




**T.C.**

**SELÇUK ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# PADOVAN VE PERRİN SAYILARININ MATRİS TEMSİLLERİ

**Nazmiye YILMAZ**

**DOKTORA TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Aralık-2015**
**KONYA**
**Her Hakkı Saklıdır**

# ÖZET

## DOKTORA TEZİ

## PADOVAN VE PERRİN SAYILARININ MATRİS TEMSİLLERİ

**Nazmiye YILMAZ**

**Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**
**Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman: Doç. Dr. Necati TAŞKARA**

**2015, 108 Sayfa**

**Jüri**
**Doç. Dr. Necati TAŞKARA**
**Prof. Dr. Durmuş BOZKURT**
**Prof. Dr. Galip OTURANÇ**
**Doç. Dr. Bünyamin AYDIN**
**Doç. Dr. Ahmet ERDOĞAN**

Son yıllarda bilim dünyasının ilgisini çeken, sanat ve mimari gibi birçok alanda karşımıza çıkan Fibonacci, Lucas, Pell, Padovan ve Perrin sayı dizileri ile ilgili çok çalışmalar vardır. Fibonacci sayılarının önemli olmasının sebeplerinden biri de bilindiği üzere ardışık iki Fibonacci(Lucas) sayısının oranının limitinin Altın Oran olmasıdır. Benzer şekilde ardışık iki Padovan(Perrin) sayısının oranı da "Plastic Constant" diye bilinen plastik orana yakınsar. Bu Plastik oran ilk defa 1924 de Gerard Cordonnier tarafından ortaya atılmıştır ve mimaride, sanatta uygulamaları verilmiştir.

Bu çalışmada Plastik orana sahip olan Padovan ve Perrin sayı dizilerinin başlangıç şartları $3\times3$ tipinde matrisler alınarak bu matris dizilerinin çeşitli özellikleri incelenecektir. Bu matris dizilerinin negatif indisli olanları tanımlanarak onların özellikleri de ayrıca verilecektir.

Bunların yanında bu matris dizilerinin binomial dönüşümleri verilecek ve bu dönüşümlerin sağladığı özdeşlikler matrislerin bazı özelliklerini kullanarak araştırılacaktır. Daha sonra bu binomial dönüşüm, matris dizilerine tekrarlanan bir şekilde uygulanacak ve farklı bir bakış açısıyla matris dizilerinin binomial dönüşümü genelleştirilmiş olacaktır.

**Anahtar Kelimeler:** binomial dönüşüm, Cordonnier sayıları, matris, Padovan sayıları, Perrin sayıları, Plastik Oran.

# ABSTRACT

## Ph.D THESIS

## THE MATRIX REPRESENTATIONS OF PADOVAN AND PERRIN NUMBERS

**Nazmiye YILMAZ**

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY**
**DOCTOR OF PHILOSOPHY**
**IN MATHEMATICS**

**Advisor: Assoc. Prof. Dr. Necati TASKARA**

**2015, 108 Pages**

**Jury**
**Assoc. Prof. Dr. Necati TASKARA**
**Prof. Dr. Durmus BOZKURT**
**Prof. Dr. Galip OTURANC**
**Assoc. Prof. Dr. Bünyamin AYDIN**
**Assoc. Prof. Dr. Ahmet ERDOGAN**

There are so many studies in the literature that are concernes about Fibonacci, Lucas, Pell, Padovan and Perrin number sequences encountered in many areas of art and architecture and attracted the interesting of the scientific world in recent years. As is known, one of the reasons that Fibonacci numbers are important, the ratio of two consecutive Fibonacci(Lucas) numbers converges to Golden Ratio. In a similar manner, the ratio of two consecutive Padovan(Perrin) numbers converges to plastic ratio that is named "Plastic Constant". This Plastic Constant was firstly defined in 1924 by Gerard Cordonnier. He described applications to architecture and illustrated the use of the Plastic Constant in many buildings.

In this study, the matrix sequences of Padovan and Perrin numbers having to the Plastic Constant will defined with initial conditions are $3\times3$ matrices and examined the properties of their. The matrix sequences with negative indices will introduced and given the properties of their.

In addition to, it will given the binomial transforms of Padovan and Perrin matrix sequences. And, some equalities of these transforms will investigated by using properties of matrices. After that, it will applied iteratly the binomial transforms to Padovan and Perrin matrix sequences and be generalized these transforms of Padovan and Perrin matrix sequences by different perspective.

**Keywords:** binomial transform, Cordonnier numbers, matrix, Padovan numbers, Perrin numbers, Plastic Constant.

# ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Ana Bilim Dalı Öğretim Üyesi Doç. Dr. Necati TAŞKARA yönetiminde yapılarak Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Doktora Tezi olarak sunulmuştur.

Bu tez; 1. Bölüm Giriş bölümü, 2. Bölüm Kaynak Araştırması, 3. Bölüm Temel Kavramlar, 4. Bölüm Padovan ve Perrin matris dizileri, 5. Bölüm Sonuç ve Öneriler, 6. Bölüm Kaynaklar olmak üzere toplam altı bölümden oluşmaktadır.

Çalışmalarım boyunca beni yönlendiren ve desteklerini esirgemeyen danışman hocam Doç. Dr. Necati TAŞKARA'ya, değerli hocalarım Prof. Dr. Durmuş BOZKURT'a ve Doç. Dr. Bünyamin AYDIN'a, ayrıca akademik hayatımdaki desteklerinden ötürü Doç. Dr. Yıldıray KESKİN'e, Doç. Dr. Yasin YAZLIK'a ve çalışma arkadaşlarıma,

Bu günlere gelmemde en büyük paya sahip olan, maddi ve manevi desteklerini eksik etmeyen sevgili anneme, babama ve tüm aileme,

Bu zorlu süreçte bana anlayış gösteren ve varlıklarıyla hayatımı aydınlatan eşim İbrahim ve oğlum Bayram'a,

2211-Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında sağladığı destekten ötürü TÜBİTAK Bilim İnsani Destekleme Daire Başkanlığı birimine,

Son olarak tez çalışmam için 15101004 nolu proje ile destek sağlayan Selçuk Üniversitesi BAP'a

sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Nazmiye YILMAZ
KONYA-2015

# İÇİNDEKİLER

**ÖZET** ..... **iv**

**ABSTRACT** ..... **v**

**ÖNSÖZ** ..... **vi**

**İÇİNDEKİLER** ..... **vii**

**SİMGELER VE KISALTMALAR** ..... **viii**

**1. GİRİŞ** ..... **1**

1.1. Tezin Yapısı ..... 3
1.2. Tezin Amacı ve Önemi ..... 3

**2. KAYNAK ARAŞTIRMASI** ..... **4**

**3. TEMEL KAVRAMLAR** ..... **10**

3.1. Padovan Sayıları ..... 11
3.2. Perrin Sayıları ..... 14
3.3. Binomial Dönüşümler ..... 16

**4. PADOVAN VE PERRİN MATRİS DİZİLERİ VE ÖZELLİKLERİ** ..... **18**

4.1. Padovan ve Perrin Matris Dizileri ..... 18
4.1.1. Matris dizileri arasındaki ilişkiler ..... 33
4.2. Negatif İndisli Padovan ve Perrin Matris Dizileri ..... 45
4.2.1. Negatif indisli matris dizileri arasındaki ilişkiler ..... 60
4.3. Padovan ve Perrin Matris Dizilerinin Binomial Dönüşümleri ..... 72
4.3.1. Binomial dönüşümler arasındaki ilişkiler ..... 81
4.4. Padovan ve Perrin Matris Dizilerinin Tekrarlanan Binomial Dönüşümleri ..... 86
4.4.1. Tekrarlanan binomial dönüşümler arasındaki ilişkiler ..... 96

**5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER** ..... **102**

5.1 Sonuçlar ..... 102
5.2 Öneriler ..... 102

**KAYNAKLAR** ..... **103**

**ÖZGEÇMİŞ** ..... **107**

## SİMGELER VE KISALTMALAR

### Simgeler

| | | |
|---|---|---|
| $\mathbb{Z}^+$ | : | Pozitif tam sayılar |
| $\mathbb{N}$ | : | Doğal sayılar |
| $\mathbb{C}$ | : | Kompleks sayılar |
| $\rho$ | : | Plastik Oran |
| $F_n$ | : | $n$ . Fibonacci sayısı |
| $L_n$ | : | $n$ . Lucas sayısı |
| $P_n$ | : | $n$ . Padovan sayısı |
| $R_n$ | : | $n$ . Perrin sayısı |
| $F_{k,n}$ | : | $n$ . $k$ -Fibonacci sayısı |
| $L_{k,n}$ | : | $n$ . $k$ -Lucas sayısı |
| $\mathcal{F}_n(s,t)$ | : | $(s,t)$-Fibonacci matris dizisinin $n$ . terimi |
| $\mathcal{L}_n(s,t)$ | : | $(s,t)$- Lucas matris dizisinin $n$ . terimi |
| $\mathcal{H}_n(s,t)$ | : | $(s,t)$-genelleştirilmiş matris dizisinin $n$ . terimi |
| $\wp_n(s,t)$ | : | $(s,t)$ -Pell matris dizisinin $n$ . terimi |
| $\ell_n(s,t)$ | : | $(s,t)$ -Pell-Lucas matris dizisinin $n$ . terimi |
| $u_{k,n}$ | : | $k$ -Fibonacci dizisinin binomial dönüşümü |
| $v_{k,n}$ | : | $k$ -Lucas dizisinin binomial dönüşümü |
| $u_{k,n}^{(r)}$ | : | $k$ -Fibonacci dizisinin tekrarlanan binomial dönüşümü |
| $v_{k,n}^{(r)}$ | : | $k$ -Lucas dizisinin tekrarlanan binomial dönüşümü |

| | | |
|---|---|---|
| $\mathcal{P}_n$ | : | Padovan matris dizisinin $n$ . terimi |
| $\mathcal{R}_n$ | : | Perrin matris dizisinin $n$ . terimi |
| $G(t)$ | : | Padovan matris dizisinin üreteç fonksiyonu |
| $H(t)$ | : | Perrin matris dizisinin üreteç fonksiyonu |
| $\mathcal{P}_{-n}$ | : | negatif indisli Padovan matris dizisinin $n$ . terimi |
| $\mathcal{R}_{-n}$ | : | negatif indisli Perrin matris dizisinin $n$ . terimi |
| $g(t)$ | : | negatif indisli Padovan matris dizisinin üreteç fonksiyonu |
| $h(t)$ | : | negatif indisli Perrin matris dizisinin üreteç fonksiyonu |
| $b_n$ | : | Padovan matris dizisinin binomial dönüşümü |
| $c_n$ | : | Perrin matris dizisinin binomial dönüşümü |
| $b(t)$ | : | Padovan matris dizisinin binomial dönüşümünün üreteç fonksiyonu |
| $c(t)$ | : | Perrin matris dizisinin binomial dönüşümünün üreteç fonksiyonu |
| $b_n^{(r)}$ | : | Padovan matris dizisinin $r$ kez tekrarlanan binomial dönüşümü |
| $c_n^{(r)}$ | : | Perrin matris dizisinin $r$ kez tekrarlanan binomial dönüşümü |
| $b(r,\mathrm{t})$ | : | Padovan matris dizisinin $r$ kez tekrarlanan binomial dönüşümünün üreteç fonksiyonu |
| $c(r,\mathrm{t})$ | : | Perrin matris dizisinin $r$ kez tekrarlanan binomial dönüşümünün üreteç fonksiyonu |

# 1. GİRİŞ

İnsanlık tarihi içinde doğanın zor koşullarına karşı verilen yaşam mücadelesi on binlerce yıl sürmüştür. Yapılan aletlerin yaşamı kolaylaştırıcı özelliklerinin kullanılması ve bu sürecin artarak hızlanması ile teknolojik ilerlemeler yaşamı belirlemeye başlamıştır. Bilginin, bunu değerlendirerek ve yargılayarak sonuç elde eden aklın, akıl ve mantığın sonucu ortaya çıkan teknolojinin, birbirini etkileyen ve ilerleme kaydeden bir süreç olduğu görülür. Bilgi bir süreç ve birikim ile elde edilmiş, akıl ile değerlendirilmiş, elde edilen sonuç yeni keşif ve icatların yani yeni aletlerin yapılmasını sağlamıştır. Bunların kullanımı ile yeni güzellikler ve yeni bilgiler elde edilmiştir. Ayrıca, geçen yıllar içinde yapılan çalışmalar, evrenin alelade bir düzen içinde yaratılmadığını, insan aklının alamayacağı kadar sistematik bir ölçü içerisinde yaratıldığını da ortaya koymuştur. Evrenin bu sistemi, kuşkusuz sayılar üzerine oturtulmuştur. Var olan her şey, bir sayıya karşılık gelmektedir. Felsefik boyutta düşünüldüğünde, varoluşun ve doğa yasalarının temelinde de bu sayılar bulunmaktadır. Bu anlamda evrene hakim olan sayıların yasası, kuşkusuz bizleri yaratanın matematik düzenini ortaya koyacaktır. İşte bu düzeni görmemize yardımcı olacak en önemli ipuçlarından biri altın orandır. Sanatta ve matematikte çok kez karşılaşabileceğimiz bu oran, aslında basit bir kural üzerine oturtulmuştur. Fakat gözlemleyebildiğimiz bütün varlık aleminde bu oranın geçerli ve tutarlı olarak göze çarpması, insanları şaşkına çevirecek kadar ciddi bir sistemi ortaya koymaktadır. Evrenin var oluşundan bu yana tutarlı olarak bütün varlıklarda 1,618…′e karşılık gelen bir oranın bulunması, dünyaca ünlü matematikçilerin de hayranlıkla incelediği ve kendi çalışmalarında kullandıkları bir konu alanı olmuştur. Bu şekilde sayı dizilerini incelemek; Toros Dağları'nın kıvrımından, Leanardo da Vinci tarafından yapılan Mona Lisa tablosunun boyu ile eni arasındaki orana, kaşımızla gözümüz arasındaki uzaklığın birbirine oranına, dipten başlayarak uca doğru ilerleyen kıvrımları bulunan deniz kabuğuna, kozalağın içindeki merkez noktadan dışarıya doğru spiral biçiminde uzayan her bir tanenin eğrilik açısına, tıpkı fillerin dişlerindeki sarmal yapılarından, geyiklerin boynuzlarındaki çıkıntılara kadar bizleri saran yalın şeylerin sayısız büyüleyici gizemlerine götürebilmektedir (Kutlu, 2011). Bununla birlikte sayı dizileri, günümüz bilim dünyasında yaklaşım teoride, şifre biliminde, bilgisayar ile grafik çizimlerinde (Mcllroy, 1992), zaman serileri analizinde (Box ve ark, 2008) vb. alanda sıkça kullanılmaktadır.

Son yıllarda araştırmacılar, Altın orana benzer bir oran olan, mimaride ve matematikte oldukça yer alan "Plastik Oran"dan bahsetmektedir. Bu oran $x^3 - x - 1 = 0$ denkleminin tek reel çözümü olup

$$\rho = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} \cong 1,325 \tag{1.1}$$

şeklindedir. Bu sayıyı ilk defa 1924 de Gérard Cordonnier "Plastik Oran" adıyla tanımlamıştır. Cordonnier bu sayının mimarlıktaki uygulamalarını çalışmıştır ve 1958 yılında binalarda ve anıtlarda Plastik oranın kullanımı ile ilgili dersler vermiştir. Ayrıca bu sayının $x^3 - x - 1 = 0$ denklemi, bilim adamlarının yıllardır incelediği Padovan sayı dizilerinin de karakteristik denklemidir. Padovan sayıları ise çağdaş mimar Richard Padovan (1935-) onuruna Stewart (1996) tarafından tanımlanmıştır. Ancak ilk defa 1924'te Fransız asıllı mimarlık öğrencisi Plastik oranı da bulan Gérard Cordonnier tarafından keşfedilmiştir (Padovan, 2002, 2015). Bağımsız olarak Fransız keşiş-mimar Dom Hans Van Der Laan (1904-1991) tarafından yeniden düzenlenmiştir. Cordonnier, Padovan, Van Der Laan ve Stewart ile tarihi ortaklık taşıyan Padovan sayıları Cordonnier sayıları olarak da bilinir.

Teknolojinin hızla ilerlediği günümüzde, matematik ile diğer bilimler arasında bir yakınlaşma doğmuştur. Bu yakınlaşmada matris teorisinin ayrı bir önemi vardır. Çünkü; mühendislik, istatistik ve diğer pek çok alanda matrislerle karşılaşılmaktadır. Bu çalışma, bazı sayı dizilerinin matris dizileri tanımlanarak matris teori ile sayılar teori arasında köprü kurulacak olması sebebiyle oldukça önemlidir.

Bunların yanı sıra binom katsayılar ve onların birçok özellikleri de kombinatoryal teori kapsamında incelenmekte olup son zamanlarda bu katsayıları kullanarak yeni bir bakış açısıyla binomial dönüşüm tanımlanmıştır. Bu binomial dönüşüm, bir dizinin ileri farklarını hesaplamaya yarayan bir dizi dönüşümüdür. Bu dizinin Fibonacci dizisi alınması durumunda ise yeni dizinin adına Fibonacci dizisinin binomial dönüşümü adı verilmiştir ve böylece Fibonacci dizisinin özelliklerine zenginlik katmaya devam edilmiştir. Bu çalışmamızda da farklı dizilerin binomial dönüşümlerini ve onların yeni özelliklerini incelemek ve bunları literatüre kazandırmak oldukça önem arz etmektedir.

## 1.1. Tezin Yapısı

Bu tez; 1. Bölüm Giriş bölümü, 2. Bölüm Kaynak Araştırması, 3. Bölüm Temel Kavramlar, 4. Bölüm Padovan ve Perrin Matris Dizileri, 5. Bölüm Sonuç ve Öneriler, 6. Bölüm Kaynaklar olmak üzere toplam altı bölümden oluşmaktadır.

## 1.2. Tezin Amacı ve Önemi

Padovan ve Perrin sayı dizileri için başlangıç değerleri üçüncü mertebeden matris olan, matris dizilerini tanımlamak ve tanımlanan matris dizilerinin özelliklerini araştırmak bu çalışmanın temel amacıdır. Böylece sayılar teorisi ile matris teorisi arasında farklı bir köprü kurulacak olması, çalışmanın önemini artırmaktadır. Tanımlanacak olan rekürans ilişkili matris dizileri ile Padovan ve Perrin sayı dizisi arasındaki bağlantının kurulması ve kurulacak bu ilişki sayesinde, matris dizilerinin özellikleri araştırılırken aynı zamanda Padovan ve Perrin sayı dizilerinin de bilinen ya da bilinmeyen bazı özellikleri hakkında kolayca bilgi sahibi olunacaktır. Bunların yanında matris dizilerinin binomial dönüşümleri ve bu dönüşümlerin özellikleri araştırılarak matris dizileri farklı bir bakış açısıyla verilecektir.

## 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde, tez çalışmasının hazırlanmasının gerekliliğine işaret eden çalışmalardan söz edilecektir. Öncelikle sayı dizileri ile ilgili yapılan bazı çalışmalar verilmiştir.

**Lucas (1876),** Perrin dizilerini tanımlamış ancak bu dizi daha sonra üzerinde yaptığı çalışmalar nedeniyle Perrin (1899)'in adıyla tanınmıştır.

**Shannon ve Horadam (1971)**, Padovan, Perrin ve Van der Laan sayılarının üreteç fonksiyonlarını elde etmişlerdir.

**Kalman (1982)**, daha önceki çalışmalarda tanımlanan genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin herhangi bir terimini veren bir formül geliştirmiştir.

**Stewart (1996)**, ilk olarak 1924 de Gerard Cordonnier tarafından keşfedilen $\{P_n\}$ Padovan sayılarını geometrik olarak yapışık üçgenlerin spiral sistemleri ile göstermiştir.

**Koshy (2001)**, Fibonacci, Lucas ve benzer sayı dizilerini ve onların özelliklerini kitap halinde literatüre kazandıran yazarlardan biridir.

**Shannon ve ark (2006)**, Padovan, Perrin ve Van der Laan sayılarının aşağıdaki gibi polinom dizilerini tanımlayarak, bu dizilerin farklı özelliklerini ve Fibonacci dizisi ile benzer yönlerini araştırmışlardır. $n > 3$ için, sırasıyla Padovan, Perrin ve Van der Laan polinomları,

$$P_n(x) = x^2 P_{n-2}(x) + P_{n-3}(x), \quad P_1(x) = 1, P_2(x) = x, P_3(x) = x^2 \tag{2.1}$$

$$R_n(x) = x^2 R_{n-2}(x) + R_{n-3}(x), \quad R_1(x) = 0, R_2(x) = 2, R_3(x) = 3x \tag{2.2}$$

$$V_n(x) = x^2 V_{n-2}(x) + V_{n-3}(x), \quad V_1(x) = 1, V_2(x) = 0, V_3(x) = x^2 \tag{2.3}$$

şeklinde verilmiştir.

**Kaygisiz ve Şahin (2011)**, genelleştirilmiş Van der Laan ve Perrin polinomlarını sunarak özelliklerini incelemişlerdir.

**Yazlik ve ark (2013)**, çalışmada ikinci mertebeden herhangi bir fark denkleminin çözümlerinde Padovan sayılarını kullanmışlardır.

**Bilgici (2013)**, Pell-Padovan-benzeri sayıları tanımlayarak bu sayıların bazı özelliklerini incelemiştir.

Literatürde, matrisler ile rekürans ilişkili sayı dizileri arasındaki ilişkilerin kurulduğu ve bu ilişkilerin kullanılarak sayı dizilerinin incelendiği çalışmalar oldukça fazladır. Bu çalışmalardan bazıları aşağıda verilmiştir.

**King (1960)**, yüksek lisans tezinde Fibonacci $Q$ matrisi olarak bilinen

$$Q=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \tag{2.4}$$

matrisi ile Fibonacci sayı dizisi $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ arasında

$$Q^n=\begin{pmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{pmatrix} \tag{2.5}$$

şeklinde bir ilişki elde etmiştir. Bu ilişki sayesinde Fibonacci sayıları için farklı özellikler sunmuştur.

**Silvester (1979)**, King'in (1960) çalışmasındaki $Q$ matrisine benzer olarak

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \tag{2.6}$$

matrisini tanımlamış ve $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi ile arasında

$$A^n\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_n\\ F_{n+1}\end{pmatrix} \tag{2.7}$$

bağıntısını sunmuştur. Bu bağıntıdan hareketle, Fibonacci sayıları için özellikler elde etmiştir.

**Er (1984)**, genelleştirilmiş *k*-mertebeli Fibonacci sayılarının *k*-dizilerini tanımlamış ve bunun matris gösteriminin özelliklerini ispatlamıştır. Ayrıca bu matris temsillerinden hareketle, Fibonacci sayıları için toplam formülleri elde etmiştir.

**Karaduman (2004)**, genelleştirilmiş *k*-mertebeli Fibonacci sayılarının *k*-dizileri ve matris gösterimi ile ilgili bazı ilişkiler elde etmiştir.

**Koken ve Bozkurt (2008)**, çalışmalarında yukarıda bahsettiğimiz $Q$, Fibonacci matrisine benzer $2\times 2$ tipinde Jacobsthal $F$ ve Jacobsthal $M$ matrislerini tanımlamışlardır. Daha sonra bu matrisleri kullanarak, Jacobsthal sayıları için Cassini, Catalan ve Binet benzeri formüllerini ve toplamsal özelliklerini elde etmişlerdir.

**Civciv ve Turkmen (2008)**, $(s,t)$-Fibonacci ve $(s,t)$-Fibonacci matris dizilerini tanıtarak, $(s,t)$-Fibonacci dizisinin kompleks çarpımları ve $(s,t)$-Fibonacci matris dizisinin temel özelliklerini incelemişlerdir. $s^2+4t>0,\ s>0,\ t\neq 0$ ve $n\geq 1$ olmak üzere bu $(s,t)$-Fibonacci matris dizisi ve başlangıç şartları aşağıdaki gibidir:

$$\mathcal{F}_{n+1}(s,t)=s\mathcal{F}_n(s,t)+t\mathcal{F}_{n-1}(s,t),\quad \mathcal{F}_0(s,t)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\mathcal{F}_1(s,t)=\begin{pmatrix}s & 1\\ t & 0\end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

**Civciv ve Türkmen (2008)**, $(s,t)$-Lucas ve $(s,t)$-Lucas matris dizilerini tanıtarak, matris dizisinin temel özelliklerini incelemişlerdir. $s^2+4t>0,\ s>0,\ t\neq 0$ ve $n\geq 1$ olmak üzere $(s,t)$-Lucas matris dizisi

$$\mathcal{L}_{n+1}(s,t)=s\mathcal{L}_n(s,t)+t\mathcal{L}_{n-1}(s,t),\quad \mathcal{L}_0(s,t)=\begin{pmatrix}s & 2\\ 2t & -s\end{pmatrix},\mathcal{L}_1(s,t)=\begin{pmatrix}s^2+2t & s\\ st & 2t\end{pmatrix} \tag{2.9}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

**Koken ve Bozkurt (2010)**, bu çalışmada Fibonacci $Q$ matrisine benzer olarak Lucas $Q_L$-matrisi tanımlamışlar ve bu matris temsilini kullanılarak Lucas sayıları için iyi bilinen Binet formülünü ve farklı eşitlikleri tekrar ispatlamışlardır.

**Yazlik ve ark (2011)**, çalışmada ikinci mertebeden en genel $(s,t)$- matris dizisi tanımlanarak temel özelliklerine yer vermişlerdir. $a,b\in\mathbb{R},\ s^2+4t>0,\ s>0,\ t\neq 0$ ve $n\geq 0$ olmak üzere $(s,t)$-genelleştirilmiş matris dizisi aşağıdaki gibidir:

$$\mathcal{H}_{n+2}(s,t)=s\mathcal{H}_{n+1}(s,t)+t\mathcal{H}_n(s,t),\quad \mathcal{H}_0(s,t)=\begin{pmatrix}bs & a\\ at & (b-a)s\end{pmatrix},\mathcal{H}_1(s,t)=\begin{pmatrix}bs^2+at & bs\\ bst & at\end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

**Yilmaz ve Bozkurt (2011)**, Hessenberg matrislerin determinantları ve permanentleri ile Pell ve Perrin sayıları arasındaki ilişkiyi araştırmışlardır.

**Gulec ve Taskara (2012)**, $(s,t)$-Pell ve $(s,t)$-Pell Lucas matris dizilerini tanımlamışlardır ve bu matris dizilerinin Binet benzeri formüllerini, toplam formüllerini ve arasındaki ilişkileri elde etmişlerdir. $s^2+4t>0,\ s>0,\ t\neq 0$ ve $n\geq 2$ olmak üzere $(s,t)$-Pell ve $(s,t)$-Pell Lucas matris dizileri aşağıdaki gibidir:

$$\wp_n(s,t)=2s\wp_{n-1}(s,t)+t\wp_{n-2}(s,t),\quad \wp_0(s,t)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\wp_1(s,t)=\begin{pmatrix}2s & 1\\ t & 0\end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

$$\ell_n(s,t)=2s\ell_{n-1}(s,t)+t\ell_{n-2}(s,t),\quad \ell_0(s,t)=\begin{pmatrix}2s & 2\\ 2t & -2s\end{pmatrix},\ell_1(s,t)=\begin{pmatrix}4s^2+2t & 2s\\ 2st & 2t\end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

**Yilmaz ve Bozkurt (2012)**, üreteç matrisleri kullanarak Padovan dizisinin değişik özelliklerini araştırmışlardır.

**Uslu ve Uygun (2013)**, $(s,t)$-Jacobsthal ve $(s,t)$-Jacobsthal Lucas matris dizilerini tanımlamışlardır ve bu matris dizilerinin özelliklerini elde etmişlerdir.

**Kaygisiz ve Sahin (2014)**, Hessenberg matrislerin determinantları ve permanentleri ile Perrin ve Cordonnier sayıları arasındaki ilişkiyi araştırmışlardır.

**Coskun ve Taskara (2014)**, üçüncü mertebeden bazı sayı dizilerinin sirkülant matrislerinin özdeğerleri, determinantları ve normları hakkında bilgi vermişlerdir.

Son olarak sayı dizilerinin binomial dönüşümleri ile ilgili yapılan bazı çalışmalar aşağıdadır.

**Knuth (1973)**, binomial dönüşümleri literatürde ilk tanımlayan kişidir.

**Prodinger (1994)**, çalışmasında binomial dönüşümlerin üreteci ile binomial dönüşümü yapılan dizinin üreteci arasındaki bağıntıyı genelleştirmiştir.

**Falcon ve Plaza (2009)**, *k*-Fibonacci sayıları için binomial, *k*-binomial, artan *k*-binomial ve azalan *k*-binomial dönüşümler tanımlamışlardır. Bu binomial dönüşümlerin rekürans bağıntılarını, Binet benzeri formüllerini, üreteç fonksiyonlarını ve ters dönüşümlerini elde etmişlerdir. $F_{k,i}$, $i$. $k$-Fibonacci sayısı ve $u_{k,n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}F_{k,i}$ dizinin

binomial dönüşümü olmak üzere, *k*-Fibonacci dizisinin binomial dönüşümünün rekürans bağıntısı

$$u_{k,n+1} = (k+2)u_{k,n} - ku_{k,n-1}, \quad n \geq 1, \tag{2.13}$$

ve başlangıç şartları $u_{k,0} = 0$ ve $u_{k,1} = 1$ şeklindedir.

**Bhadouria ve ark (2014)**, *k*-Lucas sayıları için çeşitli binomial dönüşümler tanımlamışlardır. Bu binomial dönüşümlerin rekürans bağıntılarını, Binet benzeri formüllerini ve üreteç fonksiyonlarını elde etmişlerdir. $L_{k,i}$, *i*. *k*-Lucas sayısı ve $v_{k,n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} L_{k,i}$ dizinin binomial dönüşümü olmak üzere, *k*-Lucas dizisinin binomial dönüşümünün rekürans bağıntısı

$$v_{k,n+1} = (k+2)v_{k,n} - kv_{k,n-1}, \quad n \geq 1, \tag{2.14}$$

ve başlangıç şartları $v_{k,0} = 2$ ve $v_{k,1} = k+2$ şeklindedir.

**Falcon (2014)**, *k*-Fibonacci sayıları için tekrarlanan binomial dönüşümleri tanımlamıştır. Bu tekrarlanan binomial dönüşümlerin rekürans bağıntılarını, Binet benzeri formüllerini ve kombinatoryal eşitliklerini elde etmiştir. Örneğin, bu tekrarlanan binomial dönüşümün rekürans bağıntısı

$$u_{k,n+1}^{(r)} = (2r+k)u_{k,n}^{(r)} - (r^2 + kr - 1)u_{k,n-1}^{(r)}, \quad n \geq 1, r \geq 1, \tag{2.15}$$

ve başlangıç şartları $u_{k,0}^{(r)} = 0$ ve $u_{k,1}^{(r)} = 1$ şeklindedir.

**Yazlik ve ark (2014)**, çalışmada ikinci mertebeden en genel $(s,t)$- matris dizisinin binomial dönüşümlerinin temel özelliklerine yer vermişlerdir.

**Yilmaz ve Taskara (2015)**, *k*-Lucas sayıları için tekrarlanan binomial dönüşümleri tanımlamıştır. Bu tekrarlanan binomial dönüşümlerin rekürans bağıntılarını, Binet benzeri formüllerini ve kombinatoryal eşitliklerini elde etmiştir. Örneğin, bu tekrarlanan binomial dönüşümün rekürans bağıntısı

$$v_{k,n+1}^{(r)} = \left(2r+k\right)v_{k,n}^{(r)} - \left(r^2+kr-1\right)v_{k,n-1}^{(r)}, \quad n \geq 1, r \geq 1, \tag{2.16}$$

ve başlangıç şartları $v_{k,0}^{(r)} = 2$ ve $v_{k,1}^{(r)} = 2r+k$ şeklindedir.

## 3. TEMEL KAVRAMLAR

Padovan, Perrin sayıları ve özellikle Plastik Oran, bilim dünyasının oldukça ilgisini çekmiş ve birçok araştırmaya konu olmuş bulgulardır. Bunun sebepleri; Padovan ve Perrin dizilerindeki ardışık sayıların oranı olan $\rho = 1,324717957244746025 96\ldots$ sayısının -ki buna Plastik Oran(Plastik Sayı) denilmektedir- tarihte anıtlardan heykellerin yapımına kadar birçok alanda kullanılmış olmasıdır. Bu oranın bazı özelliklerine Alan St. George heykellerinde de rastlanmaktadır (Shannon ve ark, 2006).

Ayrıca Plastik Oranın bazı özellikleri aşağıda verilmiştir (Anonymous, 2013).

- Plastik Oran $\rho = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\cdots}}}$ şeklindeki iç içe kökü sağlar.
- En küçük Pisot-Vijayaraghava sayılardandır, cebirsel eşleniği

$$\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}}+\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\sqrt[3]{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}}\approx -0.662359\pm 0.56228i \qquad (3.1)$$

şeklindedir ve $x^3 - x - 1$ polinomunun üç kökünün çarpımı 1 olduğu için yukarıdaki değerin modülü $\frac{1}{\sqrt{\rho}}$ dır.

- Hiperbolik kosinüs cinsinden de aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\rho = \frac{1}{c}\cosh\left(\frac{1}{3}\cosh^{-1}(3c)\right),\ c = \cos\left(\frac{2\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (3.2)$$

Bu bölüm üç alt başlık altında toplanmaktadır. Birinci alt başlıkta Padovan sayıları ve özellikleri verilirken, ikinci alt başlıkta Perrin sayıları ve bazı özellikleri, üçüncü alt başlıkta ise bir dizinin binomial dönüşümü hakkında kısaca bilgi verilmektedir.

### 3.1. Padovan Sayıları

Padovan sayıları çağdaş mimar Richard Padovan (1935-) onuruna Stewart (1996) tarafından tanımlanmıştır. Ancak ilk defa 1924'te Fransız asıllı mimarlık öğrencisi Gérard Cordonnier tarafından keşfedilmiştir. Bağımsız olarak Fransız keşiş-mimar Dom Hans Van Der Laan (1904-1991) tarafından yeniden düzenlenmiştir. Cordonnier, Padovan, Van Der Laan ve Stewart ile tarihi ortaklık taşıyan aşağıdaki gibi tanımlanan Padovan sayıları Cordonnier sayıları olarak da bilinir.

**Tanım 3.1.1.** Her $n \in \mathbb{N}$ için, rekürans bağıntısı

$$P_{n+3} = P_{n+1} + P_n \tag{3.3}$$

ile verilen ve başlangıç şartları $P_0 = P_1 = P_2 = 1$ şeklinde olan sayılara *Padovan sayıları* denir (Anonymous, 2013).

