T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İKİ BOYUTLU LİNEER HÜCRESEL DÖNÜŞÜMLER VE GARDEN EDEN KAVRAMI

Esra AYATA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2015

T.C.

HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İKİ BOYUTLU LİNEER HÜCRESEL DÖNÜŞÜMLER VE GARDEN EDEN KAVRAMI

Esra AYATA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2015

Doç. Dr. Selman UĞUZ' un danışmanlığında, Esra AYATA' nın hazırladığı "**İki Boyutlu Lineer Hücresel Dönüşümler ve Garden Eden Kavramı**" konulu bu çalışma 09/06/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile Harran üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

İmza

Danışman : Doç. Dr. Selman UĞUZ ……

Üye : Doç. Dr. Aydın İZGİ ……

Üye : Doç. Dr. Durmuş DAĞHAN ……

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım

Prof. Dr. Sinan UYANIK
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iii
ŞEKİLLER DİZİNİ iv
ÇİZELGELER DİZİNİ v
1. GİRİŞ 1
1.1. Hücresel Otomataların (CA) Çalışma Prensipleri 1
1.2. Hücresel Otomataların İşletim Sistemi 2
1.3. CA Uygulamaları 2
1.3.1. 1D CA örnekleri 2
1.3.2. Doğada 1D CA 3
1.3.3. 2D CA için mümkün komşuluklar 4
1.3.4. 2D CA örneği "Game Of Life" 4
1.3.5. SOC ve kum yığınları 6
1.4. Temel Kavramlar 6
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR 8
2.1. Z_2 Cismi Üzerinde 2 Boyutlu CA 8
2.2. Komşuluklara Göre Kural Numaraları 8
2.3. Z_2 Cismi Üzerinde Refleksive Sınır Şartı 10
2.4. Z_3 Cismi Üzerinde Refleksive Sınır Şartı 12
2.5. Z_2 Cismi Üzerinde Adiabatic Sınır Şartı 15
2.6. Z_3 Cismi Üzerinde Refleksive Sınır Şartı 17
3. MATERYAL ve YÖNTEM 20
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA 21
4.1. Garden Eden Kavramı 21
4.2. Sıfır Sınır Şartı Altında Temsili Matrisin GOE Sayısı 21
4.3. Adiabatic Sınır Şartı Altında Temsili Matrisin GOE Sayısı 27
4.4. Refleksive Sınır Şartı Altında Temsili Matrisin GOE Sayısı 33
4.5. Periyodik Sınır Şartı Altında Temsili Matrisin GOE Sayısı 36
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER 41
5.1. Sonuçlar 41
5.2. Öneriler 41
5.3. Farklı Çalışma Konuları 41
KAYNAKLAR 47
ÖZGEÇMİŞ 49

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İKİ BOYUTLU HÜCRESEL DÖNÜŞÜMLER VE GARDEN EDEN KAVRAMI

Esra AYATA

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Selman UĞUZ
Yıl: 2015, Sayfa: 49

Bu tezin giriş aşamasında Hücresel Otomata (Cellular Automata CA)' nın tarihi, çalışma prensipleri, işletim sistemi ve uygulamalarına yer verilmiştir. 2D CA' nın en bilinen uygulamalarından biri olan "Game Of Life" ve "SOC ve Kum Yığınları" örneklerinden bahsedilmiştir. 2. Bölüm de pek çok alanda yaygın olarak kullanılan 2D CA' ların davranışları Adiabatic ve Refleksive sınır şartları altında Z_2 ve Z_3 cisimleri üzerinde matematiksel bir model olarak incelenmektedir. Z_2 cismi üzerinde 170A ve 170R kuralları ile üretilen sonlu 2D lineer CA' ların temsili matrisleri ve Z_3 cismi üzerinde 2460A ve 2460R kuralları ile üretilen sonlu 2D lineer CA' ların temsili matrisleri elde edilmiştir. 4. Bölüm de Z_3 cismi üzerinde Sıfır sınır şartı, Adiabatic, Refleksive ve Periyodik sınır şartları altında verilen 2D lineer CA' ların Garden Of Eden (GOE) sayıları hesaplanmaya çalışılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Hücresel Dönüşümler, Sıfır Sınır Şartı, Periyodik Sınır Şartı, Adiabatic Sınır Şartı, Refleksive Sınır Şartı.

ABSTRACT

Master Thesis

TWO DIMENSIONAL CELLULAR AUTOMATA AND GARDEN OF EDEN

Esra AYATA

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Dr. Selman UĞUZ
Year: 2015, Page: 49

The introduction of the thesis was included CA's history, study principles, operating system and applications. 2D CA has the most well known application "Game Of Life" and "SOC and Mass of Sand" and it has been mentioned in the the examples. Chapter 2 also widely used in many areas of 2D CA's behaviors are studied in a matematical model on Z_2 ve Z_3 fields under Adiabatic and Reflexive boundary conditions. Z_2 field over 170A and 170R rules finite generated 2D linear CA's represent matrices and Z_3 field over 2460A and 2460R are rules finite generated 2D linear CA's representative matrices obtained. Section 4 Z_3 field over has been tried to calculate the number of 2D linear CA's Garden of Eden (GOE) under null, Adiabatic, Reflexive and Periodic boundary conditions.

KEY WORDS: Cellular Automata, Null Boundary Condition, Periodic Boundary Condition, Adiabatic Boundary Condition, Reflexive Boundary Condition

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamın her aşamasında araştırmalarımı yönlendiren, öneri ve yardımlarını esirgemeyen, engin matematik bilgisiyle bana yol gösteren danışman hocam sayın Doç. Dr. Selman UĞUZ‘ a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 1. 1 Kural 90- 50 adım sonrası 2
Şekil 1. 2 Kural 90- 50 adım sonrası 3
Şekil 1. 3 1D CA Kabuk Örneği 3
Şekil 1. 4 Von Neumann Komşuluğu, Moore Komşuluğu 4
Şekil 1. 5 Planörün t=1 deki hali 5
Şekil 1. 6 Planörün t=2 deki hali 5
Şekil 1. 7 Planörün t=3 deki hali 5
Şekil 1. 8 Planörün t=4 deki hali 5
Şekil 1. 9 Planörün t=5 deki hali 5
Şekil 1. 10 Planörün t=6 deki hali 5
Şekil 1. 11 Per Bak'ın Kum Yığını 6
Şekil 2. 1 Von Neumann Komşuluk Sistemi 8
Şekil 4. 1 Farklı 2D CA kuralları ile üretilen bazı simetrik modeller 41
Şekil 4. 2 2D CA ile farklı kural ve sınır koşulları ile görüntü kopyalama 42
Şekil 4.3 Sıvı ya da gazın donma noktasının altına kadar soğutulduğunda oluşan kristal şekil 43
Şekil 4. 4 Kar tanesinin 31 adımda gerçekleşen görüntüsü 43
Şekil 4. 5 Kökün uclarına eklenen malzemenin oranına göre boynuzdaki kıvrılma 44
Şekil 4. 6 Hayvanın kabuğunun açık ucuna kabuk eklenmektedir. 44
Şekil 4. 7 Belli kurallar altında oluşan hayvan kabukları. 44

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa No

Çizelge 2. 1 Z_2 'de Kural numaraları 8
Çizelge 2. 2 Kural170= Kural 2+Kural 8+Kural 32+Kural 128 9
Çizelge 2. 3 Z_3 'te Kural Numaraları 9
Çizelge 2. 4 Kural 2460=Kural 3+Kural 27+Kural 243+Kural 2187…… 9

1. GİRİŞ

Hücresel otomata (Cellular Automata (CA)) çok sayıda homojen etkileşimli çalışmada, olayların veya tanımlanan konuların hücreler şeklinde bölünmesi ve her bir hücrenin, yanındaki diğer hücrelerin durumuna bağlı olarak gelecekteki durumunun belirlenmesinde kullanılan bir işletim sistemi ve bir geri dönüşüm mekanizmasıdır. Otomat kavramı, 1930'lu yıllarda bilgisayarların temel çalışma ilkelerini ortaya koyan Alan M. Turing adına atfedilen, Evrensel Turing Makinesi ile ortaya çıkmıştır. Daha sonrasında John von Neumann ve Stanislaw Ulam(1966) tarafından ilk olarak incelenmiştir. Hücresel dönüşüm (Cellular Automata) ilk olarak fizik ve biyoloji alanlarında ve bilgisayar biliminde modelleme için kullanılmıştır. Hedlund (1969) ve Wolfram (1983) matematiksel bir bakışla CA' yı incelemişlerdir. Ardından Pries (1986), Das ve diğerleri (1993), Khan ve diğerleri (1997), Inokuchi ve diğerleri (1998), Choudhury ve diğerleri (1999), Choudhury ve Dihidar (2004), Ying ve diğerleri (2008), Şiap ve diğerleri (2009), Akın ve diğerleri (2009) Z_2 ve Z_3 te belli kurallar altında CA da önemli çalışmalar yapmışlar. 80' lerin başında Wolfram basit bir boyutlu (1-D) CA kurallarının (ünlü Wolfram kuralları olarak bilinir.) ailesi üzerinde çalışmış ve bu en basit kuralların bile kompleks davranışlara benzemeye çalışmada yetenekli olduğunu göstermiştir. CA için çalışmaların birçoğu bir boyutlu durum için yapılmıştır. Son zamanlarda trafik modellerinin uygulamalarında 2-D (iki boyutlu) CA keşfedilmiştir.

1.1. Hücresel Otomataların (CA) Çalışma Prensipleri

Bir hücresel otomata aşağıdaki temel özelliklerle karakterize edilir:

• Düzenli hücre kafeslerinden oluşur,

• Gelişim zaman etaplarında meydana gelir,

• Her hücre bir durumla karakterize edilir,

• Her hücre, sadece hücrenin durumuna ve sonlu komşu hücre sayısına bağlı olan aynı kurala göre gelişir,

• Komşuluk ilişkisi lokal ve birbirine benzerdir.

