



T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN METHOD OF LİNES YÖNTEMİ

Fatih DURMUŞ

YÜKSEK LİSANS

Matematik Anabilim Dalı

Aralık - 2015

KONYA

Her Hakkı Saklıdır

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Fatih DURMUŞ

Tarih: 24/12/2015

ÖZET

YÜKSEK LİSANS
KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN METHOD OF LİNES YÖNTEMİ

Fatih DURMUŞ

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Yıldıray KESKİN

2015, 31 Sayfa

Jüri
Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA
Doç. Dr. Yıldıray KESKİN
Yrd. Doç. Dr. Yücel ÇENESİZ

Son zamanlarda Method of Lines yöntemi çeşitli kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılmaktadır. Bu tez çalışmasında, Adomian'ın ayrıştırma yöntemi (ADM), Homotopy Pertürbasyon Yöntemi (HPM), Homotopy Analiz Yöntemi (HAM) ve Varyasyon iterasyon yöntemi (VIM) gibi nümerik yöntemlerde olyşan karmaşık hesaplamalı üsstesinden gelmek için alternatif yöntem sunulmuştur. Bu yöntemin diğer bilinen yöntemlere göre etkili ve güçlü olduğunu göstermek için üç test problemleri çözülerek karşılaştırmalar yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Method of Lines yöntemi, İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi, Kısmı Türevli Diferansiyel Denklem

ABSTRACT

MS THESIS

A METHOD OF LINES METHOD FOR SOLVING PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Fatih DURMUŞ

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN MATHEMATICS

Advisor:Assoc.Prof.Yıldıray KESKİN

2015, 31 Pages

Jury
Assoc. Prof. İbrahim YALÇINKAYA
Assoc. Prof. Yıldıray KESKİN
Asst. Prof. Yücel ÇENESİZ

Recently Method of Lines (MOL) has been used to solve various partial differential equations. In this paper, an alternative approach is presented to overcome the demerit of complex calculation of numerical methods such as the Adomian Decomposition Method (ADM), the Homotopy Perturbation Method (HPM), the Homotopy Analysis Method (HAM) and Variational Iteration Method (VIM). Comparing this methodology with some known techniques shows that the present approach is effective and powerful. In addition, three test problems of mathematical physics are discussed to illustrate the effectiveness and the performance of the Method of Lines.

Keywords: Method of lines, Reduced differential transform method.

ÖNSÖZ

Bu yüksek lisans tez çalışması Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Doç. Dr. Yıldıray KESKİN yönetiminde hazırlanarak Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne sunulmuştur.

Yüksek Lisans tezi içerik olarak dört bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde temel tanımlar verilmiş olup ikinci bölümde kullanılan yöntemler üzerinde durulmuştur. Üçüncü bölümde problemler ele alınmış olup dördüncü bölümde araştırma sonuçları incelenmiş, sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Tez çalışması seçimi ve yürütülmesi sürecinde yardımlarından ve yönlendirmelerinden dolayı tez yöneticisi Doç. Dr. Yıldıray KESKİN'e ve öğretim süreci boyunca maddi manevi desteklerini esirgemeyen aileme teşekkürü borç bilirim.

Fatih DURMUŞ
KONYA-2015

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **iv**

ÖNSÖZ ..... **v**

İÇİNDEKİLER ..... **vi**

1. GİRİŞ **1**

2. KULLANILAN YÖNTEMLER **3**

2.1. Method of Lines (Çizgiler Yöntemi) 3
2.2. İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (RDTM) 5
2.3. Variational İterasyon Yöntemi 8
2.4. Adomian Ayrışım Yöntemi 8

3. PROBLEMLER **11**

3.1. Problem 1 11
3.1.1. Method of Lines ile Çözüm 11
3.1.2. İndirgenmiş Dönüşüm Yöntemi ile Çözüm 12
3.2. Problem 2 14
3.2.1. Method of Lines ile Çözüm 14
3.2.2. İndirgenmiş Dönüşüm Yöntemi ile Çözüm 15
3.3. Problem 3 18
3.3.1. Method of Lines ve Maple ile Çözüm 18
3.3.1. İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemiyle Çözüm 24
3.3.3. Varyasyonel İterasyon Yöntemi ile Çözüm 26
3.3.4. Adomian Ayrışım Yöntemi ile Çözüm 27

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER **28**

KAYNAKLAR **29**

ÖZGEÇMİŞ **31**

1. GİRİŞ

Mühendislik Bilimleri, Doğa Bilimleri ve ekonomi problemlerinin matematiksel modellemelerinde kısmi türevli diferansiyel denklemler karşımıza çıkmaktadır. (Evans, 1998), (Wazwaz, 2008) Bu denklemlerin çözümü için birçok yöntem bulunmaktadır. (Wazwaz, 2002) Biz tezimizde daha çok Method of Lines metodunu anlatacağız ve bunun dışında üç adet yöntem daha kullanacağız.

Method of Lines yöntemi ise yaklaşık çözüm üzerine kurgulanmıştır. İncelediğimiz kısmi diferansiyel denklem bir başlangıç değer problemi ise sonuçta oluşan adi diferansiyel denklemde bir başlangıç değer problemidir. Kısmi diferansiyel denklem eğer bir sınır-değer problemi ise sonuç olarak adi diferansiyel denklem oluşur.

İndirgenmiş Diferansiyel denklem yöntemi ilk olarak diferansiyel dönüşüm yönteminin bir adım ötesi olarak Y. Keskin (Keskin,Oturanç 2011) tarafından tanıtılmıştır. Bu yöntemin farkı kısmi diferansiyel denklemi yarı cebirsel denkleme dönüştürmesidir. Avantajı ise daha az cebirsel işlem yapılmasıdır.

Variational İterasyon yöntemi ise Analitik çözüme hızla yakınsayan başarılı yaklaşımlar veren bir metottur. Metodu Ji Huan He (1997) tanıtmıştır. Bu metot ile elde edilen nümerik çözümlerin hata miktarının az olmasının yanında işlemler sırasında kullanılacak bilgisayarda yüksek kapasiteye de ihtiyaç duyulmaması metodun uygulamalarını artırmıştır. He, geliştirdiği metodu otonom diferansiyel denklemlere (2000), lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlere (2004), integro diferansiyel denklemlere uyguladı (Wang ve He 2007). He'nin metodunu, Abdou ve Soliman (2005), Burger ve coupled Burger, Schrodinger- KdV, genelleştirilmiş KdV ve sığ su denklemlerinin çözümlerini araştırmada kullandılar. Momani ve Abuasad, lineer Helmholtz kısmi diferansiyel denklemin çözümü için bu metodu uyguladılar. Ganji ve arkadaşları (2006) lineer olmayan Joulent-Miodek, coupled KdV ve coupled MKdV denklemlerinin çözümlerini varyasyonel iterasyon metodu ile araştırdılar.

Adomian yönetmi ise G.Adomian'ın 1980 yılında tanıttığı kendi ismi ile anılan bir yöntemdir. Yöntem picard yönteminden türetilmiştir. Bu yöntemde ardışık integraller alarak yaklaşık çözüm elde edilir.

Biz tezimizde öncelikle bu yöntemleri tanıtıp ardından bu yöntemleri uygulamalı olarak inceleyerek karşılaştırmalarını yapacağız.

LİTERATÜR TARAMASI:

KESKİN Y., OTURANÇ G., "Reduced Differential Transform Method for Partial Differential Equations", *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation,* 10(6), (2009). Bu çalışmada indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi ilk defa tanıtılmıştır.

KESKİN Y., OTURANÇ G., "Reduced differential transform method for generalized KdV Equations", *Mathematical and Computational Applications,* 15 (3), 382-393, (2010). Bu çalışmada indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi genelleştirilmiş KdV denklemlerine başarılı bir şekilde uyarlanmıştır

KESKİN Y., OTURANÇ G., "The Reduced Differential Transform Method: a New Approach to Fractional Partial Differential Equations", *Nonlinear Science Letters A*, 1 (2), 207-218, 2010. Bu çalışma kısmi türevli diferansiyel denklemlere indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemini uygulanmıştır .

KESKİN Y., KURNAZ A., KİRİŞ M.E., OTURANÇ G., "Approximate solution of Generalized Pantograph Equations by the differential transform method", International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 8(2) 2007, 159-164. Bu çalışmada, genelleştirilmiş pantograf denklemlerin çözümü için diferansiyel dönüşüm yöntemi uygulanmış, konuyla ilgili örnekler ortaya konulmuştur.

