

Masjed-Jamei, M. 2007b. A basic class of symmetric orthogonal polynomials using the extended Sturm-Liouville theorem for symmetric function. J. Math. Anal. Appl. 325, 753-775.

Masjed-Jamei, M. 2008. A basic class of symmetric orthogonal functions using the extended Sturm-Liouville theorem for symmetric functions. Journal of Computational and Applied Mathematics 216, 128-143

Masjed-Jamei, M. and Dehghan, M. 2008. A generalization of Fourier trigonometric series. Comput. Math. Appl. 56, 2941-2947.

Masjed-Jamei, M. and Koepf, W. 2010. On incomplete symmetric orthogonal polynomials of Jacobi type. Integral Transforms and Special Functions 21(9), 665-662.

Masjed-Jamei, M. 2010. A basic class of symmetric orthogonal functions with six parameters. J. Comput. Appl. Math. 234, 283-296.

Masjed-Jamei, M., Koepf, W. 2011. On incomplete symmetric orthogonal polynomials of Laguerre type. Applicable Analysis 90(3-4), 769-775.

Masjed-Jamei, M., Area, I. 2013a. A basic class of symmetric orthogonal polynomials of a discrete variable. Journal of Mathematical Analysis and Applications 399(1), 291-305.

Masjed-Jamei, M., Area, I. 2013b. A symmetric generalization of Sturm--Liouville problems in discrete spaces. Journal of Difference Equations and Applications 19(9), 1544-1562.

Masjed-Jamei, M. and Area, I. 2014. A symmetric generalization of Sturm--Liouville problems in q-difference spaces. Bulletin des Sciences Mathématiques 138(6), 693-704.

Masjed-Jamei, M. and Area, I. 2017. A class of symmetric q-orthogonal polynomials with four free parameters. Bulletin des Sciences Mathématiques 141(8), 785-801.

Masjed-Jamei, M., Moalemi, Z. and Saad, N. 2020. Incomplete symmetric orthogonal polynomials of finite type generated by a generalized Sturm--Liouville theorem. Journal of Mathematical Physics 61(2), 023501.

Masjed-Jamei, M., Soleyman, F. and Koepf, W. 2020. Two Finite Sequences of Symmetric q-Orthogonal Polynomials Generated by Two q-Sturm--Liouville Problems. Reports on Mathematical Physics 85(1), 41-55.

Masjed- Jamei, M. 2020. Special functions and generalized Sturm-Liouville problems. Switzerland, Birkhäuser

Nikiforov, A.F. and Uvarov, V.B. 1988. Special Functions of Mathematical Physics. Basel-Boston: Birkhäuser.

Rainville, E. D. 1960. Special Functions. The Macmillan Company, 365 p., New York.

Sosov, Y. and Theodosiou, C.E. 2002. On the complete solution of the Sturm-Liouville problem $d^2X/dx^2+\lambda^2X=0$ over closed interval. J.Math. Phys. 43.

Szegö, G. 1975. Orthogonal Polynomial. 4th edn, Providence, RI: Amer. Math. Soc.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Beyzanur Ülkü ÇELİK

Doğum Yeri : Altındağ

Doğum Tarihi : 20/12/1996

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : ·İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise : Şehit Sabahattin Koçak Anadolu İmamhatip Lisesi

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2014-2018)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (2018-2020)

Çalıştığı Kurum : Gaziantep Boğaziçi Atatürk Çok Programlı Anadolu Lisesi