1.2. Hücresel Otomataların İşletim Sistemi

Hücresel Otomata' ya dayalı modellerin işletim sisteminde iki temel kavram ve bu kavramlar arasındaki ilişki önem kazanmaktadır. Bu kavramlar, gerçek dünya ile (gözlenen olayların dünyası-modellenecek olay) kesin dünya (modellenen olay dünyası) arasında tümevarım ve tümdengelim yaklaşımlarıdır.

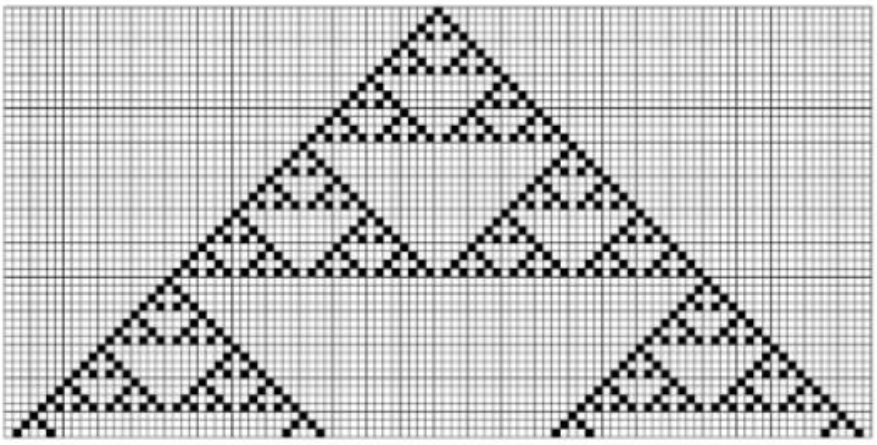
Tümevarım: Gözlenen olaylardan başlayan tümevarımlı etap (olaylardan ya da kurallardan yola çıkarak yeni bir modelin teorik oluşumuna gitme), olayın "zihinsel modelini" oluşturmayı sağlar.

Tümdengelim: Tümdengelim etabı (daha önce oluşturulmuş olan modelle çözüme gitme), zihinsel modeli "kesinleştirilmiş model" e dönüştürür. Bu durum genellikle matematiksel bir dille açıklanır.

1.3. CA Uygulamaları

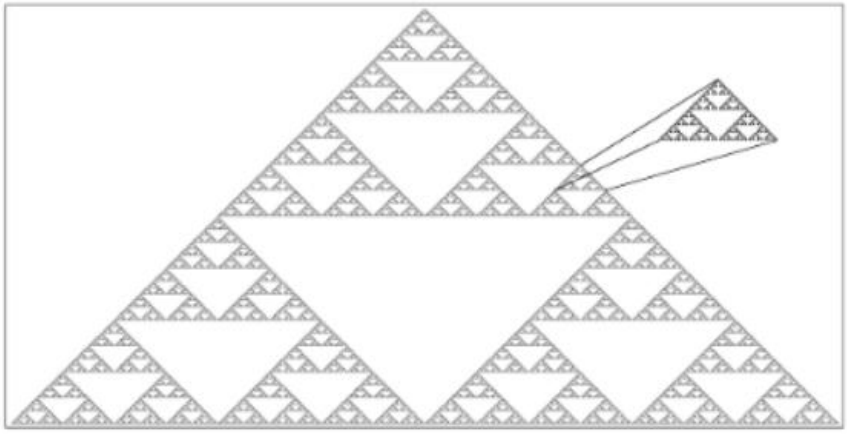
1.3.1. 1D CA Örnekleri:

Stephan Wolfram yaklaşık 30 yıl önce şimdi Cellular Automata (CA) olarak isimlendirdiği bilim dalı üzerinde çalışmaya başlamıştır. Bu bilim basit kuralları olan ve birbirini etkileyen basamaklardan oluşan bir sisteme sahiptir. CA' nın mantığı adım adım ilerleyen iterasyonlarda gizlidir. Wolframın "Rule 90" olarak adlandırdığı ve 50 adım sonra elde ettiği şekil (Şekil 1.1.) deki gibidir.



Şekil 1.1. Kural 90- 50 adım sonrası

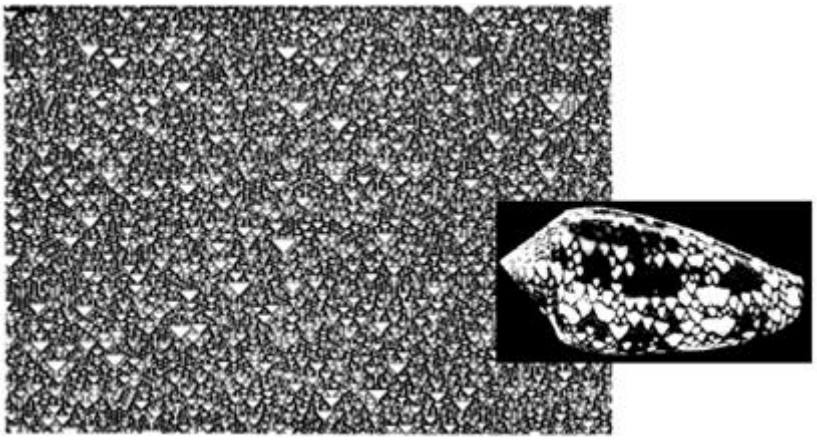
Bu şeklin 500 adım sonraki görüntüsü ise (Şekil 1.2.) deki gibidir. Burada dikkati çeken özellik ise şeklin iç içe bir yapı arz etmesidir. Bu yapı franktal olarak adlandırılmaktadır. Yani şeklin her bir küçük parçası tüm şeklin küçük bir kopyasıdır.



Şekil 1.2. Kural 90 – 500 adım sonrası

2.3.2 Doğada 1D CA

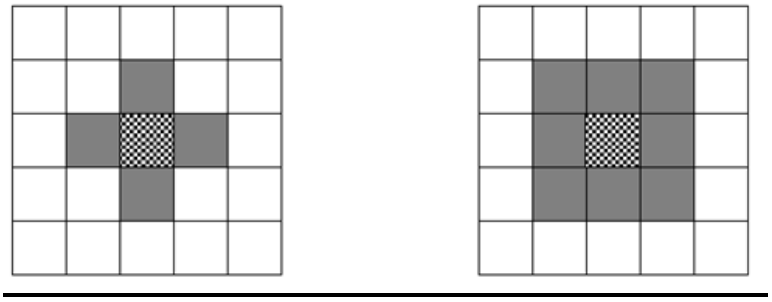
Wolfram'ın 1D CA örnekleri doğada ağaç kabuğunda da görülmektedir



Şekil 1.3. 1D CA Kabuk Örneği

Bu ağaç kabuğunda siyah yerleri 1, beyaz yerleri 0 olarak numaralandırırsak merkez hücre komşu hücrelerle belirlenen kural altında işleme girdiğinde şekildeki yapı oluşur.

2.3.3 2D CA İçin Mümkün Komşuluklar:



Şekil 1.4. Von Neumann komşuluğu Moore Komşuluğu

2.3.4 2D CA Örneği "Game Of Life"

"Game Of Life " Yaşam oyunu 1960'larda John Horton Convay tarafından keşfedilmiş bir hücresel otomattır. Hücresel dönüşümün en bilinen örneğidir. Bu oyun aslında, insan oyunculardan girdiye ihtiyaçsız başlangıç durumları tarafından evreleri saptanan anlamına gelen insansız bir oyundur.

Kurallar:

- Hayat Oyunu' nun evreni sonsuz iki boyutlu dikey ızgaraların kare hücreleridir.
- Hücreler iki durumda olabilir: ölü veya canlı
- Her hücre, yatay dikey ve çapraz olmak üzere sekiz komşusuyla doğrudan etkileşir. Herhangi bir hücre için her zaman adımında aşağıdaki değişikliklerden biri gerçekleşir:

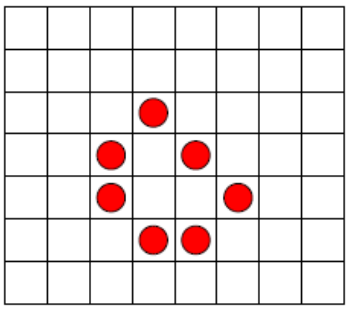
➢ Eğer bir canlı hücre 2 den daha az canlı komşuya sahipse, hücre ölür. (loneliness-yalnızlık)

➢ Eğer bir canlı hücre 3 den fazla canlı komşuya sahipse, hücre ölür. (overcrowding-aşırı nüfuslanma)

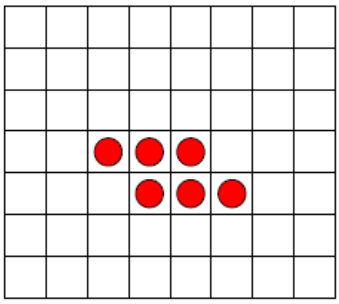
➢ Eğer bir hücre canlı 2 veya 3 canlı komşuya sahipse, hücre yaşamaya devam eder. (happiness-mutluluk)

➢ Eğer bir ölü hücre tam olarak 3 canlı komşuya sahipse, hücre canlanır. (reproduction- yeniden üreme) Aksi halde hücre ölü kalır.