KESKİN Y., OTURANÇ G., "The Differential Transform Methods For Nonlinear Functions And Its Applications", Selçuk Journal of Applied Mathematics, 9(1), 69-76, 2008. Bu çalışmada lineer olmayan fonksiyonlar için diferansiyel dönüşüm tanımı verilmiş ve Emden Fowler diferansiyel denklemi çözülmüştür.

WAZWAZ A.M., "Handbook of Differential Equations: Evolutionary Equations, 4", 485-568, 2008. Bu çalışmada Adomian Ayrışım yöntemi kullanılarak KdV denkleminin soliton çözümleri araştırılmıştır.

WAZWAZ A.M., "Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory", Springer, 2009. Bu çalışmada kısmi türevli diferansiyel denklemler incelenip bu denklemlerin çözümleri varyasyonel iterasyon yöntemi ve adomian ayrışım yöntemiyle çözülmüştür.

2. KULLANILAN YÖNTEMLER

Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri hesaplanırken kullanacağımız belli başlı yöntemler aşağıda belirtilen şekildedir.

2.1. Method of Lines (Çizgiler Yöntemi)

Çizgiler yöntemi bağımsız değişken veya zamana bağlı kısmi diferansiyel denklemin yerine uygun sonlu farkın yazılması sonucu oluşan nümerik çözüm tekniğidir. İlk olarak parabolik denklemlere uygulanmıştır. Çizgiler yöntemi genellikle sonlu fark veya sonlu eleman teknikleri ile kısmi diferansiyel denklemleri adi diferansiyel denklem sistemlerine indirgeyen bir çalışmadır.

İncelenen kısmı diferansiyel denklem bir başlangıç-değer problemi ise sonuçta oluşan adi diferansiyel denklem de bir başlangıç değer problemidir. Kısmi diferansiyel denklem bir sınır değer problemi ise sonuç olarak adi diferansiyel denklem sistemi oluşur.

Method of Lines yöntemi ile bağımsız değişkene göre veya zamana bağlı değşkene göre dağılma yapılabilir. Yani değişkenin boyutu sayılabilir sonlu parçaya ayrılarak işlem yapılır. (Çağlar, 2012, Schiesser, 1991)

Yöntemi bir kısmi türevli diferansiyel denklem üzerinde incelersek;

$$V_{xx} + V_{yy} = 0 \tag{2.1.1}$$

Çözümün bulunduğu alan x ekseni boyunca sayılabilir sonlu parçaya ayrılarak başlanır. Bu ayrışma sonucunda x'e göre türev yerine fark denklemi yazılır. Denklem üç noktalı merkezcil fark denklemi olarak yazılırsa

$$[V_i]_{xx} \approx \frac{V_{i+1} - 2V_i + V_{i-1}}{h^2},\ h = \Delta x = \frac{a}{N+1} \tag{2.1.2}$$

(2.1.2) denklemini (2.1.1) de yerine yazılırsa

$$[V_i]_{yy} + \frac{1}{h^2}[V_{i+1}(y) - 2V_i(y) + V_{i-1}(y)] = 0 \tag{2.1.3}$$

denklemi elde edilir. Böylece (2.1.1) denklemini de $i = 1, 2, ..., N$ açılımı yapılırsa

$$
\begin{aligned}
&i=1, && [V_1]_{yy}+\frac{1}{h^2}[V_2(y)-2V_1(y)+V_0(y)]=0\\
&i=2, && [V_2]_{yy}+\frac{1}{h^2}[V_3(y)-2V_2(y)+V_1(y)]=0\\
&i=3, && [V_3]_{yy}+\frac{1}{h^2}[V_4(y)-2V_3(y)+V_2(y)]=0\\
&\vdots && \qquad\vdots\\
&i=N, && [V_N]_{yy}+\frac{1}{h^2}[V_{N+1}(y)-2V_N(y)+V_{N-1}(y)]=0
\end{aligned}
\tag{2.1.4}
$$

(2.1.4) denklemi matris formunda yazılırsa

$$
\frac{d^2}{dy^2}\begin{bmatrix} V_1\\ V_2\\ V_3\\ \vdots\\ V_{N-1}\\ V_N \end{bmatrix}+\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & 0 & \\ & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & & & 1 & -2 & 1\\ & & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1\\ V_2\\ V_3\\ \vdots\\ V_{N-1}\\ V_N \end{bmatrix}=0 \tag{2.1.5}
$$

(2.1.5) denklemi daha sade şekilde yazılırsa

$$
\frac{d^2}{dy^2}[V]+[P][V]=0 \tag{2.1.6}
$$

denklemi yazılabilir. Burada

$$
[V]=[V_1,V_2\ldots,V_N]^t
$$

ve

$$
[P]=\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & 0 & \\ & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & & & 1 & -2 & 1\\ & & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}
$$

dir. Sonraki adımımız ise y koordinatı boyunca analitik çözümü bulmak olacaktır. (2.1.6) denklemi ikinci dereceden adi homojen diferansiyel denkleme dönüşmüştür. (2.1.6) denkleminin çözüm kümesi ise

$$
V=Ae^{iy\sqrt{[P]}}+Be^{-iy\sqrt{[P]}}
$$

şeklindedir.

2.2. İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (RDTM)

İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm yönteminin (Keskin, 2010) tanımını vermeden önce bu yönteme temel teşkil eden bir boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemini (Zhou, 1986) ve iki boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemini (Chen, 1999) açıklayacağız. Daha sonra bu yöntemler ışığında indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yönteminin tanımını vereceğiz. (Keskin ve Oturanç, 2009)

2.2.1. Bir Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Tek değişkenli *w(x)* fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu *W(k)* olmak üzere, *w(x)*' nin tek boyutlu diferansiyel dönüşümü

$$W(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}w(x)\right]_{x=0} \tag{2.2.1}$$

olarak tanımlanır. *W(k)* dönüşüm fonksiyonunun tersi; diferansiyel ters dönüşüm fonksiyonu,

$$w(x)=\sum_{k=0}^{\infty}W(k)x^k \tag{2.2.2}$$

biçimde tanımlanır. (2.2.1) ve (2.2.2) eşitlikleri dikkate alınarak aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$w(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}w(x)\right]_{x=0}x^k$$

2.2.2. İki Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Benzer şekilde, İki değişkenli *w(x,y)* fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu *W(k,h)* olmak üzere, *w(x,y)*' nin iki boyutlu diferansiyel dönüşümü

$$W(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k\partial y^h}w(x,y)\right]_{x=0,y=0} \tag{2.2.3}$$

olarak tanımlanır. *W(k,h)* dönüşüm fonksiyonunun tersi; diferansiyel ters dönüşüm fonksiyonu,

$$w(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}W(k,h)x^k y^h \tag{2.2.4}$$

biçimde tanımlanır. (2.2.3) ve (2.2.4) eşitlikleri dikkate alınarak aşağıdaki eşitlik elde edebiliriz.

$$w(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^{k}\partial y^{h}}w(x,y)\right]_{x=0,y=0}x^{k}y^{h}$$

2.2.3. İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Kabul edelim ki iki boyutlu kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümü

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}U(k,h)x^{k}t^{h}$$

şeklinde olsun. O zaman fonksiyonun diferansiyel dönüşüm karşılığı

$$U(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^{k}\partial t^{h}}u(x,t)\right]_{x=0,t=0}$$

olarak tanımlanmıştı.

$$u_{x,t}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}U_{k,h}x^{k}t^{h}$$

olduğundan fonksiyonu açık halde yazarsak

$$U_{0,0},U_{0,1}x,U_{0,2}x^{2},...,U_{1,0}t,U_{1,1}tx,U_{1,2}tx^{2},...,U_{2,0}t^{2},U_{2,1}t^{2}x,...$$

elde edilir. Buradaki terimleri t nin kuvvetlerine göre düzenleme yapılırsa yani ilk grup $t^{0}\sum_{k=0}^{\infty}U_{k,0}x^{k}$, ikinci grup $t^{1}\sum_{k=0}^{\infty}U_{k,1}x^{k}$, üçüncü grup $t^{2}\sum_{k=0}^{\infty}U_{k,2}x^{k}$ … v.b.