Bazı Padovan sayıları,

**Çizelge 3.1.** Bazı Padovan sayıları

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_n$ | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 9 | … |

tabloda görüldüğü gibidir. Padovan sayılarının bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

- $n \in \mathbb{N}$ için

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}},$$

$$\beta = -\sqrt[3]{\frac{1}{16} + \frac{1}{48}\sqrt{\frac{23}{3}}} - \sqrt[3]{\frac{1}{16} - \frac{1}{48}\sqrt{\frac{23}{3}}} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}}\right)$$

$$\gamma = -\sqrt[3]{\frac{1}{16} + \frac{1}{48}\sqrt{\frac{23}{3}}} - \sqrt[3]{\frac{1}{16} - \frac{1}{48}\sqrt{\frac{23}{3}}} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}}\right),$$

$x^3 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri ve

$$a = \frac{(\beta - 1)(\gamma - 1)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)},$$
$$b = \frac{(\alpha - 1)(\gamma - 1)}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)},$$
$$c = \frac{(\alpha - 1)(\beta - 1)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)},$$

olmak üzere, Padovan sayılarının kapalı formu

$$P_n = a\alpha^n + b\beta^n + c\gamma^n \tag{3.4}$$

olarak verilir ve bu formül Padovan sayılarının Binet benzeri formülü olarak bilinir (Anonymous, 2013).

- Bu sayıların üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n y^{n-1} = \frac{1+y}{1-y^2-y^3},$$

(Shannon ve ark, 2006).

- $n \in \mathbb{N}$ için, ardışık Padovan sayılarının sonlu toplamı,

$$\sum_{i=0}^{n} P_i = P_{n+5} - 2,$$

- $n \in \mathbb{N}$ için, ardışık Padovan sayılarının kareleri toplamı,

$$\sum_{i=0}^{n} P_i^2 = P_{n+2}^2 - P_{n-1}^2 - P_{n-3}^2 ,$$

- $n \in \mathbb{N}$ için, ardışık Padovan sayılarının çarpımlarının toplamı,

$$\sum_{i=0}^{n} P_i^2 P_{i+1} = P_n P_{n+1} P_{n+2}$$

şeklindedir (Anonymous, 2013).

- Ayrıca bu sayıların eş (Companion) matrisi,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde olup,

$$A \cdot \begin{pmatrix} P_n \\ P_{n+1} \\ P_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{n+1} \\ P_{n+2} \\ P_{n+3} \end{pmatrix}$$

eşitliğini sağlar.

Bu sayıların negatif indislileri ise

$$P_m = P_{m+3} - P_{m+1}, \ m < 0 \qquad (3.5)$$

eşitliği ile bulunur. Bazı negatif indisli Padovan sayıları,

**Çizelge 3.2.** Bazı negatif indisli Padovan sayıları

| $m$ | –1 | –2 | –3 | –4 | –5 | –6 | –7 | –8 | –9 | –10 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_m$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | –1 | 1 | 0 | –1 | 2 | … |

tabloda görüldüğü gibidir. Bunların yanı sıra Padovan sayıları ile ilgili birçok çalışmalar yapılmış olup, burada rekürans bağıntısı Padovan sayıları ile aynı, fakat başlangıç şartları farklı olan Perrin sayılarından bahsedilecektir.

## 3.2. Perrin Sayıları

Perrin sayılarını ise ilk olarak Edouard Lucas (1876) çalışmıştır. Ancak dizi daha sonraları 1899'da bu diziyi çalışan Raoul Perrin'in (1899) adı ile anılmaktadır.

**Tanım 3.2.1.** Her $n \in \mathbb{N}$ için, rekürans bağıntısı

$$R_{n+3} = R_{n+1} + R_n \tag{3.6}$$

ile verilen ve başlangıç şartları $R_0 = 3, R_1 = 0, R_2 = 2$ şeklinde olan sayılara *Perrin sayıları* denir (Anonymous, 2013).

Bazı Perrin sayıları,

**Çizelge 3.3.** Bazı Perrin sayıları

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $R_n$ | 3 | 0 | 2 | 3 | 2 | 5 | 5 | 7 | 10 | 12 | … |

tabloda görüldüğü gibidir. Perrin sayılarının bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

- $n \in \mathbb{N}$ için

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}},$$

$$\beta = -\sqrt[3]{\frac{1}{16}+\frac{1}{48}\sqrt{\frac{23}{3}}} - \sqrt[3]{\frac{1}{16}-\frac{1}{48}\sqrt{\frac{23}{3}}} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}}\right),$$

$$\gamma = -\sqrt[3]{\frac{1}{16}+\frac{1}{48}\sqrt{\frac{23}{3}}} - \sqrt[3]{\frac{1}{16}-\frac{1}{48}\sqrt{\frac{23}{3}}} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}}\right),$$

$x^3 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri olmak üzere, Perrin sayılarının kapalı formu

$$R_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n \tag{3.7}$$

olarak verilir ve bu formül Perrin sayılarının Binet benzeri formülü olarak bilinir (Anonymous, 2013).

- Bu sayıların üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_n y^{n-1} = \frac{3-y^2}{1-y^2-y^3},$$

şeklindedir (Shannon ve ark, 2006).

- $n \in \mathbb{N}$ için, ardışık Perrin sayılarının sonlu toplamı,

$$\sum_{i=0}^{n-1} R_i = R_{n+4} - 2,$$

- $n \in \mathbb{N}$ için, ardışık Perrin sayılarının kareleri toplamı,

$$\sum_{i=0}^{n} R_i^2 = R_{n+2}^2 - R_{n-1}^2 - R_{n-3}^2 + 1,$$

şeklindedir (Anonymous, 2013).

- Padovan ve Perrin sayıları arasındaki ilişki ise

$$R_n = 3P_{n-5} + 2P_{n-4} \tag{3.8}$$

dır.

Bu sayıların negatif indislileri

$$R_m = R_{m+3} - R_{m+1}, \ m < 0 \tag{3.9}$$

eşitliği ile bulunur. Bazı negatif indisli Perrin sayıları,

**Çizelge 3.4.** Bazı negatif indisli Perrin sayıları

| $m$ | –1 | –2 | –3 | –4 | –5 | –6 | –7 | –8 | –9 | –10 | ⋯ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $R_m$ | –1 | 1 | 2 | –3 | 4 | –2 | –1 | 5 | –7 | 6 | ⋯ |

tabloda görüldüğü gibidir. Bunların yanı sıra Padovan ve Perrin sayıları ile ilgili birçok çalışmalar Shannon ve ark (2006) ve diğer kaynaklarda görülebilir.

### 3.3. Binomial Dönüşümler

Binom katsayılar ve onların birçok özellikleri kombinatoryal teori kapsamında incelenmekte olup son zamanlarda bu katsayıları kullanarak yeni bir bakış açısıyla binomial dönüşüm tanımlanmıştır. Bu binomial dönüşüm, bir dizinin ileri farklarını hesaplamaya yarayan bir dizi dönüşümüdür.

**Tanım 3.3.1.** Herhangi bir $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ tam sayı dizisi verilsin. Bu dizinin binomial dönüşümü

$$B_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i \tag{3.10}$$

denklemi ile bulunur ve dönüşümün elemanları $B(A) = \{B_n\}$ ile gösterilir (Knuth, 1973).

Ayrıca bulunan binomial dönüşümden diziye geçmekte

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} B_i \tag{3.11}$$

denklemi ile mümkün olmaktadır.

Son yıllarda binomial dönüşümler ile ilgili birçok çalışmalar yapılmıştır. Örneğin bu çalışmalardan birinde, binomial dönüşümün üretecini bulmak için oldukça önemli bir kolaylık sağlayan aşağıdaki teorem verilmiştir.

**Teorem 3.3.2.** Herhangi bir $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin üreteci $A(x)$ ve bu dizinin binomial dönüşümünün üreteci de $S(x)$ ise bunlar arasındaki ilişki

$$S(x) = \frac{1}{1-x} A\left(\frac{x}{1-x}\right) \tag{3.12}$$

şeklindedir (Gould, 1990).

# 4. PADOVAN VE PERRİN MATRİS DİZİLERİ VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, Padovan ve Perrin matris dizilerinin pozitif ve negatif indislileri tanımlanacak ve bu matris dizileri için elde edilen özellikler sunulacaktır. Ayrıca bu matris dizilerinin binomial dönüşümleri ve özellikleri verilecektir.

## 4.1. Padovan ve Perrin Matris Dizileri

Bu bölümde Padovan ve Perrin sayılarının matris dizileri verilerek, bu matris dizilerinin Binet formülleri, toplamları ve üreteç fonksiyonları sunulacaktır.

**Tanım 4.1.1.** $n \in \mathbb{N}$ için, Padovan $(\mathcal{P}_n)$ ve Perrin $(\mathcal{R}_n)$ matris dizileri, sırasıyla

$$\mathcal{P}_{n+3} = \mathcal{P}_{n+1} + \mathcal{P}_n, \tag{4.1}$$

$$\mathcal{R}_{n+3} = \mathcal{R}_{n+1} + \mathcal{R}_n, \tag{4.2}$$

rekürans bağıntıları ve

$$\mathcal{P}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{R}_0 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathcal{R}_1 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \mathcal{R}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

başlangıç şartları ile tanımlanır (Yilmaz ve Taskara, 2013).

Tanım 4.1.1. deki $\mathcal{P}_1$ matrisi, Fibonacci sayılarında oldukça önemli olan eş $Q$-matrisi gibi Padovan sayıları için varolan eş matristir.

Aşağıdaki teoremde Padovan ve Perrin matris dizilerinin $n$ inci genel terimleri Padovan ve Perrin sayıları yardımıyla verilmektedir.

**Teorem 4.1.2.** $n \in \mathbb{N}$ için, Padovan ve Perrin matris dizilerinin $n$. genel terimleri, sırasıyla

**i)** $\mathcal{P}_n = \begin{pmatrix} P_{n-5} & P_{n-3} & P_{n-4} \\ P_{n-4} & P_{n-2} & P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-1} & P_{n-2} \end{pmatrix}$ (4.3)

**ii)** $\mathcal{R}_n = \begin{pmatrix} R_{n-5} & R_{n-3} & R_{n-4} \\ R_{n-4} & R_{n-2} & R_{n-3} \\ R_{n-3} & R_{n-1} & R_{n-2} \end{pmatrix}$ (4.4)

dir (Yilmaz ve Taskara, 2013).

**İspat. i)** Denklem (4.3) te $n = 0$ alınırsa,

$$\mathcal{P}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{-5} & P_{-3} & P_{-4} \\ P_{-4} & P_{-2} & P_{-3} \\ P_{-3} & P_{-1} & P_{-2} \end{pmatrix}$$

olup Çizelge 3.2. den doğru olduğu görülür.

Yine $n = 1$ için Çizelge 3.2. ve Çizelge 3.1. den

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{-4} & P_{-2} & P_{-3} \\ P_{-3} & P_{-1} & P_{-2} \\ P_{-2} & P_0 & P_{-1} \end{pmatrix}$$

olur. Şimdi $n = k \in \mathbb{N}$ için, denklem (4.3) doğru olsun ve $n = k+1$ için doğru olduğunu gösterelim. Bunun için denklem (4.1) ve kabulümüzü göz önüne alırsak,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{k+1} &= \mathcal{P}_{k-1} + \mathcal{P}_{k-2} \\ &= \begin{pmatrix} P_{k-6} & P_{k-4} & P_{k-5} \\ P_{k-5} & P_{k-3} & P_{k-4} \\ P_{k-4} & P_{k-2} & P_{k-3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{k-7} & P_{k-5} & P_{k-6} \\ P_{k-6} & P_{k-4} & P_{k-5} \\ P_{k-5} & P_{k-3} & P_{k-4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_{k-4} & P_{k-2} & P_{k-3} \\ P_{k-3} & P_{k-1} & P_{k-2} \\ P_{k-2} & P_k & P_{k-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece teoremin ilk kısmının ispatı tamamlanmış olur.

**ii)** Perrin matris dizileri için olan kısmın doğruluğu da Padovan matris dizisinin ispatına

benzer şekilde denklem (4.4) te $n=0$ ve $n=1$ alınırsa, Çizelge 3.3. ve Çizelge 3.4. ten

$$\mathcal{R}_0=\begin{pmatrix}4&2&-3\\-3&1&2\\2&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_{-5}&R_{-3}&R_{-4}\\R_{-4}&R_{-2}&R_{-3}\\R_{-3}&R_{-1}&R_{-2}\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{R}_1=\begin{pmatrix}-3&1&2\\2&-1&1\\1&3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_{-4}&R_{-2}&R_{-3}\\R_{-3}&R_{-1}&R_{-2}\\R_{-2}&R_0&R_{-1}\end{pmatrix}$$

olur. Şimdi $n=k\in\mathbb{N}$ için, denklem (4.4) doğru olsun ve $n=k+1$ için doğru olduğunu gösterelim. Bunun için denklem (4.2) yi ve kabulümüzü göz önüne alırsak,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{k+1}&=\mathcal{R}_{k-1}+\mathcal{R}_{k-2}\\&=\begin{pmatrix}R_{k-6}&R_{k-4}&R_{k-5}\\R_{k-5}&R_{k-3}&R_{k-4}\\R_{k-4}&R_{k-2}&R_{k-3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}R_{k-7}&R_{k-5}&R_{k-6}\\R_{k-6}&R_{k-4}&R_{k-5}\\R_{k-5}&R_{k-3}&R_{k-4}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}R_{k-4}&R_{k-2}&R_{k-3}\\R_{k-3}&R_{k-1}&R_{k-2}\\R_{k-2}&R_k&R_{k-1}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

elde edilir. □

**Teorem 4.1.3.** Her $n\in\mathbb{N}$ için,

$$A_1=\frac{\alpha\mathcal{P}_2+\alpha^2\mathcal{P}_1+\mathcal{P}_0}{\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)},\ B_1=\frac{\beta\mathcal{P}_2+\beta^2\mathcal{P}_1+\mathcal{P}_0}{\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)},\ C_1=\frac{\gamma\mathcal{P}_2+\gamma^2\mathcal{P}_1+\mathcal{P}_0}{\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

ve

$$A_2=\frac{\alpha\mathcal{R}_2+\alpha^2\mathcal{R}_1+\mathcal{R}_0}{\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)},\ B_2=\frac{\beta\mathcal{R}_2+\beta^2\mathcal{R}_1+\mathcal{R}_0}{\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)},\ C_2=\frac{\gamma\mathcal{R}_2+\gamma^2\mathcal{R}_1+\mathcal{R}_0}{\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)},$$

ve $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ ise denklem (4.1) ve (4.2) nin karakteristik denkleminin kökleri olmak üzere, Padovan ve Perrin matris dizilerinin Binet benzeri formülleri sırasıyla

$$\mathcal{P}_n = A_1\alpha^n + B_1\beta^n + C_1\gamma^n \tag{4.5}$$

$$\mathcal{R}_n = A_2\alpha^n + B_2\beta^n + C_2\gamma^n \tag{4.6}$$

dır (Yilmaz ve Taskara, 2013).

**İspat.** Tanım 4.1.1. den, Padovan ve Perrin matris dizilerinin karakteristik denklemleri aynı olduğu için sadece Padovan matris dizisinin Binet benzeri formülünü bulmamız yeterli olacaktır. Bunun için, denklem (4.1) in karakteristik denkleminin kökleri $\alpha$, $\beta$ ve $\gamma$ olmak üzere, matris dizisinin genel çözümü

$$\mathcal{P}_n = A_1\alpha^n + B_1\beta^n + C_1\gamma^n \tag{4.7}$$

olacaktır. Tanım 4.1.1. deki başlangıç şartlarını kullanarak $A_1$, $B_1$ ve $C_1$ matrislerini bulalım. Bunun için denklem (4.7) de $n = 0,1,2$ için

$$\mathcal{P}_0 = A_1 + B_1 + C_1$$
$$\mathcal{P}_1 = A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma$$
$$\mathcal{P}_2 = A_1\alpha^2 + B_1\beta^2 + C_1\gamma^2$$

elde edilir ve bu sistem matris formunda yazılırsa,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_0 \\ \mathcal{P}_1 \\ \mathcal{P}_2 \end{pmatrix}$$

olur. Sistem eklemeli matris metodu ile çözülürse

$$A_1 = \frac{\alpha\mathcal{P}_2 + \alpha^2\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_0}{\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)},\ B_1 = \frac{\beta\mathcal{P}_2 + \beta^2\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_0}{\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)},\ C_1 = \frac{\gamma\mathcal{P}_2 + \gamma^2\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_0}{\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

elde edilir. □

Padovan ve Perrin sayılarının Binet benzeri formülleri çeşitli çalışmalarda verilmiştir. Aşağıdaki sonuçta, Teorem 4.1.2. ve Teorem 4.1.3. ten matris dizilerinin

doğal bir sonucu olarak Padovan ve Perrin sayılarının Binet benzeri formülleri verildi.

**Sonuç 4.1.4.** $n>0$ ve $n\in\mathbb{N}$ için, Padovan ve Perrin sayılarının Binet benzeri formülleri, sırasıyla

$$P_{n-1}=\frac{\alpha^{n+3}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\beta^{n+3}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{\gamma^{n+3}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} \tag{4.8}$$

$$R_{n-1}=\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}+\gamma^{n-1} \tag{4.9}$$

dır (Yilmaz ve Taskara, 2013).

**İspat.** Tanım 4.1.1. ve Teorem 4.1.3. ün yardımıyla,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_n &= A_1\alpha^n+B_1\beta^n+C_1\gamma^n\\ &=\frac{\alpha\mathcal{P}_2+\alpha^2\mathcal{P}_1+\mathcal{P}_0}{\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\alpha^n+\frac{\beta\mathcal{P}_2+\beta^2\mathcal{P}_1+\mathcal{P}_0}{\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\beta^n+\frac{\gamma\mathcal{P}_2+\gamma^2\mathcal{P}_1+\mathcal{P}_0}{\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\gamma^n\\ &=\frac{\alpha^{n-1}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\begin{pmatrix}1 & \alpha^2 & \alpha\\ \alpha & \alpha+1 & \alpha^2\\ \alpha^2 & \alpha+\alpha^2 & \alpha+1\end{pmatrix}+\frac{\beta^{n-1}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\begin{pmatrix}1 & \beta^2 & \beta\\ \beta & \beta+1 & \beta^2\\ \beta^2 & \beta+\beta^2 & \beta+1\end{pmatrix}\\ &\quad+\frac{\gamma^{n-1}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\begin{pmatrix}1 & \gamma^2 & \gamma\\ \gamma & \gamma+1 & \gamma^2\\ \gamma^2 & \gamma+\gamma^2 & \gamma+1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

olur. Burada $\alpha,\beta,\gamma$, denklem (4.1) ve (4.2) nin karakteristik denklemi olan $X^3-X-1=0$ denkleminin kökleri olduğundan bu denklemi sağlarlar ve

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_n &=\frac{\alpha^{n-1}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\begin{pmatrix}1 & \alpha^2 & \alpha\\ \alpha & \alpha^3 & \alpha^2\\ \alpha^2 & \alpha^4 & \alpha^3\end{pmatrix}+\frac{\beta^{n-1}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\begin{pmatrix}1 & \beta^2 & \beta\\ \beta & \beta^3 & \beta^2\\ \beta^2 & \beta^4 & \beta^3\end{pmatrix}\\ &\quad+\frac{\gamma^{n-1}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\begin{pmatrix}1 & \gamma^2 & \gamma\\ \gamma & \gamma^3 & \gamma^2\\ \gamma^2 & \gamma^4 & \gamma^3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca Teorem 4.1.2. den

$$\begin{pmatrix} P_{n-5} & P_{n-3} & P_{n-4} \\ P_{n-4} & P_{n-2} & P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-1} & P_{n-2} \end{pmatrix} = \frac{\alpha^{n-1}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} \begin{pmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha \\ \alpha & \alpha^3 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha^4 & \alpha^3 \end{pmatrix} + \frac{\beta^{n-1}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} \begin{pmatrix} 1 & \beta^2 & \beta \\ \beta & \beta^3 & \beta^2 \\ \beta^2 & \beta^4 & \beta^3 \end{pmatrix}$$
$$+ \frac{\gamma^{n-1}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} \begin{pmatrix} 1 & \gamma^2 & \gamma \\ \gamma & \gamma^3 & \gamma^2 \\ \gamma^2 & \gamma^4 & \gamma^3 \end{pmatrix}$$

olur. Burada matrislerin 3. satır 2. sütun elemanları eşleştirilirse, Padovan sayılarının Binet benzeri formülü

$$P_{n-1} = \frac{\alpha^{n+3}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\beta^{n+3}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{\gamma^{n+3}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

bulunur. İspatın ikinci kısmı için, benzer şekilde Tanım 4.1.1. ve Teorem 4.1.3. göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_n &= A_2\alpha^n + B_2\beta^n + C_2\gamma^n \\ &= \frac{\alpha\mathcal{R}_2 + \alpha^2\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_0}{\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\alpha^n + \frac{\beta\mathcal{R}_2 + \beta^2\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_0}{\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\beta^n + \frac{\gamma\mathcal{R}_2 + \gamma^2\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_0}{\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\gamma^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_n = {} & \frac{\alpha^{n-1}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} \begin{pmatrix} 2\alpha-3\alpha^2+4 & -\alpha+\alpha^2+2 & \alpha+2\alpha^2-3 \\ \alpha+2\alpha^2-3 & 3\alpha-\alpha^2+1 & -\alpha+\alpha^2+2 \\ -\alpha+\alpha^2+2 & 3\alpha^2-1 & 3\alpha-\alpha^2+1 \end{pmatrix} \\ & + \frac{\beta^{n-1}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} \begin{pmatrix} 2\beta-3\beta^2+4 & -\beta+\beta^2+2 & \beta+2\beta^2-3 \\ \beta+2\beta^2-3 & 3\beta-\beta^2+1 & -\beta+\beta^2+2 \\ -\beta+\beta^2+2 & 3\beta^2-1 & 3\beta-\beta^2+1 \end{pmatrix} \\ & + \frac{\gamma^{n-1}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} \begin{pmatrix} 2\gamma-3\gamma^2+4 & -\gamma+\gamma^2+2 & \gamma+2\gamma^2-3 \\ \gamma+2\gamma^2-3 & 3\gamma-\gamma^2+1 & -\gamma+\gamma^2+2 \\ -\gamma+\gamma^2+2 & 3\gamma^2-1 & 3\gamma-\gamma^2+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olur. Burada $\alpha+\beta+\gamma=0$ ve $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=1$ olduğundan,

$$\mathcal{R}_n = \frac{\alpha^{n-1}}{2\alpha^2+\frac{1}{\alpha}}\begin{pmatrix} 2\alpha-3\alpha^2+4 & -\alpha+\alpha^2+2 & \alpha+2\alpha^2-3 \\ \alpha+2\alpha^2-3 & 3\alpha-\alpha^2+1 & -\alpha+\alpha^2+2 \\ -\alpha+\alpha^2+2 & 3\alpha^2-1 & 3\alpha-\alpha^2+1 \end{pmatrix}$$
$$+\frac{\beta^{n-1}}{2\beta^2+\frac{1}{\beta}}\begin{pmatrix} 2\beta-3\beta^2+4 & -\beta+\beta^2+2 & \beta+2\beta^2-3 \\ \beta+2\beta^2-3 & 3\beta-\beta^2+1 & -\beta+\beta^2+2 \\ -\beta+\beta^2+2 & 3\beta^2-1 & 3\beta-\beta^2+1 \end{pmatrix}$$
$$+\frac{\gamma^{n-1}}{2\gamma^2+\frac{1}{\gamma}}\begin{pmatrix} 2\gamma-3\gamma^2+4 & -\gamma+\gamma^2+2 & \gamma+2\gamma^2-3 \\ \gamma+2\gamma^2-3 & 3\gamma-\gamma^2+1 & -\gamma+\gamma^2+2 \\ -\gamma+\gamma^2+2 & 3\gamma^2-1 & 3\gamma-\gamma^2+1 \end{pmatrix}$$

yazabiliriz. Teorem 4.1.2. den de,

$$\begin{pmatrix} R_{n-5} & R_{n-3} & R_{n-4} \\ R_{n-4} & R_{n-2} & R_{n-3} \\ R_{n-3} & R_{n-1} & R_{n-2} \end{pmatrix} = \frac{\alpha^{n-1}}{2\alpha^2+\frac{1}{\alpha}}\begin{pmatrix} 2\alpha-3\alpha^2+4 & -\alpha+\alpha^2+2 & \alpha+2\alpha^2-3 \\ \alpha+2\alpha^2-3 & 3\alpha-\alpha^2+1 & -\alpha+\alpha^2+2 \\ -\alpha+\alpha^2+2 & 3\alpha^2-1 & 3\alpha-\alpha^2+1 \end{pmatrix}$$
$$+\frac{\beta^{n-1}}{2\beta^2+\frac{1}{\beta}}\begin{pmatrix} 2\beta-3\beta^2+4 & -\beta+\beta^2+2 & \beta+2\beta^2-3 \\ \beta+2\beta^2-3 & 3\beta-\beta^2+1 & -\beta+\beta^2+2 \\ -\beta+\beta^2+2 & 3\beta^2-1 & 3\beta-\beta^2+1 \end{pmatrix}$$
$$+\frac{\gamma^{n-1}}{2\gamma^2+\frac{1}{\gamma}}\begin{pmatrix} 2\gamma-3\gamma^2+4 & -\gamma+\gamma^2+2 & \gamma+2\gamma^2-3 \\ \gamma+2\gamma^2-3 & 3\gamma-\gamma^2+1 & -\gamma+\gamma^2+2 \\ -\gamma+\gamma^2+2 & 3\gamma^2-1 & 3\gamma-\gamma^2+1 \end{pmatrix}$$

olur. Burada matrislerin 3. satır 2. sütun elemanları eşleştirilirse, Perrin sayılarının Binet benzeri formülü

$$R_{n-1} = \frac{3\alpha^3-\alpha}{2\alpha^3+1}\alpha^{n-1} + \frac{3\beta^3-\beta}{2\beta^3+1}\beta^{n-1} + \frac{3\gamma^3-\gamma}{2\gamma^3+1}\gamma^{n-1}$$

elde edilir ve düzenlenirse

$$R_{n-1} = \alpha^{n-1} + \beta^{n-1} + \gamma^{n-1}$$

olur. □

Padovan ve Perrin matris dizilerinin genel toplamlarını veren formüller aşağıdaki teoremde verilmektedir.

**Teorem 4.1.5.** $j \geq m > 0$, $n \geq 1$ ve $j, m, n \in \mathbb{N}$ için, Padovan ve Perrin matris dizilerinin genel toplamları, sırasıyla

$$\textbf{i)} \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{P}_{mi+j} = \frac{\mathcal{P}_{mn+m+j} + \mathcal{P}_{mn-m+j} + (1-R_m)\mathcal{P}_{mn+j} - \mathcal{P}_{m+j} - \mathcal{P}_{j-m} + (R_m - 1)\mathcal{P}_j}{R_m - R_{-m}}$$

$$\textbf{ii)} \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{R}_{mi+j} = \frac{\mathcal{R}_{mn+m+j} + \mathcal{R}_{mn-m+j} + (1-R_m)\mathcal{R}_{mn+j} - \mathcal{R}_{m+j} - \mathcal{R}_{j-m} + (R_m - 1)\mathcal{R}_j}{R_m - R_{-m}}$$

dır (Yilmaz ve Taskara, 2013).

**İspat.** İspat yaparken Teorem 4.1.3. den yani matris dizilerinin Binet benzeri formüllerinden yararlanılacaktır.

**i)** Teorem 4.1.3. ten,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{P}_{mi+j} &= \sum_{i=0}^{n-1} \left( A_1 \alpha^{mi+j} + B_1 \beta^{mi+j} + C_1 \gamma^{mi+j} \right) \\ &= A_1 \alpha^j \left( \frac{\alpha^{mn} - 1}{\alpha^m - 1} \right) + B_1 \beta^j \left( \frac{\beta^{mn} - 1}{\beta^m - 1} \right) + C_1 \gamma^j \left( \frac{\gamma^{mn} - 1}{\gamma^m - 1} \right)\end{aligned}$$

yazılabilir ve paydalar eşitlenip düzenleme işlemleri yapılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{P}_{mi+j} &= \frac{A_1 \alpha^j (\alpha^{mn} - 1)(\beta^m - 1)(\gamma^m - 1) + B_1 \beta^j (\beta^{mn} - 1)(\alpha^m - 1)(\gamma^m - 1)}{(\alpha^m - 1)(\beta^m - 1)(\gamma^m - 1)} \\ &\quad + \frac{C_1 \gamma^j (\gamma^{mn} - 1)(\alpha^m - 1)(\beta^m - 1)}{(\alpha^m - 1)(\beta^m - 1)(\gamma^m - 1)} \\ &= \frac{A_1 (\alpha^{mn+j} - \alpha^j)(\beta^m \gamma^m + \alpha^m - R_m + 1)}{(\alpha^m - 1)(\beta^m \gamma^m - \beta^m - \gamma^m + 1)} \\ &\quad + \frac{B_1 (\beta^{mn+j} - \beta^j)(\alpha^m \gamma^m + \beta^m - R_m + 1)}{(\alpha^m - 1)(\beta^m \gamma^m - \beta^m - \gamma^m + 1)} \\ &\quad + \frac{C_1 (\gamma^{mn+j} - \gamma^j)(\alpha^m \beta^m + \gamma^m - R_m + 1)}{(\alpha^m - 1)(\beta^m \gamma^m - \beta^m - \gamma^m + 1)}\end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\mathcal{P}_{mi+j}=\frac{A_1\left(\alpha^{mn+j-m}+\alpha^{mn+j+m}+\left(1-R_m\right)\alpha^{mn+j}-\alpha^{j-m}-\alpha^{m+j}-\left(1-R_m\right)\alpha^{j}\right)}{-\alpha^m\beta^m-\alpha^m\gamma^m+\alpha^m-\beta^m\gamma^m+\beta^m+\gamma^m}$$
$$+\frac{B_1\left(\beta^{mn+j-m}+\beta^{mn+j+m}+\left(1-R_m\right)\beta^{mn+j}-\beta^{j-m}-\beta^{m+j}-\left(1-R_m\right)\beta^{j}\right)}{-\alpha^m\beta^m-\alpha^m\gamma^m+\alpha^m-\beta^m\gamma^m+\beta^m+\gamma^m}$$
$$+\frac{C_1\left(\gamma^{mn+j-m}+\gamma^{mn+j+m}+\left(1-R_m\right)\gamma^{mn+j}-\gamma^{j-m}-\gamma^{m+j}-\left(1-R_m\right)\gamma^{j}\right)}{-\alpha^m\beta^m-\alpha^m\gamma^m+\alpha^m-\beta^m\gamma^m+\beta^m+\gamma^m}$$

bulunur ve Teorem 4.1.3. ve Sonuç 4.1.4. ten,

$$\sum_{i=0}^{n-1}\mathcal{P}_{mi+j}=\frac{\mathcal{P}_{mn+m+j}+\mathcal{P}_{mn-m+j}+\left(1-R_m\right)\mathcal{P}_{mn+j}-\mathcal{P}_{m+j}-\mathcal{P}_{j-m}+\left(R_m-1\right)\mathcal{P}_{j}}{R_m-R_{-m}}$$

elde edilir.

**ii)** Teorem 4.1.3. ten,

$$\sum_{i=0}^{n-1}\mathcal{R}_{mi+j}=\sum_{i=0}^{n-1}\left(A_2\alpha^{mi+j}+B_2\beta^{mi+j}+C_2\gamma^{mi+j}\right)$$
$$=A_2\alpha^j\left(\frac{\alpha^{mn}-1}{\alpha^m-1}\right)+B_2\beta^j\left(\frac{\beta^{mn}-1}{\beta^m-1}\right)+C_2\gamma^j\left(\frac{\gamma^{mn}-1}{\gamma^m-1}\right)$$

yazılabilir ve paydalar eşitlenip düzenleme işlemleri yapılırsa

$$\sum_{i=0}^{n-1}\mathcal{R}_{mi+j}=\frac{A_2\alpha^j\left(\alpha^{mn}-1\right)\left(\beta^m-1\right)\left(\gamma^m-1\right)+B_2\beta^j\left(\beta^{mn}-1\right)\left(\alpha^m-1\right)\left(\gamma^m-1\right)}{\left(\alpha^m-1\right)\left(\beta^m-1\right)\left(\gamma^m-1\right)}$$
$$+\frac{C_2\gamma^j\left(\gamma^{mn}-1\right)\left(\alpha^m-1\right)\left(\beta^m-1\right)}{\left(\alpha^m-1\right)\left(\beta^m-1\right)\left(\gamma^m-1\right)}$$
$$=\frac{A_2\left(\alpha^{mn+j}-\alpha^j\right)\left(\beta^m\gamma^m+\alpha^m-R_m+1\right)}{\left(\alpha^m-1\right)\left(\beta^m\gamma^m-\beta^m-\gamma^m+1\right)}$$
$$+\frac{B_2\left(\beta^{mn+j}-\beta^j\right)\left(\alpha^m\gamma^m+\beta^m-R_m+1\right)}{\left(\alpha^m-1\right)\left(\beta^m\gamma^m-\beta^m-\gamma^m+1\right)}$$
$$+\frac{C_2\left(\gamma^{mn+j}-\gamma^j\right)\left(\alpha^m\beta^m+\gamma^m-R_m+1\right)}{\left(\alpha^m-1\right)\left(\beta^m\gamma^m-\beta^m-\gamma^m+1\right)}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\mathcal{R}_{mi+j}=\frac{A_2\left(\alpha^{mn+j-m}+\alpha^{mn+j+m}+\left(1-R_m\right)\alpha^{mn+j}-\alpha^{j-m}-\alpha^{m+j}-\left(1-R_m\right)\alpha^{j}\right)}{-\alpha^m\beta^m-\alpha^m\gamma^m+\alpha^m-\beta^m\gamma^m+\beta^m+\gamma^m}$$
$$+\frac{B_2\left(\beta^{mn+j-m}+\beta^{mn+j+m}+\left(1-R_m\right)\beta^{mn+j}-\beta^{j-m}-\beta^{m+j}-\left(1-R_m\right)\beta^{j}\right)}{-\alpha^m\beta^m-\alpha^m\gamma^m+\alpha^m-\beta^m\gamma^m+\beta^m+\gamma^m}$$
$$+\frac{C_2\left(\gamma^{mn+j-m}+\gamma^{mn+j+m}+\left(1-R_m\right)\gamma^{mn+j}-\gamma^{j-m}-\gamma^{m+j}-\left(1-R_m\right)\gamma^{j}\right)}{-\alpha^m\beta^m-\alpha^m\gamma^m+\alpha^m-\beta^m\gamma^m+\beta^m+\gamma^m}$$
$$=\frac{\mathcal{R}_{mn+m+j}+\mathcal{R}_{mn-m+j}+\left(1-R_m\right)\mathcal{R}_{mn+j}-\mathcal{R}_{m+j}-\mathcal{R}_{j-m}+\left(R_m-1\right)\mathcal{R}_j}{R_m-R_{-m}}$$

elde edilir. □

Yukarıda verdiğimiz Sonuç 4.1.4. teki gibi, Teorem 4.1.5. ten de aşağıdaki sonuç yazılabilir. Yani matris dizilerinden kolayca normal dizilere ait özellikler elde edilebilir.

