



T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SIR MODELLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

Hakan BİLBAY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Aralık-2015

KONYA

Her Hakkı Saklıdır

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Hakan BİLBAY

2015

ÖZET

YÜKSEK LİSANS
SIR MODELLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

Hakan BİLBAY

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç.Dr. Yıldıray KESKİN

2015, 37 Sayfa

Jüri
Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA
Doç.Dr. Yıldıray KESKİN
Yard. Doç. Dr. Zübeyde ULUKÖK

Bu tezde SIR *(Susceptible - Infectious – Removed / Recovered)* Epidemik Model tanıtıldı. Bu modelin nasıl kurulduğu bir örnekle açıklandı. Tez ile ilgili literatüre yer verildi. Adomian ayrışım metodu, Homotopi pertürbasyon metodu ve diferansiyel dönüşüm metodu açıklandı. SIR model bu üç farklı nümerik metod ile çözüldü. Bulunan çözümler üzerine tartışıldı ve ulaşılan sonuçlar açıklandı.

Anahtar Kelimeler: Adomian ayrışım metodu, Diferansiyel dönüşüm metodu, Homotopi pertürbasyon metodu, SIR *(Susceptible - Infectious – Removed / Recovered)* model.

ABSTRACT

MS THESIS

ON THE NUMERİCAL SOLUTİON OF SIR MODELS

Hakan BİLBAY

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
MATHEMATİCS

Advisor: Assoc.Prof. Yıldıray KESKİN

2015, 37 Pages

Jury
Assoc.Prof. İbrahim YALÇINKAYA
Assoc.Prof. Yıldıray KESKİN
Asst.Prof.Zübeyde ULUKÖK

SIR epidemic model in this thesis is introduced. This model is explained with an example how it is built. With regard to the thesis in the literature is included. The Adomian Decomposotion Method, Homotopy Perturbation Method, Differantial Transform Method is announced. The model is solved with these three numerical methods. The achieved results are announced.

Keywords: Adomian Decomposotion Method, Homotopy Perturbation Method Differantial Transform Method, SIR *(Susceptible - Infectious – Removed / Recovered)* model.

ÖNSÖZ

Salgın hastalıkların, artan nüfus ve şehirleşmeyle birlikte daha da önem kazandığı ve insanoğlunun hayatını daha tehlikeli boyutlarda tehdit ettiği bir dönemde yaşıyoruz. Bu tehditlerle baş etmek için başta tıp alanında olmak üzere bir çok alanda yoğun çalışmalar yürütülmektedir. Matematik alanında da bu konuda 1927 yılında başlayan çalışmalar yoğun bir şekilde devam ediyor. Bu alanda diferansiyel denklemlerle modellenen salgın hastalıkların yayılışı, stabilitesi veya sönmesi üzerinde yapılan çalışmalar öncelikle tıp alanında olmak üzere toplum sağlığı politikalarına da yön vermektedir.

SIR Modellerin Nümerik Çözümleri Üzerine adlı bu tez çalışmamızı beş bölümde inceledik.

Birinci bölümde SIR modelin tarihi gelişimi ve nasıl modellendiği hakkında bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde bu alanda yapılan çalışmaların incelendiği kısa bir literatür araştırmasına yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde SIR modeli çözeceğimiz nümerik metotlar olan Diferansiyel Dönüşüm Metodu, Adomian Ayrışım Metodu ve Homotopi Pertürbasyon Metodu tanıtılmıştır.

Dördüncü bölümde bu metotlarla ayrı ayrı SIR modelin çözümünü yapılmıştır.

Beşinci bölümde Maple programı kullanarak başlangıç şartları verilen bir örneği bu üç nümerik metotla uygulamasını yaptık ve grafiklerini karşılaştırdık ve önerilerde bulunulmuştur.

Son olarak, bu tez konusunu benim için seçen ve tezin hazırlanmasının her aşamasında benden yardımını esirgemeyen değerli danışmanım ve hocam Doç. Dr. Yıldıray KESKİN'e teşekkürlerimi sunuyorum.

Hakan BİLBAY
KONYA-2015

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **iv**

ÖNSÖZ ..... **iv**

İÇİNDEKİLER ..... **iv**

SİMGELER VE KISALTMALAR ..... **v**

1. GİRİŞ **1**

1.1. Matematik Modellenmesi 4
1.1.1. Kabuller 4
1.1.2. SIR modelin kurulması 4
1.1.3. Temel Üreme Oranı (Basic Reproductive Ratio) 6
1.1.4. Varicella Örneği 7

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI **13**

3. MATERYAL VE YÖNTEM **16**

3.1. Adomian Ayrışım Metodu (ADM) 16
3.2. Homotopi Pertürbasyon Metodu (HPM) 19
3.3. Diferansiyel Dönüşüm Metodu (DTM) 21

4. UYGULAMALAR **23**

4.1. Modelin Homotopi Pertürbasyon Metodu (HPM) ile Çözümü 23
4.2. Modelin Diferansiyel Dönüşüm Metodu (DTM) ile Çözümü 25
4.3. Modelin Adomian Ayrışım Metodu (ADM) ile Çözümü 26

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER **28**

5.1. Sonuçlar 28
5.2 Öneriler 33

KAYNAKLAR **34**

ÖZGEÇMİŞ **36**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

β : Etkin temas oranı

σ :Temas sayısı

γ : İyileşme hızı

R_0 : Temel üreme oranı

Δt : Zaman periyodu

Kısaltmalar

ADM : Adomian Decomposotion Method (Adomian Ayrışım yöntemi)

HPM : Homotopy Perturbation Method (Homotopi Pertürbasyon Yöntemi

DTM : Differantial Transform Method (Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi)

1. GİRİŞ

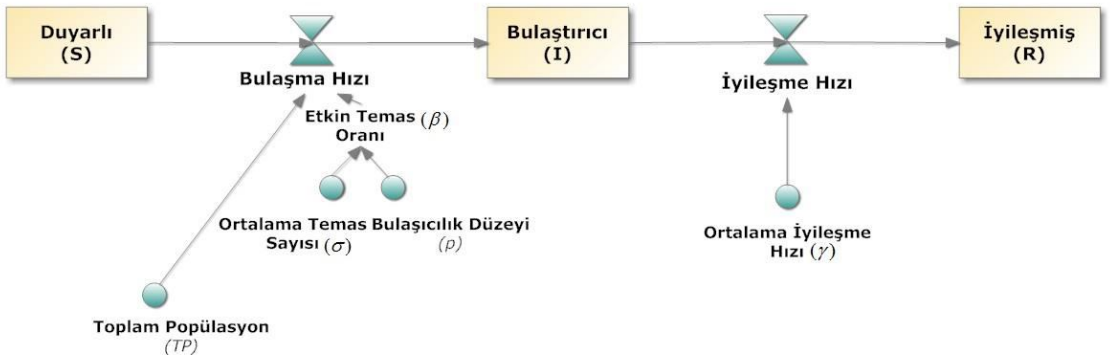
SIR *(Susceptible - Infectious – Removed / Recovered)* MODEL

Matematik modellerin bulaşıcı hastalıkların yayılımının tahmininde ilk örnek olarak gösterilen ve 1927 yılında birincisi yayımlanan "*A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics"* isimli makaleleri ile A. G. McKendrick ve W. O. Kermack yapmıştır. Bu çalışmayı 1932 ve 1933 yıllarında yayımladıkları çalışmalar takip etmiştir.

Kermack – McKendrick (Kermack, & McKendrick, 1927)Modeli kapalı bir toplulukta zaman içerisinde bulaşıcı bir hastalığın yayılımını açıklamaya çalışmaktadır. Özellikle 1665-1666 Londra veba, 1865 Londra kolera ve 1906 Mumbai (Bombay) veba salgınlarında gözlenen hasta sayılarındaki hızlı yükseliş ve düşüşlerin nedenlerine deterministik modeller ile öneriler getirilmektedir.

Kermack ve McKendrick tarafından geliştirilen temel modelden hareketle SIR olarak isimlendirilen modelde dış çevreye kapalı, doğum ve doğal veya başka hastalıklardan kaynaklanan diğer ölüm olaylarının bulunmadığı, enfeksiyon ajanının kuluçka *(Incubation)* süresinin anlık, bireylerin yaş, coğrafi ve sosyal konumunun homojen, nüfusun sabit olduğu ve hastalığın sadece insandan insana geçtiği bir popülasyonda, bulaşıcı bir hastalığın evreleri basit diferansiyel denklemlerle modellenmiştir. Modelde bulaşıcı bir hastalığa maruz kalan popülasyon üç gruba ayrılmıştır. *(Şekil 1)*

Birinci grupta hastalığa henüz yakalanmamış, ancak bu hastalığa karşı bağışıklığa sahip olmaması nedeni ile hastalığa yakalanma ihtimali olan ***hastalığa duyarlı bireyler*** *(Susceptible Individual)* yer almaktadır. Hastalığa duyarlı birey, belirli bir patojene maruz kaldığında, bu etkenle oluşacak enfeksiyonun, kendisine bulaşmasını engelleyecek yeterli bağışıklığa sahip olmayan kişidir. Bazı bireyler belirli bulaşıcı hastalıklara karşı doğal bağışıklığa sahip olsalar da, bu durumdaki bireyler popülasyonun çok küçük bir kısmını oluşturacakları için modellemede göz ardı edilebilirler. Popülasyon içerisinde belirli bir hastalığa karşı duyarlı olan bireylerin oranı, popülasyonun *uniform* (dikdörtgen) dağıldığı varsayıldığında; A ortalama yaşı ve L doğumda beklenen yaşam süresini *(Life Expectancy at Birth)* göstermek üzere = A / L eşitliği ile tahmin edilebilir.



Susceptible	*Infection Rate*	***Infectious***	*Recovery Rate*	***Recovered***
$\frac{dS}{dt} = -\beta S I$	$= IS\beta / TP$	$\frac{dI}{dt} = \beta S I - \gamma I$	$= I\gamma$	$\frac{dR}{dt} = \gamma I$

Şekil 1: *SIR Model(Akpınar 2012)*

İkinci grupta enfekte olmuş, hastalığı taşıyan ve hastalığı duyarlı bireylere bulaştırabilen ***bulaştırıcı bireyler*** *(Infectious)* bulunmaktadır.

Üçüncü grubu ise hastalığa karşı bağışıklık kazanarak iyileşen veya hastalık sonucunda ölenler oluşturmaktadır. Bu grup hastalığı sona erenleri nitelendirmek üzere orijinal modelde ***Removed*** olarak isimlendirilmiş olmakla birlikte, hastalığa karşı bağışıklık kazanarak iyileşenleri göstermek üzere ***Recovered*** olarak da isimlendirilmektedir. Bazı yazarlar tarafından modelde popülasyonun sabit olması nedeni ile, popülasyonda ölümlerden kaynaklanan azalmanın kabul edilemeyeceği, bunu kabul etmenin kötü bir modelleme yaklaşımı olacağı ifade edilmektedir. Ayrıca kazanılan bağışıklığın geçici olduğu hastalıklarda, iyileşenlerin sayısının tekrar modele dahil edilmesi gerektiği ifade edilmektedir.

Modelde kullanılan grupların ilk harflerinden hareketle *(**S**usceptible - **I**nfectious – **R**emoved / **R**ecovered)* bu temel modele ***SIR Model*** adı verilmiştir. Ayrıca popülasyonun sınıflandırıldığı bu gruplar, kompartıman olarak isimlendirildiği için SIR Model ve daha sonra bu temelden geliştirilen tüm modeller akademik yazında ***kompartıman modeller*** adı altında toplanmıştır.

Modelde popülasyon kavramı ile belirli bir coğrafi bölgede yaşayan insan sayısı (nüfus) kastedilmektedir. Nüfusun tamamının belirli bir bulaşıcı hastalığa duyarlı olmadığı diğer modellerde kavram kargaşasına yol açmamak için, bu temel modelde de popülasyon ve hastalığa duyarlı birey sayısı iki farklı kavram olarak ele alınmıştır.