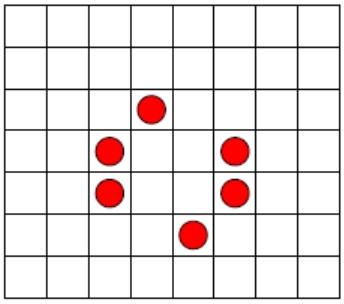
Başlangıçtaki dağılıma sistemin "tohumu" denir. Birinci nesil, üstteki kuralların eş zamanlı olarak "tohum" daki her hücreye uygulanmasıyla elde edilir. Canlanmalar ve ölümler tek bir anda oluşur. Bu kurallar daha fazla nesli üretmek için aynı şekilde ard arda uygulanır. Statik kalıplar (natürmort), tekrar eden kalıplar ("osilatör" natürmortun üst kümesi) aynı yönde kendilerini çeviren kalıplar (uzay gemisi) gibi birçok farklı türde kalıp hayat oyununda gerçekleşir. Bir "planör"ün evrimi ve hareketleri aşağıda verilmiştir.



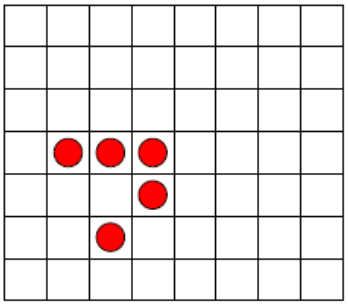
Şekil 1.5. Planörün t=1 deki hali



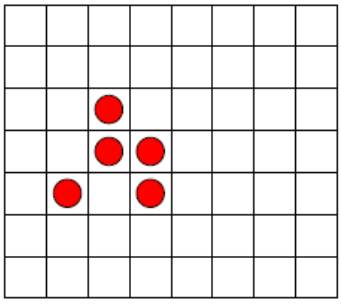
Şekil 1.6. Planörün t=2 deki hali



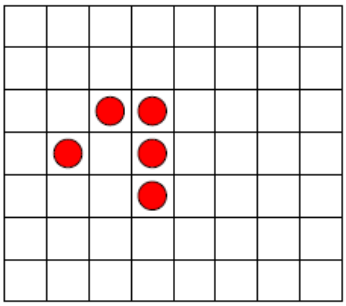
Şekil 1.7. Planörün t=3 deki hali



Şekil 1.8. Planörün t=4 deki hali



Şekil 1.9. Planörün t=5 deki hali

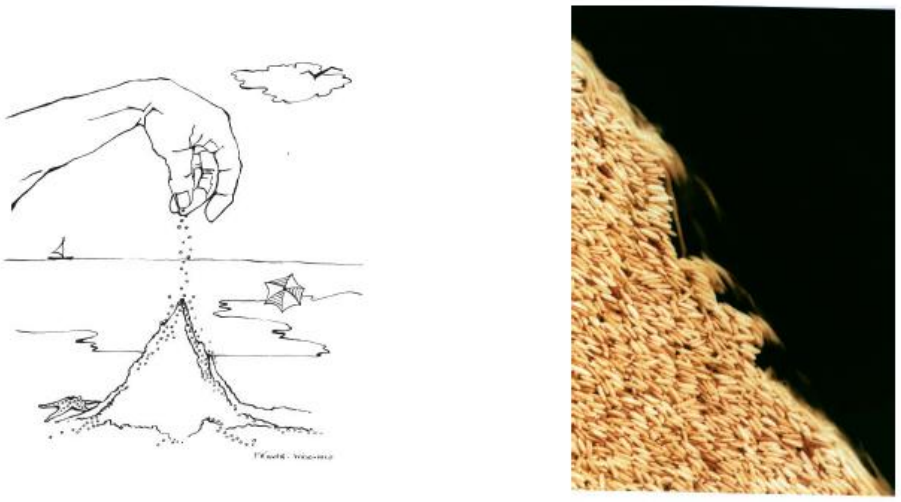


Şekil 1.10. Planörün t=6 deki hali

Bu adımlar sonunda birçok sebepte tüm yaşayan hücrelerin yok olmasıyla toplum sonuncundan ortadan kaybolur veye "uzay gemisi" gibi sonsuza kadar ilerler.

2.3.5 SOC Ve Kum Yığınları

Bir diğer 2D CA örneği ise " Per Bak' ın SOC gösterimindeki kum yığınları " dır. Bak'ın SOC gösteriminde ki bir sistemin en önemli özelliği bir kum yığınıdır. Düz bir yüzey üzerine kum taneleri bırakılır. Deney, hem masa üzerine yığılan gerçek kumla, hem de bilgisayar simülasyonlarında defalarca yapılmıştır. Kum taneleri küçük bir pramit oluşana kadar bir süre için yalnızca üst üste yığılırlar.(Şekil 1.11). Bu noktaya bir kez ulaştığında, ilave her tane, ya yığının üstünde bir oturma yeri bulunuyor ya da diğer tanelerin bir çığ biçiminde düşmesine sebebiyet verecek şekilde yığının bir yanına doğru dengesini yitiriyor. Eğim dengesiz (sabit durumu bozulunca) olduğunda oluşan çığın büyüklüğünü gözlemler. Buna göre verili büyüklükte bir çığın ortalama frekansı, büyüklükle üstel olarak ters orantılıdır.



Şekil 1.11. Per Bak' ın Kum Yığını

1.4. Temel Kavramlar

1.4.1 Tanım: Eğer sonlu 2D CA konfigürasyonun *m* satır ve *n* sütunlardan oluşan bütün hücrelerine aynı kural uygulanırsa o zaman CA ya tekdüze veya düzenli CA denir (Khan ve ark., 1997).

1.4.2. Tanım: Eğer sonlu bir 2D CA konfigürasyonunun farklı hücrelerine farklı kurallar uygulanırsa bu CA' ya hybrid (melez) CA denir (Khan ve ark., 1997).

1.4.3. Tanım: En yakın kenar hücreleri 0 olan 2D CA ya sıfır sınır şartlı (null boundary condition) CA' lar denir ve bu durum kısaca N ile gösterilir (Khan ve ark., 1997)

1.4.4. Tanım: En yakın kenardaki hücreleri birbiri ile bitişik olan 2D CA' ya periyodik sınır şartlı (periodic boundary condition) CA' lar denir ve bu durum kısaca P ile gösterilir(Khan ve ark., 1997).

1.4.5. Tanım: Elemanları arasında toplama, çıkarma, çarpma ve bölme (sıfıra bölme hariç) yapılabilen ve bu işlemlerde sayılardan alışık olduğumuz temel aritmetik kurallarının geçerli olduğu kümeye cisim denir.

1.4.6. Tanım: $A = [a_{ij}]_{mxn}$ olsun. A matrisinin satır uzayının boyutuna A matrisinin satır rankı, sütun uzayının boyutuna A matrisinin sütun rankı denir.

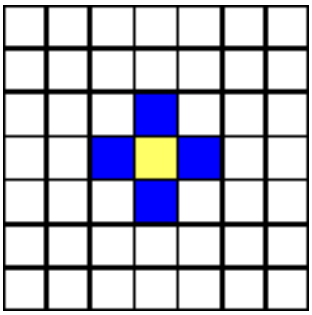
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

2.1 Z_2 Cismi Üzerinde 2-Boyutlu CA (2D CA)

Bu bölümde $\boldsymbol{Z_2}$ cismi üzerinde iki boyutlu Hücresel dönüşümlerin karakterizasyonu üzerinde daha önce yapılan çalışmalar incelenecektir. Khan ve ark. (1997) 2D CA' ların karakterizasyonlarını 170N ve 170P için incelediler. Choudhury ve ark. (2004) $\boldsymbol{Z_2}$ cismi üzerinde 170N ve 170P için 2D CA' ların karakterizasyonunun en genel halini ifade ettiler.

İki boyutlu en yakın komşuluklu lineer CA' da CA' nın belirli bir hücresinin gelecek durumu, hücrenin kendi durumundan ve ona en yakın sekiz komşu hücreden etkilenir. Farklı bağımlılıklar çeşitli CA kuralları ile hesaplanır.

2.2 Komşuluklara Göre Kural Numaraları



Şekil 2.1. Von Neumann Komşuluk Sistemi

Şekilde verilen hücrenin, sağında, solunda, üstünde ve altında verilen hücreler o hücre için bir komşuluktur (Vonn Neumann).

Z_2' de

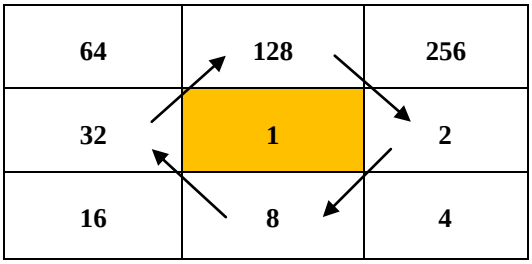
Çizelge 2.1. Z_2 de Kural Numaraları

64	**128**	**256**
32	**1**	**2**
16	**8**	**4**

Eğer merkez hücre sadece kendisine bağlıysa bu durum Kural 1 olarak, eğer merkez hücre tepesindeki komşu hücreye bağlıysa Kural 128 olarak adlandırılır.

Bir hücre iki veya daha fazla hücreye bağlıysa o zaman kural numarası ilgili hücrelerin aritmetik toplamıdır. Örneğin 2D CA Kural 170N (128+32+8+2), sıfır sınır şartları altında merkez hücrenin dört komşusuna (üst, sağ, alt, sol) bağlıdır.

Çizelge 2.2. Kural 170=Kural 2+Kural 8+Kural 32+Kural 128



Z_3' de

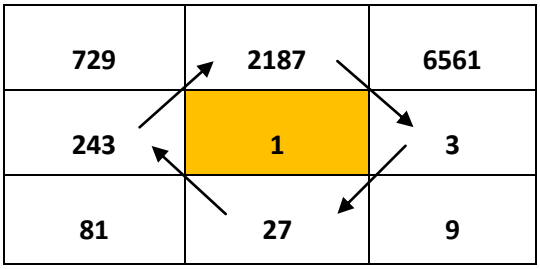
Çizelge 2.3. Z_3' te Kural Numaraları

729	**2187**	**6561**
243	**1**	**3**
81	**27**	**9**

Eğer merkez hücre sadece kendisine bağlıysa bu durum Kural 1 olarak, eğer merkez hücre tepesindeki komşu hücreye bağlıysa Kural 2187 olarak adlandırılır.

