ÇANKIRI KARATEKİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KOMPAKT METRİK UZAYLARDA CHATTERJEA TİP SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Ali Cihad KABACI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇANKIRI
2021

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Ali Cihad KABACI tarafından hazırlanan **"Kompakt Metrik Uzaylarda Chatterjea Tip Sabit Nokta Teoremleri"** adlı tez çalışması 08/09/2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** Doç. Dr. Gonca Durmaz GÜNGÖR

Jüri Üyeleri **:**

Başkan **:** Prof. Dr. İshak ALTUN
Matematik Anabilim Dalı
Kırıkkale Üniversitesi

Üye **:** Doç. Dr. Gülsüm ADA ULUSOY
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Üye **:** Doç. Dr. Gonca Durmaz GÜNGÖR
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. İbrahim ÇİFTÇİ

Enstitü Müdürü

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum "**Kompakt Metrik Uzaylarda Chatterjea Tip Sabit Nokta Teoremleri**" konulu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, tezin Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nden başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve bu çalışmanın Çankırı Karatekin Üniversitesi tarafından kullanılan "Bilimsel İntihal Tespit Programı"yla tarandığını, "intihal içermediğini" beyan ederim. Çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması halinde ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm. Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim (08/09/2021).

Ali Cihad KABACI

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KOMPAKT METRİK UZAYLARDA CHATTERJEA TİP SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Ali Cihad KABACI

Çankırı Karatekin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Gonca Durmaz GÜNGÖR

Çalışılmış olan bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Giriş ve Tartışma-Sonuç bölümleri alışıldığı gibi ilk ve son bölüm olarak verilmiştir. İkinci bölümde tez içerisinde kullanılacak metrik uzaylar ve kompakt uzaylar kavramlarının yanı sıra bu uzaylardaki genel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Ayrıca yine bu uzaylarda bazı önemli sabit nokta teoremlerine de değinilmiştir. Üçüncü bölüm olan araştırma bulguları bölümünde ise özgün çalışmalar verilmiştir. Bu kısımda, C-Chatterjea ve kuvvetli Chatterjea dönüşümleri kavramları tanımlanmıştır. Dahası, bu tip dönüşümlerin kompakt metrik uzaylardaki durumları için sabit nokta teoremleri elde edilmiştir. Ayrıca sonuçları destekleyecek örneklerden de bahsedilmiştir.

2021, 40 sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Kompakt metrik, Chatterjea dönüşüm, Sabit nokta

ABSTRACT

Master of Science Thesis

CHATTERJEA TYPE FIXED POINT THEOREMS IN COMPACT METRIC SPACES

Ali Cihad KABACI

Çankırı Karatekin University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Gonca DURMAZ GÜNGÖR

This thesis studied consists of four chapters. Introduction and discussion-conclusion sections are given as the first and last sections as usual. In the second chapter, the concepts of metric spaces and compact spaces to be used in the thesis, as well as general definitions and theorems in these spaces are given. In addition, some important fixed-point theorems in these spaces are also mentioned. In the third section, the research findings section, original studies are given. In this section, the concepts of C-Chatterjea and strict chatterjea mapping are defined. Moreover, fixed point theorems have been obtained for the cases of such mappings in compact metric spaces. In addition, examples to support the results are also mentioned.

2021, 40 pages

Keywords: Compact metric, Chatterjea mapping, Fixed point

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında, ilmini, bilgisini, alakasını hiçbir zaman esirgemeyen danışmanım Sayın Doç. Dr. Gonca DURMAZ GÜNGÖR'e çok değerli katkı ve emekleri için teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Tez sürecinde iş hayatımda kolaylıklar sağlayan, manevi desteğini gördüğüm müdürüm Merve KALE'ye teşekkür ederim.

Teknik sorularımı yanıtlayan, sorunlarımı çözen kardeşim Furkan KABACI'ya teşekkür ederim.

Son olarak, bu günlere ulaşmamdaki en büyük çabayı gösteren değerli aileme minnetlerimi sunarım.

Ali Cihad KABACI
Çankırı, Ekim 2021

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **i**
ABSTRACT ..... **ii**
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR ..... **iii**
İÇİNDEKİLER ..... **iv**
SİMGELER DİZİNİ ..... **v**
ŞEKİLLER DİZİNİ ..... **vi**
1. GİRİŞ **1**
2. LİTERATÜR ÖZETİ **3**
3. MATERYAL VE METOT **4**
3.1 Metrik Uzaylar **4**
3.2 Metrik Uzaylarda Bazı Sabit Nokta Teoremleri ve Örnekleri **10**
3.3 Kompakt Uzaylar **18**
3.4 Kompakt Uzaylarda Bazı Sabit Nokta Teoremleri **24**
4. BULGULAR VE TARTIŞMA **28**
5. SONUÇ VE ÖNERİLER **37**
KAYNAKLAR **38**
ÖZGEÇMİŞ **40**

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}^+$	Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
(X, d)	Metrik uzay
$B(X, r)$	x merkezli r yarıçaplı yuvar

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1 Metrik uzaylarda kompaktlık 23

1. GİRİŞ

Standart yöntemlerle çözülebilen (integre edilebilen) birinci dereceden denklemler oldukça sınırlıdır ve genel olarak uygulamalarda karşılaşılan denklemlerin pek çoğu bu sınıf dışında kalmaktadır. Ancak birinci dereceden bir denklem için başlangıç değer problemi, denklemi çözmeden çözümlerin varlığı ve tekliği gibi önemli bilgiler verebilmektedir. Bu şekildeki denklemlerin çözümlerinde Picard iterasyon veya ardışık yaklaşımlar yöntemi kullanılmaktadır.

T: Ϫ → Ϫ bir dönüşüm ve $(Ϫ, d)$ bir metrik uzay olsun. x_0, Ϫ kümesinin herhangi bir elemanı olsun. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x_n = Tx_{n-1}$ şeklinde tanımlanmış $\{x_n\}$ dizisine Picard iterasyon dizisi denir. Büzülme şartı, metrik uzaylardaki sabit nokta teori çalışmalarının ispatında göz önünde bulundurulduğunda öncelikle Picard iterasyon dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunun gösterilmesi amaçlamıştır. Daha sonra tam metrik uzayda kabul edilen bu iterasyon dizisinin yakınsak olduğu garanti edilip yakınsadığı noktanın da bir sabit nokta olduğunun gösterilmesi yolları izlenmiştir.

T: Ϫ → Ϫ bir dönüşüm ve $(Ϫ, d)$ bir metrik uzay olmak üzere, her x, $y \in Ϫ$ için $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$ eşitsizliğini sağlayan bir pozitif α- sayısı varsa, T ye Lipschitz dönüşümü denir. Buradaki α-ların en küçüğü T nin Lipschitz sabiti olarak adlandırılır ve çoğunlukla L ile gösterilir. Eğer $L \in [0,1)$ ise T ye büzülme dönüşümü $L \in [0,1]$ ise genişlemeyen dönüşüm denir. Eğer $x \neq y$ olacak şekildeki her x, $y \in Ϫ$ için $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ eşitsizliği sağlanırsa T ye büzülebilir dönüşüm denir. Örneğin, $T : [1, \infty) \to [1, \infty)$ ve d alışılmış metrik olmak üzere $Tx = x + \frac{1}{x}$ dönüşümü bir büzülme dönüşümü değildir fakat büzülebilirdir. Ya da, $Ϫ = [0, \infty)$, T: Ϫ → Ϫ, $Tx = \sqrt{x^2 + 1}$ $d$önüşümü büzülebilirdir fakat büzülme dönüşümü değildir.

Tam metrik uzaylarda Banach sabit nokta teoremi her Picard iterasyon dizisinin bu sabit noktaya yakınsadığını ve her büzülme dönüşümün bir tek sabit noktasının olduğunu ifade etmektedir. Kompakt metrik uzaylarda ise Edelstein sabit nokta teoremiyle her büzülebilir dönüşümün bir tek sabit noktasının var olduğu ifade edilmiştir. Dahası

Kannan, Chaterjea, Zamfirescu, Reich, Hardy-Rogers, Górnicki, Nadler, Subrahmanyam ve Ciric sabit nokta teoremleri kaynaklarda karşımıza çıkan diğer özel isimli sabit nokta teoremleridir.

T: $\mathcal{X} \to \mathcal{X}$ bir dönüşüm ve $(\mathcal{X}, \mathrm{d})$ bir metrik uzay olsun. Eğer her $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathcal{X}$ için $\mathrm{d}(T\mathrm{x}, T\mathrm{y}) \leq K\{\mathrm{d}(\mathrm{x}, Tx) + \mathrm{d}(\mathrm{y}, T\mathrm{y})\}$ eşitsizliğini sağlayan bir $K \geq 0$ sabiti varsa dönüşümüne Kannan dönüşümü denir. $K \leq \frac{1}{2}$ için Kannan dönüşümlerinin tam metrik uzayda bir tek sabit noktaya sahip olduğunu Kannan 1968 yılında göstermiştir.

T: $\mathcal{X} \to \mathcal{X}$ bir dönüşüm ve $(\mathcal{X}, \mathrm{d})$ bir metrik uzay olsun. Eğer her $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathcal{X}$ için $\mathrm{d}(T\mathrm{x}, T\mathrm{y}) \leq C\{\mathrm{d}(\mathrm{x}, T\mathrm{y}) + \mathrm{d}(\mathrm{y}, T\mathrm{x})\}$ eşitsizliğini sağlayan bir $C \geq 0$ sabiti varsa dönüşümüne Chatterjea dönüşümü denir. Bir $C \leq \frac{1}{2}$ için Chatterjea dönüşümlerinin tam metrik uzayda bir tek sabit noktaya sahip olduğunu Chatterjea 1972 yılında göstermiştir.

Son zamanlarda, Kannan dönüşümlerinin pek çok genelleştirmesini Górnicki kompakt metrik uzaylarda elde etmiştir.

Bu tez çalışmasında Chatterjea ve C- Chatterjea dönüşümü kavramları göz önünde bulundurularak kompakt metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri elde edilip incelenecektir.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

Genel tanım ve teoremler için Osman B.'nin "Genel Topoloji", Mahmut K.'nın "Genel Topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar", Osman M.'nin "Topoloji ve Kategori" ile Yüksel S.'nin "Metrik Uzaylar ve Topolojisi" ve "Fonksiyonel Analiz" adlı kitapları kullanılmıştır. Banach sabit nokta teoremini ve bazı genelleştirmelerini incelemek için Banach'ın "Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrales", Goebel'in "Some fixed point theorems in Banach spaces", Ciric'in "A generalization of Banach's contraction principle", Brouwer'ın "An intuitionist correction of the fixed point on the sphere", Hardy-Rogers'ın "A generalization of a fixed point Teorem of Reich" ve Zamfirescu'nun "Fixed point Teorems in metric spaces" adlı çalışmaları incelenmiştir. Chatterjea ve Kannan teoremlerinin ispatı için "Some results on fixed points", "Some results on fixed points-II" ve "Fixed Point Teorems" adlı çalışmalar dikkate alınmıştır. Kompakt metrik uzayda Kannan tip sürekli dönüşümler için sabit noktanın varlığı ve bunları içeren birçok örneğin incelenmesi için Górnicki'nin "Fixed point theorems for Kannan type mapping", "Various extensions of Kannan's fixed point theorem", "Fixed points of involutions" ile "Remarks on asymptotic regularity and fixed points" adlı çalışmaları göz önünde bulundurulmuştur. Metrik uzayın tamlığının gösterimi Subrahmanyam'ın "Completness and fixed points" adlı çalışması kullanılmıştır.