**Sonuç 4.1.6.** $j\geq m>0$, $n\geq 1$ ve $j,m,n\in\mathbb{N}$ için, Padovan ve Perrin sayılarının toplam formülleri

**i)** $$\sum_{i=0}^{n-1}P_{mi+j-1}=\frac{P_{mn+m+j-1}+P_{mn-m+j-1}+\left(1-R_m\right)P_{mn+j-1}-P_{m+j-1}-P_{j-m-1}+\left(R_m-1\right)P_{j-1}}{R_m-R_{-m}}$$

**ii)** $$\sum_{i=0}^{n-1}R_{mi+j-1}=\frac{R_{mn+m+j-1}+R_{mn-m+j-1}+\left(1-R_m\right)R_{mn+j-1}-R_{m+j-1}-R_{j-m-1}+\left(R_m-1\right)R_{j-1}}{R_m-R_{-m}}$$

dır (Yilmaz ve Taskara, 2013).

**İspat. i)**Teorem 4.1.5. ve Teorem 4.1.2 nin yardımıyla,

$$\sum_{i=0}^{n-1}\mathcal{P}_{mi+j}=\frac{\mathcal{P}_{mn+m+j}+\mathcal{P}_{mn-m+j}+\left(1-R_m\right)\mathcal{P}_{mn+j}-\mathcal{P}_{m+j}-\mathcal{P}_{j-m}+\left(R_m-1\right)\mathcal{P}_j}{R_m-R_{-m}}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{n-1} P_{mi+j-5} & \sum_{j=0}^{n-1} P_{mi+j-3} & \sum_{j=0}^{n-1} P_{mi+j-4} \\ \sum_{j=0}^{n-1} P_{mi+j-4} & \sum_{j=0}^{n-1} P_{mi+j-2} & \sum_{j=0}^{n-1} P_{mi+j-3} \\ \sum_{j=0}^{n-1} P_{mi+j-3} & \sum_{j=0}^{n-1} P_{mi+j-1} & \sum_{j=0}^{n-1} P_{mi+j-2} \end{pmatrix} = \frac{1}{R_m - R_{-m}} \Bigg( \begin{pmatrix} P_{mn+m+j-5} & P_{mn+m+j-3} & P_{mn+m+j-4} \\ P_{mn+m+j-4} & P_{mn+m+j-2} & P_{mn+m+j-3} \\ P_{mn+m+j-3} & P_{mn+m+j-1} & P_{mn+m+j-2} \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} P_{mn-m+j-5} & P_{mn-m+j-3} & P_{mn-m+j-4} \\ P_{mn-m+j-4} & P_{mn-m+j-2} & P_{mn-m+j-3} \\ P_{mn-m+j-3} & P_{mn-m+j-1} & P_{mn-m+j-2} \end{pmatrix}$$

$$+ \left(1 - R_m\right) \begin{pmatrix} P_{mn+j-5} & P_{mn+j-3} & P_{mn+j-4} \\ P_{mn+j-4} & P_{mn+j-2} & P_{mn+j-3} \\ P_{mn+j-3} & P_{mn+j-1} & P_{mn+j-2} \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} P_{m+j-5} & P_{m+j-3} & P_{m+j-4} \\ P_{m+j-4} & P_{m+j-2} & P_{m+j-3} \\ P_{m+j-3} & P_{m+j-1} & P_{m+j-2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P_{j-m-5} & P_{j-m-3} & P_{j-m-4} \\ P_{j-m-4} & P_{j-m-2} & P_{j-m-3} \\ P_{j-m-3} & P_{j-m-1} & P_{j-m-2} \end{pmatrix}$$

$$+ \left(R_m - 1\right) \begin{pmatrix} P_{j-5} & P_{j-3} & P_{j-4} \\ P_{j-4} & P_{j-2} & P_{j-3} \\ P_{j-3} & P_{j-1} & P_{j-2} \end{pmatrix} \Bigg)$$

olur. Burada matrislerin 3. satır 2. sütun elemanları eşleştirilirse, Padovan sayılarının toplam formülü

$$\sum_{i=0}^{n-1} P_{mi+j-1} = \frac{P_{mn+m+j-1} + P_{mn-m+j-1} + \left(1 - R_m\right) P_{mn+j-1} - P_{m+j-1} - P_{j-m-1} + \left(R_m - 1\right) P_{j-1}}{R_m - R_{-m}}$$

bulunur.

**ii)** İspatın ikinci kısmı için, benzer şekilde Teorem 4.1.5. ve Teorem 4.1.2. göz önüne alınırsa

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{R}_{mi+j} = \frac{\mathcal{R}_{mn+m+j} + \mathcal{R}_{mn-m+j} + \left(1 - R_m\right) \mathcal{R}_{mn+j} - \mathcal{R}_{m+j} - \mathcal{R}_{j-m} + \left(R_m - 1\right) \mathcal{R}_j}{R_m - R_{-m}}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{n-1} R_{mi+j-5} & \sum_{j=0}^{n-1} R_{mi+j-3} & \sum_{j=0}^{n-1} R_{mi+j-4} \\ \sum_{j=0}^{n-1} R_{mi+j-4} & \sum_{j=0}^{n-1} R_{mi+j-2} & \sum_{j=0}^{n-1} R_{mi+j-3} \\ \sum_{j=0}^{n-1} R_{mi+j-3} & \sum_{j=0}^{n-1} R_{mi+j-1} & \sum_{j=0}^{n-1} R_{mi+j-2} \end{pmatrix} = \frac{1}{R_m - R_{-m}} \Bigg( \begin{pmatrix} R_{mn+m+j-5} & R_{mn+m+j-3} & R_{mn+m+j-4} \\ R_{mn+m+j-4} & R_{mn+m+j-2} & R_{mn+m+j-3} \\ R_{mn+m+j-3} & R_{mn+m+j-1} & R_{mn+m+j-2} \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} R_{mn-m+j-5} & R_{mn-m+j-3} & R_{mn-m+j-4} \\ R_{mn-m+j-4} & R_{mn-m+j-2} & R_{mn-m+j-3} \\ R_{mn-m+j-3} & R_{mn-m+j-1} & R_{mn-m+j-2} \end{pmatrix}$$

$$+ (1 - R_m) \begin{pmatrix} R_{mn+j-5} & R_{mn+j-3} & R_{mn+j-4} \\ R_{mn+j-4} & R_{mn+j-2} & R_{mn+j-3} \\ R_{mn+j-3} & R_{mn+j-1} & R_{mn+j-2} \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} R_{m+j-5} & R_{m+j-3} & R_{m+j-4} \\ R_{m+j-4} & R_{m+j-2} & R_{m+j-3} \\ R_{m+j-3} & R_{m+j-1} & R_{m+j-2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_{j-m-5} & R_{j-m-3} & R_{j-m-4} \\ R_{j-m-4} & R_{j-m-2} & R_{j-m-3} \\ R_{j-m-3} & R_{j-m-1} & R_{j-m-2} \end{pmatrix}$$

$$+ (R_m - 1) \begin{pmatrix} R_{j-5} & R_{j-3} & R_{j-4} \\ R_{j-4} & R_{j-2} & R_{j-3} \\ R_{j-3} & R_{j-1} & R_{j-2} \end{pmatrix} \Bigg)$$

olur. Burada matrislerin 3. satır 2. sütun elemanları eşleştirilirse, Perrin sayılarının toplam formülü

$$\sum_{i=0}^{n-1} R_{mi+j-1} = \frac{R_{mn+m+j-1} + R_{mn-m+j-1} + (1 - R_m) R_{mn+j-1} - R_{m+j-1} - R_{j-m-1} + (R_m - 1) R_{j-1}}{R_m - R_{-m}}$$

bulunur. □

Matematikte üreteç fonksiyonu, verilen bir dizinin girdilerinin bilgisini katsayılarında tutan bir biçimsel kuvvet serisidir. Kullanım ve uygulama alanlarına göre çeşitli üreteç fonksiyonları vardır. Aşağıdaki teoremde Padovan ve Perrin matris dizilerinin üreteç fonksiyonları bulunacaktır.

**Teorem 4.1.7.** Padovan ve Perrin matris dizilerinin üreteç fonksiyonları sırasıyla

**i)** $G(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{P}_i t^i=\frac{1}{1-t^2-t^3}\begin{pmatrix}1-t^2 & t & t^2\\ t^2 & 1 & t\\ t & t+t^2 & 1\end{pmatrix}$

**ii)** $H(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{R}_i t^i=\frac{1}{1-t^2-t^3}\begin{pmatrix}4-3t-2t^2 & 2+t-3t^2 & -3+2t+4t^2\\ -3+2t+4t^2 & 1-t+2t^2 & 2+t-3t^2\\ 2+t-3t^2 & -1+3t+t^2 & 1-t+2t^2\end{pmatrix}$

dır (Yilmaz ve Taskara, 2013).

**İspat. i)** $G(t)$ Padovan matris dizisinin üreteç fonksiyonu olsun. O zaman Tanım 4.1.1. den,

$$\begin{aligned}G(t)&=\sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{P}_i t^i\\ &=\mathcal{P}_0+\mathcal{P}_1 t+\mathcal{P}_2 t^2+\sum_{i=3}^{\infty}\left(\mathcal{P}_{i-2}+\mathcal{P}_{i-3}\right)t^i\end{aligned}$$

yazılabilir. O halde son eşitlik düzenlenirse,

$$\begin{aligned}G(t)&=\mathcal{P}_0+\mathcal{P}_1 t+\mathcal{P}_2 t^2-\mathcal{P}_0 t^2+t^2\sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{P}_i t^i+t^3\sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{P}_i t^i\\ &=\mathcal{P}_0+\mathcal{P}_1 t+\left(\mathcal{P}_2-\mathcal{P}_0\right)t^2+t^2G(t)+t^3G(t)\\ G(t)&=\frac{\mathcal{P}_0+\mathcal{P}_1 t+\left(\mathcal{P}_2-\mathcal{P}_0\right)t^2}{1-t^2-t^3}\end{aligned}$$

elde edilir, burada Tanım 4.1.1. deki başlangıç şartları yerine koyulursa

$$G(t)=\frac{1}{1-t^2-t^3}\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}+t^2\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\right]$$

istenilen sonuca ulaşılmış olur.

**ii)** $H(t)$ Perrin matris dizisinin üreteç fonksiyonu olsun. O zaman Tanım 4.1.1. den,

$$H(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{R}_i t^i$$
$$=\mathcal{R}_0+\mathcal{R}_1 t+\mathcal{R}_2 t^2+\sum_{i=3}^{\infty}\left(\mathcal{R}_{i-2}+\mathcal{R}_{i-3}\right)t^i$$

yazılabilir. O halde son eşitlik düzenlenirse,

$$H(t)=\mathcal{R}_0+\mathcal{R}_1 t+\mathcal{R}_2 t^2-\mathcal{R}_0 t^2+t^2\sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{R}_i t^i+t^3\sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{R}_i t^i$$
$$=\mathcal{R}_0+\mathcal{R}_1 t+\left(\mathcal{R}_2-\mathcal{R}_0\right)t^2+t^2H(t)+t^3H(t)$$
$$H(t)=\frac{\mathcal{R}_0+\mathcal{R}_1 t+\left(\mathcal{R}_2-\mathcal{R}_0\right)t^2}{1-t^2-t^3}$$

elde edilir, burada Tanım 4.1.1. deki başlangıç şartları yerine koyulursa

$$H(t)=\frac{1}{1-t^2-t^3}\left[\begin{pmatrix}4&2&-3\\-3&1&2\\2&-1&1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3&1&2\\2&-1&1\\1&3&-1\end{pmatrix}+t^2\begin{pmatrix}-2&-3&4\\4&2&-3\\-3&1&2\end{pmatrix}\right]$$

istenilen sonuca ulaşılmış olur. □

Shannon ve Horadam (1971), Padovan ve Perrin sayılarının üreteç fonksiyonlarını elde etmişlerdir. Burada yukarıdaki teorem aracılığı ile bu sayıların üreteç fonksiyonları farklı bir şekilde tekrar verilecektir.

**Sonuç 4.1.8.** Padovan ve Perrin sayılarının üreteç fonksiyonları sırasıyla

**i)** $\sum_{i=0}^{\infty}P_{i-1}t^i=\frac{t+t^2}{1-t^2-t^3}$

**ii)** $\sum_{i=0}^{\infty}R_{i-1}t^i=\frac{-1+3t+t^2}{1-t^2-t^3}$

dır (Yilmaz ve Taskara, 2013).

**İspat. i)**Teorem 4.1.7. ve Teorem 4.1.2 nin yardımıyla,

$$\sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{P}_i t^i = \frac{1}{1-t^2-t^3}\begin{pmatrix} 1-t^2 & t & t^2 \\ t^2 & 1 & t \\ t & t+t^2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{\infty}P_{i-5}t^i & \sum_{i=0}^{\infty}P_{i-3}t^i & \sum_{i=0}^{\infty}P_{i-4}t^i \\ \sum_{i=0}^{\infty}P_{i-4}t^i & \sum_{i=0}^{\infty}P_{i-2}t^i & \sum_{i=0}^{\infty}P_{i-3}t^i \\ \sum_{i=0}^{\infty}P_{i-3}t^i & \sum_{i=0}^{\infty}P_{i-1}t^i & \sum_{i=0}^{\infty}P_{i-2}t^i \end{pmatrix} = \frac{1}{1-t^2-t^3}\begin{pmatrix} 1-t^2 & t & t^2 \\ t^2 & 1 & t \\ t & t+t^2 & 1 \end{pmatrix}$$

olur. Burada yukarıdaki matrislerin 3. satır 2. sütun elemanları eşleştirilirse, Padovan sayılarının üreteç fonksiyonu

$$\sum_{i=0}^{\infty}P_{i-1}t^i = \frac{t+t^2}{1-t^2-t^3}$$

bulunur.

**ii)** İspatın ikinci kısmı için, benzer şekilde Teorem 4.1.7. ve Teorem 4.1.2. göz önüne alınırsa

$$\sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{R}_i t^i = \frac{1}{1-t^2-t^3}\begin{pmatrix} 4-3t-2t^2 & 2+t-3t^2 & -3+2t+4t^2 \\ -3+2t+4t^2 & 1-t+2t^2 & 2+t-3t^2 \\ 2+t-3t^2 & -1+3t+t^2 & 1-t+2t^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{\infty}R_{i-5}t^i & \sum_{i=0}^{\infty}R_{i-3}t^i & \sum_{i=0}^{\infty}R_{i-4}t^i \\ \sum_{i=0}^{\infty}R_{i-4}t^i & \sum_{i=0}^{\infty}R_{i-2}t^i & \sum_{i=0}^{\infty}R_{i-3}t^i \\ \sum_{i=0}^{\infty}R_{i-3}t^i & \sum_{i=0}^{\infty}R_{i-1}t^i & \sum_{i=0}^{\infty}R_{i-2}t^i \end{pmatrix} = \frac{1}{1-t^2-t^3}\begin{pmatrix} 4-3t-2t^2 & 2+t-3t^2 & -3+2t+4t^2 \\ -3+2t+4t^2 & 1-t+2t^2 & 2+t-3t^2 \\ 2+t-3t^2 & -1+3t+t^2 & 1-t+2t^2 \end{pmatrix}$$

olur. Yine yukarıdaki matrislerin 3. satır 2. sütun elemanları eşleştirilirse, Perrin sayılarının üreteç fonksiyonu

$$\sum_{i=0}^{\infty}R_{i-1}t^i = \frac{-1+3t+t^2}{1-t^2-t^3}$$

olarak elde edilir. □

### 4.1.1. Matris dizileri arasındaki ilişkiler

Bu bölümde yukarıda tanımlanan, özellikleri verilen matris dizileri arasındaki ilişkiler incelenecektir.

Aşağıdaki lemmada Padovan matris dizileri cinsinden Perrin matris dizisi verilmektedir.

**Lemma 4.1.1.1.** $(\mathcal{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(\mathcal{R}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ matris dizileri için,

**i)** $\mathcal{R}_n = 3\mathcal{P}_{n-5} + 2\mathcal{P}_{n-4}$, n > 4

**ii)** $\mathcal{R}_n = 2\mathcal{P}_{n-2} + \mathcal{P}_{n-5}$, $n > 4$

**iii)** $\mathcal{R}_0\mathcal{P}_n = \mathcal{R}_n = \mathcal{P}_n\mathcal{R}_0$

dir (Yilmaz ve Taskara, 2013).

**İspat. i)** Verilen eşitliğin sağ tarafı ve Teorem 4.1.2. göz önüne alınırsa,

$$3\mathcal{P}_{n-5} + 2\mathcal{P}_{n-4} = 3\begin{pmatrix} P_{n-10} & P_{n-8} & P_{n-9} \\ P_{n-9} & P_{n-7} & P_{n-8} \\ P_{n-8} & P_{n-6} & P_{n-7} \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} P_{n-9} & P_{n-7} & P_{n-8} \\ P_{n-8} & P_{n-6} & P_{n-7} \\ P_{n-7} & P_{n-5} & P_{n-6} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3P_{n-10} + 2P_{n-9} & 3P_{n-8} + 2P_{n-7} & 3P_{n-9} + 2P_{n-8} \\ 3P_{n-9} + 2P_{n-8} & 3P_{n-7} + 2P_{n-6} & 3P_{n-8} + 2P_{n-7} \\ 3P_{n-8} + 2P_{n-7} & 3P_{n-6} + 2P_{n-5} & 3P_{n-7} + 2P_{n-6} \end{pmatrix}$$

yazılır ve denklem (3.8) ile Teorem 4.1.2. de dikkate alınırsa,

$$3\mathcal{P}_{n-5} + 2\mathcal{P}_{n-4} = \begin{pmatrix} R_{n-5} & R_{n-3} & R_{n-4} \\ R_{n-4} & R_{n-2} & R_{n-3} \\ R_{n-3} & R_{n-1} & R_{n-2} \end{pmatrix}$$
$$= \mathcal{R}_n$$

elde edilir.

**ii)** Lemma 4.1.1.1. i) ve Tanım 4.1.1. göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_n &= 3\mathcal{P}_{n-5} + 2\mathcal{P}_{n-4} \\ &= \mathcal{P}_{n-5} + 2\mathcal{P}_{n-2}\end{aligned}$$

elde edilir.

**iii)** Eşitliğin en sağını ele alalım,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_n\mathcal{R}_0 &= \begin{pmatrix} P_{n-5} & P_{n-3} & P_{n-4} \\ P_{n-4} & P_{n-2} & P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-1} & P_{n-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4P_{n-5} - 3P_{n-3} + 2P_{n-4} & 2P_{n-5} + P_{n-3} - P_{n-4} & -3P_{n-5} + 2P_{n-3} + P_{n-4} \\ 4P_{n-4} - 3P_{n-2} + 2P_{n-3} & 2P_{n-4} + P_{n-2} - P_{n-3} & -3P_{n-4} + 2P_{n-2} + P_{n-3} \\ 4P_{n-3} - 3P_{n-1} + 2P_{n-2} & 2P_{n-3} + P_{n-1} - P_{n-2} & -3P_{n-3} + 2P_{n-1} + P_{n-2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3P_{n-5} + 2P_{n-4} - 3P_{n-6} - 2P_{n-5} & 3P_{n-3} + 2P_{n-2} - 3P_{n-4} - 2P_{n-3} & 3P_{n-4} + 2P_{n-3} - 3P_{n-5} - 2P_{n-4} \\ 3P_{n-4} + 2P_{n-3} - 3P_{n-5} - 2P_{n-4} & 3P_{n-2} + 2P_{n-1} - 3P_{n-3} - 2P_{n-2} & 3P_{n-3} + 2P_{n-2} - 3P_{n-4} - 2P_{n-3} \\ 3P_{n-3} + 2P_{n-2} - 3P_{n-4} - 2P_{n-3} & 3P_{n-1} + 2P_n - 3P_{n-2} - 2P_{n-1} & 3P_{n-2} + 2P_{n-1} - 3P_{n-3} - 2P_{n-2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

olur. Denklem (3.8) ve Teorem 4.1.2. den

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_n\mathcal{R}_0 &= \begin{pmatrix} R_n - R_{n-1} & R_{n+2} - R_{n+1} & R_{n+1} - R_n \\ R_{n+1} - R_n & R_{n+3} - R_{n+2} & R_{n+2} - R_{n+1} \\ R_{n+2} - R_{n+1} & R_{n+4} - R_{n+3} & R_{n+3} - R_{n+2} \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{R}_{n+5} - \mathcal{R}_{n+4} \\ &= \mathcal{R}_n\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi de eşitliğin en solunu ele alalım,

$$\mathcal{R}_0\mathcal{P}_n = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_{n-5} & P_{n-3} & P_{n-4} \\ P_{n-4} & P_{n-2} & P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-1} & P_{n-2} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{R}_0\mathcal{P}_n=\begin{pmatrix} 4P_{n-5}+2P_{n-4}-3P_{n-3} & 4P_{n-3}+2P_{n-2}-3P_{n-1} & 4P_{n-4}+2P_{n-3}-3P_{n-2} \\ -3P_{n-5}+P_{n-4}+2P_{n-3} & -3P_{n-3}+P_{n-2}+2P_{n-1} & -3P_{n-4}+P_{n-3}+2P_{n-2} \\ 2P_{n-5}-P_{n-4}+P_{n-3} & 2P_{n-3}-P_{n-2}+P_{n-1} & 2P_{n-4}-P_{n-3}+P_{n-2} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 3P_{n-5}+2P_{n-4}-3P_{n-6}-2P_{n-5} & 3P_{n-3}+2P_{n-2}-3P_{n-4}-2P_{n-3} & 3P_{n-4}+2P_{n-3}-3P_{n-5}-2P_{n-4} \\ 3P_{n-4}+2P_{n-3}-3P_{n-5}-2P_{n-4} & 3P_{n-2}+2P_{n-1}-3P_{n-3}-2P_{n-2} & 3P_{n-3}+2P_{n-2}-3P_{n-4}-2P_{n-3} \\ 3P_{n-3}+2P_{n-2}-3P_{n-4}-2P_{n-3} & 3P_{n-1}+2P_n-3P_{n-2}-2P_{n-1} & 3P_{n-2}+2P_{n-1}-3P_{n-3}-2P_{n-2} \end{pmatrix}$$

olur. Denklem (3.8) ve Teorem 4.1.2. den

$$\mathcal{R}_0\mathcal{P}_n=\begin{pmatrix} R_n-R_{n-1} & R_{n+2}-R_{n+1} & R_{n+1}-R_n \\ R_{n+1}-R_n & R_{n+3}-R_{n+2} & R_{n+2}-R_{n+1} \\ R_{n+2}-R_{n+1} & R_{n+4}-R_{n+3} & R_{n+3}-R_{n+2} \end{pmatrix}$$

$$=\mathcal{R}_{n+5}-\mathcal{R}_{n+4}$$

$$=\mathcal{R}_n$$

bulunur ve ispat tamamlanmış olur. □

Bir önceki bölümde Perrin sayılarından bahsederken literatürde bu sayıların Padovan sayıları ile ilişkisinin olduğunu söylemiştik. Fakat literatürde Padovan sayılarının Perrin sayıları cinsinden ifadesini görememiştik. İşte aşağıdaki sonuçta Lemma 4.1.1.1. den yararlanarak bu ilişki kolayca elde edilmektedir.

**Sonuç 4.1.1.2.** $n\in\mathbb{N}$ için, Padovan sayılarının Perrin sayıları cinsinden ifadesi

$$P_{n-1}=\frac{1}{23}\left(R_{n-3}+8R_{n-2}+10R_{n-1}\right)$$

dir (Yilmaz ve Taskara, 2013).

**İspat.** Lemma 4.1.1.1. iii) şartından

$$\mathcal{R}_0\mathcal{P}_n=\mathcal{R}_n$$

ise, bu eşitliğin her iki tarafı da soldan $\mathcal{R}_0$ matrisinin tersi ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_n &= \mathcal{R}_0^{-1}\mathcal{R}_n \\ &= \frac{1}{23}\begin{pmatrix}3 & 1 & 7\\ 7 & 10 & 1\\ 1 & 8 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R_{n-5} & R_{n-3} & R_{n-4}\\ R_{n-4} & R_{n-2} & R_{n-3}\\ R_{n-3} & R_{n-1} & R_{n-2}\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{23}\begin{pmatrix}3R_{n-5}+R_{n-4}+7R_{n-3} & 3R_{n-3}+R_{n-2}+7R_{n-1} & 3R_{n-4}+R_{n-3}+7R_{n-2}\\ 7R_{n-5}+10R_{n-4}+R_{n-3} & 7R_{n-3}+10R_{n-2}+R_{n-1} & 7R_{n-4}+10R_{n-3}+R_{n-2}\\ R_{n-5}+8R_{n-4}+10R_{n-3} & R_{n-3}+8R_{n-2}+10R_{n-1} & R_{n-4}+8R_{n-3}+10R_{n-2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 4.1.2. den

$$\begin{pmatrix}P_{n-5} & P_{n-3} & P_{n-4}\\ P_{n-4} & P_{n-2} & P_{n-3}\\ P_{n-3} & P_{n-1} & P_{n-2}\end{pmatrix} = \frac{1}{23}\begin{pmatrix}3R_{n-5}+R_{n-4}+7R_{n-3} & 3R_{n-3}+R_{n-2}+7R_{n-1} & 3R_{n-4}+R_{n-3}+7R_{n-2}\\ 7R_{n-5}+10R_{n-4}+R_{n-3} & 7R_{n-3}+10R_{n-2}+R_{n-1} & 7R_{n-4}+10R_{n-3}+R_{n-2}\\ R_{n-5}+8R_{n-4}+10R_{n-3} & R_{n-3}+8R_{n-2}+10R_{n-1} & R_{n-4}+8R_{n-3}+10R_{n-2}\end{pmatrix}$$

yazılabilir ve bu matris eşitliğinden yararlanarak 3. satır 2. sütun elemanları eşleştirilirse istenilen sonuca ulaşılır. □

**Sonuç 4.1.1.3.** $n \in \mathbb{N}$ ve $n > 1$ için, Padovan matris dizisinin Perrin matris dizisi cinsinden ifadesi

$$\mathcal{P}_n = \frac{1}{23}\left(\mathcal{R}_{n-2} + 8\mathcal{R}_{n-1} + 10\mathcal{R}_n\right)$$

dir.

**İspat.** Eşitliğin sağ tarafını ele alalım ve Teorem 4.1.2. den

$$\frac{1}{23}\left(\mathcal{R}_{n-2} + 8\mathcal{R}_{n-1} + 10\mathcal{R}_n\right) = \frac{1}{23}\left(\begin{pmatrix}R_{n-7} & R_{n-5} & R_{n-6}\\ R_{n-6} & R_{n-4} & R_{n-5}\\ R_{n-5} & R_{n-3} & R_{n-4}\end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix}R_{n-6} & R_{n-4} & R_{n-5}\\ R_{n-5} & R_{n-3} & R_{n-4}\\ R_{n-4} & R_{n-2} & R_{n-3}\end{pmatrix} + 10\begin{pmatrix}R_{n-5} & R_{n-3} & R_{n-4}\\ R_{n-4} & R_{n-2} & R_{n-3}\\ R_{n-3} & R_{n-1} & R_{n-2}\end{pmatrix}\right)$$

olur. Sonuç 4.1.1.2 ve Teorem 4.1.2. göz önüne alınırsa,

$$\frac{1}{23}\left(\mathcal{R}_{n-2}+8\mathcal{R}_{n-1}+10\mathcal{R}_n\right)=\frac{1}{23}\begin{pmatrix} R_{n-7}+8R_{n-6}+10R_{n-5} & R_{n-5}+8R_{n-4}+10R_{n-3} & R_{n-6}+8R_{n-5}+10R_{n-4} \\ R_{n-6}+8R_{n-5}+10R_{n-4} & R_{n-4}+8R_{n-3}+10R_{n-2} & R_{n-5}+8R_{n-4}+10R_{n-3} \\ R_{n-5}+8R_{n-4}+10R_{n-3} & R_{n-3}+8R_{n-2}+10R_{n-1} & R_{n-4}+8R_{n-3}+10R_{n-2} \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} P_{n-5} & P_{n-3} & P_{n-4} \\ P_{n-4} & P_{n-2} & P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-1} & P_{n-2} \end{pmatrix}$$
$$=\mathcal{P}_n$$

elde edilir. □

**Teorem 4.1.1.4.** $m,n\in\mathbb{N}$ için, aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

**i)** $\mathcal{P}_m\mathcal{P}_n=\mathcal{P}_{m+n}$

**ii)** $\mathcal{P}_m\mathcal{R}_n=\mathcal{R}_n\mathcal{P}_m=\mathcal{R}_{m+n}$

**iii)** $\mathcal{R}_m\mathcal{R}_n=\mathcal{R}_n\mathcal{R}_m=4\mathcal{P}_{m+n-4}+4\mathcal{P}_{m+n-7}+\mathcal{P}_{m+n-10}$ , $m,n>4$

**iv)** $\mathcal{R}_m\mathcal{R}_n=\mathcal{R}_n\mathcal{R}_m=2\mathcal{R}_{m+n-2}+\mathcal{R}_{m+n-5}$ , $m>4$ ya da $n>4$

(Yilmaz ve Taskara, 2013).

**İspat. i)** Verilen eşitliğin sol tarafı ve Teorem 4.1.3. göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_m\mathcal{P}_n&=\left(A_1\alpha^m+B_1\beta^m+C_1\gamma^m\right)\left(A_1\alpha^n+B_1\beta^n+C_1\gamma^n\right)\\&=A_1A_1\alpha^{m+n}+A_1B_1\alpha^m\beta^n+A_1C_1\alpha^m\gamma^n\\&\quad+B_1A_1\beta^m\alpha^n+B_1B_1\beta^{m+n}+B_1C_1\beta^m\gamma^n\\&\quad+C_1A_1\gamma^m\alpha^n+C_1B_1\gamma^m\beta^n+C_1C_1\gamma^{m+n}\end{aligned}$$

olur. $\alpha+\beta+\gamma=0$ ve $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=1$ olduğundan ve Teorem 4.1.3 deki $A_1,B_1$ ve $C_1$ matrisleri aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$A_1^2=\frac{1}{\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\frac{1}{\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\begin{pmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha \\ \alpha & \alpha+1 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha+\alpha^2 & \alpha+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha \\ \alpha & \alpha+1 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha+\alpha^2 & \alpha+1 \end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\frac{1}{\alpha\left(\alpha^2-\alpha\gamma-\alpha\beta+\beta\gamma\right)}\begin{pmatrix} 1+2\alpha^3 & 3\alpha^2+2\alpha^3 & \alpha^4+\alpha^2+2\alpha \\ \alpha^4+\alpha^2+2\alpha & \alpha^4+2\alpha^3+\alpha^2+2\alpha+1 & 2\alpha^3+3\alpha^2 \\ 2\alpha^3+3\alpha^2 & \alpha^4+2\alpha^3+4\alpha^2+2\alpha & \alpha^4+2\alpha^3+\alpha^2+2\alpha+1 \end{pmatrix}$$

$$A_1^2 = \frac{1}{\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\frac{1}{\alpha\left(2\alpha^2+\frac{1}{\alpha}\right)}\begin{pmatrix} 1+2\alpha^3 & 2\alpha^2(1+\alpha)+\alpha^2 & \alpha(\alpha^3+\alpha+2) \\ \alpha(\alpha^3+\alpha+2) & 2\alpha^3+1+\alpha(\alpha^3+\alpha+2) & 2\alpha^2(1+\alpha)+\alpha^2 \\ 2\alpha^2(1+\alpha)+\alpha^2 & \alpha(\alpha^3+\alpha+2)+\alpha^2(2\alpha+3) & 2\alpha^3+1+\alpha(\alpha^3+\alpha+2) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\frac{1}{2\alpha^3+1}\begin{pmatrix} 2\alpha^3+1 & \alpha^2(2\alpha^3+1) & \alpha(2\alpha^3+1) \\ \alpha(2\alpha^3+1) & (1+\alpha)(2\alpha^3+1) & \alpha^2(2\alpha^3+1) \\ \alpha^2(2\alpha^3+1) & (\alpha^2+\alpha)(2\alpha^3+1) & (1+\alpha)(2\alpha^3+1) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\begin{pmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha \\ \alpha & \alpha+1 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha+\alpha^2 & \alpha+1 \end{pmatrix}$$

$$= A_1$$

Benzer şekilde,

$$B_1^2 = B_1$$

$$C_1^2 = C_1$$

dir. Yine Teorem 4.1.3. deki verileri kullanarak basit matris işlemleri ve $\alpha+\beta+\gamma=0$ ve $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=1$ olduğundan

$$A_1B_1 = \frac{1}{\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\frac{1}{\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\begin{pmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha \\ \alpha & \alpha+1 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha+\alpha^2 & \alpha+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \beta^2 & \beta \\ \beta & \beta+1 & \beta^2 \\ \beta^2 & \beta+\beta^2 & \beta+1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-\alpha\beta(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}\begin{pmatrix} 1+\alpha\beta(\alpha+\beta) & \alpha^2+\beta^2+\alpha\beta(\alpha+\beta+1) & \alpha+\beta+\alpha\beta(\alpha\beta+1) \\ \alpha+\beta+\alpha\beta(\alpha\beta+1) & \alpha+\beta+1+\alpha\beta(\alpha+\beta+\alpha\beta+1) & \alpha^2+\beta^2+\alpha\beta(\alpha+\beta+1) \\ \alpha^2+\beta^2+\alpha\beta(\alpha+\beta+1) & \alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta+\alpha\beta(\alpha+\beta+\alpha\beta+2) & \alpha+\beta+1+\alpha\beta(\alpha+\beta+\alpha\beta+1) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-\alpha\beta(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}\begin{pmatrix} 1-\alpha\beta\gamma & \alpha^2+\beta^2+\frac{1}{\gamma}(1-\gamma) & -\gamma+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{\gamma}+1\right) \\ -\gamma+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{\gamma}+1\right) & 1-\gamma+\frac{1}{\gamma}\left(1-\gamma+\frac{1}{\gamma}\right) & \alpha^2+\beta^2+\frac{1}{\gamma}(1-\gamma) \\ \alpha^2+\beta^2+\frac{1}{\gamma}(1-\gamma) & \alpha^2+\beta^2-\gamma+\frac{1}{\gamma}\left(2-\gamma+\frac{1}{\gamma}\right) & 1-\gamma+\frac{1}{\gamma}\left(1-\gamma+\frac{1}{\gamma}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-\alpha\beta(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}\begin{pmatrix} 0 & 1-\gamma^2+\frac{1}{\gamma} & -\gamma+\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\gamma} \\ -\gamma+\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\gamma} & -\gamma+\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\gamma} & 1-\gamma^2+\frac{1}{\gamma} \\ 1-\gamma^2+\frac{1}{\gamma} & 1-\gamma^2-\gamma+\frac{2}{\gamma}+\frac{1}{\gamma^2} & -\gamma+\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}$$

$$A_1B_1 = \frac{1}{-\alpha\beta(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$
$$= [0]_{3\times 3}$$

bulunur ve yine benzer şekilde

$$A_1C_1 = B_1A_1 = B_1C_1 = C_1A_1 = C_1B_1 = [0]_{3\times 3}$$

dir. O halde,

$$\mathcal{P}_m\mathcal{P}_n = A_1\alpha^{m+n} + B_1\beta^{m+n} + C_1\gamma^{m+n} = \mathcal{P}_{m+n}$$

şeklinde elde edilir.

