



T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI DAĞILIMLAR İÇİN EN ÇOK OLABİLİRLİK VE FARKLI KAYIP FONKSİYONLARI ALTINDA BAYES TAHMİN EDİCİLERİNİN PERFORMANSLARININ KARŞILAŞTIRILMASI

Gülcan GENCER

YÜKSEK LİSANS

İstatistik Anabilim Dalı

Mart-2016
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI DAĞILIMLAR İÇİN EN ÇOK OLABİLİRLİK VE FARKLI KAYIP FONKSİYONLARI ALTINDA BAYES TAHMİN EDİCİLERİNİN PERFORMANSLARININ KARŞILAŞTIRILMASI

Gülcan GENCER

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Buğra SARAÇOĞLU

2016, 63 Sayfa

Jüri
Doç. Dr. Buğra SARAÇOĞLU

Bu tez çalışmasında Weibull, Exponential Power ve Odd Weibull dağılımlarının, bilinmeyen parametreleri için en çok olabilirlik tahmin edicileri Newton raphson methodu kullanılarak hesaplanmış ve karesel hata, linex ve genel entropy kayıp fonksiyonları altında, jeffrey' in genişletilmiş önseli ve Tierney Kadane'in yaklaşım methodu kullanılarak bayes tahmin edicileri elde edilmiştir. Farklı örneklem boyutları için, ML ve Bayes tahmin edicileri Monte Carlo simulasyonu kullanılarak hata kareler ortalamaları bakımından karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler : Bayes, Exponential power, Jeffrey' in önseli, Kayıp fonksiyonları, Monte Carlo simulation, Odd weibull dağılımı Tierney-Kadane's approximation, Weibull.

ABSTRACT

MS THESIS

COMPARISON OF PERFORMANCES OF MAXIMUM LIKELIHOOD AND BAYESIAN ESTIMATORS UNDER DIFFERENT LOSS FUNCTIONS FOR SOME DISTRIBUTIONS

Gülcan GENCER

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN STATISTICS

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Buğra SARAÇOĞLU

2016, 63 Pages

Jury
Assoc. Prof. Dr. Buğra SARAÇOĞLU

In this thesis, have obtained maximum likelihood estimators (MLEs) using Newton Raphson method and Bayes estimators using extension of Jeffreys prior information and Tierney-Kadane's approximation method under squared error loss, Linex loss and general entropy loss functions for Weibull, Exponential Power and Odd Weibull distributions. These methods are compared using mean square error using Monte Carlo simulation method with varying sample sizes.

Keywords: Bayesian, Exponential power, Jeffrey' s prior, Loss functions, Monte Carlo Simulation, Odd weibull distribution, Tierney Kadane's approximation, Weibull.

ÖNSÖZ

Farklı kayıp fonksiyonları kullanarak parametre tahmini üzerine hazırladığım bu tez çalışması boyunca yardımını hiç esirgemeyen danışman hocam Doç. Dr. Buğra SARAÇOĞLU hocama, bu süreçte manevi destekleriyle yanımda olan başta eşim Kerem GENCER ve kocaman aileme çok teşekkür ederim.

Gülcan GENCER
KONYA-2016

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... Hata! Yer işareti tanımlanmamış.
ABSTRACT ..... **vi**
ÖNSÖZ ..... **vii**
İÇİNDEKİLER ..... **viii**
SİMGELER VE KISALTMALAR ..... **x**
ÇİZELGELER VE ŞEKİLLER ..... **xi**
1.GİRİŞ VE KAYNAK ARAŞTIRMASI **1**
2.TEMEL KAVRAMLAR **4**
2.1 Konvekslik ve Konkavlık 4
2.2 Kayıp Fonksiyonları 4
2.2.1 Beklenen Kayıp 6
2.2.2 Sıklıkçı Risk 6
2.3 Tahmin ve Nokta Tahmini 6
2.3.1 En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi 7
2.3.2 Bayes Tahmin Edicisi 8
2.3.2.1 Karesel Hata Kayıp Fonksiyonu (SELF) 9
2.3.2.2 Linex (Lineer Exponential) Kayıp Fonksiyonu 10
2.3.2.3 Genel Entropy Kayıp Fonksiyonu 13
2.3.2.4 Tierney-Kadane Yaklaşımı 16
2.3.2.5 Jeffrey'in Önseli 17
2.4 Hata Kareler Ortalaması (MSE) 18
3. BAZI KAYIP FONKSİYONLARI İÇİN BAYES TAHMİNLERİ **19**
3.1 Karesel Hata Kayıp Fonksiyonu Altında Bayes Tahmini 19
3.2 Linex Kayıp Fonksiyonu Altında Bayes Tahmini 20
3.3 Genel Entropy Kayıp Fonksiyonu Altında Bayes Tahmini 20
4. BAZI SÜREKLİ DAĞILIMLARIN FARKLI KAYIP FONKSİYONU ALTINDA BAYES TAHMİN EDİCİLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI 22
4.1 Weibull Dağılımı 22
4.1.1 Weibull Dağılımı için En Çok Olabilirlik Tahmini 23
4.1.2 Weibull Dağılımı için Tierney Kadane Yaklaşımı Altında Bayes Tahmini 24
4.1.3 Simulasyon Çalışması 28
4.2 Exponential Power Dağılımı 30
4.2.1 Exponential Power Dağılımı için En Çok Olabilirlik Tahmini 31
4.2.2 Üstel Power Dağılımı için Tierney Kadane yaklaşımı Altında Bayes Tahmini 32
4.2.3 Simulasyon Çalışması 36
4.3 Odd Weibull Dağılımı 39
4.3.1 Odd Weibull Dağılımı için En Çok Olabilirlik Tahmini 40
4.3.2 Odd Weibull Dağılımı için Tierney Kadane Yaklaşımı Altında Bayes Tahmini 41
4.3.3 Simulasyon Çalışması 48
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER **50**
5.1 Sonuçlar 50
5.2 Öneriler 50

KAYNAKLAR **51**
ÖZGEÇMİŞ **53**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

Ω	: Örnek uzay
F(t)	: Dağılım fonksiyonu
f(t)	: Olasılık yoğunluk fonksiyonu
$\hat{\alpha}$	: α parametresinin en çok olabilirlik tahmini
$\hat{\alpha}_B$	: α parametresinin yaklaşık Bayes tahmini
$\hat{\beta}_B$	: β parametresinin yaklaşık Bayes tahmini
$\hat{\lambda}_B$	: λ parametresinin yaklaşık Bayes tahmini
$L(\theta)$	: θ parametresine bağlı olabilirlik fonksiyonu
$l(\theta)$	: θ parametresine bağlı olabilirlik fonksiyonunun logaritması
$\pi(\theta)$	: θ parametresine bağlı önsel (prior) dağılım fonksiyonunu
$\pi(\theta / x)$	: θ parametresine bağlı sonsal (posterior) dağılım fonksiyonunu
Θ	**:** Parametre uzayı
$\propto$	: Yaklaşık

Kısaltmalar

MLE/ EÇO	: En çok olabilirlik tahmin edicisi
ML	: En çok olabilirlik - Maximum likelihood
o.y.f	: Olasılık yoğunluk fonksiyonu
o.o.yf.	: Ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu
d.f	: Dağılım fonksiyonu
EPD	: Üstel Power dağılımı
OW	: Odd Weibull dağılımı
MSE	: Mean Squares Error – Hata Kareler Ortalaması
BS	: Karesel kayıp fonksiyonu altında yaklaşık bayes tahmini
BL	: Linex kayıp fonksiyonu altında yaklaşık bayes tahmini
BGE	: Genel entropy kayıp fonksiyonu altında yaklaşık bayes tahmini
SELF	: Karesel Hata Kayıp Fonksiyonu
LİNEX	: (Lineer – Exponential)

ÇİZELGELER VE ŞEKİLLER

Çizelgeler

Çizelge 4.1 : Weibull dağılımı $a, k \pm 0.8$ değerleri için MLE ve bayes tahmin edicilerinin karşılaştırılması

Çizelge 4.2 : Weibull dağılımı $a, k \pm 1.5$ değerleri için MLE ve bayes tahmin edicilerinin karşılaştırılması

Çizelge 4.3 : Exponential Power dağılımı $a, k \pm 0.8$ değerleri için MLE ve bayes tahmin edicilerinin karşılaştırılması

Çizelge 4.4 : Exponential Power dağılımı $a, k \pm 1.2$ değerleri için MLE ve bayes tahmin edicilerinin karşılaştırılması

Çizelge 4.5 : Odd Weibull dağılımı $a \pm 0.6$, $k \pm 0.7$ değerleri için MLE ve bayes tahmin edicilerinin karşılaştırılması

Şekiller

Şekil 2.1. : a' nın seçilen değerleri için $\exp(a\Delta) - a\Delta - 1$' nın grafiği

Şekil 4.1. : Weibull dağılımı için hazard fonksiyonu grafiği

Şekil 4.2. : Exponential Power dağılımı için hazard fonksiyonu grafiği

Şekil 4.3. : Odd Weibull dağılımı için hazard fonksiyonu grafiği

1. GİRİŞ VE KAYNAK ARAŞTIRMASI

İstatistik, rasgelelik içeren olaylar, süreçler, sistemler hakkında modeller kurmada, gözlemlere dayanarak bu modellerin geçerliliğini sınamada ve bu modellerden sonuç çıkarmada gerekli bazı bilgi ve yöntemleri sağlayan ve rasgelelik ortamında hesap yapma ile ilgilen bir bilim dalıdır (Öztürk, 2011).

Fakat rasgelelik kavramı tam olarak açıklanamamıştır. Tüm bilimler gerçek dünyadaki olaylar hakkında insanları bilgilendirmek için çalışır. Gerçek dünyadaki olaylar tamamen rasgele gelişen olaylardır. Bir paranın havaya atılması deneyinde sonucun ne olabileceğini söylenebilir. Fakat kaç defa tura kaç defa yazı geleceğini söylenememesine rağmen yazı gelmesi olasılığı söylenebilir. Bunu yaparken de gerçek dünyadaki olayları bildiğimiz bir dünyaya aktararak işlem yaparız çünkü, para deneyi örneğinde olduğu gibi yazı ile turayı ne toplayabiliriz, ne de çarpabiliriz. İşte gerçek dünyadaki olayları bildiğimiz dünyaya götüren fonksiyon rasgele değişken olarak tanımlanır.

İstatistikte esas amaçlardan biri, çalıştığımız kitleyi anlayabilmek için istatistiksel sonuç çıkarımı yapmaktır. Bilinmeyen özellikler olarak tanımlanan parametreler hakkında herhangi bir istatistiki sonuç çıkarımı yapmak demek hakkında yapılacak olan tahminler ve bu tahminlerin geçerliliğini sınamak anlamına gelir.

Kitle parametrelerini tahmin etmek için, bu kitleden rasgele seçilecek örnekleme ihtiyaç vardır. Bilinmeyen parametreler hakkında bilgi, bu örneklemin içinde gizlidir. Örneklemdeki bilgi kullanılarak bir parametre için birçok tahmin edici önerilebilir. Bu tahmin edicileri elde etmek için bir çok yöntem geliştirilmiştir. Bunlardan bazıları momentler yöntemi, en çok olabilirlik yöntemi, bayes yöntemi ve en küçük kareler yöntemidir (Akdi, 2005).

Genellikle tahmin edicileri elde etme yöntemlerinde parametrelerin rasgele olmayan sabit değerler olduğu varsayılır. Bayes yönteminde ise bu parametrelerin alabilecekleri değerlere uygun bir önsel dağılıma sahip rasgele değişkenler gözüyle bakılır. Bayes tahmininde θ parametresinin bir önsel dağılıma sahip olduğu varsayılır. Daha sonra θ hakkında sahip olunan bu bilgi kullanılarak θ' nın sonsal dağılımı elde edilir. Bayes tahmin edicileri T(X) bir istatistik olmak üzere, seçilmiş bir k(θ,T) kayıp fonksiyonuna dayalı olarak R(θ,T) risk fonksiyonunun beklenen değerini en küçük yapan tahmin edici olarak tanımlanmaktadır. Literatürde birçok kayıp fonksiyonundan

bahsedilmektedir. Bunlardan bazıları karesel hata, linex ve genel entropy kayıp fonksiyonlarıdır. Literatürdeki çalışmalardan bazıları aşağıdaki gibidir.

Varian (2000), bu kitapta kullanılmakta olan kayıp fonksiyonlarının gayri menkul değerleme için uygun olmadığı ortaya çıkarılarak, lineer üstel (linex) kayıp fonksiyonu önerilmiştir.

Zellner (1986), asimetrik kayıp fonksiyonu özellikleri anlatılarak, bayes tahmin edicisinin nasıl bulunacağı gösterilmektedir.

Schiibe (1991), farklı asimetrik kayıp fonksiyonları için bayes tahminlerinin nasıl yapılacağı önerilmiş ve yardımcı sonuçlar ortaya çıkarılmıştır.

Jasim (2010), karesel ve linex kayıp fonksiyonu altında tek parametreli gamma dağılımının bayes tahmini yapılmıştır.

Pandey ve ark. (2011), bu çalışmada şekil parametresinin bilindiği varsayımı altında weibull dağılımının ölçek parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisi bulunmuş, linex kayıp fonksiyonu altında jeffrey'in önbilgisi kullanılarak bayes tahmin edicisi bulunmuş ve simulasyon çalışması yapılmıştır.

Ahmed ve ark. (2011), bu makalede sansürlü verilerle çalışılarak Weibull dağılımın parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri ile jeffrey' in ön bilgisi ve jeffreyin genişletilmiş ön bilgisi kullanılarak bayes tahmin edicileri bulunup, karşılaştırmalar yapılarak performansları gösterilmiştir.

Alkutubi ve ark. (2012), weibull dağılımında jeffrey' in ön bilgisi ve jeffrey' in genişletilmiş ön bilgisi kullanılarak parametre tahmini yapılmış, bu tahmin edicilerin performansı simulasyon çalışması yardımıyla, MSE ve MPE ile ilgili olarak Jeffrey' in ön bilgisi ile bayes tahmin edicileri karşılaştırılmış ve jeffrey' in genişletilmiş ön bilgisi kullanıldığında en iyi bayes tahmin edicisi elde edildiği gösterilmiştir.

Rasheed (2011), maxwell dağılımında ön bilgisiz priorlar ile, gerçek veriler ve aynı zamanda simule veriler kullanılarak farklı kayıp fonksiyonları altında bayes tahmin edicileri bulunmuştur.

Guure ve ark. (2012), iki parametreli weibull dağılımının en çok olabilirlik tahmin edicileri bulunmuş ve jeffrey' in ön bilgisi ve jeffreyin genişletilmiş ön bilgisi kullanılarak linex, genel entropy ve karesel kayıp fonksiyonları için bayes tahmin edicileri bulunarak simulasyon çalışmaları yapılmıştır.

Rasheed ve Sultan (2015), linex kayıp fonksiyonu altında ters gamma dağılımı nın ölçek parametresinin bayes tahmin edicisi elde edilerek MSE ve MPE' leri performansları bakımından karşılaştırılmıştır.

Cooray (2006), genelleştirilmiş weibull dağılımına Odd weibull ailesi olarak atıfta bulunmuştur. Weibull ve ters weibul dağılımlarının oranlarının dağılımı Cooray tarafından elde edilmiş ve odd weibull dağılımı olarak isimlendirilmiştir. Bu dağılım için bazı istatistiksel özellikler incelenmiştir.

Bu tezde ise; iki parametreli Weibull dağılımı, literatürde kayıp fonksiyonları ile ilgili olarak herhangi bir çalışma bulunmayan iki parametreli Exponential power ve üç parametreli Odd Weibull dağılımlarının bilinmeyen parametreleri için en çok olabilirlik tahmin edicileri elde edilip, Tierney- Kadane yaklaşım yöntemi kullanılarak elde edilen bayes tahminleri simetrik kayıp fonksiyonlarından olan karesel hata ve asimetrik kayıp fonksiyonlarından olan linex ve genel entropy kayıp fonksiyonları altında MSE'leri (Hata Kareler Ortalaması) bakımından karşılaştırılacaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez içerisinde sık kullanılan tanım ve temel kavramlara yer verilecektir.

2.1 Konvekslik ve Konkavlık

f(x) verilen bir kümede tanımlı iken bu kümenin farklı x_1 ve x_2 noktaları ve $\lambda \in [0,1]$ için;

$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$ ise f(x)' e dış bükey (konveks) fonksiyon adı verilir.

Eğer;

$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$ ise f(x)' e kesin dış bükey (kesin konveks) fonksiyon adı verilir.

Bu tanıma göre f(x)' in gösterdiği eğri üzerinde alınan iki noktayı birleştiren doğru parçası, fonksiyonun üstünde kalıyorsa veya çakışıyorsa f(x) konveks (dışbükey) bir fonksiyon olmaktadır.

f(x) verilen bir kümede tanımlı iken bu kümenin farklı x_1 ve x_2 noktaları ve $\lambda \in [0,1]$ için; $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$ ise f(x)' e dış bükey (konveks) fonksiyon adı verilir.

Eğer;

$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$ ise f(x)'e kesin iç bükey (kesin konkav) fonksiyon adı verilir.

Bu tanıma göre f(x)' in gösterdiği eğri üzerinde alınan iki noktayı birleştiren doğru parçası, fonksiyonun altında kalıyorsa veya çakışıyorsa f(x) konkav (içbükey) bir fonksiyon olmaktadır (Schrijver, 1998).

2.2 Kayıp Fonksiyonları

İstatistiksel analizlerde bir kayıp fonksiyonunun benimsenmesi ilk olarak Abraham Wald tarafından gerçekleştirilmiştir. Ayrıca Abraham Wald karar teorisini ilk çalışanlardandır.

Karar teorisinde adından da anlaşıldığı gibi karar verme problemleri ile ilgilenilirken istatistiksel karar teorisi ise; var olan karar problemlerinde belirsizlik içeren durumlara ışık tutan istatistiksel bilgileri kullanarak karar vermeyle ilgilenir. Karar teorisinde bu belirsizliklerin bilinmeyen sayısal değerler oldukları varsayılır ve θ (vektör yada matris) ile gösterilir.

Bir örnek vermek gerekirse; bir ilaç şirketinin yeni bir ilaç piyasaya sürüp sürmek istemediği ele alınsın. Bu durumda bu kararı etkileyen birçok faktörlerden biri ilacın etkisini kanıtlayacak kişi oranı (θ_1) diğeri ilacın piyasaya sürülme oranı (θ_2) olsun. Genellikle bu faktörler hakkında istatistiki bilgiler bulunsa bile hem θ_1 hem de θ_2 bilinmez. Burada problem ilacın pazarlanmak istenip istenmemesi, pazara ne kadar sürüleceği, fiyatının ne olacağı gibi durumlardaki karar teorilerinden biridir.

İstatistikte klasik olarak bu durumda θ hakkında çıkarım yapmak için örnek bilgi (istatistiksel araştırmalardan ortaya çıkan veri) kullanılır. Diğer yandan da karar teorisinde en iyi kararı vermek için örnek bilgi, problemle ilişkili diğer durumlarla birleştirilmeye çalışılır.

Örnek bilgiye ek olarak bilginin diğer iki tipi doğal olarak ilişkilidir. Bunlardan ilki kararın tüm olası sonuçlarının bilgisidir. Sıklıkla bu bilgi bütün olası kararları ve θ'nın olası değerlerini içeren kayıplar belirlenerek ölçülür.

İlaç örneğinde olduğu gibi; ilacın pazarlanıp pazarlanmama konusu kararındaki kayıplar hem θ_1, θ_2'nin ve diğer faktörlerin karışık fonksiyonlarıdır. Burada bu ilacı pazarlamadan önceki reklam kampanyası örneği verilsin ilaç burada olduğundan kötü görünürse θ_1 beklenilenden çok daha yüksek bir değer çıkabilir.