3. MATERYAL VE METOT

Materyal ve yöntem bölümünde, tezin okunulabilirliğine ve anlaşılabilirliğine yardımcı olmak amacıyla literatürdeki bazı temel tanım ve bunların bilinen sonuçları verilip, verilen bu ifadelerin diğer bölümlerde kullanılabilmesi için hatırlatma yapmak amaçlanmıştır.

3.1 Metrik Uzaylar

3.1.1. Tanım. X boş olmayan bir küme ve $d : X x X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

i. Her $x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$ ve$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
ii. Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$,
iii. Her $x, y, z \in X$ için $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

şartları sağlanıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik ve (X, d) ikilisine **metrik uzay** denir. Bu durumda X in elemanlarına **noktalar** ve $d(x, y)$ değerine de **x noktası ile y noktası arasındaki uzaklık** denir.

3.1.2. Örnek. $X = \mathbb{R}^n$ veya $X = \mathbb{C}^n$ olmak üzere

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n),\ y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in X \text{ için}$$

$$d_\infty(x, y) = max\{|x_i - y_i| : i = 1, \cdots, n\}$$

şeklinde tanımlanan $d_\infty = X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu X^n üzerinde bir metriktir. Bu metriğe $\mathbb{R}^n$ üzerinde **maksimum metriği** denir.

3.1.3. Örnek. $\mathcal{X}$ boş olmayan bir küme ve $\mathrm{d} : \mathcal{X}\, x\, \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathcal{X}$ için

$$\mathrm{d}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \begin{cases} 0, & \mathfrak{x} = \mathfrak{y} \\ 1, & \mathfrak{x} \neq \mathfrak{y} \end{cases},$$

şeklinde tanımlanan $\mathrm{d} : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathcal{X}$ üzerinde bir metriktir. Bu metriğe **ayrık metrik** denir.

3.1.4. Tanım. $(\mathcal{X}, \mathrm{d})$ bir metrik uzay, $t \in \mathcal{X}$ ve $\beta > 0$ bir reel sayı olsun.

$B_{(\mathcal{X},\mathrm{d})}(t, \beta) = \{\mathfrak{x} \in \mathcal{X}: \mathrm{d}(\mathfrak{x}, t) < \beta\}$ kümesine β **-yarıçaplı t merkezli açık yuvar,** $D_{(\mathcal{X},\mathrm{d})}(t, \beta) = \{\mathfrak{x} \in \mathcal{X}: \mathrm{d}(\mathfrak{x}, t) \leq \beta\}$ kümesine β**-yarıçaplı t merkezli kapalı yuvar ve** $S_{(\mathcal{X},\mathrm{d})}(t, \beta) = \{\mathfrak{x} \in \mathcal{X}: \mathrm{d}(\mathfrak{x}, t) = \beta\}$ kümesine β **-yarıçaplı t merkezli yuvar yüzeyi** denir.

3.1.5. Tanım. $(\mathcal{X}, \mathrm{d})$ bir metrik uzay ve $A \subseteq \mathcal{X}$ olsun. d metriğinin $A \times A$ ya kısıtlanmışı olan

$$\mathrm{d}_A: A \times A \to \mathbb{R},\ \mathrm{d}_A(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \mathrm{d}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$$

fonksiyonu A üzerinde bir metriktir denir. d_A metriğine d den A üzerine **indirgenmiş metrik** ve (A, d_A) ikilisine de $(\mathcal{X}, \mathrm{d})$ uzayının bir **alt uzayıdır** denir. Bir karışıklığın meydana gelmemesi için genelde d_A yerine d kullanılır.

3.1.6. Örnek. $(\mathbb{R}, \mathrm{d})$ standart metrik uzayı verilsin. Bu durumda $(\mathbb{N}, \mathrm{d})$, $(\mathbb{Z}, \mathrm{d})$, $(\mathbb{Q}, \mathrm{d})$, $([0,1], \mathrm{d})$ metrik uzayları $(\mathbb{R}, \mathrm{d})$ standart uzayının birer alt uzayıdırlar.

3.1.7. Teorem. $(\mathcal{X}, \mathrm{d})$ bir metrik uzay, $M \subseteq \mathcal{X}$ ve $z \in M$ olsun. Bu durumda

$$B_M(z, \varepsilon) = M \cap B_{\mathcal{X}}(z, \varepsilon)$$

dur.

3.1.8. Tanım. $(\mathcal{X}, \mathrm{d})$ bir metrik uzay $M \subseteq \mathcal{X}$ olsun. Her $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in A$ için $\mathrm{d}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \leq r$ olacak şekilde bir $r > 0$ reel sayısı varsa M kümesine **sınırlıdır** denir. Aksi taktirde M kümesine sınırsızdır denir. Bu şekildeki r sayılarının en büyük alt sınırına M **nın çapı denir** ve $\mathrm{Ç}ap(M)$ ile gösterilir. Yani,

$$\mathrm{Ç}ap(M) = inf\{r \geq 0 : \mathrm{x}, \mathrm{y} \in M \, için \, \mathrm{d}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \leq r\}$$

dir. $\mathcal{X}$ uzayının kendisi sınırlı ise d metriğine **sınırlı metrik** denir.

3.1.9. Tanım. $(\mathcal{X}, \mathrm{d})$ bir metrik uzay ve $N \subseteq \mathcal{X}$ olsun. Her $\mathrm{x} \in N$ için $B(\mathrm{x}, \varepsilon) \subseteq N$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa N kümesine d **-açık küme** veya kısaca **açık küme** denir. $\mathcal{X} \setminus N$ kümesi açıksa N kümesine **kapalı küme** denir.

3.1.10. Teorem. Her $(\mathcal{X}, \mathrm{d})$ metrik uzayında her $B(\mathrm{x}, \varepsilon)$ açık yuvarı açık bir kümedir.

3.1.11. Teorem. Her $(\mathcal{X}, \mathrm{d})$ metrik uzayında her $D(\mathrm{x}, \varepsilon)$ kapalı yuvarı kapalı bir kümedir.

3.1.12. Tanım. $\mathcal{X}$ bir küme olsun. Her $f : \mathbb{N} \to \mathcal{X}$ fonksiyonuna $\mathcal{X}$ de bir **dizi** veya terimleri $\mathcal{X}$ in elemanlarından olusan bir **dizi** denir. $n \in \mathbb{N}$ için $f(n) = \mathrm{x}_n$ ise bu dizi genellikle $\{\mathrm{x}_n\}$ veya $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3, \cdots$ şeklinde gösterilir. $n \in \mathbb{N}$ için x_n değerine dizinin **n. terimi** denir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathrm{x}_n = \mathrm{x}$ ise $\{\mathrm{x}_n\}$ dizisine **x değerli sabit dizi** denir ve genellikle $\{\mathrm{x}\}$ ile gösterilir.

3.1.13. Tanım. Bir $\{\mathrm{x}_n\}$ dizisinin bazı elemanları atılarak, fakat geri kalanların sırası korunarak elde edilen $\{\mathrm{x}_{n_i}\} = \{\mathrm{x}_i\}$ dizisine $\{\mathrm{x}_n\}$ dizisinin bir **alt dizisi** denir. Yani $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ şeklinde doğal sayılar var ve $\mathrm{i} = 1, 2, 3, \cdots$ için $m = \mathrm{x}_i$ oluyorsa $\{\mathrm{x}_{n_i}\}$ dizisine $\{\mathrm{x}_n\}$ dizisinin bir **alt dizisi** denir.

3.1.14. Tanım. $\{\mathtt{x}_n\}$ terimleri $\mathtt{X}$ in elemanlarından oluşan bir dizi ve $(\mathtt{X}, \mathtt{d})$ bir metrik uzay olsun. Her $m, n \in \mathbb{N}$ için $\mathtt{d}(\mathtt{x}_n, \mathtt{x}_m) \leq r$ olacak şekilde $r > 0$ sayısı varsa $\{\mathtt{x}_n\}$ dizisine **sınırlıdır** denir. Yani $\{\mathtt{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi $(\mathtt{X}, \mathtt{d})$ metrik uzayında sınırlı ise $\{\mathtt{x}_n\}$ dizisine **sınırlı dizi** denir.

3.1.15. Tanım. $\{\mathtt{x}_n\}$ elemanları $\mathtt{X}$ den alınarak oluşturulan bir dizi ve $(\mathtt{X}, \mathtt{d})$ bir metrik uzay olsun.

i. Her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı $n \geq n_0$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathtt{d}(\mathtt{x}_n, \mathtt{x}) < \varepsilon$ olacak şekilde varsa $\{\mathtt{x}_n\}$ dizisine $\mathtt{x} \in \mathtt{X}$ noktasına yakınsıyor denir. Bu durumda $\mathtt{x}$ noktasına $\{\mathtt{x}_n\}$ dizisinin **limiti** denir ve bu durum $\lim_{n\to\infty} \mathtt{x}_n = \mathtt{x}$ veya $\mathtt{x}_n \to \mathtt{x}$ şeklinde gösterilir.

ii. Her $\varepsilon > 0$ ve her $n_0 \in \mathbb{N}$ için $\mathtt{d}(\mathtt{x}_n, \mathtt{x}) < \varepsilon$ ve $n \geq n_0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ varsa $\mathtt{x} \in \mathtt{X}$ noktasına $\{\mathtt{x}_n\}$ dizisinin bir **yığılma noktası** denir.

iii. Her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı $n, m \geq n_0$ olduğunda $\mathtt{d}(\mathtt{x}_n, \mathtt{x}_m) < \varepsilon$ olacak şekilde varsa $\{\mathtt{x}_n\}$ dizisine **Cauchy dizisi** denir.

3.1.16. Teorem. Herhangi bir $(\mathtt{X}, \mathtt{d})$ metrik uzayında yakınsak bir dizi tek bir noktaya yakınsar.

3.1.17. Teorem. Herhangi bir $(\mathtt{X}, \mathtt{d})$ metrik uzayında yakınsak her $\{\mathtt{x}_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir.

3.1.18. Teorem. Herhangi bir metrik uzayda her Cauchy dizisi sınırlıdır.

3.1.19. Teorem. $\mathbb{R}$ standart uzayında sınırlı bir $\{\mathtt{x}_n\}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi vardır.