Ancak bu modelde popülasyon (N) ve hastalığa duyarlı birey sayısı (S) eşit olarak kabul edilmektedir. Modelde,

- S(t), t anında hastalık kapmamış ancak bu hastalığa karşı duyarlı olan,
- I(t), t anında enfekte olmuş ve hastalığı hastalığa duyarlı bireylere bulaştırma kapasitesine sahip olan,
- R(t), tekrar enfekte olma olasılığı olmayan veya enfeksiyonu yayma olasılığı olmayan

bireylerin sayısını göstermek üzere, bireylerin toplam sayısı popülasyona eşit olacaktır.

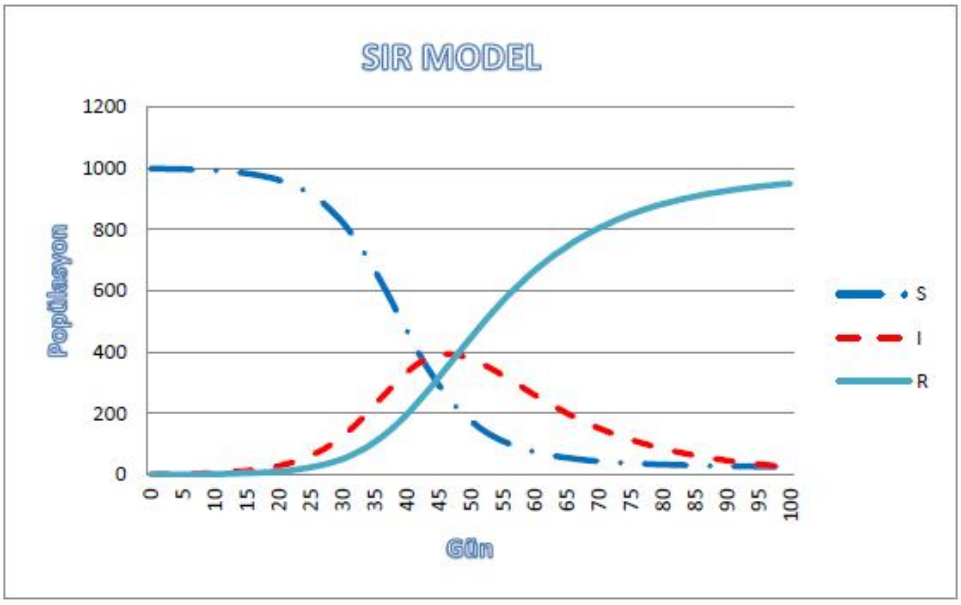
$$S(t) + I(t) + R(t) = Sabit = N$$

Modelde tanımlanan t zaman dilimi içerisinde (örneğin 1 gün) bir kompartımandan diğerine olan geçişlerin sayısı olan bulaşma hızının (S durumundan I durumuna) ve iyileşme hızının (I durumundan R durumuna) hesaplanması gerekmektedir.

Modelde hastalığa duyarlı bireylerin, bulaştırıcı durumundaki bireyler tarafından enfekte edilebilmesi için, her iki kompartımanda yer alan bireylerin birbirleri ile temas edeceği ve her temas sırasında bulaşıcılık düzeyinin *(p)* söz konusu olacağı varsayılmıştır. Genelde akademik yazında etkin temas oranı *(Effective Contact Rate)* olarak isimlendirilen ve β ile gösterilen değer, temas sayısı (σ) ve bulaşıcılık düzeyinin çarpımı sonucunda hesaplanmaktadır. Bu durumda tanımlanan t zaman dilimi içerisinde S kompartımanından, I kompartımanına geçecek bireylerin sayısı olan bulaşma hızı, = β*S*I eşitliğinden hesaplanabilecektir.

Modelde bulaştırıcı durumunda bulunan bir bireyin, ortalama bir süre içerisinde iyileşeceği ve I kompartımanından, R kompartımanına geçeceği öngörülmüştür. Ortalama iyileşme süresi D ile gösterildiğinde, γ= 1/D olmak üzere, iyileşme hızı *(recovery rate)* = γ* I olacaktır. Bu durumda belirtilen t zaman diliminde bir kompartımandan diğerine geçen bireylerin sayısını hesaplamak için üç basit diferansiyel denkleme şekil 1'de yer verilmiştir.

Toplam popülasyonun 1000, I(0) değerinin 1, toplam temas sayısının 5, bulaşma riskinin % 5 ve ortalama iyileşme süresinin 15 gün olarak tanımlandığı bir SIR modelde, 100 günlük süre için bulaşıcı hastalığın şekil 2'de görüldüğü gibi seyretmesi beklenecektir. (Akpınar, 2012)



Şekil 2 : *SIR Modelde Örnek Bir Bulaşıcı Hastalığın Seyri(Akpınar 2012)*

1.1. Matematik Modellenmesi (Johnson, 2009)

Salgın hastalıkların modellenmesinin temelinde kompartıman modeller vardır. SIR model, epidemolojide popülasyonda ki duyarlı (susceptible), enfekte olmuş (infected), ve iyileşmiş (recovered) bireylerin sayısını hesaplamak için kullanılır. Bu model aynı zamanda salgın hastalık süresince sağlık önlemleriyle değişen birey sayılarını hesaplamak için de kullanılır.

1.1.1. Kabuller

SIR epidemik model aşağıdaki önkabuller ışığında kurulur.

- Popülasyon sabittir.
- Duyarlı(susceptible) gruptan ayrılan bir birey sadece , enfekte olmuş (infected) gruba geçer. Enfekte olmuş (infected) gruptan ayrılan bir birey sadece iyileşmiş(recovered) gruba geçer. Ve iyileşmiş(recovered) gruptan ayrılan bir birey artık bağışıklık kazanmıştır ve bir daha hastalığa yakalanmaz.
- Yaş, sosyal statü, cinsiyet gibi faktörler enfekte olmada etkili değildir.
- Doğuştan bağışıklığı olan birey yoktur.
- Popülasyon üyeleri homojendir.

1.1.2. SIR modelin kurulması

Bu modelde; nüfusun sabit, dışa kapalı olduğu, doğal doğum ve ölümlerin olmadığı farz edilir. Yine dışarıdan göç ile dışarıya göçün olmadığı veya başka hastalıklardan

ölümlerin olmadığı farz edilir. (Akpınar, 2012) Bu modelde nüfus üç grup halinde basit diferansiyel denklemlerle modellenir. Bu üç grup herhangi bir t anında;

S(t): hastalanmamış fakat hastalığa karşı duyarlı(hastalığa karşı bağışıklığı olmayan) bireyler (Susceptible)

I(t): enfeksiyon bulaşmış ve duyarlı bireylere bulaştırma ihtimali olan bireyler (Infectious)

R(t): Tekrar enfeksiyona maruz kalma veya enfeksiyonu bulaştırma ihtimali olmayan iyileşmiş bireyler (Removed)

olarak tanımlanır. Temas sayısı ve bulaşıcılık düzeyini içeren bulaşma hızını β ile ve iyileşme hızını γ ile gösterelim. Burada β ve γ birer pozitif sabittir. O halde aşağıdaki lineer olmayan adi diferansiyel denklem sistemini elde ederiz:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta S(t)I(t) \tag{1.1.1}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) = (\beta S(t) - \gamma)I(t) \tag{1.1.2}$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I(t) \tag{1.1.3}$$

Bu denklem sisteminde N toplam nüfusu göstermek üzere;

$S(t) = N_1$, $I(t) = N_2$, $R(t) = N_3$ olmak üzere

$$N_1 + N_2 + N_3 = N \tag{1.1.4}$$

olacaktır.

Bu modelde dikkatimizi üzerine çevireceğimiz iki sabit bulunuyor. Bu sabitler, temas sayısı ve bulaşıcılık düzeyini içeren bulaşma hızı β ve iyileşme hızı γ. Şimdi bu sabitlerin nasıl hesaplandığı üzerinde duralım:

(1.1.1)-(1.1.4) denklemlerinden $t \to \infty$ için bu farklı grupların nasıl davranacağını tahmin edebiliriz. (1.1.1) denkleminden duyarlı (susceptible) grubun zaman içerisinde azalarak sıfıra yaklaşacağını, (1.1.3) denkleminden iyileşmiş (recovered) grubun zaman içerisinde artarak N toplam nüfusa yaklaşacağını görebiliriz. Burada enfeksiyon kapmış (Infectious) grubun davranışı diğer grupların davranışlarıyla ilgilidir. Yani bu grubun davranışı γ, β ve $S(t)$ ile ilgilidir.

(1.1.2) denkleminden; $\beta S(t)$, γ dan büyük olduğunda enfeksiyon kapmış (Infectious) grubundaki değişim oranı pozitif, $\beta S(t)$, γ dan küçük olduğunda

enfeksiyon kapmış (Infectious) grubundaki değişim oranı negatif ve $\beta S(t)$, γ ya eşit olduğunda enfeksiyon kapmış (Infectious) grubundaki değişim oranı sıfırdır.

Euler metodunu kullanarak bu diferansiyel denklem sistemini çözebiliriz. S_{n+1}, I_{n+1} ve R_{n+1}; $(n+1)$. anda ki duyarlı (susceptible), enfeksiyon kapmış (Infectious) , iyileşmiş (recovered) bireylerin sayısı ve Δt zamandaki küçük değişimler olmak üzere denklem sistemi:

$$S_{n+1} = S_n - \beta S_n I_n \Delta t \tag{1.1.5}$$

$$I_{n+1} = I_n(1 + \beta S_n - \gamma)\Delta t \tag{1.1.6}$$

$$R_{n+1} = R_n + \gamma I_n \Delta t \tag{1.1.7}$$

olur. (Burada ki veriler, araştırmacıların ve sağlık çalışanlarının verilen zaman periyodu içinde topladıkları verilerdir)

(1.1.5),(1.1.6) ve (1.1.7) denklemlerinden β ve γ yı hesaplayabiliriz.

(1.1.5) denkleminden;

$$\beta = \frac{S_n - S_{n+1}}{S_n I_n \Delta t} \tag{1.1.8}$$

(1.1.7) denkleminden;

$$\gamma = \frac{R_{n+1} - R_n}{I_n \Delta t} \tag{1.1.9}$$

bulunabilir. Burada ki β her bir zaman periyodunda elde edilen farklı β'ların ortalaması; γ her bir zaman periyodunda elde edilen farklı γ'ların ortalamasıdır.

1.1.3. Temel Üreme Oranı (Basic Reproductive Ratio)

SIR modeller de önemli bir değerde temel üreme oranı (Basic Reproductive Ratio) olarak isimlendirilen R_0 dır. R_0, S_0 başlangıçta ki duyarlı (susceptible) bireylerin sayısı olmak üzere;

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma} S_0 \tag{1.1.10}$$

Şeklinde hesaplanır. (Johnson, 2009)

R_0 önemlidir çünkü bize topluluğun hastalık karşısında risk altında olup olmadığını söyler. Eğer $R_0 > 1$ ise salgın hızında bir artış var, $R_0 < 1$ ise salgın hızında bir azalış var ve $R_0 = 1$ ise salgın hızı sabit bir seyir izlemektedir yorumları yapılabilir. (Heffernan, Smith, & Wahl, 2005)

Temel üreme oranı aynı zamanda gelecekte bu hastalığın varolup varolmayacağını da tahmin etmemizde bize yardımcı olur. Bu $t \to \infty$ giderken SIR modelinin davranışına bakılarak yapılabilir. Kermack ve McKendrick bunu $S_\infty = \exp((1-S_\infty)R_0)$ eşitliğiyle ortaya koydu. Burada ki S_∞ daima duyarlı bireylerin oluşturduğu grupta kalacak olan birey sayısıdır. (Keeling, 2008)

1.1.4. Varicella Örneği

Varicella genel olarak su çiçeği olarak bilinir. İnsandan insana hapşırma, öksürme veya yiyecek ve içeceklerin paylaşılmasıyla, ayrıca açık yaradaki sıvıya beş dakika veya daha fazla süreyle maruz kalma neticesinde bulaşır. Kuluçka dönemi on dört ve on altı gün arasındadır. Bir kişi emareler başlamadan bir veya iki gün önceden son kabuklu suçiçeği yarasına kadar (yaklaşık sekiz gün) suçiçeği hastası olarak kabul edilir. Varicella oldukça bulaşıcı bir hastalıktır. Bulaşma riski %65-85 civarındadır. Hatta yakın temasta bu oran %90 a kadar çıkar.