Yukarıda anlatıldığı gibi elimizde bir örnek bilgi yok ise örnek içermeyen durumda ise bilginin ikinci kaynağı ön bilgidir. Ön bilgi θ hakkında diğer istatistiksel araştırmalardan ortaya çıkan bilgidir. Genellikle ön bilgi θ ile benzerlik içeren benzer durumlar hakkında geçmiş deneyimlerden elde edilir. Örnek vermek gerekirse ilaç örneğindeki θ_1 ve θ_2'den farklı fakat benzer ağrı kesiciler hakkında çok büyük oranda muhtemel önbilgiler bulunabilmektedir.

Sonuç olarak; kayıp fonksiyonları karar verme olgusu içeren belirsizlik durumlarında ortaya çıkmaktadır. Yani gerçek beklenen kayıp olan $k(\theta,\hat{\theta})$'dan belirlilik durumlarında söz edemeyiz. Bir belirsizlik durumuyla karşı karşıya

kaldığımızda beklenen kayıp düşünülür ve daha sonra bu beklenen kayıpla ilgili olarak en iyi karar seçilmek zorunda kalınır (Berger, 1985).

2.2.1 Beklenen Kayıp

Beklenen kayıp yukarıda da belirtildiği üzere θ' nın bilinmediği durumlarda düşünülür. $\pi^*(\theta)$'nın karar verme sırasında θ' nın olasılık dağılımı olduğu kabul edilir.(Θ , θ parametresinin uzayı)

Bir $\hat{\theta}$ eyleminin bayescil beklenen kaybı ise;

$$E^{\pi}L\left(\theta,\hat{\theta}\right)=\int_{\Theta}L\left(\theta,\hat{\theta}\right)dF^{\pi}\left(\theta\right) \qquad (2.1)$$

olarak ifade edilir (Berger, 1985).

2.2.2 Sıklıkçı Risk

Karar teorisinde alınan rasgele X' ler üzerinde oldukça farklı beklenen kayıpların olduğu kabul edilir. Bu beklenen kaybı tanımlamak için ilk olarak karar kurallarını tanımlamak gerekir. Karar kuralları tahmin problemlerinde, bir tahmin edici olarak adlandırılmaktır ve $\hat{\theta}$ olarak gösterilecektir. Bir karar kuralı olan $\hat{\theta}$' nın risk fonksiyonu;

$R\left(\theta,\hat{\theta}\right)=E_{\theta}^{X}\left[L\left(\theta,\hat{\theta}\right)\right]=\int_{\Omega}L\left(\theta,\hat{\theta}\right)dF^{X}\left(x\backslash\theta\right)$' dır.(Ω örnek uzay) (2.2)

Bir karar kuralı olan $\hat{\theta}$' nın bayescil risk fonksiyonu Θ üzerinde θ için π önsel dağılımı ile ilgili olarak ortalama risk;

$$r\left(\pi,\theta\right)=E^{\pi}\left[R\left(\theta,\hat{\theta}\right)\right] \qquad (2.3)$$

şeklinde ifade edilir (Berger, 1985).

2.3 Tahmin ve Nokta Tahmini

İstatistiksel çıkarımlarda iki önemli problemden biri tahmin diğeri ise hipotez testleridir. Nokta ve aralık tahmini olmak üzere 2 çeşit tahmin yöntemi vardır. Bu tezde, nokta tahminine ve nokta tahmini yöntemlerinden en çok olabilirlik (EÇO) ve Bayes

tahmin yöntemlerine yer verilecektir. Parametre tahmininde istenilen şey en iyi özelliklere sahip tahmin ediciyi elde etmektir.

Nokta tahmini üzerinde çalışılan kitlenin bir veya birden fazla özelliği hakkında bilgi sahibi olmak için bir yığının örnekten tahmin edilmesi sorununun çözümlenmesi için kullanılan yöntemlerden biridir.

Nokta tahmininde iki yöntem vardır. Bilinmeyen parametreler için tahmin ediciler elde etmek; ikincisi; olası tahmin ediciler arasından en iyi tahmin ediciler bulmaktır. Nokta tahmin edicilerini bulmak için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Bu tezde en önemlilerinden olan en çok olabilirlik ve bayes tahmin edicilerine değinilecektir.

2.3.1 En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi

Parametreleri tahmin etmek için önemli bir metod olan en çok olabilirlik metodu, 1922 yılında genetikçi ve aynı zamanda istatistikçi olan Ronald A. Fisher tarafından sunulmuştur. Bu tezde yer verilmeyen tahmin edici elde etme yöntemlerinden olan momentler yöntemi uygulamada sezgiyle anlaşılabilen ve kolay bir metod olmasına rağmen genellikle iyi tahmin ediciler alanı değildir. Pratikte bu metod geniş boyutlu verilerde daha iyi sonuçlar vermektedir ve verilerin istatistiksel modellere uygunluğunu ölçen en uygun metodlardandır. En çok olabilirlik prensibi θ' nın değerinin gerçekte gözlemlenen değerlerde maksimum olasılığa sahip değer olmasını ister (Tucker ve Boas, 1962).

$X_1, X_2, ..., X_n$; $f\left(x|\theta\right)$ dağılımından alınan örneklem ve bu örneklemin o.y.f. $f\left(x_1,...,x_n|\theta\right) = f\left(x_1|\theta\right)...f\left(x_n|\theta\right)$ olmak üzere ;

$$L(\theta; x_1, x_2, ...x_n) = f(x_1, x_2, ...x_n; \theta) = L(\theta) = \prod_1^n f(x_i; \theta) \tag{2.4}$$

biçiminde tanımlanan $L(\theta)$ fonksiyonuna olabilirlik fonksiyonu denir. Bu fonksiyonu maksimum yapan θ değerine θ' nın EÇO tahmini denir. Genelde olabilirlik fonksiyonunun maksimize edilmesi yerine olabilirlik fonksiyonunun logaritması

$\ell(\theta) = \log L\left(\theta|x_1, x_2, ...x_n\right)$ maksimize edilerek EÇO tahmin edicisi elde edilir (Akdi, 2005).

2.3.2 Bayes Tahmin Edicisi

Bayescil yaklaşımda θ parametreleri, önsel bir dağılıma sahip rasgele değişkenler olarak görülür. Önsel bilgi özneldir, çünkü son deneyimlere, son verilere dayanır yada herhangi bir istatistikçinin inancı önsel bilgiyi oluşturabilir (Shao, 2010). Eldeki önbilgi ve örneklem bilgisi kullanılarak bilgi elde edilir (Ramachandran ve Tsokos, 2009).

θ bilindiğinde örneklemin geldiği o.y.f' nu $f\left(x|\theta\right)$olsun. θ parametresinin bayes tahmin edicisini bulmak için belirlenen önsel dağılım $\pi(\theta)$ yardımıyla; $X_1, X_2, ..., X_n$ ve θ' nın o.o.y.f' nu oluşturulur.

$$\begin{aligned} f\left(\underline{x},\theta\right) &= f\left(\underline{x}|\theta\right)\pi\left(\theta\right) \\ &= f\left(x_1|\theta\right) f\left(\left(x_2|\theta\right)...f\left(x_n|\theta\right)\pi\left(\theta\right)\right. \\ &= \mathrm{L}\left(\theta|x_1, x_2, ...x_n\right)\pi\left(\theta\right) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Burada; o.o.y.f' dan, X'in marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu olan f(x)' i belirlemek için θ parametresine göre integral alınır.

$$f\left(\underline{x}\right) = \int_{\theta\in\Theta} L(\theta|x_1, x_2, ...x_n)\pi(\theta)d\theta \tag{2.6}$$

X bilindiğinde θ'nın koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu yani θ'nın sonsal dağılımı;

$$\begin{aligned} \pi(\theta \setminus x) &= \frac{f(x,\theta)}{f(x)} \\ &= \frac{\mathrm{L}\left(\theta|x_1, x_2, ...x_n\right)\pi\left(\theta\right)}{\int_{\theta\in\Theta} \mathrm{L}\left(\theta|x_1, x_2, ...x_n\right)\pi\left(\theta\right)d\theta} \end{aligned} \tag{2.7}$$

elde edilir. θ' nın sonsal dağılımının beklenen değeri olarak tanımlanır.

$L_1\left(\theta,\theta\right) = \left(\theta-\theta\right)^2$ biçiminde tanımlanan karesel kayıp fonksiyonu altında bayes tahmin edicileri, $T(\underline{X})$ bir istatistik olmak üzere, seçilmiş bir $k\left(\theta,T\right)$ kayıp fonksiyonuna dayalı,

$$R(\theta,T) = \int_x k\left(\theta,T\left(x\right)\right) f\left(x|\theta\right)dx \tag{2.8}$$

risk fonksiyonunun,

$$r\left(T\right) = \int_\Theta R\left(\theta,T\right)\pi\left(\theta\right)d\theta \tag{2.9}$$

beklenen değerini en küçük yapan tahmin edicidir.

2.3.2.1 Karesel Hata Kayıp Fonksiyonu (SELF)

Karesel hata kayıp fonksiyonu Legendre ve Gauss tarafından çalışılan en yaygın değerlendirme kriteri olarak kullanılan bir kayıp fonsiyonudur. Bu kayıp fonksiyonunun karar vermede çok sık kullanılmasının birçok nedeni vardır. Bu fonksiyon ilk olarak $R\left(\theta,\hat{\theta}\right)=E_{\theta}L\left(\theta,\hat{\theta}\right)=E_{\theta}\left[\theta-\hat{\theta}\right]^{2}$ fonksiyonu tahmin edicinin varyansı olduğundan; θ' nın yansız tahmin edicilerinin bulunduğu problemlerde kullanılmıştır. SELF' in tercih edilmesinin diğer bir nedeni klasik en küçük kareler teorisi ile ilişkili olmasından dolayıdır. Sonuç olarak çoğu karar analizlerinde bu fonksiyon kullanıldığında ki hesaplamalar hem tutarlı hem de kolay olmaktadır (Berger, 1985).

Diğer yandan bu fonksiyonun çok az anlam ifade ettiğini gösteren nedenlerde vardır. Acaba bu fonksiyon gerçekten düşünülen olguda doğru bir kayıp fonksiyonumudur? Başlangıç olarak yanıt tabi ki hayırdır. Örneğin ekonomide riskten kaçınan yatırımcılar konkav fayda fonksiyonuna sahip olmak ve aynı zamanda bunun sınırlandırılabilir olmasını isterler. Karesel hata kayıp fonksiyonu bu ikisi de değildir. Hatta bu fonksiyonun konveksliği özellikle rahatsız edici boyuttadır (Jasim, 2010).

Karesel kayıp fonksiyonu ayrıca lineer karesel optimal kontrol problemlerinde kullanılır. Sıklıkla kayıp fonksiyonunun istenilen değerlerden sapması karesel olarak ifade edilir. Bu yaklaşım lineer olduğu için uygundur (H.A., 2011).
Karesel kayıp fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$L\left(\theta,\hat{\theta}\right)=\left(\theta-\hat{\theta}\right)^{2} \tag{2.10}$$

İki parametreli bir dağılım için;

α ve β' nın herhangi bir fonksiyonu $u\left(\alpha,\beta\right)$' nın bayes tahmin edicisi;

- Karesel hata kayıp fonksiyonu

$$L_{1}(\hat{u}_{BS},u)=(\hat{u}_{BS}-u)^{2} \tag{2.11}$$

olmak üzere bu fonksiyonun beklenen değerinin minimize edilmesi ile $u\left(\alpha,\beta\right)$ için bayes tahmin edicisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\hat{u}_B(\alpha,\beta) = E\left[u(\alpha,\beta)|\underline{x}\right]$$
$$= \int_0^\infty\int_0^\infty u(\alpha,\beta)\,\pi\left(\alpha,\beta\left|\underline{x}\right.\right)d\alpha d\beta \qquad (2.12)$$
$$= \frac{\int_0^\infty\int_0^\infty u\left(\alpha,\beta\left|\underline{x}\right.\right)e^{\left[\ell\left(\alpha,\beta\left|\underline{x}\right.\right)+\rho(\alpha,\beta)\right]}d\alpha d\beta}{\int_0^\infty\int_0^\infty e^{\left[\ell\left(\alpha,\beta\left|\underline{x}\right.\right)+\rho(\alpha,\beta)\right]}d\alpha d\beta}$$

Burada $\ell\left(\alpha,\beta\left|\underline{x}\right.\right)$ log olabilirlik fonksiyonunu, $\rho\left(\alpha,\beta\left|\underline{x}\right.\right)$ ortak önsel fonksiyonunun logaritmasını ifade etmektedir.

Üç parametreli bir dağılım için;

- Karesel hata kayıp fonksiyonu

$$L_1(\hat{u}_{BS},u)=(\hat{u}_{BS}-u)^2 \qquad (2.13)$$

olmak üzere bu fonksiyonun beklenen değerinin minimize edilmesi ile $u(\alpha,\beta,\lambda)$ için bayes tahmin edicisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\hat{u}_{BS}(\alpha,\beta,\lambda) = E\left[u(\alpha,\beta,\lambda)|\underline{x}\right]$$
$$= \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty u(\alpha,\beta,\lambda)\pi\left(\alpha,\beta,\lambda\left|\underline{x}\right.\right)d\alpha d\beta d\lambda$$
$$= \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty u(\alpha,\beta,\lambda)\frac{f\left(\underline{x}\left|\alpha,\beta,\lambda\right.\right)\pi(\alpha,\beta,\lambda)}{f\left(\underline{x}\right)}d\alpha d\beta d\lambda$$
$$= \frac{\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty u(\alpha,\beta,\lambda)\,f\left(\underline{x}\left|\alpha,\beta,\lambda\right.\right)\pi(\alpha,\beta,\lambda)d\alpha d\beta d\lambda}{\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty f\left(\underline{x}\left|\alpha,\beta,\lambda\right.\right)\pi(\alpha,\beta,\lambda)d\alpha d\beta d\lambda}$$
$$= \frac{\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty u(\alpha,\beta,\lambda)e^{\left[\ell\left(\alpha,\beta,\lambda\left|\underline{x}\right.\right)+\rho(\alpha,\beta,\lambda)\right]}d\alpha d\beta d\lambda}{\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{\left[\ell\left(\alpha,\beta,\lambda\left|\underline{x}\right.\right)+\rho(\alpha,\beta,\lambda)\right]}d\alpha d\beta d\lambda} \qquad (2.14)$$

2.3.2.2 Linex (Lineer Exponential) Kayıp Fonksiyonu

Varian linex kayıp fonksiyonunu önerirken, gayrimenkul değerlemeyi ele almıştır. Gayri menkul değerlemecilerin amacı mevcut piyasa değerini verilen yaşam

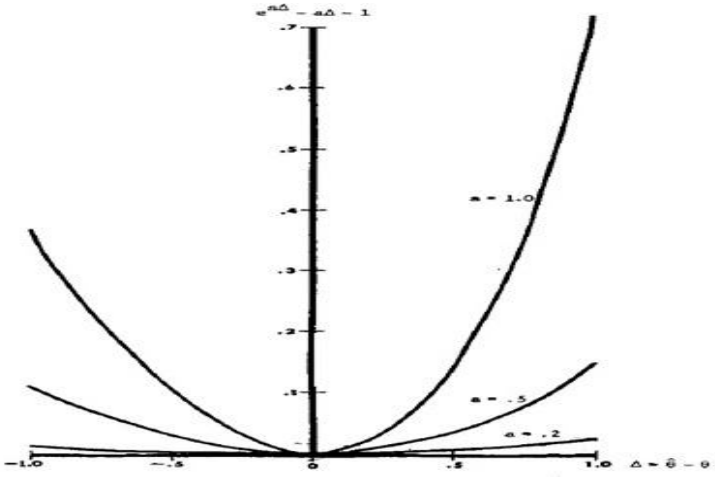
alanı gibi evin karakteristik özellikleri ve yatak odası sayısı gibi özeliklerini kullanarak, bir evin değerini tahmin etmektir. Değerlemecinin tahmini y_e olarak ve gerçek değerlerde y_a olarak ifade edilip kayıpları $L(y_e, y_a)$ olarak gösterilmiştir.

Eğer değerlemeci bir evin değerini olduğundan daha düşük tahmin ederse kayıp bu aradaki farka eşittir. Ancak California' da bir değerlemeci evi olduğundan daha fazla tahmin ederse ev sahibinin iki başvuru yeri vardır. Birincisi değerlemecinin işyerini şikayet etmek, ikincisi ise eşitlik heyetine başvurmaktır. Bunun sonucunda bu heyet her iki tarafın sunduğu verilere göre doğru tahmini yapmaya çalışır. Bu iki seçenekte iki taraf için oldukça uzun ve maliyetli süreçlerdir. Dava kazanıldığı takdirde ise eyalet, mahkeme maliyetlerini ödemektedir.

Varian ise böyle durumlarda karesel kayıp fonksiyonunu gayrimenkul değerleme kayıplarını tahmin etmede uygun olmadığı için linex kayıp fonksiyonunu önermiştir. Çünkü SELF' de az tahmin edildiği zaman ile fazla tahmin edildiği zaman arasındaki kaybın aynı olduğu sonucuna varmıştır. Varian, bu durumda iyice düşündüğü zaman, gayrimenkul değerleme de değerlemecinin kayıp fonksiyonu asimetrik olması gerektiğine karar vermiştir. Bu fonksiyon

$$L\left(\theta,\hat{\theta}\right)=b\left[\exp\left(a\left(\theta-\hat{\theta}\right)\right)-a\left(\theta-\hat{\theta}\right)-1\right] \tag{2.15}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada $a\neq 0,\ b>0$. a şekil parametresinin işareti asimetrinin yönünü ve a 'nın büyüklüğü asimetrinin derecesini ifade etmektedir. Ayrıca bu kayıp fonksiyonunun özellikleri Zellner tarafından ayrıntılı olarak incelenmiştir (Zellner, 1986).



Şekil 2.1. a' nın seçilen değerleri için $\exp(a\Delta)-a\Delta-1$' nın grafiği

Şekil 2.1'de de görüldüğü gibi Varian' ın tanıttığı linex kayıp fonksiyonu gayri menkul değerleme çalışmalarında çok yararlıdır. Çünkü sıfır yönünde tek yönlü olarak üstel şekilde artarken diğer yandan da hemen hemen lineer olduğu görülmüştür (Pandey ve ark., 2011). Grafik incelendiğinde a=1 durumunda fonksiyonun olması gerektiği gibi olduğu görülmekte, yani büyük tahmin olduğu zaman ki maliyetinin küçük tahmin olduğu zaman ki maliyetinden daha fazla olduğu, a<0 ve $\Delta < 0$ olduğu zaman hemen hemen üstel bir şekilde artan $\Delta > 0$ olduğu zamanda ise hemen hemen lineer artan olduğu görülmektedir (Schiibe, 1991). Ayrıca asimetrik kayıp fonksiyonu aşağıdaki özellikleri taşımaktadır.

- Kayıp fonksiyonu büyük negatif hatalar için lineerdir.
- Kayıp fonksiyonu daha doğrusal bir oranda pozitif hatalar için artandır.
- Mahkeme maliyetleri sürekli olsa bile, sunulan bir şikayetin olasılığı aşırı yapılan değerleme ile aynı oranda artar ve böylece kayıp fonksiyonu pozitif hatalar için monoton olarak artmaktadır (Varian, 2000).

Bu fonksiyon aşağıdaki özellikleri taşıdığından linex kayıp fonksiyonu olarak adlandırılmıştır

$$L(y_e, y_a) = b\exp\left[a(y_e - y_a)\right] - c(y_e - y_a) - b \tag{2.16}$$

- c=1 için ve $b = a^{-1}$, $y_e = y_a$ olduğu zaman minimum kayba sahiptir.
- Çok büyük oranda fazla tahmin ve az tahmin durumlarında üsteldir.