Böylece

$$u_{x,t}=\sum_{h=0}^{\infty}U_{h}(x)t^{h}$$

fonksiyonu elde edilir. Buradan hareketle aşağıdaki tanımları verilmiştir[Keskin, 2010].

Tanım 2.2.1

İki bileşenli u*(x,t)* fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu *U(k,h)* olmak üzere, *u(x,t)*' nin t boyunca hesaplanacak çözümü

$$u(x,t)=\sum_{h=0}^{\infty}U_{h}(x)t^{h} \qquad (2.2.5)$$

şeklindedir.

Tanım 2.2.2.

İki bileşenli u*(x,t)* fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu *U(k,h)* olmak üzere, *u(x,t)*' nin *t* boyunca hesaplanacak çözümün indirgenmiş diferansiyel dönüşümü

$$U_h(x) = \frac{1}{h!}\left[\frac{\partial^h}{\partial t^h}u(x,t)\right]_{t=0} \tag{2.2.6}$$

şeklindedir.

Tanım 2.2.3

$U_h(x)$ 'nin *t* boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm fonksiyonunun tersi;

$$u(x,t) = \sum_{h=0}^{\infty} U_h(x)t^h \tag{2.2.7}$$

şeklinde tanımlanır. (2.2.6) ve (2.2.7) eşitlikleri dikkate alınarak aşağıdaki eşitlik elde edebiliriz.

$$u(x,t) = \sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{h!}\left[\frac{\partial^h}{\partial t^h}u(x,t)\right]_{t=0} t^h$$

Tanım 2.2.4

İki bileşenli u*(x,t)* fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu *U(k,h)* olmak üzere, *u(x,t)*'nin boyunca hesaplanacak çözümü x

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(t)x^k$$

şeklindedir.

Tanım 2.2.5

İki bileşenli u*(x,t)* fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu *U(k,h)* olmak üzere, *u(x,t)*' nin *x* boyunca hesaplanacak çözümün indirgenmiş diferansiyel dönüşümü,

$$U_k(t) = \frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^h}{\partial x^k}u(x,t)\right]_{x=0}$$

şeklindedir.

2.3. Variational İterasyon Yöntemi

Bu metot ile elde edilen nümerik çözümlerin hata miktarının az olmasının yanında işlemler sırasında kullanılacak bilgisayarda yüksek kapasiteye de ihtiyaç duyulmaması metodun uygulamalarını artırmıştır. (Abdou ve Soliman, 2005)

Varyasyonel iterasyon metodunun uygulanmasında, L lineer operatör, N lineer olmayan operatör ve $g(x)$ ise homojenliği bozan terim olmak üzere, çözümü aranan diferansiyel denklem,

$$Lu + Nu = g(x)$$

formunda ele alınır.

Varyasyonel iterasyon metoduna göre denklemin,

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda\{Lu_n(s) + N\tilde{u}_n(s) - g(s)\}ds$$

formundaki varyasyon fonksiyonu kurulur. Burada λ, Lagrange çarpanı (Inokuti 1978) olup varyasyon teorisinden hareketle Maple, Mathematica gibi paket programları yardımıyla hesaplanır. $\tilde{u}_n$ sınırlanmış varyasyon (He 1999) olup $\delta\tilde{u}_n = 0$'dır. Bulunan λ sayı değerine göre varyasyon fonksiyonu yeniden düzenlenerek aranan çözüm fonksiyonu için rekürans bağıntısı oluşturulmuş olur. Başlangıç koşulu olarak verilen fonksiyon u_0 olarak seçilmek suretiyle $n > 0$ için u_n terimleri için yaklaşımlar elde edilmiş olur. Son olarak çözüm fonksiyonu,

$$u = \lim_{n\to\infty} u_n$$

eşitliğinden elde edilir.

2.4. Adomian Ayrışım Yöntemi

G.Adomian'ın yaptığı gibi önce metodu yapısal olarak tanıtalım. Bunun içinde

$$F\left[u(t)\right] = g(t)$$

denklemini göz önüne alalım. Burada $u(t)$ bilinmeyen fonksiyon ve $g(t)$ sürekli bir fonksiyon olup F ise lineer ve lineer olmayan terimleri içeren lineer olmayan bir diferansiyel operatörü göstersin. [Ganji, 2007] Lineer terim $L+R$ şeklinde ayrıştırılır, R lineer operatörün geri kalan kısmıdır. L yüksek mertebeden ve tersi alınabilen bir diferansiyel operatör olsun. O zaman yukarıdaki denklemi

$$Lu + Ru + Nu = g$$

şeklinde verebiliriz. Burada N lineer olmayan operatör ve L'de tersi alınabilen bir operatör olduğundan, denklemin her iki tarafına L^{-1} ters operatörü uygulanırsa

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu$$

bulunur. Ayrışım metodu, $u(t)$'nin çözümünü

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

şeklinde seri formunda hesaplar ve lineer olmayan *Nu* terimlerini de

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

biçiminde ayrıştırır. Burada A_n'ler $u_0, u_1, \ldots, u_n$'lere bağlı olan ve Adomian polinomları olarak adlandırılan polinomlarıdır. *u ve Nu*'lar, sırası ile,

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i \ ,$$

$$N(u) = N\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i A_i$$

olarak elde edilir. Burada λ uygunluk için alınan bir parametredir. A_n'ler

$$n! A_n = \frac{d^n}{d\lambda^n}\left[N\left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n\right)\right]_{\lambda=0}$$

ifadesiyle bulunur. Buradan

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \theta + L^{-1}g - L^{-1}R\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) - L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right)$$

elde ederiz. Burada $\theta = u(0)$ dır. $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ serisinin terimleri indirgeme formülü ile

$$\begin{aligned} u_0 &= \theta + L^{-1}g \ , \\ u_1 &= -L^{-1}R\,u_0 - L^{-1}A_0 \ , \\ &\vdots \\ u_{n+1} &= -L^{-1}R\,u_n - L^{-1}A_n \ , \ n \geq 0 \, . \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Böylece ifadenin doğru çözümü seri formunda belirtilmiş olur. Fakat uygulamada $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ serisinin bütün terimlerini hesaplamak zordur. Bu nedenle kesme serisinden başlayarak yaklaşık çözümü;

$$\varphi_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_n$$

veya

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= u_0 \ , \\
\phi_2 &= u_0 + u_1 \ , \\
\phi_3 &= u_0 + u_1 + u_2 \ , \\
&\vdots \\
\phi_{n+1} &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \ , n \geq 0
\end{aligned}$$

şeklinde buluruz. (Adomian, 1988)

3. PROBLEMLER

Bu bölümde bazı özel kısmi türevli diferansiyel denklemlerin 2. Bölümde verilen yöntemlerle elde edilen çözümler ve bu çözümlerin sayısal değerleri tablo halinde verilmiştir.

3.1. Problem 1

Kimya ve mühendislikte sıvının yatay olarak hareketinin modellemesi olan lineer advection denklemi literatürde

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c\frac{\partial u}{\partial x} \tag{3.1}$$

ve bu denkleme ait başlangıç şartı da $u(x,0) = f(x)$ şeklinde tanıtılır ve bu denklemin analitik çözümü $u(x,t) = f(x-ct)$ şeklindedir. (c= sabittir) (Pregla, 1989)

3.1.1. Method of Lines ile Çözüm

(3.1) Denklemin başlangıç şartı

$$u(x,0) = f(x) = e^{-x^2} \qquad a \le x \le b$$

Şeklinde ve sınır şartlarını da

$$u(a,t) = 0\,, \qquad u(b,t) = 0 \quad t > 0$$

olarak alalım. (3.1) denkleminin bağımsız değişkenini sayılabilir sonlu parçaya ayıralım.

$$x_i = ih \quad (i = 1,2,...,N)\,,\ a \le x_{\,i} \le b \ \text{ ve } \ h = \frac{(b-a)}{N}$$

(3.1) denkleminde $\frac{\partial u}{\partial x}$ ifadesinin yerine x_i ' nin sonlu fark yaklaşımını yazarsak

$$\frac{du}{dt} = f(u_i) \ \ i = 1,2,...,N-1$$

Şeklinde t'ye bağlı bir adi diferansiyel denklem sistemi oluşur. Burada beş noktalı fark denklemleri yazarsak

$$u_t = f(u_i) = \frac{1}{12h}\begin{cases} -25u_1 + 48u_2 - 36u_3 + 16u_4 - 3u_5 & , \quad \text{i=1} \\ -3u_1 - 10u_2 + 18u_3 - 6u_4 + u_5 & , \quad \text{i=2} \\ u_{i-2} - 8u_{i-1} + 8u_{i+1} - u_{i+2} & , \quad \text{i=3,4,...,n-2} \\ -u_{n-4} + 6u_{n-3} - 18u_{n-2} + 10u_{n-1} + 3u_n & , \quad \text{i=n-1} \\ 3u_{n-4} - 16u_{n-3} + 36u_{n-2} - 48u_{n-1} + 25u_n & , \quad \text{i=n} \end{cases}$$

şeklinde $f(u_i)$ 'ler elde ederiz.