3.1.20. Sonuç. $\mathbb{R}$ standart uzayında her Cauchy dizisi yakınsaktır.

3.1.21. Tanım. $\mathrm{d}_\infty(\mathrm{x},\mathrm{y}) = sup\{|\mathrm{x}(t) - \mathrm{y}(t)|: t \in [a,b]\}$ olmak üzere $(C(a,b),\mathrm{d}_\infty)$ uzayı ve $\{\mathrm{x}_n\}$ dizisi verilsin.

Her $t \in [a,b]$ için $\mathbb{R}$ de $((\mathrm{x}_n(t))$ dizisi $\mathrm{x}(t)$ ye yakınsıyorsa $\{\mathrm{x}_n\}$ dizisine x fonksiyonuna **noktasal yakınsıyor** denir.

$(C(a,b),\mathrm{d}_\infty)$ uzayında $\{\mathrm{x}_n\}$ dizisi x fonksiyonuna yakınsıyorsa $\{\mathrm{x}_n\}$ dizisine x fonksiyonuna **düzgün yakınsıyor** denir.

3.1.22. Tanım. (X,d) bir metrik uzay olsun. X deki her Cauchy dizisi X in bir noktasına yakınsıyorsa X uzayına **tam metrik uzay** denir. $A \subseteq \mathrm{X}$ ve (A,d_A) uzayı tamsa A kümesine X in **tam alt kümesi** denir.

3.1.23. Örnek. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ de tam değildir.

3.1.24. Örnek. Her (X,d) ayrık metrik uzayı tam uzaydır.

3.1.25. Tanım. $(\mathrm{X},\mathrm{d}_1)$ ve (Y,d_2) iki metrik uzay, $\mathrm{x}_0 \in \mathrm{X}$ ve $g: \mathrm{X} \to Y$ bir fonksiyon olsun. $\varepsilon > 0$ olmak üzere her $B(g(\mathrm{x}_0),\varepsilon)$ için $g\,(B(\mathrm{x}_0,\delta)) \subseteq B(g(\mathrm{x}_0),\varepsilon)$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ varsa g fonksiyonuna $\mathrm{x}_0 \in \mathrm{X}$ noktasında **süreklidir** denir.

3.1.26. Teorem. $(\mathrm{X},\mathrm{d}_1)$ ve (Y,d_2) iki metrik uzay, $\mathrm{x}_0 \in \mathrm{X}$ ve $g: \mathrm{X} \to Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda g fonksiyonunun x_0 da sürekli olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ reel sayısının $\mathrm{d}_1(\mathrm{x},\mathrm{x}_0) < \delta$ özelliğini sağlayan her $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$ için $\mathrm{d}_2(g(\mathrm{x}), g(\mathrm{x}_0) < \varepsilon$ olacak şekilde bulunmasıdır.

3.1.27. Teorem. $(\mathrm{X},\mathrm{d}_1)$ ve (Y,d_2) birer metrik uzay, $\mathrm{x}_0 \in \mathrm{X}$ ve $g: \mathrm{X} \to Y$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

g fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir.

$(\mathrm{X}, \mathrm{d}_1)$ uzayında $\mathrm{x}_n \to \mathrm{x}$ özelliğine sahip her $\{\mathrm{x}_n\}$ dizisi için (Y, d_2) uzayında

$g(\mathrm{x}_n) \to g(\mathrm{x})$ dir.

3.1.28. Tanım. $(\mathrm{X}, \mathrm{d}_1)$ ve (Y, d_2) iki metrik uzay ve $g: \mathrm{X} \to Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer g fonksiyonu tanım uzayının her noktasında sürekli ise, g fonksiyonuna bu uzay üzerinde **sürekli fonksiyon** denir.

3.1.29. Teorem. $(\mathrm{X}, \mathrm{d}_1)$ ve (Y, d_2) iki metrik uzay ve $g: \mathrm{X} \to Y$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

g fonksiyonu süreklidir.

(Y, d_2) uzayındaki her U açık kümesi için $g^{-1}(U)$ kümesi $(\mathrm{X}, \mathrm{d}_1)$ uzayında açıktır.

3.1.30. Tanım. $(\mathrm{X}, \mathrm{d}_1)$, (Y, d_2) iki metrik uzay ve bir $g: \mathrm{X} \to Y$ bir fonksiyon olsun.

Her $\beta > 0$ için bir $\mu > 0$ reel sayısı $\mathrm{d}_1(\mathrm{x}, \mathrm{y}) < \mu$ özelliğini sağlayan her $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{X}$ için $\mathrm{d}_2\big(g(\mathrm{x}), g(y)\big) < \beta$ olacak şekilde varsa g fonksiyonuna **düzgün süreklidir** denir. Buna denk olarak her $\beta > 0$ için bir $\mu > 0$ sayısı her $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$ için $\mathrm{g}\,(\mathrm{B}(\mathrm{x}, \mu)) \subseteq B(g(\mathrm{x}), \beta)$ olacak şekilde varsa g fonksiyonuna **düzgün süreklidir** denir.

Her $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{X}$ için $\mathrm{d}_2\big(g(\mathrm{x}), g(\mathrm{y})\big) \leq r\mathrm{d}_1(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ olacak şekilde sabit bir $r > 0$ sayısı varsa g fonksiyonuna **Lipschitz süreklidir** denir.

3.2 Metrik Uzaylarda Bazı Sabit Nokta Teoremleri ve Örnekleri

Tam metrik uzaylardaki sabit teori ilk olarak Banach ile 1922 yılında çalışılmıştır.

3.2.1. Teorem. T: $\mathrm{X} \to \mathrm{X}$ bir dönüşüm ve (X, d) bir metrik uzay olsun. Her $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{X}$ için

$$\mathrm{d}(T\mathrm{x}, T\mathrm{y}) \leq \alpha \mathrm{d}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$$

olacak şekilde $\alpha \in [0,1)$ var ise T dönüşümünün X de tek bir sabit noktası vardır. Dahası her $\mathrm{x}_0 \in \mathrm{X}$ için $\{T^n \mathrm{x}_0\}$ dizisi T nin bu sabit noktasına yakınsar.

İspat: $\mathrm{x}_0 \in \mathrm{X}$ keyfi noktasını ele alalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathrm{x}_{n+1} = T\mathrm{x}_n = T^n \mathrm{x}_0$ şeklinde tanımlı $\{\mathrm{x}_n\}$ dizisi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\mathrm{d}(\mathrm{x}_n, \mathrm{x}_{n+1}) = \mathrm{d}(T\mathrm{x}_{n-1}, \mathrm{T}\mathrm{x}_n) \leq L\mathrm{d}(\mathrm{x}_{n-1}, \mathrm{x}_n)$$

$$= L\mathrm{d}(\mathrm{T}\mathrm{x}_{n-2}, \mathrm{T}\mathrm{x}_{n-1})$$

$$\leq L^2 \mathrm{d}(\mathrm{x}_{n-2}, \mathrm{x}_{n-1})$$

$$\leq$$

$$\vdots$$

$$\leq L^n \mathrm{d}(\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_1)$$

elde edilir. Bu durumda her $n, m \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ için

$$\mathrm{d}(\mathrm{x}_n, \mathrm{x}_m) \leq \mathrm{d}(\mathrm{x}_n, \mathrm{x}_{n+1}) + \mathrm{d}(\mathrm{x}_{n+1}, \mathrm{x}_{n+2}) + \cdots + \mathrm{d}(\mathrm{x}_{m-1}, \mathrm{x}_m)$$

$$\leq L^n \mathrm{d}(\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_1) + L^{n+1}\mathrm{d}(\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_1) + \cdots + L^{m-1}\mathrm{d}(\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_1)$$

$$= (L^n + L^{n+1} + \cdots + L^{m-1})\mathrm{d}(\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_1)$$

$$= L^n(1 + L + L^2 + \cdots + L^{m-n-1})\mathrm{d}(\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_1)$$

$$= L^n\left(\frac{1 - L^{m-n}}{1 - L}\right)\mathrm{d}(\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_1)$$

$$\leq \frac{L^n}{1 - L}\mathrm{d}(\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_1)$$

elde edilir. Dolayısıyla ifade 0 'a yakınsak olup bu $\{\mathrm{x}_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. Öte yandan, X bir tam metrik uzay olduğundan $\lim_{n\to\infty} \mathrm{x}_n = z$ olacak şekilde $z \in \mathrm{X}$ vardır. Ayrıca T sürekli olduğundan

$$z = \lim_{n\to\infty} \mathrm{x}_{n+1} = \lim_{n\to\infty} T\mathrm{x}_n = T \lim_{n\to\infty} \mathrm{x}_n = Tz$$

olur. Yani z, T nin bir sabit noktası olur. Şimdi bu sabit noktanın tekliğini gösterelim. T dönüşümünün diğer bir sabit noktası $w \neq z$ olsun. Bu durumda $0 < \mathrm{d}(z, w)$ olup

$$\mathrm{d}(z, w) = \mathrm{d}(Tz, Tw) \leq L\mathrm{d}(z, w) < \mathrm{d}(z, w)$$

olur ki buradan

$$\mathrm{d}(z, w) < \mathrm{d}(z, w)$$

çelişkisi elde edilir. O halde kabulümüz yanlıştır. Yani z noktası T nin tek sabit noktasıdır.

Yukarıdaki teorem, dönüşümün sabit noktasının olup olmadığını gösterip ek olarak bu sabit noktanın tekliğini ve nasıl elde edilebileceğini de göstermektedir. Ayrıca bu teorem birçok yazar tarafından da genelleştirilmiştir. Kannan 1968 yılında aşağıdaki teoremi ifade ve ispat etmiştir. Bu teoremin en önemli özelliği ise Banach sabit nokta teoreminin bir genelleştirmesi olmamasıdır.

3.2.2. Teorem. T: $\mathrm{X} \to \mathrm{X}$ bir dönüşüm ve (X, d) bir metrik uzay olsun. Her $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{X}$ için

$$\mathrm{d}(T\mathrm{x}, T\mathrm{y}) \leq \alpha \{\mathrm{d}(\mathrm{x}, T\mathrm{x}) + \mathrm{d}(\mathrm{y}, T\mathrm{y})\} \qquad (3.2.1.)$$

olacak şekilde $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ var ise T dönüşümünün X de bir tek sabit noktası vardır. Dahası her $\mathrm{x}_0 \in \mathrm{X}$ için $\{T^n \mathrm{x}_0\}$ dizisi T nin bu sabit noktasına yakınsar.

İlk olarak Kannan sabit nokta teoreminin ispatında yararlanacağımız aşağıdaki Lemmayı verelim.

3.2.3. Lemma. C, (X, d) tam metrik uzayının boştan farklı kapalı bir alt kümesi olsun ve $T: C \to C$, $K < 1$ için 3.2.1. eşitsizliğini sağlayan bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $0 \leq a < 1$ ve $b > 0$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{R}$ var olsun. Keyfi bir $\mathrm{x} \in C$ için

$$\mathrm{d}(u, Tu) \leq a\mathrm{d}(\mathrm{x}, T\mathrm{x}) \qquad (3.2.2.)$$

olacak şekilde $u \in C$ vardır ve $\mathrm{d}(u, \mathrm{x}) \leq b\mathrm{d}(\mathrm{x}, T\mathrm{x})$ olur ve T en az bir sabit noktaya sahiptir.