  Verilen L kayıp fonksiyonu altında beklenen kayıp aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$E(L) = \int_{-\infty}^{\infty} L(y_e, y_a)\, p(y_a)\, dy_a \tag{2.17}$$

$E(L) = f(y_e)$ y_e' nin beklenen kaybının minimize edilmesiyle minimize kayıplı tahminine ulaşmış olunur.

İki parametreli bir dağılım için;

α ve β' nın herhangi bir fonksiyonu $u(\alpha, \beta)$' nın bayes tahmin edicisi;

- Linex kayıp fonksiyonu;

$L_2(\Delta)$ α exp(aΔ)-aΔ-1; a ≠ 0, şeklindedir. (2.18)

$\Delta = \hat{u}(\alpha, \beta) - u(\alpha, \beta)$ için, (2.19)

Linex kayıp fonksiyonunun sonsal beklenen değeri;

$$E_\theta\left[L_2(\hat{u} - u)\right] \propto \exp(a\hat{u})\, E_\theta[\exp(-au)] - a(\hat{u} - E_\theta(u)) - 1 \tag{2.20}$$

biçimindedir. $\hat{u}=\hat{u}(\alpha,\beta)$ ve $u=u(\alpha,\beta)$ olmak üzere; eşitlik (2.20)'nin minimize edilmesi ile $u(\alpha,\beta)$ için bayes tahmin edicisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\hat{u}_{BL}(\alpha,\beta)=-\frac{1}{a}\ln E\left[\exp\left(-au(\alpha,\beta)\right)|\underline{x}\right]$$

$$=-\frac{1}{a}\left(\frac{\int_0^\infty\int_0^\infty \exp\left(-au(\alpha,\beta)\right)e^{\left[\ell\left(\alpha,\beta|\underline{x}\right)+\rho(\alpha,\beta)\right]}d\alpha d\beta}{\int_0^\infty\int_0^\infty e^{\left[\ell\left(\alpha,\beta|\underline{x}\right)+\rho(\alpha,\beta)\right]}d\alpha d\beta}\right)$$

(2.21) Üç parametreli bir dağılım için;

α,β ve λ nın herhangi bir fonksiyonu $u(\alpha,\beta,\lambda)=u$ için sonsal beklenen değer aşağıdaki gibi elde edilir.

- Linex kayıp fonksiyonu;

$L_2(\Delta)\ \alpha\ \exp(a\Delta)-a\Delta-1;\quad a\neq 0$ olmak üzere; (2.22)

$$\Delta=\hat{u}(\alpha,\beta,\lambda)-u(\alpha,\beta,\lambda) \tag{2.23}$$

için Linex kayıp fonksiyonunun sonsal beklenen değeri;

$$E_\theta\left[L_2(\hat{u}-u)\right]\propto\exp(a\hat{u})E_\theta[\exp(-au)]-a(\hat{u}-E_\theta(u))-1, \tag{2.24}$$

şeklindedir ve $\hat{u}=\hat{u}(\alpha,\beta,\lambda)$ ve $u=u(\alpha,\beta,\lambda)$ olmak üzere Eşitlik (2.24)' ün minimize edilmesi ile $u(\alpha,\beta,\lambda)$ için bayes tahmin edicisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\hat{u}_{BL}(\alpha,\beta,\lambda)=-\frac{1}{a}\ln E\left[\exp\left(-au(\alpha,\beta,\lambda)\right)|\underline{x}\right]$$

$$=-\frac{1}{a}\ln\left(\frac{\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \exp\left(-au(\alpha,\beta,\lambda)\right)e^{\left[\ell\left(\alpha,\beta,\lambda|\underline{x}\right)+\rho(\alpha,\beta,\lambda)\right]}d\alpha d\beta d\lambda}{\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{\left[\ell\left(\alpha,\beta,\lambda|\underline{x}\right)+\rho(\alpha,\beta,\lambda)\right]}d\alpha d\beta d\lambda}\right) \tag{2.25}$$

2.3.2.3 Genel Entropy Kayıp Fonksiyonu

Entropy Kayıp Fonksiyonu James ve Stein tarafından 1961 yılında çok değişkenli normal dağılımın (multinormal) varyans kovaryans matrisinin tahmini için tanıtılmıştır (James ve Stein, 1992).

Daha sonra aynı kayıp fonksiyonu Brown , Haff ve Dey ile Srinivasan tarafından normal dağılımın (multinormal) varyans kovaryans matrisinin tahmini yada varyans kovaryans matrisin tersinin tahmininde, Dey ve arkadaşları p değişkenli bağımsız gamma ölçek parametrelerinin yada bu parametrelerin terslerinin eş zamanlı tahmininde entropy kayıp fonksiyonunu, Ighodaro ile Santher ve Ighodaro' nun arkadaşları bağımsız iki terimli ve çok terimli oranların eş zamanlı tahmininde, Ghosh ve Yang bu fonksiyonu p değişkenli Poisson ortalamalarının eş zamanlı tahmininde,

Rukhin ve Ananda entropy kayıp fonksiyonu ile birlikte karesel kayıp altında çok değişkenli normal vektörün bilinmeyen varyansının tahmin problemlerinde, Yang bağımsız Poisson ortalamalarının ridge tahmini için ve son olarak Wieczorkowski ve Zielinski bu kayıp fonksiyonunu iki terimli olasılıkların minimax tahmini için kullanmışlardır. (Singh ve ark. 2011). Entropy kayıp fonksiyonu daha az kayıp içermesinden dolayı karesel kayıp fonksiyonuna alternatif olarak önerilmiştir. Bu fonksiyon Kullback – Leibler (Kullback – Leibler İnformation number) bilgi sayısı temel alınarak elde edilmiştir ve $f\left(t,\hat{\theta}\right)$' ya karşın $f\left(t,\theta\right)$ olabilirlik fonksiyonundan ortalama bilgi entropy uzaklığı olarak tanımlanmıştır.

$L\left(\theta,\hat{\theta}\right)=\left[\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right]-\ln\left[\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right]-1$ fonksiyonu entropy fonksiyonu olarak adlandırılmıştır.

Daha sonra entropy kayıp fonksiyonu Calabria ve Pulcini tarafından genelleştirilerek ise; Genel Entropy Kayıp fonksiyonu;

$L\left(\theta,\hat{\theta}\right)=\left[\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right]^{k}-k\ln\left[\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right]-1$ olarak tanımlanmıştır. (Calabria ve Pulcinia, 1996).

Şekil parametresi olan k sabiti, aynı zamanda kayıp fonksiyonunun simetriklikten uzaklaştığını gösterir. Genel entropy kayıp fonksiyonu altında θ' nın bayes tahmin edicisi aşağıdaki gibidir. Burada $E_{\theta}(\theta^{-k})$' nın mevcut olması beklenir. (Parsian ve Nematollahi, 1996).

$$\hat{\theta}_{G}=[E_{\theta}(\theta^{-k})]^{(-1/k)} \tag{2.26}$$

Ayrıca $k=-1$ olduğu zaman karesel hata kayıp fonksiyonunu da sağladığı görülür.
İki parametreli bir dağılım için;
α ve β' nın herhangi bir fonksiyonu $u\left(\alpha,\beta\right)$ olmak üzere;

- Genel entropy kayıp fonksiyonu;

$L_3(\hat{u},u) \propto \left(\frac{\hat{u}}{u}\right)^k - k\,ln\left(\frac{\hat{u}}{u}\right) - 1$ olmak üzere; (2.27)

Genel entropy kayıp fonksiyonunun sonsal beklenen değeri;

$$E\left[L_3(\hat{u},u)\right] \propto E\left(\frac{\hat{u}}{u}\right)^k - kE\left[\ln(\hat{u}) - \ln(u)\right] - 1 \tag{2.28}$$

şeklinde elde edilir. $\hat{u} = \hat{u}(\alpha,\beta)$ ve $u = u(\alpha,\beta)$ olmak üzere Eşitlik (2.28)'in minimize edilmesi ile $u(\alpha,\beta)$ için Genel Entropi kayıp fonksiyonu altında bayes tahmin edicisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\hat{u}_{BGE}(\alpha,\beta) = \left\{E\left\{\left[u(\alpha,\beta)\right]^{-k} \left|\underline{x}\right.\right\}\right\}^{-\frac{1}{k}}$$

$$= \left\{\frac{\int_0^\infty\int_0^\infty \left[u(\alpha,\beta)\right]^{-k} e^{\left[\ell\left(\alpha,\beta\left|\underline{x}\right.\right)+\rho(\alpha,\beta)\right]} d\alpha d\beta}{\int_0^\infty\int_0^\infty e^{\left[\ell\left(\alpha,\beta\left|\underline{x}\right.\right)+\rho(\alpha,\beta)\right]} d\alpha d\beta}\right\}^{-\frac{1}{k}} \tag{2.29}$$

Üç parametreli bir dağılım için;

α,β ve λ 'nın herhangi bir fonksiyonu $u(\alpha,\beta,\lambda) = u$ fonksiyonu için sonsal beklenen değeri aşağıdaki gibi elde edilir.

- Genel entropy kayıp fonksiyonu;

$L_3(\hat{u},u) \propto \left(\frac{\hat{u}}{u}\right)^k - k\,ln\left(\frac{\hat{u}}{u}\right) - 1$ olmak üzere; (2.30)

Bu kayıp fonksiyonunun sonsal beklenen değeri;

$$E\left[L_3(\hat{u},u)\right] \propto E\left(\frac{\hat{u}}{u}\right)^k - kE\left[\ln(\hat{u}) - \ln(u)\right] - 1 \tag{2.31}$$

şeklindedir. $\hat{u} = \hat{u}(\alpha,\beta,\lambda)$ ve $u = u(\alpha,\beta,\lambda)$ olmak üzere Eşitlik (2.31)' in minimize edilmesi ile $u(\alpha,\beta,\lambda)$ için Genel Entropy kayıp fonksiyonu altında bayes tahmin edicisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\hat{u}_{BGE}(\alpha,\beta,\lambda) = \left\{E\left\{\left[u(\alpha,\beta,\lambda)\right]^{-k} \left|\underline{x}\right.\right\}\right\}^{-\frac{1}{k}}$$

$$= \left\{\frac{\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \left[u(\alpha,\beta,\lambda)\right]^{-k} e^{\left[\ell\left(\alpha,\beta,\lambda\left|\underline{x}\right.\right)+\rho(\alpha,\beta,\lambda)\right]} d\alpha d\beta d\lambda}{\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{\left[\ell\left(\alpha,\beta,\lambda\left|\underline{x}\right.\right)+\rho(\alpha,\beta,\lambda)\right]} d\alpha d\beta d\lambda}\right\}^{-\frac{1}{k}} \tag{2.32}$$

(2.12), (2.14), (2.21), (2.25), (2.29) ve (2.32) eşitliklerindeki integral oranlarının çözümü çok zor olduğundan bu tür integraller Tierney- Kadane yaklaşımı ile kolayca çözülebilir.

2.3.2.4 Tierney-Kadane Yaklaşımı

Tierney ve Kadane (1986) iki integral oranının yaklaşık çözümü için aşağıdaki çözümü önermiştir. (Tierney ve Kadane, 1986). $\theta=(\theta_1,\theta_2,...,\theta_n)$ olmak üzere θ parametreli herhangi bir dağılımın olabilirlik fonksiyonu $\ell(\theta)$; ortak önsel fonksiyonunun logaritması ise $\rho(\theta)$ olmak üzere;

$$l(\theta)=\frac{1}{n}\{\rho(\theta)+\ell(\theta)\},$$

$$l^*(\theta)=\frac{1}{n}\log U(\theta)+l(\theta) \tag{2.33}$$

Ayrıca tek parametreli dağılım için farklı kayıp fonksiyonları altında θ' nın herhangi bir fonksiyonu olan $u(\theta)$ için bayes tahmini Tierney – Kadane yaklaşımı kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir.

i. Karesel hata kayıp fonksiyonu için θ' nın herhangi bir fonksiyonu olan $u(\theta)$ için Tierney Kadane yaklaşımı altında bayes tahmin edicisi;

$$\begin{aligned}\hat{u}_{BS}(\theta)&=E\left(u(\theta)\middle|\underline{x}\right)=\frac{\int e^{nl^*(\theta)}d\theta}{\int e^{nl(\theta)}d\theta}\\&=\left(\frac{\det\Sigma^*}{\det\Sigma}\right)^{1/2}\exp\left[n\left(l^*\left(\hat{\theta}_{l^*}\right)-l\left(\hat{\theta}_l\right)\right)\right]\end{aligned} \tag{2.34}$$

şeklindedir.

ii. Linex kayıp fonksiyonu için θ' nın herhangi bir fonksiyonu olan $u(\theta)$ için Tierney Kadane yaklaşımı altında bayes tahmin edicisi;

$$\begin{aligned}\hat{u}_{BL}(\theta)&=-\frac{1}{a}\ln E\left[\exp\left(-au(\theta)\right)|\underline{x}\right]\\&=-\frac{1}{a}\ln\left[\left(\frac{\det\Sigma^*_{BL}}{\det\Sigma}\right)^{1/2}\exp\left[n\left(l^*_{BL}\left(\hat{\theta}_{l^*_{BL}}\right)-l\left(\hat{\theta}_l\right)\right)\right]\right]\end{aligned} \tag{2.35}$$

Burada; $l^*_{BL}(\theta)=\frac{1}{n}\log\left[\exp\left(-au(\theta)\right)\right]+l(\theta)$ (2.36)

iii. Genel Entropy kayıp fonksiyonu için θ' nın herhangi bir fonksiyonu olan $u(\theta)$ için Tierney Kadane yaklaşımı altında bayes tahmin edicisi;

$$\hat{u}_{BGE}(\theta) = \left\{ E\left\{ \left[u(\theta) \right]^{-k} | \underline{x} \right\} \right\}^{-\frac{1}{k}}$$

$$= \left[\left(\frac{\det \Sigma^*_{BGE}}{\det \Sigma} \right)^{1/2} \exp\left[n\left(l^*_{BGE}\left(\hat{\theta}_{l^*_{BGE}} \right) - l\left(\hat{\theta}_l \right) \right) \right] \right]^{-\frac{1}{k}} \tag{2.37}$$

Burada;

$$l^*_{BGE}(\theta) = \frac{1}{n} \log\left[\left[u(\theta) \right]^{-k} \right] + l(\theta) \tag{2.38}$$

şeklindedir.

2.3.2.5 Jeffrey'in Önseli

Jeffrey' in önseli ismini Harold Jeffrey' den almaktadır. Jeffrey' in önseli bir parametre uzayı için ön bilgisiz (objektif) bir ön dağılımdır. Aynı zamanda Jeffrey' in önseli Fisherin bilgi matrisinin determinantının karekökü olarak da ifade edilmektedir. Tek parametreli durumda;

$$\pi(\theta) \propto \sqrt{\mathrm{I}(\theta)}$$

$$\pi(\theta) = \sqrt{E\left[(\frac{d \ln L}{d\theta})^2 \right]} = \sqrt{-E\left[(\frac{d^2 \ln L}{d\theta^2}) \right]} \tag{2.39}$$

Çok parametreli durumda;

$$I(\theta) = -E\left[(\frac{d^2 \ln L}{d\theta_i d\theta_j}) \right]$$

olmak üzere;

$$\pi(\theta) \propto \sqrt{\det I(\theta)} \tag{2.40}$$

şeklindedir. Ancak bu tez çalışmasında aşağıda belirtilen Jefrrey' in genişletilmiş önselleri kullanılacaktır (Jeffreys, 1962).

$\pi(\theta) \propto \left[(I(\theta)) \right]^c$, $\mathrm{c} \in \mathrm{R}^+$ veya $u(\theta) \propto \left[(I(\theta)) \right]^{2c}$ olmak üzere;

$\pi(\theta) \propto \left(\frac{1}{\theta} \right)^c$ veya $u(\theta) \propto \left(\frac{1}{\theta} \right)^{2c}$ biçimindedir.

2.4 Hata Kareler Ortalaması (MSE)

Simülasyon çalışmasında, θ parametreli bir dağılım için $\hat{\theta}_{(i)}$ $\left(i = 1,2,..,\textit{deneme sayısı}\right)$ θ'nin tahmin değerini göstermek üzere $MSE = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{\theta}_{(i)} - \theta\right)^2}{\textit{deneme sayısı}}$ eşitliği ortalama hata kareler ortalamasını ifade etmektedir.

Bu tez çalışmasında çalışılan dağılımlar en çok olabilirlik ve bayes tahminleri MSE ölçütüne göre monte carlo simülasyonu ile karşılaştırılacaktır.

3. BAZI KAYIP FONKSİYONLARI İÇİN BAYES TAHMİNLERİ

Bu tez çalışmasında karesel hata kayıp fonksiyonu, linex kayıp fonksiyonu ve genel entropy kayıp fonksiyonları için bayes tahmin edicileri bulunacaktır. Bu fonksiyonların bayes çıkarımları aşağıdaki gibidir.

3.1 Karesel Hata Kayıp Fonksiyonu Altında Bayes Tahmini

Bayes tahmin edicilerinin, seçilmiş bir $k(\theta,T)$ kayıp fonksiyonuna dayalı, risk fonksiyonunun, beklenen değerini en küçük yapan tahmin edici olduğu bayes tahmin edicisi bölümünde söylenilmişti. Bu durum teorik olarak ifade edilmek istenirse;

$X_1, X_2, ..., X_n$ birbirinden bağımsız ve aynı $f(.;\theta)$, $\theta \in \Theta$ o(y) fonksiyonuna sahip rasgele değişkenler olsun. $\delta = \delta(x_1, ...x_n)$ olmak üzere $L(\theta;\delta) = L[\theta;\delta(x_1,...x_n)] = [\theta - \delta(x_1,...x_n)]^2$ karesel kayıp fonksiyonunu ele alınsın. θ, $\pi(.)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip bir rasgele değişken olmak üzere risk fonksiyonu,

$$R(\theta;\delta) = E[\theta - \delta(x_1,...x_n)]^2$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [\theta - \delta(x_1,...x_n)]^2 \, f(x_1;\theta)...f(x_n;\theta)\,dx_1...dx_n \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır ve ortalama risk

$$r(\pi,\delta) = \int_{\Theta} R(\theta;\delta)\pi(\theta)\,d\theta$$
$$= \int_{\Theta}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [\theta - \delta(x_1,...x_n)]^2 \, f(x_1;\theta)...f(x_n;\theta)dx_1...dx_n\pi(\theta)d\theta \right) \tag{3.2}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{\Theta} [\theta - \delta(x_1,...x_n)]^2 \, f(x_1;\theta)...f(x_n;\theta)\,dx_1...dx_n\pi(\theta)\,d\theta \right) \tag{3.3}$$

biçiminde ifade edilir. $\min_{\delta} r(\pi,\delta)$ problemi $r(\pi,\delta)$' yı minimize etmek için;

$I_1 = \int_{\Theta}\left([\theta - \delta(x_1,...x_n)]^2 \, f(x_1;\theta)...f(x_n;\theta)\,dx_1...dx_n\pi(\theta)\,d\theta \right)$' nın minimize edilmesi yeterlidir.

$$I_1 = \delta^2(x_1,...x_n)\int_{\Omega} f(x_1;\theta)...f(x_n;\theta)\pi(\theta)d\theta - 2\delta(x_1,...x_n) + \int_{\Omega}\theta f(x_1;\theta)...f(x_n;\theta)\pi(\theta)d\theta + \int_{\Omega}\theta^2 f(x_1;\theta)...f(x_n;\theta)\pi(\theta)d\theta \quad (3.4)$$

ifadesi;

$g(t) = at^2 - 2bt + c$ şeklinde ifade edilirse, $\{t = \delta(x_1,...x_n)\}$ $g(t)$ fonksiyonunun minimize eden t değeri b/a' dır. O halde istenen tahmin edici;

$$\delta(x_1,...x_n) = \frac{\int_{\Omega}\theta f(x_1;\theta)...f(x_n;\theta)\pi(\theta)d\theta}{\int_{\Omega} f(x_1;\theta)...f(x_n;\theta)\pi(\theta)d\theta} \text{ ' dır.} \quad (3.5)$$

Bayes tahmin edicisi $\delta(x_1,...x_n) = E(\pi(\theta/\underline{x}))$ olarak gösterilir (Cerit ve Yüksel, 1997).