Çözüm matlab programı ile de aşağıdaki şekilde elde edilir. [Schiesser W.E., Griffiths G.W.,2012]

t	x	c	N	u(x,t)(Analitik)	u(x,t)(Nümerik)	Hata
1.000	-2.000	0.100	101	0.012155	0.012159	0.000004
1.000	0.000	0.100	101	0.990050	0.990107	0.000057
1.000	2.000	0.100	101	0.027052	0.027065	0.000013
2.000	-2.000	0.100	101	0.007907	0.007923	0.000016
2.000	0.000	0.100	101	0.960789	0.961007	0.000218
2.000	2.000	0.100	101	0.039164	0.039214	0.000050
2.000	0.000	0.100	301	0.960789	0.960793	0.000004

Çizelge 3.1. MOL ile çözülen (3.1) denklemin nümerik değerleri

3.1.2. İndirgenmiş Dönüşüm Yöntemi ile Çözüm

Lineer advection denkleminin((3.1) denkleminin) başlangıç şartı

$$u(x,0) = f(x) = e^{-x^2} \qquad a \le x \le b \tag{3.1.1}$$

şeklinde olsun. Bu denklemi indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi ile çözelim. (3.1) denkleminin diferansiyel dönüşüm karşılığı

$$(k+1)U_{k+1}(x) = -c\frac{\partial}{\partial x}U_k(x) \tag{3.1.2}$$

burada $U_k(x), u(x,t)$ 'nin t boyunca hesaplanacak çözümün indirgenmiş diferansiyel dönüşüm fonksiyonudur. Başlangıç değerinin dönüşüm karşılığı ise

$$U_0(x) = e^{-x^2} \tag{3.1.3}$$

olur. Şimdi (3.1.3) denklemini (3.1.2) de yerine yazılarak değerlerinin hesaplayacak olursak

$$U_0(x) = e^{-x^2}$$

$$U_1(x) = 2cxe^{-x^2}$$

$$U_2(x) = c^2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$$

$$U_3(x) = \frac{2}{3}c^3e^{-x^2}(2x^3 - 3x) \qquad (3.1.4)$$

$$U_4(x) = \frac{1}{6}c^4e^{-x^2}(4x^4 - 12x^2 + 3)$$

$$U_5(x) = \frac{1}{15}c^5e^{-x^2}(4x^5 - 20x^3 + 15x)$$

.
.

Elde edilen bu değerler (2.2.7) denkleminde yerine yazarsak

$$\sum_{k=0}^{\infty} U_k(x)t^k = U_0(x) + U_1(x)t + U_2(x)t^2 + \ldots$$

dır. Hemen belirtelim ki terim sayısını arttırırsak daha fazla iş yükü ortaya çıkar ve bilgisayar için daha fazla bellek kullanılmasına neden olur. 6 terim kullanarak elde edilen yaklaşık çözüm

$$u(x,t) \cong U_6(x,t) = \sum_{k=0}^{6} U_k(x) = \frac{1}{30}e^{-x^2}\begin{pmatrix} 30 + 60cxt - 30c^2t^2 + 60c^2t^2x^2 \\ -60c^3t^3x + 40c^3t^3x^3 - 60c^4t^4x^2 \\ +20c^4t^4x^4 + 15c^4t^4 - 40c^5t^5x^3 + 8c^5t^5x^5 + 30c^5t^5x \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Bulduğumuz ifadenin ne kadar kesin çözüme yakın olduğu ile ilgili tablo verilmiştir. (N =terim sayısı) [Bozdemir, 2013]

t	*x*	*c*	*N*	*u(x,t)(Analitik)*	*u(x,t)(RDTM)*	*Hata*
1.000	-2.000	0.100	6	0.012155	0.012155	0.000000
1.000	0.000	0.100	6	0.990050	0.990050	0.000000
1.000	2.000	0.100	6	0.027052	0.027051	0.000001
2.000	-2.000	0.100	6	0.007907	0.007908	0.000001
2.000	0.000	0.100	6	0.960789	0.960800	0.000011
2.000	2.000	0.100	6	0.039164	0.039165	0.000001
2.000	0.000	0.100	13	0.960789	0.960789	0.000000

Çizelge 3.2. RDTM ile çözülen (3.1) denklemin nümerik değerleri

Şimdi iki tabloyu alt alta koyarak karşılaştırma yapalım;

t	x	c	N	u(x,t)(Analitik)	u(x,t)(RDTM)	Hata
1.000	-2.000	0.100	6	0.012155	0.012155	0.000000
1.000	0.000	0.100	6	0.990050	0.990050	0.000000
1.000	2.000	0.100	6	0.027052	0.027051	0.000001
2.000	-2.000	0.100	6	0.007907	0.007908	0.000001
2.000	0.000	0.100	6	0.960789	0.960800	0.000011
2.000	2.000	0.100	6	0.039164	0.039165	0.000001
2.000	0.000	0.100	13	0.960789	0.960789	0.000000

Çizelge 3.2. RDTM ile çözülen (3.1) denklemin nümerik değerleri

t	x	c	N	u(x,t)(Analitik)	u(x,t)(Nümerik)	Hata
1.000	-2.000	0.100	101	0.012155	0.012159	0.000004
1.000	0.000	0.100	101	0.990050	0.990107	0.000057
1.000	2.000	0.100	101	0.027052	0.027065	0.000013
2.000	-2.000	0.100	101	0.007907	0.007923	0.000016
2.000	0.000	0.100	101	0.960789	0.961007	0.000218
2.000	2.000	0.100	101	0.039164	0.039214	0.000050
2.000	0.000	0.100	301	0.960789	0.960793	0.000004

Çizelge 3.1. MOL ile çözülen (3.1) denklemin nümerik değerleri

3.2. Problem 2

Literatürde KdV denklemi olarak bilinen

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, x \in R, \tag{3.2.1}$$

ve başlangıç değeri

$$u(x,0) = -\frac{k^2}{2} sech^2\left[\frac{k}{2}x\right] \tag{3.2.2}$$

şeklinde olan kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümünü bulunuz. (Keskin 2009)

3.2.1. Method of Lines ile Çözüm

KdV denkleminin başlangıç şartı

$$u(x,0) = -\frac{k^2}{2} sech^2\left[\frac{k}{2}x\right], \ \ a \le x \le b \text{ olsun.}$$

Sınır değerleri ise

$$u(a,t) = 0, \ u(b,t) = 0, \ \ t > 0 \text{ olsun.}$$

Kdv denkleminde istenilen sonuç $a \le x \le b$ ile $0 \le t \le T$ bögesinin içindedir. Bu bölgeyi x boyunca sayılabilir sonlu parçaya ayırırsak,

$$x_i = ih (i = 1,2,...,N),\ a \le x_i \le b \text{ ve } h = \frac{(b-a)}{N}$$

Denklemde $\frac{\partial u}{\partial x}$ ve $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ yerine sonlu fark yaklaşımı yapıldığında

$$\frac{du}{dt} = f(u_i),\ \ i = 1,2,...,N-1$$

Şeklinde t'ye bağlı bir adi diferansiyel denklem sistemi oluşur. Buradan ileri fark denklemlerini yazalım,

$$f(u_i) = \begin{cases} -\dfrac{-5u_i + 18u_{i+1} - 24u_{i+2} + 14u_{i+3} - 3u_{i+4}}{2h^3} - 6u_i \dfrac{-3u_i + 4u_{i+1} - u_{i+2}}{2h} & i = 1,2 \\ -\dfrac{u_{i-3} - 8u_{i-2} + 13u_{i-1} - 13u_{i+1} + 8u_{i+2} - u_{i+3}}{8h^3} - 6u_i \dfrac{-u_{i-1} + u_{i+1}}{2h} & i = 3,4,...,N-3 \\ -\dfrac{3u_{i-4} - 14u_{i-3} + 24u_{i-2} - 18u_{i-1} + 5u_i}{2h^3} - 6u_i \dfrac{u_{i-2} - 4u_{i-1} + 3u_i}{2h} & i = N-2, N-1 \end{cases}$$