Bir hücre iki veya daha fazla hücreye bağlıysa o zaman kural numarası ilgili hücrelerin aritmetik toplamıdır. Örneğin 2D CA Kural 2460N (128+32+8+2), sıfır sınır şartları altında merkez hücrenin dört komşusuna (üst, sağ, alt, sol) bağlıdır.

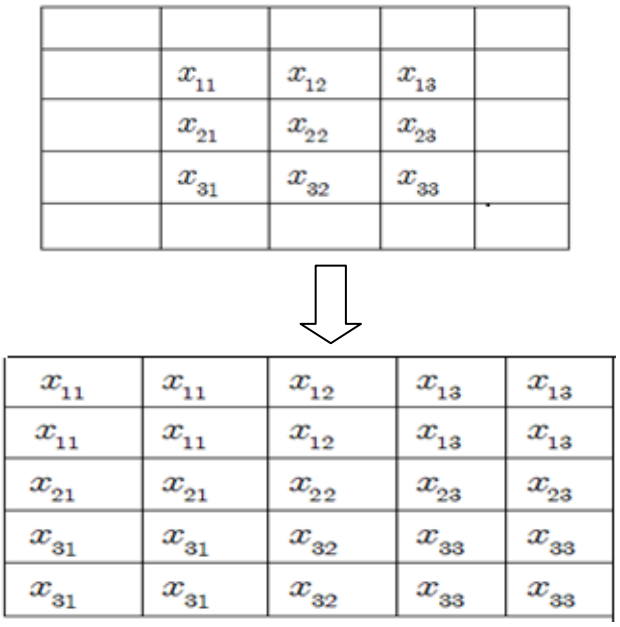
Çizelge 2.4. Kural 2460=Kural 3+Kural 27+Kural 243+Kural 2187



olarak yazılır.

2.3 Z_2 Cismi Üzerinde Refleksive Sınır Şartı

Z_2 Cismi üzerinde 3x3 tipindeki bir matris için iki Boyutlu CA (2D CA) Refleksive sınır şartı ile verilen kurala göre elde edilen matris



	x_{11}	x_{12}	x_{13}	
	x_{21}	x_{22}	x_{23}	
	x_{31}	x_{32}	x_{33}	

x_{11}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{13}
x_{11}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{13}
x_{21}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{23}
x_{31}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{33}
x_{31}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{33}

şeklindedir. Bu matrise karşılık gelen konfigürasyon

$$y_{11} = 2x_{11} + x_{12} + x_{21}$$
$$y_{12} = x_{11} + x_{12} + x_{22} + x_{13}$$
$$y_{13} = x_{12} + x_{23} + 2x_{13}$$

$$y_{21} = x_{11} + x_{21} + x_{22} + x_{31}$$
$$y_{22} = x_{12} + x_{21} + x_{23} + x_{32}$$
$$y_{23} = x_{13} + x_{22} + x_{23} + x_{33}$$

$$y_{31} = x_{21} + 2x_{31} + x_{32}$$
$$y_{32} = x_{22} + x_{31} + x_{32} + x_{33}$$
$$y_{33} = x_{23} + x_{32} + 2x_{33}$$

şeklinde olup bu konfigürasyona karşılık gelen temsili matris

$$(T_{170R})_{9x9} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{9x9}$$

şeklindedir. Bu matrisi blok matrisler şeklinde ifade edersek

$$S_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3x3} \qquad \mathrm{P}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{3x3}$$

olmak üzere

$$T_{170R} = \begin{bmatrix} S_3 & I_3 & 0_3 \\ I_3 & P_3 & I_3 \\ 0_3 & I_3 & S_3 \end{bmatrix}_{9x9}$$

matrisi elde edilir. Genelleme yapılırsa Z_2 üzerinde herhangi bir m ve n için Refleksive sınır şartı altında bir matrise karşılık gelen temsili matrisinin genel formu:

$$(T_{170R})_{mnxmn} = \begin{bmatrix} S & I & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ I & P & I & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & I & P & I & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & P & I & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots. & 0 & I & P & I \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & I & S \end{bmatrix}_{mnxmn}$$

dir.

Burada S ve P matrislerinin genel hali

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{nxn}$$

ve

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}_{nxn}$$

2.4 Z_3 Cismi Üzerinde Refleksive Sınır Şartı

Z_3 Cismi üzerinde 3x3 tipindeki bir matris için iki Boyutlu CA (2D) Refleksive sınır şartı ile verilen kurala göre karşılık gelen matris

x_{11}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{13}
x_{11}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{13}
x_{21}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{23}
x_{31}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{33}
x_{31}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{33}

şeklinde olup bu matrise karşılık gelen konfigürasyon

$$
\begin{aligned}
y_{11} &= (a+d)x_{11} + bx_{12} + cx_{21} \\
y_{12} &= dx_{11} + ax_{12} + cx_{22} + bx_{13} \\
y_{13} &= dx_{12} + cx_{23} + (a+b)x_{13}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_{21} &= ax_{11} + dx_{21} + bx_{22} + cx_{31} \\
y_{22} &= ax_{12} + dx_{21} + bx_{23} + cx_{32} \\
y_{23} &= ax_{13} + dx_{22} + bx_{23} + cx_{33}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_{31} &= ax_{21} + (c+d)x_{31} + bx_{32} \\
y_{32} &= ax_{22} + dx_{31} + cx_{32} + bx_{33} \\
y_{33} &= ax_{23} + dx_{32} + (b+c)x_{33}
\end{aligned}
$$

dır. Bu konfigürasyona karşılık gelen temsili matris

$$
T_{2460R} = \begin{bmatrix}
a+d & b & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
d & a & b & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & d & a+b & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & \\
a & 0 & 0 & d & b & 0 & c & 0 & 0 \\
0 & a & 0 & d & 0 & b & 0 & c & 0 \\
0 & 0 & a & 0 & d & b & 0 & 0 & c \\
 & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & c+d & b & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & d & c & b \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & d & c+b
\end{bmatrix}_{9x9}
$$

dir. Bu matrisi blok matrisler şeklinde adlandırırsak

$$
\mathrm{P}_3^* = \begin{bmatrix} d & b & 0 \\ d & 0 & b \\ 0 & d & b \end{bmatrix}_{3x3} \quad \text{ve} \quad \mathrm{R}_3^* = \begin{bmatrix} c+d & b & 0 \\ d & c & b \\ 0 & d & c+b \end{bmatrix}_{3x3}
$$

$$S_3^* = \begin{bmatrix} a+d & b & 0 \\ d & a & b \\ 0 & d & a+b \end{bmatrix}_{3x3}$$

olmak üzere

$$T_{2460R} = \begin{bmatrix} S_3^* & cI & 0 \\ aI & P_3^* & cI \\ 0 & aI & R_3^* \end{bmatrix}_{9x9}$$

olur.

Z_3 de Refleksive sınır şartı altında herhangi m ve n değerleri için verilen bir matrise karşılık gelen temsili matrisin genelleştirilmiş hali

$$(T_{2460R})_{mnxmn} = \begin{bmatrix} S^* & cI & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ aI & P^* & cI & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & aI & P^* & cI & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & aI & P^* & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & aI & P^* & cI \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & aI & R^* \end{bmatrix}_{mnxmn}$$

dir. Bu matriste S^*, P^* ve R^* matrislerinin genel hali aşağıdaki şekildedir.

$$S^* = \begin{bmatrix} a+d & b & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ d & a & b & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d & a & b & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & a & b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & d & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & d & a+b \end{bmatrix}_{nxn} \quad P^* = \begin{bmatrix} d & b & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ d & 0 & b & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & b & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 & b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & d & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & d & 0 \end{bmatrix}_{nxn}$$

ve

$$R^* = \begin{bmatrix} c+d & b & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ d & c & b & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d & c & b & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & c & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & d & c & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & d & c+b \end{bmatrix}_{nxn}$$

dir.

2.5 Z_2 Cismi Üzerinde Adiabatic Sınır Şartı

Z_2 cismi üzerinde 3x3 tipindeki bir matris için iki Boyutlu CA (2D CA) **Adiabatic** sınır şartı ile verilen matrise karşılık gelen matris

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	
	x_{21}	x_{22}	x_{23}	
	x_{31}	x_{32}	x_{33}	

⇩

x_{22}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{22}
x_{12}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{12}
x_{22}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{22}
x_{32}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{32}
x_{22}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{22}

şeklinde olup bu matrise karşılık gelen konfigürasyon

$$
\begin{aligned}
y_{11} &= 2x_{12} + 2x_{21} \\
y_{12} &= x_{11} + 2x_{22} + x_{13} \\
y_{13} &= 2x_{12} + 2x_{23}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_{21} &= x_{11} + 2x_{22} + x_{31} \\
y_{22} &= x_{12} + x_{23} + x_{32} + x_{21} \\
y_{23} &= 2x_{22} + x_{13} + x_{33}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_{31} &= 2x_{21} + 2x_{32} \\
y_{32} &= 2x_{22} + x_{31} + x_{33} \\
y_{33} &= 2x_{23} + 2x_{32}
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Bu konfigürasyona karşılık gelen temsili matris ise

$$
(T_{170A})_{9x9} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]_{9x9}
$$

dir. Yine benzer şekilde bu matrisi blok matrisler şeklinde adlandırırsak

$$
S_3^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3x3}
$$

olmak üzere temsili matris

$$T_{170A} = \begin{bmatrix} S_3^{'} & I & 0 \\ 0 & S_3^{'} & 0 \\ 0 & I & S_3^{'} \end{bmatrix}_{9x9}$$

şeklinde yazılır. Genelleme yapılırsa Z_2 de herhangi bir m ve n için Adiabatic sınır şartı altında bir matrise karşılık gelen temsili matrisinin genel formu

$$(T_{170A})_{mnxmn} = \begin{bmatrix} S^{'} & I & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & S^{'} & I & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & S^{'} & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & S^{'} & I & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & I & S^{'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & I & S^{'} \end{bmatrix}_{mnxmn}$$

şeklinde olup burada

$$S^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{nxn}$$

dır.