3.2 Linex Kayıp Fonksiyonu Altında Bayes Tahmini

$$L_2(\hat{\theta},\theta) = b\left[e^{a(\hat{\theta}-\theta)} - a(\hat{\theta}-\theta) - 1\right], \quad a \neq 0,\ b>0 \quad (3.6)$$

Linex kayıp fonksiyonunun risk fonksiyonu aşağıdaki gibidir (Rasheed ve Sultan, 2015).

$$R_2(\hat{\theta},\theta) = \int_0^{\infty} b\left[e^{a\hat{\theta}}e^{-c\theta} - a(\hat{\theta}-\theta) - 1\right]\pi(\theta|x)d\theta = be^{a\hat{\theta}}E_{\theta}e^{-a\theta} - ab\hat{\theta} + abE_{\theta}\theta - b \quad (3.7)$$

$\hat{\theta}$' ya göre türev alarak minimize edildiği zaman bayes çıkarımı;

$$abe^{a\hat{\theta}}E_{\theta}e^{-a\theta} = ab$$
$$\Rightarrow \hat{\theta} = -\frac{1}{a}\log\left[E_{\theta}e^{-a\theta}\right] \quad (3.8)$$

olarak bulunur (Pandey ve ark., 2011).

3.3 Genel Entropy Kayıp Fonksiyonu Altında Bayes Tahmini

$$L_3(\hat{\theta},\theta) = \left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right)^k - k\ln\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right) - 1 \text{ olmak üzere;} \quad (3.9)$$

Genel entropy kayıp fonksiyonunun risk fonksiyonu;

$$R_3\left(\hat{\theta},\theta\right)=\int_0^{\infty}\left[\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right)^k-k\ln\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right)-1\right]\pi\left(\theta|x\right)d\theta$$
$$=E\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right)^a-kE\left[\ln\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right)\right]-1=E\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right)^k-kE\left[\ln\left(\hat{\theta}\right)-\ln\left(\theta\right)\right]-1 \quad (3.10)$$

biçimindedir. $\hat{\theta}$' ya göre türev alarak minimize edildiği zaman bayes çıkarımı;

$$k\hat{\theta}^{k-1}E_\theta\left(\theta^{-k}\right)=k\frac{1}{\hat{\theta}}$$
$$\hat{\theta}=\left[E_\theta\left(\theta^{-k}\right)\right]^{-\frac{1}{k}} \quad (3.11)$$

olarak elde edilir.

4. BAZI SÜREKLİ DAĞILIMLARIN FARKLI KAYIP FONKSİYONU ALTINDA BAYES TAHMİN EDİCİLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

Bu bölümde iki parametreli dağılımlardan weibull dağılımı ve üstel power dağılımı ile üç parametreli dağılım olan odd weibull dağılımının bayes tahmin edicileri; karesel kayıp fonksiyonu, linex kayıp fonksiyonu ve genel entropy kayıp fonksiyonları kullanılarak karşılaştırılacaktır.

4.1 Weibull Dağılımı

Weibull dağılımı α ölçek , β şekil parametresine sahip 2 parametreli bir dağılımdır. 1951'de Waloddi Weibull tarafından üstel dağılımın genelleştirilmesiyle elde edilmiştir.

Bu dağılım $\beta=1$ olduğu durumda üstel dağılımı $\beta=2$ olduğu durumda rayleigh dağılımını vermektedir.Bu dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

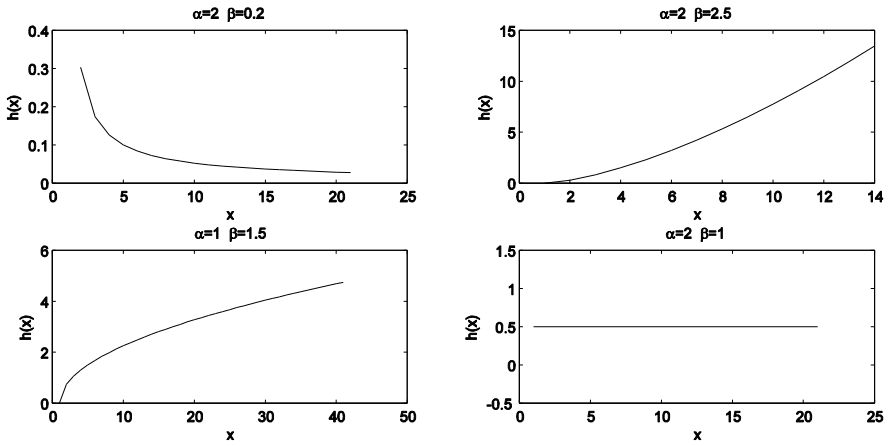
$$f(x)=\beta\alpha^{-\beta}x^{\beta-1}e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}} \qquad \alpha>0\,,\,\beta>0\,,\,x>0 \tag{4.1}$$

$$F(x)=1-e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}} \qquad \alpha>0\,,\,\beta>0\,,\,x>0 \tag{4.2}$$

$$h(x)=\beta\alpha^{-\beta}x^{\beta-1} \tag{4.3}$$

Hazard fonksiyonu;

- $\beta < 1$ için azalan,
- $\beta > 1$ için artan,
- $\beta = 1$ için sabittir.



Şekil 4.1. Weibull dağılımı için hazard fonksiyonu grafiği

4.1.1 Weibull Dağılımı için En Çok Olabilirlik Tahmini

$X_1, X_2, ... X_n$ parametreleri α ve β olan weibull dağılımdan alınan bir örneklem olsun. Olabilirlik fonksiyonu,

$$L\left(\alpha,\beta\middle|\underset{-}{x}\right)=\prod_{i=1}^{n}\beta\alpha^{-\beta}x_i^{\beta-1}e^{-(x_i/\alpha)^{\beta}} = \beta^{n}\alpha^{-\beta n}e^{-\left(\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)/\alpha\right)^{\beta}}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\beta-1} \tag{4.4}$$

olmak üzere olabilirlik fonksiyonunun logaritması;

$$\ell\left(\alpha,\beta/\underset{-}{x}\right)=\ln\left(L\left(\alpha,\beta/\underset{-}{x}\right)\right) = n\ln(\beta)-n\beta\ln(\alpha)-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta}\right)+(\beta-1)\left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right) \tag{4.5}$$

şeklindedir. α ve β parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri;

$$\frac{\partial\ell\left(\alpha,\beta\middle|\underset{-}{x}\right)}{\partial\alpha}=-\frac{n\beta}{\alpha}-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta}\beta}{\alpha}\right)\right)=0 \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial\ell\left(\alpha,\beta\middle|\underset{-}{x}\right)}{\partial\beta}=\frac{n}{\beta}-nl\,n(\alpha)-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta}\ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)\right)+\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)=0 \tag{4.7}$$

lineer olmayan denklemlerinin Newton-Raphson yönteminin kullanılmasıyla elde edilir.

4.1.2 Weibull Dağılımı için Tierney Kadane Yaklaşımı Altında Bayes Tahmini

$$\pi_1(\alpha) \propto \left(\frac{1}{\alpha}\right)^c \tag{4.8}$$

$$\pi_2(\beta) \propto \left(\frac{1}{\beta}\right)^c \tag{4.9}$$

$$\pi(\alpha,\beta) \propto \left(\frac{1}{\alpha\beta}\right)^c \tag{4.10}$$

olmak üzere α ve β parametrelerinin ortak önsel fonksiyonu ve sonsal dağılımı aşağıdaki gibidir (Alkutubi ve ark., 2012)

$$\pi(\alpha,\beta) \propto \left(\frac{1}{\alpha\beta}\right)^c \tag{4.11}$$

$$\pi\left(\alpha,\beta\middle|\underset{\sim}{x}\right) = \frac{f\left(\underset{\sim}{x}\middle|(\alpha,\beta)\right)\pi\left(\alpha,\beta\middle|\underset{\sim}{x}\right)}{f\left(\underset{\sim}{x}\right)}$$

$$= \frac{\beta^n \alpha^{-n\beta} e^{-\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)/\alpha\right)^{\beta}} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\beta-1} \left(\frac{1}{\alpha\beta}\right)^c}{\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \beta^n \alpha^{-n\beta} e^{-\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)/\alpha\right)^{\beta}} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\beta-1} \left(\frac{1}{\alpha\beta}\right)^c d\alpha d\beta} \tag{4.12}$$

Tierney Kadane yaklaşım formülleri;

$$\begin{aligned} l(\alpha,\beta) &= \frac{1}{n}\{\rho(\alpha,\beta) + \ell(\alpha,\beta)\} \\ l^*(\alpha,\beta) &= \frac{1}{n}\log u(\alpha,\beta) + l(\alpha,\beta) \end{aligned} \tag{4.13}$$

şeklindedir. Burada α ve β' nın herhangi bir fonksiyonu $u(\alpha,\beta)$ ve $\ell\left(\alpha,\beta\middle|\underset{\sim}{x}\right)$, (4.5) eşitliğindeki gibi olmak üzere;

$$\rho(\alpha,\beta) = \ln\left(\Pi(\alpha,\beta)\right) = -c\ln(\alpha) - c\ln(\beta) \tag{4.14}$$

biçimindedir. $u(\alpha,\beta)$ için farklı kayıp fonksiyonları altında bayes tahmin edicileri aşağıdaki gibi elde edilir.

- $u(\alpha,\beta)$ fonksiyonunun linex kayıp fonksiyonu altında tierney kadane yaklaşımı kullanarak bayes tahmin edicisi;

$$\hat{u}_{BL}(\alpha,\beta) = -\frac{1}{a}\ln E\left[\exp\left(-au(\alpha,\beta)\right)|\underline{x}\right]$$
$$= -\frac{1}{a}\ln\left[\left(\frac{\det\Sigma^*_{BL}}{\det\Sigma}\right)^{1/2}\exp\left[n\left(l^*_{BL}\left(\hat{\alpha}_{l^*_{BL}},\hat{\beta}_{l^*_{BL}}\right)-l\left(\hat{\alpha}_l,\hat{\beta}_l\right)\right)\right]\right] \qquad (4.15)$$

elde edilir. Burada $l^*_{BL}(\alpha,\beta) = \frac{1}{n}\log\left[\exp\left(-au(\alpha,\beta)\right)\right] + l(\alpha,\beta)$ (4.16)

- $u(\alpha,\beta)$ fonksiyonunun genel entropy kayıp fonksiyonu altında tierney kadane yaklaşımı kullanarak bayes tahmin edicisi;

$$\hat{u}_{BGE}(\alpha,\beta) = \left\{E\left\{\left[u(\alpha,\beta)\right]^{-k}|\underline{x}\right\}\right\}^{-\frac{1}{k}}$$
$$= \left[\left(\frac{\det\Sigma^*_{BGE}}{\det\Sigma}\right)^{1/2}\exp\left[n\left(l^*_{BGE}\left(\hat{\alpha}_{l^*_{BGE}},\hat{\beta}_{*_{BGE}}\right)-l\left(\hat{\alpha}_l,\hat{\beta}_l\right)\right)\right]\right]^{-\frac{1}{k}} \qquad (4.17)$$

biçimindedir. Burada $l^*_{BGE}(\alpha,\beta) = \frac{1}{n}\log\left[\left[u(\alpha,\beta)\right]^{-k}\right] + l(\alpha,\beta)$ (4.18)

- $u(\alpha,\beta)$ fonksiyonunun karesel hata kayıp fonksiyonu altında tierney kadane yaklaşımı kullanarak bayes tahmin edicisi;

$$\hat{u}_{BS}(\alpha,\beta) = E\left(u(\alpha,\beta)\middle|\underline{x}\right) = \frac{\int e^{nl^*(\alpha,\beta)}d(\alpha,\beta)}{\int e^{nl(\alpha,\beta)}d(\alpha,\beta)}$$
$$= \left(\frac{\det\Sigma^*}{\det\Sigma}\right)^{1/2}\exp\left[n\left(l^*\left(\hat{\alpha}_{l^*},\hat{\beta}_{l^*}\right)-l\left(\hat{\alpha}_l,\hat{\beta}_l\right)\right)\right] \qquad (4.19)$$

şeklindedir. Burada l^*, (4.13) eşitliğindeki gibidir. $\left(\hat{\alpha}_{\ell^*},\hat{\beta}_{\ell^*}\right)$ ve $\left(\hat{\alpha}_\ell,\hat{\beta}_\ell\right)$ ise sırasıyla $l^*(\alpha,\beta)$ ve $l(\alpha,\beta)$'nın maksimizesidir. Ayrıca Σ^* ve Σ sırasıyla $l^*(\alpha,\beta)$ ve $l(\alpha,\beta)$'nin $\left(\hat{\alpha}_{\ell^*},\hat{\beta}_{\ell^*}\right)$ ve $\left(\hat{\alpha}_\ell,\hat{\beta}_\ell\right)$'deki 2. türevlerinin tersinin negatifini belirtmektedir. Σ ise aşağıdaki gibidir.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} -\partial^2 l/\partial\alpha^2 & -\partial^2 l/\partial\alpha\partial\beta \\ -\partial^2 l/\partial\alpha\partial\beta & -\partial^2 l/\partial\beta^2 \end{bmatrix}^{-1} \qquad (4.20)$$

l ve kısmi türevleri ise;

$$l(\alpha,\beta)=\frac{1}{n}\left[n\ln(\beta)-n\beta\ln(\alpha)-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta}\right)+(\beta-1)\left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)-c\ln(\alpha)-c\ln(\beta)\right] \tag{4.21}$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial\alpha^2}=\frac{\frac{n\beta}{\alpha^2}-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta}\beta^2}{\alpha^2}+\frac{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta}\beta}{\alpha^2}\right)\right)+\frac{c}{\alpha^2}}{n} \tag{4.22}$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial\alpha\beta}=\frac{-\frac{n}{\alpha}-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta}\ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)\beta}{\alpha}-\frac{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta}}{\alpha}\right)\right)}{n} \tag{4.23}$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial\beta^2}=\frac{-\frac{n}{\beta^2}-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta}\ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^2\right)+\frac{c}{\beta^2}}{n} \tag{4.24}$$

biçimindedir. Karesel hata kayıp fonksiyonu altında (4.19) eşitliğinin Tierney Kadane yaklaşımı kullanarak bayes tahmin edicisi aşağıdaki adımlar izlenerek elde edilir.

$U(\alpha,\beta)=\alpha$ ise;

$$\Sigma_1^{*}=\begin{bmatrix}-\partial^2 l_1^{*}/\partial\alpha^2 & -\partial^2 l_1^{*}/\partial\alpha\partial\beta\\ -\partial^2 l_1^{*}/\partial\alpha\partial\beta & -\partial^2 l_1^{*}/\partial\beta^2\end{bmatrix}^{-1} \tag{4.25}$$

$$\hat{\alpha}_{B}=\left(\frac{\det\Sigma_1^{*}}{\det\Sigma}\right)^{1/2}\exp\left[n\left(l_1^{*}\left(\hat{\alpha}_{l_1^{*}},\hat{\beta}_{l_1^{*}}\right)-l\left(\hat{\alpha}_{l},\hat{\beta}_{l}\right)\right)\right] \tag{4.26}$$

$$l_1^{*}(\alpha,\beta)=\frac{1}{n}\log\alpha+l(\alpha,\beta)$$

olmak üzere l_1^{*} ve kısmi türevleri ise aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial^2 l_1^{*}}{\partial\alpha^2}=-\frac{1}{n\alpha^2}+\frac{\frac{n\beta}{\alpha^2}-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta}\beta^2}{\alpha^2}+\frac{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta}\beta}{\alpha^2}\right)\right)+\frac{c}{\alpha^2}}{n} \tag{4.27}$$

$$\frac{\partial^2 l_1^*}{\partial\alpha\beta} = \frac{-\frac{n}{\alpha} - \left(\sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{(\frac{x_i}{\alpha})^{\beta} \ln(\frac{x_i}{\alpha})\beta}{\alpha} - \frac{(\frac{x_i}{\alpha})^{\beta}}{\alpha} \right) \right)}{n} \tag{4.28}$$

$$\frac{\partial^2 l_1^*}{\partial\beta^2} = \frac{-\frac{n}{\beta^2} - \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^{\beta} \ln\left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^2 \right) + \frac{c}{\beta^2}}{n} \tag{4.29}$$

$U(\alpha,\beta) = \beta$ ise;

$$\Sigma_2^{\,*} = \begin{bmatrix} -\partial^2 l_2^{\,*} / \partial\alpha^2 & -\partial^2 l_2^{\,*} / \partial\alpha\partial\beta \\ -\partial^2 l_2^{\,*} / \partial\alpha\partial\beta & -\partial^2 l_2^{\,*} / \partial\beta^2 \end{bmatrix}^{-1} \tag{4.30}$$

$$\hat{\beta}_{B} = \left(\frac{\det \Sigma_2^*}{\det \Sigma} \right)^{1/2} \exp\left[n\left(l_2^*\left(\hat{\alpha}_{l_2^*}, \hat{\beta}_{l_2^*} \right) - l\left(\hat{\alpha}_l, \hat{\beta}_l \right) \right) \right] \tag{4.31}$$

$$l_2^*(\alpha,\beta) = \frac{1}{n}\log\beta + l(\alpha,\beta)$$

olmak üzere $l_2^{\,*}$ ve kısmi türevleri ise aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial^2 l_2^*}{\partial\alpha^2} = \frac{\frac{n\beta}{\alpha^2} - \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^{\beta} \beta^2}{\alpha^2} + \frac{\left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^{\beta} \beta}{\alpha^2} \right) \right) + \frac{c}{\alpha^2}}{n} \tag{4.32}$$

$$\frac{\partial^2 l_2^*}{\partial\alpha\beta} = \frac{-\frac{n}{\alpha} - \left(\sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{(\frac{x_i}{\alpha})^{\beta} \ln(\frac{x_i}{\alpha})\beta}{\alpha} - \frac{(\frac{x_i}{\alpha})^{\beta}}{\alpha} \right) \right)}{n} \tag{4.33}$$

$$\frac{\partial^2 l_2^*}{\partial\beta^2} = -\frac{1}{n\beta^2} + \frac{-\frac{n}{\beta^2} - \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^{\beta} \ln\left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^2 \right) + \frac{c}{\beta^2}}{n} \tag{4.34}$$

Benzer şekilde linex ve genel entropy kayıp fonksiyonu altında bayes tahmin edicileri (4.15) ve (4.17) eşitlikleri kullanılarak elde edilebilir.

4.1.3 Simulasyon Çalışması

Bu bölümde en çok olabilirlik tahmin edicileri ve jeffrey' in genişletilmiş önseli kullanılarak karesel hata kayıp fonksiyonu, linex kayıp fonksiyonu ve genel entropy kayıp fonksiyonu olan üç farklı kayıp fonksiyonu için yaklaşık bayes tahmin edicileri weibull dağılımının bilinmeyen parametreleri için Tierney Kadane'in yaklaşım methodu ile elde edilmiştir ve Monte Carlo simulasyonu kullanılarak MSE' leri karşılaştırılmıştır.

Weibull dağılımından (α,β) örnek boyutu n=20, 30, 50, 100, parametre değerleri $\alpha=1,1.5,\ \beta=1.3,1.7$ ve a,k= $\pm 0.8,\ \pm 1.5$ olarak seçilmiştir. Jeffrey' in genişletilmiş değeri ise c=0.2 alınmıştır. En çok olabilirlik ve bayes tahminleri 10000 denemede MSE' leri bakımından karşılaştırılmıştır. Çizelge 4.1 ve 4.2 incelendiğinde linex kayıp fonksiyonu altında bayes yöntemi ile elde edilen tahminlerin ve MSE'lerin genel entropy ve karesel kayıp fonksiyonu altında elde edilen tahminlerden ve MSE'lerden daha iyi olduğu gözlenmiştir.