Şeklinde sonuç elde edilir. Matlab ile aşağıdaki şekilde sonuç elde edilir. [Griffiths ve Schiesser 2010]

t	x	c	N	u(x,t)(Analitik)	u(x,t)(Nümerik)	Hata
0	-6	0.1	101	0.022680	0.022680	0.000000
0	2	0.1	101	0.045315	0.045315	0.000000
2	0	0.1	101	0.049950	0.049918	0.000032
2	10	0.1	101	0.008257	0.008286	0.000029
4	-4	0.1	101	0.031902	0.031836	0.000066
4	4	0.1	101	0.036750	0.036680	0.000070
4	4	0.1	301	0.036750	0.036680	0.000099

Çizelge 3.3. 3.2.1 denkleminin MOL ile çözümü

3.2.2. İndirgenmiş Dönüşüm Yöntemi ile Çözüm

Diferansiyel denklemin analitik çözümü $u(x,t) = -\frac{k^2}{2}\sec h\left(\frac{k}{2}\left(x - k^2 t\right)\right)$ dir.

Şimdi indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi ile denklemi çözelim. (3.2.1) denklemine indirgenmiş dönüşüm yöntemi uygulanırsa

$$(h+1)U_{h+1}(x) = 6\sum_{s=0}^{h} U_{h-s}(x)\frac{\partial}{\partial x}U_s(x) - \frac{\partial^3}{\partial x^3}U_h(x) \qquad (3.2.3)$$

elde edilir. Burada $U_h(x)$, $u(x,t)$ 'nin t boyunca hesaplanacak çözümün indirgenmiş diferansiyel dönüşümüdür.(3.2.2) başlangıç değerinden

$$U_0(x) = -\frac{k^2}{2} sech^2\left[\frac{k}{2}x\right] \tag{3.2.4}$$

(3.2.4) denklemini (3.2.3) denkleminde yerine yazılması sonucunda istenilen mertebe kadar $U_h(x)$ değerleri ardışık olarak hesaplanabilir. İterasyon uygulanırsa

$$U_1(x) = -\frac{1}{2}\frac{\sinh\left(\frac{kx}{2}\right)k^5}{\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^3},$$

$$U_2(x) = -\frac{1}{8}\frac{k^8\left(-3+2\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^2\right)}{\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^4}$$

$$U_3(x) = -\frac{1}{12}\frac{k^{11}\sinh\left(\frac{kx}{2}\right)\left(\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^2-3\right)}{\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^5},$$

$$U_4(x) = -\frac{1}{96}\frac{k^{14}\left(2\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^4+15-15\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^2\right)}{\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^6}$$

$$\vdots$$

O zaman $\{U_h(x)\}_{h=0}^{4}$ değerlerinin ters indirgenmiş diferansiyel dönüşümü alınarak verilen denklemin dördüncü mertebeden yaklaşık çözümü

$$\tilde{u}_4(x,t)=\sum_{h=0}^{4}U_h(x)t^h=-\frac{k^2\left(15k^{12}-15k^{12}\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^2+2k^{12}\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^4\right)t^4}{96\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^6}$$

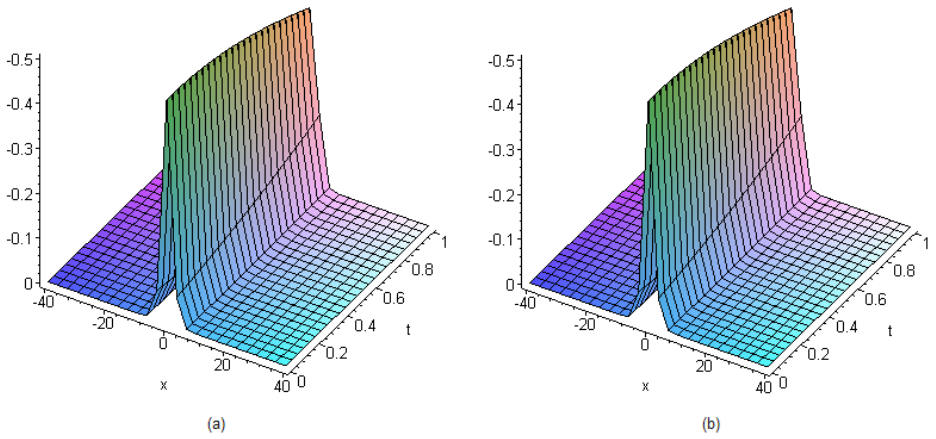
$$-\frac{1}{96}\frac{k^2\left(8k^9\sinh\left(\frac{kx}{2}\right)\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^3-24k^9\sinh\left(\frac{kx}{2}\right)\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)\right)}{\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^6}t^3$$

$$-\frac{1}{96}\frac{k^2\left(-36k^6\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^2-24k^6\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^4\right)}{\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^6}t^2$$

$$-\frac{1}{2}\frac{k^5\sinh\left(\frac{kx}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^3}t-\frac{1}{2}\frac{k^2}{\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^2}$$

böylece problemin aranılan analitik çözümü $u(x,y)=\lim_{n\to\infty}\tilde{u}_n(x,y)$ şeklinde verilir. (Keskin ve Oturanç 2010)

Bu çözüm $u(x,t)=-\frac{k^2}{2}\sec h\left(\frac{k}{2}\left(x-k^2t\right)\right)$. analitik çözüme yakınsak olduğu ayrıca literatürde verilen varyasyonel iterasyon yöntemi ile kıyaslandığında aynı olduğu şekilden görülebilir.



Şekil 3.1. İndirgenmiş dönüşüm yöntemiyle elde edilen $\tilde{u}_4(x,y)$ yaklaşık çözümü ($k=1$): (a) $u(x,t)=-\frac{k^2}{2}\sec h\left(\frac{k}{2}\left(x-k^2t\right)\right)$ analitik çözüm ile kıyaslanması, (b) varyasyonel iterasyon yöntemi soliton dalga çözümünün kıyaslaması

3.3. Problem 3

Isı iletim denklemini ele alalım;

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

Başlangıç şart

$$u(x,0) = 1$$

ve sınır şartı

$$u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0$$

şeklinde verilsin.

3.3.1. Method of Lines ve Maple ile Çözüm

Bu denklemin çözümü için Maple programı yardımıyla ve Method of lines yöntemiyle aşağıdaki şekilde hesaplayabiliriz. (Wouwer ve Saucez ve Schiesser ve Thompson, 2005) (Schiesser ve Griffiths, 2009) Maple programı ile çözdüğümüz takdirde grafik üzerinde inceleme fırsatı bulmamızda çözüm konusunda bize daha fazla yardımcı olacaktır. (Schiesser, 1991)

```
>restart;
>with(linalg):with(plots):
>ge:=diff(u(x,t),t)=diff(u(x,t),x$2);
```

$$ge := \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{u}(x,\ t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{u}(x,\ t)$$

=>Başlangıç şartı olarak x=0:

```
>bc1:=u(x,t);
```

$$bc1 := \mathrm{u}(x,\ t)$$

=>Sınır şartımız da x=L:

```
>bc2:=u(x,t);
```

$$bc2 := \mathrm{u}(x,\ t)$$

=>Başlangıç şartını girersek

```
>IC:=u(x,0)=1;
```

$$IC := \mathrm{u}(x,\ 0) = 1$$

=>Düğüm noktalarının sayısını gireriz

```
>N:=4;
```

$$N := 4$$

=>Alanın büyüklüğünü gireriz

>L:=4;

$$L := 4$$

=>X=L için ilk türev işlemi;

>dydxf:=1/2*(-u[2](t)-3*u[0](t)+4*u[1](t))/h;

$$dydxf := \frac{1}{2}\,\frac{-u_2(t) - 3\,u_0(t) + 4\,u_1(t)}{h}$$

=>İkinci türev işlemi;