2.6 Z_3 Cismi Üzerinde Adiabatic Sınır Şartı

Z_3 Cismi üzerinde 3x3 tipindeki bir matris için iki Boyutlu CA (2D) Adiabatic sınır şartı ile verilen kurala göre karşılık gelen matris

x_{22}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{22}
x_{12}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{12}
x_{22}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{22}
x_{32}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{32}
x_{22}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{22}

şeklinde olup bu matrise karşılık gelen konfigürasyon

$$
\begin{aligned}
y_{11} &= (b+d)x_{12} + (a+c)x_{21} \\
y_{12} &= dx_{11} + (a+c)x_{22} + bx_{13} \\
y_{13} &= (b+d)x_{12} + (a+c)x_{23}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_{21} &= ax_{11} + (b+d)x_{22} + cx_{31} \\
y_{22} &= ax_{12} + dx_{21} + bx_{23} + cx_{32} \\
y_{23} &= ax_{13} + (b+d)x_{22} + cx_{33}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_{31} &= (a+c)x_{21} + (b+d)x_{32} \\
y_{32} &= (a+c)x_{22} + dx_{31} + bx_{33} \\
y_{33} &= (a+c)x_{23} + (b+d)x_{32}
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Bu konfigürasyona karşılık gelen temsili matris

$$
(T_{2460A})_{9x9} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
0 & b+d & 0 & a+c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
d & 0 & b & 0 & a+c & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & b+d & 0 & 0 & 0 & a+c & 0 & 0 & 0 \\
\hline
a & 0 & 0 & 0 & b+d & 0 & c & 0 & 0 \\
0 & a & 0 & d & 0 & b & 0 & c & 0 \\
0 & 0 & a & 0 & b+d & 0 & 0 & 0 & c \\
\hline
0 & 0 & 0 & a+c & 0 & 0 & 0 & b+d & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & a+c & 0 & d & 0 & b \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+c & 0 & b+d & 0
\end{array}\right]_{9x9}
$$

dir. Bu matrisi blok matrisler şeklinde ifade edersek

$$S_3^{**} = \begin{bmatrix} 0 & b+d & 0 \\ d & 0 & b \\ 0 & b+d & 0 \end{bmatrix}_{3x3}$$

olmak üzere

$$(T_{2460A})_{9x9} = \begin{bmatrix} S_3^{**} & (a+c)I & 0 \\ aI & S_3^{**} & cI \\ 0 & (a+c) & S_3^{**} \end{bmatrix}_{9x9}$$

matrisi elde edilir. Z_3 de Adiabatic sınır şartı altında herhangi m ve n değerleri için verilen bir matrise karşılık gelen temsili matrisin genelleştirilmiş hali

$$(T_{2460A})_{mnxmn} = \begin{bmatrix} S^{**} & (a+c)I & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ aI & S^{**} & cI & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & aI & S^{**} & cI & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & aI & S^{**} & cI & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & aI & S^{**} & cI \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & (a+c)I & S^{**} \end{bmatrix}_{mnxmn}$$

şeklinde olup burada

$$S^{**} = \begin{bmatrix} 0 & (b+d) & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ d & 0 & b & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & b & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & d & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & (b+d) & 0 \end{bmatrix}_{nxn}$$

şeklinde bir karesel matristir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu çalışmada, uygulanan temel yöntem şudur; Bu konuda yapılmış olan bütün çalışmalar internet üzerinden ve değişik kütüphanelerden temin edilmiştir.

Bu elde edilen kaynaklar değerlendirilerek yapılan çalışmalara ilave sonuçlar elde edilmeye çalışılmıştır. Özellikle Khan ve ark. (1997) ve Choudhury ve ark. (2004) çalışmalarından yararlanılmıştır. Khan ve ark. (1997) Z_2 cismi üzerinde 2D CA'ların temsili matrislerinin elde edilişini 170N ve 170P özel kuralı ile incelemişlerdir. Aynı zamanda Choudhury ve ark. (2004) bazı özel kurallar için 2D CA'ların temsili matrislerinin en genel halini vermişlerdir.

Bu tezde, Khan ve ark. (2004) nın 170P ve 170N için incelediği 2D CA'ların temsili matrisleri, konunun daha iyi anlaşılması için biraz daha genişletilerek tekrar incelendi. Buna ek olarak 170A ve 170R içinde 2D CA'ların temsili matrisleri ele alındı. Bu tezde ilk kez olarak Khan ve arkadaşlarının (2004) lineer CA'ların temsili matrislerini incelemek için yaptığı çalışmalardan faydalanılarak Z_3 cismi üzerinde 2460N ve 2460P özel kurallarına karşılık gelen temsili matrisler incelenildi ve 2460P için bazı özel durumlara da değinildi. Ayrıca 2460A ve 2460R kurallarına karşılık gelen temsili matrisler incelendi.

Üçüncü Bölümde Garden Eden kavramından bahsedildi ve bu kavramın 2460A, 2460R, 2460P ve 2046N temsili matrisleri üzerinde işlemler yapıldı. Buna bağlı olarak elde edilen bu işlemlerden kaç matrisin terslenebilir olduğu sonucuna ulaşıldı.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1 Garden Eden Kavramı

Erişilemez ve inşa edilemez konfigürasyonlar vardır. Bu durumlar Garden of Eden (GOE) olarak adlandırılır. Kari, boyutu ikiye eşit olduğu karar verilemeyen veya daha büyük boyutlu bir CA' nın tersine çevrilebilirliğini ispatladı. Ayrıca Durand çok zor bir problem olan 2-D CA' nın tersini bulan problemi gösterdi. **Eğer bir CA hiç GOE konfigürasyonuna sahip değilse o terslenebilirdir.**

Bir hücresel dönüşümün GOE (Garden of Eden) konfigürasyonunu hesaplamak hücresel dönüşüm (Cellular Automata-CA) teorisinde önemli bir notasyondur. Bu notasyon Moore tarafından tanıtıldı. Son zamanlarda Ying Z_2 (ikili alan) üzerinde 2-D hücresel dönüşümün GOE konfigürasyonunun sayısını hesaplamıştı. Biz de burada Z_3 (üçlü alan) üzerinde GOE konfigürasyonunun sayısını hesaplamak için benzer bir yaklaşımı kullanacağız. Bu bölümde 2460 kuralı ile verilen 2-D CA için GOE konfigürasyonunun sayısını belirleyeceğiz.

Tanım: S bir kare matris olsun. $P_m(\mathrm{S})$ polinomu aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$P_{-1}(\mathrm{S}) = 0, \;\; P_0(\mathrm{S}) = \mathrm{cI}, \qquad P_m(\mathrm{S}) = 2\mathrm{cS}P_{m-1}(\mathrm{S}) + 2\mathrm{ac}P_{m-2}(\mathrm{S})$$

4.2. Teorem 1. (Sıfır Sınır Şartı Altında Temsili Matrisin GOE Sayısı)*:*

$\mathrm{CA}_{m\times n}$, 2460N kuralıyla verilen 2-D bir hücresel dönüşüm ve B de onun bir konfigürasyonu olsun.

B konfigürasyonu $\mathrm{CA}_{m\times n}$ nin bir GOE dir. $\Leftrightarrow \mathrm{rank}(P_m(\mathrm{S},\mathrm{K})) \neq rank(P_m(\mathrm{S}))$

Burada $K = \sum_{i=1}^{m} P_{m-i}(\mathrm{S})\, B_i$ dir. Ayrıca P ve Q iki tersinir matris olsun. Öyleki $PP_m(\mathrm{S})\mathrm{Q}$ aşağıdaki şekilde bir diagonal matristir.

$$D=(d_{ij})\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Eğer PK sütun matrisi $i \geq f$ (sıfırdan farklı) için ℓ_{i1} bir girdiye sahipse, ki burada $f = \max\{iId_{ii} \neq 0\}$ dir, B $\mathrm{CA}_{m\times n}$ nin bir GOE 'dir.

İspat: $TX = B_{mn\times 1}$ in genişletilmiş matrisi

$$G=\begin{bmatrix} S & cI & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & B_1 \\ aI & S & cI & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & B_2 \\ 0 & aI & S & cI & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & B_3 \\ 0 & 0 & aI & S & cI & 0 & \dots & 0 & 0 & B_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & aI & S & cI & B_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & aI & S & B_m \end{bmatrix}$$

dir. Aşağıdaki gibi yardımcı bir matris belirleyelim.

$$A=\begin{bmatrix} cI & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ S & cI & 0 & 0 & \dots & 0 \\ aI & S & cI & 0 & \dots & 0 \\ 0 & aI & S & cI & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & aI & S & cI \end{bmatrix}_{(m-1)n\times(m-1)n}$$