Çizelge 4.1. Weibull dağılımı $a, k \pm 0.8$ değerleri için MLE ve bayes tahmin edicilerinin karşılaştırılması

n	α	c	β	α / β	*ML*	*BS*	*BL*	*BGE*	*ML*	*BS*	*BL*	*BGE*
					$a = k = 0.8$				$a = k = -0.8$			
20	1	0.2	1.3	α_{MSE}	0.032469	0.037101	0.011698	0.010466	0.032735	0.037482	0.012304	0.010436
				α_{ME}	1.002815	1.052651	1.045563	1.031722	1.004646	1.054446	1.065716	1.049642
				β_{MSE}	0.078973	0.076219	0.013775	0.010736	0.081174	0.078346	0.015335	0.011192
				β_{ME}	1.396198	1.383075	1.370214	1.356668	1.398917	1.385814	1.411360	1.379963
	1.5	0.2	1.7	α_{MSE}	0.042637	0.045744	0.006248	0.006042	0.042463	0.045543	0.006733	0.006110
				α_{ME}	1.494823	1.543186	1.526268	1.520401	1.494341	1.542900	1.560391	1.539266
				β_{MSE}	0.139356	0.134481	0.013547	0.011056	0.139655	0.134897	0.015900	0.011245
				β_{ME}	1.831379	1.816577	1.777886	1.768901	1.827127	1.812321	1.856324	1.806095
30	1	0.2	1.3	α_{MSE}	0.022004	0.023935	0.007610	1.007089	0.021749	0.023826	0.007772	0.006984
				α_{ME}	1.000476	1.033536	1.029985	1.020257	1.002649	1.035844	1.043469	1.032701
				β_{MSE}	0.046422	0.045170	0.008289	0.006964	0.046640	0.045415	0.008809	0.007107
				β_{ME}	1.364397	1.355320	1.347874	1.338887	1.363272	1.354210	1.370014	1.350367
	1.5	0.2	1.7	α_{MSE}	0.028945	0.030532	0.004226	0.004118	0.028336	0.030021	0.004380	0.004034
				α_{ME}	1.499102	1.531427	1.520957	1.516731	1.500584	1.533068	1.544775	1.530689
				β_{MSE}	0.080435	0.078229	0.008121	0.007032	0.077744	0.075671	0.008789	0.006926
				β_{ME}	1.788931	1.778696	1.754710	1.748446	1.783719	1.773503	1.800806	1.769439
50	1	0.2	1.3	α_{MSE}	0.012859	0.013555	0.004334	0.004115	0.013030	0.013757	0.004447	0.004146
				α_{ME}	1.000961	1.020859	1.019286	1.013165	1.001479	1.021337	1.025957	1.019487
				β_{MSE}	0.024779	0.024334	0.004512	0.004090	0.025153	0.024688	0.004752	0.004157
				β_{ME}	1.337451	1.331815	1.327961	1.322621	1.339448	1.333842	1.342863	1.331561
	1.5	0.2	1.7	α_{MSE}	0.017565	0.018109	0.002539	0.002490	0.017126	0.017705	0.002557	0.002444
				α_{ME}	1.498704	1.518280	1.512414	1.509669	1.499594	1.519100	1.526108	1.517694
				β_{MSE}	0.042597	0.041880	0.004467	0.004129	0.041346	0.040578	0.004640	0.004015
				β_{ME}	1.746877	1.740578	1.727203	1.723297	1.750987	1.744673	1.760201	1.742276
100	1	0.2	1.3	α_{MSE}	0.006377	0.006567	0.002105	0.002038	0.006410	0.006578	0.002117	0.002047
				α_{ME}	1.001266	1.011215	1.010638	1.007478	1.000161	1.010111	1.012450	1.009195
				β_{MSE}	0.011376	0.011256	0.002109	0.002000	0.011323	0.011212	0.002142	0.002006
				β_{ME}	1.319785	1.316903	1.315156	1.312507	1.318482	1.315603	1.319924	1.314472
	1.5	0.2	1.7	α_{MSE}	0.008430	0.008578	0.001210	0.001198	0.008551	0.008667	0.001242	0.001220
				α_{ME}	1.499987	1.509782	1.507014	1.505567	1.498607	1.508401	1.511918	1.507702
				β_{MSE}	0.019095	0.018908	0.002055	0.001963	0.019217	0.019037	0.002139	0.001993
				β_{ME}	1.724503	1.721269	1.714866	1.712890	1.723307	1.720076	1.727521	1.718894

Çizelge 4.2. Weibull dağılımı $a, k \pm 1.5$ değerleri için MLE ve bayes tahmin edicilerinin karşılaştırılması

n	α	c	β	α / β	*ML*	*BS*	*BL*	*BGE*	*ML*	*BS*	*BL*	*BGE*
					$a=k=1.5$				$a=k=-1.5$			
20	1	0.2	1.3	α_{MSE}	0.031708	0.035951	0.038618	0.035970	0.032481	0.037079	0.044535	0.036985
				α_{ME}	0.999643	1.049293	1.027367	1.013366	0.077694	0.074972	0.053068	0.037289
				β_{MSE}	0.082520	0.079692	0.051532	0.039886	1.002285	1.052084	1.080924	1.062769
				β_{ME}	1.398143	1.385038	1.348326	1.339240	1.395629	1.382525	1.433962	1.395356
	1.5	0.2	1.7	α_{MSE}	0.042242	0.045765	0.021244	0.021252	0.043484	0.047233	0.025538	0.021656
				α_{ME}	1.499223	1.547709	1.514314	1.512944	1.500617	1.549138	1.585814	1.557600
				β_{MSE}	0.138847	0.133927	0.044144	0.039669	0.143650	0.138642	0.060878	0.039865
				β_{ME}	1.832416	1.817573	1.742855	1.747999	1.835069	1.820249	1.906590	1.835203
30	1	0.2	1.3	α_{MSE}	0.022542	0.024529	0.027120	0.025402	0.021511	0.023501	0.027633	0.024488
				α_{ME}	1.001508	1.034497	1.021067	1.011375	1.001393	1.034568	1.053076	1.041488
				β_{MSE}	0.046899	0.045606	0.028794	0.025092	0.045804	0.044595	0.031058	0.024463
				β_{ME}	1.366987	1.357906	1.335148	1.328881	1.362667	1.353607	1.385489	1.361996
	1.5	0.2	1.7	α_{MSE}	0.028042	0.029417	0.014015	0.014109	0.028327	0.029834	0.015692	0.014197
				α_{ME}	1.496258	1.528779	1.507386	1.506154	1.498274	1.530752	1.554361	1.536279
				β_{MSE}	0.077124	0.075157	0.026333	0.024567	0.079072	0.077009	0.032630	0.024385
				β_{ME}	1.779187	1.768993	1.722547	1.725018	1.782831	1.772606	1.824999	1.782292
50	1	0.2	1.3	α_{MSE}	0.012965	0.013626	0.015186	0.014596	0.013297	0.014032	0.016086	0.014812
				α_{ME}	1.000247	1.020112	1.012661	1.006556	1.001272	1.021225	1.032093	1.025302
				β_{MSE}	0.025682	0.025224	0.016344	0.014963	0.024191	0.023777	0.016282	0.014135
				β_{ME}	1.338425	1.332813	1.320102	1.316247	1.334954	1.329338	1.347366	1.334284
	1.5	0.2	1.7	α_{MSE}	0.017214	0.017837	0.008670	0.008626	0.016956	0.017379	0.008946	0.008523
				α_{ME}	1.501041	1.520582	1.508192	1.507317	1.495978	1.515490	1.529296	1.518751
				β_{MSE}	0.043107	0.042340	0.015477	0.014722	0.042769	0.042030	0.017263	0.014501
				β_{ME}	1.750684	1.744389	1.717540	1.718807	1.748588	1.742281	1.771790	1.747976
100	1	0.2	1.3	α_{MSE}	0.006467	0.006627	0.007423	0.007281	0.006479	0.006639	0.007546	0.007273
				α_{ME}	0.999718	1.009684	1.006190	1.003023	0.999741	1.009707	1.015036	1.011711
				β_{MSE}	0.011125	0.011022	0.007212	0.006964	0.010893	0.010792	0.007310	1.006836
				β_{ME}	1.317081	1.314195	1.308198	1.306236	1.316845	1.313959	1.322612	1.316400
	1.5	0.2	1.7	α_{MSE}	0.008538	0.008688	0.004291	0.004268	0.008427	0.008561	0.004339	0.004206
				α_{ME}	1.500520	1.510306	1.504310	1.503789	1.499575	1.509369	1.516190	1.510981
				β_{MSE}	0.019582	0.019384	0.007306	0.007112	0.019062	0.018878	0.007567	0.006923
				β_{ME}	1.725885	1.722650	1.709719	1.710240	1.723895	1.720668	1.734779	1.723475

4.2 Exponential Power Dağılımı

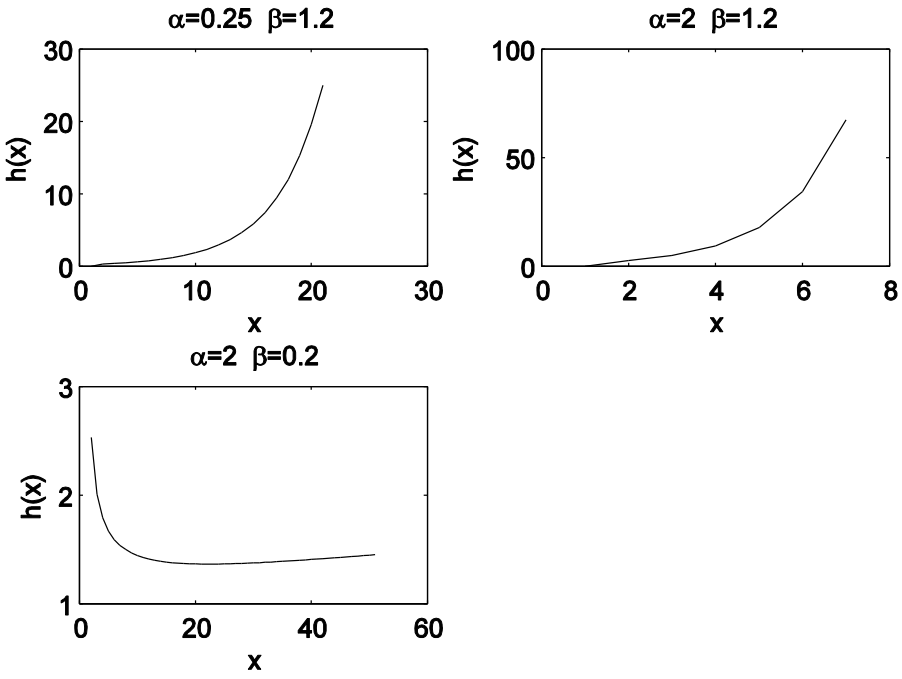
Exponential power dağılımı α ölçek , β şekil parametresine sahip 2 parametreli bir dağılımdır. Bu dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibidir (Smith ve Bain, 1975; Chen, 1999).

$$f(x;\alpha,\beta)=\alpha\beta\exp\left(\alpha(x)^{\beta}\right)\exp\left(1-\exp\alpha(x)^{\beta}\right)x^{\beta-1}, \qquad x>0 \tag{4.35}$$

$$F(x;\alpha,\beta)=1-\exp\left(1-\exp^{\alpha(x)^{\beta}}\right) \tag{4.36}$$

$$h(x;\alpha,\beta)=\exp(\alpha x^{\beta})\alpha\beta x^{(\beta-1)} \tag{4.37}$$

- β≥1 için hazart fonksiyonu artan
- β<1 için hazart fonksiyonu küvet eğrisi şeklindedir.



Şekil 3.3. Exponential Power dağılımı için hazard fonksiyonu grafiği

4.2.1 Exponential Power Dağılımı için En Çok Olabilirlik Tahmini

$X_1, X_2, \ldots X_n$ parametreleri α ve β olan exponential power dağılımdan bir örneklem olsun. Olabilirlik fonksiyonu,

$$L\left(\alpha,\beta\middle|\underset{\sim}{x}\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(\alpha\beta\exp\left(\alpha(x)^{\beta}\right)\exp\left(1-\exp\alpha(x)^{\beta}\right)x^{\beta-1}\right) \tag{4.38}$$

$$= \alpha^n \beta^n \exp \sum_{i=1}^{n} \alpha \left(x_i\right)^{\beta} \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \left(1 - \exp \alpha \left(x_i\right)^{\beta}\right)\right) \prod_{i=1}^{n} x_i^{\beta-1} \tag{4.39}$$

şeklindedir. Log-olabilirlik fonksiyonu ise

$$\ell\left(\alpha, \beta \middle| \underset{-}{x}\right) = n \ln \alpha + n \ln \beta + \sum_{i=1}^{n} \alpha \left(x_i\right)^{\beta} + \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \exp \alpha \left(x_i\right)^{\beta}\right) + \left(\beta - 1\right) \sum_{i=1}^{n} \ln x_i \tag{4.40}$$

α ve β parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri;

$$\frac{\partial \ell\left(\alpha, \beta \middle| \underset{-}{x}\right)}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow -\frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta} + \sum_{i=1}^{n} (-x_i^{\beta} \exp \alpha \left(x_i\right)^{\beta} = 0 \tag{4.41}$$

$$\frac{\partial \ell\left(\alpha, \beta \middle| \underset{-}{x}\right)}{\partial \beta} = 0 \Rightarrow \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) + \sum_{i=1}^{n} \alpha x_i^{\beta} \ln(x_i) + \left(\sum_{i=1}^{n} -\alpha x_i^{\beta} \ln(x_i) \exp \alpha (x_i^{\beta}) \right) = 0 \tag{4.42}$$

biçimindeki Lineer olmayan denklemlerinin Newton-Raphson yöntemi ile çözümü kullanılarak bulunabilir.

4.2.2 Üstel Power Dağılımı için Tierney Kadane yaklaşımı Altında Bayes Tahmini

α ve β parametrelerinin Jefrey önselleri;

$$\pi_1\left(\alpha\right) \propto \left(\frac{1}{\alpha}\right)^c \tag{4.43}$$

$$\pi_2\left(\beta\right) \propto \left(\frac{1}{\beta}\right)^c \tag{4.44}$$

olmak üzere α ve β 'nın ortak önsel fonksiyonu

$$\pi\left(\alpha, \beta\right) \propto \left(\frac{1}{\alpha\beta}\right)^c \tag{4.45}$$

olmak üzere sonsal dağılım aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\pi\left(\alpha,\beta\middle|\underline{x}\right)=\frac{f\left(\underline{x}\middle|\alpha,\beta\right)\pi\left(\alpha,\beta\right)}{f\left(\underline{x}\right)}$$
$$=\frac{k(x_i;\alpha,\beta)(\frac{1}{\alpha\beta})^c}{\int_0^\infty\int_0^\infty k(x_i;\alpha,\beta)(\frac{1}{\alpha\beta})^c d\alpha d\beta} \quad (4.46)$$

Burada;

$$k(x_i;\alpha,\beta)=\alpha^n\beta^n\exp\sum_{i=1}^{n}\alpha\left(x_i\right)^{\beta}\exp\left(\sum_{i=1}^{n}\left(1-\exp\alpha\left(x_i\right)^{\beta}\right)\right)\prod_{i=1}^{n}x_i^{\beta-1} \quad (4.47)$$

biçimindedir. Tierney ve Kadane yaklaşım formülleri

$$l\left(\alpha,\beta\right)=\frac{1}{n}\left\{\rho\left(\alpha,\beta\right)+\ell\left(\alpha,\beta\right)\right\}$$
$$l^*\left(\alpha,\beta\right)=\frac{1}{n}\log u\left(\alpha,\beta\right)+l\left(\alpha,\beta\right) \quad (4.48)$$

şeklindedir. Burada α ve β ' nın herhangi bir fonksiyonu $u\left(\alpha,\beta\right)$ ve $\ell\left(\alpha,\beta\middle|\underline{x}\right)$ (4.37) eşitliğinde verilmiştir. $\rho\left(\alpha,\beta\right)$ ise

$$\rho\left(\alpha,\beta\right)=\ln\left(\Pi\left(\alpha,\beta\right)\right)=-c\ln\left(\alpha\right)-c\ln\left(\beta\right) \quad (4.49)$$

şeklinde tanımlanır. $u(\alpha,\beta)$ fonksiyonunun farklı kayıp fonksiyonları altında bayes tahmin edicileri aşağıdaki gibi elde edilir.

- $u(\alpha,\beta)$ fonksiyonunun linex kayıp fonksiyonu altında tierney kadane yaklaşımı kullanarak bayes tahmin edicisi;

$$\hat{u}_{BL}\left(\alpha,\beta\right)=-\frac{1}{a}\ln E\left[\exp\left(-au\left(\alpha,\beta\right)\right)\middle|\underline{x}\right]$$
$$=-\frac{1}{a}\ln\left[\left(\frac{\det\Sigma_{BL}^*}{\det\Sigma}\right)^{1/2}\exp\left[n\left(l_{BL}^*\left(\hat{\alpha}_{l_{BL}^*},\hat{\beta}_{l_{BL}^*}\right)-l\left(\hat{\alpha}_l,\hat{\beta}_l\right)\right)\right]\right] \quad (4.50)$$

biçimindedir. Burada

$$l_{BL}^*(\alpha,\beta)=\frac{1}{n}\log\left[\exp\left(-au\left(\alpha,\beta\right)\right)\right]+l(\alpha,\beta) \quad (4.51)$$

- $u(\alpha,\beta)$ fonksiyonunun genel entropy kayıp fonksiyonu altında tierney kadane yaklaşımı kullanarak bayes tahmin edicisi;

$$\hat{u}_{BGE}(\alpha,\beta)=\left\{E\left\{\left[u(\alpha,\beta)\right]^{-k}\,|\underline{x}\right\}\right\}^{-\frac{1}{k}}$$

$$=\left[\left(\frac{\det\Sigma^{*}_{BGE}}{\det\Sigma}\right)^{1/2}\exp\left[n\left(l^{*}_{BGE}\left(\hat{\alpha}_{l^{*}_{BGE}},\hat{\beta}_{*_{BGE}}\right)-l\left(\hat{\alpha}_{l},\hat{\beta}_{l}\right)\right)\right]\right]^{-\frac{1}{k}} \tag{4.52}$$

biçimindedir. Burada

$$l^{*}_{BGE}(\alpha,\beta)=\frac{1}{n}\log\left[\left[u(\alpha,\beta)\right]^{-k}\right]+l(\alpha,\beta) \tag{4.53}$$

- $u(\alpha,\beta)$ fonksiyonunun karesel hata kayıp fonksiyonu altında tierney kadane yaklaşımı kullanarak bayes tahmin edicisi;

$$\hat{u}_{BS}(\alpha,\beta)=E\left(u(\alpha,\beta)\middle|\underline{x}\right)=\frac{\int e^{nl^{*}(\alpha,\beta)}d(\alpha,\beta)}{\int e^{nl(\alpha,\beta)}d(\alpha,\beta)}$$

$$=\left(\frac{\det\Sigma^{*}}{\det\Sigma}\right)^{1/2}\exp\left[n\left(l^{*}\left(\hat{\alpha}_{l^{*}},\hat{\beta}_{l^{*}}\right)-l\left(\hat{\alpha}_{l},\hat{\beta}_{l}\right)\right)\right] \tag{4.54}$$

Burada l^{*}(4.48) eşitliğindeki gibidir. $\left(\hat{\alpha}_{\ell^{*}},\hat{\beta}_{\ell^{*}}\right)ve\left(\hat{\alpha}_{\ell},\hat{\beta}_{\ell}\right)$ ise sırasıyla $\ell^{*}(\alpha,\beta)$ ve $\ell(\alpha,\beta)$'nın maximizesidir. Ayrıca Σ^{*} ve Σ sırasıyla $\ell^{*}(\alpha,\beta)$ ve $\ell(\alpha,\beta)$'nin $\left(\hat{\alpha}_{\ell^{*}},\hat{\beta}_{\ell^{*}}\right)$ ve $\left(\hat{\alpha}_{\ell},\hat{\beta}_{\ell}\right)$'deki 2. türevlerinin tersinin negatifini belirtmektedir. Σ aşağıdaki gibidir.

$$\Sigma=\begin{bmatrix}-\partial^{2}\ell/\partial\alpha^{2} & -\partial^{2}\ell/\partial\alpha\partial\beta\\ -\partial^{2}\ell/\partial\alpha\partial\beta & -\partial^{2}\ell/\partial\beta^{2}\end{bmatrix}^{-1} \tag{4.55}$$

l ve kısmi türevleri ise;

$$l(\alpha,\beta)=\frac{1}{n}\begin{bmatrix}n\ln\alpha+n\ln\beta+\sum_{i=1}^{n}\alpha(x_i)^{\beta}+\sum_{i=1}^{n}\left(1-exp\,\alpha(x_i)^{\beta}\right)\\ +(\beta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-c\ln(\alpha)-c\ln(\beta)\end{bmatrix} \tag{4.56}$$

$$\frac{\partial^{2}l}{\partial\alpha^{2}}=\frac{1}{n}\left[-\frac{n}{\alpha^{2}}+\left(\sum_{i=1}^{n}-(x_i\beta)^{2}e^{(\alpha x_i\beta)}\right)+\frac{c}{\alpha^{2}}\right] \tag{4.57}$$

$$\frac{\partial^{2}l}{\partial\alpha\beta}=\frac{1}{n}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\beta\ln(x_i)\right)+\left(\sum_{i=1}^{n}(-x_i\beta\ln(x_i)e^{(\alpha x_i\beta)}-(x_i\beta)^{2}\alpha\ln(x_i)e^{(\alpha x_i\beta)})\right)\right] \tag{4.58}$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \beta^2} = \frac{1}{n}\left[\begin{array}{l} -\frac{n}{\beta^2} + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha x_i \beta \, ln(x_i)^2\right) \\ +\left(\sum_{i=1}^{n} (-\alpha x_i \beta \, ln(x_i)^2 e^{(\alpha x_i \beta)} - \alpha^2 (x_i \beta)^2 \, ln(x_i)^2 e^{(\alpha x_i \beta)})\right) + \frac{c}{\beta^2} \end{array}\right] \tag{4.59}$$

Karesel hata kayıp fonksiyonu altında (4.54) eşitliği'nin Tierney Kadane yaklaşımı kullanarak bayes tahmin edicisi aşağıdaki adımlar izlenerek elde edilir.