**ii)** Burada öncelikle $\mathcal{P}_m\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_{m+n}$ eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim, diğer kısmı benzer şekilde yapılabilir. Bu eşitliğin sol tarafı ve Lemma 4.1.1.1.iii) şartı yardımıyla,

$$\mathcal{P}_m\mathcal{R}_n = \mathcal{P}_m\mathcal{P}_n\mathcal{R}_0$$

yazılabilir. Diğer yandan Teorem 4.1.1.4.i) şartı ve yine Lemma 4.1.1.1.iii) şartından,

$$\mathcal{P}_m\mathcal{R}_n = \mathcal{P}_{m+n}\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_{m+n}$$

elde edilir.

**iii)** ii) şartında olduğu gibi, bu eşitlikte de sadece $\mathcal{R}_m\mathcal{R}_n = 4\mathcal{P}_{n+m-4} + 4\mathcal{P}_{m+n-7} + \mathcal{P}_{m+n-10}$ kısmını gösterelim diğer kısım benzer şekilde görülür. Böylece, Lemma 4.1.1.1.ii) şartından,

$$\mathcal{R}_m\mathcal{R}_n = (2\mathcal{P}_{m-2} + \mathcal{P}_{m-5})(2\mathcal{P}_{n-2} + \mathcal{P}_{n-5})$$
$$= 4\mathcal{P}_{m-2}\mathcal{P}_{n-2} + 2\mathcal{P}_{m-2}\mathcal{P}_{n-5} + 2\mathcal{P}_{m-5}\mathcal{P}_{n-2} + \mathcal{P}_{m-5}\mathcal{P}_{n-5}$$

yazılabilir ve Teorem 4.1.1.4.i) şartından

$$\mathcal{R}_m\mathcal{R}_n = 4\mathcal{P}_{m+n-4} + 4\mathcal{P}_{m+n-7} + \mathcal{P}_{m+n-10}$$

olur.

**iv)** iii) şartında olduğu gibi, bu eşitlikte de sadece $\mathcal{R}_m\mathcal{R}_n = 2\mathcal{R}_{m+n-2} + \mathcal{R}_{m+n-5}$ kısmını gösterelim diğer kısım benzer şekilde görülür. Böylece, Lemma 4.1.1.1.iv) şartından,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_m\mathcal{R}_n &= \mathcal{R}_m\left(2\mathcal{P}_{n-2} + \mathcal{P}_{n-5}\right)\\ &= 2\mathcal{R}_m\mathcal{P}_{n-2} + 2\mathcal{R}_m\mathcal{P}_{n-5}\end{aligned}$$

yazılabilir ve Teorem 4.1.1.4.ii) şartından

$$\mathcal{R}_m\mathcal{R}_n = 2\mathcal{R}_{m+n-2} + \mathcal{R}_{m+n-5}$$

sonucu elde edilir. □

Teorem 4.1.2. yi ve Teorem 4.1.1.4 ü kullanarak matris elemanları eşleştirilirse Padovan ve Perrin sayılarına ait aşağıdaki özellikler elde edilir.

**Sonuç 4.1.1.5.** $m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, Padovan ve Perrin sayıları için,

**i)** $P_{m-3}P_{n-3} + P_{m-1}P_{n-2} + P_{m-2}P_{n-1} = P_{m+n-1}$

**ii)** $P_{m-3}R_{n-3} + P_{m-1}R_{n-2} + P_{m-2}R_{n-1} = R_{m+n-1}$

**iii)** $R_{m-3}R_{n-3} + R_{m-1}R_{n-2} + R_{m-2}R_{n-1} = 4P_{m+n-5} + 4P_{m+n-8} + P_{m+n-11}$

**iv)** $R_{m-3}R_{n-3} + R_{m-1}R_{n-2} + R_{m-2}R_{n-1} = 2R_{m+n-3} + R_{m+n-6}$

eşitlikleri vardır (Yilmaz ve Taskara, 2013).

**İspat. i)** Teorem 4.1.1.4.i) şartı ve Teorem 4.1.2 nin yardımıyla,

$$\mathcal{P}_m\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_{m+n}$$

$$\begin{pmatrix} P_{m-5} & P_{m-3} & P_{m-4} \\ P_{m-4} & P_{m-2} & P_{m-3} \\ P_{m-3} & P_{m-1} & P_{m-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_{n-5} & P_{n-3} & P_{n-4} \\ P_{n-4} & P_{n-2} & P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-1} & P_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{m+n-5} & P_{m+n-3} & P_{m+n-4} \\ P_{m+n-4} & P_{m+n-2} & P_{m+n-3} \\ P_{m+n-3} & P_{m+n-1} & P_{m+n-2} \end{pmatrix}$$

yazılır ve buradaki matris çarpımı yapıldıktan sonra karşılıklı matrislerin 3. satır 2. sütun elemanları eşleştirilirse, Padovan sayılarının çarpımlarının toplamı

$$P_{m-3}P_{n-3}+P_{m-1}P_{n-2}+P_{m-2}P_{n-1}=P_{m+n-1}$$

şeklinde elde edilir.

**ii)** Teorem 4.1.1.4.ii) şartı ve Teorem 4.1.2 nin yardımıyla,

$$\mathcal{P}_m\mathcal{R}_n=\mathcal{R}_{m+n}$$

$$\begin{pmatrix} P_{m-5} & P_{m-3} & P_{m-4} \\ P_{m-4} & P_{m-2} & P_{m-3} \\ P_{m-3} & P_{m-1} & P_{m-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_{n-5} & R_{n-3} & R_{n-4} \\ R_{n-4} & R_{n-2} & R_{n-3} \\ R_{n-3} & R_{n-1} & R_{n-2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} R_{m+n-5} & R_{m+n-3} & R_{m+n-4} \\ R_{m+n-4} & R_{m+n-2} & R_{m+n-3} \\ R_{m+n-3} & R_{m+n-1} & R_{m+n-2} \end{pmatrix}$$

yazılır ve buradaki matris çarpımı yapıldıktan sonra karşılıklı matrislerin 3. satır 2. sütun elemanları eşleştirilirse, Padovan ve Perrin sayılarının çarpımlarının toplamı

$$P_{m-3}R_{n-3}+P_{m-1}R_{n-2}+P_{m-2}R_{n-1}=R_{m+n-1}$$

olarak elde edilir.

**iii)** ii) ye benzer şekilde, Teorem 4.1.1.4.iii) şartı ve Teorem 4.1.2 nin yardımıyla,

$$\mathcal{R}_m\mathcal{R}_n=4\mathcal{P}_{m+n-4}+4\mathcal{P}_{m+n-7}+\mathcal{P}_{m+n-10}$$

$$\begin{pmatrix} R_{m-5} & R_{m-3} & R_{m-4} \\ R_{m-4} & R_{m-2} & R_{m-3} \\ R_{m-3} & R_{m-1} & R_{m-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_{n-5} & R_{n-3} & R_{n-4} \\ R_{n-4} & R_{n-2} & R_{n-3} \\ R_{n-3} & R_{n-1} & R_{n-2} \end{pmatrix}=4\begin{pmatrix} P_{m+n-9} & P_{m+n-7} & P_{m+n-8} \\ P_{m+n-8} & P_{m+n-6} & P_{m+n-7} \\ P_{m+n-7} & P_{m+n-5} & P_{m+n-6} \end{pmatrix}$$

$$+4\begin{pmatrix} P_{m+n-12} & P_{m+n-10} & P_{m+n-11} \\ P_{m+n-11} & P_{m+n-9} & P_{m+n-10} \\ P_{m+n-10} & P_{m+n-8} & P_{m+n-9} \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} P_{m+n-15} & P_{m+n-13} & P_{m+n-14} \\ P_{m+n-14} & P_{m+n-12} & P_{m+n-13} \\ P_{m+n-13} & P_{m+n-11} & P_{m+n-12} \end{pmatrix}$$

yazılır ve buradaki matris çarpımı ve toplamları yapıldıktan sonra karşılıklı matrislerin 3. satır 2. sütun elemanları eşleştirilirse, Perrin sayılarının çarpımlarının toplamının Padovan sayıları cinsinden ifadesi

$$R_{m-3}R_{n-3} + R_{m-1}R_{n-2} + R_{m-2}R_{n-1} = 4P_{m+n-5} + 4P_{m+n-8} + P_{m+n-11}$$

dir.

**iv)** iii) ye benzer şekilde, Teorem 4.1.1.4.iv) şartı ve Teorem 4.1.2 nin yardımıyla,

$$\mathcal{R}_m\mathcal{R}_n = 2\mathcal{R}_{m+n-2} + \mathcal{R}_{m+n-5}$$

$$\begin{pmatrix} R_{m-5} & R_{m-3} & R_{m-4} \\ R_{m-4} & R_{m-2} & R_{m-3} \\ R_{m-3} & R_{m-1} & R_{m-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_{n-5} & R_{n-3} & R_{n-4} \\ R_{n-4} & R_{n-2} & R_{n-3} \\ R_{n-3} & R_{n-1} & R_{n-2} \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} R_{m+n-7} & R_{m+n-5} & R_{m+n-6} \\ R_{m+n-6} & R_{m+n-4} & R_{m+n-5} \\ R_{m+n-5} & R_{m+n-3} & R_{m+n-4} \end{pmatrix}$$
$$+\begin{pmatrix} R_{m+n-10} & R_{m+n-8} & R_{m+n-9} \\ R_{m+n-9} & R_{m+n-7} & R_{m+n-8} \\ R_{m+n-8} & R_{m+n-6} & R_{m+n-7} \end{pmatrix}$$

yazılır ve buradaki matris çarpımı ve toplamı yapıldıktan sonra karşılıklı matrislerin 3. satır 2. sütun elemanları eşleştirilirse, Perrin sayılarının çarpımlarının toplamının yine Perrin sayıları cinsinden ifadesi

$$R_{m-3}R_{n-3} + R_{m-1}R_{n-2} + R_{m-2}R_{n-1} = 2R_{m+n-3} + R_{m+n-6}$$

dir. □

Yukarıdaki bulunan sonuçların ışığında, bu matris dizilerinin kuvvetlerinin değişik özellikleri aşağıda verilmektedir.

**Teorem 4.1.1.6.** $m, n, r \in \mathbb{N}$ ve $n \geq r$ için,

**i)** $\mathcal{P}_n^m = \mathcal{P}_{mn}$

**ii)** $\mathcal{P}_{n+1}^m = \mathcal{P}_1^m\mathcal{P}_{mn}$

**iii)** $\mathcal{P}_{n-r}\mathcal{P}_{n+r} = \mathcal{P}_n^2 = \mathcal{P}_2^n$

dır (Yilmaz ve Taskara, 2013).

**İspat. i)** Eşitliğin sol tarafı,

$$\mathcal{P}_n^m = \underbrace{\mathcal{P}_n \mathcal{P}_n \dots \mathcal{P}_n}_{m \text{ tane}}$$

şeklinde yazılabilir. Teorem 4.1.1.4.i) şartından

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_n^m &= \mathcal{P}_{2n} \underbrace{\mathcal{P}_n \dots \mathcal{P}_n}_{m-1 \text{ tane}} \\
&= \mathcal{P}_{3n} \underbrace{\mathcal{P}_n \dots \mathcal{P}_n}_{m-2 \text{ tane}} \\
&\vdots \\
&= \mathcal{P}_{(m-1)n} \mathcal{P}_n \\
&= \mathcal{P}_{mn}
\end{aligned}$$

olur.

**ii)** i) şartındaki gibi, eşitliğin sol tarafını ve Teorem 4.1.1.4.i) şartını göz önüne alalım. O zaman,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{n+1}^m &= \mathcal{P}_{n+1} \mathcal{P}_{n+1} \dots \mathcal{P}_{n+1} \\
&= \mathcal{P}_{m(n+1)} \\
&= \mathcal{P}_m \mathcal{P}_{mn} \\
&= \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_{m-1} \mathcal{P}_{mn}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Benzer şekilde, $\mathcal{P}_{m-1} = \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_{m-2}$ olduğundan, bu iterasyon devam ettirilirse, böylece

$$\mathcal{P}_{n+1}^m = \underbrace{\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_1 \cdots \mathcal{P}_1}_{m \text{ tane}} \mathcal{P}_{mn} = \mathcal{P}_1^m \mathcal{P}_{mn}$$

olur.

**iii)** Yine eşitliğin sol tarafı ve Teorem 4.1.1.4.i) şartı ele alınırsa,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{n-r}\mathcal{P}_{n+r} &= \mathcal{P}_{2n}\\ &= \mathcal{P}_n\mathcal{P}_n\\ &= \mathcal{P}_n^2\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{n-r}\mathcal{P}_{n+r} &= \mathcal{P}_{2n}\\ &= \underbrace{\mathcal{P}_2\mathcal{P}_2\ldots\mathcal{P}_2}_{n \text{ tane}}\\ &= \mathcal{P}_2^n\end{aligned}$$

bulunur. □

**Teorem 4.1.1.7.** $m,n,r\in\mathbb{N}$ ve $n\geq r$ için,

**i)** $\mathcal{R}_{n-r}\mathcal{R}_{n+r}=\mathcal{R}_n^2$

**ii)** $\mathcal{R}_n^m=\mathcal{R}_0^m\mathcal{P}_{mn}$

dir (Yilmaz ve Taskara, 2013).

**İspat. i)** Teorem 4.1.3 den, başka bir deyişle Perrin matris dizisinin Binet benzeri formülünden,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{n-r}\mathcal{R}_{n+r}-\mathcal{R}_n^2 &= \left(A_2\alpha^{n-r}+B_2\beta^{n-r}+C_2\gamma^{n-r}\right)\left(A_2\alpha^{n+r}+B_2\beta^{n+r}+C_2\gamma^{n+r}\right)\\ &\quad-\left(A_2\alpha^n+B_2\beta^n+C_2\gamma^n\right)^2\end{aligned}$$

yazılabilir. Elemanter işlemlerle,

$$\mathcal{R}_{n-r}\mathcal{R}_{n+r}-\mathcal{R}_n^2=A_2B_2\alpha^{n-r}\beta^{n-r}\left(\alpha^r-\beta^r\right)^2+A_2C_2\alpha^{n-r}\gamma^{n-r}\left(\alpha^r-\gamma^r\right)^2+B_2C_2\beta^{n-r}\gamma^{n-r}\left(\beta^r-\gamma^r\right)^2$$

elde edilir. Yine Teorem 4.1.3. deki verileri kullanarak basit matris işlemleri ve $\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=1$ ile

$$A_2B_2=\frac{1}{\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\frac{1}{\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\begin{pmatrix}2\alpha-3\alpha^2+4 & -\alpha+\alpha^2+2 & \alpha+2\alpha^2-3\\ \alpha+2\alpha^2-3 & 3\alpha-\alpha^2+1 & -\alpha+\alpha^2+2\\ -\alpha+\alpha^2+2 & 3\alpha^2-1 & 3\alpha-\alpha^2+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\beta-3\beta^2+4 & -\beta+\beta^2+2 & \beta+2\beta^2-3\\ \beta+2\beta^2-3 & 3\beta-\beta^2+1 & -\beta+\beta^2+2\\ -\beta+\beta^2+2 & 3\beta^2-1 & 3\beta-\beta^2+1\end{pmatrix}$$

$$A_2B_2=\frac{1}{\alpha\beta(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$=[0]_{3\times3}$$

bulunur ve yine benzer şekilde

$$A_2C_2=B_2A_2=[0]_{3\times3}$$

dir. O halde, $\mathcal{R}_{n-r}\mathcal{R}_{n+r}-\mathcal{R}_n^2=0$ elde edilir.

**ii)** Verilen eşitliğin sol tarafı ve Teorem 4.1.1.6.i) şartı dikkate alınırsa,

$$\mathcal{R}_0^m\mathcal{P}_{mn}=\underbrace{\mathcal{R}_0\mathcal{R}_0\dots\mathcal{R}_0}_{m\text{ tane}}\underbrace{\mathcal{P}_n\mathcal{P}_n\dots\mathcal{P}_n}_{m\text{ tane}}$$

yazılabilir. Lemma 4.1.1.1.iii) şartından da,

$$\mathcal{R}_0^m\mathcal{P}_{mn}=\mathcal{R}_0\mathcal{P}_n\mathcal{R}_0\mathcal{P}_n\dots\mathcal{R}_0\mathcal{P}_n=\mathcal{R}_n\mathcal{R}_n\dots\mathcal{R}_n=\mathcal{R}_n^m$$

olur. □

## 4.2. Negatif İndisli Padovan ve Perrin Matris Dizileri

Bu bölümde Padovan ve Perrin sayılarının negatif indisli matris dizileri verilerek, bu matris dizilerinin Binet formülleri, toplamları ve üreteç fonksiyonları sunulacaktır.

**Tanım 4.2.1.** $n\in\mathbb{N}$ için, negatif indisli Padovan $(\mathcal{P}_{-n})$ ve Perrin $(\mathcal{R}_{-n})$ matris dizileri, sırasıyla

$$\mathcal{P}_{-n}=\mathcal{P}_{-n+3}-\mathcal{P}_{-n+1}, \tag{4.10}$$

$$\mathcal{R}_{-n} = \mathcal{R}_{-n+3} - \mathcal{R}_{-n+1}, \tag{4.11}$$

rekürans bağıntıları ve

$$\mathcal{P}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \mathcal{P}_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathcal{P}_{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{R}_0 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathcal{R}_{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 4 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathcal{R}_{-2} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -2 & -3 & 4 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

başlangıç şartları ile tanımlanır (Yilmaz ve Taskara, 2014).

Aşağıdaki teoremde negatif indisli Padovan ve Perrin matris dizilerinin $n$ inci genel terimleri negatif indisli Padovan ve Perrin sayıları yardımıyla verilmektedir.

**Teorem 4.2.2.** $n \in \mathbb{N}$ için, negatif indisli Padovan ve Perrin matris dizilerinin $n$. genel terimleri, sırasıyla

$$\textbf{i)}\ \mathcal{P}_{-n} = \begin{pmatrix} P_{-n-5} & P_{-n-3} & P_{-n-4} \\ P_{-n-4} & P_{-n-2} & P_{-n-3} \\ P_{-n-3} & P_{-n-1} & P_{-n-2} \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

$$\textbf{ii)}\ \mathcal{R}_{-n} = \begin{pmatrix} R_{-n-5} & R_{-n-3} & R_{-n-4} \\ R_{-n-4} & R_{-n-2} & R_{-n-3} \\ R_{-n-3} & R_{-n-1} & R_{-n-2} \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

dir (Yilmaz ve Taskara, 2014).

**İspat. i)** Denklem (4.12) te $n = 0$ alınırsa,

$$\mathcal{P}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{-5} & P_{-3} & P_{-4} \\ P_{-4} & P_{-2} & P_{-3} \\ P_{-3} & P_{-1} & P_{-2} \end{pmatrix}$$

olup, Çizelge 3.2. den doğru olduğu görülür. Yine $n = 1$ için Çizelge 3.2. den

$$\mathcal{P}_{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_{-6} & P_{-4} & P_{-5}\\ P_{-5} & P_{-3} & P_{-4}\\ P_{-4} & P_{-2} & P_{-3}\end{pmatrix}$$

olur. Şimdi $n=k\in\mathbb{N}$ için, denklem (4.12) doğru olsun ve $n=k+1$ için doğru olduğunu gösterelim. Bunun için denklem (4.10) ve kabulümüz göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{-k-1}&=\mathcal{P}_{-k+2}-\mathcal{P}_{-k}\\ &=\begin{pmatrix}P_{-k-3} & P_{-k-1} & P_{-k-2}\\ P_{-k-2} & P_{-k} & P_{-k-1}\\ P_{-k-1} & P_{-k+1} & P_{-k}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}P_{-k-5} & P_{-k-3} & P_{-k-4}\\ P_{-k-4} & P_{-k-2} & P_{-k-3}\\ P_{-k-3} & P_{-k-1} & P_{-k-2}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}P_{-k-6} & P_{-k-4} & P_{-k-5}\\ P_{-k-5} & P_{-k-3} & P_{-k-4}\\ P_{-k-4} & P_{-k-2} & P_{-k-3}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

elde edilir, böylece teoremin ilk kısmının ispatı tamamlanmış olur.

**ii)** Negatif indisli Perrin matris dizileri için olan kısmın doğruluğu da negatif indisli Padovan matris dizisinin ispatına benzer şekilde denklem (4.13) te $n=0$ ve $n=1$ alınırsa, Çizelge 3.4. ten

$$\mathcal{R}_{0}=\begin{pmatrix}4 & 2 & -3\\ -3 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_{-5} & R_{-3} & R_{-4}\\ R_{-4} & R_{-2} & R_{-3}\\ R_{-3} & R_{-1} & R_{-2}\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{R}_{-1}=\begin{pmatrix}-2 & -3 & 4\\ 4 & 2 & -3\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_{-6} & R_{-4} & R_{-5}\\ R_{-5} & R_{-3} & R_{-4}\\ R_{-4} & R_{-2} & R_{-3}\end{pmatrix}$$

olur. Şimdi $n=k\in\mathbb{N}$ için, denklem (4.13) doğru olsun ve $n=k+1$ için doğru olduğunu gösterelim. Bunun için denklem (4.11) ve kabulümüz göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{-k-1} &= \mathcal{R}_{-k+2} - \mathcal{R}_{-k} \\ &= \begin{pmatrix} R_{-k-3} & R_{-k-1} & R_{-k-2} \\ R_{-k-2} & R_{-k} & R_{-k-1} \\ R_{-k-1} & R_{-k+1} & R_{-k} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_{-k-5} & R_{-k-3} & R_{-k-4} \\ R_{-k-4} & R_{-k-2} & R_{-k-3} \\ R_{-k-3} & R_{-k-1} & R_{-k-2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R_{-k-6} & R_{-k-4} & R_{-k-5} \\ R_{-k-5} & R_{-k-3} & R_{-k-4} \\ R_{-k-4} & R_{-k-2} & R_{-k-3} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

elde edilir. □

**Teorem 4.2.3.** Her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$A_3 = \frac{\alpha\mathcal{P}_{-2} + \alpha^3\mathcal{P}_{-1} + \alpha^2\mathcal{P}_0}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)},\ B_3 = \frac{\beta\mathcal{P}_{-2} + \beta^3\mathcal{P}_{-1} + \beta^2\mathcal{P}_0}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)},\ C_3 = \frac{\gamma\mathcal{P}_{-2} + \gamma^3\mathcal{P}_{-1} + \gamma^2\mathcal{P}_0}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

ve

$$A_4 = \frac{\alpha\mathcal{R}_{-2} + \alpha^3\mathcal{R}_{-1} + \alpha^2\mathcal{R}_0}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)},\ B_4 = \frac{\beta\mathcal{R}_{-2} + \beta^3\mathcal{R}_{-1} + \beta^2\mathcal{R}_0}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)},\ C_4 = \frac{\gamma\mathcal{R}_{-2} + \gamma^3\mathcal{R}_{-1} + \gamma^2\mathcal{R}_0}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)},$$

ve $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ ise denklem (4.10) ve (4.11) in karakteristik denkleminin kökleri olmak üzere, negatif indisli Padovan ve Perrin matris dizilerinin Binet benzeri formülleri sırasıyla

$$\mathcal{P}_{-n} = A_3\alpha^{-n} + B_3\beta^{-n} + C_3\gamma^{-n} \tag{4.14}$$

$$\mathcal{R}_{-n} = A_4\alpha^{-n} + B_4\beta^{-n} + C_4\gamma^{-n} \tag{4.15}$$

dır (Yilmaz ve Taskara, 2014).

**İspat.** Tanım 4.2.1. den, negatif indisli Padovan ve Perrin matris dizilerinin karakteristik denklemleri aynı olduğu için sadece negatif indisli Padovan matris dizisinin Binet benzeri formülünü bulmamız yeterli olacaktır. Bunun için, denklem (4.10) un karakteristik denkleminin ayrık kökleri $\alpha$, $\beta$ ve $\gamma$ olmak üzere, matris dizisinin genel çözümü

$$\mathcal{P}_{-n} = A_3\alpha^{-n} + B_3\beta^{-n} + C_3\gamma^{-n} \tag{4.16}$$

olacaktır. Tanım 4.2.1. deki başlangıç şartlarını kullanarak $A_3$, $B_3$ ve $C_3$ matrislerini bulalım. Bunun için denklem (4.16) da $n = 0,1,2$ verilirse

$$\mathcal{P}_0 = A_3 + B_3 + C_3$$
$$\mathcal{P}_{-1} = A_3\alpha^{-1} + B_3\beta^{-1} + C_3\gamma^{-1}$$
$$\mathcal{P}_{-2} = A_3\alpha^{-2} + B_3\beta^{-2} + C_3\gamma^{-2}$$

elde edilir ve bu matris formunda yazılırsa,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha^{-1} & \beta^{-1} & \gamma^{-1} \\ \alpha^{-2} & \beta^{-2} & \gamma^{-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_0 \\ \mathcal{P}_{-1} \\ \mathcal{P}_{-2} \end{pmatrix}$$

olur. Sistem eklemeli matris metodu ile çözülürse

$$A_3 = \frac{\alpha\mathcal{P}_{-2} + \alpha^3\mathcal{P}_{-1} + \alpha^2\mathcal{P}_0}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)},\ B_3 = \frac{\beta\mathcal{P}_{-2} + \beta^3\mathcal{P}_{-1} + \beta^2\mathcal{P}_0}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)},\ C_3 = \frac{\gamma\mathcal{P}_{-2} + \gamma^3\mathcal{P}_{-1} + \gamma^2\mathcal{P}_0}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

elde edilir. □

Aşağıdaki sonuçta Teorem 4.2.2. ve Teorem 4.2.3. ün yardımıyla negatif indisli Padovan ve Perrin sayılarının Binet benzeri formülleri verilmektedir.

**Sonuç 4.2.4.** $n \in \mathbb{N}$ için, negatif indisli Padovan ve Perrin sayılarının Binet benzeri formülleri, sırasıyla

$$P_{-n-1} = \frac{\alpha^{-n+3}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\beta^{-n+3}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{\gamma^{-n+3}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} \tag{4.17}$$

$$R_{-n-1} = \alpha^{-n-1} + \beta^{-n-1} + \gamma^{-n-1} \tag{4.18}$$

dır (Yilmaz ve Taskara, 2014).

**İspat.** Tanım 4.2.1. ve Teorem 4.2.3. ün yardımıyla,

$$\mathcal{P}_{-n} = A_3\alpha^{-n} + B_3\beta^{-n} + C_3\gamma^{-n}$$
$$= \frac{\alpha\mathcal{P}_{-2} + \alpha^3\mathcal{P}_{-1} + \alpha^2\mathcal{P}_0}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\alpha^{-n} + \frac{\beta\mathcal{P}_{-2} + \beta^3\mathcal{P}_{-1} + \beta^2\mathcal{P}_0}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\beta^{-n} + \frac{\gamma\mathcal{P}_{-2} + \gamma^3\mathcal{P}_{-1} + \gamma^2\mathcal{P}_0}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\gamma^{-n}$$

$$\mathcal{P}_{-n} = \frac{\alpha^{-n}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\begin{pmatrix} \alpha-\alpha^3+\alpha^2 & \alpha & -\alpha+\alpha^3 \\ -\alpha+\alpha^3 & \alpha^2 & \alpha \\ \alpha & \alpha^3 & \alpha^2 \end{pmatrix} + \frac{\beta^{-n}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\begin{pmatrix} \beta-\beta^3+\beta^2 & \beta & -\beta+\beta^3 \\ -\beta+\beta^3 & \beta^2 & \beta \\ \beta & \beta^3 & \beta^2 \end{pmatrix}$$
$$+ \frac{\gamma^{-n}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\begin{pmatrix} \gamma-\gamma^3+\gamma^2 & \gamma & -\gamma+\gamma^3 \\ -\gamma+\gamma^3 & \gamma^2 & \gamma \\ \gamma & \gamma^3 & \gamma^2 \end{pmatrix}$$

olur. Ayrıca Teorem 4.2.2. den

$$\begin{pmatrix} P_{-n-5} & P_{-n-3} & P_{-n-4} \\ P_{-n-4} & P_{-n-2} & P_{-n-3} \\ P_{-n-3} & P_{-n-1} & P_{-n-2} \end{pmatrix} = \frac{\alpha^{-n}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\begin{pmatrix} \alpha-\alpha^3+\alpha^2 & \alpha & -\alpha+\alpha^3 \\ -\alpha+\alpha^3 & \alpha^2 & \alpha \\ \alpha & \alpha^3 & \alpha^2 \end{pmatrix}$$
$$+ \frac{\beta^{-n}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\begin{pmatrix} \beta-\beta^3+\beta^2 & \beta & -\beta+\beta^3 \\ -\beta+\beta^3 & \beta^2 & \beta \\ \beta & \beta^3 & \beta^2 \end{pmatrix}$$
$$+ \frac{\gamma^{-n}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\begin{pmatrix} \gamma-\gamma^3+\gamma^2 & \gamma & -\gamma+\gamma^3 \\ -\gamma+\gamma^3 & \gamma^2 & \gamma \\ \gamma & \gamma^3 & \gamma^2 \end{pmatrix}$$

olur. Burada matrislerin 3. satır 2. sütun elemanları eşleştirilirse, negatif indisli Padovan sayılarının Binet benzeri formülü

$$P_{-n-1} = \frac{\alpha^{-n+3}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\beta^{-n+3}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{\gamma^{-n+3}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

bulunur. İspatın ikinci kısmı için, benzer şekilde Tanım 4.2.1. ve Teorem 4.2.3. göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{-n} &= A_4\alpha^{-n} + B_4\beta^{-n} + C_4\gamma^{-n} \\ &= \frac{\alpha\mathcal{R}_{-2} + \alpha^3\mathcal{R}_{-1} + \alpha^2\mathcal{R}_0}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\alpha^{-n} + \frac{\beta\mathcal{R}_{-2} + \beta^3\mathcal{R}_{-1} + \beta^2\mathcal{R}_0}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\beta^{-n} + \frac{\gamma\mathcal{R}_{-2} + \gamma^3\mathcal{R}_{-1} + \gamma^2\mathcal{R}_0}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\gamma^{-n} \\ &= \frac{\alpha^{-n}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\begin{pmatrix} -\alpha-2\alpha^3+4\alpha^2 & 4\alpha-3\alpha^3+2\alpha^2 & -2\alpha+4\alpha^3-3\alpha^2 \\ -2\alpha+4\alpha^3-3\alpha^2 & -3\alpha+2\alpha^3+\alpha^2 & 4\alpha-3\alpha^3+2\alpha^2 \\ 4\alpha-3\alpha^3+2\alpha^2 & 2\alpha+\alpha^3-\alpha^2 & -3\alpha+2\alpha^3+\alpha^2 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{\beta^{-n}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\begin{pmatrix} -\beta-2\beta^3+4\beta^2 & 4\beta-3\beta^3+2\beta^2 & -2\beta+4\beta^3-3\beta^2 \\ -2\beta+4\beta^3-3\beta^2 & -3\beta+2\beta^3+\beta^2 & 4\beta-3\beta^3+2\beta^2 \\ 4\beta-3\beta^3+2\beta^2 & 2\beta+\beta^3-\beta^2 & -3\beta+2\beta^3+\beta^2 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{\gamma^{-n}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\begin{pmatrix} -\gamma-2\gamma^3+4\gamma^2 & 4\gamma-3\gamma^3+2\gamma^2 & -2\gamma+4\gamma^3-3\gamma^2 \\ -2\gamma+4\gamma^3-3\gamma^2 & -3\gamma+2\gamma^3+\gamma^2 & 4\gamma-3\gamma^3+2\gamma^2 \\ 4\gamma-3\gamma^3+2\gamma^2 & 2\gamma+\gamma^3-\gamma^2 & -3\gamma+2\gamma^3+\gamma^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

olur, burada $\alpha+\beta+\gamma=0$ ve $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=1$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{-n} &= \frac{\alpha^{-n}}{2\alpha^2+\frac{1}{\alpha}}\begin{pmatrix} -\alpha-2\alpha^3+4\alpha^2 & 4\alpha-3\alpha^3+2\alpha^2 & -2\alpha+4\alpha^3-3\alpha^2 \\ -2\alpha+4\alpha^3-3\alpha^2 & -3\alpha+2\alpha^3+\alpha^2 & 4\alpha-3\alpha^3+2\alpha^2 \\ 4\alpha-3\alpha^3+2\alpha^2 & 2\alpha+\alpha^3-\alpha^2 & -3\alpha+2\alpha^3+\alpha^2 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{\beta^{-n}}{2\beta^2+\frac{1}{\beta}}\begin{pmatrix} -\beta-2\beta^3+4\beta^2 & 4\beta-3\beta^3+2\beta^2 & -2\beta+4\beta^3-3\beta^2 \\ -2\beta+4\beta^3-3\beta^2 & -3\beta+2\beta^3+\beta^2 & 4\beta-3\beta^3+2\beta^2 \\ 4\beta-3\beta^3+2\beta^2 & 2\beta+\beta^3-\beta^2 & -3\beta+2\beta^3+\beta^2 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{\gamma^{-n}}{2\gamma^2+\frac{1}{\gamma}}\begin{pmatrix} -\gamma-2\gamma^3+4\gamma^2 & 4\gamma-3\gamma^3+2\gamma^2 & -2\gamma+4\gamma^3-3\gamma^2 \\ -2\gamma+4\gamma^3-3\gamma^2 & -3\gamma+2\gamma^3+\gamma^2 & 4\gamma-3\gamma^3+2\gamma^2 \\ 4\gamma-3\gamma^3+2\gamma^2 & 2\gamma+\gamma^3-\gamma^2 & -3\gamma+2\gamma^3+\gamma^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

yazılabilir. Teorem 4.2.2. den de,

$$\begin{pmatrix} R_{-n-5} & R_{-n-3} & R_{-n-4} \\ R_{-n-4} & R_{-n-2} & R_{-n-3} \\ R_{-n-3} & R_{-n-1} & R_{-n-2} \end{pmatrix} = \frac{\alpha^{-n}}{2\alpha^2+\frac{1}{\alpha}} \begin{pmatrix} -\alpha-2\alpha^3+4\alpha^2 & 4\alpha-3\alpha^3+2\alpha^2 & -2\alpha+4\alpha^3-3\alpha^2 \\ -2\alpha+4\alpha^3-3\alpha^2 & -3\alpha+2\alpha^3+\alpha^2 & 4\alpha-3\alpha^3+2\alpha^2 \\ 4\alpha-3\alpha^3+2\alpha^2 & 2\alpha+\alpha^3-\alpha^2 & -3\alpha+2\alpha^3+\alpha^2 \end{pmatrix}$$
$$+\frac{\beta^{-n}}{2\beta^2+\frac{1}{\beta}} \begin{pmatrix} -\beta-2\beta^3+4\beta^2 & 4\beta-3\beta^3+2\beta^2 & -2\beta+4\beta^3-3\beta^2 \\ -2\beta+4\beta^3-3\beta^2 & -3\beta+2\beta^3+\beta^2 & 4\beta-3\beta^3+2\beta^2 \\ 4\beta-3\beta^3+2\beta^2 & 2\beta+\beta^3-\beta^2 & -3\beta+2\beta^3+\beta^2 \end{pmatrix}$$
$$+\frac{\gamma^{-n}}{2\gamma^2+\frac{1}{\gamma}} \begin{pmatrix} -\gamma-2\gamma^3+4\gamma^2 & 4\gamma-3\gamma^3+2\gamma^2 & -2\gamma+4\gamma^3-3\gamma^2 \\ -2\gamma+4\gamma^3-3\gamma^2 & -3\gamma+2\gamma^3+\gamma^2 & 4\gamma-3\gamma^3+2\gamma^2 \\ 4\gamma-3\gamma^3+2\gamma^2 & 2\gamma+\gamma^3-\gamma^2 & -3\gamma+2\gamma^3+\gamma^2 \end{pmatrix}$$

olur. Burada matrislerin 3. satır 2. sütun elemanları eşleştirilirse, negatif indisli Perrin sayılarının Binet benzeri formülü

$$R_{-n-1} = \frac{2\alpha+\alpha^3-\alpha^2}{2\alpha^2+\frac{1}{\alpha}}\alpha^{-n} + \frac{2\beta+\beta^3-\beta^2}{2\beta^2+\frac{1}{\beta}}\beta^{-n} + \frac{2\gamma+\gamma^3-\gamma^2}{2\gamma^2+\frac{1}{\gamma}}\gamma^{-n}$$

elde edilir ve burada $\alpha,\beta,\gamma$, $X^3-X-1=0$ denkleminin kökleri olduğundan bu denklemi sağlar ve

$$\begin{aligned} R_{-n-1} &= \frac{2\alpha^2+\alpha^4-\alpha^3}{2\alpha^3+1}\alpha^{-n} + \frac{2\beta^2+\beta^4-\beta^3}{2\beta^3+1}\beta^{-n} + \frac{2\gamma^2+\gamma^4-\gamma^3}{2\gamma^3+1}\gamma^{-n} \\ &= \frac{3\alpha^2-\alpha^3+\alpha}{3\alpha^3-\alpha}\alpha^{-n} + \frac{3\beta^2-\beta^3+\beta}{3\beta^3-\beta}\beta^{-n} + \frac{3\gamma^2-\gamma^3+\gamma}{3\gamma^3-\gamma}\gamma^{-n} \\ &= \frac{3\alpha^2-1}{3\alpha^3-\alpha}\alpha^{-n} + \frac{3\beta^2-1}{3\beta^3-\beta}\beta^{-n} + \frac{3\gamma^2-1}{3\gamma^3-\gamma}\gamma^{-n} \\ &= \alpha^{-n-1}+\beta^{-n-1}+\gamma^{-n-1} \end{aligned}$$

elde edilir. □

Negatif indisli Padovan ve Perrin matris dizilerinin genel toplamlarını veren formüller aşağıdaki teoremde verilmektedir.