Bu A matrisinin tersi

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} cI & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2S & cI & 0 & 0 & \dots & 0 \\ cS^2+2aI & 2S & cI & 0 & \dots & 0 \\ 2S^3+2acS & cS^2+2aI & 2S & cI & \dots & 0 \\ cS^4+cI & 2S^3+2acS & cS^2+2aI & 2S & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{m-2}(S) & P_{m-3}(S) & P_{m-4}(S) & P_{m-5}(S) & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(m-1)n\times(m-1)n}$$

elde edilir. Şimdi $TX=B_{mn\times 1}$ genişletilmiş matrisini

$$H=\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & cI \\ & & & 0 \\ & A^{-1} & & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{mn\times mn}$$

matrisi ile soldan çarparsak

$$H.G=\begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & cI \\ & & & & 0 \\ & & A^{-1} & & \vdots \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_{mn\times mn} \times \begin{bmatrix} S & & & & & & B_1 \\ aI & & & & & & B_2 \\ 0 & & & & & & B_3 \\ 0 & & & A & & & B_4 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & & B_{m-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & aI & S & B_m \end{bmatrix}_{mn\times(mn+1)}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & acI & cS & cB_m \\ cS & I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & cB_1 \\ 2S^2+acI & 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 & 2SB_1+cB_2 \\ cS^3+aS & 0 & 0 & I & \dots & 0 & 0 & (cS^2+2aI)B_1+2SB_2+cB_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ SP_{m-2}(S)+aP_{m-3}(S) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I & \begin{matrix} P_{m-2}(S)B_1+ \\ P_{m-3}(S)B_2+ \\ \dots+P_1(S)B_{m-2}+ \\ P_0(S)B_{m-1} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Elemanter satır operasyonları uygulanırsa (1.adım: son satırın "2cS" katını alıp 1. satıra eklemek, 2. Adım (son-1). satırın "2ac" katını alıp 1. satıra eklemek)

$$=\begin{bmatrix} 2cS^2P_{m-2}(S)+ & & & & & & & & \\ acSP_{m-3}(S)+ & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & K \\ 2cP_{m-4}(S) & & & & & & & & \\ 2S & I & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & cB_1 \\ cS^2+2aI & 0 & I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2SB_1+cB_2 \\ 2S^3+2acS & 0 & 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 & (cS^2+2aI)B_1+2SB_2+cB_3 \\ 2S^4+2I & 0 & 0 & 0 & I & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ SP_{m-2}(S)+aP_{m-3}(S) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I & \begin{matrix} P_{m-2}(S)B_1+ \\ P_{m-3}(S)B_2+ \\ \dots+P_1(S)B_{m-2}+ \\ P_0(S)B_{m-1} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Burada $K=\sum_{i=1}^{m}P_{m-i}(\mathrm{S})\,B_i$ dır.

Şimdi bu matrise elemanter sütun operasyonları uygulanırsa (2.sütunun "2cB_1" katını alıp son sütuna eklemek, 3.sütunun "SB_1+2cB_2" katını alıp son sütuna eklemek ve işlemler K matrisinin altındaki tüm ifadeler sıfırlayana kadar uygun çarpımlar yapılıp bu işlemler devam ettirilirse… Ayrıca bu matrisin 1. Sütunu 2c ile çarpılırsa)

$$=\begin{bmatrix} S^2P_{m-2}(S)+ & & & & & & & & \\ 2aSP_{m-3}(S)+ & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & K \\ P_{m-4}(S) & & & & & & & & \\ 2S & I & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ cS^2+2aI & 0 & I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2S^3+2acS & 0 & 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ cS^4+cI & 0 & 0 & 0 & I & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2cSP_{m-2}(S)+2acP_{m-3}(S) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Bu ise

$$M=\begin{bmatrix} P_m(S) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & K \\ P_1(S) & I & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ P_2(S) & 0 & I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ P_3(S) & 0 & 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ P_4(S) & 0 & 0 & 0 & I & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{m-1}(S) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I & 0 \end{bmatrix}$$

matrisine eşittir. P ve Q tersinir matrisler ise öyleki; $PP_m(S)Q$ bir diagonal matrise eşittir. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} P & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I \end{pmatrix}_{mn\times mn} \times M \times \begin{pmatrix} Q & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I \end{pmatrix}_{(mn+1)\times(mn+1)}$$

$$= \begin{pmatrix} PP_m(S) & 0 & 0 & \dots & 0 & PK \\ P_1(S) & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ P_2(S) & 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ P_3(S) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ P_4(S) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{m-1}(S) & 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix}_{(mn)\times(mn+1)} \times \begin{pmatrix} Q & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & I \end{pmatrix}_{(mn+1)\times(mn+1)}$$

olup

$$= \begin{pmatrix} PP_m \text{ S Q} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & PK \\ P_1(S)Q & I & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ P_2(S)Q & 0 & I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ P_3(S)Q & 0 & 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ P_4(S)Q & 0 & 0 & 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{m-1}(S)Q & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix} = (T', B')$$

matrisi elde edilir. $f = \max\{i \text{Id}_{ii} \neq 0\}$ olsun (rank D=f) . $\ell_{ii} \neq 0$ olacak şekilde $i \geq f$ ise $(PP_m(\text{S})\text{Q} = \text{D}, \text{PK} = \text{L})$ bir çözüme sahip değildir. Burada

$$L = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix}$$

dir.

Uyarı: TX=0 homojen lineer denklem sisteminin W çözüm uzayının boyutu n-r dir. Burada n bilinmeyen sayısı ve r katsayılar matrisinin rankıdır. Şimdi eğer D bir sıfır matrisi ise, $L \neq 0$ olması durumunda çözümü hesaplamak için, tüm mümkün durumlardan L=0 durumunu çıkarmak yeterlidir. Bundan dolayı

$$\left|GOE\right| = 3^{mn} - 3^{m(n-r)}$$

dir.

Tanım: S bir kare matris olsun. $P_m(\text{S})$ polinomu aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$P_{-1}(\text{S}^{**}) = 0, \;\; P_0(\text{S}^{**}) = \text{cI}, \qquad P_m(\text{S}^{**}) = 2\text{cS}^{**}P_{m-1}(\text{S}^{**}) + 2\text{ac}P_{m-2}(\text{S}^{**})$$

$$P_x\left(\text{S}^{**}\right) = P_m\left(\text{S}^{**}\right) + 2c\text{S}^{**}P_{m-3}(\text{S}^{**}) + acP_{m-4}(\text{S}^{**})$$

4.3 Teorem 2. (Adiabatic Sınır Şartı Altında Temsili Matrisin GOE Sayısı):

$CA_{m\times n}$, 2460A kuralıyla verilen 2-D bir hücresel dönüşüm ve B de onun bir konfigürasyonu olsun.

B konfigürasyonu $CA_{m\times n}$ nin bir GOE dir. $\Leftrightarrow$ rank$(P_m(S^{**},K^{**})) \neq rank(P_m(S^{**}))$

Burada $K^{**}=\sum_{i=1}^{m} P_{m-i}(S^{**})\,B_i$ dir. Ayrıca P ve Q iki tersinir matris olsun. Öyleki $PP_m(S^{**})Q$ aşağıdaki şekilde bir diagonal matristir.

$$D^{**}=(d_{ij})\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Eğer PK^{**} sütun matrisi $i \geq f$ (sıfırdan farklı) için ℓ_{i1} bir girdiye sahipse, ki burada $f=\max\{i | d_{ii}\neq 0\}$ dir, B $CA_{m\times n}$ nin bir GOE 'dir.

İspat: $TX=B_{mn\times 1}$ in genişletilmiş matrisi

$$G^{**}=\begin{bmatrix} S^{**} & (a+c)I & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & B_1 \\ aI & S^{**} & cI & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & B_2 \\ 0 & aI & S^{**} & cI & 0 & \dots & 0 & 0 & B_3 \\ 0 & 0 & aI & S^{**} & cI & \dots & 0 & 0 & B_4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & aI & S^{**} & cI & B_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & (a+c)I & S^{**} & B_m \end{bmatrix}_{mnxmn}$$

dir . Aşağıdaki gibi yardımcı bir matris belirleyelim.

$$A^{**}=\begin{bmatrix} cI & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \mathrm{S}^{**} & cI & 0 & 0 & \dots & 0 \\ aI & \mathrm{S}^{**} & cI & 0 & \dots & 0 \\ 0 & aI & \mathrm{S}^{**} & cI & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & aI & \mathrm{S}^{**} & cI \end{bmatrix}_{(m-1)n\times(m-1)n}$$

A matrisinin tersinin genel halini yazacak olursak

$$(A^{**})^{-1}=\begin{bmatrix} cI & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2\mathrm{S}^{**} & cI & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c(\mathrm{S}^{**})^2+2aI & 2\mathrm{S}^{**} & cI & 0 & \dots & 0 \\ 2(S^{**})^3+2ac\mathrm{S}^{**} & c(\mathrm{S}^{**})^2+2aI & 2\mathrm{S}^{**} & cI & \dots & 0 \\ c(S^{**})^4+cI & 2(S^{**})^3+2ac\mathrm{S}^{**} & c(\mathrm{S}^{**})^2+2aI & 2\mathrm{S}^{**} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{m-2}(\mathrm{S}^{**}) & P_{m-3}(\mathrm{S}^{**}) & P_{m-4}(\mathrm{S}^{**}) & P_{m-5}(\mathrm{S}^{**}) & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Şimdi $TX=B_{mn\times 1}$ genişletilmiş matrisini

$$H^{**}=\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & cI \\ & & & 0 \\ & (A^{**})^{-1} & & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{mn\times mn}$$