$U(\alpha, \beta) = \alpha$ ise;

$$\Sigma_1^* = \begin{bmatrix} -\partial^2 l_1^* / \partial \alpha^2 & -\partial^2 l_1^* / \partial \alpha \partial \beta \\ -\partial^2 l_1^* / \partial \alpha \partial \beta & -\partial^2 l_1^* / \partial \beta^2 \end{bmatrix}^{-1} \tag{4.60}$$

$$\hat{\alpha}_B = \left(\frac{\det \Sigma_1^*}{\det \Sigma}\right)^{1/2} \exp\left[n\left(l_1^*\left(\hat{\alpha}_{l_1^*}, \hat{\beta}_{l_1^*}\right) - l\left(\hat{\alpha}_l, \hat{\beta}_l\right)\right)\right] \tag{4.61}$$

Burada

$$l_1^*(\alpha, \beta) = \frac{1}{n}\log \alpha + l(\alpha, \beta) \tag{4.62}$$

olmak üzere l_1^* ve kısmi türevleri ise aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial^2 l_1^*}{\partial \alpha^2} = \frac{1}{n}\left[-\frac{1}{\alpha^2} - \frac{n}{\alpha^2} + \left(\sum_{i=1}^{n} (-(x_i \beta)^2 e^{(\alpha x_i \beta)})\right) + \frac{c}{\alpha^2}\right] \tag{4.63}$$

$$\frac{\partial^2 l_1^*}{\partial \alpha \beta} = \frac{1}{n}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \beta \, ln(x_i) + \left(\sum_{i=1}^{n}\left(-x_i \beta \, ln(x_i) e^{(\alpha x_i \beta)} - (x_i \beta)^2 \alpha \, ln(x_i) e^{(\alpha x_i \beta)}\right)\right)\right)\right] \tag{4.64}$$

$$\frac{\partial^2 l_1^*}{\partial \beta^2} = \frac{1}{n}\left[\begin{array}{l} -\frac{n}{\beta^2} + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha x_i \beta \, ln(x_i)^2\right) \\ +\left(\sum_{i=1}^{n}\left(-\alpha x_i \beta \, ln(x_i)^2 e^{(\alpha x_i \beta)} - \alpha^2 (x_i \beta)^2 \, ln(x_i)^2 e^{(\alpha x_i \beta)}\right)\right) + \frac{c}{\beta^2} \end{array}\right] \tag{4.65}$$

$U(\alpha, \beta) = \beta$ ise;

$$\Sigma_2^* = \begin{bmatrix} -\partial^2 l_2^* / \partial \alpha^2 & -\partial^2 l_2^* / \partial \alpha \partial \beta \\ -\partial^2 l_2^* / \partial \alpha \partial \beta & -\partial^2 l_2^* / \partial \beta^2 \end{bmatrix}^{-1} \tag{4.66}$$

$$\hat{\beta}_B = \left(\frac{\det \Sigma_2^*}{\det \Sigma}\right)^{1/2} \exp\left[n\left(l_2^*\left(\hat{\alpha}_{l_2^*}, \hat{\beta}_{l_2^*}\right) - l\left(\hat{\alpha}_l, \hat{\beta}_l\right)\right)\right] \tag{4.67}$$

Burada $l_2^*(\alpha, \beta) = \frac{1}{n}\log \beta + l(\alpha, \beta)$ olmak üzere l_2^* ve kısmi türevleri ise aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial^2 l_2^*}{\partial \alpha^2} = \frac{1}{n}\left[-\frac{n}{\alpha^2} + \left(\sum_{i=1}^{n} (-(x_i\beta)^2 e^{(\alpha x_i \beta)}) \right) + \frac{c}{\alpha^2} \right] \tag{4.68}$$

$$\frac{\partial^2 l_2^*}{\partial \alpha \beta} = \frac{1}{n}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \beta \, ln(x_i) + \left(\sum_{i=1}^{n} \left(-x_i \beta \, ln(x_i) e^{(\alpha x_i \beta)} - (x_i\beta)^2 \alpha \, ln(x_i) e^{(\alpha x_i \beta)} \right) \right) \right) \right] \tag{4.69}$$

$$\frac{\partial^2 l_2^*}{\partial \beta^2} = \frac{1}{n}\left[\begin{array}{l} -\frac{1}{\beta^2} - \frac{n}{\beta^2} + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha x_i \beta \, ln(x_i)^2 \right) \\ + \left(\sum_{i=1}^{n} \left(-\alpha x_i \beta \, ln(x_i)^2 e^{(\alpha x_i \beta)} - \alpha^2 (x_i\beta)^2 \, ln(x_i)^2 e^{(\alpha x_i \beta)} \right) \right) + \frac{c}{\beta^2} \end{array} \right] \tag{4.70}$$

Benzer şekilde linex ve genel entropy kayıp fonksiyonu altında bayes tahmin edicileri (4.52) ve (4.54) eşitlikleri kullanılarak hesaplanabilir.

4.2.3 Simulasyon Çalışması

Bu bölümde en çok olabilirlik tahmin edicileri ve jeffrey' in genişletilmiş önseli kullanılarak karesel hata kayıp fonksiyonu, linex kayıp fonksiyonu ve genel entropy kayıp fonksiyonu olan üç farklı kayıp fonksiyonu için yaklaşık bayes tahmin edicileri exponential power dağılımının bilinmeyen parametreleri için Tierney Kadane'in yaklaşım methodu ile elde edilmiştir ve Monte Carlo simulasyonu kullanılarak MSE' leri bakımından karşılaştırılmıştır.

Exponential power dağılımından (α, β) örnek boyutu n=20, 30, 50, 100**,** parametre değerleri $\alpha = 0.7,1$, $\beta = 1,1.3$ ve a,k= ± 0.8, ± 1.2 olarak seçilmiştir. Jeffrey'in genişletilmiş değeri ise c=0.2 alınmıştır. En çok olabilirlik ve bayes tahminleri 10000 denemede MSE'leri bakımından karşılaştırılmıştır. Çizelge 4.3 ve 4.4 incelendiğinde linex kayıp fonksiyonu altında bayes yöntemi ile elde edilen tahminlerin ve MSE'lerin genel entropy ve karesel kayıp fonksiyonu altında elde edilen tahminlerden ve MSE'lerden daha iyi olduğu gözlenmiştir.

Çizelge 4.3. Exponential power dağılımı $a, k \pm 0.8$ değerleri için MLE ve bayes tahmin edicilerinin karşılaştırılması

n	α	c	β	α / β	*ML*	*BS*	*BL*	*BGE*	*ML*	*BS*	*BL*	*BGE*
					$a=k=0.8$				$a=k=-0.8$			
20	0.7	0.2	1	α_{MSE}	0.016553	0.015596	0.005010	0.010877	0.015930	0.014974	0.004774	0.010194
				α_{ME}	0.710072	0.702941	0.697698	0.685564	0.709941	0.702752	0.707992	0.700860
				β_{MSE}	0.055276	0.056603	0.018156	0.013015	0.057174	0.058647	0.018873	0.012982
				β_{ME}	1.083772	1.093626	1.076898	1.058575	1.086770	1.096670	1.115388	1.092796
	1	0.2	1.3	α_{MSE}	0.029522	0.029458	0.009589	0.008184	0.029966	0.030034	0.009422	0.007927
				α_{ME}	1.041847	1.030970	1.022448	1.012331	1.040566	1.029725	1.038128	1.027697
				β_{MSE}	0.093689	0.104625	0.033414	0.013938	0.097066	0.108357	0.034525	0.013682
				β_{ME}	1.408709	1.438600	1.409241	1.392569	1.410533	1.440498	1.472426	1.435414
30	0.7	0.2	1	α_{MSE}	0.010008	0.009574	0.003059	0.006644	0.009984	0.009560	0.003057	0.006550
				α_{ME}	0.705612	0.700755	0.697249	0.689246	0.704354	0.699524	0.703015	0.698262
				β_{MSE}	0.032870	0.033371	0.010678	0.008490	0.033338	0.033890	0.010906	0.008409
				β_{ME}	1.054987	1.060788	1.050289	1.038209	1.058616	1.064419	1.075788	1.061914
	1	0.2	1.3	α_{MSE}	0.016570	0.016318	0.005245	0.004867	0.017560	0.017363	0.005475	0.004882
				α_{ME}	1.025804	1.017755	1.012340	1.005738	1.026443	1.018452	1.023807	1.017133
				β_{MSE}	0.053783	0.057730	0.018585	0.008519	0.055560	0.059858	0.019188	0.008573
				β_{ME}	1.368142	1.385997	1.367940	1.356540	1.373927	1.391997	1.411269	1.388724
50	0.7	0.2	1	α_{MSE}	0.005628	0.005472	0.001748	0.003727	0.005665	0.005505	0.001764	0.003717
				α_{ME}	0.702964	0.700026	0.697914	0.693150	0.703404	0.700461	0.702567	0.699704
				β_{MSE}	0.017254	0.017385	0.005546	0.004845	0.017942	0.018075	0.005791	0.004927
				β_{ME}	1.032408	1.035455	1.029462	1.022999	1.033473	1.036572	1.042868	1.035111
	1	0.2	1.3	α_{MSE}	0.009014	0.008880	0.002849	0.002721	0.008908	0.008793	0.002806	0.002671
				α_{ME}	1.015615	1.010475	1.007311	1.003414	1.013839	1.008702	1.011820	1.007924
				β_{MSE}	0.028952	0.030233	0.009630	0.004923	0.029578	0.030873	0.009882	0.004903
				β_{ME}	1.342303	1.352084	1.341816	1.334913	1.342980	1.352743	1.363384	1.350841
100	0.7	0.2	1	α_{MSE}	0.002704	0.002666	0.000852	0.001788	0.002701	0.002662	0.000852	0.001773
				α_{ME}	0.700848	0.699378	0.698320	0.695953	0.701113	0.699642	0.700698	0.699263
				β_{MSE}	0.007834	0.007863	0.002510	0.002333	0.007815	0.007841	0.002515	0.002316
				β_{ME}	1.017401	1.018758	1.015854	1.012305	1.016905	1.018267	1.021237	1.017551
	1	0.2	1.3	α_{MSE}	0.004276	0.004240	0.001357	0.001336	0.004076	0.004042	0.001293	0.001267
				α_{ME}	1.007035	1.004362	1.002809	1.000882	1.006612	1.003933	1.005472	1.003548
				β_{MSE}	0.013057	0.013335	0.004250	0.002340	0.012685	0.012969	0.004164	0.002249
				β_{ME}	1.320904	1.325391	1.320470	1.317008	1.321803	1.326286	1.331301	1.325356

Çizelge 4.4. Exponential power dağılımı $a, k \pm 1.2$ değerleri için MLE ve bayes tahmin edicilerinin karşılaştırılması

n	α	c	β	α / β	*ML*	*BS*	*BL*	*BGE*	*ML*	*BS*	*BL*	*BGE*
					$a=k=1.2$				$a=k=-1.2$			
20	0.7	0.2	1	α_{MSE}	0.016418	0.015447	0.011151	0.024649	0.016198	0.015237	0.010931	0.023338
				α_{ME}	0.709716	0.702570	0.694743	0.681233	0.709414	0.702266	0.710152	0.704149
				β_{MSE}	0.057703	0.059032	0.042651	0.030563	0.057668	0.059075	0.042848	0.029226
				β_{ME}	1.086990	1.096905	1.071585	1.053797	1.087574	1.097489	1.125660	1.101363
	1	0.2	1.3	α_{MSE}	0.030268	0.030329	0.022687	0.019068	0.031610	0.031816	0.022031	0.018296
				α_{ME}	1.039705	1.028793	1.016067	1.005895	1.041535	1.030774	1.043533	1.032798
				β_{MSE}	0.095344	0.106483	0.076878	0.031985	0.093417	0.104340	0.075446	0.029904
				β_{ME}	1.410399	1.440148	1.396426	1.383762	1.408904	1.438749	1.486899	1.443812
30	0.7	0.2	1	α_{MSE}	0.010062	0.009625	0.006925	0.015050	0.010051	0.009608	0.006919	0.014664
				α_{ME}	0.705950	0.701085	0.695840	0.686976	0.706170	0.701303	0.706566	0.702561
				β_{MSE}	0.032240	0.032748	0.023434	0.018906	0.032593	0.033068	0.023954	0.018416
				β_{ME}	1.054884	1.060747	1.044963	1.033075	1.055020	1.060800	1.077699	1.063290
	1	0.2	1.3	α_{MSE}	0.016654	0.016409	0.011920	0.011080	0.016813	0.016565	0.011827	0.010740
				α_{ME}	1.024872	1.016819	1.008733	1.002086	1.026343	1.018300	1.026335	1.019613
				β_{MSE}	0.056515	0.060773	0.043784	0.020174	0.057391	0.061674	0.044461	0.019817
				β_{ME}	1.375832	1.393786	1.366502	1.357518	1.374944	1.392922	1.421990	1.396188
50	0.7	0.2	1	α_{MSE}	0.005640	0.005481	0.003936	0.008422	0.005685	0.005530	0.003989	0.008395
				α_{ME}	0.703353	0.700409	0.697248	0.691996	0.702445	0.699515	0.702677	0.700271
				β_{MSE}	0.017631	0.017764	0.012788	0.011128	0.017575	0.017705	0.012796	0.010843
				β_{ME}	1.032403	10.03550	1.026475	1.019371	1.033721	1.036781	1.046201	1.038239
	1	0.2	1.3	α_{MSE}	0.009035	0.008889	0.006419	0.006140	0.009035	0.008913	0.006393	0.006082
				α_{ME}	1.016439	1.011302	1.006561	1.002651	1.014385	1.009246	1.013938	1.010022
				β_{MSE}	0.028471	0.029695	0.021290	0.010945	0.029706	0.030990	0.022377	0.011091
				β_{ME}	1.339127	1.348920	1333607	1.327945	1.343112	1.352885	1.368882	1.354785
100	0.7	0.2	1	α_{MSE}	0.002811	0.002769	0.001991	0.004156	0.002694	0.002654	0.001913	0.003955
				α_{ME}	0.701965	0.700491	0.698903	0.696301	0.701676	0.700203	0.701791	0.700582
				β_{MSE}	0.007646	0.007664	0.005492	0.005187	0.007547	0.007569	0.005487	0.005103
				β_{ME}	1.014339	1.015686	1.011355	1.007825	1.015077	1.016421	1.020850	1.017134
	1	0.2	1.3	α_{MSE}	0.004146	0.004103	0.002952	0.002905	0.004227	0.004193	0.003013	0.002942
				α_{ME}	1.008081	1.005403	1.003075	1.001145	1.006529	1.003854	1.006166	1.004238
				β_{MSE}	0.013182	0.013451	0.009664	0.005312	0.012935	0.013203	0.009554	0.005179
				β_{ME}	1.319932	1.324424	1.317058	1.314181	1.320268	1.324759	1.332274	1.325688

4.3 Odd Weibull Dağılımı

Odd Weibull (OW) dağılımı Cooray tarafından 2006 yılında ortaya çıkarılmıştır (Cooray, 2006). Bu dağılımın karakteristik özellikleri ise yine Cooray ve Bourguignon tarafından yaşam zamanı modellerinde sıklıkla kullanılan Weibull ve bu dağılımın genelleştirilmesi ile ilgili literatürde birçok çalışma bulunmaktadır. (Bourguignon ve ark., 2012). Bu çalışmalardan bazıları (Nadarajah ve ark., 2012) ve (Pal ve ark., 2006) 'dır.

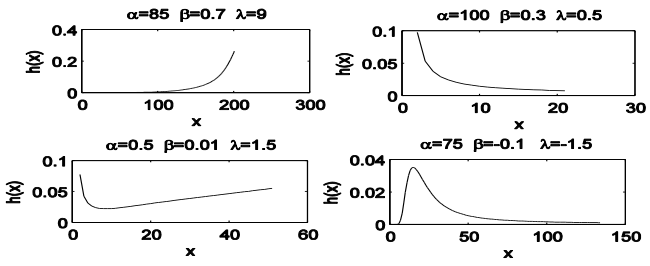
Weibull ve ters weibul dağılımlarının oranlarının dağılımı olarak elde edilmiş ve odd weibull dağılımı olarak isimlendirilmiştir. Bu dağılım, yaşam zamanı verilerini modellemede kullanılabilen önemli bir dağılımdır. α,β and λ parametreli OW dağılımı kısaca $\mathrm{OW}(\alpha,\beta,\lambda)$ şeklinde gösterilir. Odd weibull dağılımının dağılım fonksiyonu, olasılık yoğunluk fonksiyonu ve hazard fonksiyonu aşağıdaki gibidir (Cooray, 2012; C.D., 2014; Cooray, 2015).

$$F(X;\alpha,\beta,\lambda)=1-(1+(e^{(x/\alpha)^{\lambda}}-1)^{\beta})^{-1};0<x<\infty,\ 0<\lambda\beta,\ 0<\alpha \tag{4.71}$$

$$f(x;\alpha,\beta,\lambda)=\left(\frac{\lambda\beta}{x}\right)\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\lambda} e^{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\lambda}}\left(e^{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\lambda}}-1\right)^{\beta-1}\left(1+\left(e^{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\lambda}}-1\right)^{\beta}\right)^{-2} \tag{4.72}$$

$$h(x;\alpha,\beta,\lambda)=\left(\frac{\lambda\beta}{x}\right)\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\lambda} e^{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\lambda}}\left(e^{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\lambda}}-1\right)^{\beta-1}\left[1+\left(e^{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\lambda}}-1\right)^{\beta}\right]^{-1} \tag{4.73}$$

- $\lambda<0,\ \alpha<0$ yada $\lambda<1,\ \lambda\alpha\geq 1,$ h(t) tek tepeli,
- $\lambda>1,\ \lambda\alpha>1,$ h(t) artan,
- $\lambda<1,\ \lambda\alpha<1,$ h(t) azalan,
- $\lambda>1,\ \lambda\alpha\leq 1,$ h(t) küvet şeklindedir.