İspat: $\mathrm{x}_0 \in C$ keyfi bir sayı olsun. $\mathrm{d}(\mathrm{T}\mathrm{x}_{n+1}, \mathrm{x}_{n+1}) \leq a\mathrm{d}(\mathrm{T}\mathrm{x}_n, \mathrm{x}_n)$ eşitsizliğini sağlayan $\{x_n\} \subset C$ dizisini göz önüne alalım. $n = 0,1,2, \cdots$ için

$$\mathrm{d}(\mathrm{x}_{n+1}, \mathrm{x}_n) \leq b\mathrm{d}(\mathrm{T}\mathrm{x}_n, \mathrm{x}_n)$$

olduğundan

$$\mathrm{d}(\mathrm{x}_{n+1}, \mathrm{x}_n) \leq b\mathrm{d}(\mathrm{T}\mathrm{x}_n, \mathrm{x}_n) \leq ba^n \mathrm{d}(\mathrm{T}\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_0)$$

bulunur. Buradan C tamdır ve $\lim_{n\to\infty} \mathrm{x}_n = v$ olacak şekilde $v \in C$ vardır. Dolayısıyla $\{\mathrm{x}_n\}$ dizisinin C de bir Cauchy dizisidir. O halde

$$\mathrm{d}(Tv, v) \leq \mathrm{d}(Tv, \mathrm{T}\mathrm{x}_n) + \mathrm{d}(\mathrm{T}\mathrm{x}_n, \mathrm{x}_n) + \mathrm{d}(\mathrm{x}_n, v)$$

$$\leq K\{\mathrm{d}(v, Tv) + \mathrm{d}(\mathrm{x}_n, \mathrm{T}\mathrm{x}_n)\} + \mathrm{d}(\mathrm{T}\mathrm{x}_n, \mathrm{x}_n) + \mathrm{d}(\mathrm{x}_n, v)$$

bulunur. Bu şekilde devam edilirse,

$$\mathrm{d}(Tv, v) \leq \frac{K+1}{1-K}\mathrm{d}(\mathrm{T}\mathrm{x}_n, \mathrm{x}_n) + \frac{1}{1-K}\mathrm{d}(\mathrm{x}_n, v)$$

$$\leq \tfrac{K+1}{1-K} a^n \mathrm{d}(\mathrm{T}\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_0) + \tfrac{1}{1-K}\mathrm{d}(\mathrm{x}_n, v)$$

olup her iki taraftan $n \to \infty$ için limit alınırsa $Tv = v$ elde edilir. Bu durumda Teorem 3.2.2. nin ispatı aşağıdaki şekilde devam etmektedir.

Herhangi bir $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$ için $u = T\mathrm{x}$ olsun. O halde

$$\mathrm{d}(u, Tu) = \mathrm{d}(T\mathrm{x}, Tu) \leq K\{\mathrm{d}(\mathrm{x}, T\mathrm{x}) + \mathrm{d}(u, Tu)\}$$

$$\mathrm{d}(u, Tu) \leq \frac{K}{1-K}\mathrm{d}(\mathrm{x}, T\mathrm{x})$$

olur. Kabulümüzden dolayı $\frac{K}{1-K} < 1$ olur ve $\mathrm{d}(u, \mathrm{x}) = \mathrm{d}(T\mathrm{x}, \mathrm{x})$ dir. Şimdi keyfi bir $\mathrm{x}_0 \in \mathrm{X}$ için bir $\{\mathrm{x}_{n+1} = \mathrm{T}\mathrm{x}_n\}$ dizisini tümevarımsal olarak tanımlayalım. Lemma 3.2.3.

den dolayı $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{x}_n = v$ olup ve $Tv = v$ dir. Kabul edelim ki z, T' nin başka bir sabit noktası olsun. O halde

$$0 < \mathfrak{d}(v,z) = \mathfrak{d}(Tv,Tz) \leq K\{\mathfrak{d}(v,Tv) + \mathfrak{d}(z,Tz)\} = 0$$

bulunur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla kabulümüz yanlıştır. Yani T nin bir tek $v \in \mathfrak{X}$ sabit noktası vardır. Bu nedenle her $\mathfrak{x} \in \mathfrak{X}$ ve $n = 0,1,2,$ ...için

$$\mathfrak{d}(T^{n+1}\mathfrak{x}, T^n\mathfrak{x}) \leq K\{\mathfrak{d}(T^n\mathfrak{x}, T^{n+1}\mathfrak{x}) + \mathfrak{d}(T^{n-1}\mathfrak{x}, T^n\mathfrak{x})\}$$

$$\mathfrak{d}(T^{n+1}\mathfrak{x}, T^n\mathfrak{x}) \leq \frac{K}{1-K}\mathfrak{d}(T^n\mathfrak{x}, T^{n-1}\mathfrak{x})$$

$$\mathfrak{d}(T^{n+1}\mathfrak{x}, v) \leq K\{\mathfrak{d}(T^n\mathfrak{x}, T^{n+1}\mathfrak{x}) + \mathfrak{d}(v, Tv)\}$$

$$= K\mathfrak{d}(T^{n+1}\mathfrak{x}, T^n\mathfrak{x})$$

$$\leq K(\frac{K}{1-K})^n\mathfrak{d}(T\mathfrak{x}, \mathfrak{x})$$

elde edilir.

Her büzülme dönüşümünün sürekli olduğu açıktır. Fakat bir Kannan dönüşümü sürekli olmayabilir.

3.2.4. Örnek. $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$, $T: \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ dönüşüm olmak üzere

$$Tx = \begin{cases} 0, & \mathfrak{x} \in (-\infty, 0) \\ -\frac{1}{2}, & \mathfrak{x} \in (2, \infty) \end{cases}$$

dönüşümü sürekli değildir. Bundan dolayı Banach büzülme eşitsizliği sağlanmaz. Fakat

$\alpha = \frac{1}{5}$ için Kannan şartı sağlanır. Bunu gösterelim:

$x, y \in (-\infty, 2]$ olsun.

$$d(Tx, Ty) = 0 \leq \frac{1}{5}\{d(x, Tx) + d(y, Ty)\}$$

$$= \frac{1}{5}(|x| + |y|)$$

$x, y \in (2, \infty)$ olsun.

$$d(Tx, Ty) = d\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 0 \leq \frac{1}{5}\{d(x, Tx) + d(y, Ty)\}$$

$$= \frac{1}{5}\left\{\left|x + \frac{1}{2}\right| + \left|y + \frac{1}{2}\right|\right\}$$

$x \in (-\infty, 2]$ ve $y \in (2, \infty)$ olsun.

$$d(Tx, Ty) = d\left(0, -\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{5}\{d(x, Tx) + d(y, Ty)\}$$

$$= \frac{1}{5}\left\{d(x, 0) + d\left(y, -\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$d(Tx, Ty) = \frac{1}{5}\left\{|x| + \left|y + \frac{1}{2}\right|\right\}$$

Büzülme dönüşümü ile Kannan dönüşümü birbirinden bağımsızdır.

3.2.5. Örnek. $X = [0,1]$ ve alışılmış metrik ile tanımlı $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun.

$$Tx = \begin{cases} \frac{x}{4}, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ \frac{x}{5}, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}$$

olup T dönüşümü sürekli değildir. Fakat Kannan dönüşümüdür.

3.2.6. Örnek. $X = [0,1]$ olmak üzere $d(x, y) = |x - y|$ olsun. $T: X \to X$ dönüşümü $Tx = \frac{x}{3}$ olarak tanımlansın. $\alpha = \frac{1}{3}$ için T bir büzülme dönüşümüdür. Fakat bir Kannan dönüşümü değildir.

Tam metrik uzaylarda verilmiş olan bu sabit nokta teoremlerinin daha birçok genelleştirmesi birçok yazar tarafından ifade ve ispat edilmiştir. Kannan'ın dönüşümünü kullanarak Subrahmanyam, tam metrik uzayların aşağıdaki karakterizasyonunu ispatlamıştır.

3.2.7. Teorem. (X, d) metrik uzayı tamdır gerek ve yeter şart $T: X \to X$ Kannan dönüşümünün bir sabit noktası vardır.

3.2.8. Örnek. $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesini alışılmış metrik ile verelim ve $T: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ dönüşümünü aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$x < \sqrt{2} \text{ ise } Tx \in \left\{ y \in \mathbb{Q}: y < \sqrt{2} \; ve \; \sqrt{2} - y < \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{2} - x\right) \right\}$$

$$x > \sqrt{2} \text{ ise } Tx \in \left\{ y \in \mathbb{Q}: y > \sqrt{2} \; ve \; y - \sqrt{2} < \tfrac{1}{4}\left(x - \sqrt{2}\right) \right\}.$$

Bu durumda her $x \in \mathbb{Q}$ için T nin sabit noktası yoktur. Ayrıca $T: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ bir Kannan dönüşümüdür fakat sabit noktası yoktur. Bundan dolayı Teorem 3.2.7. göz önünde bulundurulduğu zaman $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ tam metrik uzay olamaz.

3.2.9. Örnek. $X = \mathbb{R}$ ayrık metrik ile verilsin. $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dönüşümü $Tx = x + 1$ olarak tanımlansın. O halde

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{1}{2}\{d(x, Tx) + d(y, Ty)\}$$

eşitsizliği sağlanır. Ama verilen dönüşümün sabit noktası yoktur.

Yukarıdaki örnekte olduğu gibi (X, d) kompakt olmayan bir tam metrik uzay olsun. $T: X \to X$ dönüşümü $x \neq y$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) < \frac{1}{2}\{d(x, Tx) + d(y, Ty)\}$$

eşitsizliğini sağlayan sürekli dönüşüm olsa dahi sabit noktası olmayabilir. Bunu aşağıdaki gibi örneklendirebiliriz.

3.2.10. Örnek. $X = \left\{1 + \frac{1}{n} : n = 1,2, \cdots\right\}$ ve $d(x, y) = \begin{cases} 0 & , \quad x = y \\ x + y & , \quad x \neq y \end{cases}$ olsun. O halde (X, d) kompakt olmayan bir tam metrik uzaydır. $T: X \to X$ dönüşümü $T\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n+1}$ şeklinde tanımlansın. O zaman T süreklidir ve sabit noktası yoktur.

3.3 Kompakt Uzaylar

3.3.1. Tanım. $K \subset \mathcal{X}$ ve $(\mathcal{X}, \mathrm{d})$ bir metrik uzay olsun. Eğer K kümesinin her bir açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa K kümesine **kompakt küme** denir. Eğer $\mathcal{X}$ uzayı kompakt ise $(\mathcal{X}, \mathrm{d})$ ikilisine **kompakt metrik uzay** denir.