matrisi ile soldan çarparsak

$$=\begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & cI \\ & & & & 0 \\ & & (A^{**})^{-1} & & \vdots \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_{mn\times mn} \times \begin{bmatrix} \mathrm{S}^{**} & (a+c)I & & & & B_1 \\ aI & \mathrm{S}^{**} & & & & B_2 \\ 0 & aI & & & & B_3 \\ 0 & 0 & & A^{**} & & B_4 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & & B_{m-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & (a+c)I & \mathrm{S}^{**} \quad B_m \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c(a+c)I & cS^{**} & cB_m \\ cS^{**} & c(a+c)I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & cB_1 \\ 2(\mathrm{S}^{**})^2+acI & 2a\mathrm{S}^{**} & I & 0 & \dots & 0 & 0 & 2\mathrm{S}^{**}B_1+cB_2 \\ c(\mathrm{S}^{**})^3+a\mathrm{S}^{**} & ac(\mathrm{S}^{**})^2+2I & 0 & I & \dots & 0 & 0 & \begin{matrix}(c(\mathrm{S}^{**})^2+2aI)B_1+\\ 2\mathrm{S}^{**}B_2+cB_3\end{matrix} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{S}^{**}P_{m-2}(\mathrm{S}^{**})+aP_{m-3}(\mathrm{S}^{**}) & \begin{matrix}(a+c)P_{m-2}(\mathrm{S}^{**})+\\ SP_{m-3}(\mathrm{S}^{**})+aP_{m-4}(\mathrm{S}^{**})\end{matrix} & 0 & 0 & \dots & 0 & I & \begin{matrix}P_{m-2}(\mathrm{S}^{**})B_1+\\ P_{m-3}(\mathrm{S}^{**})B_2+\\ \dots+P_0(\mathrm{S}^{**})B_{m-1}\end{matrix} \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Elemanter satır operasyonları uygulanırsa (1.adım: son satırın "2cS" katını alıp 1. satıra eklemek, 2. Adım (son-1). satırın "2ac+2I" katını alıp 1. satıra eklemek…)

$$=\begin{bmatrix} \begin{matrix}2c(\mathrm{S}^{**})^2P_{m-2}(\mathrm{S}^{**})+\\ ac\mathrm{S}^{**}P_{m-3}(\mathrm{S}^{**})+2\mathrm{S}^{**}P_{m-3}(\mathrm{S}^{**})\\ +2aP_{m-4}(\mathrm{S}^{**})+2cP_{m-4}(\mathrm{S}^{**})\end{matrix} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & K^{**} \\ c\mathrm{S}^{**} & c(a+c)I & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & cB_1 \\ 2(\mathrm{S}^{**})^2+acI & 2a\mathrm{S}^{**} & I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2\mathrm{S}^{**}B_1+cB_2 \\ c(\mathrm{S}^{**})^3+a\mathrm{S}^{**} & ac(\mathrm{S}^{**})^2+2I & 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 & \begin{matrix}(c(\mathrm{S}^{**})^2+2aI)B_1\\ +2\mathrm{S}^{**}B_2+cB_3\end{matrix} \\ 2(\mathrm{S}^{**})^4+2I & 2a(\mathrm{S}^{**})^3+2c\mathrm{S}^{**} & 0 & 0 & I & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{S}^{**}P_{m-2}(\mathrm{S}^{**})+aP_{m-3}(\mathrm{S}^{**}) & \begin{matrix}(a+c)P_{m-2}(\mathrm{S}^{**})\\ +\mathrm{S}^{**}P_{m-3}(\mathrm{S}^{**})+\\ aP_{m-4}(\mathrm{S}^{**})\end{matrix} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I & \begin{matrix}P_{m-2}(\mathrm{S}^{**})B_1\\ +P_{m-3}(\mathrm{S}^{**})B_2+\\ \dots+P_1(\mathrm{S}^{**})B_{m-2}\\ +P_0(\mathrm{S}^{**})B_{m-1}\end{matrix} \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Burada $K^{**}=\sum_{i=1}^{m}P_{m-i}\left(\mathrm{S}^{**}\right)B_i$ dır.

Şimdi bu matrise elemanter sütun operasyonları uygulanırsa (3.sütunun "SB_1+2cB_2" katını alıp son sütuna eklemek, 4.sütunun "$\left(2c(\mathrm{S}^{**})^2+aI\right)B_1+$

$S^{**}SB_2 + 2cB_3$" katını alıp son sütuna eklemek ve işlemler K^{**} matrisinin altındaki tüm ifadeler sıfırlayana kadar uygun çarpımlar yapılıp bu işlemler devam ettirilirse. Ayrıca bu matrisin 1. Sütunu 2c ile çarpılırsa)

$$=\begin{bmatrix}
(S^{**})^2P_{m-2}(S^{**}) + 2aS^{**}P_{m-3}(S^{**}) + 2cS^{**}P_{m-3}(S^{**}) + P_{m-4}(S^{**}) + acP_{m-4}(S^{**}) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & K^{**} \\
2S^{**} & c(a+c)I & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & cB_1 \\
c(S^{**})^2 + 2aI & 2aS^{**} & I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
2(S^{**})^3 + 2acS^{**} & ac(S^{**})^2 + 2I & 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
c(S^{**})^4 + cI & 2a(S^{**})^3 + 2cS^{**} & 0 & 0 & I & \dots & 0 & 0 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
2cS^{**}P_{m-2}(S^{**}) + 2acP_{m-3}(S^{**}) & (a+c)P_{m-2}(S^{**}) + S^{**}P_{m-3}(S^{**}) + aP_{m-4}(S^{**}) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I & 0
\end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Şimdi de ikinci sütunu sıfırlamaya çalışalım. (1.Adım: 3.sütunun "aS^{**}" katını alıp 2.sütuna eklemek, 2. Adım: 4. Sütunun "$2ac(S^{**})^2 + I$" katını alıp2. Sütuna eklemek …) İşlemler benzer şekilde devam ettirilirse

$$=\begin{bmatrix}
(S^{**})^2P_{m-2}(S^{**}) + 2aS^{**}P_{m-3}(S^{**}) + 2cS^{**}P_{m-3}(S^{**}) + P_{m-4}(S^{**}) + acP_{m-4}(S^{**}) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & K^{**} \\
2S^{**} & c(a+c)I & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & cB_1 \\
c(S^{**})^2 + 2aI & 0 & I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
2(S^{**})^3 + 2acS^{**} & 0 & 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
c(S^{**})^4 + cI & 0 & 0 & 0 & I & \dots & 0 & 0 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
2cS^{**}P_{m-2}(S^{**}) + 2acP_{m-3}(S^{**}) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I & 0
\end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Bu matrisin ikinci sütunu k sayısı ile çarpılırsa $[k \cdot c(a+c) = 1]$ ve ikinci sütunun "$2cB_1$" katı alınıp son sütuna eklenirse

$$= \begin{bmatrix} (\mathrm{S}^{**})^2 P_{m-2}(\mathrm{S}^{**}) + \\ 2a\mathrm{S}^{**} P_{m-3}(\mathrm{S}^{**}) + \\ 2c\mathrm{S}^{**} P_{m-3}(\mathrm{S}^{**}) + P_{m-4}(\mathrm{S}^{**}) \\ + acP_{m-4}(\mathrm{S}^{**}) \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & K^{**} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2\mathrm{S}^{**} & I & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c(\mathrm{S}^{**})^2 + 2aI & 0 & I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2(\mathrm{S}^{**})^3 + 2ac\mathrm{S}^{**} & 0 & 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c(\mathrm{S}^{**})^4 + cI & 0 & 0 & 0 & I & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2c\mathrm{S}^{**} P_{m-2}(\mathrm{S}^{**}) + 2acP_{m-3}(\mathrm{S}^{**}) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Bu ise

$$M^{**} = \begin{bmatrix} P_x(\mathrm{S}^{**}) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & K^{**} \\ P_1(\mathrm{S}^{**}) & I & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ P_2(\mathrm{S}^{**}) & 0 & I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ P_3(\mathrm{S}^{**}) & 0 & 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ P_4(\mathrm{S}^{**}) & 0 & 0 & 0 & I & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{m-1}(\mathrm{S}^{**}) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I & 0 \end{bmatrix}$$

matrisine eşittir. Burada $P_x(\mathrm{S}^{**}) = P_m(\mathrm{S}^{**}) + 2c\mathrm{S}^{**} P_{m-3}(\mathrm{S}^{**}) + acP_{m-4}(\mathrm{S}^{**})$ dir. P ve Q tersinir matrisler ise öyleki; $PP_x(\mathrm{S}^{**})\mathrm{Q}$ bir diagonal matrise eşittir. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} P & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I \end{pmatrix} \times M^{**} \times \begin{pmatrix} Q & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I \end{pmatrix}_{(mn+1)\times(mn+1)}$$

$$= \begin{pmatrix} PP_x(S^{**}) & 0 & 0 & \dots & 0 & PK^{**} \\ P_1(S^{**}) & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ P_2(S^{**}) & 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ P_3(S^{**}) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ P_4(S^{**}) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{m-1}(S^{**}) & 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Q & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & I \end{pmatrix}_{(mn+1)\times(mn+1)}$$

$$= \begin{pmatrix} PP_x & S^{**}\ \mathrm{Q} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & PK^{**} \\ P_1(S^{**})Q & I & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ P_2(S^{**})Q & 0 & I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ P_3(S^{**})Q & 0 & 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ P_4(S^{**})Q & 0 & 0 & 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{m-1}(S^{**})Q & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix} = (T', B')$$

dir. $f = \max\{i \mathrm{I} d_{ii} \neq 0\}$ olsun (rank D^{**}=f) . $\ell_{ii} \neq 0$ olacak şekilde $i \geq f$ ise $(PP_x(S^{**})\mathrm{Q} = \mathrm{D}, \mathrm{PK}^{**} = \mathrm{L}^{**})$ bir çözüme sahip değildir. Burada

$$L^{**} = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix}$$

dir.

Uyarı: TX=0 homojen lineer denklem sisteminin W çözüm uzayının boyutu n-r dir. Burada n bilinmeyen sayısı ve r katsayılar matrisinin rankıdır. Şimdi eğer D bir sıfır matrisi ise, $L^{**} \neq 0$ olması durumunda çözümü hesaplamak için, tüm mümkün durumlardan L^{**}=0 durumunu çıkarmak yeterlidir. Bundan dolayı

$$\left|GOE\right| = 3^{mn} - 3^{m(n-r)}$$

dir.