>dydxb:=1/2*(u[N-1](t)+3*u[N+1](t)-4*u[N](t))/h;

$$dydxb := \frac{1}{2}\,\frac{u_3(t) + 3\,u_5(t) - 4\,u_4(t)}{h}$$

=>Sınır şartı sonlu diferansiyele dönüştürürsek;

>dydx:=1/2/h*(u[m+1](t)-u[m-1](t));

$$dydx := \frac{1}{2}\,\frac{u_{m+1}(t) - u_{m-1}(t)}{h}$$

> d2ydx2:=1/h^2*(u[m-1](t)-2*u[m](t)+u[m+1](t));

$$d2ydx2 := \frac{u_{m-1}(t) - 2\,u_m(t) + u_{m+1}(t)}{h^2}$$

>bc1:=subs(diff(u(x,t),x)=dydxf,u(x,t)=u[0](t),x=0,bc1);

$$bc1 := u_0(t)$$

>bc2:=subs(diff(u(x,t),x)=dydxb,u(x,t)=u[N+1](t),x=1,bc2);

$$bc2 := u_5(t)$$

=>Sınır şartlarımızı eq[0] ve eq[N+1] olarak kaydedelim;

>eq[0]:=bc1;

$$eq_0 := u_0(t)$$

>eq[N+1]:=bc2;

$$eq_5 := u_5(t)$$

=>Ana denklemi sonlu diferansiyel forma çevirecek formülümüz;

> for i from 1 to N do eq[i]:=diff(u[i](t),t)= subs(diff(u(x,t),x$2) =subs(m=i,d2ydx2),diff(u(x,t),x) = subs(m=i,dydx),u(x,t)=u[i](t),x=i*h,rhs(ge)); od;

$$eq_1 := \frac{d}{dt}u_1(t) = \frac{u_0(t) - 2\,u_1(t) + u_2(t)}{h^2}$$

$$eq_2 := \frac{d}{dt}u_2(t) = \frac{u_1(t) - 2\,u_2(t) + u_3(t)}{h^2}$$

$$eq_3 := \frac{d}{dt}u_3(t) = \frac{u_2(t) - 2\,u_3(t) + u_4(t)}{h^2}$$

$$eq_4 := \frac{d}{dt}u_4(t) = \frac{u_3(t) - 2\,u_4(t) + u_5(t)}{h^2}$$

=>Sınır şartları u[0](t) ve u[N+0](t)'nu eleyelim;

> u[0](t):=(solve(eq[0],u[0](t)));

$$u_0(t) := 0$$

> u[N+1](t):=solve(eq[N+1],u[N+1](t));

$$u_5(t) := 0$$

=>Şimdi ele aldığımız denklem daha basit hale gelmiş oldu;

> for i from 1 to N do eq[i]:=eval(eq[i]);od;

$$eq_1 := \frac{d}{dt}u_1(t) = \frac{-2\,u_1(t) + u_2(t)}{h^2}$$

$$eq_2 := \frac{d}{dt}u_2(t) = \frac{u_1(t) - 2\,u_2(t) + u_3(t)}{h^2}$$

$$eq_3 := \frac{d}{dt}u_3(t) = \frac{u_2(t) - 2\,u_3(t) + u_4(t)}{h^2}$$

$$eq_4 := \frac{d}{dt}u_4(t) = \frac{u_3(t) - 2\,u_4(t)}{h^2}$$

=>Maple'da ki "genmatrix" komutu ile (A) katsayılar matrisini üretiriz.

> eqs:=[seq(rhs(eq[j]),j=1..N)];

$$eqs := \left[\frac{-2\,u_1(t) + u_2(t)}{h^2}, \frac{u_1(t) - 2\,u_2(t) + u_3(t)}{h^2}, \frac{u_2(t) - 2\,u_3(t) + u_4(t)}{h^2}, \frac{u_3(t) - 2\,u_4(t)}{h^2}\right]$$

> Y:=[seq(u[i](t),i=1..N)];

$$Y := [u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t)]$$

> A:=genmatrix(eqs,Y);

$$A := \begin{bmatrix} -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} \end{bmatrix}$$

=>Düğüm noktaları arasındaki mesafeyi h olarak girelim;

```
> h:=eval(1/(N+1));
```

$$h := \frac{1}{5}$$

=>A matrisi aşağıdaki hale gelir;

```
> A:=map(eval,A);
```

$$A := \begin{bmatrix} -50 & 25 & 0 & 0 \\ 25 & -50 & 25 & 0 \\ 0 & 25 & -50 & 25 \\ 0 & 0 & 25 & -50 \end{bmatrix}$$

```
> if N > 4 then A:=map(evalf,A);end:
> evalm(A);
```

$$\begin{bmatrix} -50 & 25 & 0 & 0 \\ 25 & -50 & 25 & 0 \\ 0 & 25 & -50 & 25 \\ 0 & 0 & 25 & -50 \end{bmatrix}$$

=>Çözüm için üstel matris kullanırız;

```
> mat:=exponential(A,t):
> mat:=map(evalf,mat):
```

=>Başlangıç şartı olarak YO vektörü;

```
> Y0:=matrix(N,1):for i from 1 to N do Y0[i,1]:=evalf(subs(x=i*h,rhs(IC)));
od:evalm(Y0);
```

$$\begin{bmatrix} 1. \\ 1. \\ 1. \\ 1. \end{bmatrix}$$

```
> Y:=evalm(mat&*Y0):
> Y:=map(simplify,Y);
```

$$Y := \begin{bmatrix} 0.2763932024\ e^{(-65.45084971\ t)} + 0.7236067980\ e^{(-9.549150288\ t)} \\ -0.1708203932\ e^{(-65.45084971\ t)} + 1.170820394\ e^{(-9.549150288\ t)} \\ -0.1708203932\ e^{(-65.45084971\ t)} + 1.170820394\ e^{(-9.549150288\ t)} \\ 0.2763932024\ e^{(-65.45084971\ t)} + 0.7236067980\ e^{(-9.549150288\ t)} \end{bmatrix}$$

=>Bir sonraki adımda bağımlı değişkenleri kaydedelim ;

```
> for i from 1 to N do u[i](t):=evalf((Y[i,1]));od:
> for i from 0 to N+1 do u[i](t):=eval(u[i](t));od;
```

$$u_0(t) := 0$$

$$u_1(t) := 0.2763932024\ e^{(-65.45084971\ t)} + 0.7236067980\ e^{(-9.549150288\ t)}$$

$$u_2(t) := -0.1708203932\ e^{(-65.45084971\ t)} + 1.170820394\ e^{(-9.549150288\ t)}$$

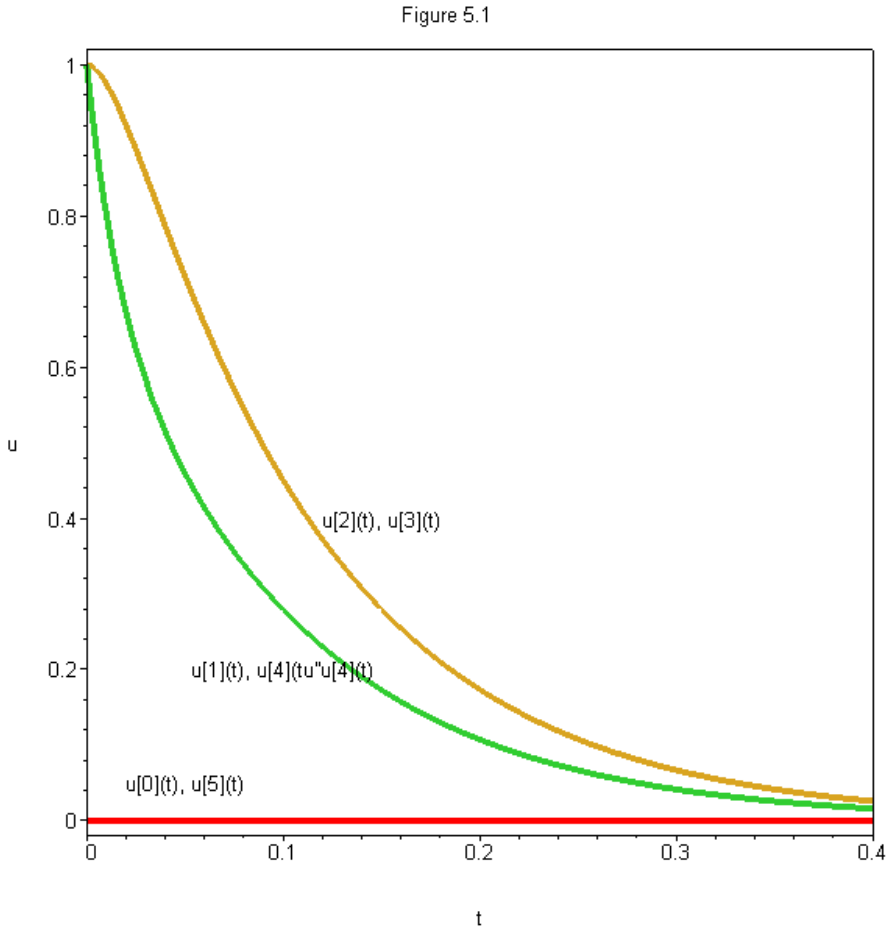
$$u_3(t) := -0.1708203932\ e^{(-65.45084971\ t)} + 1.170820394\ e^{(-9.549150288\ t)}$$