Şekil 4.1. Odd Weibull dağılımı için hazard fonksiyonu grafiği

4.3.1 Odd Weibull Dağılımı için En Çok Olabilirlik Tahmini

$X_{1,}X_2,...X_n$ parametreleri α,β ve λ olan odd weibull dağılımından bir örneklem olmak üzere olabilirlik fonksiyonunun logaritması (log-likelihood) aşağıdaki gibidir.

$$\ell\left(\alpha,\beta,\lambda\left|\underset{\sim}{x}\right.\right)=n\ln(\lambda)+n\ln(\beta)+\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)\right)+\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)\right)+$$
$$+(\beta-1)\left(\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\left(e^{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)}\right)^{\lambda}-1\right)\right)-2\left(\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\left(\left(e^{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)}\right)^{\lambda}-1\right)^{\beta}\right)\right) \tag{4.74}$$

α,β ve λ parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri;

$$\frac{\partial\ell\left(\alpha,\beta,\lambda\left|\underset{\sim}{x}\right.\right)}{\partial\alpha}=0\Rightarrow-\frac{\lambda(\beta-1)}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}e^{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}}}{\left(e^{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}}-1\right)}\right)-\frac{n\lambda}{\alpha}-\frac{\lambda}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}+$$
$$+2\frac{\lambda\beta}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\left(e^{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}}-1\right)^{\beta-1}\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}e^{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}}}{\left(1+\left(e^{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}}-1\right)^{\beta}\right)}\right)=0 \tag{4.75}$$

$$\frac{\partial \ell\left(\alpha,\beta,\lambda\middle|\underset{\sim}{x}\right)}{\partial\beta}=0\Rightarrow\frac{n}{\beta}+\sum_{i=1}^{n}\ln\left(e^{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}}-1\right)^{\beta}-2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(e^{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}}-1\right)^{\beta}\ln\left(e^{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}}-1\right)}{1+\left(e^{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}}-1\right)}\right)=0 \quad (4.76)$$

$$\frac{\partial \ell\left(\alpha,\beta,\lambda\middle|\underset{\sim}{x}\right)}{\partial\lambda}=0\Rightarrow\frac{n}{\lambda}+(\beta-1)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}\ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)e^{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}}}{\left(e^{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}}-1\right)}\right)+\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}\ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)-$$
$$-2\beta\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\left(e^{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}}-1\right)^{\beta-1}\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}\ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)e^{\left(\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}\right)}}{\left(1+\left(e^{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}}-1\right)^{\beta}\right)}\right)=0 \quad (4.77)$$

lineer olmayan denklemlerinin Newton-Raphson yöntemi ile çözümünden bulunabilir.

4.3.2 Odd Weibull Dağılımı için Tierney Kadane Yaklaşımı Altında Bayes Tahmini

Bu bölümde α, β ve λ parametreleri için karesel kayıp fonksiyonu, linex kayıp fonksiyonu ve genel entropy kayıp fonksiyonu altında bayes tahminleri tierney kadane yaklaşıımı kullanılarak yapılacaktır.

$$\pi_1(\alpha)\propto\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2c} \quad (4.78)$$

$$\pi_2(\beta)\propto\left(\frac{1}{\beta}\right)^{2c} \quad (4.79)$$

$$\pi_3(\lambda)\propto\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{2c} \quad (4.80)$$

Genişletilmiş önsel dağılımlar olmak üzere α, β ve λ parametrelerinin ortak önsel fonksiyonu ve sonsal dağılımı aşağıdaki gibidir.

$$\pi(\alpha,\beta,\lambda) \propto (\frac{1}{\alpha\beta\lambda})^{2c} \tag{4.81}$$

$$\pi\left(\alpha,\beta,\lambda\left|\underset{-}{x}\right.\right)=\frac{f\left(\underset{-}{x}\left|\alpha,\beta,\lambda\right.\right)\pi(\alpha,\beta,\lambda)}{f\left(\underset{-}{x}\right)}$$

$$=\frac{\lambda^n\beta^n\prod_{i=1}^{n}g(x_i,\alpha,\beta,\lambda)\left(\frac{1}{\alpha\beta\lambda}\right)^{2c}}{\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\lambda^n\beta^n\prod_{i=1}^{n}g(x_i,\alpha,\beta,\lambda)\left(\frac{1}{\alpha\beta\lambda}\right)^{2c}d\alpha d\beta d\lambda} \tag{4.82}$$

Burada;

$$g(x_i;\alpha,\beta,\lambda)=\left(\frac{1}{x_i}\right)\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}e^{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}}\left(e^{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}}-1\right)^{\beta-1}\left(1+\left(e^{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}}-1\right)^{\beta}\right)^{-2}$$

biçimindedir. Tierney and Kadane yaklaşım formülleri

$$l(\alpha,\beta)=\frac{1}{n}\{\rho(\alpha,\beta)+\ell(\alpha,\beta)\}$$
$$l^*(\alpha,\beta)=\frac{1}{n}\log u(\alpha,\beta)+l(\alpha,\beta) \tag{4.83}$$

şeklindedir. Burada α ve β ' nın herhangi bir fonksiyonu $u(\alpha,\beta)$ ve $\ell\left(\alpha,\beta\left|\underset{-}{x}\right.\right)$ (4.37) eşitliğinde verilmiştir. $\rho(\alpha,\beta)$ ise

$$\rho(\alpha,\beta)=\ln(\Pi(\alpha,\beta))=-c\ln(\alpha)-c\ln(\beta) \tag{4.84}$$

şeklinde tanımlanır. $u(\alpha,\beta)$ fonksiyonunun farklı kayıp fonksiyonları altında bayes tahmin edicileri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\pi(\alpha,\beta,\lambda)\propto\left(\frac{1}{\alpha\beta\lambda}\right)^{2c} \tag{4.85}$$

$$\rho(\alpha,\beta,\lambda)=\ln(\Pi(\alpha,\beta))=-2c\ln(\alpha)-2c\ln(\beta)-2c\ln(\lambda)$$

(4.86)

i. $u(\alpha,\beta,\lambda)$ fonksiyonunun linex kayıp fonksiyonu altında tierney kadane yaklaşımı kullanarak bayes tahmin edicisi;

$$\hat{u}_{BL}(\alpha,\beta,\lambda) = -\frac{1}{c}\ln E\left[\exp\left(-cu(\alpha,\beta,\lambda)\right)|\underline{x}\right]$$
$$= -\frac{1}{c}\ln\left[\left(\frac{\det\Sigma^*_{BL}}{\det\Sigma}\right)^{1/2}\exp\left[n\left(l^*_{BL}\left(\hat{\alpha}_{l^*_{BL}},\hat{\beta}_{l^*_{BL}},\hat{\lambda}_{l^*_{BL}}\right)-l\left(\hat{\alpha}_l,\hat{\beta}_l,\hat{\lambda}_l\right)\right)\right]\right] \quad (4.87)$$

şeklindedir. Burada

$$l^*_{BL}(\alpha,\beta,\lambda) = \frac{1}{n}\log\left[\exp\left(-cu(\alpha,\beta,\lambda)\right)\right] + l(\alpha,\beta,\lambda) \quad (4.88)$$

ii. $u(\alpha,\beta,\lambda)$ fonksiyonunun genel entropy kayıp fonksiyonu altında tierney kadane yaklaşımı kullanarak bayes tahmin edicisi;

$$\hat{u}_{BGE}(\alpha,\beta,\lambda) = \left\{E\left\{\left[u(\alpha,\beta,\lambda)\right]^{-k}|\underline{x}\right\}\right\}^{-\frac{1}{k}}$$
$$= \left[\left(\frac{\det\Sigma^*_{BGE}}{\det\Sigma}\right)^{1/2}\exp\left[n\left(l^*_{BGE}\left(\hat{\alpha}_{l^*_{BGE}},\hat{\beta}_{*_{BGE}},\hat{\lambda}_{*_{BGE}}\right)-l\left(\hat{\alpha}_l,\hat{\beta}_l,\hat{\lambda}_l\right)\right)\right]\right]^{-\frac{1}{k}} \quad (4.89)$$

Burada

$$l^*_{BGE}(\alpha,\beta,\lambda) = \frac{1}{n}\log\left[\left[u(\alpha,\beta,\lambda)\right]^{-k}\right] + l(\alpha,\beta,\lambda) \quad (4.90)$$

biçimindedir.

iii. $u(\alpha,\beta,\lambda)$ fonksiyonunun karesel hata kayıp fonksiyonu altında tierney kadane yaklaşımı kullanarak bayes tahmin edicisi;

$$\hat{u}_{BS}(\alpha,\beta,\lambda) = E\left(u(\alpha,\beta,\lambda)\middle|\underline{x}\right) = \frac{\int e^{nl^*(\alpha,\beta,\lambda)}d(\alpha,\beta,\lambda)}{\int e^{nl(\alpha,\beta,\lambda)}d(\alpha,\beta,\lambda)}$$
$$= \left(\frac{\det\Sigma^*}{\det\Sigma}\right)^{1/2}\exp\left[n\left(l^*\left(\hat{\alpha}_{l^*},\hat{\beta}_{l^*},\hat{\lambda}_{l^*}\right)-l\left(\hat{\alpha}_l,\hat{\beta}_l,\hat{\lambda}_l\right)\right)\right] \quad (4.91)$$

Burada l^*(4.83) eşitliğindeki gibidir. $\left(\hat{\alpha}_{l^*},\hat{\beta}_{l^*},\hat{\lambda}_{l^*}\right)$ ve $\left(\hat{\alpha}_l,\hat{\beta}_l,\hat{\lambda}_l\right)$ ise sırasıyla $\ell^*\left(\alpha,\beta,\lambda\right)$ ve $\ell\left(\alpha,\beta,\lambda\right)$' nın maximizesidir. Σ^* ve Σ sırasıyla $l^*\left(\alpha,\beta,\lambda\right)$ ve $l\left(\alpha,\beta,\lambda\right)$' nın $\left(\hat{\alpha}_{l^*},\hat{\beta}_{l^*},\hat{\lambda}_{l^*}\right)$ ve $\left(\hat{\alpha}_l,\hat{\beta}_l,\hat{\lambda}_l\right)$' daki 2. türevlerinin tersinin negatifini belirtmektedir. Σ aşağıdaki gibidir.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} -\partial^2 l/\partial\alpha^2 & -\partial^2 l/\partial\alpha\partial\beta & -\partial^2 l/\partial\alpha\partial\lambda \\ -\partial^2 l/\partial\alpha\partial\beta & -\partial^2 l/\partial\beta^2 & -\partial^2 l/\partial\beta\partial\lambda \\ -\partial^2 l/\partial\alpha\partial\lambda & -\partial^2 l/\partial\beta\partial\lambda & -\partial^2 l/\partial\lambda^2 \end{bmatrix}^{-1} \quad (4.92)$$

l ve kısmi türevleri ise;

$$l(\alpha,\beta,\lambda)=\frac{1}{n}\left[n\ln(\lambda)+n\ln(\beta)+\lambda\sum_{i=1}^{n}ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}ln(x_i)\right]+$$
$$+\frac{1}{n}\left[(\beta-1)\sum_{i=1}^{n}ln\left(\left(e^{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)}\right)^{\lambda}-1\right)-2\sum_{i=1}^{n}ln\left(1+\left(\left(e^{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)}\right)^{\lambda}-1\right)^{\beta}\right)\right] \quad (4.93)$$
$$+\frac{1}{n}\left[-2c\,ln(\alpha)-2c\,ln(\beta)-2c\,ln(\lambda)\right]$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial\alpha^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(a(x_i;\alpha,\beta,\lambda)\left(\lambda+1+\lambda\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}\right)-\frac{a(x_i;\alpha,\beta,\lambda)\lambda\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}d(x_i;\alpha,\lambda)}{e(x_i;\alpha,\lambda)}\right)+\frac{\lambda}{\alpha^2}$$
$$+\frac{1}{n}\left[(\lambda+1)\sum_{i=1}^{n}r(x_i;\alpha,\lambda)-m(x_i;\alpha,\beta,\lambda)+\frac{2c(x_i;\alpha,\beta,\lambda)}{\alpha^2}\right] \quad (4.94)$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial\alpha\partial\beta}=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}\lambda d(x_i;\alpha,\lambda)}{\alpha e(x_i;\alpha,\lambda)}\right)-t(x_i;\alpha,\beta,\lambda)\right) \quad (4.95)$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial\alpha\partial\lambda}=\sum_{i=1}^{n}\left(\begin{array}{l}\frac{a(x_i;\alpha,\beta,\lambda)}{n}\left(-\alpha\ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)-\frac{\alpha}{\lambda}-\alpha\ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}+\frac{\alpha\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}d(x_i;\alpha,\lambda)\ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)}{e(x_i;\alpha,\lambda)}\right)\\ -\frac{n}{\alpha}+\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}\ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)\lambda}{\alpha}-\frac{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}}{\alpha}\right)-\frac{s(x_i;\alpha,\beta,\lambda)}{n}\end{array}\right) \quad (4.96)$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial\beta^2}=\frac{1}{n}\left(-\frac{n}{\beta^2}-2\sum_{i=1}^{n}\left(h(x_i;\alpha,\beta,\lambda)-\frac{h^2(x_i;\alpha,\beta,\lambda)}{\ln\left(e^{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}}-1\right)^2}\right)+\frac{2c}{\beta^2}\right) \quad (4.97)$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial\beta\partial\lambda}=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}\ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)d\left(x_i;\alpha,\lambda\right)}{e\left(x_i;\alpha,\lambda\right)}-u\left(x_i;\alpha,\beta,\lambda\right)\right) \tag{4.98}$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial\lambda^2}=\frac{1}{n}\left[-\frac{n}{\lambda^2}+\sum_{i=1}^{n}\left(c\left(x_i;\alpha,\beta,\lambda\right)\left(1+\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}-\frac{c\left(x_i;\alpha,\beta,\lambda\right)}{(\beta-1)\ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^2}\right)\right)\right] \tag{4.99}$$
$$+\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}\ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^2-p\left(x_i;\alpha,\beta,\lambda\right)+\frac{2c}{\lambda^2}\right]$$

Burada;

$$a\left(x_i;\alpha,\beta,\lambda\right)=\frac{(\beta-1)\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}\lambda e^{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}}}{\alpha^2\left(e^{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}}-1\right)},\qquad b\left(x_i;\alpha,\beta,\lambda\right)=\frac{\left(e^{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}}-1\right)^{\beta}\beta\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}\lambda e^{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}}}{\alpha^2\left(e^{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}}-1\right)\left(1+\left(e^{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}}-1\right)^{\beta}\right)}$$

$$c\left(x_i;\alpha,\beta,\lambda\right)=\frac{(\beta-1)\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}\ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^2 e^{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}}}{\left(e^{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}}-1\right)},\quad d\left(x_i;\alpha,\lambda\right)=e^{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}},e\left(x_i;\alpha,\lambda\right)=\left(e^{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}}-1\right)$$

$$r\left(x_i;\alpha,\lambda\right)=\frac{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}\lambda}{\alpha^2},\ g\left(x_i;\alpha,\beta,\lambda\right)=\left(1+\left(e^{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}}-1\right)^{\beta}\right)$$

$$h\left(x_i;\alpha,\beta,\lambda\right)=\frac{\left(e^{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}}-1\right)^{\beta}\ln\left(e^{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}}-1\right)^2}{1+\left(e^{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}}-1\right)^{\beta}}$$

$$k\left(x_i;\alpha,\beta,\lambda\right)=\frac{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}\ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)e^{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}}}{\left(e^{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}}-1\right)}$$

$$m(x_i;\alpha,\beta,\lambda)=2\sum_{i=1}^{n}b(x_i;\alpha,\beta,\lambda)\left[\frac{\beta\lambda\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}d(x_i;\alpha,\lambda)}{e(x_i;\alpha,\lambda)}+\left(\lambda+1+\lambda\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}\right)\right]$$

$$-2\sum_{i=1}^{n}b(x_i;\alpha,\beta,\lambda)\left[\frac{\lambda\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}d(x_i;\alpha,\lambda)}{e(x_i;\alpha,\lambda)}+b(x_i;\alpha,\beta,\lambda)\alpha^2\right]$$

$$t(x_i;\alpha,\beta,\lambda)=2\sum_{i=1}^{n}b(x_i;\alpha,\beta,\lambda)\left[-\alpha\ln\left(e(x_i;\alpha,\lambda)\right)-\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha e^{\beta}(x_i;\alpha,\lambda)\ln e\left((x_i;\alpha,\lambda)\right)}{g(x_i;\alpha,\beta,\lambda)}\right]$$

$$s(x_i;\alpha,\beta,\lambda)=2\sum_{i=1}^{n}b(x_i;\alpha,\beta,\lambda)\left[-\alpha\beta k(x_i;\alpha,\beta,\lambda)-\alpha\ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)-\frac{\alpha}{\lambda}-\alpha\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}\ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)\right]$$

$$+2\sum_{i=1}^{n}b(x_i;\alpha,\beta,\lambda)\left[\alpha k(x_i;\alpha,\beta,\lambda)+\frac{b(x_i;\alpha,\beta,\lambda)\alpha\ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)}{\lambda}\right]$$

$$u(x_i;\alpha,\beta,\lambda)=2\sum_{i=1}^{n}b(x_i;\alpha,\beta,\lambda)\left[\frac{\alpha^2\ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)\ln\left(e(x_i;\alpha,\lambda)\right)}{\lambda}+\frac{\alpha^2\ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)}{\lambda\beta}\right]$$

$$-2\sum_{i=1}^{n}b(x_i;\alpha,\beta,\lambda)\left[\frac{\alpha^2e^{\beta}(x_i;\alpha,\lambda)\ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)\ln\left(e(x_i;\alpha,\lambda)\right)}{\lambda g(x_i;\alpha,\beta,\lambda)}\right]$$

$$p(x_i;\alpha,\beta,\lambda)=2\sum_{i=1}^{n}b(x_i;\alpha,\beta,\lambda)\left[\frac{\beta\lambda\ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^2e^{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}}\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}}{\lambda e(x_i;\alpha,\lambda)}+\frac{\alpha^2\ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^2}{\lambda}\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha^2\ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^2\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\lambda}}{\lambda}\right]$$

$$-2\sum_{i=1}^{n}b(x_i;\alpha,\beta,\lambda)\left[\frac{\alpha^2}{\lambda}+\frac{b(x_i;\alpha,\beta,\lambda)\alpha^2\ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^2}{\lambda^2}\right]$$

şeklindedir. Karesel hata kayıp fonksiyonu altında Tierney Kadane yaklaşımı kullanarak elde edilen bayes tahmin edicileri aşağıdaki gibidir.