**Teorem 4.2.5.** $n \in \mathbb{Z}^+$ için, negatif indisli Padovan ve Perrin matris dizilerinin genel toplamları, sırasıyla

**i)** $\sum_{i=0}^{n-1}\mathcal{P}_{-mi-j}=\dfrac{\mathcal{P}_{-mn+m-j}+\mathcal{P}_{-mn-m-j}+\left(1-R_{-m}\right)\mathcal{P}_{-mn-j}-\mathcal{P}_{m-j}-\mathcal{P}_{-m-j}+\left(R_{-m}-1\right)\mathcal{P}_{-j}}{R_{-m}-R_{m}}$

**ii)** $\sum_{i=0}^{n-1}\mathcal{R}_{-mi-j}=\dfrac{\mathcal{R}_{-mn+m-j}+\mathcal{R}_{-mn-m-j}+\left(1-R_{-m}\right)\mathcal{R}_{-mn-j}-\mathcal{R}_{m-j}-\mathcal{R}_{-m-j}+\left(R_{-m}-1\right)\mathcal{R}_{-j}}{R_{-m}-R_{m}}$

dır (Yilmaz ve Taskara, 2014).

**İspat.** İspatı yaparken Teorem 4.2.3. ten, başka bir deyişle negatif indisli matris dizilerinin Binet benzeri formüllerinden yararlanılacaktır.

**i)** Teorem 4.2.3. ten,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1}\mathcal{P}_{-mi-j}&=\sum_{i=0}^{n-1}\left(A_3\alpha^{-mi-j}+B_3\beta^{-mi-j}+C_3\gamma^{-mi-j}\right)\\&=A_3\alpha^{-j}\left(\frac{\alpha^{-mn}-1}{\alpha^{-m}-1}\right)+B_3\beta^{-j}\left(\frac{\beta^{-mn}-1}{\beta^{-m}-1}\right)+C_3\gamma^{-j}\left(\frac{\gamma^{-mn}-1}{\gamma^{-m}-1}\right)\end{aligned}$$

yazılabilir ve paydalar eşitlenip düzenleme işlemleri yapılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1}\mathcal{P}_{-mi-j}&=\frac{A_3\alpha^{-j}\left(\alpha^{-mn}-1\right)\left(\beta^{-m}-1\right)\left(\gamma^{-m}-1\right)+B_3\beta^{-j}\left(\beta^{-mn}-1\right)\left(\alpha^{-m}-1\right)\left(\gamma^{-m}-1\right)}{\left(\alpha^{-m}-1\right)\left(\beta^{-m}-1\right)\left(\gamma^{-m}-1\right)}\\&\quad+\frac{C_3z^{-j}\left(\gamma^{-mn}-1\right)\left(\alpha^{-m}-1\right)\left(\beta^{-m}-1\right)}{\left(\alpha^{-m}-1\right)\left(\beta^{-m}-1\right)\left(\gamma^{-m}-1\right)}\\&=\frac{\mathcal{P}_{-mn+m-j}+\mathcal{P}_{-mn-m-j}+\left(1-R_{-m}\right)\mathcal{P}_{-mn-j}-\mathcal{P}_{m-j}-\mathcal{P}_{-m-j}+\left(R_{-m}-1\right)\mathcal{P}_{-j}}{R_{-m}-R_{m}}\end{aligned}$$

elde edilir.

**ii)** Teorem 4.2.3. ten,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1}\mathcal{R}_{-mi-j}&=\sum_{i=0}^{n-1}\left(A_4\alpha^{-mi-j}+B_4\beta^{-mi-j}+C_4\gamma^{-mi-j}\right)\\&=A_4\alpha^{-j}\left(\frac{\alpha^{-mn}-1}{\alpha^{-m}-1}\right)+B_4\beta^{-j}\left(\frac{\beta^{-mn}-1}{\beta^{-m}-1}\right)+C_4\gamma^{-j}\left(\frac{\gamma^{-mn}-1}{\gamma^{-m}-1}\right)\end{aligned}$$

yazılabilir ve paydalar eşitlenip düzenleme işlemleri yapılırsa

$$\sum_{i=0}^{n-1}\mathcal{R}_{-mi-j}=\frac{A_4\alpha^{-j}\left(\alpha^{-mn}-1\right)\left(\beta^{-m}-1\right)\left(\gamma^{-m}-1\right)+B_4\beta^{-j}\left(\beta^{-mn}-1\right)\left(\alpha^{-m}-1\right)\left(\gamma^{-m}-1\right)}{\left(\alpha^{-m}-1\right)\left(\beta^{-m}-1\right)\left(\gamma^{-m}-1\right)}$$
$$+\frac{C_4\gamma^{-j}\left(\gamma^{-mn}-1\right)\left(\alpha^{-m}-1\right)\left(\beta^{-m}-1\right)}{\left(\alpha^{-m}-1\right)\left(\beta^{-m}-1\right)\left(\gamma^{-m}-1\right)}$$
$$=\frac{\mathcal{R}_{-mn+m-j}+\mathcal{R}_{-mn-m-j}+\left(1-R_{-m}\right)\mathcal{R}_{-mn-j}-\mathcal{R}_{m-j}-\mathcal{R}_{-m-j}+\left(R_{-m}-1\right)\mathcal{R}_{-j}}{R_{-m}-R_m}$$

elde edilir. □

Yukarıda verilen Sonuç 4.2.4. teki gibi, Teorem 4.2.5. ten de aşağıdaki sonuç yazılabilir. Yani negatif indisli matris dizilerinden kolayca negatif indisli dizilere ait özellikler elde edilebilir.

**Sonuç 4.2.6.** $n\in\mathbb{Z}^+$ için, negatif indisli Padovan ve Perrin dizilerinin genel toplam formülleri

**i)** $$\sum_{i=0}^{n-1}P_{-mi-j-1}=\frac{P_{-mn+m-j-1}+P_{-mn-m-j-1}+\left(1-R_{-m}\right)P_{-mn-j-1}-P_{m-j-1}-P_{-m-j-1}+\left(R_{-m}-1\right)P_{-j-1}}{R_{-m}-R_m}$$

**ii)** $$\sum_{i=0}^{n-1}R_{-mi-j-1}=\frac{R_{-mn+m-j-1}+R_{-mn-m-j-1}+\left(1-R_{-m}\right)R_{-mn-j-1}-R_{m-j-1}-R_{-m-j-1}+\left(R_{-m}-1\right)R_{-j-1}}{R_{-m}-R_m}$$

dır (Yilmaz ve Taskara, 2014).

**İspat. i)**Teorem 4.2.5. ve Teorem 4.2.2 nin yardımıyla,

$$\sum_{i=0}^{n-1}\mathcal{P}_{-mi-j}=\frac{\mathcal{P}_{-mn+m-j}+\mathcal{P}_{-mn-m-j}+\left(1-R_{-m}\right)\mathcal{P}_{-mn-j}-\mathcal{P}_{m-j}-\mathcal{P}_{-m-j}+\left(R_{-m}-1\right)\mathcal{P}_{-j}}{R_{-m}-R_m}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{n-1} P_{-mi-j-5} & \sum_{j=0}^{n-1} P_{-mi-j-3} & \sum_{j=0}^{n-1} P_{-mi-j-4} \\ \sum_{j=0}^{n-1} P_{-mi-j-4} & \sum_{j=0}^{n-1} P_{-mi-j-2} & \sum_{j=0}^{n-1} P_{-mi-j-3} \\ \sum_{j=0}^{n-1} P_{-mi-j-3} & \sum_{j=0}^{n-1} P_{-mi-j-1} & \sum_{j=0}^{n-1} P_{-mi-j-2} \end{pmatrix} = \frac{1}{R_{-m} - R_m} \Bigg( \begin{pmatrix} P_{-mn+m-j-5} & P_{-mn+m-j-3} & P_{-mn+m-j-4} \\ P_{-mn+m-j-4} & P_{-mn+m-j-2} & P_{-mn+m-j-3} \\ P_{-mn+m-j-3} & P_{-mn+m-j-1} & P_{-mn+m-j-2} \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} P_{-mn-m-j-5} & P_{-mn-m-j-3} & P_{-mn-m-j-4} \\ P_{-mn-m-j-4} & P_{-mn-m-j-2} & P_{-mn-m-j-3} \\ P_{-mn-m-j-3} & P_{-mn-m-j-1} & P_{-mn-m-j-2} \end{pmatrix}$$

$$+ \left(1 - R_{-m}\right) \begin{pmatrix} P_{-mn-j-5} & P_{-mn-j-3} & P_{-mn-j-4} \\ P_{-mn-j-4} & P_{-mn-j-2} & P_{-mn-j-3} \\ P_{-mn-j-3} & P_{-mn-j-1} & P_{-mn-j-2} \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} P_{m-j-5} & P_{m-j-3} & P_{m-j-4} \\ P_{m-j-4} & P_{m-j-2} & P_{m-j-3} \\ P_{m-j-3} & P_{m-j-1} & P_{m-j-2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P_{-m-j-5} & P_{-m-j-3} & P_{-m-j-4} \\ P_{-m-j-4} & P_{-m-j-2} & P_{-m-j-3} \\ P_{-m-j-3} & P_{-m-j-1} & P_{-m-j-2} \end{pmatrix}$$

$$+ \left(R_{-m} - 1\right) \begin{pmatrix} P_{-j-5} & P_{-j-3} & P_{-j-4} \\ P_{-j-4} & P_{-j-2} & P_{-j-3} \\ P_{-j-3} & P_{-j-1} & P_{-j-2} \end{pmatrix} \Bigg)$$

olur. Burada matrislerin 3. satır 2. sütun elemanları eşleştirilirse, negatif indisli Padovan sayılarının toplam formülü

$$\sum_{i=0}^{n-1} P_{-mi-j-1} = \frac{P_{-mn+m-j-1} + P_{-mn-m-j-1} + \left(1 - R_{-m}\right) P_{-mn-j-1} - P_{m-j-1} - P_{-m-j-1} + \left(R_{-m} - 1\right) P_{-j-1}}{R_{-m} - R_m}$$

olarak bulunur.

**ii)** İspatın ikinci kısmı için, benzer şekilde Teorem 4.2.5. ve Teorem 4.2.2. göz önüne alınırsa

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{R}_{-mi-j} = \frac{\mathcal{R}_{-mn+m-j} + \mathcal{R}_{-mn-m-j} + \left(1 - R_{-m}\right) \mathcal{R}_{-mn-j} - \mathcal{R}_{m-j} - \mathcal{R}_{-m-j} + \left(R_{-m} - 1\right) \mathcal{R}_{-j}}{R_{-m} - R_m}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{n-1} R_{-mi-j-5} & \sum_{j=0}^{n-1} R_{-mi-j-3} & \sum_{j=0}^{n-1} R_{-mi-j-4} \\ \sum_{j=0}^{n-1} R_{-mi-j-4} & \sum_{j=0}^{n-1} R_{-mi-j-2} & \sum_{j=0}^{n-1} R_{-mi-j-3} \\ \sum_{j=0}^{n-1} R_{-mi-j-3} & \sum_{j=0}^{n-1} R_{-mi-j-1} & \sum_{j=0}^{n-1} R_{-mi-j-2} \end{pmatrix} = \frac{1}{R_{-m} - R_m} \Bigg( \begin{pmatrix} R_{-mn+m-j-5} & R_{-mn+m-j-3} & R_{-mn+m-j-4} \\ R_{-mn+m-j-4} & R_{-mn+m-j-2} & R_{-mn+m-j-3} \\ R_{-mn+m-j-3} & R_{-mn+m-j-1} & R_{-mn+m-j-2} \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} R_{-mn-m-j-5} & R_{-mn-m-j-3} & R_{-mn-m-j-4} \\ R_{-mn-m-j-4} & R_{-mn-m-j-2} & R_{-mn-m-j-3} \\ R_{-mn-m-j-3} & R_{-mn-m-j-1} & R_{-mn-m-j-2} \end{pmatrix}$$

$$+ \left(1 - R_{-m}\right) \begin{pmatrix} R_{-mn-j-5} & R_{-mn-j-3} & R_{-mn-j-4} \\ R_{-mn-j-4} & R_{-mn-j-2} & R_{-mn-j-3} \\ R_{-mn-j-3} & R_{-mn-j-1} & R_{-mn-j-2} \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} R_{m-j-5} & R_{m-j-3} & R_{m-j-4} \\ R_{m-j-4} & R_{m-j-2} & R_{m-j-3} \\ R_{m-j-3} & R_{m-j-1} & R_{m-j-2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_{-m-j-5} & R_{-m-j-3} & R_{-m-j-4} \\ R_{-m-j-4} & R_{-m-j-2} & R_{-m-j-3} \\ R_{-m-j-3} & R_{-m-j-1} & R_{-m-j-2} \end{pmatrix}$$

$$+ \left(R_{-m} - 1\right) \begin{pmatrix} R_{-j-5} & R_{-j-3} & R_{-j-4} \\ R_{-j-4} & R_{-j-2} & R_{-j-3} \\ R_{-j-3} & R_{-j-1} & R_{-j-2} \end{pmatrix} \Bigg)$$

olur. Burada matrislerin 3. satır 2. sütun elemanları eşleştirilirse, negatif indisli Perrin sayılarının toplam formülü

$$\sum_{i=0}^{n-1} R_{-mi-j-1} = \frac{R_{-mn+m-j-1} + R_{-mn-m-j-1} + \left(1 - R_{-m}\right) R_{-mn-j-1} - R_{m-j-1} - R_{-m-j-1} + \left(R_{-m} - 1\right) R_{-j-1}}{R_{-m} - R_m}$$

şeklinde olur. □

Aşağıdaki teoremde negatif indisli Padovan ve Perrin matris dizilerinin üreteç fonksiyonları bulunacaktır.

**Teorem 4.2.7.** Negatif indisli Padovan ve Perrin matris dizilerinin sırasıyla üreteç fonksiyonları

$$\textbf{i)} \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{P}_{-i} t^i = \frac{1}{1 + t - t^3} \begin{pmatrix} 1 & t^2 & t \\ t & 1+t & t^2 \\ t^2 & t + t^2 & 1+t \end{pmatrix}$$

**ii)** $$\sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{R}_{-i}t^i=\frac{1}{1+t-t^3}\begin{pmatrix}4+2t-3t^2 & 2-t+t^2 & -3+t+2t^2\\ -3+t+2t^2 & 1+3t-t^2 & 2-t+t^2\\ 2-t+t^2 & -1+3t^2 & 1+3t-t^2\end{pmatrix}$$

dır (Yilmaz ve Taskara, 2014).

**İspat. i)** $g(t)$ negatif indisli Padovan matris dizisinin üreteç fonksiyonu olsun. O zaman Tanım 4.2.1. den,

$$\begin{aligned}g(t)&=\sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{P}_{-i}t^i\\&=\mathcal{P}_0+\mathcal{P}_{-1}t+\mathcal{P}_{-2}t^2+\sum_{i=3}^{\infty}\left(\mathcal{P}_{-i+3}-\mathcal{P}_{-i+1}\right)t^i\end{aligned}$$

yazılabilir. O halde son eşitlik düzenlenirse,

$$\begin{aligned}g(t)&=\mathcal{P}_0+\mathcal{P}_{-1}t+\mathcal{P}_{-2}t^2+t^3\sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{P}_{-i}t^i-t\sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{P}_{-i}t^i+\mathcal{P}_0t+\mathcal{P}_{-1}t^2\\&=\mathcal{P}_0+\left(\mathcal{P}_{-1}+\mathcal{P}_0\right)t+\left(\mathcal{P}_{-2}+\mathcal{P}_{-1}\right)t^2+t^3g(t)-tg(t)\\g(t)&=\frac{\mathcal{P}_0+\mathcal{P}_2t+\mathcal{P}_1t^2}{1+t-t^3}\end{aligned}$$

elde edilir ve burada Tanım 4.1.1. deki başlangıç şartları yerine koyulursa

$$g(t)=\frac{1}{1+t-t^3}\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}+t^2\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\right]$$

istenilen sonuca ulaşılmış olur.

**ii)** $h(t)$ negatif indisli Perrin matris dizisinin üreteç fonksiyonu olsun. O zaman Tanım 4.2.1. den,

$$h(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{R}_{-i}t^{i}$$
$$=\mathcal{R}_{0}+\mathcal{R}_{-1}t+\mathcal{R}_{-2}t^{2}+\sum_{i=3}^{\infty}\left(\mathcal{R}_{-i+3}-\mathcal{R}_{-i+1}\right)t^{i}$$

yazılabilir. O halde son eşitlik düzenlenirse,

$$h(t)=\mathcal{R}_{0}+\mathcal{R}_{-1}t+\mathcal{R}_{-2}t^{2}+\mathcal{R}_{0}t+\mathcal{R}_{-1}t^{2}+t^{3}\sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{R}_{-i}t^{i}-t\sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{R}_{-i}t^{i}$$
$$=\mathcal{R}_{0}+\left(\mathcal{R}_{-1}+\mathcal{R}_{0}\right)t+\left(\mathcal{R}_{-2}+\mathcal{R}_{-1}\right)t^{2}+t^{3}h(t)-th(t)$$
$$h(t)=\frac{\mathcal{R}_{0}+\mathcal{R}_{2}\,t+\mathcal{R}_{1}\,t^{2}}{1+t-t^{3}}$$

elde edilir ve burada Tanım 4.1.1. deki başlangıç şartları yerine koyulursa

$$h(t)=\frac{1}{1+t-t^{3}}\left[\begin{pmatrix}4&2&-3\\-3&1&2\\2&-1&1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&3&-1\\-1&0&3\end{pmatrix}+t^{2}\begin{pmatrix}-3&1&2\\2&-1&1\\1&3&-1\end{pmatrix}\right]$$

istenilen sonuca ulaşılmış olur. □

Aşağıdaki sonuçta yukarıdaki teorem aracılığı ile negatif indisli Padovan ve Perrin dizilerinin üreteç fonksiyonları sunulmaktadır.

**Sonuç 4.2.8.** Negatif indisli Padovan ve Perrin sayılarının üreteç fonksiyonları sırasıyla

**i)** $\sum_{i=0}^{\infty}P_{-i-1}t^{i}=\frac{t+t^{2}}{1+t-t^{3}}$

**ii)** $\sum_{i=0}^{\infty}R_{-i-1}t^{i}=\frac{-1+3t^{2}}{1+t-t^{3}}$

dır (Yilmaz ve Taskara, 2014).

**İspat. i)**Teorem 4.2.7. ve Teorem 4.2.2. nin yardımıyla,

$$\sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{P}_{-i}t^i=\frac{1}{1+t-t^3}\begin{pmatrix}1 & t^2 & t\\ t & 1+t & t^2\\ t^2 & t+t^2 & 1+t\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\sum_{i=0}^{\infty}P_{-i-5}t^i & \sum_{i=0}^{\infty}P_{-i-3}t^i & \sum_{i=0}^{\infty}P_{-i-4}t^i\\ \sum_{i=0}^{\infty}P_{-i-4}t^i & \sum_{i=0}^{\infty}P_{-i-2}t^i & \sum_{i=0}^{\infty}P_{-i-3}t^i\\ \sum_{i=0}^{\infty}P_{-i-3}t^i & \sum_{i=0}^{\infty}P_{-i-1}t^i & \sum_{i=0}^{\infty}P_{-i-2}t^i\end{pmatrix}=\frac{1}{1+t-t^3}\begin{pmatrix}1 & t^2 & t\\ t & 1+t & t^2\\ t^2 & t+t^2 & 1+t\end{pmatrix}$$

olur. Burada matrislerin 3. satır 2. sütun elemanları eşleştirilirse, negatif indisli Padovan dizisinin üreteç fonksiyonu

$$\sum_{i=0}^{\infty}P_{-i-1}t^i=\frac{t+t^2}{1+t-t^3}$$

bulunur.

**ii)** İspatın ikinci kısmı için, benzer şekilde Teorem 4.2.7. ve Teorem 4.2.2. göz önüne alınırsa

$$\sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{R}_{-i}t^i=\frac{1}{1+t-t^3}\begin{pmatrix}4+2t-3t^2 & 2-t+t^2 & -3+t+2t^2\\ -3+t+2t^2 & 1+3t-t^2 & 2-t+t^2\\ 2-t+t^2 & -1+3t^2 & 1+3t-t^2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\sum_{i=0}^{\infty}R_{-i-5}t^i & \sum_{i=0}^{\infty}R_{-i-3}t^i & \sum_{i=0}^{\infty}R_{-i-4}t^i\\ \sum_{i=0}^{\infty}R_{-i-4}t^i & \sum_{i=0}^{\infty}R_{-i-2}t^i & \sum_{i=0}^{\infty}R_{-i-3}t^i\\ \sum_{i=0}^{\infty}R_{-i-3}t^i & \sum_{i=0}^{\infty}R_{-i-1}t^i & \sum_{i=0}^{\infty}R_{-i-2}t^i\end{pmatrix}=\frac{1}{1+t-t^3}\begin{pmatrix}4+2t-3t^2 & 2-t+t^2 & -3+t+2t^2\\ -3+t+2t^2 & 1+3t-t^2 & 2-t+t^2\\ 2-t+t^2 & -1+3t^2 & 1+3t-t^2\end{pmatrix}$$

olur. Burada matrislerin 3. satır 2. sütun elemanları eşleştirilirse, negatif indisli Perrin dizisinin üreteç fonksiyonu

$$\sum_{i=0}^{\infty}R_{-i-1}t^i=\frac{-1+3t^2}{1+t-t^3}$$

bulunur. □

### 4.2.1. Negatif indisli matris dizileri arasındaki ilişkiler

Bu bölümde yukarıda tanımlanan özelliklerini verdiğimiz negatif indisli matris dizileri arasındaki ilişkiler incelenecektir.

Aşağıdaki lemmada negatif indisli Padovan matris dizileri cinsinden negatif indisli Perrin matris dizisi verilmektedir.

**Lemma 4.2.1.1.** $(\mathcal{P}_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(\mathcal{R}_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ negatif indisli matris dizileri için,

**i)** $\mathcal{R}_{-n} = 3\mathcal{P}_{-n-5} + 2\mathcal{P}_{-n-4}$,

**ii)** $\mathcal{R}_{-n} = 2\mathcal{P}_{-n-2} + \mathcal{P}_{-n-5}$,

**iii)** $\mathcal{R}_0\mathcal{P}_{-n} = \mathcal{R}_{-n} = \mathcal{P}_{-n}\mathcal{R}_0$

dir (Yilmaz ve Taskara, 2014).

**İspat. i)** Verilen eşitliğin sağ tarafı ve Teorem 4.2.2. göz önüne alınırsa,

$$3\mathcal{P}_{-n-5} + 2\mathcal{P}_{-n-4} = 3\begin{pmatrix} P_{-n-10} & P_{-n-8} & P_{-n-9} \\ P_{-n-9} & P_{-n-7} & P_{-n-8} \\ P_{-n-8} & P_{-n-6} & P_{-n-7} \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} P_{-n-9} & P_{-n-7} & P_{-n-8} \\ P_{-n-8} & P_{-n-6} & P_{-n-7} \\ P_{-n-7} & P_{-n-5} & P_{-n-6} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3P_{-n-10} + 2P_{-n-9} & 3P_{-n-8} + 2P_{-n-7} & 3P_{-n-9} + 2P_{-n-8} \\ 3P_{-n-9} + 2P_{-n-8} & 3P_{-n-7} + 2P_{-n-6} & 3P_{-n-8} + 2P_{-n-7} \\ 3P_{-n-8} + 2P_{-n-7} & 3P_{-n-6} + 2P_{-n-5} & 3P_{-n-7} + 2P_{-n-6} \end{pmatrix}$$

yazılır ve denklem (3.8) ile Teorem 4.2.2. dikkate alınırsa,

$$3\mathcal{P}_{-n-5} + 2\mathcal{P}_{-n-4} = \begin{pmatrix} R_{-n-5} & R_{-n-3} & R_{-n-4} \\ R_{-n-4} & R_{-n-2} & R_{-n-3} \\ R_{-n-3} & R_{-n-1} & R_{-n-2} \end{pmatrix}$$
$$= \mathcal{R}_{-n}$$

elde edilir.

**ii)** Lemma 4.2.1.1. i) şartı ve Tanım 4.2.1. göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{-n} &= 3\mathcal{P}_{-n-5} + 2\mathcal{P}_{-n-4} \\ &= \mathcal{P}_{-n-5} + 2\mathcal{P}_{-n-2}\end{aligned}$$

elde edilir.

**iii)** Eşitliğin en sağı ele alınırsa,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{-n}\mathcal{R}_0 &= \begin{pmatrix} P_{-n-5} & P_{-n-3} & P_{-n-4} \\ P_{-n-4} & P_{-n-2} & P_{-n-3} \\ P_{-n-3} & P_{-n-1} & P_{-n-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4P_{-n-5} - 3P_{-n-3} + 2P_{-n-4} & 2P_{-n-5} + P_{-n-3} - P_{-n-4} & -3P_{-n-5} + 2P_{-n-3} + P_{-n-4} \\ 4P_{-n-4} - 3P_{-n-2} + 2P_{-n-3} & 2P_{-n-4} + P_{-n-2} - P_{-n-3} & -3P_{-n-4} + 2P_{-n-2} + P_{-n-3} \\ 4P_{-n-3} - 3P_{-n-1} + 2P_{-n-2} & 2P_{-n-3} + P_{-n-1} - P_{-n-2} & -3P_{-n-3} + 2P_{-n-1} + P_{-n-2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3P_{-n-5} + 2P_{-n-4} - 3P_{-n-6} - 2P_{-n-5} & 3P_{-n-3} + 2P_{-n-2} - 3P_{-n-4} - 2P_{-n-3} & 3P_{-n-4} + 2P_{-n-3} - 3P_{-n-5} - 2P_{-n-4} \\ 3P_{-n-4} + 2P_{-n-3} - 3P_{-n-5} - 2P_{-n-4} & 3P_{-n-2} + 2P_{-n-1} - 3P_{-n-3} - 2P_{-n-2} & 3P_{-n-3} + 2P_{-n-2} - 3P_{-n-4} - 2P_{-n-3} \\ 3P_{-n-3} + 2P_{-n-2} - 3P_{-n-4} - 2P_{-n-3} & 3P_{-n-1} + 2P_{-n} - 3P_{-n-2} - 2P_{-n-1} & 3P_{-n-2} + 2P_{-n-1} - 3P_{-n-3} - 2P_{-n-2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

olur. Denklem (3.8) ve Teorem 4.2.2. den

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{-n}\mathcal{R}_0 &= \begin{pmatrix} R_{-n} - R_{-n-1} & R_{-n+2} - R_{-n+1} & R_{-n+1} - R_{-n} \\ R_{-n+1} - R_{-n} & R_{-n+3} - R_{-n+2} & R_{-n+2} - R_{-n+1} \\ R_{-n+2} - R_{-n+1} & R_{-n+4} - R_{-n+3} & R_{-n+3} - R_{-n+2} \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{R}_{-n+5} - \mathcal{R}_{-n+4} \\ &= \mathcal{R}_{-n}\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi de eşitliğin en solu ele alınırsa,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_0\mathcal{P}_{-n} &= \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_{-n-5} & P_{-n-3} & P_{-n-4} \\ P_{-n-4} & P_{-n-2} & P_{-n-3} \\ P_{-n-3} & P_{-n-1} & P_{-n-2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4P_{-n-5} + 2P_{-n-4} - 3P_{-n-3} & 4P_{-n-3} + 2P_{-n-2} - 3P_{-n-1} & 4P_{-n-4} + 2P_{-n-3} - 3P_{-n-2} \\ -3P_{-n-5} + P_{-n-4} + 2P_{-n-3} & -3P_{-n-3} + P_{-n-2} + 2P_{-n-1} & -3P_{-n-4} + P_{-n-3} + 2P_{-n-2} \\ 2P_{-n-5} - P_{-n-4} + P_{-n-3} & 2P_{-n-3} - P_{-n-2} + P_{-n-1} & 2P_{-n-4} - P_{-n-3} + P_{-n-2} \end{pmatrix} \\ \mathcal{R}_0\mathcal{P}_{-n} &= \begin{pmatrix} 3P_{-n-5} + 2P_{-n-4} - 3P_{-n-6} - 2P_{-n-5} & 3P_{-n-3} + 2P_{-n-2} - 3P_{-n-4} - 2P_{-n-3} & 3P_{-n-4} + 2P_{-n-3} - 3P_{-n-5} - 2P_{-n-4} \\ 3P_{-n-4} + 2P_{-n-3} - 3P_{-n-5} - 2P_{-n-4} & 3P_{-n-2} + 2P_{-n-1} - 3P_{-n-3} - 2P_{-n-2} & 3P_{-n-3} + 2P_{-n-2} - 3P_{-n-4} - 2P_{-n-3} \\ 3P_{-n-3} + 2P_{-n-2} - 3P_{-n-4} - 2P_{-n-3} & 3P_{-n-1} + 2P_{-n} - 3P_{-n-2} - 2P_{-n-1} & 3P_{-n-2} + 2P_{-n-1} - 3P_{-n-3} - 2P_{-n-2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

olur. Denklem (3.8) ve Teorem 4.2.2. den

$$\mathcal{R}_0\mathcal{P}_{-n} = \begin{pmatrix} R_{-n} - R_{-n-1} & R_{-n+2} - R_{-n+1} & R_{-n+1} - R_{-n} \\ R_{-n+1} - R_{-n} & R_{-n+3} - R_{-n+2} & R_{-n+2} - R_{-n+1} \\ R_{-n+2} - R_{-n+1} & R_{-n+4} - R_{-n+3} & R_{-n+3} - R_{-n+2} \end{pmatrix}$$
$$= \mathcal{R}_{-n+5} - \mathcal{R}_{-n+4}$$
$$= \mathcal{R}_{-n}$$

bulunur. □

Aşağıdaki sonuçta Lemma 4.2.1.1. den yararlanarak negatif indisli Perrin dizisi cinsinden negatif indisli Padovan dizisi elde edilecektir.

**Sonuç 4.2.1.2.** $n \in \mathbb{N}$ için, negatif indisli Padovan dizisinin negatif indisli Perrin dizisi cinsinden ifadesi

$$P_{-n-1} = \frac{1}{23}\left(R_{-n-3} + 8R_{-n-2} + 10R_{-n-1}\right)$$

dir (Yilmaz ve Taskara, 2014).