$$u_4(t) := 0.2763932024\ e^{(-65.45084971\ t)} + 0.7236067980\ e^{(-9.549150288\ t)}$$

$$u_5(t) := 0$$

Analitik çözümü her farklı değişken nokta için farklı sonuçlar bulduk. Bunları şekil üzerinde incelersek sonuçları görmemiz daha kolay olur. Her bir çözüm içinde farklı renk kullanırız.

```
> pp:=plot([seq(u[i](t),i=0..N+1)],t=0..0.4);
> pt:=textplot([[0.05,0.05,typeset(u[0],"(t), ",u[5],"(t)")],[0.1,0.2,
typeset(u[1],"(t), ",u[4],"(t",u", u[4],"(t)")],[0.15,0.4,
typeset(u[2],"(t), ",u[3],"(t)")]]);
> display({pp,pt},axes=boxed,thickness=4,title="Figure 5.1",labels=[t,"u"]);
```



Şekil 3.2.

=>Çözümü 3 boyutlu olarakta inceleyebiliriz;

```
> tf:=0.1;
```

$tf := 0.1$

=>Adım sayısını girelim(0'da dahil);

```
> M:=30;
```

$M := 30$

=>T1 için ara ne olmalı onu girelim;

```
> T1:=[seq(tf*i/M,i=0..M)];
```

$T1 := [0., 0.003333333333, 0.006666666667, 0.01000000000, 0.01333333333, 0.01666666667, 0.02000000000, 0.02333333333, 0.02666666667, 0.03000000000, 0.03333333333, 0.03666666667, 0.04000000000, 0.04333333333, 0.04666666667, 0.05000000000, 0.05333333333, 0.05666666667, 0.06000000000, 0.06333333333, 0.06666666667, 0.07000000000, 0.07333333333, 0.07666666667, 0.08000000000, 0.08333333333, 0.08666666667, 0.09000000000, 0.09333333333, 0.09666666667, 0.1000000000]$

```
> PP:=matrix(N+2,M+1);
```

PP := array(1 .. 6, 1 .. 31, [ ])

=>İlk sütun başlangıç şartımız ile doldurulur:

> for i from 1 to N+2 do PP[i,1]:=evalf(subs(x=(i-1)*h,rhs(IC)));od:

=>Kalan sütünlar ise elde ettiğimiz çözümler ile dolar;

> for i from 1 to N+2 do for j from 2 to M+1 do PP[i,j]:=

evalf(subs(t=T1[j],u[i-1](t)));od;od:

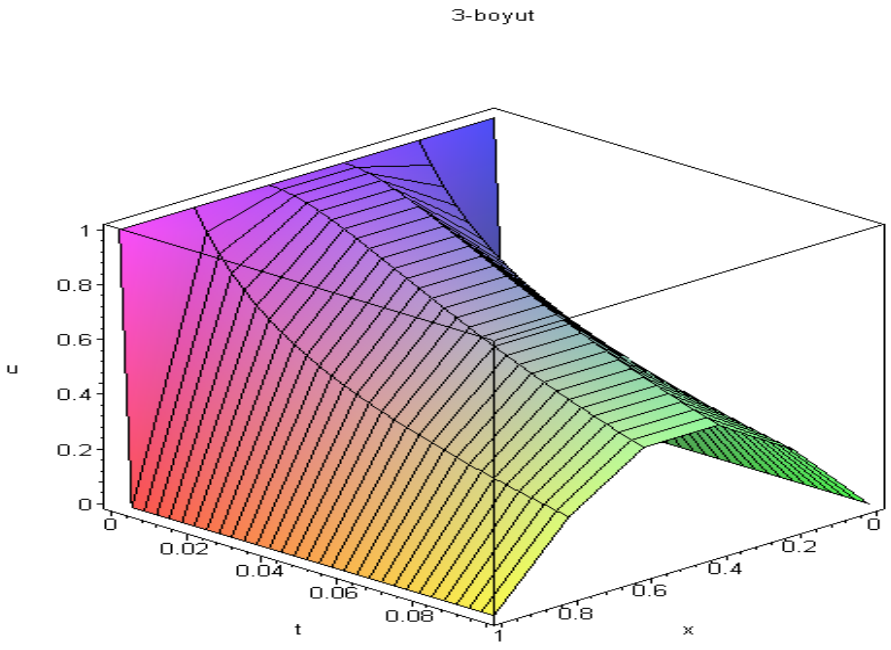
=> "surfdata" komutu ile 3 boyutlu çözümü elde edebiliriz

> plotdata := [seq([seq([(i-1)*h,T1[j],PP[i,j]], i=1..N+2)], j=1..M+1)]:

>surfdata(plotdata, axes=boxed, title="3-boyut",

labels=[x,t,u],orientation=[45,60]);

(Griffiths ve Schiesser 2010)



Şekil 3.3.

3.3.1. İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemiyle Çözüm

Isı iletim denkleminin başlangıç şartı $u(x,0)=1$ şeklindedir. Bu denklemi indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi ile çözelim. (3.1) denkleminin diferansiyel dönüşüm karşılığı

$$(k+1)U_{k+1}(x)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_k(x)$$

burada $U_k(x), u(x,t)$ 'nin t boyunca hesaplanacak çözümün indirgenmiş diferansiyel dönüşüm fonksiyonudur. Başlangıç değerinin dönüşüm karşılığı ise

$$U_0(x) = 1$$

olur. Şimdi bulduğumuz değerleri yerine yazılarak değerlerinin hesaplayacak olursak

$$U_0(x) = e^{-x^2}$$

$$U_1(x) = 2cxe^{-x^2}$$

$$U_2(x) = c^2 e^{-x^2}(2x^2 - 1)$$

$$U_3(x) = \frac{2}{3}c^3 e^{-x^2}(2x^3 - 3x)$$

$$U_4(x) = \frac{1}{6}c^4 e^{-x^2}(4x^4 - 12x^2 + 3)$$

$$U_5(x) = \frac{1}{15}c^5 e^{-x^2}(4x^5 - 20x^3 + 15x)$$

$$\vdots$$

elde edilen bu değerler denklemde yerine yazarsak

$$\sum_{k=0}^{\infty} U_k(x)t^k = U_0(x) + U_1(x)t + U_2(x)t^2 + \ldots$$

şeklindedir. Hemen belirtelim ki terim sayısını arttırırsak daha fazla iş yükü ortaya çıkar ve bilgisayar için daha fazla bellek kullanılmasına neden olur.

6 terim kullanarak elde edilen yaklaşık çözüm

$$u(x,t) \cong U_6(x,t) = \sum_{k=0}^{6} U_k(x) = \frac{1}{30}e^{-x^2}\begin{pmatrix} 30 + 60cxt - 30c^2t^2 + 60c^2t^2x^2 \\ -60c^3t^3x + 40c^3t^3x^3 - 60c^4t^4x^2 \\ +20c^4t^4x^4 + 15c^4t^4 - 40c^5t^5x^3 + 8c^5t^5x^5 + 30c^5t^5x \end{pmatrix}$$

bulunur.