1.1.4.1.Varicella ve SIR model

Varicella SIR model kullanarak modelleyebileceğimiz bir hastalıktır. (1.1.1) başlığındaki bütün kabuller sağlanır. Bizim örneğimiz, homojen bir şekilde karışmış olan 100 kişi içindir. Hastalık oldukça bulaşıcı olduğundan herkes sonuçta hastalığa yakalanmış olacaktır. Tablo1 ve tablo2, verilen her bir periyotta kaç kişinin hastalığa yakalandığını gösterir. Her bir bireyin hastalığa duyarlı olduğu kabulüyle başlıyoruz ve aniden bir kişi hastalığa yakalanıyor. Tabii ki burada her bir periyot 8 gün sürmektedir. Bu vaka da her bir periyotta enfekte olmuş bireylerin iyileştiğini varsayıyoruz. Ki bu da iyileşme oranı (recovery rate) γ nın bire eşit olması demektir.

Periyot	S	I	R
0	100	0	0
1	99	1	0
2	35	64	1
3	12	23	65
4	4	8	88
5	1	3	96
6	0	1	99
7	0	0	100

Tablo 1: Bulaşma oranı % 65 olduğunda her bir periyottaki vaka sayısı (Johnson, 2009)

Periyot	S	I	R
0	100	0	0
1	99	1	0
2	15	84	1
3	2	13	85
4	0	2	98
5	0	0	100

Tablo 2: Bulaşma oranı %85 olduğunda her bir periyottaki vaka sayısı (Johnson, 2009)

Tablo1 ve tablo 2 den β yı hesaplayabiliriz. Bunu $\Delta t = 1$ için (5) eşitliğinde β yı yalnız bırakarak aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\beta = \frac{S_n - S_{n+1}}{S_n I_n}$$

Ve bu eşitliği kullanarak her bir periyot için β yı elde ederiz. Bu β lar aşağıdaki tabloda gösterildiği gibidir.

Periyot	Beta
0	0
1	0
2	0.646465
3	0.010268
4	0.028986
5	0.09375
6	0.333333
7	0
Ortalama	0.1391

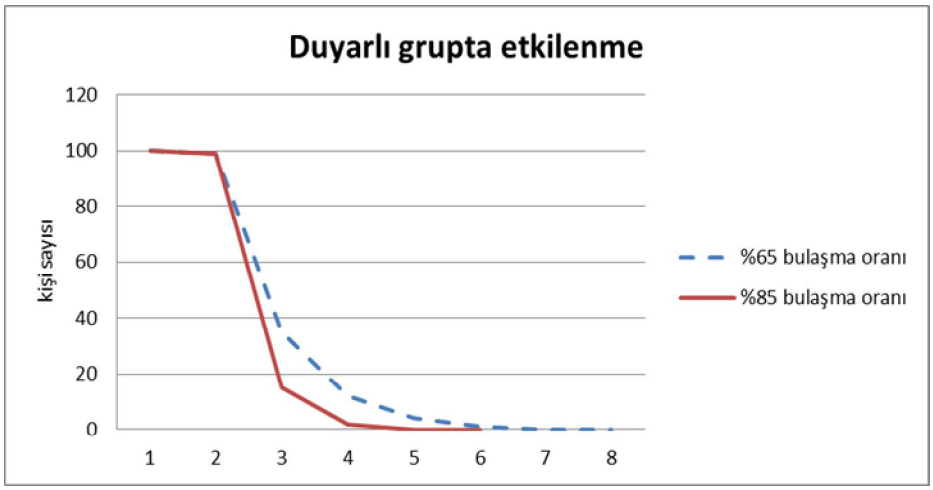
Tablo 3:Bulaşma oranı % 65 olduğunda her bir Periyottaki β 'ların ortalaması (Johnson, 2009)

Periyot	Beta
0	0
1	0
2	0.848485
3	0.010317
4	0.076923
5	0
Ortalama	0.155954

Tablo 4:Bulaşma oranı % 85 olduğunda her bir Periyottaki β 'ların ortalaması (Johnson, 2009)

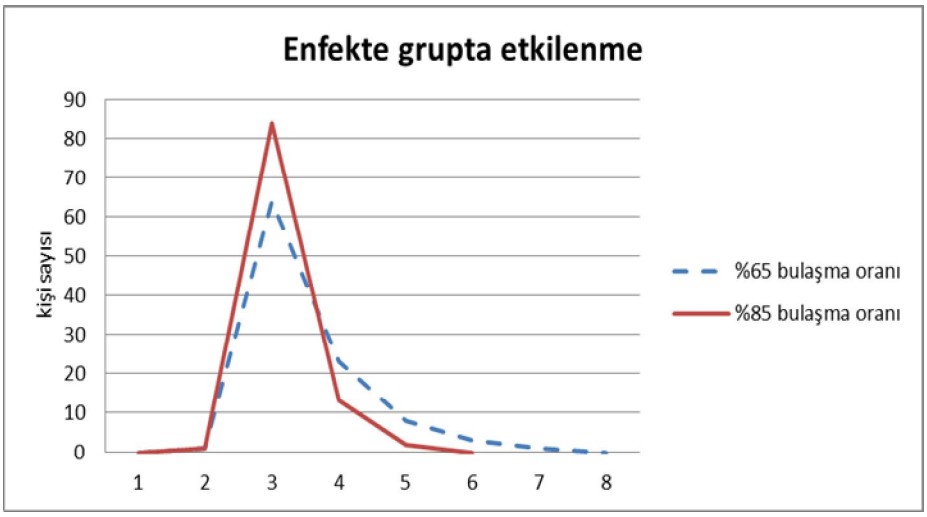
1.1.4.2. Enfeksiyon Oranının Etkileri ve Başlangıçtaki Hasta Sayısı

Hastalık modelinin en önemli parçalarından biri enfeksiyon oranıdır. Varicellanın enfeksiyon oranı bazı yerlerde % 65-85 olarak (Debby,&Golonka,2008) hesaplanmıştır. Bu oran, duyarlı, enfeksiyon kapmış ve iyileşmiş gruplardaki insan sayılarını ve herkesin hasta olup bu hastalıktan kurtulma sürecinin ne kadar süre alacağını etkiler. Aşağıda takip eden üç grafik enfeksiyon oranının bu üç gruptaki insan sayısını (ele aldığımız iki vaka için: %65 ve %85) nasıl etkilediğini göstermektedir.



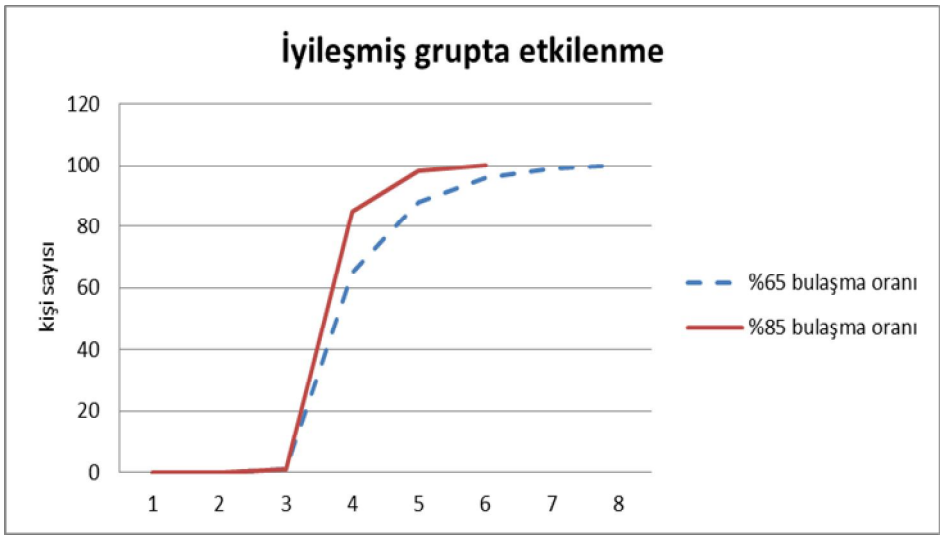
Şekil 3: Duyarlı grupta enfeksiyon oranının etkileri(Johnson,2009)

Şekil 3 te duyarlı gruptaki insan sayısının yüksek bulaşma oranında, düşük bulaşma oranına göre daha hızlı azaldığı görülmektedir.



Şekil 4: Enfekte grupta enfeksiyon oranının etkileri(Johnson,2009)

Şekil 4 te enfekte gruptaki insan sayısının yüksek bulaşma oranında düşük bulaşma oranına göre daha hızlı yükseldiği görülmektedir. Aynı zamanda enfekte gruptaki insan sayısının düşük bulaşma oranında sıfıra ulaşması daha uzun zaman almakta olduğu görülmektedir.



Şekil 5: İyileşmiş grupta enfeksiyon oranının etkileri(Johnson,2009)

Şekil 5 te iyileşmiş gruptaki insan sayısının yüksek bulaşma oranında düşük bulaşma oranına göre daha hızlı arttığı görülmektedir.

Hastalık modellerinde diğer bir önemli faktörde başlangıçtaki hastalanmış insan sayısıdır. Aşağıda ki üç grafikte başlangıçtaki hastalanmış kişi sayısının duyarlı, enfekte, ve iyileşmiş gruplarda ki insan sayısının nasıl etkilendiği görülmektedir. Burada bulaşma oranı %65 olarak alınmıştır.



Şekil 6: Başlangıçtaki hasta sayısına göre duyarlı grupta ki değişim(Johnson,2009)

Şekil 6 da başlangıçtaki hastalıklı kişi sayısı arttıkça duyarlı gruptaki sıfıra yakınsama daha kısa sürede olduğu görülmektedir. Ayrıca başlangıçtaki hastalıklı kişi sayısı arttıkça grafikteki kavis artmakta, diklik azalmaktadır.



Şekil 7: Başlangıçtaki hasta sayısına göre enfekte grupta ki değişim(Johnson,2009)

Şekil 7 de başlangıçtaki hastalıklı kişi sayısı arttıkça enfekte grup daha hızlı sıfıra yaklaşmaktadır. İlginç bir şekilde başlangıçtaki hastalıklı kişi sayısı azaldıkça grafikteki pik artmaktadır. Ek olarak başlangıçtaki hastalıklı kişi sayısı grubun yarısı olduğundaki pik, yarısı olmadığındaki pikten daha azdır.



Şekil 8: Başlangıçtaki hasta sayısına göre iyileşmiş grupta ki değişim(Johnson,2009)

Şekil 8 de başlangıçtaki hastalıklı kişi sayısı arttıkça grafikteki kavisin arttığı, dikliğin azaldığı görülmektedir. Ayrıca başlangıçtaki hastalıklı kişi sayısı arttıkça yakınsama daha kısa sürede olmaktadır.

1.1.4.3. Varicellanın Temel Üreme Oranı

Şimdi varicellanın ortaya çıkışındaki β yı bildiğimiz için temel üreme oranını hesaplayabiliriz.

Bulaşma oranı %65 olduğu zaman temel üreme oranı,

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma} S_0 = \frac{0,1391}{1} * 100 = 13,91 \text{ olur.}$$

Bulaşma oranı %85 olduğu zaman temel üreme oranı,

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma} S_0 = \frac{0,15595}{1} * 100 = 15,595 \text{ olur.}$$

Genelde varicellanın temel üreme oranı 10 ve 12 arasındadır. Bizim bulduğumuz oranın gerçek orandan farklı olmasının nedeni: gerçek oran hesaplanırken çok fazla vaka incelenir biz ise sadece varsaydığımız iki vakadan faydalandık. Gerek bizim elde ettiğimiz gerekse de gerçek temel üreme oranı birden büyüktür. Bu da bize varicella hastalığının hızlı bir şekilde yayıldığını ve bu hastalığın kısa süre içerisinde sönmeyeceğini göstermektir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Kermack-McKendrick (1927) Birleşik Krallık'ta kızamık salgınlarını inceledi. Onların çalışmaları üreme sayısı bire eşit olduğunda hastalık eşiğinin oluştuğunu gözlemlemiştir. Üreme sayısı biri aşarsa hastalık salgını olacaktır. Eğer üreme sayısı birden az olursa, hastalık duyarlı toplumda yok olur.