**İspat.** Lemma 4.2.1.1. iii) şartından

$$\mathcal{R}_0\mathcal{P}_{-n} = \mathcal{R}_{-n}$$

ise, bu eşitliğin her iki tarafı da soldan $\mathcal{R}_0$ matrisinin tersi ile çarpılırsa,

$$\mathcal{P}_{-n} = \mathcal{R}_0^{-1}\mathcal{R}_{-n}$$
$$= \frac{1}{23}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 7 & 10 & 1 \\ 1 & 8 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_{-n-5} & R_{-n-3} & R_{-n-4} \\ R_{-n-4} & R_{-n-2} & R_{-n-3} \\ R_{-n-3} & R_{-n-1} & R_{-n-2} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_{-n} = \frac{1}{23}\begin{pmatrix} 3R_{-n-5} + R_{-n-4} + 7R_{-n-3} & 3R_{-n-3} + R_{-n-2} + 7R_{-n-1} & 3R_{-n-4} + R_{-n-3} + 7R_{-n-2} \\ 7R_{-n-5} + 10R_{-n-4} + R_{-n-3} & 7R_{-n-3} + 10R_{-n-2} + R_{-n-1} & 7R_{-n-4} + 10R_{-n-3} + R_{-n-2} \\ R_{-n-5} + 8R_{-n-4} + 10R_{-n-3} & R_{-n-3} + 8R_{-n-2} + 10R_{-n-1} & R_{-n-4} + 8R_{-n-3} + 10R_{-n-2} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Teorem 4.2.2. den

$$\begin{pmatrix} P_{-n-5} & P_{-n-3} & P_{-n-4} \\ P_{-n-4} & P_{-n-2} & P_{-n-3} \\ P_{-n-3} & P_{-n-1} & P_{-n-2} \end{pmatrix} = \frac{1}{23}\begin{pmatrix} 3R_{-n-5}+R_{-n-4}+7R_{-n-3} & 3R_{-n-3}+R_{-n-2}+7R_{-n-1} & 3R_{-n-4}+R_{-n-3}+7R_{-n-2} \\ 7R_{-n-5}+10R_{-n-4}+R_{-n-3} & 7R_{-n-3}+10R_{-n-2}+R_{-n-1} & 7R_{-n-4}+10R_{-n-3}+R_{-n-2} \\ R_{-n-5}+8R_{-n-4}+10R_{-n-3} & R_{-n-3}+8R_{-n-2}+10R_{-n-1} & R_{-n-4}+8R_{-n-3}+10R_{-n-2} \end{pmatrix}$$

yazılabilir ve bu matris eşitliğinden yararlanarak 3. satır 2. sütun elemanları eşleştirilirse istenilen sonuca ulaşılır. □

**Sonuç 4.2.1.3.** $n \in \mathbb{N}$ için, negatif indisli Padovan matris dizisinin negatif indisli Perrin matris dizisi cinsinden ifadesi

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}_{-n} = \frac{1}{23}\left(\boldsymbol{\mathcal{R}}_{-n-2} + 8\boldsymbol{\mathcal{R}}_{-n-1} + 10\boldsymbol{\mathcal{R}}_{-n}\right)$$

dir.

**İspat.** Eşitliğin sağ tarafı ele alınırsa ve Teorem 4.2.2. den

$$\frac{1}{23}\left(\boldsymbol{\mathcal{R}}_{-n-2} + 8\boldsymbol{\mathcal{R}}_{-n-1} + 10\boldsymbol{\mathcal{R}}_{-n}\right) = \frac{1}{23}\left[\begin{pmatrix} R_{-n-7} & R_{-n-5} & R_{-n-6} \\ R_{-n-6} & R_{-n-4} & R_{-n-5} \\ R_{-n-5} & R_{-n-3} & R_{-n-4} \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} R_{-n-6} & R_{-n-4} & R_{-n-5} \\ R_{-n-5} & R_{-n-3} & R_{-n-4} \\ R_{-n-4} & R_{-n-2} & R_{-n-3} \end{pmatrix} + 10\begin{pmatrix} R_{-n-5} & R_{-n-3} & R_{-n-4} \\ R_{-n-4} & R_{-n-2} & R_{-n-3} \\ R_{-n-3} & R_{-n-1} & R_{-n-2} \end{pmatrix}\right]$$

olur. Sonuç 4.2.1.2 ve Teorem 4.2.2. göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{23}\left(\boldsymbol{\mathcal{R}}_{-n-2} + 8\boldsymbol{\mathcal{R}}_{-n-1} + 10\boldsymbol{\mathcal{R}}_{-n}\right) &= \frac{1}{23}\begin{pmatrix} R_{-n-7}+8R_{-n-6}+10R_{-n-5} & R_{-n-5}+8R_{-n-4}+10R_{-n-3} & R_{-n-6}+8R_{-n-5}+10R_{-n-4} \\ R_{-n-6}+8R_{-n-5}+10R_{-n-4} & R_{-n-4}+8R_{-n-3}+10R_{-n-2} & R_{-n-5}+8R_{-n-4}+10R_{-n-3} \\ R_{-n-5}+8R_{-n-4}+10R_{-n-3} & R_{-n-3}+8R_{-n-2}+10R_{-n-1} & R_{-n-4}+8R_{-n-3}+10R_{-n-2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_{-n-5} & P_{-n-3} & P_{-n-4} \\ P_{-n-4} & P_{-n-2} & P_{-n-3} \\ P_{-n-3} & P_{-n-1} & P_{-n-2} \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{\mathcal{P}}_{-n} \end{aligned}$$

elde edilir. □

Aşağıdaki teorem pozitif indisli Padovan matris dizisi ile negatif indisli Padovan matris dizisi arasındaki ilişkiyi verir.

**Teorem 4.2.1.4.** $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\mathcal{P}_{-n} = \left(\mathcal{P}_n\right)^{-1} \tag{4.19}$$

dir (Yilmaz ve Taskara, 2014).

**İspat.** Tanım 4.2.1. ve Tanım 4.1.1. den

$$\mathcal{P}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\mathcal{P}_0\right)^{-1}$$

$$\mathcal{P}_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left(\mathcal{P}_1\right)^{-1}$$

olduğu açıktır. Denklem (4.19) un $n = k \in \mathbb{N}$ için sağladığını kabul edelim ve $n = k+1$ için doğru olduğunu gösterelim. Teorem 4.1.1.4. i) şartından ve kabulümüzden

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{P}_{k+1}\right)^{-1} &= \left(\mathcal{P}_k \mathcal{P}_1\right)^{-1} \\ &= \left(\mathcal{P}_1\right)^{-1}\left(\mathcal{P}_k\right)^{-1} \\ &= \mathcal{P}_{-1}\mathcal{P}_{-k} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_{-k-5} & P_{-k-3} & P_{-k-4} \\ P_{-k-4} & P_{-k-2} & P_{-k-3} \\ P_{-k-3} & P_{-k-1} & P_{-k-2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_{-k-6} & P_{-k-4} & P_{-k-5} \\ P_{-k-5} & P_{-k-3} & P_{-k-4} \\ P_{-k-4} & P_{-k-2} & P_{-k-3} \end{pmatrix} = \mathcal{P}_{-k-1} \end{aligned}$$

olur. □

**Teorem 4.2.1.5.** $m, n \in \mathbb{N}$ için, aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

**i)** $\mathcal{P}_{-m}\mathcal{P}_{-n} = \mathcal{P}_{-m-n}$

**ii)** $\mathcal{P}_{m}\mathcal{P}_{-n} = \mathcal{P}_{m-n}$

**iii)** $\mathcal{P}_{-m}\mathcal{R}_{-n} = \mathcal{R}_{-n}\mathcal{P}_{-m} = \mathcal{R}_{-m-n}$

**iv)** $\mathcal{P}_m\mathcal{R}_{-n} = \mathcal{R}_m\mathcal{P}_{-n} = \mathcal{R}_{m-n}$

**v)** $\mathcal{R}_{-m}\mathcal{R}_{-n} = 4\mathcal{P}_{-m-n-4} + 4\mathcal{P}_{-m-n-7} + \mathcal{P}_{-m-n-10}$

**vi)** $\mathcal{R}_{-m}\mathcal{R}_{-n} = \mathcal{R}_0\mathcal{R}_{-m-n}$

**vii)** $\mathcal{R}_m\mathcal{R}_{-n} = \mathcal{R}_0\mathcal{R}_{m-n}$

(Yilmaz ve Taskara, 2014).

**İspat. i)** Teorem 4.2.1.4. ve Teorem 4.1.1.4. i) şartından,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{-m}\mathcal{P}_{-n} &= \left(\mathcal{P}_m\right)^{-1}\left(\mathcal{P}_n\right)^{-1}\\ &= \left(\mathcal{P}_n\mathcal{P}_m\right)^{-1}\\ &= \left(\mathcal{P}_{m+n}\right)^{-1} = \mathcal{P}_{-m-n}\end{aligned}$$

elde edilir.

**ii)** Teorem 4.1.3. ve Teorem 4.2.3. ten

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_m\mathcal{P}_{-n} &= \left(A_1\alpha^m + B_1\beta^m + C_1\gamma^m\right)\left(A_3\alpha^{-n} + B_3\beta^{-n} + C_3\gamma^{-n}\right)\\ &= A_1A_3\alpha^{m-n} + A_1B_3\alpha^m\beta^{-n} + A_1C_3\alpha^m\gamma^{-n}\\ &\quad + B_1A_3\beta^m\alpha^{-n} + B_1B_3\beta^{m-n} + B_1C_3\beta^m\gamma^{-n}\\ &\quad + C_1A_3\gamma^m\alpha^{-n} + C_1B_3\gamma^m\beta^{-n} + C_1C_3\gamma^{m-n}\end{aligned}$$

yazılır. $\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=1$ olduğundan ve Teorem 4.1.3 deki $A_1, B_1$ ve $C_1$ matrisleri ile Teorem 4.2.3 deki $A_3, B_3$ ve $C_3$ aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{1}{\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\begin{pmatrix}1 & \alpha^2 & \alpha\\ \alpha & \alpha^3 & \alpha^2\\ \alpha^2 & \alpha^4 & \alpha^3\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\begin{pmatrix}\alpha^2-1 & \alpha & 1\\ 1 & \alpha^2 & \alpha\\ \alpha & \alpha^3 & \alpha^2\end{pmatrix} = A_3\end{aligned}$$

$$B_1 = \frac{1}{\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\begin{pmatrix} 1 & \beta^2 & \beta \\ \beta & \beta^3 & \beta^2 \\ \beta^2 & \beta^4 & \beta^3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\begin{pmatrix} \beta^2-1 & \beta & 1 \\ 1 & \beta^2 & \beta \\ \beta & \beta^3 & \beta^2 \end{pmatrix}$$

$$= B_3$$

$$C_1 = \frac{1}{\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\begin{pmatrix} 1 & \gamma^2 & \gamma \\ \gamma & \gamma^3 & \gamma^2 \\ \gamma^2 & \gamma^4 & \gamma^3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\begin{pmatrix} \gamma^2-1 & \gamma & 1 \\ 1 & \gamma^2 & \gamma \\ \gamma & \gamma^3 & \gamma^2 \end{pmatrix}$$

$$= C_3$$

olup, Teorem 4.1.1.4. i) şartının ispatından,

$$A_1A_3 = A_1 = A_3,\ B_1B_3 = B_1 = B_3,\ C_1C_3 = C_1 = C_3$$

dir. Yine 4.1.1.4. i) şartının ispatından,

$$A_1B_3 = B_1A_3 = A_1C_3 = C_1A_3 = C_1B_3 = B_1C_3 = [0]_{3\times 3}$$

dir. O halde,

$$\mathcal{P}_m\mathcal{P}_{-n} = A_1\alpha^{m-n} + B_1\beta^{m-n} + C_1\gamma^{m-n} = \mathcal{P}_{m-n}$$

şeklinde elde edilir.

**iii)** Burada öncelikle $\mathcal{P}_{-m}\mathcal{R}_{-n} = \mathcal{R}_{-m-n}$ eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim, diğer kısmı benzer şekilde yapılabilir. Bu eşitliğin sol tarafı ve Lemma 4.2.1.1.iii) şartı yardımıyla,

$$\mathcal{P}_{-m}\mathcal{R}_{-n} = \mathcal{P}_{-m}\mathcal{P}_{-n}\mathcal{R}_0$$

yazılabilir. Diğer yandan Teorem 4.2.1.5.i) şartı ve yine Lemma 4.2.1.1.iii) şartından,

$$\mathcal{P}_{-m}\mathcal{R}_{-n} = \mathcal{P}_{-m-n}\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_{-m-n}$$

elde edilir.

**iv)** iii) şartında olduğu gibi, $\mathcal{P}_m\mathcal{R}_{-n} = \mathcal{R}_{m-n}$ eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim, diğer kısmı benzer şekilde yapılabilir. Bu eşitliğin sol tarafı ve Lemma 4.2.1.1.iii) şartı yardımıyla,

$$\mathcal{P}_m\mathcal{R}_{-n} = \mathcal{P}_m\mathcal{P}_{-n}\mathcal{R}_0$$

yazılır. Diğer yandan Teorem 4.2.1.5.ii) şartından ve yine Lemma 4.2.1.1.iii) şartından,

$$\mathcal{P}_m\mathcal{R}_{-n} = \mathcal{P}_{m-n}\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_{m-n}$$

bulunur.

**v)** Lemma 4.2.1.1.ii) şartından,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{-m}\mathcal{R}_{-n} &= \left(2\mathcal{P}_{-m-2} + \mathcal{P}_{-m-5}\right)\left(2\mathcal{P}_{-n-2} + \mathcal{P}_{-n-5}\right) \\ &= 4\mathcal{P}_{-m-2}\mathcal{P}_{-n-2} + 2\mathcal{P}_{-m-5}\mathcal{P}_{-n-2} + 2\mathcal{P}_{-m-2}\mathcal{P}_{-n-5} + \mathcal{P}_{-m-5}\mathcal{P}_{-n-5}\end{aligned}$$

olur. Son eşitlikte Teorem 4.2.1.5.ii) şartı kullanılırsa,

$$\mathcal{R}_{-m}\mathcal{R}_{-n} = 4\mathcal{P}_{-m-n-4} + 4\mathcal{P}_{-m-n-7} + \mathcal{P}_{-m-n-10}$$

elde edilir.

**vi)** Lemma 4.2.1.1.iii) şartından

$$\mathcal{R}_{-m}\mathcal{R}_{-n} = \mathcal{R}_0\mathcal{P}_{-m}\mathcal{R}_{-n}$$

yazılır ve Teorem 4.2.1.5.iii) şartından

$$\mathcal{R}_{-m}\mathcal{R}_{-n} = \mathcal{R}_0\mathcal{R}_{-m-n}$$

elde edilir.

**vii)** Lemma 4.1.1.1.iii) şartından

$$\mathcal{R}_{m}\mathcal{R}_{-n} = \mathcal{R}_0\mathcal{P}_{m}\mathcal{R}_{-n}$$

bulunur. Teorem 4.2.1.5.iv) şartından ise

$$\mathcal{R}_{m}\mathcal{R}_{-n} = \mathcal{R}_0\mathcal{R}_{m-n}$$

elde edilir. □

Teorem 4.2.1.5. ve Teorem 4.2.2 yi kullanarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 4.2.1.6.** $m,n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, Padovan ve Perrin dizileri için

**i)** $P_{-m-3}P_{-n-3} + P_{-m-1}P_{-n-2} + P_{-m-2}P_{-n-1} = P_{-m-n-1}$

**ii)** $P_{m-3}P_{-n-3} + P_{m-1}P_{-n-2} + P_{m-2}P_{-n-1} = P_{m-n-1}$

**iii)** $P_{-m-3}R_{-n-3} + P_{-m-1}R_{-n-2} + P_{-m-2}R_{-n-1} = R_{-m-n-1}$

**iv**) $P_{m-3}R_{-n-3} + P_{m-1}R_{-n-2} + P_{m-2}R_{-n-1} = R_{m-n-1}$

**v)** $R_{-m-3}R_{-n-3} + R_{-m-1}R_{-n-2} + R_{-m-2}R_{-n-1} = 4P_{-m-n-5} + 4P_{-m-n-8} + P_{-m-n-11}$

**vi)** $R_{-m-3}R_{-n-3} + R_{-m-1}R_{-n-2} + R_{-m-2}R_{-n-1} = 2R_{-m-n-3} + R_{-m-n-6}$

**vii)** $R_{m-3}R_{-n-3} + R_{m-1}R_{-n-2} + R_{m-2}R_{-n-1} = 2R_{m-n-3} + R_{m-n-6}$

eşitlikleri sağlanır (Yilmaz ve Taskara, 2014).

**İspat.** Teorem 4.2.1.5. ve Teorem 4.2.2 yi kullanarak ispatlar kolayca görülebilir. □

Aşağıdaki teorem negatif indisli Perrin matris dizisinin kuvvetleri arasındaki ilişkiyi verir.

**Teorem 4.2.1.7.** $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\mathcal{R}_{-n} = \left(\mathcal{R}_0\right)^{1-n}\left(\mathcal{R}_{-1}\right)^{n}$$

dır (Yilmaz ve Taskara, 2014).

**İspat.** Teorem 4.2.1.5. vi) şartı kullanılırsa

$$\mathcal{R}_0\mathcal{R}_{-n} = \mathcal{R}_{-n+1}\mathcal{R}_{-1}$$

bulunur. Bu son eşitlik $\mathcal{R}_0$ ile soldan çarpılır ve Teorem 4.2.1.5. vi) şartı tekrar kullanılırsa, o zaman

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_0\mathcal{R}_0\mathcal{R}_{-n} &= \mathcal{R}_0\mathcal{R}_{-n+1}\mathcal{R}_{-1}\\ &= \mathcal{R}_{-n+2}\mathcal{R}_{-1}\mathcal{R}_{-1}\end{aligned}$$

olur. Bu işlem $n$ kez sürekli tekrarlanırsa,

$$\mathcal{R}_0^{n-1}\mathcal{R}_{-n} = \mathcal{R}_{-1}^{n}$$

elde edilir. Son eşitlik $\mathcal{R}_0^{1-n}$ ile soldan çarpılırsa

$$\mathcal{R}_{-n} = \mathcal{R}_0^{1-n}\mathcal{R}_{-1}^{n}$$

olur ki, istenendir. □

Ayrıca Teorem 4.2.1.7. de, Teorem 4.2.1.5.iv) şartı göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{-n} &= \left(\mathcal{R}_n\mathcal{P}_{-n}\right)^{1-n}\mathcal{R}_{-1}^{n}\\ &= \mathcal{P}_{-n}^{1-n}\mathcal{R}_n^{1-n}\mathcal{R}_{-1}^{n}\\ &= \mathcal{P}_n^{n-1}\mathcal{R}_n^{1-n}\mathcal{R}_{-1}^{n}\\ &= \left(\mathcal{P}_n\mathcal{R}_n^{-1}\mathcal{R}_{-1}\right)^{n-1}\mathcal{R}_{-1}\end{aligned}$$

eşitlikleri de elde edilir ki bu eşitlikler de pozitif indisli Padovan ve Perrin matris dizileri cinsinden negatif Perrin matris dizisini ifade eder.

Yukarıdaki tüm sonuçların ışığında, aşağıdaki teoremlerde Padovan ve Perrin matris dizilerinin kuvvetleri elde edilmektedir.

**Teorem 4.2.1.8.** $m,n,r \in \mathbb{N}$ ve $n \geq r$ için,

**i)** $\left(\mathcal{P}_{-n}\right)^m = \mathcal{P}_{-mn}$

**ii)** $\left(\mathcal{P}_{-n-1}\right)^m = \left(\mathcal{P}_{-1}\right)^m \mathcal{P}_{-mn}$

**iii)** $\mathcal{P}_{-n-r}\mathcal{P}_{-n+r} = \left(\mathcal{P}_{-n}\right)^2 = \left(\mathcal{P}_{-2}\right)^n$

dır (Yilmaz ve Taskara, 2014).

**İspat. i)** Teorem 4.2.1.4. ten

$$\left(\mathcal{P}_{-n}\right)^m = \left(\left(\mathcal{P}_n\right)^{-1}\right)^m = \left(\left(\mathcal{P}_n\right)^m\right)^{-1}$$

yazılır ve Teorem 4.1.1.6.i) şartı ile tekrar Teorem 4.2.1.4. ten

$$\left(\mathcal{P}_{-n}\right)^m = \left(\mathcal{P}_{mn}\right)^{-1} = \mathcal{P}_{-mn}$$

bulunur.

**ii)** Eşitliğin sol tarafını göz önüne alalım. Teorem 4.2.1.8. i) ve Teorem 4.2.1.5. i) şartından

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{P}_{-n-1}\right)^m &= \mathcal{P}_{m(-n-1)} \\ &= \mathcal{P}_{-m}\mathcal{P}_{-mn} \\ &= \mathcal{P}_{-1}\mathcal{P}_{-m+1}\mathcal{P}_{-mn}\end{aligned}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde Teorem 4.2.1.5. i) şartından $\mathcal{P}_{-m+1} = \mathcal{P}_{-1}\mathcal{P}_{-m+2}$ yazılır ve iterasyona bu şekilde devam edilirse,

$$\left(\mathcal{P}_{-n-1}\right)^m = \underbrace{\mathcal{P}_{-1}\mathcal{P}_{-1}\cdots\mathcal{P}_{-1}}_{m \text{ tane}}\mathcal{P}_{-mn} = \left(\mathcal{P}_{-1}\right)^m \mathcal{P}_{-mn}$$

elde edilir.

**iii)** Eşitliğin sol tarafını göz önüne alalım. Teorem 4.2.1.5. i) ve Teorem 4.2.1.8. i) şartından

$$\mathcal{P}_{-n-r}\mathcal{P}_{-n+r} = \mathcal{P}_{-2n} = \left(\mathcal{P}_{-n}\right)^2$$

olarak bulunur. Ayrıca ii) şartının ispatına benzer şekilde iterasyon yapılırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{-n-r}\mathcal{P}_{-n+r} &= \mathcal{P}_{-2n}\\ &= \mathcal{P}_{-2}\mathcal{P}_{2-2n}\\ &= \mathcal{P}_{-2}\mathcal{P}_{-2}\mathcal{P}_{4-2n}\\ &\vdots\\ &= \underbrace{\mathcal{P}_{-2}\mathcal{P}_{-2}\dots\mathcal{P}_{-2}}_{n \text{ tane}}\\ &= \left(\mathcal{P}_{-2}\right)^n\end{aligned}$$

elde edilir. □

**Teorem 4.2.1.9.** $m,n,r \in \mathbb{N}$ ve $n \geq r$ için,

**i)** $\mathcal{R}_{-n-r}\mathcal{R}_{-n+r} = \left(\mathcal{R}_{-n}\right)^2$

**ii)** $\left(\mathcal{R}_{-n}\right)^m = \mathcal{R}_0^m\mathcal{P}_{-mn} = \mathcal{R}_0^{m-1}\mathcal{R}_{-mn}$

eşitlikleri sağlar (Yilmaz ve Taskara, 2014).

**İspat. i)** Eşitliğin sol tarafı ve Teorem 4.2.1.6. vi) şartı göz önüne alınırsa,

$$\mathcal{R}_{-n-r}\mathcal{R}_{-n+r} = \mathcal{R}_0\mathcal{R}_{-2n} = \mathcal{R}_0\mathcal{R}_{-n-n} = \mathcal{R}_{-n}\mathcal{R}_{-n} = \left(\mathcal{R}_{-n}\right)^2$$

olarak bulunur.

**ii)** Eşitliğin sol tarafını ele alalım. Lemma 4.2.1.1. iii) şartından

$$\left(\mathcal{R}_{-n}\right)^m = \left(\mathcal{R}_0\mathcal{P}_{-n}\right)^m = \mathcal{R}_0^m\left(\mathcal{P}_{-n}\right)^m$$

olur ve Teorem 4.2.1.8. i) şartından

$$\left(\mathcal{R}_{-n}\right)^m = \mathcal{R}_0^m \mathcal{P}_{-mn}$$

elde edilir. Böylece ispatın ilk kısmı bitmiş olur. İkinci kısım için bu son eşitlikten devam edilerek Lemma 4.2.1.1. iii) şartı kullanılırsa, yani

$$\left(\mathcal{R}_{-n}\right)^m = \mathcal{R}_0^m \mathcal{P}_{-mn} = \mathcal{R}_0^{m-1} \mathcal{R}_0 \mathcal{P}_{-mn} = \mathcal{R}_0^{m-1} \mathcal{R}_{-mn}$$

olur. □

### 4.3. Padovan ve Perrin Matris Dizilerinin Binomial Dönüşümleri

Bu bölümde öncelikle Padovan ve Perrin matris dizilerinin binomial dönüşümlerini tanımlanacaktır. Daha sonra bu dönüşümlerin rekürans bağıntıları, Binet benzeri formülleri, toplamları ve üreteçleri bulunacaktır.

**Tanım 4.3.1.** Padovan matris dizisi $\mathcal{P}_n$ ve Perrin matris dizisi $\mathcal{R}_n$ olmak üzere, bu matris dizilerinin binomial dönüşümleri sırasıyla

$$b_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \mathcal{P}_i \tag{4.20}$$

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \mathcal{R}_i \tag{4.21}$$

şeklinde tanımlanır (Yilmaz ve Taskara, 2013).

$n \geq 0$ için, Tanım 4.3.1., (4.1) ve (4.2) denklemlerinden,

$$b_0 = \mathcal{P}_0,\ b_1 = \mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_3,\ b_2 = \mathcal{P}_0 + 2\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_6, \ldots, b_n = \mathcal{P}_{3n} \tag{4.22}$$

$$c_0 = \mathcal{R}_0,\ c_1 = \mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_3,\ c_2 = \mathcal{R}_0 + 2\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_6, \ldots, c_n = \mathcal{R}_{3n} \tag{4.23}$$

elde edilir.

Aşağıdaki lemma daha sonra verilecek olan teoremlerin ispatında sıklıkla karşımıza çıkacağı için oldukça önemli bir bulgudur.

**Lemma 4.3.2.** $n \in \mathbb{N}$ için, aşağıdaki eşitlikler sağlar:

**i)** $b_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (\mathcal{P}_i + \mathcal{P}_{i+1})$

**ii)** $c_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (\mathcal{R}_i + \mathcal{R}_{i+1})$

(Yilmaz ve Taskara, 2013).

**İspat. i)** Tanım 4.3.1. ve $\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i} + \binom{n}{i-1}$ eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} \mathcal{P}_i + \mathcal{P}_0 \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i} \mathcal{P}_i + \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} \mathcal{P}_i + \mathcal{P}_0 \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \mathcal{P}_i + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \mathcal{P}_{i+1} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (\mathcal{P}_i + \mathcal{P}_{i+1}) \end{aligned}$$

bulunur.

**ii)** i) şartına benzer şekilde, Tanım 4.3.1. ve $\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i} + \binom{n}{i-1}$ eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} \mathcal{R}_i + \mathcal{R}_0 \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i} \mathcal{R}_i + \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} \mathcal{R}_i + \mathcal{R}_0 \\ c_{n+1} &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \mathcal{R}_i + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \mathcal{R}_{i+1} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (\mathcal{R}_i + \mathcal{R}_{i+1}) \end{aligned}$$

elde edilir. □

Lemma 4.3.2. den, aşağıdaki sonuçlar yazılabilir.

$$\textbf{i)}\ b_{n+1} = b_n + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \mathcal{P}_{i+1}, \tag{4.24}$$

$$\textbf{ii)}\ c_{n+1} = c_n + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \mathcal{R}_{i+1}. \tag{4.25}$$

**Teorem 4.3.3.** $n > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için, $\{b_n\}$ ve $\{c_n\}$ dönüşümlerinin rekürans bağıntıları

$$\textbf{i)}\ b_{n+2} = 3b_{n+1} - 2b_n + b_{n-1} \tag{4.26}$$

$$\textbf{ii)}\ c_{n+2} = 3c_{n+1} - 2c_n + c_{n-1} \tag{4.27}$$

şeklinde ve başlangıç şartları ise sırasıyla

$$b_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c_0 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ c_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix},\ c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

şeklindedir (Yilmaz ve Taskara, 2013).

**İspat. i)** Verilen eşitliğin sağ tarafını ve Tanım 4.3.1. i göz önüne alalım. O halde

$$\begin{aligned} 3b_{n+1} - 2b_n + b_{n-1} &= 3\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \mathcal{P}_i - 2\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \mathcal{P}_i + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \mathcal{P}_i \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \mathcal{P}_i + 2\sum_{i=0}^{n+1} \left[ \binom{n+1}{i} - \binom{n}{i} \right] \mathcal{P}_i + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \mathcal{P}_i \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \mathcal{P}_i + 2\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n}{i-1} \mathcal{P}_i + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \mathcal{P}_i \end{aligned}$$

elde edilir. $\binom{n+1}{n} = \binom{n}{-1} = 0$ olduğu dikkate alınırsa,

$$3b_{n+1}-2b_n+b_{n-1}=\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\mathcal{P}_i+2\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}\mathcal{P}_i+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\mathcal{P}_i$$

$$=\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\mathcal{P}_i+\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\mathcal{P}_{i+1}+\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}\mathcal{P}_i+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\mathcal{P}_i$$

$$3b_{n+1}-2b_n+b_{n-1}=\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\mathcal{P}_i+\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n}{i}\mathcal{P}_{i+1}+\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}\mathcal{P}_i+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\mathcal{P}_i+\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n}{i-1}\mathcal{P}_{i+1}$$

$$-\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n}{i-1}\mathcal{P}_{i+1}$$

$$=\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\mathcal{P}_i+\sum_{i=0}^{n+1}\left[\binom{n}{i}+\binom{n}{i-1}\right]\mathcal{P}_{i+1}+\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}\mathcal{P}_i+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\mathcal{P}_i$$

$$-\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}\mathcal{P}_{i+1}$$

$$=\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\mathcal{P}_i+\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\mathcal{P}_{i+1}+\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}\mathcal{P}_i+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\mathcal{P}_i-\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}\mathcal{P}_{i+1}$$

bulunur. Lemma 4.3.2. i) şartı ve binomial toplam özelliklerinden

$$3b_{n+1}-2b_n+b_{n-1}=b_{n+2}+\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\mathcal{P}_{i+1}+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\mathcal{P}_i-\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\mathcal{P}_{i+2}$$

olur. Diğer yandan, denklem (4.1) ve $\binom{n}{-1}=0$ eşitliği kullanılarak

$$3b_{n+1}-2b_n+b_{n-1}=b_{n+2}+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\mathcal{P}_i-\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\mathcal{P}_{i-3}$$

$$=b_{n+2}+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\mathcal{P}_i-\sum_{i=0}^{n}\left[\binom{n-1}{i}+\binom{n-1}{i-1}\right]\mathcal{P}_{i-3}$$

$$=b_{n+2}+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\mathcal{P}_i-\sum_{i=0}^{n}\binom{n-1}{i}\mathcal{P}_{i-3}-\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}\mathcal{P}_{i-3}$$

$$=b_{n+2}+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\mathcal{P}_i-\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\mathcal{P}_{i-3}-\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\mathcal{P}_{i-2}$$

$$=b_{n+2}+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\left(\mathcal{P}_i-\mathcal{P}_{i-2}-\mathcal{P}_{i-3}\right)$$

$$=b_{n+2}$$

sonucu bulunur.

**ii)** i) şartına benzer şekilde, verilen eşitliğin sağ tarafını ve Tanım 4.3.1. i göz önüne alalım. O halde

$$\begin{aligned}
3c_{n+1}-2c_n+c_{n-1} &= 3\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\mathcal{R}_i-2\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\mathcal{R}_i+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\mathcal{R}_i \\
&= \sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\mathcal{R}_i+2\sum_{i=0}^{n+1}\left[\binom{n+1}{i}-\binom{n}{i}\right]\mathcal{R}_i+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\mathcal{R}_i \\
&= \sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\mathcal{R}_i+2\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n}{i-1}\mathcal{R}_i+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\mathcal{R}_i
\end{aligned}$$

elde edilir. $\binom{n+1}{n}=\binom{n}{-1}=0$ olduğu dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned}
3c_{n+1}-2c_n+c_{n-1} &= \sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\mathcal{R}_i+2\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}\mathcal{R}_i+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\mathcal{R}_i \\
&= \sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\mathcal{R}_i+\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\mathcal{R}_{i+1}+\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}\mathcal{R}_i+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\mathcal{R}_i \\
&= \sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\mathcal{R}_i+\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n}{i}\mathcal{R}_{i+1}+\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}\mathcal{R}_i+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\mathcal{R}_i+\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n}{i-1}\mathcal{R}_{i+1} \\
&\quad -\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n}{i-1}\mathcal{R}_{i+1} \\
3c_{n+1}-2c_n+c_{n-1} &= \sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\mathcal{R}_i+\sum_{i=0}^{n+1}\left[\binom{n}{i}+\binom{n}{i-1}\right]\mathcal{R}_{i+1}+\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}\mathcal{R}_i+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\mathcal{R}_i \\
&\quad -\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}\mathcal{R}_{i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\mathcal{R}_i+\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\mathcal{R}_{i+1}+\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}\mathcal{R}_i+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\mathcal{R}_i-\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}\mathcal{R}_{i+1}
\end{aligned}$$

bulunur. Lemma 4.3.2. ii) şartı ve binomial toplam özelliklerinden

$$3c_{n+1}-2c_n+c_{n-1}=c_{n+2}+\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\mathcal{R}_{i+1}+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\mathcal{R}_i-\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\mathcal{R}_{i+2}$$

olur. Diğer yandan, denklem (4.2) ve $\binom{n}{-1}=0$ eşitliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
3c_{n+1}-2c_n+c_{n-1} &= c_{n+2}+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\mathcal{R}_i-\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\mathcal{R}_{i-3} \\
&= c_{n+2}+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\mathcal{R}_i-\sum_{i=0}^{n}\left[\binom{n-1}{i}+\binom{n-1}{i-1}\right]\mathcal{R}_{i-3} \\
&= c_{n+2}+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\mathcal{R}_i-\sum_{i=0}^{n}\binom{n-1}{i}\mathcal{R}_{i-3}-\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}\mathcal{R}_{i-3} \\
&= c_{n+2}+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\mathcal{R}_i-\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\mathcal{R}_{i-3}-\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\mathcal{R}_{i-2} \\
&= c_{n+2}+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\left(\mathcal{R}_i-\mathcal{R}_{i-2}-\mathcal{R}_{i-3}\right) \\
&= c_{n+2}
\end{aligned}
$$

sonucu bulunur ve ispat tamamlanır. □

(4.26) denklemindeki $\{b_n\}$ ve (4.27) denklemindeki $\{c_n\}$ dizilerinin karakteristik denklemi $\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda-1=0$ dır. Bu denklemin kökleri $\lambda_1$, $\lambda_2$ ve $\lambda_3$ olsun. Burada

$$
X_1=\frac{1}{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}\begin{pmatrix}\lambda_1^2-2\lambda_1+1 & \lambda_1^2-\lambda_1 & \lambda_1 \\ \lambda_1 & \lambda_1^2-\lambda_1+1 & \lambda_1^2-\lambda_1 \\ \lambda_1^2-\lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^2-\lambda_1+1\end{pmatrix}
$$

$$
Y_1=\frac{1}{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}\begin{pmatrix}\lambda_2^2-2\lambda_2+1 & \lambda_2^2-\lambda_2 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_2^2-\lambda_2+1 & \lambda_2^2-\lambda_2 \\ \lambda_2^2-\lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^2-\lambda_2+1\end{pmatrix}
$$

$$
Z_1=\frac{1}{\lambda_3(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}\begin{pmatrix}\lambda_3^2-2\lambda_3+1 & \lambda_3^2-\lambda_3 & \lambda_3 \\ \lambda_3 & \lambda_3^2-\lambda_3+1 & \lambda_3^2-\lambda_3 \\ \lambda_3^2-\lambda_3 & \lambda_3^2 & \lambda_3^2-\lambda_3+1\end{pmatrix}
$$

ve

$$X_2=\frac{1}{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}\begin{pmatrix}\lambda_1^2-3\lambda_1+4 & 3\lambda_1^2-6\lambda_1+2 & -\lambda_1^2+5\lambda_1-3\\ -\lambda_1^2+5\lambda_1-3 & 2\lambda_1+1 & 3\lambda_1^2-6\lambda_1+2\\ 3\lambda_1^2-6\lambda_1+2 & 2\lambda_1^2-\lambda_1-1 & 2\lambda_1+1\end{pmatrix}$$

$$Y_2=\frac{1}{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}\begin{pmatrix}\lambda_2^2-3\lambda_2+4 & 3\lambda_2^2-6\lambda_2+2 & -\lambda_2^2+5\lambda_2-3\\ -\lambda_2^2+5\lambda_2-3 & 2\lambda_2+1 & 3\lambda_2^2-6\lambda_2+2\\ 3\lambda_2^2-6\lambda_2+2 & 2\lambda_2^2-\lambda_2-1 & 2\lambda_2+1\end{pmatrix}$$

$$Z_2=\frac{1}{\lambda_3(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}\begin{pmatrix}\lambda_3^2-3\lambda_3+4 & 3\lambda_3^2-6\lambda_3+2 & -\lambda_3^2+5\lambda_3-3\\ -\lambda_3^2+5\lambda_3-3 & 2\lambda_3+1 & 3\lambda_3^2-6\lambda_3+2\\ 3\lambda_3^2-6\lambda_3+2 & 2\lambda_3^2-\lambda_3-1 & 2\lambda_3+1\end{pmatrix}$$

olmak üzere, bu dizilerin Binet benzeri formülleri sırasıyla

$$b_n=X_1\lambda_1^n+Y_1\lambda_2^n+Z_1\lambda_3^n \tag{4.28}$$

$$c_n=X_2\lambda_1^n+Y_2\lambda_2^n+Z_2\lambda_3^n \tag{4.29}$$

dir (Yilmaz ve Taskara, 2013).