3.3.2. Teorem. Herhangi bir $(\mathcal{X}, \mathrm{d})$ metrik uzayının kompakt her A alt kümesi kapalı ve sınırlıdır.

İspat: A kümesi $(\mathcal{X}, \mathrm{d})$ metrik uzayının kompakt bir alt kümesi olsun. $(\mathcal{X}, \mathrm{d})$ bir T_2(Hausdorff) uzayı olduğundan ilgili teorem gereğince A kümesi kapalıdır (Herhangi bir Hausdorff uzayının kompakt her alt kümesi kapalıdır).

Şimdi A kümesinin sınırlı olduğunu gösterelim. Sabit bir $\mathrm{x}_0 \in \mathcal{X}$ noktası seçelim. $\mathrm{x} \in A$ için $\mathrm{d}(\mathrm{x}, \mathrm{x}_0) = r_{\mathrm{x}}$ olsun. Böylece $n \in \mathbb{N}$ ve $n > r_{\mathrm{x}}$ ise $\mathrm{x} \in B(\mathrm{x}_0, n)$ olur. O halde her $\mathrm{x} \in A$ için $\mathrm{x} \in B(\mathrm{x}_0, n)$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece

$$\{B(\mathrm{x}_0, n) | n \in \mathbb{N}\}$$

koleksiyonu A kümesinin açık bir örtüsüdür. A kompakt olduğundan bu örtünün

$$\{B(\mathrm{x}_0, n_i) | i = 1,2, \cdots, m\}$$

gibi sonlu bir alt örtüsü vardır. $n_0 = max\{n_i | i = 1,2, \cdots, m\}$ olsun. Bu durumda

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(\mathrm{x}_0, n_i) = B(\mathrm{x}_0, n_0) \qquad (3.3.1.)$$

olur. Bu durumda her $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in A$ için $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in B(\mathrm{x}_0, n_0)$ olacağından

$$\mathrm{d}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \leq \mathrm{d}(\mathrm{x}, \mathrm{x}_0) + \mathrm{d}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}) < n_0 + n_0 = 2n_0$$

olur. Bu ise A kümesinin sınırlı olduğu anlamına gelir.

3.3.3. Teorem. A, $\mathbb{R}^n$ standart uzayının bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

i. A kümesi kompakttır.
ii. A kümesi kapalı ve sınırlıdır.

İspat:

i ⇒ ii: $\mathbb{R}^n$ standart uzayı bir metrik uzay olduğundan ve metrik uzayların kompakt her alt kümesi kapalı ve sınırlı olduğundan A kümesi kapalı ve sınırlıdır.

ii ⇒ i: A kümesi sınırlı olduğundan

$$A \subseteq [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \qquad (3.3.2.)$$

olacak şekilde $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ ve $b_1, b_2, \cdots, b_n \in \mathbb{R}$ sayıları vardır. Diğer yandan Heine-Borel teoremi gereğince $\mathbb{R}$ standart uzayının kapalı ve sınırlı herhangi bir $[a, b]$ aralığı kompakt olduğundan

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

kümesi kompakttır. Böylece A kümesi kapalı olduğundan ve kompakt her uzayın kapalı her alt kümesi de kompakt olacağından A kümesi kompakttır.

3.3.4. Örnek. A, X in sonsuz elemanlı bir alt kümesi ve (X, d) sonsuz elemanlı ayrık bir metrik uzay olsun. A kümesi kapalı ve sınırlı olmasına rağmen kompakt değildir.

Gerçekten; ayrık uzayın bütün alt kümeleri de ayrık uzayda kapalı olduğundan A kümesi (X, d) de kapalıdır. Ayrıca $\mathrm{x}_0 \in \mathrm{X}$ ise $A \subseteq B(\mathrm{x}_0, 2)$ olduğundan A sınırlıdır. Fakat, A kompakt değildir.

3.3.5. Örnek. $(0,2)$ aralığı $(0,2)$ standart uzayında kapalı ve sınırlı olmasına rağmen kompakt değildir.

3.3.6. Teorem. (X, d) bir metrik uzay $A \subseteq \mathrm{X}$ olsun. Bu durumda A tam ise A kümesi kapalıdır.

İspat: $\{\mathrm{x}_n\}$ terimleri A nın elemanlarından oluşan ve (X, d) metrik uzayının bir x noktasına yakınsayan bir dizisi olsun. Bu durumda $\{\mathrm{x}_n\}$ dizisi (X, d) uzayında yakınsak bir dizi olur. Dolayısıyla $\{\mathrm{x}_n\}$ dizisi (X, d) uzayında bir Cauchy dizisi olur. Böylece $\{\mathrm{x}_n\}$ dizisi (A, d_A) uzayında bir Cauchy dizisidir. A kümesi tam olduğundan $\{\mathrm{x}_n\}$ dizisi (A, d_A) uzayının bir $a \in A$ noktasına yakınsar. Metrik uzayda yakınsak her dizinin limiti tek olduğundan $a = \mathrm{x}$ olur. Böylece $\mathrm{x} \in A$ dır. Dolayısıyla A kümesi kapalıdır.

3.3.7. Teorem. $A \subseteq \mathrm{X}$ ve (X, d) tam metrik uzay olsun. Bu durumda A kümesi kapalıysa A tamdır.

3.3.8. Sonuç. $A \subseteq \mathrm{X}$ ve (X, d) tam metrik uzay olsun. Bu durumda A kümesinin kapalı olması için gerek yeter şart A nın tam olmasıdır.

3.3.9. Tanım. (X, d) bir metrik uzay, $A \subseteq \mathrm{X}$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Her $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$ için $\mathrm{d}(\mathrm{x}, A) < \varepsilon$ oluyorsa A ya bir ε - ağı denir. A bir ε - ağı ve A sonlu ise A ya sonlu ε - ağı denir. Her $\varepsilon > 0$ için sonlu bir ε - ağı varsa (X, d) uzayına tamamen sınırlı metrik uzay denir.

3.3.10. Teorem. Tamamen sınırlı her (X, d) metrik uzayı sınırlıdır.

İspat: (X, d) tamamen sınırlı olduğundan $\varepsilon = 1$ için $A = \{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \cdots, \mathrm{x}_n\}$ gibi sonlu bir 1-ağı vardır. $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$ ise

$$\mathrm{d}(\mathrm{x}, A) = inf\{\mathrm{d}(\mathrm{x}, \mathrm{x}_i) | \mathrm{x}_i \in A\} < 1 \qquad (3.3.3.)$$

ve A sonlu olduğundan $\mathrm{d}(\mathrm{x}, \mathrm{x}_i) < 1$ olacak şekilde bir $\mathrm{x}_i \in A$ vardır. O halde $\mathrm{x} \in B(\mathrm{x}_i, 1)$ olur. Böylece

$$\mathrm{X} = \bigcup_{i=1}^{n} B(\mathrm{x}_i, 1) \qquad (3.3.4.)$$

olur. $i = 1, 2, \cdots, n$ için $B(\mathrm{x}_i, 1)$ kümeleri sınırlı ve sonlu sayıdaki sınırlı kümelerin birleşimi de sınırlı olduğundan (X, d) uzayı sınırlıdır.

3.3.11. Teorem. Kompakt her (X, d) metrik uzayı tamamen sınırlı ve tamdır.

3.3.12. Teorem. Tamamen sınırlı ve tam her (X, d) metrik uzayı kompakttır.

3.3.13. Teorem. Dizisel kompakt her (X, d) metrik uzayı tamamen sınırlıdır.

İspat: Aksini kabul edelim. Yani (X, d) uzayı tamamen sınırlı olmasın. Bu durumda bir $\varepsilon_0 > 0$ için X in sonlu bir $\{B(\mathrm{x}_i, \varepsilon_0) | i = 1,2, \cdots, n\}$ açık örtüsü yoktur. $\mathrm{x}_1 \in \mathrm{X}$ herhangi noktasını alalım. $B(\mathrm{x}_1, \varepsilon_0)$ açık yuvarı X uzayını örtemeyeceğinden dolayı $\mathrm{x}_2 \notin B(\mathrm{x}_1, \varepsilon_0)$ olacak şekilde bir $\mathrm{x}_2 \in \mathrm{X}$ vardır. Benzer şekilde $\{B(\mathrm{x}_1, \varepsilon_0), B(\mathrm{x}_2, \varepsilon_0)\}$ koleksiyonu X kümesini örtemeyeceğinden dolayı $\mathrm{x}_3 \notin B(\mathrm{x}_1, \varepsilon_0) \cup B(\mathrm{x}_2, \varepsilon_0)$ olacak şekilde bir $\mathrm{x}_3 \in \mathrm{X}$ vardır. Aynı nedenle her $n \geq 3$ için

$$\mathrm{x}_{n+1} \notin B(\mathrm{x}_1, \varepsilon_0) \cup B(\mathrm{x}_2, \varepsilon_0) \cup \cdots \cup B(\mathrm{x}_{n-1}, \varepsilon_0) \cup B(\mathrm{x}_n, \varepsilon_0) \qquad (3.3.5.)$$

olacak şekilde bir $\mathrm{x}_{n+1} \in \mathrm{X}$ vardır. Bu şekilde devam ederek bir $\{\mathrm{x}_n\}$ dizisi oluşturabiliriz. $n \neq m$ ve $n > m$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\mathrm{x}_n \notin B(\mathrm{x}_1, \varepsilon_0) \cup B(\mathrm{x}_2, \varepsilon_0) \cup \cdots \cup B(\mathrm{x}_m, \varepsilon_0) \cup \cdots \cup B(\mathrm{x}_{n-1}, \varepsilon_0) \qquad (3.3.6.)$$

olduğundan $\mathfrak{x}_n \notin B(\mathfrak{x}_m, \varepsilon_0)$ dır. Dolayısıyla $\mathfrak{d}(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_m) \geq \varepsilon_0$ dır.