AKPINAR, H.,"Bulaşıcı hastalıkların yayılımının tahmininde deterministik modellerin kullanılması**"** Marmara Üniversitesi e-dergi: Öneri dergisi cilt 10, sayı 38(18) http://e-dergi.marmara.edu.tr/maruoneri/article/view/1012000211/pdf_114 Bu çalışmada SIR, SIS, SIRS, SEIR, SEIRS, MSEIR ve MSEIRS değişik modeller incelenmiş ve tablolar ile tanıtılmıştır.

HARKO T, LOBO S.N, MAK M.K. "Exact analytical solutions of the Susceptible-Infected-Recovered (SIR) epidemic model and of the SIR model with equal death and birth rates" Applied Mathematics and Computation 236(2014) 184-194 Bu çalışmada SIR modeller doğum ve ölüm oranlarıyla birlikte incelenmiştir.

MALİK S.A., QURESHİ I.M., AMİR M. and MALİK A.N. "Nature Inspired Computational Approach to Solve the Model for HIV Infection of CD4+T Cells" *Research Journal of Recent Sciences Vol.* ***3(6),*** *67-76, June* ***(2014)*** Bu çalışmada HİV virüsünün yayılması ile ilgili modeller de ortaya çıkan non-lineer denklemlerin değişik nümerik çözümleri üzerinde durulmuştur.

HE H., HAN E., and CONG M. "Constitutive Relation of Engineering Material Based on SIR Model and HAM" Journal of Applied Mathematics Volume 2014, Article ID 624863, 13 pages http://dx.doi.org/10.1155/2014/624863 Bu çalışmada SIR modellerin Analitik ve yaklaşık çözümleri incelenmiş ve çözümler tablolar ile birlikte karşılaştırılmıştır.

IBRAHİM M.O., EGBETADE S.A., "On the Homotopy Analysis Method for an Seir Tuberculosis Model" *American Journal of Applied Mathematics and Statistics, 2013, Vol. 1, No. 4, 71-75* http://pubs.sciepub.com/ajams1/4/4 Bu çalışmada Tüberküloz virüsünün yayılması modeli ile elde edilen lineer olmayan birinci dereceden denklemlerin Homotopi Analiz Metodu (HAM) ile çözümlerine yer verilmiştir.

AKKUŞ, S. (2009) "Diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinde adomian ayrışım metodu ve homotopi pertürbasyon metodunun karşılaştırılması" (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi), Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi/Fen Bilimleri Enstitüsü, Kahramanmaraş. Bu çalışmada adomian ayrışım metodu ve

homotopi pertürbasyon metodu tanıtılmış örneklerle açıklanmış ve bu iki yöntem karşılaştırılmıştır.

WAZWAZ A.M., "Handbook of Differential Equations: Evolutionary Equations, 4", 485-568, 2008. Bu çalışmada Adomian Ayrışım yöntemi kullanılarak KdV denkleminin soliton çözümleri araştırılmıştır.

ÇETİN E., KİREMİTÇİ B., YURT İ. D. "Matematiksel Epidemiyoloji: Pandemik A/H1N1 Gribi Vakası" İstanbul Üniversitesi İşletme Fakültesi Dergisi 38, 2, (2009) 197-209 Bu çalışmada, matematiksel epidemiyoloji bir alt disiplin olarak ele alınmış, bir açıklayıcı örnek verilmiştir. Yine büyük ölçüde kantitatif yaklaşımların desteğiyle elde edilebilen, salgınların ekonomi ve iş dünyası üzerindeki etkileri ve olası senaryolar kısaca tartışılmıştır. A/H1N1 pandemiğine ilişkin geliştirilen bazı matematiksel modeller üzerinde durularak modellerin önerdiği bazı politikalar verilmiştir.

AĞIRSEVEN D. (2009) "Bazı lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin homotopi pertürbasyon ve homotopi analiz metotları ile çözümlerinin analizi üzerine" http://dspace.trakya.edu.tr:8080/jspui/handle/1/831 yayımlanmamış doktora tezi, Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü. Bu çalışmada homotopi pertürbasyon metodu ve homotopi analiz metodunu kullanarak bazı lineer ve nonlineer problemlerin çözümlerini elde edilmiş ve çözümlerin karşılaştırmasını yapılmıştır.

DALEY D. J., J. GANİ .,(1999)"Epidemic Modelling" Cambridge University Press, London. Bu kitapta Epidemik modellerin tarihçesi incelenmiş, Deterministic Model, Stochastic Model tanıtılmış ve bulaşıcı hastalıkların kontrol edilme yöntemlerine değinilmiştir.

HOPPENSTEADT F. C. (1982) "Mathematical Methods of Population Biology" Cambridge University Press, London. Bu kitapta popülasyon dinamikleri, Bakteri genetiği incelenmiş ve pertürbasyon metodu, dönüşüm metodu gibi nümerik yöntemler anlatılmıştır.

MAZUMDAR J. (1999) "An Introduction to Mathematical Physiology and Biology" Cambridge University Press, London. Bu kitapta popülasyon biyolojisi tanıtılmış, vahşi yaşam alanlarının matematiksel analizi, matematiksel epidemik modeller tanıtılmış, AİDS virüsünün epidemik modellemesi hakkında bilgi verilmiştir.

Edited by MOLLİSON D. (2008) "Epidemics Model Their Structure and Relation to Data" Publications of the Newton Institute Bu kitapta çeşitli alanlarda uzman kişiler tarafından yazılan makalelerden oluşmaktadır. SIR,SIS,SI gibi epidemik

modeller tanıtılmış, non-lineer epidemik veriler, insan hastalıklarının heterojenliği, veri analizleri ve tahminler gibi bölümlere ver veriliyor.

IBRAHİM, S., & ISMAİL, S. (2012). Differential Transformation Approach to A SIR Epidemic Model with Constant Vaccination. *Journal of American Science*, 8(7). Bu makalede SIR model kısaca tanıtılıp modelin Diferansiyel dönüşüm metodu ile çözümü verilmiştir.

BİAZAR, J. (2006). Solution of the epidemic model by Adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Computation*, 173 (2) 1101-1106. Bu makalede SIR model kısaca tanıtılıp modelin Adomian ayrışım metodu ile çözümü verilmiştir.

RAFEİ, M., GANJİ, D., & DANİALİ, H. (2007, 187). Solution of the epidemic model by homotopy. *Applied Mathematics and Computation*, s. 1056–1062. Bu makalede SIR model kısaca tanıtılıp modelin Homotopi pertürbasyon metodu ile çözümü verilmiştir.

IANNELLİ, MİMMO.(2005) "The Mathematical Modeling of Epidemics." Mathematical Models in Life Science: Theory and Simulation. 1 July 2005. Florida Gulf Coast University. <http://itech.fgcu.edu/faculty/pfeng/teaching/epidemics.pdf>. Bu çalışmada epidemik modellerin tarihi gelişimi ve modellerin nasıl kurulduğu anlatılmaktadır.

SCHUETTE, M.C. & H.W. HETHCOTE (1999) Modeling the effects of varicella vac-cination programs on the incidence of chickenpox and shingles, Bull. Math. Biol. 61: 1031–1064. Bu makalede suçiçeği ve zona hastalığının aşılama programının etkileri modellenmiştir.

SHULGİN, B., STONE, L., & AGUR, Z. (1998). Pulse vaccination strategy in the SIR epidemic model. *Bulletin of Mathematical Biology*, *60*(6), 1123-1148. Bu makalede epidemik modellerin aşılama stratejileri üzerinde durulmuş. Ve aşılama sonrası hastalığın stabilitesi modellenmiştir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Adomian Ayrışım Metodu (ADM)

Doğal olay ve problemlerin modellenmesi sonucunda çoğunlukla lineer olmayan denklemlerin çözümleriyle karşılaşılır. Yüksek performanslı bilgisayarların ortaya çıkmasından bu yana, bir lineer problemi çözmek daha kolaylaşmıştır. Fakat, genel olarak söylenirse, lineer olmayan problemlerin kesin çözümlerini elde etmek hala zordur. Özellikle, şimdi yüksek performanslı bilgisayarlara, Mathematica, Maple, Matlab ve vs. gibi bazı sembolik hesaplama yazılımlarına sahip olmamıza rağmen, verilen lineer olmayan problemin analitik yaklaşımını elde etmek çoğunlukla sayısal yaklaşımını elde etmekten daha zordur. Sayısal teknikler karışık tanım kümesinde genellikle nonlineer problemlere uygulanabilir; bu analitik metotların üzerinde sayısal metotların açık bir avantajı çoğu kez nonlineer problemleri basit ve karışık tanım kümelerinde çözmeleridir. (Babaoğlu,2009)

Genel metotların çoğunda, problem lineer tek boyutlu yardımcı problem olarak tanıtılır ve daha sonra problem çözülür. Böyle metotları kullanırken esas zorluk, elde edilen integral denkleminin her zaman basit analitik fonksiyonların terimleri olarak çözülememesidir (Yalçınkaya ve Saygılı, 1997).

Adomian ayrışım metodu (Adomian G, 1976; Adomian G, 1984; Adomian G, 1994) nonlineer problemler için etkili bir yarı analitik tekniktir. Küçük ya da büyük parametreler içerseler de içermeseler de adi ve kısmi diferansiyel denklemlere uygulanabilir. Yani oldukça geneldir. Daha fazlası, Adomian yaklaşım serileri hızlı yakınsamaktadır.

1980'lerin başından beri Adomian ayrışım metodu (ADM) fonksiyonel denklemlerin geniş bir sınıfına uygulanmıştır (Adomian G, 1994; Adomian G ve Rach, R., 1985). Bu metotta bulunan çözümler seri formunda olup, sınırlı sayıda ayrışım serisinin terimleri hesaplanarak gerçek çözüme yakın sayısal sonuçlar bulunur. Bu tekniği kullanarak bir diferansiyel denklemin sayısal çözümünü indislemeye gerek duymadan sembolik programlama dilleri ile kodlama yaparak, hesaplamada kısmen bir kolaylık sağlanabilir.

Adomian ayrışım metodunun bir seri metodu olduğu ve birçok cebirsel, lineer veya lineer olmayan diferansiyel denklemlere başarılı bir şekilde uygulandığı bilinmektedir (Adomian, 1990).

Genel olarak bu metodu verecek olursak; lineer ve lineer olmayan terimlerin her ikisini de kapsayan genel bir lineer olmayan adi diferansiyel operatörü F olmak üzere,

$$Fu(x) = g(x) \tag{3.1.1}$$

veya

$$Lu + Ru + Nu = g \tag{3.1.2}$$

diferansiyel denklemini ve $u(x_0) = a$, $u'(x_0) = b$ başlangıç şartını göz önüne alalım. Burada L; lineer operatörü (diferansiyel denklemin en yüksek mertebeden türevini), R; lineer operatörden kalan kısmı ve N; lineer olmayan terimi göstermektedir.