Şimdi bu yeni dizilere ait kısmi toplam formüllerini verelim.

**Teorem 4.3.4.** $n\in\mathbb{Z}^+$ için, $\{b_n\}$ ve $\{c_n\}$ dönüşümlerin toplamları

**i)** $\sum_{k=0}^{n-1} b_k=\mathcal{P}_{3n-1}-\mathcal{P}_{-1}$

**ii)** $\sum_{k=0}^{n-1} c_k=\mathcal{R}_{3n-1}-\mathcal{R}_{-1}$

dir (Yilmaz ve Taskara, 2013).

**İspat. i)** Denklem (4.22) göz önüne alınırsa,

$$\sum_{k=0}^{n-1} b_k=\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{P}_{3k}$$

yazılır ve Teorem 4.1.5. i) şartında $m=3$, $j=3$ seçilir ve denklem (4.1) dikkate alınarak düzenlenirse

$$\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{P}_{3k+3}=\frac{\mathcal{P}_{3n+6}+\mathcal{P}_{3n}+(1-3)\mathcal{P}_{3n+3}-\mathcal{P}_{6}-\mathcal{P}_{0}+(3-1)\mathcal{P}_{3}}{3-2}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{P}_{3k}-\mathcal{P}_{0}+\mathcal{P}_{3n}=\mathcal{P}_{3n+2}-\mathcal{P}_{2}$$

bulunur. Son eşitlik tekrar denklem (4.1) dikkate alınarak düzenlenirse,

$$\sum_{k=0}^{n-1}b_{k}=\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{P}_{3k}=\mathcal{P}_{3n-1}-\mathcal{P}_{-1}$$

elde edilir.

**ii)** Denklem (4.23) göz önüne alınırsa,

$$\sum_{k=0}^{n-1}c_{k}=\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{R}_{3k}$$

yazılır ve Teorem 4.1.5. ii) şartında $m=3$, $j=3$ seçilir ve denklem (4.2) dikkate alınarak düzenlenirse

$$\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{R}_{3k+3}=\frac{\mathcal{R}_{3n+6}+\mathcal{R}_{3n}+(1-3)\mathcal{R}_{3n+3}-\mathcal{R}_{6}-\mathcal{R}_{0}+(3-1)\mathcal{R}_{3}}{3-2}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{R}_{3k}-\mathcal{R}_{0}+\mathcal{R}_{3n}=\mathcal{R}_{3n+2}-\mathcal{R}_{2}$$

bulunur. Son eşitlik tekrar denklem (4.2) dikkate alınarak düzenlenirse,

$$\sum_{k=0}^{n-1}c_{k}=\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{R}_{3k}=\mathcal{R}_{3n-1}-\mathcal{R}_{-1}$$

elde edilir. □

**Teorem 4.3.5.** $\{\mathcal{P}_{n}\}$ ve $\{\mathcal{R}_{n}\}$ matris dizilerinin binomial dönüşümlerinin üreteç fonksiyonları sırasıyla

**i)** $\sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i = \frac{1}{1-3t+2t^2-t^3}\begin{pmatrix} 1-2t & t-t^2 & t^2 \\ t^2 & 1-2t+t^2 & t-t^2 \\ t-t^2 & t & 1-2t+t^2 \end{pmatrix}$

**ii)** $\sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i = \frac{1}{1-3t+2t^2-t^3}\begin{pmatrix} 4-11t+5t^2 & 2-3t-2t^2 & -3+8t-t^2 \\ -3+8t-t^2 & 1-3t+4t^2 & 2-3t-2t^2 \\ 2-3t-2t^2 & -1+5t-3t^2 & 1-3t+4t^2 \end{pmatrix}$

dır (Yilmaz ve Taskara, 2013).

**İspat. i)** $\mathrm{b}(t)$, $\{\mathcal{P}_n\}$ matris dizisinin binomial dönüşümünün üreteç fonksiyonu olsun. Yani $b(t)=\sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i$ olsun. O halde denklem (3.12) ve Teorem 4.1.7. i) şartı yardımıyla

$$b(t)=\frac{1}{1-t}G\left(\frac{t}{1-t}\right)$$

$$b(t)=\frac{1}{1-t}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{t}{1-t}\right)^2-\left(\frac{t}{1-t}\right)^3}\begin{pmatrix} 1-\left(\frac{t}{1-t}\right)^2 & \left(\frac{t}{1-t}\right) & \left(\frac{t}{1-t}\right)^2 \\ \left(\frac{t}{1-t}\right)^2 & 1 & \left(\frac{t}{1-t}\right) \\ \left(\frac{t}{1-t}\right) & \left(\frac{t}{1-t}\right)+\left(\frac{t}{1-t}\right)^2 & 1 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bulunan son eşitlik yeniden düzenlenirse,

$$b(t)=\frac{1}{1-t}\cdot\frac{(1-t)^3}{(1-t)^3-t^2(1-t)-t^3}\cdot\frac{1}{(1-t)^2}\begin{pmatrix} (1-t)^2-t^2 & t(1-t) & t^2 \\ t^2 & (1-t)^2 & t(1-t) \\ t(1-t) & t(1-t)+t^2 & (1-t)^2 \end{pmatrix}$$

$$b(t)=\frac{1}{1-3t+2t^2-t^3}\begin{pmatrix} 1-2t & t-t^2 & t^2 \\ t^2 & 1-2t+t^2 & t-t^2 \\ t-t^2 & t & 1-2t+t^2 \end{pmatrix}$$

sonucuna ulaşılır.

**ii)** $c(t)$, $\{\mathcal{R}_n\}$ matris dizisinin binomial dönüşümünün üreteç fonksiyonu olsun. Yani $c(t)=\sum_{i=0}^{\infty}c_i t^i$ olsun. O halde Teorem 4.3.3. ii) şartından

$$\begin{aligned} c(t) &= c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \sum_{i=3}^{\infty}\left(3c_{i-1} - 2c_{i-2} + c_{i-3}\right)t^i \\ &= c_0 + c_1 t + c_2 t^2 - 3c_0 t - 3c_1 t^2 + 2c_0 t^2 + 3t\sum_{i=0}^{\infty}c_i t^i - 2t^2\sum_{i=0}^{\infty}c_i t^i + t^3\sum_{i=0}^{\infty}c_i t^i \\ &= c_0 + \left(c_1 - 3c_0\right)t + \left(c_2 - 3c_1 + 2c_0\right)t^2 + 3tc(t) - 2t^2 c(t) + t^3 c(t) \end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan son eşitlik yeniden düzenlenirse,

$$c(t) = \frac{c_0 + \left(c_1 - 3c_0\right)t + \left(c_2 - 3c_1 + 2c_0\right)t^2}{1 - 3t + 2t^2 - t^3}$$

bulunur ve burada Teorem 4.3.3. deki başlangıç şartları yerine koyulursa,

$$c(t) = \frac{1}{1 - 3t + 2t^2 - t^3}\begin{pmatrix} 4 - 11t + 5t^2 & 2 - 3t - 2t^2 & -3 + 8t - t^2 \\ -3 + 8t - t^2 & 1 - 3t + 4t^2 & 2 - 3t - 2t^2 \\ 2 - 3t - 2t^2 & -1 + 5t - 3t^2 & 1 - 3t + 4t^2 \end{pmatrix}$$

sonucuna ulaşılır. □

### 4.3.1. Binomial dönüşümler arasındaki ilişkiler

Bu bölümde $\{b_n\}$ ve $\{c_n\}$ binomial dönüşümlerinin kendi aralarındaki ilişkileri inceleyeceğiz. Çok ilginçtir ki, bu ilişkiler yukarıdaki bölümlerde tanımladığımız ve bazı özelliklerini verdiğimiz matris dizilerinin kendi aralarında olan ilişkilere oldukça benzerdir.

**Teorem 4.3.1.1.** $n, m \in \mathbb{N}$ için,

**i)** $b_n b_m = b_{n+m}$, $\quad n \le m$

**ii)** $b_n c_m = c_n b_m = c_{n+m}$

**iii)** $c_n c_m = 2c_{n+m} - c_{n+m-1} - c_{n+m-2}$, ya $m>1$ ya da $n>1$

**iv)** $c_n c_m = 8b_{n+m} - 15b_{n+m-1} + 2b_{n+m-2}$, $m,n>1$

eşitlikleri sağlar (Yilmaz ve Taskara, 2013).

**İspat. i)** Tanım 4.3.1. den,

$$b_n b_m = \left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\mathcal{P}_i\right)\left(\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\mathcal{P}_j\right)$$
$$= \left[\binom{n}{0}\mathcal{P}_0 + \binom{n}{1}\mathcal{P}_1 + \cdots + \binom{n}{n}\mathcal{P}_n\right]\left[\binom{m}{0}\mathcal{P}_0 + \binom{m}{1}\mathcal{P}_1 + \cdots + \binom{m}{m}\mathcal{P}_m\right]$$

yazılır. Son eşitlik düzenlenip Teorem 4.1.1.4. i) şartı dikkate alınırsa

$$b_n b_m = \binom{n}{0}\binom{m}{0}\mathcal{P}_0 + \binom{n}{0}\binom{m}{1}\mathcal{P}_1 + \cdots + \binom{n}{0}\binom{m}{m}\mathcal{P}_m + \binom{n}{1}\binom{m}{0}\mathcal{P}_1 + \binom{n}{1}\binom{m}{1}\mathcal{P}_2 + \cdots + \binom{n}{1}\binom{m}{m}\mathcal{P}_{m+1}$$
$$+ \cdots + \binom{n}{n}\binom{m}{0}\mathcal{P}_n + \binom{n}{n}\binom{m}{1}\mathcal{P}_{n+1} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{m}{m}\mathcal{P}_{n+m}$$
$$= \binom{n}{0}\binom{m}{0}\mathcal{P}_0 + \left[\binom{n}{0}\binom{m}{1} + \binom{n}{1}\binom{m}{0}\right]\mathcal{P}_1 + \left[\binom{n}{0}\binom{m}{2} + \binom{n}{1}\binom{m}{1} + \binom{n}{2}\binom{m}{0}\right]\mathcal{P}_2 + \cdots$$
$$+ \left[\binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \cdots + \binom{n}{k}\binom{m}{0}\right]\mathcal{P}_k + \cdots + \binom{n}{n}\binom{m}{m}\mathcal{P}_{n+m}$$

elde edilir. Vandermonde eşitliğinden $\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\binom{m}{k-j} = \binom{n+m}{k}$,

$$b_n b_m = \binom{n+m}{0}\mathcal{P}_0 + \binom{n+m}{1}\mathcal{P}_1 + \binom{n+m}{2}\mathcal{P}_2 + \cdots + \binom{n+m}{k}\mathcal{P}_k + \cdots + \binom{n+m}{n+m}\mathcal{P}_{n+m}$$
$$= \sum_{i=0}^{n+m}\binom{n+m}{i}\mathcal{P}_i$$
$$= b_{n+m}$$

bulunur.

**ii)** Burada sadece $b_n c_m = c_{n+m}$ eşitliğinin doğruluğunu gösterelim diğer kısım benzer şekilde gösterilebilir. Denklem (4.22), (4.23) ve Teorem 4.1.1.4.ii) şartından,

$$b_n c_m = \mathcal{P}_{3n}\mathcal{R}_{3m} = \mathcal{R}_{3n+3m} = c_{n+m}$$

olur.

**iii)** Denklem (4.23) ve Teorem 4.1.1.4.iv) şartından,

$$c_n c_m = \mathcal{R}_{3n}\mathcal{R}_{3m} = 2\mathcal{R}_{3n+3m-2} + \mathcal{R}_{3n+3m-5}$$

elde edilir. Denklem (4.2) dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} c_n c_m &= 2\left(\mathcal{R}_{3n+3m} - \mathcal{R}_{3n+3m-3}\right) + \mathcal{R}_{3n+3m-3} - \mathcal{R}_{3n+3m-6} \\ &= 2\mathcal{R}_{3n+3m} - \mathcal{R}_{3n+3m-3} - \mathcal{R}_{3n+3m-6} \end{aligned}$$

bulunur. Denklem (4.23) ten

$$c_n c_m = 2c_{n+m} - c_{n+m-1} - c_{n+m-2}$$

sonucuna ulaşılır.

**iv)** Denklem (4.23) ve Teorem 4.1.1.4.iii) şartından,

$$c_n c_m = \mathcal{R}_{3n}\mathcal{R}_{3m} = 4\mathcal{P}_{3n+3m-4} + 4\mathcal{P}_{3n+3m-7} + \mathcal{P}_{3n+3m-10}$$

elde edilir. Denklem (4.1) dikkate alınırsa,

$$c_n c_m = 9\mathcal{P}_{3n+3m} - 18\mathcal{P}_{3n+3m-3} + 4\mathcal{P}_{3n+3m-6} - \mathcal{P}_{3n+3m-9}$$

bulunur. Denklem (4.22) den

$$c_n c_m = 8b_{n+m} - 15b_{n+m-1} + 2b_{n+m-2}$$

sonucuna ulaşılır. □

**Teorem 4.3.1.2.** $n \in \mathbb{N}$ için, $\{b_n\}$ ve $\{c_n\}$ binomial dönüşümlerinin özellikleri

**i)** $b_{n+1}-b_n=\mathcal{P}_1 b_n$

**ii)** $c_{n+1}-c_n=\mathcal{P}_1 c_n$

**iii)** $c_{n+1}-c_n=\mathcal{R}_1 b_n$

şeklindedir (Yilmaz ve Taskara, 2013).

**İspat. i)** Tanım 4.3.1. ve Lemma 4.3.2. i) şartından,

$$\begin{aligned} b_{n+1}-b_n &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\mathcal{P}_{i+1}+\mathcal{P}_i\right)-\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\mathcal{P}_i \\ &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\mathcal{P}_{i+1} \end{aligned}$$

olur. Teorem 4.1.1.4. i) şartından,

$$\begin{aligned} b_{n+1}-b_n &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\mathcal{P}_1\mathcal{P}_i \\ &= \mathcal{P}_1 b_n \end{aligned}$$

elde edilir.

**ii)** Denklem (4.25) ten,

$$c_{n+1}-c_n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\mathcal{R}_{i+1}$$

olur. Teorem 4.1.1.4. ii) şartından,

$$\begin{aligned} c_{n+1}-c_n &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\mathcal{P}_1\mathcal{R}_i \\ &= \mathcal{P}_1 c_n \end{aligned}$$

elde edilir.

**iii)** ii) şartına benzer şekilde yapılır. □

**Teorem 4.3.1.3.** $n,m \in \mathbb{N}$ için, $\{b_n\}$ ve $\{c_n\}$ binomial dönüşümleri arasındaki diğer bir ilişki

$$\mathcal{R}_m b_n = \mathcal{P}_m c_n$$

dir (Yilmaz ve Taskara, 2013).

**İspat.** Verilen eşitliğin sol tarafı ve Tanım 4.3.1. dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_m b_n &= \mathcal{R}_m \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \mathcal{P}_i \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \mathcal{R}_m \mathcal{P}_i\end{aligned}$$

olur ve Teorem 4.1.1.4. ii) şartından,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_m b_n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \mathcal{R}_{m+i} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \mathcal{R}_i \mathcal{P}_m \\ &= \mathcal{P}_m c_n\end{aligned}$$

bulunur. □

Teorem 4.3.1.3. te $m = 0$ seçilirse aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 4.3.1.4**. $n \in \mathbb{N}$ için, aşağıdaki eşitlikler sağlar:

**i)** $c_n = \mathcal{R}_0 b_n$

**ii)** $b_n = \mathcal{R}_0^{-1} c_n$

(Yilmaz ve Taskara, 2013).

### 4.4. Padovan ve Perrin Matris Dizilerinin Tekrarlanan Binomial Dönüşümleri

Bu bölümde öncelikle Padovan ve Perrin matris dizilerinin $r$ kez tekrarlanan binomial dönüşümleri tanımlanmaktadır. Daha sonra bu dönüşümlerin rekürans bağıntıları, Binet benzeri formülleri, toplamları ve üreteçleri bulunacaktır. Tanımlanan bu tekrarlanan dönüşüm aslında Bölüm 4.3. ün bir genellemesi olacaktır yani Bölüm 4.4. teki tüm bulgularda $r=1$ seçilecek olursa Bölüm 4.3. teki sonuçlar elde edilir.

Padovan ve Perrin matris dizilerinin tekrarlanan binomial dönüşümleri sırasıyla $B^{(r)}=\left\{b_n^{(r)}\right\}$ ve $C^{(r)}=\left\{c_n^{(r)}\right\}$ ile gösterilsin. $b_n^{(r)}$ ve $c_n^{(r)}$ dizileri, Padovan ve Perrin matris dizilerine binomial dönüşüm $r$ kez uygulanarak bulunur. Örneğin, Padovan ve Perrin matris dizilerinin ilk dört elemanlarına binomial dönüşüm $r$ kez uygulanırsa

$$\left.\begin{aligned} b_0^{(r)} &= \mathcal{P}_0 \\ b_1^{(r)} &= r\mathcal{P}_0+\mathcal{P}_1 \\ b_2^{(r)} &= r^2\mathcal{P}_0+2r\mathcal{P}_1+\mathcal{P}_2 \\ b_3^{(r)} &= \left(r^3+1\right)\mathcal{P}_0+\left(3r^2+1\right)\mathcal{P}_1+3r\mathcal{P}_2 \end{aligned}\right\} \tag{4.30}$$

$$\left.\begin{aligned} c_0^{(r)} &= \mathcal{R}_0 \\ c_1^{(r)} &= r\mathcal{R}_0+\mathcal{R}_1 \\ c_2^{(r)} &= r^2\mathcal{R}_0+2r\mathcal{R}_1+\mathcal{R}_2 \\ c_3^{(r)} &= \left(r^3+1\right)\mathcal{R}_0+\left(3r^2+1\right)\mathcal{R}_1+3r\mathcal{R}_2 \end{aligned}\right\} \tag{4.31}$$

bulunur.

Aşağıdaki lemma daha sonra vereceğimiz teoremlerin ispatında sıklıkla karşımıza çıkacağı için oldukça önemli bir bulgudur.

**Lemma 4.4.1.** $n,r\in\mathbb{N}$ ve $r\geq 1$ için, aşağıdaki eşitlikler sağlar:

**i)** $b_{n+2}^{(r)}=\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}\left(b_j^{(r-1)}+b_{j+1}^{(r-1)}\right)$

**ii)** $c_{n+2}^{(r)}=\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}\left(c_j^{(r-1)}+c_{j+1}^{(r-1)}\right)$

(Yilmaz ve Taskara, 2015).

**İspat. i)** Tekrarlanan binomial dönüşümün tanımından,

$$b_{n+2}^{(r)} = \sum_{j=0}^{n+2} \binom{n+2}{j} b_j^{(r-1)}$$
$$= \sum_{j=1}^{n+2} \binom{n+2}{j} b_j^{(r-1)} + b_0^{(r-1)}$$

elde edilir. İyi bilinen

$$\binom{n+2}{i} = \binom{n+1}{i} + \binom{n+1}{i-1}$$

binomial eşitliğinden de

$$b_{n+2}^{(r)} = \sum_{j=1}^{n+2} \binom{n+1}{j} b_j^{(r-1)} + \sum_{j=1}^{n+2} \binom{n+1}{j-1} b_j^{(r-1)} + b_0^{(r-1)}$$
$$= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} b_j^{(r-1)} + \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} b_{j+1}^{(r-1)}$$
$$= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} \left( b_j^{(r-1)} + b_{j+1}^{(r-1)} \right)$$

yazılır.

**ii)** i) şartına benzer şekilde yapılır. □

Lemma 4.4.1. den, aşağıdaki sonuçlar yazılabilir.

$$\textbf{i)}\ b_{n+2}^{(r)} = b_{n+1}^{(r)} + \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} b_{j+1}^{(r-1)} \tag{4.32}$$

$$\textbf{ii)}\ c_{n+2}^{(r)} = c_{n+1}^{(r)} + \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} c_{j+1}^{(r-1)} \tag{4.33}$$

**Teorem 4.4.2.** $n > 0$ ve $r \geq 1$ için, $\left\{ b_n^{(r)} \right\}$ ve $\left\{ c_n^{(r)} \right\}$ dönüşümlerinin rekürans bağıntıları

$$\textbf{i)}\ b_{n+2}^{(r)} = 3r b_{n+1}^{(r)} - \left(3r^2 - 1\right) b_n^{(r)} + \left(r^3 - r + 1\right) b_{n-1}^{(r)} \tag{4.34}$$

**ii)** $c_{n+2}^{(r)} = 3rc_{n+1}^{(r)} - \left(3r^2 - 1\right)c_n^{(r)} + \left(r^3 - r + 1\right)c_{n-1}^{(r)}$ (4.35)

şeklinde ve başlangıç şartları

$$b_0^{(r)} = \mathcal{P}_0,\ b_1^{(r)} = r\mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_1,\ b_2^{(r)} = r^2\mathcal{P}_0 + 2r\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$$
$$c_0^{(r)} = \mathcal{R}_0,\ c_1^{(r)} = r\mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_1,\ c_2^{(r)} = r^2\mathcal{R}_0 + 2r\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2$$

dir (Yilmaz ve Taskara, 2015).

**İspat. i)** İspatı $r$ ve $n$ üzerinden tümevarımla yapalım. Öncelikle, $r = 1$ için denklem (4.26) dan

$$b_{n+2} = 3b_{n+1} - 2b_n + b_{n-1}$$

olup doğrudur ve $n = 1$ için denklem (4.30) dikkate alınırsa

$$b_3^{(r)} = 3rb_2^{(r)} - \left(3r^2 - 1\right)b_1^{(r)} + \left(r^3 - r + 1\right)b_0^{(r)}$$

olup doğrudur. Denklem (4.34) ün $(r-1, n)$ ve $(r, n-1)$ için sağladığını kabul edelim, yani

$$b_{n+2}^{(r-1)} = 3(r-1)b_{n+1}^{(r-1)} - \left(3(r-1)^2 - 1\right)b_n^{(r-1)} + \left((r-1)^3 - (r-1) + 1\right)b_{n-1}^{(r-1)}$$
$$b_{n+1}^{(r)} = 3rb_n^{(r)} - \left(3r^2 - 1\right)b_{n-1}^{(r)} + \left(r^3 - r + 1\right)b_{n-2}^{(r)}$$

doğru olsun. O halde $(r, n)$ için denklem (4.34) ün doğruluğunu gösterelim. Yani

$$b_{n+2}^{(r)} = 3rb_{n+1}^{(r)} - \left(3r^2 - 1\right)b_n^{(r)} + \left(r^3 - r + 1\right)b_{n-1}^{(r)}$$

olduğunu göstermeliyiz. Şimdi bu son eşitliğin sağ tarafına $S$ diyelim ve tekrarlanan binomial dönüşümün tanımını dikkate alarak düzenlemeler yapılırsa

$$S=3r\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}b_j^{(r-1)}-\left(3r^2-1\right)\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}b_j^{(r-1)}+\left(r^3-r+1\right)\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}b_j^{(r-1)}$$

$$=\left(3r-3r^2+1\right)\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}b_j^{(r-1)}+\left(3r^2-1\right)\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}b_j^{(r-1)}-\left(3r^2-1\right)\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}b_j^{(r-1)}$$

$$+\left(r^3-r+1\right)\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}b_j^{(r-1)}$$

$$=\left(3r-3r^2+1\right)\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}b_j^{(r-1)}+\left(3r^2-1\right)\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}b_j^{(r-1)}+\left(r^3-r+1\right)\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}b_j^{(r-1)}$$

$$=\left(3r-3r^2+1\right)\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}b_j^{(r-1)}+\left(3r-3r^2+1\right)\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}b_j^{(r-1)}+\left(6r^2-3r-2\right)\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}b_j^{(r-1)}$$

$$+\left(r^3-r+1\right)\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}b_j^{(r-1)}$$

$$S=\left(3r-3r^2+1\right)\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}b_j^{(r-1)}+\left(3r-3r^2+1\right)\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}b_{j+1}^{(r-1)}+\left(6r^2-3r-2\right)\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}b_j^{(r-1)}$$

$$+\left(r^3-r+1\right)\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}b_j^{(r-1)}-\left(3r-3r^2+1\right)\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}b_{j+1}^{(r-1)}$$

elde edilir. Lemma 4.4.1. i) şartından ve bazı cebirsel işlemlerle

$$S=\left(3r-3r^2+1\right)b_{n+2}^{(r)}+\left(6r^2-3r-2\right)\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}b_{j+1}^{(r-1)}+\left(r^3-r+1\right)\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}b_j^{(r-1)}$$

$$+\left(3r^2-3r-1\right)\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}b_{j+2}^{(r-1)}$$

$$=\left(3r-3r^2+1\right)b_{n+2}^{(r)}+\left(r^3-r+1\right)\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}b_j^{(r-1)}+\left(3r^2-3r\right)\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(b_{j+1}^{(r-1)}+b_{j+2}^{(r-1)}\right)$$

$$+\left(3r^2-2\right)\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}b_{j+1}^{(r-1)}-\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}b_{j+2}^{(r-1)}$$

$$=b_{n+2}^{(r)}+\left(3r-3r^2\right)b_{n+1}^{(r)}+\left(r^3-r+1\right)\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}b_j^{(r-1)}+\left(3r^2-2\right)\sum_{j=1}^{n}\binom{n-1}{j-1}b_{j+1}^{(r-1)}$$

$$+\left(3r^2-2\right)\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}b_{j+1}^{(r-1)}-\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}b_{j+2}^{(r-1)}$$

$$S = b_{n+2}^{(r)} + \left(3r - 3r^2\right) b_{n+1}^{(r)} + \left(3r^2 - 3r\right) b_n^{(r)} + \left(r^3 - 3r^2 + 2r + 1\right) \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} b_j^{(r-1)}$$
$$+ \left(3r - 2\right) \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} b_{j+1}^{(r-1)} + \left(3r^2 - 2\right) \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} b_{j+2}^{(r-1)} - \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} b_{j+2}^{(r-1)}$$
$$= b_{n+2}^{(r)} + \left(3r - 3r^2\right)\left(b_{n+1}^{(r)} - b_n^{(r)}\right) + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \begin{bmatrix} \left(r^3 - 3r^2 + 2r + 1\right) b_j^{(r-1)} + \left(3r - 2\right) b_{j+1}^{(r-1)} \\ + \left(3r^2 - 3\right) b_{j+2}^{(r-1)} - b_{j+3}^{(r-1)} \end{bmatrix}$$

bulunur. Tekrar Lemma 4.4.1. i) şartı ve kabulümüzden

$$S = b_{n+2}^{(r)} + \left(3r - 3r^2\right)\left(b_{n+1}^{(r)} - b_n^{(r)}\right) - \left(3r - 3r^2\right) \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \left(b_{j+1}^{(r-1)} + b_{j+2}^{(r-1)}\right)$$
$$= b_{n+2}^{(r)}$$

dir.

**ii)** i) şartına benzer şekilde ispatı $r$ ve $n$ üzerinden tümevarımla yapalım. Öncelikle, $r = 1$ için denklem (4.27) den

$$c_{n+2} = 3c_{n+1} - 2c_n + c_{n-1}$$

olup doğrudur ve $n = 1$ için denklem (4.31) dikkate alınırsa

$$c_3^{(r)} = 3rc_2^{(r)} - \left(3r^2 - 1\right) c_1^{(r)} + \left(r^3 - r + 1\right) c_0^{(r)}$$

olup doğrudur. Denklem (4.35) in $(r-1, n)$ ve $(r, n-1)$ için sağladığını kabul edelim, yani

$$c_{n+2}^{(r-1)} = 3\left(r-1\right) c_{n+1}^{(r-1)} - \left(3\left(r-1\right)^2 - 1\right) c_n^{(r-1)} + \left(\left(r-1\right)^3 - \left(r-1\right) + 1\right) c_{n-1}^{(r-1)}$$
$$c_{n+1}^{(r)} = 3rc_n^{(r)} - \left(3r^2 - 1\right) c_{n-1}^{(r)} + \left(r^3 - r + 1\right) c_{n-2}^{(r)}$$

doğru olsun. O halde $(r, n)$ için denklem (4.35) in doğruluğunu gösterelim. Yani

$$c_{n+2}^{(r)} = 3rc_{n+1}^{(r)} - \left(3r^2 - 1\right)c_n^{(r)} + \left(r^3 - r + 1\right)c_{n-1}^{(r)}$$

olduğunu göstermeliyiz. Şimdi bu son eşitliğin sağ tarafına $Z$ diyelim ve tekrarlanan binomial dönüşümün tanımını dikkate alarak düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} Z &= 3r\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}c_j^{(r-1)} - \left(3r^2-1\right)\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}c_j^{(r-1)} + \left(r^3-r+1\right)\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}c_j^{(r-1)} \\ &= \left(3r-3r^2+1\right)\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}c_j^{(r-1)} + \left(3r^2-1\right)\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}c_j^{(r-1)} - \left(3r^2-1\right)\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}c_j^{(r-1)} \\ &\quad + \left(r^3-r+1\right)\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}c_j^{(r-1)} \\ &= \left(3r-3r^2+1\right)\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}c_j^{(r-1)} + \left(3r^2-1\right)\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}c_j^{(r-1)} + \left(r^3-r+1\right)\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}c_j^{(r-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z &= \left(3r-3r^2+1\right)\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}c_j^{(r-1)} + \left(3r-3r^2+1\right)\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}c_j^{(r-1)} + \left(6r^2-3r-2\right)\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}c_j^{(r-1)} \\ &\quad + \left(r^3-r+1\right)\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}c_j^{(r-1)} \\ &= \left(3r-3r^2+1\right)\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}c_j^{(r-1)} + \left(3r-3r^2+1\right)\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}c_{j+1}^{(r-1)} + \left(6r^2-3r-2\right)\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}c_j^{(r-1)} \\ &\quad + \left(r^3-r+1\right)\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}c_j^{(r-1)} - \left(3r-3r^2+1\right)\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}c_{j+1}^{(r-1)} \end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 4.4.1. ii) şartından ve bazı cebirsel işlemlerle

$$\begin{aligned} Z &= \left(3r-3r^2+1\right)c_{n+2}^{(r)} + \left(6r^2-3r-2\right)\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}c_{j+1}^{(r-1)} + \left(r^3-r+1\right)\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}c_j^{(r-1)} \\ &\quad + \left(3r^2-3r-1\right)\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}c_{j+2}^{(r-1)} \\ &= \left(3r-3r^2+1\right)c_{n+2}^{(r)} + \left(r^3-r+1\right)\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}c_j^{(r-1)} + \left(3r^2-3r\right)\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(c_{j+1}^{(r-1)} + c_{j+2}^{(r-1)}\right) \\ &\quad + \left(3r^2-2\right)\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}c_{j+1}^{(r-1)} - \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}c_{j+2}^{(r-1)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Z &= c_{n+2}^{(r)} + \left(3r - 3r^2\right) c_{n+1}^{(r)} + \left(r^3 - r + 1\right) \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} c_j^{(r-1)} + \left(3r^2 - 2\right) \sum_{j=1}^{n} \binom{n-1}{j-1} c_{j+1}^{(r-1)} \\
&\quad + \left(3r^2 - 2\right) \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} c_{j+1}^{(r-1)} - \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} c_{j+2}^{(r-1)} \\
&= c_{n+2}^{(r)} + \left(3r - 3r^2\right) c_{n+1}^{(r)} + \left(3r^2 - 3r\right) c_n^{(r)} + \left(r^3 - 3r^2 + 2r + 1\right) \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} c_j^{(r-1)} \\
&\quad + \left(3r - 2\right) \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} c_{j+1}^{(r-1)} + \left(3r^2 - 2\right) \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} c_{j+2}^{(r-1)} - \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} c_{j+2}^{(r-1)} \\
&= c_{n+2}^{(r)} + \left(3r - 3r^2\right) \left(c_{n+1}^{(r)} - c_n^{(r)}\right) + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \left[ \begin{array}{c} \left(r^3 - 3r^2 + 2r + 1\right) c_j^{(r-1)} + \left(3r - 2\right) c_{j+1}^{(r-1)} \\ + \left(3r^2 - 3\right) c_{j+2}^{(r-1)} - c_{j+3}^{(r-1)} \end{array} \right]
\end{aligned}
$$

bulunur. Tekrar Lemma 4.4.1. ii) şartı ve kabulümüzden

$$
\begin{aligned}
Z &= c_{n+2}^{(r)} + \left(3r - 3r^2\right) \left(c_{n+1}^{(r)} - c_n^{(r)}\right) - \left(3r - 3r^2\right) \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \left(c_{j+1}^{(r-1)} + c_{j+2}^{(r-1)}\right) \\
&= c_{n+2}^{(r)}
\end{aligned}
$$

dir. □

Denklem (4.34) ve (4.35) deki $\left\{b_n^{(r)}\right\}$ ve $\left\{c_n^{(r)}\right\}$ dizilerinin karakteristik denklemleri aynı olup $\delta^3 - 3r\delta^2 + \left(3r^2 - 1\right)\delta - \left(r^3 - r + 1\right) = 0$ dır. $\delta_1$, $\delta_2$ ve $\delta_3$ bu denklemin kökleri olsun. O halde, $\left\{b_n^{(r)}\right\}$ ve $\left\{c_n^{(r)}\right\}$ dizilerinin Binet benzeri formülleri sırasıyla

$$b_n^{(r)} = X_3 \delta_1^n + Y_3 \delta_2^n + Z_3 \delta_3^n \tag{4.36}$$

$$c_n^{(r)} = X_4 \delta_1^n + Y_4 \delta_2^n + Z_4 \delta_3^n \tag{4.37}$$

dir, burada

$$X_3=\frac{\delta_1 b_2^{(r)}-\left(3r\delta_1-\delta_1^2\right)b_1^{(r)}+\left(r^3-r+1\right)b_0^{(r)}}{\delta_1\left(\delta_1-\delta_2\right)\left(\delta_1-\delta_3\right)},$$

$$Y_3=\frac{\delta_2 b_2^{(r)}-\left(3r\delta_2-\delta_2^2\right)b_1^{(r)}+\left(r^3-r+1\right)b_0^{(r)}}{\delta_2\left(\delta_2-\delta_1\right)\left(\delta_2-\delta_3\right)},$$

$$Z_3=\frac{\delta_3 b_2^{(r)}-\left(3r\delta_3-\delta_3^2\right)b_1^{(r)}+\left(r^3-r+1\right)b_0^{(r)}}{\delta_3\left(\delta_3-\delta_1\right)\left(\delta_3-\delta_2\right)},$$

ve

$$X_4=\frac{\delta_1 c_2^{(r)}-\left(3r\delta_1-\delta_1^2\right)c_1^{(r)}+\left(r^3-r+1\right)c_0^{(r)}}{\delta_1\left(\delta_1-\delta_2\right)\left(\delta_1-\delta_3\right)},$$

$$Y_4=\frac{\delta_2 c_2^{(r)}-\left(3r\delta_2-\delta_2^2\right)c_1^{(r)}+\left(r^3-r+1\right)c_0^{(r)}}{\delta_2\left(\delta_2-\delta_1\right)\left(\delta_2-\delta_3\right)},$$

$$Z_4=\frac{\delta_3 c_2^{(r)}-\left(3r\delta_3-\delta_3^2\right)c_1^{(r)}+\left(r^3-r+1\right)c_0^{(r)}}{\delta_3\left(\delta_3-\delta_1\right)\left(\delta_3-\delta_2\right)},$$

şeklindedir (Yilmaz ve Taskara, 2015).