$\{\mathfrak{x}_n\}$ dizisinin hiçbir yakınsak alt dizisinin olmadığını gösterelim. $\{\mathfrak{x}_n\}$ nin $\mathfrak{x} \in \mathfrak{X}$ gibi bir noktaya yakınsayan bir $\{\mathfrak{x}_{n_k}\}$ alt dizisi olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\frac{\varepsilon_0}{2}$ için $n_k > N$ ve $m_k > N$ olduğunda

$$\mathfrak{d}(\mathfrak{x}_{n_k}, \mathfrak{x}) < \frac{\varepsilon_0}{2} \text{ ve } \quad \mathfrak{d}(\mathfrak{x}_{m_k}, \mathfrak{x}) < \frac{\varepsilon_0}{2}$$

olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. $n_k, m_k > N$ için

$$\mathfrak{d}(\mathfrak{x}_{n_k}, \mathfrak{x}_{m_k}) < \mathfrak{d}(\mathfrak{x}_{n_k}, \mathfrak{x}) + \mathfrak{d}(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_{m_k}) < \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0$$

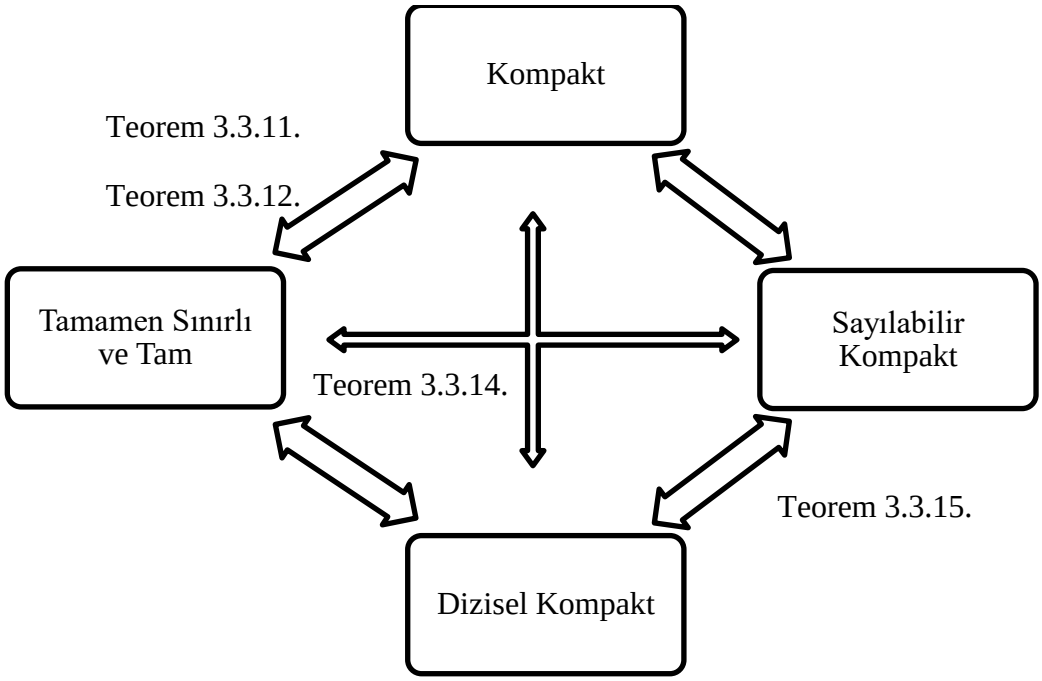
olur. Bu ise $n \neq m$ için $\mathfrak{d}(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_m) \geq \varepsilon_0$ olması ile çelişir. O halde $\{\mathfrak{x}_n\}$ dizisinin hiçbir yakınsak alt dizisi yoktur. Böylece $(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$ uzayı dizisel kompakt olamaz. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla her $\varepsilon > 0$ için $\mathfrak{X}$ in $\{B(\mathfrak{x}_i, \varepsilon) | i = 1,2, \cdots, n\}$ gibi sonlu bir örtüsü vardır. Yani $(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$ metrik uzayı tamamen sınırlıdır.

3.3.14. Teorem. $(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$ metrik uzayı kompakttır ancak ve ancak $(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$ metrik uzayı dizisel kompakttır (Şekil 3.1).

3.3.15 Teorem. Her $(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$ metrik uzayı birinci sayılabilirdir. Dolayısıyla $(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$ uzayı sayılabilir kompakttır gerek ve yeter şart $(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$ uzayı dizisel kompakttır (Şekil 3.1).

3.3.16. Sonuç. Herhangi bir $(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$ metrik uzayı için aşağıdaki önermeler denktir (Şekil 3.1).

i. $(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$ uzayı kompakttır.
ii. $(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$ uzayı sayılabilir kompakttır.
iii. $(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$ uzayı dizisel kompakttır.
iv. $(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$ uzayı tam ve tamamen sınırlıdır.



Şekil 3.1 Metrik uzaylarda kompaktlık

Tam metrik uzaylarda sabit nokta teori çalışmaları birçok yazar tarafından verilmiş olmasına rağmen kompakt metrik uzaylarda pek fazla çalışma yapılmamıştır. Edelstein 1962 yılında Banach sabit nokta teoremini kompakt metrik uzaylarda aşağıdaki gibi ifade ve ispat etmiştir.

3.4 Kompakt Uzaylarda Bazı Sabit Nokta Teoremleri

3.4.1. Teorem. T: $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ bir dönüşüm ve $(\mathcal{X}, \mathrm{d})$ bir kompakt metrik uzay olsun.

$\mathrm{x} \neq \mathrm{y}$ olmak üzere her $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathcal{X}$ için

$$\mathrm{d}(T\mathrm{x}, T\mathrm{y}) < \mathrm{d}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$$

ise T dönüşümünün $\mathcal{X}$ de tek bir sabit noktası vardır.

İspat: $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\mathrm{x}) = \mathrm{d}(\mathrm{x}, T\mathrm{x})$ şeklinde tanımlı fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda f Lipschitz dönüşümü olup T sürekli olduğundan f fonksiyonu da sürekli olur. Ayrıca $\mathcal{X}$ kompakt olduğundan $f(\mathcal{X})$ de $\mathbb{R}$ de kompakttır. Dolayısıyla $f(\mathcal{X})$ kapalı ve sınırlıdır. Bu durumda bir maximum ve minimum noktası vardır.

Kabul edelim ki $z \in \mathcal{X}$ noktası için $f(z)$ minimum nokta olsun. Bu durumda eğer $z \neq Tz$ ise

$$f(Tz) = \mathrm{d}(Tz, TTz) < \mathrm{d}(z, Tz) = f(z)$$

elde edilir ki bu $f(z)$ nin minimum nokta olması ile çelişir. Yani kabulümüz yanlıştır. Dolayısıyla $Tz = z$ dir.

Diğer taraftan J.Gornicki 2017 yılında Kannan sabit nokta teoremini kompakt metrik uzaylarda aşağıdaki gibi ifade ve ispat etmiştir.

3.4.2. Teorem. $T: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ sürekli bir dönüşüm ve $(\mathcal{X}, \mathrm{d})$ bir kompakt metrik uzay olsun. Her $\mathrm{x}, y \in \mathcal{X}$ için

$$\mathrm{d}(T\mathrm{x}, T\mathrm{y}) < \frac{1}{2}\{\mathrm{d}(\mathrm{x}, T\mathrm{x}) + \mathrm{d}(\mathrm{y}, T\mathrm{y})\}$$

ise T dönüşümünün X de bir tek sabit noktası vardır. Ayrıca her $\mathrm{x}_0 \in \mathrm{X}$ için $\{T^n\mathrm{x}_0\}$ dizisi T nin bu sabit noktasına yakınsaktır.

İspat: $[0,1]$ kümesi alışılmış metrik ile bir kompakt metrik uzay olup $T\colon [0,1] \to [0,1]$ dönüşümü $c \in [0,1]$ için $T\mathrm{x} = c$ şeklinde tanımlansın.

$f(\mathrm{x}) = \mathrm{d}(\mathrm{x}, T\mathrm{x})$ ile tanımlı $f\colon \mathrm{X} \to [0, +\infty)$ fonksiyonu süreklidir. (X, d) bir kompakt metrik uzay olduğundan

$$f(v) = inf\{f(\mathrm{x})\colon \mathrm{x} \in \mathrm{X}\}$$

olacak şekilde bir $v \in \mathrm{X}$ noktası vardır. Kabul edelim ki $v \neq Tv$ olsun. O halde

$$\mathrm{d}(Tv, T^2v) < \frac{1}{2}\{\mathrm{d}(v, Tv) + \mathrm{d}(Tv, T^2v)\} \qquad (3.4.1.)$$

$$\mathrm{d}(Tv, T^2v) < \mathrm{d}(v, Tv)$$

olur. Buradan

$$f(Tv) = \mathrm{d}(Tv, T^2v) < \mathrm{d}(v, Tv) = f(v)$$

olup bu bir çelişkidir. Dolayısıyla kabulümüz yanlıştır. Yani $v = Tv$ olmalıdır. Ayrıca v noktası tektir.

Şimdi $\{\mathrm{x}_n = T^n\mathrm{x}\}$ olacak şekilde bir $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$ noktasını alalım. Eğer $\mathrm{x} = v$ ise her $n = 1,2, \ldots$ için $\mathrm{x}_n = v$ olur. Bu durumda $\mathrm{x} \neq v$ olsun. Bu durumda

$$\mathrm{d}(T^{n+1}\mathrm{x}, T^n\mathrm{x}) < \frac{1}{2}[\mathrm{d}(T^n\mathrm{x}, T^{n+1}\mathrm{x}) + \mathrm{d}(T^{n-1}\mathrm{x}, T^n\mathrm{x})]$$

$$\mathrm{d}(T^{n+1}\mathrm{x}, T^{n}\mathrm{x}) < \mathrm{d}(T^{n}\mathrm{x}, T^{n-1}\mathrm{x}) < \cdots < \mathrm{d}(T\mathrm{x}, \mathrm{x})$$

Olur. Ayrıca $b_n = \mathrm{d}(T^{n+1}\mathrm{x}, T^{n}\mathrm{x})$ negatif olmayan sayıların dizisi azalmayan olduğundan yakınsaktır. Kabul edelim ki $0 \leq b = \lim_{n\to\infty} b_n$ olsun. $b > 0$ için kabulümüz çelişkidir. Yine X in kompaktlığından $\{T^{n}\mathrm{x}\}$ dizisi $i \to \infty$ için $T^{n_i}\mathrm{x} \to z \in \mathrm{X}$ olacak şekilde bir $\{T^{n_i}\mathrm{x}\}$ yakınsak alt dizisi içerir. T sürekli olduğundan

$$0 < b = \lim_{i\to\infty} \mathrm{d}(T^{n+1}\mathrm{x}, T^{n}\mathrm{x}) = \mathrm{d}(Tz, z)$$

bulunur. Buradan $z \neq v$ olur. Hatta 3.4.1. eşitsizliğinden

$$0 < b = \lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(T^{n_i+2}\mathrm{x}, T^{n_i+1}\mathrm{x}) = \mathrm{d}(T^{2}z, Tz) < \mathrm{d}(Tz, z) = b$$

bulunur ki bu bir çelişkidir. Böylece $b = 0$ dır. O halde $n \to \infty$ için aşağıdaki eşitsizlikte limit alınırsa

$$\mathrm{d}(T^{n+1}\mathrm{x}, v) = \mathrm{d}(T^{n+1}\mathrm{x}, Tv) < \frac{1}{2}[\mathrm{d}(T^{n}\mathrm{x}, T^{n+1}\mathrm{x}) + \mathrm{d}(v, Tv)]$$

$$= \tfrac{1}{2}\mathrm{d}(T^{n+1}\mathrm{x}, T^{n}\mathrm{x}).$$

$b = 0$ bulunur. Bu durumda ise $\lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(T^{n+1}\mathrm{x}, v) = 0$ elde edilir.

Ayrıca J.Gornicki, yukarıdaki teoremin bir genelleştirmesini de aşağıdaki şekilde ifade ve ispat etmiştir.