L lineer operatörünün tersi mevcut ve L^{-1} olsun. (3.1.2) eşitliği

$$Lu = g - Ru - Nu \tag{3.1.3}$$

şeklinde yazılabilir ve bu eşitliğin her iki tarafına L^{-1} operatörü sol taraftan uygulanırsa

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \tag{3.1.4}$$

eşitliği elde edilebilir. L operatörünün ikinci mertebeden ve tersi mevcut olan lineer bir operatör olduğunu kabul edelim. (3.1.4) eşitliğinde gerekli işlemleri yaptıktan sonra ve başlangıç şartları kullanılarak

$$u = a + bx + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \tag{3.1.5}$$

çözüm fonksiyonu elde edilir. (3.1.5) ile elde edilen eşitlikteki Nu lineer olmayan terimdir ve

$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ şeklinde ifade edilmektedir. Buradaki A_n polinomları özel polinomlardır ve bu polinomlar daha sonra tartışılacaktır. (3.1.5) eşitliğindeki u, ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonudur. Bu seri çözüm fonksiyonunun birinci terimi u_0 , verilen başlangıç değerleri ve denklemin sağ taraf fonksiyonunun integrali alınarak $u = a + bx + L^{-1}g$ ile bulunur. Daha sonra seri çözümün birinci terimi olan u_0 kullanılarak u_1, u_2, u_3, ... terimleri elde edilir. Böylece ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonu

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \tag{3.1.6}$$

şeklinde yazılabilir ve serinin yakınsak olduğu varsayılacaktır. Bu seri çözümü kullanılarak (3.1.5) eşitliği tekrar yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 + L^{-1}R\sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{3.1.7}$$

şeklinde genel seri formu elde edilir. Benzer olarak, (3.1.7) eşitliği açık bir şekilde

$$\begin{aligned} u_1 &= -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0 \\ u_2 &= -L^{-1}Ru_1 - L^{-1}A_1 \\ &. \\ &. \\ u_{n+1} &= -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n \qquad n \geq 0 \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

şeklinde de yazılabilir. Buradaki A_n polinomları her bir lineer olmayan terim için genelleştirilebilir. Bu genelleştirmede A_0 sadece u_0'a, A_1 u_0 ve u_1'e, A_2 ise u_0, u_1, u_2 ye bağlıdır. Benzer şekilde (3.1.8) eşitliğindeki bütün A_n polinomları elde edilebilir. A_n Adomian polinomlarının ayrıştırılmış hali ise literatürde

$$A_0 = f(u_0),$$

$$A_1 = u_1(\frac{d}{du_0})f(u_0),$$

$$A_2 = u_2(\frac{d}{du_0})f(u_0) + \frac{u_1^2}{2!}(\frac{d^2}{du_0^2})f(u_0),$$

$$A_3 = u_3(\frac{d}{du_0})f(u_0) + u_1u_2(\frac{d^2}{du_0^2})f(u_0) + \frac{u_1^3}{3!}(\frac{d^3}{du_0^3})f(u_0),$$

$$A_3 = u_4(\frac{d}{du_0})f(u_0) + (\frac{u_2^2}{2!} + u_1u_3)(\frac{d^2}{du_0^2})f(u_0) + \frac{u_1^2u_2}{2!}(\frac{d^3}{du_0^3})f(u_0) + \frac{u_1^4}{4!}(\frac{d^4}{du_0^4})f(u_0),$$

.

.

. (3.1.9)

şeklinde verilmektedir (Adomian, 1994). Diğer polinomlar da benzer yolla oluşturulabilir. Ayrıştırılmış polinomların genel hali ise,

$$A_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n}\phi\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k u_k\right)\right]_{\lambda=0}, n \geq 0 \tag{3.1.10}$$

biçiminde formüle edilerek (Adomian, 1994; Seng ve arkadaşları, 1996) tarafından literatüre kazandırılmıştır. Bu formül, sayısal çözümlerin hesaplanmasında ihtiyaç duyulan birçok polinomun elde edilmesi için bilgisayar kodları kurulmasını kolaylaştırır. Adomian polinomlarını elde etmek için bir alternatif metot ise (Wazwaz, 1999) tarafından geliştirilmiştir. Bazı problemlerin sayısal çözümlerinin daha hassas olması istenildiği durumlarda ayrışım serisinin çok sayıda teriminin hesaplanması gerekebilir. Bu gibi durumlarda (3.1.10) genel formülünün kullanılması, istenildiği kadar çok sayıda (3.1.6) ayrışım serisinin terimlerinin hesaplanmasında kolaylık sağlamaktadır.

Ayrışım metodu kullanılarak $u(x,t)$ kapalı çözüm fonksiyonu ve bu fonksiyona ait sayısal çözümlerin elde edilebilmesi için

$$\phi_n(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x,t),\ n \geq 0 \tag{3.1.11}$$

olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n = u(x,t) \tag{3.1.12}$$

ifadesi (3.1.8) indirgeme bağıntısı göz önüne alınarak kolayca hesaplanabilir. Buna ek olarak (3.1.12) şeklindeki ayrışım seri çözümü, genel olarak fiziksel problemlerde çok hızlı yakınsamaktadır. Ayrışım serisinin yakınsaklığı literatürde birçok yazar tarafından araştırılmıştır. Ayrışım serisinin yakınsaklığını teorik olarak (Cherruault, 1989; Repaci, 1990; Cherruault ve Adomian, 1993; Abbaoui ve Cherruault, 1994; Abbaoui ve Cherruault, 1995) incelemişlerdir. Bu çalışmalara ilaveten yakın zamanda (Abbaoui ve arkadaşları, 2001) çalışmalarında ayrışım serisinin yakınsaklığını bulmada yeni bir yaklaşım önermişlerdir. Bu yazarlar ayrışım seri metodunun yakınsaklığını yeni şartlar vererek bulmuşlardır.

3.2. Homotopi Pertürbasyon Metodu (HPM)

Bu metodun temel kavramlarını tanımlamak için, aşağıdaki lineer olmayan diferansiyel denklemi:

$$A(u) - f(r) = 0\ ,\ \ r \in \Omega \tag{3.2.1}$$

$$B(u, \partial u / \partial n) = 0\ ,\ \ r \in \Gamma \tag{3.2.2}$$

sınır koşulları ile düşünüyoruz. Burada A bir genel diferansiyel operatörü, B sınır operatörü, $f(r)$ bilinen bir analitik fonksiyondur ve Ω, Γ tanım kümesinin sınırıdır.

Genelde, A operatörü L ve N olarak iki bölüme ayrılabilir, burada L lineer, fakat N lineer değildir. (3.2.1)denklemi bu nedenle aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$L(u)+N(u)-f(r)=0. \tag{3.2.3}$$

Homotopi tekniği ile

$$H(V,p)=(1-p)[L(V)-L(u_0)]+p[A(V)-f(r)]=0,\ p\in[0,1],\ r\in\Omega \tag{3.2.4}$$

veya

$$H(V,p)=L(V)-L(u_0)+pL(u_0)+p[N(V)-f(r)]=0, \tag{3.2.5}$$

şartlarını sağlayan bir $V(r,p):\Omega\times[0,1]\to R$ homotopisini kuruyoruz.

Burada $p\in[0,1]$ yerleştirilen parametre, u_0 sınır şartlarını sağlayan (3.2.1) denkleminin başlangıç yaklaşımıdır. Açıkça, (3.2.4)ve (3.2.5) denklemlerinden:

$$H(V,0)=L(V)-L(u_0)=0\ , \tag{3.2.6}$$

$$H(V,1)=A(V)-f(r)=0\ , \tag{3.2.7}$$

dir. Sıfırdan p nin değişim süreci sadece $V(r,p)$ için $u_0(r)$ den $u_0(r)$ ye kadardır. Topolojide, bu deformasyon olarak $L(V)-L(u_0)$ ve $A(V)-f(r)$ homotopi olarak adlandırılırlar.

HPM ye göre, ilk olarak yerleştirilen parametre p yi "küçük parametre" olarak kullanabiliriz, (3.2.4) ve (3.2.5) denklemlerinin çözümünün p nin kuvvet serisi olarak yazılabildiğini varsayalım:

$$V=V_0+pV_1+p^2V_2+\ldots\ , \tag{3.2.8}$$

$$u=\lim_{p\to 1}V=V_0+V_1+V_2+\ldots\ , \tag{3.2.9}$$

Perturbasyon metodunun ve homotopi metodun birleşimi homotopi perturbasyon metodu (HPM) olarak adlandırılır ki homotopi perturbasyon metodu genel perturbasyon metotlarının sınırlamalarını ortadan kaldırır. Diğer taraftan, bu yöntem genel perturbasyon metotlarının tüm avantajlarına sahip olabilir. (3.2.9) serileri pek çok durum için yakınsaktır. Bununla beraber, yakınsaklık oranı lineer olmayan operatör $A(V)$ ye bağlıdır (aşağıdaki düşünceler (J.H. He, 2006) tarafından öneriliyor):

(1) $N(V)$ nin V ye göre ikinci mertebeden türevi küçük olmalıdır çünkü parametre oldukça büyük olabilir, yani, $p\to 1$.

(2) Serinin yakınsaması için $L^{-1}(\partial N/\partial V)$ nin normu birden daha küçük olmalıdır. (Akkuş, 2009)

3.3. Diferansiyel Dönüşüm Metodu (DTM)

Diferansiyel dönüşüm metodu, seri formda hemen hemen analitik çözümler kurar. Sonsuz seri çözüm kapatılabildiği takdirde analitik çözüm fonksiyonuna ulaşılmış olur. Bu metot ile diferansiyel denklemler dönüştürülebilir ve elde edilen cebirsel denklemler de bazı basit işlemlerle kolaylıkla sistematik bir şekilde çözülebilir. Kesirli diferansiyel denklemlerin çözümü için genelleştirilmiş Taylor formülünden yararlanılır.

Burada, literatürde mevcut olan tek boyutlu, iki boyutlu ve *n* boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi hakkında bilgi verilecektir (Chen 1996, Ayaz, 2003, Kurnaz 2005).

Bu yöntem, tek değişkene bağlı diferansiyel denklemlerin çözümleri için kullanılır.

Tanım 3.3.1.:

Tek değişkenli $u(x)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $U(k)$ olmak üzere, $u(x)$ ' nin tek boyutlu diferansiyel dönüşümü

$$U(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}u(x)\right]_{x=0} \tag{3.3.1}$$

olarak tanımlanır. (G. Oturanç, Y. Keskin 2008)

Tanım 3.3.2.:

Diferansiyel ters dönüşüm fonksiyonu, $U(k)$ dönüşüm fonksiyonunun tersini ifade eder ve

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}U(k)x^k \tag{3.3.2}$$

biçimde tanımlanır. (3.3.1) eşitliğinde (3.3.2) ifadesi yazılarak aşağıdaki (3.3.3) eşitliği elde edilir.

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}u(x)\right]_{x=0}x^k \tag{3.3.3}$$

(Chen ve Ho 1996, Chen ve Ho 1999, Arikoglu ve Özkol 2004)

Yukarıdaki tanımlamalardan sonra diferansiyel dönüşüm kavramının Taylor seri açılımından türetildiği açıkça görülebilir. (3.3.1) ve (3.3.2) ifadeleri yardımıyla aşağıda Tablo da verilen özelliklerin doğruluğu kolayca görülebilir.

Fonksiyon Tipi	**Dönüşüm Fonksiyonu**
$y(x)=c.u(x)$	$Y(k)=c.U(k)$ (3.4.a)
$y(x)=u(x)\mp v(x)$	$Y(k)=U(k)\mp V(k)$ (3.4.b)
$y(x)=\frac{d^r u(x)}{dx^r}$	$Y(k)=\frac{(k+r)!}{k!}U(k+r)$ (3.4.c)
$y(x)=u(x).v(x)$	$Y(k)=U(k)\otimes V(k)=\sum_{r=0}^{k}U(r).V(k-r)$ (3.4.d)
$y(x)=x^n$	$Y(k)=\delta(k-n)=\begin{cases}1, & k=n\\ 0 & diğeri\end{cases}$ (3.4.e)

Tablo 5: Bir boyutlu diferansiyel dönüşüm (G. Oturanç, Y. Keskin 2008)

4. MODELİN UYGULAMALARI

Şimdi SIR modelin çözümünü bu üç nümerik metot ile yapalım.

4.1. Modelin Homotopi Pertürbasyon Metodu (HPM) ile Çözümü (Rafei, Ganji, & Daniali, 2007)

Bu bölümde (1.1.1)-(1.1.3) lineer olmayan denklem sistemine homotopi pertürbasyon metodunu uygulayacağız.