i. Eğer $u(\alpha,\beta,\lambda)=\alpha$ ise

$$\Sigma_1^*=\begin{bmatrix} -\partial^2 l_1^*/\partial\alpha^2 & -\partial^2 l_1^*/\partial\alpha\partial\beta & -\partial^2 l_1^*/\partial\alpha\partial\lambda \\ -\partial^2 l_1^*/\partial\alpha\partial\beta & -\partial^2 l_1^*/\partial\beta^2 & -\partial^2 l_1^*/\partial\beta\partial\lambda \\ -\partial^2 l_1^*/\partial\alpha\partial\lambda & -\partial^2 l_1^*/\partial\beta\partial\lambda & -\partial^2 l_1^*/\partial\lambda^2 \end{bmatrix}^{-1} \tag{4.100}$$

olmak üzere

$$\hat{\alpha}_{B}=\left(\frac{\det\Sigma_1^*}{\det\Sigma}\right)^{1/2}\exp\left[n\left(l_1^*\left(\hat{\alpha}_{l_1^*},\hat{\beta}_{l_1^*},\hat{\lambda}_{l_1^*}\right)-l\left(\hat{\alpha}_l,\hat{\beta}_l,\hat{\lambda}_l\right)\right)\right] \tag{4.101}$$

şeklindedir. Burada $l_1^*(\alpha,\beta,\lambda)=\frac{1}{n}\log\alpha+l(\alpha,\beta,\lambda)$ ve l_1^*' ın kısmi türevleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 l_1^*}{\partial\alpha^2}=-\frac{1}{n\alpha^2}+\frac{\partial^2 l}{\partial\alpha^2},\ \frac{\partial^2 l_1^*}{\partial\alpha\partial\beta}=\frac{\partial^2 l}{\partial\alpha\partial\beta},,\ \frac{\partial^2 l_1^*}{\partial\alpha\partial\lambda}=\frac{\partial^2 l}{\partial\alpha\partial\lambda} \\ &\frac{\partial^2 l_1^*}{\partial\beta^2}=\frac{\partial^2 l}{\partial\beta^2},\ \frac{\partial^2 l_1^*}{\partial\beta\partial\lambda}=\frac{\partial^2 l}{\partial\beta\partial\lambda},\ \frac{\partial^2 l_1^*}{\partial\lambda^2}=\frac{\partial^2 l}{\partial\lambda^2} \end{aligned} \tag{4.102}$$

ii. Eğer $u(\alpha,\beta,\lambda)=\beta$ ise

$$\Sigma_2^*=\begin{bmatrix} -\partial^2 l_2^*/\partial\alpha^2 & -\partial^2 l_2^*/\partial\alpha\partial\beta & -\partial^2 l_2^*/\partial\alpha\partial\lambda \\ -\partial^2 l_2^*/\partial\alpha\partial\beta & -\partial^2 l_2^*/\partial\beta^2 & -\partial^2 l_2^*/\partial\beta\partial\lambda \\ -\partial^2 l_2^*/\partial\alpha\partial\lambda & -\partial^2 l_2^*/\partial\beta\partial\lambda & -\partial^2 l_2^*/\partial\lambda^2 \end{bmatrix}^{-1} \tag{4.103}$$

olmak üzere

$$\hat{\beta}_{B}=\left(\frac{\det\Sigma_2^*}{\det\Sigma}\right)^{1/2}\exp\left[n\left(l_2^*\left(\hat{\alpha}_{l_2^*},\hat{\beta}_{l_2^*},\hat{\lambda}_{l_2^*}\right)-l\left(\hat{\alpha}_l,\hat{\beta}_l,\hat{\lambda}_l\right)\right)\right] \tag{4.104}$$

biçimindedir. Burada $l_2^*(\alpha,\beta,\lambda)=\frac{1}{n}\ln\beta+l(\alpha,\beta,\lambda)$, ve l_2^*' ın kısmi türevleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 l_2^*}{\partial\alpha^2}=\frac{\partial^2 l}{\partial\alpha^2},\ \frac{\partial^2 l_2^*}{\partial\alpha\partial\beta}=\frac{\partial^2 l}{\partial\alpha\partial\beta},,\ \frac{\partial^2 l_2^*}{\partial\alpha\partial\lambda}=\frac{\partial^2 l}{\partial\alpha\partial\lambda}, \\ &\frac{\partial^2 l_2^*}{\partial\beta^2}=-\frac{l}{n\beta^2}+\frac{\partial^2 l}{\partial\beta^2},\ \frac{\partial^2 l_2^*}{\partial\beta\partial\lambda}=\frac{\partial^2 l}{\partial\beta\partial\lambda},\ \frac{\partial^2 l_2^*}{\partial\lambda^2}=\frac{\partial^2 l}{\partial\lambda^2} \end{aligned} \tag{4.105}$$

iii. Eğer $u(\alpha,\beta,\lambda)=\lambda$ ise

$$\Sigma_3^* = \begin{bmatrix} -\partial^2 l_3^* / \partial\alpha^2 & -\partial^2 l_3^* / \partial\alpha\partial\beta & -\partial^2 l_3^* / \partial\alpha\partial\lambda \\ -\partial^2 l_3^* / \partial\alpha\partial\beta & -\partial^2 l_3^* / \partial\beta^2 & -\partial^2 l_3^* / \partial\beta\partial\lambda \\ -\partial^2 l_3^* / \partial\alpha\partial\lambda & -\partial^2 l_3^* / \partial\beta\partial\lambda & -\partial^2 l_3^* / \partial\lambda^2 \end{bmatrix}^{-1} \tag{4.106}$$

olmak üzere

$$\hat{\lambda}_{B} = \left(\frac{\det \Sigma_3^*}{\det \Sigma} \right)^{1/2} \exp\left[n\left(l_3^*\left(\hat{\alpha}_{l_3^*}, \hat{\beta}_{l_3^*}, \hat{\lambda}_{l_3^*} \right) - l\left(\hat{\alpha}_l, \hat{\beta}_l, \hat{\lambda}_l \right) \right) \right] \tag{4.107}$$

şeklinde elde edilir. Burada $l_3^*(\alpha,\beta,\lambda) = \frac{1}{n} ln\lambda + l(\alpha,\beta,\lambda)$, ve l_3^*' ın kısmi türevleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 l_3^*}{\partial\alpha^2} = \frac{\partial^2 l}{\partial\alpha^2}, \ \frac{\partial^2 l_3^*}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{\partial^2 l}{\partial\alpha\partial\beta}, , \ \frac{\partial^2 l_3^*}{\partial\alpha\partial\lambda} = \frac{\partial^2 l}{\partial\alpha\partial\lambda} \\ &\frac{\partial^2 l_3^*}{\partial\beta^2} = \frac{\partial^2 l}{\partial\beta^2}, \ \frac{\partial^2 l_3^*}{\partial\beta\partial\lambda} = \frac{\partial^2 l}{\partial\beta\partial\lambda}, \ \frac{\partial^2 l_3^*}{\partial\lambda^2} = -\frac{l}{n\lambda^2} + \frac{\partial^2 l}{\partial\lambda^2} \end{aligned} \tag{4.108}$$

Benzer şekilde linex ve genel entropy kayıp fonksiyonu altında bayes tahmin ediciler (4.87) ve (4.89) eşitlikleri kullanılarak elde edilebilir.

4.3.3 Simulasyon Çalışması

Bu bölümde odd weibull dağılımının bilinmeyen parametreleri için en çok olabilirlik tahmin edicileri ve jeffrey'in genişletilmiş önseli kullanılarak karesel hata kayıp fonksiyonu, linex kayıp fonksiyonu ve genel entropy kayıp fonksiyonu altında Tierney Kadane'in yaklaşım methodu kullanılarak elde edilen yaklaşık bayes tahmin edicileri, Monte Carlo simulasyonu kullanılarak MSE' leri bakımından karşılaştırılmıştır.

(α,β,λ) parametreli Odd Weibull dağılımında örnek boyutu n=20, 30, 50, 100, 200, 300 ve parametre değerleri $\alpha = 0.8$, $\beta = 0.9$, $\lambda = 0.9$ ve a= ± 0.6, k= ± 0.7 olarak seçilmiştir. Jeffrey'in genişletilmiş değeri ise c=0.2 alınmıştır. En çok olabilirlik ve bayes tahminleri 5000 denemede MSE' leri bakımından karşılaştırılmıştır. Çizelge 4.5 incelendiğinde linex kayıp fonksiyonu altında bayes yöntemi ile elde edilen tahminlerin ve MSE'lerin genel entropy ve karesel kayıp fonksiyonu altında elde edilen tahminlerden ve MSE'lerden daha iyi olduğu gözlenmiştir.

Çizelge 4.5. Odd Weibull Dağılımı için MLE ve bayes tahmin edicilerinin karşılaştırılması

n	α	β	λ	c	α	*ML*	*BS*	*BGE*	*BL*	*ML*	*BS*	*BGE*	*BL*
					β								
					λ	$a=0.6,\ k=0.7$				$a=-0.6,\ k=-0.7$			
20	0.8	0.9	0.9	1.2	α_{MSE}	0.056993	0.052061	0.042135	0.008982	0.055242	0.057583	0.040310	0.011440
					α_{ME}	0.848677	0.753180	0.643798	0.710663	0.828297	0.719492	0.701688	0.718740
					β_{MSE}	0.337251	0.140362	0.039835	0.011113	0.130606	0.132681	0.042521	0.024298
					β_{ME}	0.878099	1.010556	0.716122	0.803222	0.842965	0.953636	0.887418	0.938060
					λ_{MSE}	0.196869	0.105310	0.020326	0.012675	0.193916	0.100542	0.018941	0.022220
					λ_{ME}	1.118564	1.050941	0.873876	0.944013	0.121493	1.043220	1.014292	1.082455
30	0.8	0.9	0.9	1.2	α_{MSE}	0.038276	0.038924	0.020073	0.006575	0.038672	0.039674	0.019035	0.007198
					α_{ME}	0.822556	0.774928	0.718556	0.747657	0.818891	0.772245	0.762191	0.773731
					β_{MSE}	0.123544	0.146290	0.034810	0.013611	0.111581	0.135004	0.034933	0.024296
					β_{ME}	0.859876	0.980237	0.779564	0.837260	0.852383	0.977016	0.930446	0.977247
					λ_{MSE}	0.159773	0.101456	0.022658	0.015155	0.151417	0.096225	0.018894	0.019211
					λ_{ME}	1.080843	1.025353	0.901474	0.953671	1.081906	1.025668	1.005104	1.050287
50	0.8	0.9	0.9	1.2	α_{MSE}	0.023045	0.024479	0.009898	0.004093	0.023721	0.024970	0.009737	0.004429
					α_{ME}	0.814023	0.799825	0.767196	0.782899	0.820720	0.806150	0.800113	0.807360
					β_{MSE}	0.094720	0.126875	0.024971	0.013510	0.087204	0.116683	0.027470	0.020976
					β_{ME}	0.888367	0.993350	0.859452	0.898431	0.876753	0.980600	0.952173	0.988651
					λ_{MSE}	0.096136	0.070614	0.019335	0.012120	0.099015	0.073146	0.016708	0.013737
					λ_{ME}	1.011117	0.969815	0.891317	0.927324	1.019616	0.977419	0.964573	0.990071
100	0.8	0.9	0.9	1.2	α_{MSE}	0.011896	0.012998	0.004638	0.002215	0.011363	0.012552	0.004494	0.002221
					α_{ME}	0.813020	0.813676	0.797942	0.805921	0.812839	0.813381	0.810502	0.814637
					β_{MSE}	0.055663	0.076689	0.015249	0.010371	0.056328	0.077070	0.017272	0.013797
					β_{ME}	0.905245	0.974713	0.907042	0.930805	0.901439	0.970368	0.956909	0.979443
					λ_{MSE}	0.044097	0.037887	0.011978	0.006924	0.046791	0.040033	0.011185	0.007319
					λ_{ME}	0.949985	0.921248	0.881254	0.901806	0.957056	0.928140	0.921483	0.934159
200	0.8	0.9	0.9	1.2	α_{MSE}	0.005846	0.006237	0.002311	0.001101	0.005642	0.006031	0.002220	0.001081
					α_{ME}	0.803885	0.806090	0.799015	0.803146	0.805717	0.807922	0.806651	0.809044
					β_{MSE}	0.028487	0.035868	0.008378	0.005767	0.028511	0.035813	0.008819	0.006451
					β_{ME}	0.904736	0.942881	0.912205	0.926224	0.905037	0.943210	0.937451	0.949276
					λ_{MSE}	0.020566	0.019358	0.006229	0.003529	0.020576	0.019375	0.005879	0.003510
					λ_{ME}	0.923765	0.905178	0.885808	0.896831	0.923184	0.904595	0.901281	0.908259
300	0.8	0.9	0.9	1.2	α_{MSE}	0.003820	0.004013	0.001492	0.000714	0.003721	0.003907	0.001451	0.000702
					α_{ME}	0.803852	0.805631	0.801151	0.903945	0.803081	0.804831	0.804034	0.805705
					β_{MSE}	0.018482	0.021840	0.005537	0.003702	0.018597	0.021872	0.005776	0.003954
					β_{ME}	0.903042	0.928829	0.909561	0.919547	0.901422	0.927165	0.923645	0.931572
					λ_{MSE}	0.013122	0.012681	0.004027	0.002300	0.013479	0.013004	0.003988	0.002350
					λ_{ME}	0.915469	0.901830	0.889230	0.896766	0.916493	0.902831	0.900654	0.905594

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Bu tez çalışmasında Weibull, Exponential Power ve Odd weibull dağılımlarının bilinmeyen parametreleri için en çok olabilirlik (ML) tahmini ve farklı kayıp fonksiyonları altında yaklaşık bayes tahmin edicilerinin karşılaştırılması problemi üzerinde durulmuştur. Karesel hata, linex ve genel entropy kayıp fonksiyonları altında, jeffrey' in genişletilmiş önseli ve Tierney Kadane'in yaklaşım methodu kullanılarak bayes tahmin edicileri elde edilmiştir.

Bu dağılımlar farklı örneklem boyutları için, ML ve Bayes tahmin edicileri Monte Carlo simulasyonu kullanılarak MSE' leri bakımından karşılaştırılmıştır ve sonuç olarak örneklem sayısı arttıkça, hem EÇO hem de bayes tahmin edicilerinin MSE değerlerinde azalma olduğu tespit edilmiştir.

Her üç dağılım için de linex kayıp fonksiyonları altında elde edilen yaklaşık bayes tahmin edicilerinin performanslarının, diğer tahmin edicilere göre daha iyi olduğu sonucuna varılmıştır.

5.2 Öneriler

Sonraki çalışmalarda sansürlü örneklem kullanarak MSE ölçütüne göre farklı kayıp fonksiyonları altında farklı dağılımlar için Lindley ve Tierney-Kadane yaklaşımları yardımıyla bayes tahmini ve en çok olabilirlik tahmini konusu çalışılabilir.

KAYNAKLAR

Ahmed, A. O. M., Ibrahim, N. A., Arasan, J. ve Adam, M. B., 2011, Extension of Jeffreys's prior estimate for Weibull censored data using lindley's approximation, *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, 5 (12), 884-889.

Akdi, Y., 2005, Matematiksel İstatistiğe Giriş, *Kızılay - ANKARA*, Bıçaklar, p.183-314.

Alkutubi, H. S., AlShemmary, E. N. A., Yasseen, S. a. ve Alwan, Y. H., 2012, New Bayes Estimator of Parameter Weibull Distribution Using Simulation Study, *International Journal of Basic and Applied Sciences*, 1 (3), 237-243.

Berger, J. O., 1985, Theory and Bayes Analysis Second Edition, *Newyork-USA*, Springer -Verlag p.

Bourguignon, M., Silva, R. B. ve Cordeiro, G. M., 2012, The Weibull-G Family of Probability Distributions, *Journal of Data Science*, 12, 53-68.

C.D., L., 2014, Generalized Weibull Distributions, *London*, Springer, p. 63-65.

Calabria, R. ve Pulcinia, G., 1996, Point estimation under asymmetric loss functions for left-truncated exponential samples, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 25 (3), 585-600.

Cerit, D. D. C. ve Yüksel, Y. D. D. M., 1997, Matematik İstatistik, İstanbul, p. 5-7.

Chen, Z., 1999, Statistical inference about the shape parameter of the exponential power distribution, *Statistical Papers*, 40 (4), 459-468.

Cooray, K., 2006, Generalization of theWeibull distribution: the odd Weibull family, *Statistical Modelling*, 6, 265–277.

Cooray, K., 2012, Analyzing grouped, censored, and truncated data using the odd weibull family, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 41 (15), 2661-2680.

Cooray, K., 2015, A study of moments and likelihood estimators of the odd Weibull distribution, *Statistical Methodology*, 26, 72-83.

H.A., R., 2011, Comparison of the Bayesian Estimations under Different Loss Function and Maximum Likelihood Estimation for Rayleigh Distribution, *Conference Paper*, 22 (6), 211-218.

James, W. ve Stein, C., 1992, Estimation with Quadratic Loss, In: Breakthroughs in Statistics: Foundations and Basic Theory, Eds: Kotz, S. ve Johnson, N. L., *New York, NY*: Springer New York, p. 443-460.

Jasim, W. A. L., 2010, Bayes Estimator of one parameter Gamma distribution under Quadratic and Linex Loss Function, *Iraqi Journal of Statistical Science*, 16, 13-28.

Jeffreys, H., 1962, Theory of Probability, Oxford at the Clarendon Press, p.

Nadarajah, S., Cordeiro, G. M. ve Ortega, E. M. M., 2012, The exponentiated Weibull distribution: a survey, *Statistical Papers*, 54 (3), 839-877.

Öztürk, F., 2011, Olasılık ve İstatistiğe Giriş, *Beşevler-Ankara*, Gazi, p. 3.

Pal, M., Ali, M. M. ve Woo, J., 2006, Exponentiated Weibull Distribution, *Statistica*, 66 (2), 139.

Pandey, B. N., Dwivedi, N. ve Bandyopadhyay, P., 2011 Comparison Between Bayesian and Maximum Likelihood Estimation of Scale Parameter İn Weibull Distribution with Known Shape Under Linex Loss Function, *Journal of Scientific Research*, 55, 163-172.

Parsian, A. ve Nematollahi, N., 1996, Estimation of scale parameter under entropy loss function, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 52 (1), 77-91.

Ramachandran, K. M. ve Tsokos, C. P., 2009, Mathematical Statistics with Applications, *Burlington - U.S.A.*, Academic Press, p. 235.

Rasheed, H. A. ve Sultan, A. J., 2015, Bayesian Estimation of the Scale Parameter for Inverse Gamma Distribution under Linex Loss Function, *International Journal of Advanced Research*, 3 (2), 369-375.

Schiibe, H., 1991, Bayes Estimates under Asymmetric Loss, *Ieee Transactions On Reliability*, 40 (1), 63-67.

Schrijver, A., 1998, Theory of linear and integer programming, *England*, John Wiley & Sons, p. 4-7.

Shao, J., 2010, Mathematical statistics, *Madison - USA*, Springer, p. 231.

Smith, R. M. ve Bain, L. J., 1975, An exponential power life-testing distribution, *Communications in Statistics*, 4 (5), 469-481.

Tierney, L. ve Kadane, J. B., 1986, Accurate Approximations for Posterior Moments and Marginal Densities, *Journal of the American Statistical Association*, 81 (393), 82-86.

Tucker, H. G. ve Boas, R. P., 1962, An Introduction to Probability and Mathematical Statistics *Newyork - U.S.A.*, Academic Press, p. 121-123.

Varian, H. R., 2000, Variants in Economic Theory, *Norhampton-USA*, Edward Elgar, p. 143-146.

Zellner, A., 1986, Bayesian estimation and prediction using asymmetric loss functions, *Journal of the American Statistical Association*, 81 (394), 446-451.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Gülcan GENCER
Uyruğu	**:**	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Kırşehir-18.09.1988
Telefon	**:**	5453002217
Faks	**:**	
e-mail	**:**	gulcankayapa@kmu.edu.tr

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Karaman Yunuskent Lisesi	2005
Üniversite	:	Selçuk Üniversitesi	2011
Yüksek Lisans	:	Selçuk Üniversitesi	

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2012-halen	Karamanoğlu Mehmetbey Üni.	Bilgisayar İşletmeni

UZMANLIK ALANI

YABANCI DİLLER

BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

YAYINLAR