3.4.3. Teorem. $T: \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ sürekli bir dönüşüm ve (X, d) bir kompakt metrik uzay olsun. Her $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{X}$ için için $A + B + C = 1$ olacak sekildeki $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathbb{R}^{+}$ için

$$\mathrm{d}(Tx, Ty) < A\mathrm{d}(x, Tx) + B\mathrm{d}(y, Ty) + C\mathrm{d}(x, y)$$

sağlansın. Bu durumda T dönüşümünün X de bir tek sabit noktası vardır. Ayrıca her $x_0 \in X$ için $\{T^n x_0\}$ dizisi T nin bu sabit noktasına yakınsar.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Tezin özgün kısmını oluşturan çalışmalara bu bölümde yer vereceğiz. İlk olarak C-Chatterjea ve kuvvetli Chatterjea dönüşümü tanımı yapılıp bu dönüşüm örneklerle desteklenecektir. Daha sonrasında ise bu dönüşümle ilgili bazı sabit nokta teoremleri ifade ve ispat edilecektir. Burada verilecek genelleştirmelerin en önemli özelliği ise bazı ek koşulları göz önünde bulundurarak büzülme sabitinin 1'e kadar genişletilmesidir.

4.1. Tanım. $T: \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ bir dönüşüm ve $(\mathcal{X}, \mathrm{d})$ bir metrik uzay olsun. Her $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathcal{X}$ için

$$\mathrm{d}(T\mathrm{x}, T\mathrm{y}) \leq C\{\mathrm{d}(\mathrm{x}, T\mathrm{y}) + \mathrm{d}(\mathrm{y}, T\mathrm{x})\}$$

olacak şekilde bir $C \geq 0$ varsa T ye bir **C-Chatterjea** dönüşümü ve $\mathrm{x} \neq \mathrm{y}$ olacak şekildeki her $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathcal{X}$ için

$$\mathrm{d}(T\mathrm{x}, T\mathrm{y}) < \frac{1}{2}\{\mathrm{d}(\mathrm{x}, T\mathrm{y}) + \mathrm{d}(\mathrm{y}, T\mathrm{x})\}$$

sağlanırsa T ye bir **kuvvetli Chatterjea dönüşümü** denir.

1972'de Chatterjea tam metrik uzaylarda aşağıdaki teoremi ifade edip ispatlamıştır.

4.2. Teorem. $T: \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $C < \frac{1}{2}$ olacak şekilde bir C-Chatterjea dönüşümü ve $(\mathcal{X}, \mathrm{d})$ tam metrik uzay olsun. Bu durumda T dönüşümünün $\mathcal{X}$ de bir tek sabit noktası vardır. Ayrıca her Picard dizisi bu sabit noktaya yakınsaktır.

Chattarjea dönüşümleri sürekli olmayabilir.

Aşağıdaki örnek $C \geq \frac{1}{2}$ için Chatterjea dönüşümünün tam metrik uzayda sabit bir noktaya sahip olamayabileceğini göstermektedir.

4.3. Örnek. $(\mathbb{R}, d)$ alışılmış metrik uzay ve $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Tx = x - 1$ şeklinde bir dönüşüm olsun.

$x > y$ genellemesini kaybetmeden kabul edelim. O halde

i. $x - y = 1$ için

$$d(Tx - Ty) = |x - y| = 1 \leq \frac{1}{2}|x - y + 1| = \frac{1}{2}\{d(x, Ty) + d(y, Tx)\}$$

bulunur.

ii. $x - y < 1$ için

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &= |x - y| \\ &= x - y \\ &< 1 \\ &= \tfrac{1}{2}\{(x - y) + 1 + 1 - (x - y)\} \\ &= \tfrac{1}{2}\{|x - y + 1| + |1 - (x - y)|\} \\ &= \tfrac{1}{2}\{d(x, Ty) + d(y, Tx)\} \end{aligned}$$

bulunur.

iii. $\mathrm{x} - \mathrm{y} > 1$ için

$$\mathrm{d}(T\mathrm{x}, T\mathrm{y}) = |\mathrm{x} - \mathrm{y}|$$

$$= \mathrm{x} - \mathrm{y}$$

$$= \frac{1}{2}\{2(\mathrm{x} - \mathrm{y})\}$$

$$= \frac{1}{2}\{\mathrm{x} - \mathrm{y} + 1 + \mathrm{x} - \mathrm{y} - 1\}$$

$$= \frac{1}{2}\{|\mathrm{x} - \mathrm{y} + 1| + |\mathrm{x} - \mathrm{y} - 1|\}$$

$$= \frac{1}{2}\{\mathrm{d}(\mathrm{x}, T\mathrm{y}) + \mathrm{d}(\mathrm{y}, T\mathrm{x})\}$$

bulunur. Bu durumda $C = \frac{1}{2}$ için T bir C-Chatterjea dönüşümüdür ancak hiçbir sabit noktası yoktur.

4.4. Teorem. M, (X, d) tam metrik uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve $T: M \to M$, $C < 1$ olacak şekilde bir C-Chatterjea dönüşümü olsun. $0 \leq a < 1$ ve $b > 0$ olacak şekilde a, b iki reel sabit olsun.

$\mathrm{d}(u, Tu) \leq a\mathrm{d}(\mathrm{x}, T\mathrm{x})$ ve $\mathrm{d}(u, \mathrm{x}) \leq b\mathrm{d}(\mathrm{x}, T\mathrm{x})$

eşitsizliklerini sağlayan $u \in C$ varsa o halde T en az bir sabit noktaya sahiptir.

İspat: $\mathrm{x}_0 \in C$ keyfi bir nokta olsun. $n = 0,1,2,\ldots$ için

$$\mathrm{d}(T\mathrm{x}_{n+1}, \mathrm{x}_{n+1}) \leq a\mathrm{d}(T\mathrm{x}_n, \mathrm{x}_n) \tag{4.1.}$$

$$\mathrm{d}(\mathrm{x}_{n+1}, \mathrm{x}_n) \leq b\mathrm{d}(T\mathrm{x}_n, \mathrm{x}_n) \tag{4.2.}$$

şartlarını sağlayacak bir $\{\mathrm{x}_n\} \subset M$ dizisini göz önüne alalım. Dolayısıyla

$$\mathrm{d}(\mathrm{x}_{n+1}, \mathrm{x}_n) \leq b\mathrm{d}(T\mathrm{x}_n, \mathrm{x}_n) \leq a^n b\mathrm{d}(T\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_0)$$

olduğundan $\{\mathrm{x}_n\}$ dizisi M de bir Cauchy dizisidir. Çünkü, M tam ve $\lim_{n\to\infty} \mathrm{x}_n = z$ olacak şekilde bir $z \in M$ vardır. Öte yandan

$$\mathrm{d}(Tz, z) \leq \mathrm{d}(Tz, T\mathrm{x}_n) + \mathrm{d}(T\mathrm{x}_n, \mathrm{x}_n) + \mathrm{d}(\mathrm{x}_n, z)$$

$$\leq C\{\mathrm{d}(z, T\mathrm{x}_n) + \mathrm{d}(\mathrm{x}_n, Tz)\} + \mathrm{d}(T\mathrm{x}_n, \mathrm{x}) + \mathrm{d}(x_n, z)$$

$$\leq C\{\mathrm{d}(z, \mathrm{x}_n) + \mathrm{d}(\mathrm{x}_n, T\mathrm{x}_n) + \mathrm{d}(\mathrm{x}_n, z) + \mathrm{d}(z, Tz)\}$$

$$+\mathrm{d}(T\mathrm{x}_n, x_n) \ + \mathrm{d}(\mathrm{x}_n, z)$$

olur. Böylece $n \to \infty$ için her iki taraftan limit alınırsa

$$\mathrm{d}(Tz, z) \leq \frac{2C+1}{1-C}\mathrm{d}(\mathrm{x}_n, z) + \frac{C+1}{1-C}\mathrm{d}(\mathrm{x}_n, T\mathrm{x})$$

$$\leq \tfrac{2C+1}{1-C}\mathrm{d}(\mathrm{x}_n, z) + \tfrac{C+1}{1-C}a^n\mathrm{d}(\mathrm{x}_0, T\mathrm{x}_0)$$

olup $Tz = z$ elde edilir.

4.5. Uyarı. Teorem 4.4 aracılığıyla Chatterjea nın sonucunu ispatlayabiliriz.

Gerçekten; $u = T\mathfrak{x}$ olacak şekildeki her $\mathfrak{x} \in \mathfrak{X}$ için

$$\mathfrak{d}(u, Tu) = \mathfrak{d}(T\mathfrak{x}, Tu)$$

$$\leq C\{\mathfrak{d}(\mathfrak{x}, Tu) + \mathfrak{d}(u, T\mathfrak{x})\}$$

$$\leq C\{\mathfrak{d}(\mathfrak{x}, u) + \mathfrak{d}(u, Tu)\}$$

olur. Böylece Chatterjea kabulüyle

$$\mathfrak{d}(u, Tu) \leq \frac{C}{1-C}\mathfrak{d}(\mathfrak{x}, T\mathfrak{x})$$

den dolayı $\frac{C}{1-C} = a < 1$ ve $\mathfrak{d}(u, \mathfrak{x}) = \mathfrak{d}(T\mathfrak{x}, \mathfrak{x})$ elde edilir. Dolayısıyla 4.4. Teoremden T nin bir sabit noktası vardır. Bu dönüşümün sabit noktasının tekliği de kolayca görülebilir.

z, T dönüşümünün bir tek sabit noktası ve $\mathfrak{x}$ başlangıç noktasıyla $\{\mathfrak{x}_{n+1} = T\mathfrak{x}_n\}$ dizisi bir Picard dizisi olsun. O halde

$$\mathfrak{d}(\mathfrak{x}_{n+1}, z) = \mathfrak{d}(T\mathfrak{x}_n, Tz)$$

$$\leq C\{\mathfrak{d}(\mathfrak{x}_n, Tz) + \mathfrak{d}(z, T\mathfrak{x}_n)\}$$

$$\leq C\{\mathfrak{d}(\mathfrak{x}_n, z) + \mathfrak{d}(z, \mathfrak{x}_{n+1})\}$$

olup

$$\mathrm{d}(\mathrm{x}_{n+1}, z) \leq \frac{C}{1-C}\mathrm{d}(\mathrm{x}_n, z)$$

bulunur. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\mathrm{d}(\mathrm{x}_{n+1}, z) \leq \left(\frac{C}{1-C}\right)^n \mathrm{d}(\mathrm{x}_0, z)$$

olup Picard dizisi bu sabit noktaya olur.

Şimdi kompakt metrik uzayda sürekli her kuvvetli Chatterjea dönüşümünün bir tek sabit noktasının var olduğunu gösterelim. Ayrıca, tam fakat kompakt olmayan metrik uzayda sürekli kuvvetli Chatterjea dönüşümlerinin sabit noktasının var olup olmadığı açık bir problemdir.