HPM'ye göre (1.1.1)-(1.1.3) sisteminde aşağıdaki gibi bir homotopi kurabiliriz.

$$\begin{aligned}
&(1-p)(\dot{v}_1-\dot{x}_0)+p(\dot{v}_1+\beta v_1 v_2)=0,\\
&(1-p)(\dot{v}_2-\dot{y}_0)+p(\dot{v}_2-\beta v_1 v_2+\gamma v_2)=0,\\
&(1-p)(\dot{v}_3-\dot{z}_0)+p(\dot{v}_3-\gamma v_2)=0,
\end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Buradaki "nokta" t ile ilgili türevi belirtmektedir ve Başlangıç yaklaşımları aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned}
&v_{1,0}(t)=x_0(t)=x(0)=N_1,\\
&v_{2,0}(t)=y_0(t)=y(0)=N_2,\\
&v_{3,0}(t)=z_0(t)=z(0)=N_3,
\end{aligned} \tag{4.1.2}$$

ve

$$\begin{aligned}
&v_1=v_{1,0}+pv_{1,1}+p^2v_{1,2}+p^3v_{1,3}+\ldots,\\
&v_2=v_{2,0}+pv_{2,1}+p^2v_{2,2}+p^3v_{2,3}+\ldots,\\
&v_3=v_{3,0}+pv_{3,1}+p^2v_{3,2}+p^3v_{3,3}+\ldots,
\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

Buradaki $v_{i,j}(i,j=1,2,3,...)$ henüz tanımlanmamış fonksiyonlardır. (4.1.1) içine ikame edilen (4.1.2) ve (4.1.3) eşitliklerini p nin kuvvetlerinin katsayılarına göre düzenlenirse

$$\begin{aligned}
&(\dot{v}_{1,1}+\beta N_1N_2)p+(\dot{v}_{1,2}+\beta N_1v_{2,1}+\beta N_2v_{1,1})p^2\\
&+(\dot{v}_{1,3}+\beta N_2v_{1,2}+\beta v_{1,1}v_{2,1}+\beta N_1v_{2,2})p^3+\ldots=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\dot{v}_{2,1}-\beta N_1N_2+\gamma N_2)p+(\dot{v}_{2,2}-\beta N_1v_{2,1}+\gamma v_{2,1}+\beta^2N_1N_2{}^2t)p^2\\
&+(\dot{v}_{2,3}-\beta N_2v_{1,2}+\gamma v_{2,2}+\beta^2N_1N_2tv_{2,1}-\beta N_1v_{2,2})p^3+\ldots=0
\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

$$(\dot{v}_{3,1}-\gamma N_2)p+(\dot{v}_{3,2}-\gamma\beta N_1N_2t+\gamma^2N_2t)p^2$$
$$+(\dot{v}_{3,3}+\frac{1}{2}\gamma\beta^2N_1N_2^2t^2-\frac{1}{2}\gamma\beta^2N_1^2N_2t^2-\frac{1}{2}\gamma^3N_2t^2+\gamma^2\beta N_1N_2t^2)p^3+\ldots=0$$

elde edilir.

Bilinmeyen $v_{i,j,}(i,j=1,2,3,\ldots)$ elde etmek için , $v_{i,j}(0)=0,(i,j=1,2,3,\ldots)$ başlangıç şartlarını göz önüne alarak (3.2.9) eşitliğindeki bilinmeyenleri içeren aşağıdaki çözüm sistemini kurmalıyız:

$$\begin{aligned}
&\dot{v}_{1,1}+\beta N_1N_2=0,\\
&\dot{v}_{1,2}+\beta N_1v_{2,1}+\beta N_2v_{1,1}=0,\\
&\dot{v}_{1,3}+\beta N_2v_{1,2}+\beta v_{1,1}v_{2,1}+\beta N_1v_{2,2}=0,\\
&\dot{v}_{2,1}-\beta N_1N_2+\gamma N_2=0,\\
&\dot{v}_{2,2}-\beta N_1v_{2,1}+\gamma v_{2,1}+\beta^2N_1N_2{}^2t=0,\\
&\dot{v}_{2,3}-\beta N_2v_{1,2}+\gamma v_{2,2}+\beta^2N_1N_2tv_{2,1}-\beta N_1v_{2,2}=0,\\
&\dot{v}_{3,1}-\gamma N_2=0,\\
&\dot{v}_{3,2}-\gamma\beta N_1N_2t+\gamma^2N_2t=0,\\
&\dot{v}_{3,3}+\frac{1}{2}\gamma\beta^2N_1N_2^2t^2-\frac{1}{2}\gamma\beta^2N_1^2N_2t^2-\frac{1}{2}\gamma^3N_2t^2+\gamma^2\beta N_1N_2t^2=0.
\end{aligned}\qquad (4.1.5)$$

Eğer üç adım yaklaşım alınırsa (3.2.9) eşitliğinden aşağıdaki eşitlikler elde edilecektir.

$$\begin{aligned}
&x(t)=\lim_{p\to1}v_1(t)=\sum_{k=0}^{k=3}v_{1,k}(t),\\
&y(t)=\lim_{p\to1}v_2(t)=\sum_{k=0}^{k=3}v_{2,k}(t),\\
&x(t)=\lim_{p\to1}v_1(t)=\sum_{k=0}^{k=3}v_{1,k}(t)
\end{aligned}\qquad (4.1.6)$$

Böylece,

$$x(t)=N_1-\beta N_1N_2t-\frac{1}{2}\beta N_1N_2(\beta N_1-\beta N_2-\gamma)t^2$$
$$-\frac{1}{6}\beta N_1N_2(3N_2\beta\gamma-4N_1N_2\beta^2-2\beta N_1\gamma+\beta^2N_1^2+\gamma^2+\beta^2N_2^2)t^3,$$

$$y(t) = N_2 + N_2(\beta N_1 - \gamma)t + \frac{1}{2}N_2(-2\beta N_1\gamma + \beta^2 N_1^2 + \gamma^2 - N_1 N_2\beta^2)t^2$$
$$+\frac{1}{6}N_2(-4N_2\beta^3 N_1^2 + N_1 N_2^2\beta^3 + 4N_1 N_2\beta^2\gamma + 3\beta N_1\gamma^2 - 3\beta^2 N_1^2\gamma - \gamma^3 + \beta^3 N_1^3)t^3, \quad (4.1.7)$$

$$z(t) = N_3 + \gamma N_2 t + \frac{1}{2}\gamma N_2(-\gamma + \beta N_1)t^2$$
$$+\frac{1}{6}\gamma N_2(-2\beta N_1\gamma + \beta^2 N_1^2 + \gamma^2 - N_2\beta^2 N_1)t^3.$$

Elde edilir.

4.2. Modelin Diferansiyel Dönüşüm Metodu (DTM) ile Çözümü (Ibrahim, & Ismail,2012)

(1.1.1)-(1.1.3) lineer olmayan denklem sisteminin her iki tarafına diferansiyel dönüşüm uygulanırsa

$$X(k+1) = \frac{1}{(k+1)}\left(-\beta\sum_{l=0}^{k} X(l)Y(k-l)\right),$$

$$Y(k+1) = \frac{1}{(k+1)}\left(\beta\sum_{l=0}^{k} X(l)Y(k-l) - \gamma Y(k)\right), \quad (4.2.1)$$

$$Z(k+1) = \frac{1}{(k+1)}\gamma Y(k).$$

eşitlikler elde edilir. (3.1.2) eşitliğindeki şartlar

$$X_0(0) = N_1$$
$$Y_0(0) = N_2 \quad (4.2.2)$$
$$Z_0(0) = N_3$$

şekline dönüştürülmüş olur.

(4.2.1) iteratif denkleminde $k = 0$ yazılırsa

$$X(1) = \left(-\beta\sum_{l=0}^{0} X(l)Y(-l)\right),$$

$$Y(1) = \left(\beta\sum_{l=0}^{0} X(l)Y(-l) - \gamma Y(0)\right), \quad (4.2.3)$$

$$Z(1) = \gamma Y(0).$$

değerleri bulunur. Sonra iterasyonda $k = 1,2,3,...,s$ yerine yazılarak verilen sistemin DTM ile yaklaşık çözümü ters DTM kullanılarak,

$$X(t) \cong \sum_{k=0}^{s} X(k).t^k$$

$$Y(t) \cong \sum_{k=0}^{s} Y(k).t^k \qquad (4.2.4)$$

$$Z(t) \cong \sum_{k=0}^{s} Z(k).t^k$$

elde edilir.

4.3. Modelin Adomian Ayrışım Metodu (ADM) ile Çözümü (Biazar, 2006)

SIR epidemik modeli

$$\frac{dx}{dt} = -\beta xy,$$
$$\frac{dy}{dt} = \beta xy - \gamma y, \qquad (4.3.1)$$
$$\frac{dz}{dt} = \gamma y$$

şeklinde ifade edersek,

Adomian Ayrışım Metodu buradaki x, y ve z yi aşağıdaki serilerin toplamı olarak ele alır.

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_{n,} \qquad y = \sum_{n=0}^{\infty} y_{n,} \text{ ve } z = \sum_{n=0}^{\infty} z_{n,} \qquad (4.3.2)$$

$\frac{d(.)}{dt}$ operatörünün tersi olan $\int_0^t (.)dt$ integral operatörünü (1.1.1)-(1.1.3) sistemindeki her bir eşitliğe uygularsak

$$x(t) = x(t=0) - \beta \int_0^t x(t)y(t)dt,$$
$$y(t) = y(t=0) + \beta \int_0^t [x(t)y(t) - \gamma y(t)]dt,$$
$$z(t) = z(t=0) + \gamma \int_0^t y(t)dt.$$

elde ederiz.

Adomian polinomlarını elde etmek için algoritma kullanarak ve başlangıç koşullarını yerine koyarak

$$x(t) = N_1 - \beta \int_0^t \sum_{i=0}^{n} x_i(t) y_{n-i}(t) dt,$$

$$y(t) = N_2 + \beta \int_0^t \sum_{i=0}^{n} [x_i(t) y_{n-i}(t) - \gamma y_n(t)] dt,$$

$$z(t) = N_3 + \gamma \int_0^t \sum_{i=0}^{n} y_n(t) dt.$$

Eşitliklerini elde ederiz. İlk birkaç terimi

$n = 0$ için

$$x_1 := -\beta N_1 N_2 t$$
$$y_1 := \beta N_1 N_2 t - \gamma N_2 t$$
$$z_1 := \gamma N_2 t$$

$n = 1$ için

$$x_2 := -\frac{1}{2}\beta(N_1(\beta N_1 N_2 - \gamma N_2) - \beta N_1 N_2^2)t^2$$
$$y_2 := \frac{1}{2}\beta(N_1(\beta N_1 N_2 - \gamma N_2) - \beta N_1 N_2^2) - \gamma(\beta N_1 N_2 - \gamma N_2))t^2$$
$$z_2 := \frac{1}{2}\gamma(\beta N_1 N_2 - \gamma N_2)t^2$$

$$x_3 = -\frac{1}{3}\beta\left(\frac{1}{2}N_1(\beta(N_1(\beta N_1 N_2 - \gamma N_2) - \beta N_1 N_2^2) - \gamma(\beta N_1 N_2 - \gamma N_2)) - \beta N_1 N_2(\beta N_1 N_2 - \gamma N_2) - \frac{1}{2}(\beta(N_1(\beta N_1 N_2 - \gamma N_2) - \beta N_1 N_2^2)N_2\right)t^3$$

$$y_3 = \frac{1}{3}\left(\beta\left(\frac{1}{2}N_1(\beta(N_1(\beta N_1 N_2 - \gamma N_2) - \beta N_1 N_2^2) - \gamma(\beta N_1 N_2 - \gamma N_2)) - \beta N_1 N_2(\beta N_1 N_2 - \gamma N_2) - \frac{1}{2}(\beta(N_1(\beta N_1 N_2 - \gamma N_2) - \beta N_1 N_2^2)N_2\right) - \frac{1}{2}\gamma(\beta(N_1(\beta N_1 N_2 - \gamma N_2) - \beta N_1 N_2^2) - \gamma(\beta N_1 N_2 - \gamma N_2))\right)t^3$$

$$z_3 = \frac{1}{2}\gamma(\beta N_1 N_2 - \gamma N_2)t^2$$

.

.

.

şeklinde elde ederiz.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu bölümde, önceki bölümde üç nümerik metodla çözdüğümüz SIR modelin, başlangıç koşulları ve değişim oranları aşağıdaki gibi olan bir problemini Maple programı kullanarak yukardaki çözümlere uygun bir şekilde üç, dört ve beş adımdaki nümerik sonuçlarını bulacağız. Ve elde edilen sonuçların yine Maple programı kullanarak grafiklerini çizeceğiz. Bu grafiklerden hareketle SIR modeller için bu üç nümerik yöntemi karşılaştıracağız.