Şimdi, aşağıdaki teoremde Padovan ve Perrin matris dizilerinin $r$ kez tekrarlanan binomial dönüşümlerinin toplamlarını veren formül ifade edilecektir.

**Teorem 4.4.3.** $n\in\mathbb{Z}^+$ için, bu matris dizilerinin $r$ kez tekrarlanan binomial dönüşümlerinin toplamları

**i)** $$\sum_{i=0}^{n-1}b_i^{(r)}=\frac{b_{n+1}^{(r)}+\left(1-3r\right)b_n^{(r)}+\left(r^3-r+1\right)b_{n-1}^{(r)}+\left(3r-1\right)b_0^{(r)}-b_1^{(r)}}{r^3+2r}$$

**ii)** $$\sum_{i=0}^{n-1}c_i^{(r)}=\frac{c_{n+1}^{(r)}+\left(1-3r\right)c_n^{(r)}+\left(r^3-r+1\right)c_{n-1}^{(r)}+\left(3r-1\right)c_0^{(r)}-c_1^{(r)}}{r^3+2r}$$

dır (Yilmaz ve Taskara, 2015).

**İspat. i)** Denklem (4.36) göz önüne alınırsa,

$$\sum_{i=0}^{n-1}b_i^{(r)}=\sum_{i=0}^{n-1}\left(X_3\delta_1^n+Y_3\delta_2^n+Z_3\delta_3^n\right)$$

yazılır ve geometrik seriden

$$\sum_{i=0}^{n-1} b_i^{(r)} = X_3\left(\frac{\delta_1^n - 1}{\delta_1 - 1}\right) + Y_3\left(\frac{\delta_2^n - 1}{\delta_2 - 1}\right) + Z_3\left(\frac{\delta_3^n - 1}{\delta_3 - 1}\right)$$

elde edilir. Paydalar eşitlenip, $b_{-1}^{(r)} = 0$, $\delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \delta_3 = r^3 - r + 1$, $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 3r$ oldukları dikkate alınırsa

$$\sum_{i=0}^{n-1} b_i^{(r)} = \frac{b_{n+1}^{(r)} + (1-3r)b_n^{(r)} + (r^3 - r + 1)b_{n-1}^{(r)} + (3r-1)b_0^{(r)} - b_1^{(r)}}{r^3 + 2r}$$

bulunur.

**ii)** i) şartına benzer şekilde, denklem (4.37) göz önüne alınırsa,

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_i^{(r)} = \sum_{i=0}^{n-1} \left( X_4\delta_1^n + Y_4\delta_2^n + Z_4\delta_3^n \right)$$

yazılır ve geometrik seriden

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_i^{(r)} = X_4\left(\frac{\delta_1^n - 1}{\delta_1 - 1}\right) + Y_4\left(\frac{\delta_2^n - 1}{\delta_2 - 1}\right) + Z_4\left(\frac{\delta_3^n - 1}{\delta_3 - 1}\right)$$

elde edilir. Paydalar eşitlenip, $c_{-1}^{(r)} = 0$, $\delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \delta_3 = r^3 - r + 1$, $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 3r$ oldukları dikkate alınırsa

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_i^{(r)} = \frac{c_{n+1}^{(r)} + (1-3r)c_n^{(r)} + (r^3 - r + 1)c_{n-1}^{(r)} + (3r-1)c_0^{(r)} - c_1^{(r)}}{r^3 + 2r}$$

bulunur. □

**Teorem 4.4.4.** $(\mathcal{P}_n)$ ve $(\mathcal{R}_n)$ matris dizilerinin $r$ kez tekrarlanan binomial dönüşümlerinin üreteç fonksiyonları

**i)** $\sum_{i=0}^{\infty} b_i^{(r)} t^i = \dfrac{b_0^{(r)} + \left(b_1^{(r)} - 3rb_0^{(r)}\right)t + \left(b_2^{(r)} - 3rb_1^{(r)} + \left(3r^2-1\right)b_0^{(r)}\right)t^2}{1-3rt+\left(3r^2-1\right)t^2 - \left(r^3-r+1\right)t^3}$

**ii)** $\sum_{i=0}^{\infty} c_i^{(r)} t^i = \dfrac{c_0^{(r)} + \left(c_1^{(r)} - 3rc_0^{(r)}\right)t + \left(c_2^{(r)} - 3rc_1^{(r)} + \left(3r^2-1\right)c_0^{(r)}\right)t^2}{1-3rt+\left(3r^2-1\right)t^2 - \left(r^3-r+1\right)t^3}$

dır (Yilmaz ve Taskara, 2015).

**İspat. i)** $b(t,r)$, Padovan matris dizisinin $r$ kez tekrarlanan binomial dönüşümünün üreteç fonksiyonu olsun. O halde Teorem 4.4.2. i) şartından,

$$\begin{aligned} b(t,r) &= b_0^{(r)} + b_1^{(r)}t + b_2^{(r)}t^2 + \sum_{i=3}^{\infty}\left(3rb_{i-1}^{(r)} - \left(3r^2-1\right)b_{i-2}^{(r)} + \left(r^3-r+1\right)b_{i-3}^{(r)}\right)t^i \\ &= b_0^{(r)} + b_1^{(r)}t + b_2^{(r)}t^2 + 3rt\sum_{i=3}^{\infty} b_{i-1}^{(r)}t^{i-1} - \left(3r^2-1\right)t^2\sum_{i=3}^{\infty} b_{i-2}^{(r)}t^{i-2} + \left(r^3-r+1\right)t^3\sum_{i=3}^{\infty} b_{i-3}^{(r)}t^{i-3} \\ &= b_0^{(r)} + b_1^{(r)}t + b_2^{(r)}t^2 + 3rt\sum_{i=0}^{\infty} b_i^{(r)}t^i - 3rt\left(b_0^{(r)} + b_1^{(r)}t\right) - \left(3r^2-1\right)t^2\sum_{i=0}^{\infty} b_i^{(r)}t^i \\ &\quad + \left(3r^2-1\right)t^2 b_0^{(r)} + \left(r^3-r+1\right)t^3\sum_{i=0}^{\infty} b_i^{(r)}t^i \end{aligned}$$

olur ve yeniden düzenlenirse

$$b(t,r) = \frac{b_0^{(r)} + \left(b_1^{(r)} - 3rb_0^{(r)}\right)t + \left(b_2^{(r)} - 3rb_1^{(r)} + \left(3r^2-1\right)b_0^{(r)}\right)t^2}{1-3rt+\left(3r^2-1\right)t^2 - \left(r^3-r+1\right)t^3}$$

bulunur.

**ii)** i) şartına benzer şekilde $c(t,r)$, Perrin matris dizisinin $r$ kez tekrarlanan binomial dönüşümünün üreteç fonksiyonu olsun. O halde Teorem 4.4.2. ii) şartından,

$$\begin{aligned} c(t,r) &= c_0^{(r)} + c_1^{(r)}t + c_2^{(r)}t^2 + \sum_{i=3}^{\infty}\left(3rc_{i-1}^{(r)} - \left(3r^2-1\right)c_{i-2}^{(r)} + \left(r^3-r+1\right)c_{i-3}^{(r)}\right)t^i \\ &= c_0^{(r)} + c_1^{(r)}t + c_2^{(r)}t^2 + 3rt\sum_{i=3}^{\infty} c_{i-1}^{(r)}t^{i-1} - \left(3r^2-1\right)t^2\sum_{i=3}^{\infty} c_{i-2}^{(r)}t^{i-2} + \left(r^3-r+1\right)t^3\sum_{i=3}^{\infty} c_{i-3}^{(r)}t^{i-3} \end{aligned}$$

$$c(t,r)=c_0^{(r)}+c_1^{(r)}t+c_2^{(r)}t^2+3rt\sum_{i=0}^{\infty}c_i^{(r)}t^i-3rt\left(c_0^{(r)}+c_1^{(r)}t\right)-\left(3r^2-1\right)t^2\sum_{i=0}^{\infty}c_i^{(r)}t^i$$
$$+\left(3r^2-1\right)t^2c_0^{(r)}+\left(r^3-r+1\right)t^3\sum_{i=0}^{\infty}c_i^{(r)}t^i$$

olur ve yeniden düzenlenirse

$$c(t,r)=\frac{c_0^{(r)}+\left(c_1^{(r)}-3rc_0^{(r)}\right)t+\left(c_2^{(r)}-3rc_1^{(r)}+\left(3r^2-1\right)c_0^{(r)}\right)t^2}{1-3rt+\left(3r^2-1\right)t^2-\left(r^3-r+1\right)t^3}$$

bulunur. □

### 4.4.1. Tekrarlanan binomial dönüşümler arasındaki ilişkiler

Bu bölümde $\left\{b_n^{(r)}\right\}$ ve $\left\{c_n^{(r)}\right\}$ tekrarlanan binomial dönüşümlerin kendi aralarındaki ilişkiler incelenecektir.

**Teorem 4.4.1.1.** $n,m,r\in\mathbb{N}$ ve $r\geq 1$ için,

**i)** $b_n^{(r)}b_m^{(r)}=b_{n+m}^{(r)}$, $n\leq m$

**ii)** $b_n^{(r)}c_m^{(r)}=c_m^{(r)}b_n^{(r)}=c_{n+m}^{(r)}$

dır (Yilmaz ve Taskara, 2015).

**İspat. i)** İspat $r$ üzerinden tümevarımla yapılır. $r=1$ için, Teorem 4.3.1.1. i) şartından

$$b_nb_m=b_{n+m}$$

olup doğrudur. Bu denklemin $r$ için sağladığını kabul edelim. Yani

$$b_n^{(r)}b_m^{(r)}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}b_i^{(r-1)}+\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}b_j^{(r-1)}$$
$$=\sum_{k=0}^{n+m}\binom{n+m}{k}b_k^{(r-1)}=b_{n+m}^{(r)}$$

doğru olsun. O halde, şimdi $r+1$ için doğru olduğunu göstermeliyiz. Tekrarlanan binomial dönüşümün tanımından

$$b_n^{(r+1)}b_m^{(r+1)} = \left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}b_i^{(r)}\right)\left(\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}b_j^{(r)}\right)$$
$$= \left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}b_k^{(r-1)}\right)\left(\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}b_l^{(r-1)}\right)$$

yazılır ve kabulden,

$$b_n^{(r+1)}b_m^{(r+1)} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{i}\binom{m}{j}b_{i+j}^{(r)}$$
$$= \binom{n}{0}\binom{m}{0}b_0^{(r)} + \binom{n}{0}\binom{m}{1}b_1^{(r)} + \cdots + \binom{n}{0}\binom{m}{m}b_m^{(r)} + \binom{n}{1}\binom{m}{0}b_1^{(r)} + \binom{n}{1}\binom{m}{1}b_2^{(r)} +$$
$$\cdots + \binom{n}{1}\binom{m}{m}b_{m+1}^{(r)} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{m}{0}b_n^{(r)} + \binom{n}{n}\binom{m}{1}b_{n+1}^{(r)} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{m}{m}b_{n+m}^{(r)}$$
$$b_n^{(r+1)}b_m^{(r+1)} = \binom{n}{0}\binom{m}{0}b_0^{(r)} + \left[\binom{n}{0}\binom{m}{1} + \binom{n}{1}\binom{m}{0}\right]b_1^{(r)} + \left[\binom{n}{0}\binom{m}{2} + \binom{n}{1}\binom{m}{1} + \binom{n}{2}\binom{m}{0}\right]b_2^{(r)} +$$
$$\cdots + \left[\binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \cdots + \binom{n}{k}\binom{m}{0}\right]b_k^{(r)} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{m}{m}b_{n+m}^{(r)}$$

elde edilir. Burada iyi bilinen aşağıdaki Vandermonde eşitliği

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\binom{m}{k-j} = \binom{n+m}{k}$$

dikkate alınırsa

$$b_n^{(r+1)}b_m^{(r+1)} = \binom{n+m}{0}b_0^{(r)} + \binom{n+m}{1}b_1^{(r)} + \binom{n+m}{2}b_2^{(r)} + \cdots + \binom{n+m}{k}b_k^{(r)} + \cdots + \binom{n+m}{n+m}b_{n+m}^{(r)}$$
$$= \sum_{i=0}^{n+m}\binom{n+m}{i}b_i^{(r)}$$
$$= b_{n+m}^{(r+1)}$$

bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

**ii)** Burada sadece verilen eşitliğin $b_n^{(r)}c_m^{(r)} = c_{n+m}^{(r)}$ kısmını göstereceğiz diğer kısım benzer şekilde yapılır. İspat $r$ üzerinden tümevarımla yapılır. $r=1$ için, Teorem 4.3.1.1. ii) şartından

$$b_n c_m = c_{n+m}$$

olup doğrudur. $b_n^{(r)}c_m^{(r)} = c_{n+m}^{(r)}$ eşitliğinin $r$ için sağladığını kabul edelim. O halde, şimdi $r+1$ için doğru olduğunu göstermeliyiz. Tekrarlanan binomial dönüşümün tanımından

$$\begin{aligned} b_n^{(r+1)}c_m^{(r+1)} &= \left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}b_i^{(r)}\right)\left(\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}c_j^{(r)}\right) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}b_k^{(r-1)}\right)\left(\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}c_l^{(r-1)}\right) \end{aligned}$$

yazılır ve kabulden,

$$\begin{aligned} b_n^{(r+1)}c_m^{(r+1)} &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{i}\binom{m}{j}c_{i+j}^{(r)} \\ &= \binom{n}{0}\binom{m}{0}c_0^{(r)} + \binom{n}{0}\binom{m}{1}c_1^{(r)} + \cdots + \binom{n}{0}\binom{m}{m}c_m^{(r)} + \binom{n}{1}\binom{m}{0}c_1^{(r)} + \binom{n}{1}\binom{m}{1}c_2^{(r)} + \\ &\quad \cdots + \binom{n}{1}\binom{m}{m}c_{m+1}^{(r)} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{m}{0}c_n^{(r)} + \binom{n}{n}\binom{m}{1}c_{n+1}^{(r)} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{m}{m}c_{n+m}^{(r)} \\ b_n^{(r+1)}c_m^{(r+1)} &= \binom{n}{0}\binom{m}{0}c_0^{(r)} + \left[\binom{n}{0}\binom{m}{1} + \binom{n}{1}\binom{m}{0}\right]c_1^{(r)} + \left[\binom{n}{0}\binom{m}{2} + \binom{n}{1}\binom{m}{1} + \binom{n}{2}\binom{m}{0}\right]c_2^{(r)} + \\ &\quad \cdots + \left[\binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \cdots + \binom{n}{k}\binom{m}{0}\right]c_k^{(r)} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{m}{m}c_{n+m}^{(r)} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada iyi bilinen aşağıdaki Vandermonde eşitliği

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\binom{m}{k-j} = \binom{n+m}{k}$$

dikkate alınırsa

$$b_n^{(r+1)}c_m^{(r+1)} = \binom{n+m}{0}c_0^{(r)} + \binom{n+m}{1}c_1^{(r)} + \binom{n+m}{2}c_2^{(r)} + \cdots + \binom{n+m}{k}c_k^{(r)} + \cdots + \binom{n+m}{n+m}c_{n+m}^{(r)}$$
$$= \sum_{i=0}^{n+m}\binom{n+m}{i}c_i^{(r)}$$
$$= c_{n+m}^{(r+1)}$$

bulunur ve ispat tamamlanmış olur. □

**Teorem 4.4.1.2.** $n, r \in \mathbb{N}$ ve $r \geq 1$ için, $\left\{b_n^{(r)}\right\}$ ve $\left\{c_n^{(r)}\right\}$ dönüşümleri aşağıdaki özellikleri sağlar:

**i)** $b_{n+1}^{(r)} - b_n^{(r)} = b_1^{(r-1)}b_n^{(r)}$

**ii)** $c_{n+1}^{(r)} - c_n^{(r)} = b_1^{(r-1)}c_n^{(r)}$

**iii)** $c_{n+1}^{(r)} - c_n^{(r)} = c_1^{(r-1)}b_n^{(r)}$

(Yilmaz ve Taskara, 2015).

**İspat. i)** Denklem (4.32) $n$ yerine $n-1$ alınırsa

$$b_{n+1}^{(r)} - b_n^{(r)} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}b_{i+1}^{(r-1)}$$

yazılır ve Teorem 4.4.1.1. i) şartından

$$b_{n+1}^{(r)} - b_n^{(r)} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}b_i^{(r-1)}b_1^{(r-1)} = b_1^{(r-1)}b_n^{(r)}$$

elde edilir.

**ii)** Denklem (4.33) den

$$c_{n+1}^{(r)} - c_n^{(r)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} c_{i+1}^{(r-1)}$$

yazılır ve Teorem 4.4.1.1. ii) şartından

$$c_{n+1}^{(r)} - c_n^{(r)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} c_i^{(r-1)} b_1^{(r-1)} = b_1^{(r-1)} c_n^{(r)}$$

elde edilir.

**iii)** ii) şartının ispatına benzer şekilde yapılır. □

**Teorem 4.4.1.3.** $n, m, r \in \mathbb{N}$ ve $r \geq 1$ için, $\left\{b_n^{(r)}\right\}$ ve $\left\{c_n^{(r)}\right\}$ dönüşümleri arasındaki ilişki

$$c_m^{(r-1)} b_n^{(r)} = b_m^{(r-1)} c_n^{(r)}$$

şeklindedir (Yilmaz ve Taskara, 2015).

**İspat.** Tekrarlanan binomial dönüşümün tanımından

$$\begin{aligned} c_m^{(r-1)} b_n^{(r)} &= c_m^{(r-1)} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} b_i^{(r-1)} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} c_m^{(r-1)} b_i^{(r-1)} \end{aligned}$$

yazılır ve Teorem 4.4.1.1. ii) şartından

$$\begin{aligned} c_m^{(r-1)} b_n^{(r)} &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} c_{m+i}^{(r-1)} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} b_m^{(r-1)} c_i^{(r-1)} \\ &= b_m^{(r-1)} c_n^{(r)} \end{aligned}$$

bulunur. □

Teorem 4.4.1.3. te $m = 0$ seçilirse aşağıdaki sonuç, yani tekrarlanan binomial dönüşümlerin birbiri cinsinden ifadesi elde edilir.

**Sonuç 4.4.1.4.** $n, r \in \mathbb{N}$ ve $r \geq 1$ için, aşağıdaki eşitlikler sağlar:

**i)** $c_n^{(r)} = \mathcal{R}_0 b_n^{(r)}$

**ii)** $b_n^{(r)} = \mathcal{R}_0^{-1} c_n^{(r)}$

(Yilmaz ve Taskara, 2015).

# 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

## 5.1 Sonuçlar

Çalışmada, öncelikle yeni Padovan ve Perrin matris dizileri kavramları tanımlanmıştır. Bu tanımlar ve buna bağlı bazı sonuçlar ile literatüre yeni kavramlar ve sonuçlar kazandırılmıştır. Çalışmanın içeriğinden de görülmektedir ki, Padovan matris dizileri, Padovan sayı dizileri ile ve Perrin matris dizileri de Perrin sayı dizileri ile ilişkilidir.

Daha sonra bu matris dizilerinin binomial ve tekrarlanan binomial dönüşümleri verilerek dönüşüm dizilerinin rekürans bağıntıları, toplamları, üreteçleri ve ilişkileri incelenmiştir. Bu dönüşümler sayesinde dizilere de farklı bir bakış açısı kazandırılmıştır.

Tez çalışmamız dört farklı makale şeklinde uluslar arası dergilerde yayınlanmıştır.

## 5.2 Öneriler

Çalışmamızı, araştırıcılara öneriler sunarak sonlandırmak istiyoruz. Padovan ve Perrin sayı dizilerinin her ikisi ile de ilişkili olan genel bir matris dizisi tanımlamak ve sonuçlar elde etmek için araştırma yapılabilir. Genel matris dizisi ile bu çalışmada ki matris dizileri arasındaki ilişkiler bulunabilir. Tanımlanacak olan genel matris dizisinin binomial ve tekrarlanan binomial dönüşümleri de çalışılabilir. Genel matris dizisinin binomial dönüşümü ile bu çalışmadaki binomial dönüşümler arasında geçişler araştırılabilir. Ayrıca uygulanan binomial dönüşümlerin farklı dönüşümler altındaki etkileri araştırılabilir. Örneğin bu dizilerin Catalan ve Hankel dönüşümleri araştırılarak bu dönüşümlerin binomial dönüşümleri ya da tersine bu matris dizilerinin binomial dönüşümlerinin Catalan ve Hankel dönüşümleri incelenebilir.

**KAYNAKLAR**


Altın Oran: "Evrenin Matematiği", 2011, Erişim tarihi 24 november 2015. Erişim adresi, http://www.bilgicik.com/yazi/altin-oran-evrenin-matematigi.

Bhadouria P, Jhala D, Singh B, 2014, Binomial Transforms of the k-Lucas Sequences and its Properties, *Journal of Mathematics and Computer Science*, 8, 81-92.

Bilgici G, 2013, Generalized Order–k Pell–Padovan–Like Numbers by Matrix Methods, *Pure and Applied Mathematics Journal*, 2, 6, 174-8.

Box GEP, Jenkins GM, Reinsel GC, 2008, Time Series Analysis: Forecasting and Control, *Wiley*, p.

Chen K-W, 2007, Identities from the binomial transform, *Journal of Number Theory*, 124, 1, 142-50.

Civciv H, Turkmen R, 2008, On the (s, t)-Fibonacci and Fibonacci matrix sequences, *Ars Combinatoria*, 87, 161-73.

Civciv H, Türkmen R, 2008, Notes on the (s, t)-Lucas and Lucas matrix sequences, *Ars Combinatoria*, 89, 271-85.

Coskun A, Taskara N, 2014, On The Some Properties Of Circulant Matrix With Third Order Linear Recurrent Sequence, *arXiv:1406.5349v1*, [math.NT].

De Weger BM, 1997, Padua and Pisa are exponentially far apart, *Publicacions Matemàtiques*, 41, 2, 631-51.

Er MC, 1984, Sums of Fibonacci Numbers by Matrix Methods, *Fibonacci Quarterly*, 22, 3, 204-7.

Falcon S, 2014, Iterated Binomial Transforms of the k-Fibonacci Sequence, *British Journal of Mathematics & Computer Science*, 4, 22, 3135-45

Falcon S, Plaza A, 2009, Binomial Transforms Of The K-Fibonacci Sequence, *International Journal of Nonlinear Sciences & Numerical Simulation*, 10, (11-12), 1527-38.

Fibonacci Q-Matrix, 2013, Erişim tarihi 24 november 2015. Erişim adresi, http://mathworld.wolfram.com/FibonacciQ-Matrix.html.

Gould HW, 1990, Series Transformations For Finding Recurrences For Sequences, *Fibonacci Quarterly*, 28, 2, 166-71.

Gulec HH, Taskara N, 2012, On the (s,t)-Pell and (s,t)-Pell–Lucas Sequences and Their Matrix Representations, *Applied Mathematics Letters*, 25, 10, 1554-9.

Iliopoulos V, Wu YH, 2015, The plastic number and its generalized polynomial, *Cogent Mathematics*, 2, 1, 1023123.

Kalman D, 1982, Generalized Fibonacci Numbers By Matrix Methods, *Fibonacci Quarterly*, 20, 1, 73-6.

Karaduman E, 2004, An Application of Fibonacci Numbers in Matrices, *Applied Mathematics and Computation*, 147, 3, 903-8.

Kaygısız K, 2008, Genelleştirilmiş Perrin Sayı Dizileri ve Genelleştirilmiş Sayı Dizilerinin Herhangi Bir Teriminin Hesaplanması, Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.

Kaygisiz K, Bozkurt D, 2012, k-Generalized Order-k Perrin Number Presentation by Matrix Method, *Ars Combinatoria*, 105, 95-101.

Kaygisiz K, Sahin A, 2011, k sequences of Generalized Van der Laan and Generalized Perrin Polynomials, *arXiv preprint arXiv:1111.4065*.

Kaygisiz K, Sahin A, 2014, Calculating Terms of Associated Polynomials of Perrin and Cordonnier Numbers, *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 20, 1, 10-8.

King CH, 1960, Some Further Properties of the Fibonacci Numbers, San Jose: CA, San Jose State.

Knuth DE, 1973, The Art of Computer Programming, Addison-Wesley, *Reading, MA*, p.

Koken F, Bozkurt D, 2008, On the Jacobsthal Numbers by Matrix Methods, *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 3, 13, 605-14.

Koken F, Bozkurt D, 2010, On Lucas Numbers by Matrix Method, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 39, 4, 471-5.

Koshy T, 2001, Fibonacci and Lucas numbers with applications, *John Wiley & Sons*, p.

Lucas E, 1876, Sur la recherhce des grands nombres premiers, *Mont-Louis*, p. 61-68.

Marohnić L, Strmečki T, 2012, Plastic Number construction and applications, *Advanced Research in Scientific Areas*, 1523-8.

Mcllroy MD, 1992,Number Theory in Computer Graphics. In: The Unreasonable Effectiveness of Number Theory. Eds: Stefan AB. Orono,ME: *Amer. Math. Soc.*, p. 105-21.

Padovan R, 2002, Proportion: science, philosophy, architecture, *Taylor & Francis*, p.

Padovan R, 2015,Dom hans van der Laan and the plastic number. In: Architecture and Mathematics from Antiquity to the Future. Eds: *Springer*, p. 407-19.

Padovan sequence, 2013, Erişim tarihi 20 may 2013. Erişim adresi, https://en.wikipedia.org/wiki/Padovan_sequence.

Perrin R, 1899, Query 1484, *L'Intermediaire des Math*, 6, 76-7.

Perrin number, 2013, Erişim tarihi 20 may 2013. Erişim adresi, https://en.wikipedia.org/wiki/Perrin_number.

Plastic number, 2013, Erişim tarihi 20 may. Erişim adresi, https://en.wikipedia.org/wiki/Plastic_number.

Prodinger H, 1994, Some Information About The Binomial Transform, *Fibonacci Quarterly*, 32, 5, 412-5.

Shannon A, Horadam A, 1971, Generating Functions for Powers of Third Order Recurrence Sequences, *Duke Mathematical Journal*, 38, 4, 791-4.

Shannon AG, Anderson PG, Horadam AF, 2006, Properties of Cordonnier, Perrin and Van der Laan numbers, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 37, 7, 825-31.

Silvester J, 1979, Fibonacci Properties by Matrix Methods, *The Mathematical Gazette*, 188-91.

Sokhuma K, 2013, Padovan Q-Matrix and the Generalized Relations, *Applied Mathematical Sciences*, 7, 56, 2777-80.

Spivey MZ, Steil LL, 2006, The k-Binomial Transforms and the Hankel Transform, *J. Integer Seq.*, 9, 1, 19.

Stewart I, 1996, Tales of a Neglected Number, *Scientific American*, 274, 102-3.

Uslu K, Uygun S, 2013, The (s, t) Jacobsthal and (s, t) Jacobsthal-Lucas Matrix sequences, *Ars Combinatoria*, 108, 13-22.

Yazlik Y, Taskara N, Uslu K, Yilmaz N, The Generalized (s,t)-Sequence and its Matrix Sequence, Numerical Analysis and Applied Mathematics ICNAAM 2011, 381-4, Gre.

Yazlik Y, Tollu DT, Taskara N, 2013, On the Solutions of Difference Equation Systems with Padovan Numbers, *Applied Mathematics*, 4, 12, 15.

Yazlik Y, Yilmaz N, Taskara N, 2014, The Generalized (s, t)-Matrix Sequence's Binomial Transforms, *Gen. Math. Notes*, 24, 1, 127-36.

Yilmaz F, Bozkurt D, 2011, Hessenberg Matrices and the Pell and Perrin Numbers, *Journal of Number Theory*, 131, 8, 1390-6.

Yilmaz F, Bozkurt D, 2012, Some Properties of Padovan Sequence by Matrix Methods, *Ars Combinatoria*, 104, 149-60.

Yilmaz N, Taskara N, 2013, Binomial Transforms of the Padovan and Perrin Matrix Sequences, *Abstract and Applied Analysis*, 2013, 1-7.

Yilmaz N, Taskara N, 2013, Matrix Sequences in terms of Padovan and Perrin Numbers, *Journal of Applied Mathematics*, 2013, 1-7.

Yilmaz N, Taskara N, 2014, On the Negatively Subscripted Padovan and Perrin Matrix Sequences, *Communications in Mathematics and Applications*, 5, 2, 59-72.

Yilmaz N, Taskara N, 2015, Iterated binomial transform of the k-lucas sequence, *arXiv:1502.06448v3*, [math.NT].

Yilmaz N, Taskara N, 2015, On the Properties of Iterated Binomial Transforms for the Padovan and Perrin Matrix Sequences, *Mediterranean Journal of Mathematics*, accepted.

# ÖZGEÇMİŞ

## KİŞİSEL BİLGİLER


**Adı Soyadı** : Nazmiye YILMAZ
**Uyruğu** : T.C.
**Doğum Yeri ve Tarihi** : Meram-01.07.1989
**Telefon** : +90 (332) 2233970
**Faks** : +90 (332) 2412499
**e-mail** : nzyilmaz@selcuk.edu.tr


## EĞİTİM

| Derece | | Adı, İlçe, İl | Bitirme Yılı |
|---|---|---|---|
| Lise | : | Zeki Özdemir Lisesi, Meram, KONYA | 2005 |
| Üniversite | : | Selçuk Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Selçuklu, KONYA | 2009 |
| Yüksek Lisans | : | Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Selçuklu, KONYA | 2011 |
| Doktora | : | Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Selçuklu, KONYA | 2015 |

## İŞ DENEYİMLERİ

| Yıl | Kurum | Görevi |
|---|---|---|
| 2010-halen | Selçuk Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü | Arş. Gör. |

## YABANCI DİLLER

2009 KPDS(İngilizce puanı): 79

## YAYINLAR

**1**-N. Yilmaz, N. Taskara, 2014, Tribonacci and Tribonacci-Lucas numbers via the determinants of special matrices, *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 8, no. 39, 1947-1955. (Yüksek Lisans Tezinden yayınlanmıştır)

**2**-N. Yilmaz, N. Taskara, 2013, Matrix sequences in terms of Padovan and Perrin numbers, *Journal of Applied Mathematics*, Article Number: 941673 Published: 2013. (Doktora Tezinden yayınlanmıştır)

**3**-N. Yilmaz, N. Taskara, 2013, Binomial transforms of the Padovan and Perrin matrix sequences, *Abstract and Applied Analysis*, Article Number: 497418 Published: 2013. (Doktora Tezinden yayınlanmıştır)

**4**-N. Yilmaz, N. Taskara, 2014, On the negatively subscripted Padovan and Perrin matrix sequences, *Communications in Mathematics and Applications*, 5(2), 59-72. (Doktora Tezinden yayınlanmıştır)

**5**-N. Yilmaz, N. Taskara, 2015, On the properties of iterated binomial transform for Padovan and Perrin matrix sequences, *Mediterranean Journal of Mathematics*, (accepted). (Doktora Tezinden yayınlanmıştır)