Bulduğumuz ifadenin ne kadar kesin çözüme yakın olduğunu ve avantajını incelemek aşağıdaki tablolar verilmiştir. (N =terim sayısı) [Griffiths ve Schiesser 2010]

t	x	c	N	u(x,t)(Analitik)	u(x,t)(RDTM)	Hata
1.000	-2.000	0.100	6	0.012155	0.012155	0.000000
1.000	0.000	0.100	6	0.990050	0.990050	0.000000
1.000	2.000	0.100	6	0.027052	0.027051	0.000001
2.000	-2.000	0.100	6	0.007907	0.007908	0.000001
2.000	0.000	0.100	6	0.960789	0.960800	0.000011
2.000	2.000	0.100	6	0.039164	0.039165	0.000001
2.000	0.000	0.100	13	0.960789	0.960789	0.000000

Çizelge 3.4. RDTM ile çözülen (3.1) denklemin nümerik değerleri

3.3.3. Varyasyonel İterasyon Yöntemi ile Çözüm

Denklemimizi varyasyon formunda yazalım.

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \int_0^t \lambda(\xi)\left(\frac{\partial u_n(x,\xi)}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 \tilde{u}_n(x,\xi)}{\partial x^2}\right) d\xi .$$

$\lambda = -1$ yazarsak iterasyon denklemi;

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) - \int_0^t \left(\frac{\partial u_n(x,\xi)}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 \tilde{u}_n(x,\xi)}{\partial x^2}\right) d\xi \ , \ n \geq 0$$

olur.

$u_0(x,t) = 1$ den başlayarak

$$1 - t$$

$$1 - 2t + \frac{1}{2}t^2$$

$$1 - 3t + \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3$$

$$1 - 4t + 3t^2 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{24}t^4$$

$$1 - 5t + 5t^2 - \frac{5}{3}t^3 + \frac{5}{24}t^4 - \frac{1}{120}t^5$$

$$1 - 6t + \frac{15}{2}t^2 - \frac{10}{3}t^3 + \frac{5}{8}t^4 - \frac{1}{20}t^5 + \frac{1}{720}t^6$$

$$1 - 7t + \frac{21}{2}t^2 - \frac{35}{6}t^3 + \frac{35}{24}t^4 - \frac{7}{40}t^5 + \frac{7}{720}t^6 - \frac{1}{5040}t^7$$

Maple Kodu yazarsak

```
> restart:
> Mertebe:=10:
> U[0]:=1:
> for k from 0 to Mertebe do
U[k+1]:=U[k]-int(subs(t=a,U[k])-subs(t=a,diff(U[k],xx)),a=0..t)
> od:
> print(U[Mertebe]):
```

Şeklinde hesaplanarak

$$u_n(x,t)=\left(t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\ldots\right)$$

Bu şeklinde bulunur.

3.3.4. Adomian Ayrışım Yöntemi ile Çözüm

Başlangıç değer problemimizin homojen olduğundan eşitliğin her iki tarafına L_t^{-1} operatörünü uygular ve başlangıç değerlerini kullanırsak;

$$u(x,t)=t+L_t^{-1}\left(L_{xx}u(x,t)\right)$$

denklemini elde ederiz. Buradan Adomian serilerini $u(x,t)$ için kullanırsak;

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t)=t+L_t^{-1}\left(L_{xx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t)\right)\right)$$

olur.

Sistemi açık şekilde yazarsak:

$$u_0(x,t)=t$$

$$u_1(x,t)=L_t^{-1}\left(L_{xx}(u_0)\right)=t$$

$$u_2(x,t)=L_t^{-1}\left(L_x(u_1)\right)=-\frac{1}{5!}t^5\sin x$$

u(x,t) nin seri formundaki çözümü

$$u(x,t)=u_0(x,t)+u_1(x,t)+u_2(x,t)+\ldots=xt^2+t^3+\sin x\left(t-\frac{1}{3!}t^3+\frac{1}{5!}t^5-\ldots\right)$$

olur.

Çözümün kapalı formdaki ifadesi ise

$u(x,t)=xt^2+t^3+\sin x\sin t$ şeklinde olur.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Çizgiler yönteminde (MOL) seçilen grid noktalarının iyi sonuç elde edilebilmesi icin,yüzün üzerinde farklı nokta alınması gereklidir. Grid aralıkları ne kadar çok olursa hata payı o kadar fazla olur. Grid noktalarını arttırmak ise hem bilgisayara bağımlı kılar, hem de bilgisayarda yapılan işlemlerin uzamasına neden olur.

İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi ise daha az iterasyon ile daha yaklaşık çözümler vererek iyi sonuçlar alınmıştır. Fakat lineer olmayan ifadelerin derecelerinin fazla olması durumunda bilgisayar kullanmaksızın yöntemin uygulanması karmaşık işlemler meydana getirmektedir.

KAYNAKLAR

Abdou, M. A., & Soliman, A. A., 2005, New applications of variational iteration method. Physica D: Nonlinear Phenomena, 211(1), 1-8.

Adomian, G., 1988, A review of the decomposition method in applied mathematics. Journal of mathematical analysis and applications, 135(2), 501-544.

Bozdemir, T., 2013, Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri Üzerine Yeni Yöntemler, Yüksek Lisans Tezi, Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Çağlar, İ., 2012, Bazı Özel Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Gezen Dalga Çözümleri, Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Evans, L. C., 1998, Partial Differential Equations, American Mathematical Society

Ganji, D.D., & Nourollahi, M., & Rostamian, M., 2007, "A Comparison of Variational Iteratıın Method with Adomian's Decomposition Method in Some Highly Nonlinear Equations", International Journal of Science&Technology, 179-188.

Griffiths, G., & Schiesser, W. E., 2010, Traveling wave analysis of partial differential equations: numerical and analytical methods with MATLAB and Maple. Acedemic Press

He, J. H., 1999, Variational iteration method–a kind of non-linear analytical technique: some examples. International journal of non-linear mechanics, 34(4), 699-708.

Keskin, Y., Oturanç, G., 2009, "Reduced Differential Transform Method for Partial Differential Equations", *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 10(6)

Keskin Y., Oturanç G., 2010, "Diferansiyel Dönüşüm Yöntemiyle Diferansiyel Denklemlerin Çözülmesi"

Keskin, Y., Oturanç, G., 2010, "Reduced differential transform method for generalized KdV Equations", *Mathematical and Computational Applications*, 15 (3), 382-393

Keskin, Y., Oturanç, G., 2010, "The Reduced Differential Transform Method: a New Approach to Fractional Partial Differential Equations", *Nonlinear Science Letters A*, 1 (2), 207-218

Keskin, Y., Kurnaz, A., Kiriş, M.E., Oturanç, G., 2007, "Approximate solutions of generalized pantograph equations by differential transform method", *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation,* 8(2)

Keskin, Y., Kurnaz, A., Kiriş, M.E., Oturanç, G., 2007, "Approximate solution of Generalized Pantograph Equations by the differential transform method", International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 8(2), 159-164.

Schiesser, W. E., 1991, The numerical method of lines. Academic Press.

Schiesser, W. E., & Griffiths, G. W., 2009, A compendium of partial differential equation models: method of lines analysis with Matlab. Cambridge University Press.

Pregla, R., 1989, The method of lines. Analysis of Electromagnetic Fields and Waves: The Method of Lines, 1-13.

Wazwaz, A. M., 2002, Partial differential equations. CRC Press.

Wazwaz A.M., 2008, "Handbook of Differential Equations: Evolutionary Equations, 4", 485-568

Wouwer, A. V., & Saucez, P., & Schiesser, W. E., & Thompson, S., 2005, A MATLAB implementation of upwind finite differences and adaptive grids in the method of lines. Journal of computational and applied mathematics, 183(2), 245-258.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Fatih DURMUŞ
Uyruğu : Türk
Doğum Yeri ve Tarihi : Sivas 09/08/1988
Telefon : 05555120989
Faks :
e-mail : fdurmus5@hotmail.com

EĞİTİM

Derece	**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise :	**Gebze Anadolu Lisesi**	**2006**
Üniversite :	**Selçuk Üniversitesi**	**2011**
Yüksek Lisans :		
Doktora :		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2013	**Maliye Bakanlığı**	**VHKİ**

UZMANLIK ALANI
-İyi Derece Bilgisayar Kullanımı

YABANCI DİLLER
-İngilizce
-Arapça

BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER
-Anadolu Üniversitesi İktisat Fakültesi Kamu Yönetimi Yüksek Onur Derecesi ile Mezuniyet
-Istanbul Üniversitesi Hasan Ali Yücel Eğitim Fakültesinden Formasyon Sertifikası