$N_1 = 20$	Duyarlı grubun başlangıç nüfusu
$N_2 = 15$	Enfekte grubun başlangıç nüfusu
$N_3 = 10$	İyileşmiş grubun başlangıç nüfusu
$\beta = 0.01$	Bulaşma oranı
$\gamma = 0.02$	İyileşme oranı

DTM ile 3 adım yaklaşım

$$x(t) = 20 - 3t - 0.045t^2 + 0.02805t^3,$$
$$y(t) = 15 + 2.7t + 0.018t^2 - 0.02817t^3,$$
$$z(t) = 10 + 0.3t + 0.027t^2 + 0.00012t^3.$$

HPM ile 3 adım yaklaşım

$$x(t) = 20 - 3t - 0.045t^2 + 0.02805t^3$$
$$y(t) = 15 + 2.7t + 0.018t^2 - 0.02817t^3$$
$$z(t) = 10 + 0.3t + 0.027t^2 + 0.00012t^3$$

ADM ile 3 adım yaklaşım

$$x(t) = 20 - 3t - 0.0744t^2 + 0.02874498t^3$$
$$y(t) = 15 + 2.991t + 0.0738009t^2 - 0.02874994002\,t^3$$
$$z(t) = 10 + 0.90\,t + 0.05991t^2 + 0.000496002t^3$$

DTM ile 4 adım yaklaşım

$$x(t) = 20 - 3t - 0.045t^2 + 0.02805t^3 + 0.000795375t^4$$
$$y(t) = 15 + 2.7t + 0.018t^2 - 0.02817t^3 - 0.000654525t^4$$
$$z(t) = 10 + 0.3t + 0.027t^2 + 0.00012t^3 - 0.00014085t^4$$

HPM ile 4 adım yaklaşım

$$x(t) = 20 - 3t - 0.045t^2 + 0.02805t^3 + 0.000795375t^4$$
$$y(t) = 15 + 2.7t + 0.018t^2 - 0.02817t^3 - 0.000654525t^4$$
$$z(t) = 10 + 0.3t + 0.027t^2 + 0.00012t^3 - 0.00014085t^4$$

ADM ile 4 adım yaklaşım

$$x(t) = 20 - 3.00\ t - 0.07410000000t^2 + 0.02873994000t^3 + \ 0.001477252251t^4$$
$$y(t) = 15 + 2.988000000t + 0.07320180000t^2 - 0.02874982008t^3 - \ 0.001475814754t^4$$
$$z(t) = 10 + 1.20t + 0.08982000000t^2 + 0.00098800800000t^3 - \ 0.0001437497001t^4$$

DTM ile 5 adım yaklaşım

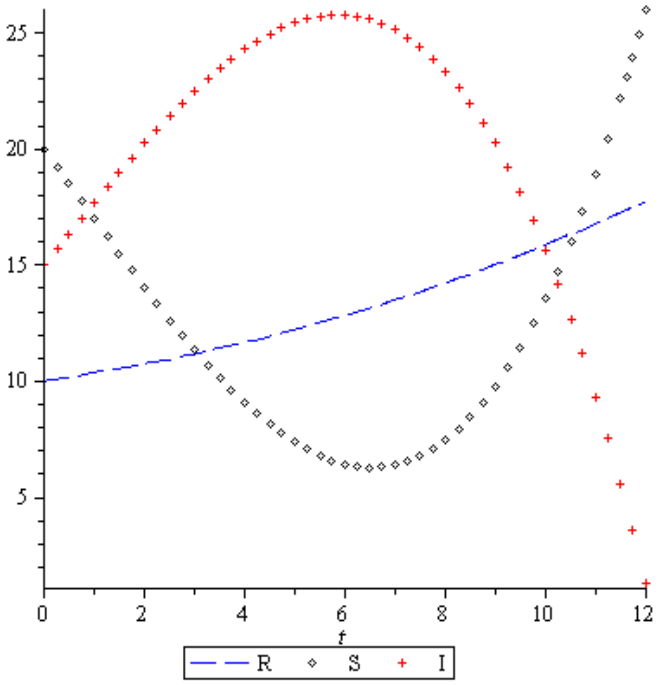
$$x(t) = 20 - 3t - 0.045t^2 + \ 0.02805t^3 + 0.000795375t^4 - 0.00031655025t^5$$
$$y(t) = 15 + 2.7t + 0.018t^2 - 0.02817t^3 - 0.000654525t^4 + 0.00031916835\ t^5$$
$$z(t) = 10 + 0.3t + 0.027t^2 + 0.00012t^3 - 0.00014085t^4 - 0.0000026181t^5$$

HPM ile 5 adım yaklaşım

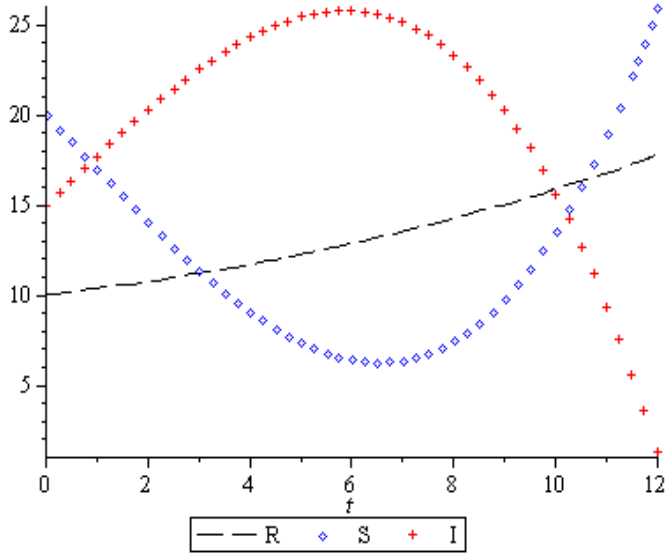
$$x(t) = 20 - 3t - 0.045t^2 + 0.02805t^3 + 0.000795375t^4 - 0.00031655025t^5$$
$$y(t) = 15 + 2.7t + 0.018t^2 - 0.02817t^3 - 0.000654525t^4 + 0.00031916835t^5$$
$$z(t) = 10 + 0.3t + 0.027t^2 + 0.00012t^3 - 0.00014085t^4 - 0.0000026181t^5$$

ADM ile 5 adım yaklaşım

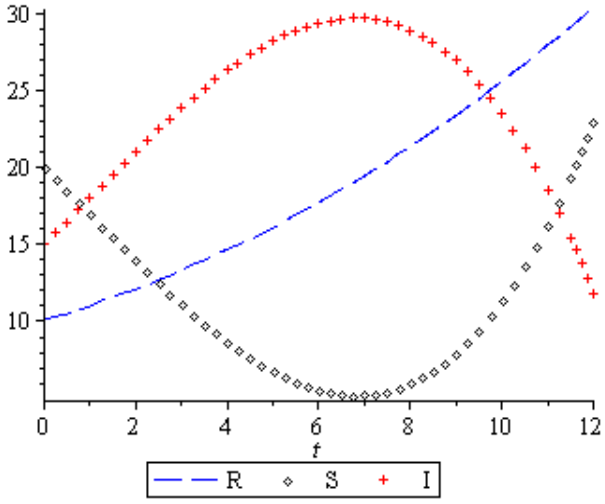
$$x(t) = 20 - 3.00t - 0.07380000000t^2 + \ 0.02873488000t^3 + 0.001470131754t^4 - 0.0003189666228t^5$$
$$y(t) = 15 + 2.985000000t + 0.07260300000t^2 - 0.02874964020t^3 - \ 0.001467256766t^4 + 0.0003190256554t^5$$
$$z(t) = 10 + 1.50t + 0.1197000000t^2 + 0.001476020000t^3 - 0.0002874988005t^4 - 0.000005903259016t^5$$