4.6. Teorem. $T: \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ sürekli kuvvetli Chatterjea dönüşümü ve (X, d) kompakt bir metrik uzay olsun. Bu durumda T bir tek sabit noktaya sahiptir. Ayrıca her Picard dizisi bu sabit noktaya yakınsaktır.

İspat: T sürekli olduğundan $f(\mathrm{x}) = \mathrm{d}(\mathrm{x}, T\mathrm{x})$ ile tanımlı $f: \mathrm{X} \to [0, +\infty)$ fonksiyonu süreklidir. X kompakt metrik uzay olduğundan

$$f(z) = inf\{f(\mathrm{x}): \mathrm{x} \in \mathrm{X}\}$$

olacak şekilde $z \in \mathrm{X}$ noktası vardır. Eğer $z \neq Tz$ ise

$$\mathrm{d}(Tz, T^2z) < \frac{1}{2}\{\mathrm{d}(z, T^2z) + \mathrm{d}(Tz, Tz)\}$$

$$\leq \frac{1}{2}\{\mathrm{d}(z, Tz) + \mathrm{d}(Tz, T^2z)\} \qquad (4.3.)$$

olur ve

$$f(Tz) < f(z)$$

ile bir çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $z = Tz$ olup z tektir.

Şimdi herhangi bir $x \in \mathrm{X}$ ve $\{T^n x\}$ Picard dizisini göz önüne alalım. $T^{n_0}x = z$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa her $n \geq n_0$ için $T^n\mathrm{x} = z$ olur. Dolayısıyla $\{T^n\mathrm{x}\}$ dizisi z ye yakınsar. Her $n \in \mathbb{N}$ için $T^n\mathrm{x} \neq z$ olsun. O halde

$$\mathrm{d}(T^{n+1}\mathrm{x}, T^n\mathrm{x}) < \frac{1}{2}\{\mathrm{d}(T^n\mathrm{x}, T^n\mathrm{x}) + \mathrm{d}(T^{n-1}\mathrm{x}, T^{n+1}\mathrm{x})\}$$

$$\leq \frac{1}{2}\{\mathrm{d}(T^{n-1}\mathrm{x}, T^n\mathrm{x}) + \mathrm{d}(T^n\mathrm{x}, T^{n+1}\mathrm{x})\}$$

olur ve buradan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\mathrm{d}(T^{n+1}\mathrm{x}, T^n\mathrm{x}) < \mathrm{d}(T^n\mathrm{x}, T^{n-1}\mathrm{x}) < \cdots < \mathrm{d}(T\mathrm{x}, \mathrm{x}) \qquad (4.4.)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik negatif olmayan sayılar dizisi olan $\{\mathrm{d}(T^{n+1}\mathrm{x}, T^n\mathrm{x})\}$ in azalan ve dolayısıyla bazı $\gamma \geq 0$ için yakınsadığını gösterir. Şimdi kabul edelim ki $\gamma = 0$ olsun. Aksini kabul edelim. Yani $\gamma \neq 0$ olsun. X kompakt olduğundan $\{T^n\mathrm{x}\}$ dizisinin $i \to \infty$ için $\{T^{n_i}\mathrm{x}\} \to \mathrm{w}$, $w \in \mathrm{X}$ olacak şekilde yakınsak bir $\{T^{n_i}\mathrm{x}\}$ alt dizisi vardır. T sürekli olduğundan

$$0 < \gamma = \lim_{i\to\infty} \mathrm{d}(T^{n_i+1}\mathrm{x}, T^{n_i}\mathrm{x}) = \mathrm{d}(Tw, w)$$

olur. Dolayısıyla $w \neq z$ dir. Ayrıca

$$0 < \gamma = \lim_{i\to\infty} \mathrm{d}(T^{n_i+2}\mathrm{x}, T^{n_i+1}\mathrm{x}) = \mathrm{d}(T^2w, Tw) < \mathrm{d}(Tw, w) = \gamma$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde kabulümüz yanlıştır. Yani $\gamma = 0$ dır. Dolayısıyla $\{T^{n_i}\mathfrak{x}\}$ dizisi z ye yakınsar.

$$\mathrm{d}(T^{n+1}\mathfrak{x}, z) = \mathrm{d}(T^{n+1}\mathfrak{x}, Tz)$$

$$< \tfrac{1}{2}\{\mathrm{d}(T^{n}\mathfrak{x}, Tz) + \mathrm{d}(z, T^{n+1}\mathfrak{x})\}$$

olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\mathrm{d}(T^{n+1}\mathfrak{x}, z) < \mathrm{d}(T^{n}\mathfrak{x}, Tz) = \mathrm{d}(T^{n}\mathfrak{x}, z)$$

elde edilir. Bu, $\{\mathrm{d}(T^{n}\mathfrak{x}, z)\}$ negatif olmayan sayılar dizisinin azalan ve dolayısıyla bazı $\mu \geq 0$ için yakınsaktır. Ayrıca bu nedenle $\{\mathrm{d}(T^{n}\mathfrak{x}, z)\}$ dizisinin bütün alt dizileri de bu μ ye yakınsaktır. O halde $\{\mathrm{d}(T^{n_i}\mathfrak{x}, z)\}$ alt dizisi 0 a yakınsak olup $\mu = 0$ dır.

4.7. Tanım. M, $(\mathfrak{X}, \mathrm{d})$ metrik uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve $T: M \to M$ bir dönüşüm olsun. O halde $n \to \infty$ için $\mathrm{d}(\mathfrak{x}_n, T\mathfrak{x}_n) \to 0$ ise $\{\mathfrak{x}_n\}$ dizisine T nin yaklaşık sabit noktalar dizisi denir.

4.8. Teorem. $(\mathfrak{X}, \mathrm{d})$ bir metrik uzay, $\mathfrak{X}$ in kapalı bir alt kümesi M ve kompakt bir alt kümesi de N olsun. $T: M \to N$ dönüşümü $C < 1$ için bir C-Chatterjea dönüşümü olsun. T nin bir yaklaşık sabit noktalar dizisi varsa T nin sabit noktası vardır.

İspat: $\{\mathfrak{x}_n\} \subset M$, T nin bir yaklaşık sabit noktalar dizisi olsun. N kompakt ve $T\mathfrak{x}_n \in N$ olduğundan genelliği bozmaksızın $n \to \infty$ için $T\mathfrak{x}_n \to z$, $z \in \mathbb{N}$ olduğu kabul edelim. Kabulümüzden dolayı $\mathfrak{x}_n \to z \in M$ elde edilir. Dolayısıyla

$$\mathrm{d}(Tz, z) \leq \mathrm{d}(Tz, T\mathfrak{x}_n) + \mathrm{d}(T\mathfrak{x}_n, z)$$

$$\leq C\{\mathrm{d}(z, T\mathfrak{x}_n) + \mathrm{d}(\mathfrak{x}_n, Tz)\} + \mathrm{d}(T\mathfrak{x}_n, z)$$

olup $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\mathrm{d}(Tz, z) \leq C\mathrm{d}(z, Tz)$$

elde edilir. Dolayısıyla $Tz = z$ dir.

4.9. Uyarı. 4.8. Teoremde bahsedilen sabit nokta tek olmayabilir. Örneğin $C < 1$ olacak şekildeki bir C-Chatterjea dönüşümüyle her özdeşlik dönüşümünün birden fazla sabit noktası vardır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Kannan ve Chatterjea büzülme dönüşümleri olarak değinilen sabit nokta teoremleri ayrıntılı bir şekilde bu tez çalışmasında ele alınmıştır. C-Chatterjea ve kuvvetli Chatterjea tip dönüşümler arasındaki farklardan bahsedilmiştir. Ayrıca bu tip dönüşümler için bazı sabit nokta sonuçları elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

Banach, S. 1922. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. Fundamenta Mathematicae, 3: 133-181.

Bizim, O. 2013. Genel topoloji, Dora Yayınevi, 594 sayfa, Bursa.

Brouwer, L. E. J. 1952. An intuitionist correction of the fixed-point theorem on the sphere. Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences, 213: 1-2.

Chatterjea, S. K. 1972. Fixed point theorems. C. R. Acad. Bulgare Sci, 25: 727-730.

Ćirić, Lj. B. 1974. A generalization of Banach's contraction principle. Proceedings of the American Mathematical Society, 45: 267-273.

Edelstein, M. 1962. On fixed and periodic points under contractive mappings. Journal of the London Mathematical Society, 37: 74-79.

Goebel, K., & Złotkiewicz, E. 1971. Some fixed point theorems in Banach spaces. Colloquium Mathematicae, 23: 103-106.

Górnicki, J. 1996. Fixed points of involutions. Mathematica Japonica, 43: 151-155.

Górnicki, J. 2017. Fixed point theorems for Kannan type mappings. Journal of Fixed Point Theory and Applications, 19: 2145-2152.

Górnicki, J. 2018. Various extensions of Kannan's fixed point theorem. Journal of Fixed Point Theory and Applications, 20: 20.

Górnicki, J. 2019. Remarks on asymptotic regularity and fixed points. Journal of Fixed Point Theory and Applications, 21: 29.

Hardy, G. E., & Rogers, T. D. 1973. A generalization of a fixed point theorem of Reich. Canadian Mathematical Bulletin, 16: 201-206.

Kannan, R. 1968. Some results on fixed points. Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, 60.

Kannan, R. 1969. Some results on fixed points--II. The American Mathematical Monthly, 76: 405-408.

Koçak, M. 2015. Genel topolojiye giris ve problem çözümleri, Nisan Kitabevi, 534 sayfa. Ankara.

Mucuk, O. 2010. Topoloji ve kategori, Nobel Yayın Dağıtım, 472 sayfa, Ankara.

Reich, S. 1971. Kannan's fixed point theorem. Bollettino Della Unione Matematica Italiana. Series IV, 4: 1–11.

Soykan, Yüksel. 2008. Fonksiyonel analiz, Nobel Yayın Dağıtım, 504 sayfa, Ankara.

Soykan, Yüksel. 2012. Metrik uzaylar ve topolojisi. Nobel Yayın Dağıtım, 517 sayfa, Ankara.

Subrahmanyam, P. V. 1975. Completeness and fixed-points. Monatshefte Für Mathematik, 80: 325-330.

Zamfirescu, T. 1972. Fix point theorems in metric spaces. Archiv Der Mathematik, 23: 292-298.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı ve Soyadı : Ali Cihad KABACI

Eğitim

Yüksek Lisans	Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı	2018-Halen
Lisans	Samsun 19 Mayıs Üniversitesi Fen ve Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü	2007-2011

İş Deneyimi

Yıl	**Kurum**	**Görev**
2013-Halen	MEB	Matematik Öğrt.

Akademik Aktiviteler

1. DURMAZ GÜNGÖR, G., ALTUN, İ., and KABACI, A. C. 2019. Chatterjea type fixed point results on metric spaces. 3rd International Conference of Mathematical Sciences, Maltepe University.