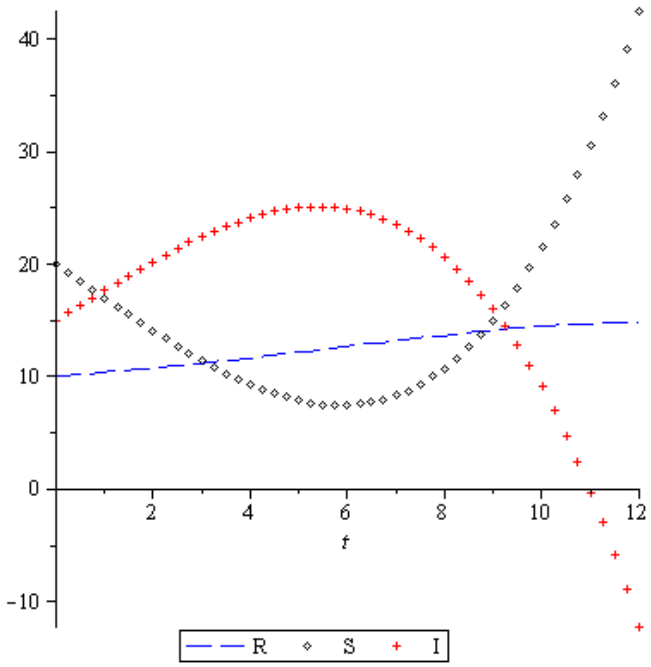
Şekil 9: DTM ile 3 adım yaklaşım



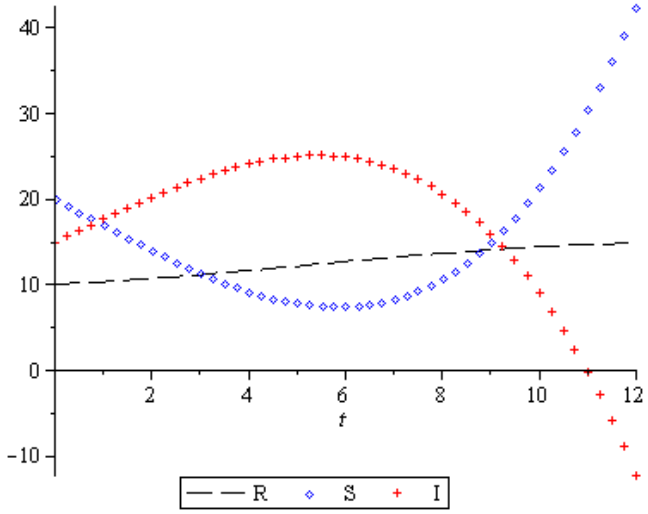
Şekil 10: HPM ile 3 adım yaklaşım



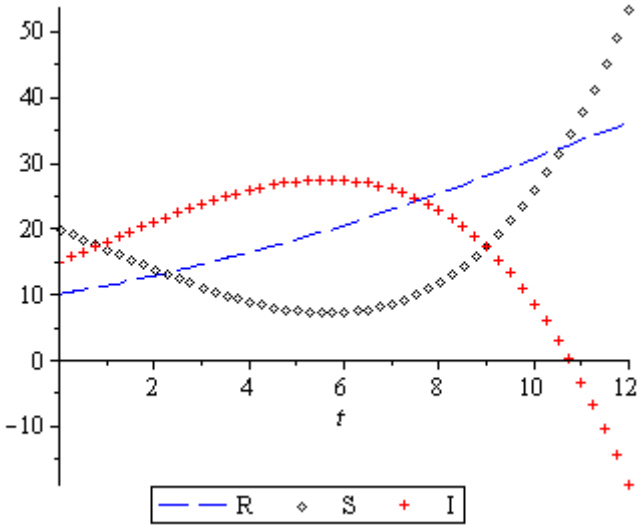
Şekil 11: ADM ile 3 adım yaklaşım



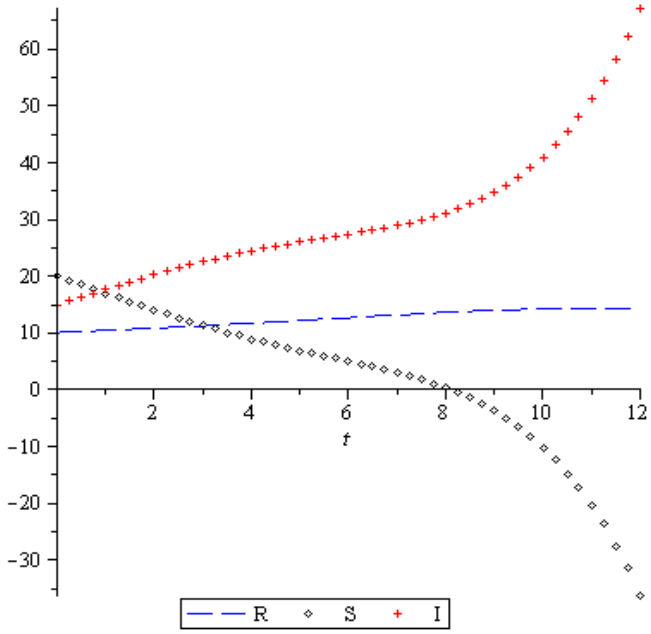
Şekil 12: DTM ile 4 adım yaklaşım



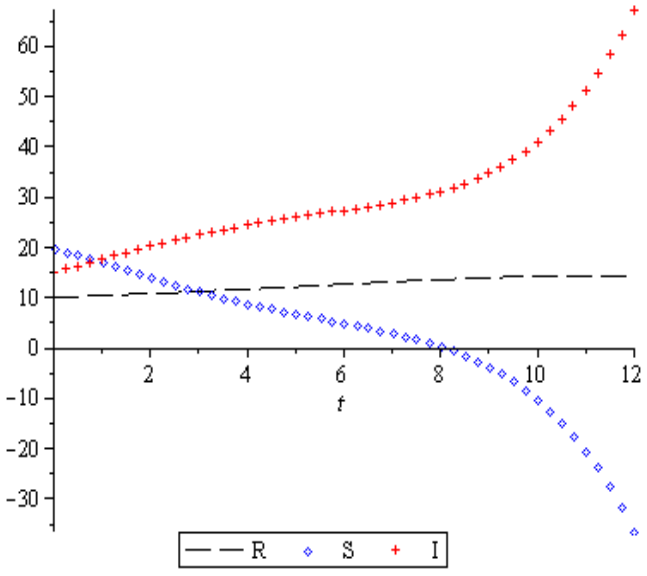
Şekil 13: HPM ile 4 adım yaklaşım



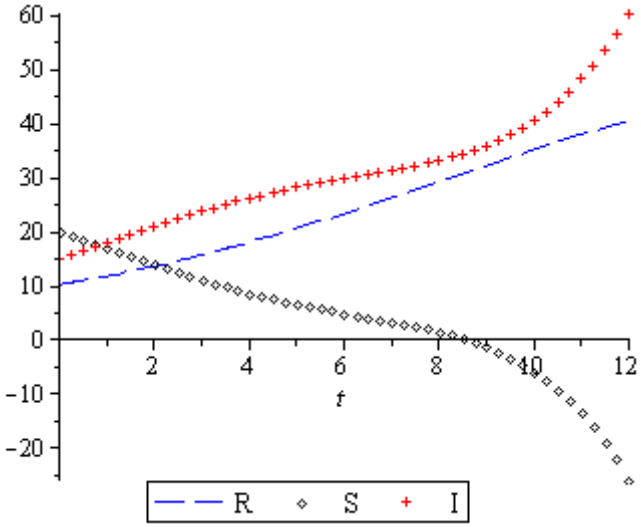
Şekil 14: ADM ile 4 adım yaklaşım



Şekil 15: DTM ile 5 adım yaklaşım



Şekil 16: HPM ile 5 adım yaklaşım



Şekil 17: ADM ile 5 adım yaklaşım

5.2 Öneriler

SIR modeller kurulduğu 1927 yılından itibaren gelişmektedir. Bu modelin çözümleri bilgisayar teknolojisinin gelişmesiyle birlikte nümerik yöntemlerle çok daha hızlı ve güvenilir bir şekilde yapılabilmektedir. Bu modellerin hastanelerin ağ sistemleri üzerinde kurulmasıyla elde edilecek verilerle hem modelin matematiksel olarak daha da geliştirilmesi sağlanabilir. Hem de anında üretilen çözümler ve grafiklerle sağlık alanında ki karar vericiler için tedbir alma ve vizyon çizme de kolaylıklar sağlayabilir.

KAYNAKLAR

Adomıan, G.(1988). A review of the decomposition method in applied mathematics, J.Math. Anal. Appl., (135): 501—544.

Adomıan, G. (1990). A review of the decomposition method and some recent results for nonlinear equation, Math. Comput. Model. (13): 17-43.Math. Anal. Appl. (135): 501—544.

Adomıan, G. (1994). Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method, Kluwer Academic Publishers, Boston.

Akkuş, S. (2009) "Diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinde adomian ayrışım metodu ve homotopi pertürbasyon metodunun karşılaştırılması" (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi), Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi/Fen Bilimleri Enstitüsü, Kahramanmaraş.

Akpınar, H. (2012). Bulaşıcı hastalıkların yayılımının tahmininde deterministik modellerin kullanılması. *Marmara Üniversitesi e-dergi: Öneri dergisi cilt 10,sayı 38(18)*.

Ayaz, F. (2003) " On the two dimensional differential transform method ", *Applied Mathematics and Computation,* 143 : 361-374.

Babaoğlu, M. (2009). "Diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinde Adomian ayrışım metodu ve Homotopi analiz metodunun karşılaştırılması", Yüksek Lisans Tezi, Kahraman Maraş Sütçü İmam Üniversitesi, K. Maraş.

Biazar, J. (2006). Solution of the epidemic model by Adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Computation*, 173 (2) 1101-1106.

Chen C.K. and Ho S.H., (1999)" Solving partial differential equations by two dimensional differential transform method", *Applied Mathematics and Computation,* 106 : 171-179.

Chen C.K. and Ho, S.H. (1996) " Application of differential transformation to eigenvalue problems" , *Appl. Math. Comput.,* 79 : 173-188.

Cherruault, Y., Adomıan, G. 1989. Convergence of Adomian's method, Kybernetes (18): 31-38.

Cherruault, Y., Adomıan, G. 1993. Decomposition methods: A new prof of convergence, Math. Comput. Model.(18): 103-106.

Golonka, Debby."Chickenpox (Varicella)." Web MD. 21 May 2008. Healthwise. <http://www.webmd.com/a-to-z-guides/chickenpox-varicella-topicoverview?page=2>.

He H., Han E., and Cong M. "Constitutive Relation of Engineering Material Based on SIR Model and HAM" Journal of Applied Mathematics Volume 2014, Article ID 624863, 13 pages http://dx.doi.org/10.1155/2014/624863

He, J.H. 2006. Int. J. Mod. Phys. B (20): 1141.

Heffernan, J. M., Smith, R., & Wahl, L. (2005). Perspectives on the basic reproductive ratio. *J. R. Soc. Interface*, 281-293.

Ibrahim, S., & Ismail, S. (2012). Differential Transformation Approach to A SIR Epidemic Model with Constant Vaccination. *Journal of American Science*, 8(7).

Johnson, T. (2009). *Mathematical Modeling of Diseases:Susceptible-Infected-Recovered (SIR) Model.* Universty of Minnesota: Math 4901 Senior Seminar.

Keeling, Matt. "The mathematics of diseases." Plus Magaazine: Living Mathematics. Mar. 2001. Fall 2008 <http://plus.maths.org.uk/issue14/features/diseases/index.html>.

Kermack, W., & McKendrick, A. (1927). Contributions to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of Royal Society of London. Series A, 115*, 700-721.

Kermack, W., & McKendrick, A. (1932). A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics Part II. The Problem of Endemicity. *Proc. R. Soc. A.*, 55-83.

Kermack, W., & McKendrick, A. (1933). A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics Part III. Further Studies of the Problem of Endemicity. *Proc. R. Soc. A.*, 94-122.

Keskin Y. and Oturanç G.(2008)," The differential transform methods for nonlinearfunctions and its applications " *Selcuk J. Appl. Math.,* 9 (1): 69-76 .

Kurnaz, A., & Oturanç, G. (2005). The differential transform approximation for the system of ordinary differential equation. *International Journal of Computer Mathematics*, vol.82, no: 6pp.709-719.

Rafei, M., Ganji, D., & Daniali, H. (2007, 187). Solution of the epidemic model by homotopy. *Applied Mathematics and Computation*, s. 1056–1062.

Seng, V., Abbaoui, K. Cherruault, Y. (1996). Adomian's polynomials for nonlinear operators, Math. Comput. Modelling (24): 59-65.

Yalcinkaya, M., Saygılı, H. (1997). Balkan Phys. Lett. (5): 69.

Wazwaz, (1999). A reliable modification of Adomian decomposition method, Appl. Math. Comp., (102): 77- 86.

ÖZGEÇMİŞ

1976 yılında Elâzığ'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Malatya'da tamamladı. Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Fen Bilimleri Eğitimi Matematik Anabilim dalını 2000 yılında bitirdi. 2000 yılından beri çeşitli okul ve dershanelerde matematik öğretmeni olarak çalıştı. Halen Selçuklu Hocacihan Anadolu imam hatip lisesinde çalışmaktadır evli ve üç çocuk babasıdır.

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Hakan Bilbay
Uyruğu	**:**	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Baskil/1976
Telefon	**:**	0 505 661 29 27
Faks	**:**	
e-mail	**:**	hakanbilbay@hotmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Malatya Lisesi,Merkez,Malatya	1993
Üniversite	:	Selçuk Üniversitesi,Selçuklu,Konya	2000
Yüksek Lisans	:	Selçuk Üniversitesi,Selçuklu,Konya	

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2000-2003	Malatya Akçadağ Y.İ.B.O.	Öğretmen
2003-2009	Malatya İstanbul Dersanesi	Öğretmen
2009-	Selçuklu Hocacihan A.İ.H.L.	Öğretmen

UZMANLIK ALANI

Matematik

YABANCI DİLLER

İngilizce

BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

YAYINLAR

Comparing numerical methods for Epidemic Models (Yüksek lisans tezinden yapılmıştır.)

Hakan Bilbay[1], Yıldıray Keskin[2]

[1] Selcuklu Hocacihan Religious High Schools
[2] Department of Mathematics, Science Faculty, Selcuk University

Özet (Abstract)

In this paper, we investigate the accuracy of the Differential transform method (DTM) for solving the problem of the spread of a non-fatal disease in a population. The DTM provides us with a simple way to adjust and control the convergence region of the series solution. Mathematical modeling of the problem leads to a system of nonlinear differential equations. Graphical results are presented and discussed quantitatively to illustrate the solution.

Keywords: SIR epidemic model, Differential transform method (DTM), Adomian decomposition method, homotopy perturbation method

Kaynakça

Akpınar, H. (2012). Bulaşıcı hastalıkların yayılımının tahmininde deterministik modellerin kullanılması. *Marmara Üniversitesi e-dergi: Öneri dergisi cilt 10,sayı 38(18)*.

Biazar, J. (2006). Solution of the epidemic model by Adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Computation*, 173 (2) 1101-1106.

Heffernan, J. M., Smith, R., & Wahl, L. (2005). Perspectives on the basic reproductive ratio. *J. R. Soc. Interface*, 281-293.

Ibrahim, S., & Ismail, S. (2012). Differential Transformation Approach to A SIR Epidemic Model with Constant Vaccination. *Journal of American Science*, 8(7).

Johnson, T. (2009). *Mathematical Modeling of Diseases:Susceptible-Infected-Recovered (SIR) Model.* Universty of Minnesota: Math 4901 Senior Seminar.

Kermack, W., & McKendrick, A. (1927). Contributions to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of Royal Society of London. Series A, 115*, 700-721.

Kermack, W., & McKendrick, A. (1932). A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics Part II. The Problem of Endemicity. *Proc. R. Soc. A.*, 55-83.

Kermack, W., & McKendrick, A. (1933). A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics Part III. Further Studies of the Problem of Endemicity. *Proc. R. Soc. A.*, 94-122.

Rafei, M., Ganji, D., & Daniali, H. (2007, 187). Solution of the epidemic model by homotopy. *Applied Mathematics and Computation*, s. 1056–1062.