Tanım: S* bir kare matris olsun. $P_m(S^*)$ polinomu aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$P_{-1}(S^*) = 0,\ \ P_0(S^*) = cI, \qquad P_m(S^*) = 2cS^*P_{m-1}(S^*) + 2acP_{m-2}(S^*)$$

4.4 Teorem 3. (Refleksive Sınır Şartı Altında Temsili Matrisin GOE Sayısı)

$CA_{m\times n}$, 2460R kuralıyla verilen 2-D bir hücresel dönüşüm ve B de onun bir konfigürasyonu olsun.

B konfigürasyonu $CA_{m\times n}$ nin bir GOE dir. $\Leftrightarrow$ rank$(P_m(S^*, K^*)) \neq rank(P_m(S^*))$

Burada $K^* = \sum_{i=1}^{m} P_{m-i}(S^*)\, B_i$ dir. Ayrıca P ve Q iki tersinir matris olsun. Öyleki $PP_m(S^*)Q$ aşağıdaki şekilde bir diagonal matristir.

$$D^* = (d_{ij}) \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Eğer PK^* sütun matrisi $i \geq f$ (sıfırdan farklı) için ℓ_{i1} bir girdiye sahipse, ki burada $f = \max\{i | d_{ii} \neq 0\}$ dir, B $CA_{m\times n}$ nin bir GOE 'dir.

İspat: : $TX = B_{mn\times 1}$ in genişletilmiş matrisi

$$G^* = \begin{bmatrix} S^* & cI & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & B_1 \\ aI & P^* & cI & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & B_2 \\ 0 & aI & P^* & cI & 0 & \dots & 0 & 0 & B_3 \\ 0 & 0 & aI & P^* & cI & \dots & 0 & 0 & B_4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & aI & P^* & cI & B_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & aI & R^* & B_m \end{bmatrix}_{mn\times mn}$$

dir . Aşağıdaki gibi yardımcı bir matris belirleyelim.

$$A^* = \begin{bmatrix} cI & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ P^* & cI & 0 & 0 & \dots & 0 \\ aI & P^* & cI & 0 & \dots & 0 \\ 0 & aI & P^* & cI & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & aI & P^* & cI \end{bmatrix}_{(m-1)n\times(m-1)n}$$

Bu A^* matrisinin tersi

$$(A^*)^{-1} = \begin{bmatrix} cI & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2P^* & cI & 0 & 0 & \dots & 0 \\ cP^{*2} + 2aI & 2P^* & cI & 0 & \dots & 0 \\ 2P^{*3} + 2acP^* & cP^{*2} + 2aI & 2P^* & cI & \dots & 0 \\ cP^{*4} + cI & 2P^{*3} + 2acP^* & cP^{*2} + 2aI & 2P^* & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{m-2}(P^*) & P_{m-3}(P^*) & P_{m-4}(P^*) & P_{m-5}(P^*) & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(m-1)n\times(m-1)n}$$

elde edilir. Şimdi $T^*X = B_{mn\times 1}$ genişletilmiş matrisini

$$H^* = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & cI \\ & & & 0 \\ & (A^*)^{-1} & & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{mn\times mn}$$

matrisi ile soldan çarparsak

$$H^*.G^* = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & cI \\ & & & & 0 \\ & & (A^*)^{-1} & & \vdots \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_{mn\times mn} \times \begin{bmatrix} S^* & cI & & & & B_1 \\ aI & P^* & & & & B_2 \\ 0 & aI & & & & B_3 \\ 0 & 0 & & A^* & & B_4 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & & B_{m-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & aI \quad R^* & B_m \end{bmatrix}_{mn\times(mn+1)}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & acI & cR^* & cB_m \\ cS^* & I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & cB_1 \\ 2P^*S^* + acI & 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 & 2P^*B_1 + cB_2 \\ cP^*S^{*2} + 2aS^* + 2aP^* & 0 & 0 & I & \dots & 0 & 0 & (cP^{*2} + 2aI)B_1 + 2P^*B_2 + cB_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S^*P_{m-2}(P^*) + aP_{m-3}(P^*) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I & \begin{matrix} P_{m-2}(P^*)B_1 + \\ P_{m-3}(P^*)B_2 + \\ \dots + P_0(P^*)B_{m-1} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Bu matrise elemanter satır ve sütun operasyonları uygulanırsa (son satırın $2cR^*$ katını alıp 1.satıra eklemek,(son-1). Satırın "2acI" katını alıp 1.satıra eklemek…2.sütunun "$2cB_1$" katını alıp son sütuna eklemek, 3.sütunun " $P^*B_1+2cB_2$ " katını alıp son sütuna eklemek…)

$$=\begin{bmatrix} \begin{matrix} 2cR^*S^*P_{m-2}(P^*) + 2acR^*P_{m-3}(P^*) \\ +2acS^*P_{m-3}(P^*) + 2cP_{m-4}(P^*) \end{matrix} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & K_1 \\ cS^* & I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2P^*S^* + acI & 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ cP^*S^{*2} + 2aS^* + 2aP^* & 0 & 0 & I & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ SP_{m-2}(P^*) + aP_{m-3}(P^*) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I & 0 \end{bmatrix}$$

Matrisi elde edilir. Burada S^* matrisinde $a = 0\ ve\ R^*$ matrisinde $c = 0$ olması durumunda S^* ve R^* matrisleri P^* matrisine eşit olur ve bu durum 2460N için yapılan GOE sayısını bulma hesabı ile aynı olur.

Tanım: S bir kare matris olsun. $P_m(S)$ polinomu aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$P_{-1}(S) = 0,\ P_0(S) = cI,\ P_m(S) = 2cSP_{m-1}(S) + 2acP_{m-2}(S)$ ve

$P_y = 2cES(SP_{m-2}(S) + aP_{m-3}(S)) + 2acI(SP_{m-3}(S) + aP_{m-4}(S))$

4.5 Teorem 4. (Periyodik Sınır Şartı Altında Temsili Matrisin GOE Sayısı)

$CA_{m\times n}$, 2460P kuralıyla verilen 2-D bir hücresel dönüşüm ve B de onun bir konfigürasyonu olsun.

B konfigürasyonu $CA_{m\times n}$ nin bir GOE dir. $\Leftrightarrow \text{rank}(P_m(S,K)) \neq rank(P_m(S))$

Burada $K = \sum_{i=1}^{m} P_{m-i}(S)\, B_i$ dir. Ayrıca P ve Q iki tersinir matris olsun. Öyleki $PP_m(S)Q$ aşağıdaki şekilde bir diagonal matristir.

$$D = (d_{ij}) \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Eğer PK sütun matrisi $i \geq f$ (sıfırdan farklı) için ℓ_{i1} bir girdiye sahipse, ki burada $f = \max\{i | d_{ii} \neq 0\}$ dir, B $CA_{m\times n}$ nin bir GOE 'dir.

İspat: $TX = B_{mn\times 1}$ in genişletilmiş matrisi

$$G = \begin{bmatrix} S & cI & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & aI & B_1 \\ aI & S & cI & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & B_2 \\ 0 & aI & S & cI & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & B_3 \\ 0 & 0 & aI & S & cI & 0 & \dots & 0 & 0 & B_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & aI & S & cI & B_{m-1} \\ cI & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & aI & S & B_m \end{bmatrix}$$

dir . Aşağıdaki gibi yardımcı bir matris belirleyelim.

$$A = \begin{bmatrix} cI & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ S & cI & 0 & 0 & \dots & 0 \\ aI & S & cI & 0 & \dots & 0 \\ 0 & aI & S & cI & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & aI & S & cI \end{bmatrix}_{(m-1)n\times(m-1)n}$$

Bu A matrisinin tersi

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} cI & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2S & cI & 0 & 0 & \dots & 0 \\ cS^2+2aI & 2S & cI & 0 & \dots & 0 \\ 2S^3+2acS & cS^2+2aI & 2S & cI & \dots & 0 \\ cS^4+cI & 2S^3+2acS & cS^2+2aI & 2S & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{m-2}(S) & P_{m-3}(S) & P_{m-4}(S) & P_{m-5}(S) & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(m-1)n\times(m-1)n}$$

elde edilir. Şimdi $TX=B_{mn\times 1}$ genişletilmiş matrisini

$$H=\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & cI \\ & & & 0 \\ & A^{-1} & & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{mn\times mn}$$

matrisi ile soldan çarparsak

$$H.G=\begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & cI \\ & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & A^{-1} & & & \vdots \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_{mn\times mn} \times \begin{bmatrix} S & & & & aI & B_1 \\ aI & & & & 0 & B_2 \\ 0 & & & & 0 & B_3 \\ 0 & & & A & 0 & B_4 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & & & & cI & B_{m-1} \\ cI & 0 & \dots & 0 \quad aI & S & B_m \end{bmatrix}_{mn\times(mn+1)}$$

$$=\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & \dots & acI & cS & cB_m \\ cS & I & 0 & 0 & \dots & 0 & acI & cB_1 \\ 2S^2+acI & 0 & I & 0 & \dots & 0 & 2aS & 2SB_1+cB_2 \\ cS^3+aS & 0 & 0 & I & \dots & 0 & acS^2+2I & (cS^2+2aI)B_1+2SB_2+cB_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ SP_{m-2}(S)+aP_{m-3}(S) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & aP_{m-2}(S) & P_{m-2}(S)B_1+\dots+P_1(S)B_{m-2} \\ & & & & & & & +P_0(S)B_{m-1} \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Elemanter satır ve sütun operasyonları uygulanırsa (1. adım: (son-1). satırın "2acI" katını alıp 1. satıra eklemek; 2. Sütunun "2acI" katını alıp (son-1). Sütuna eklemek… sonuncu ve (son-1). sütunu sıfırlamaya çalışıyoruz)

$$= \begin{bmatrix} 2acI(SP_{m-3}(S)+aP_{m-4}(S)) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & cS & \begin{matrix}2acI(SP_{m-3}(S)+\\ aP_{m-4}(S))+cB_m\end{matrix} \\ 2S & I & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ cS^2+2aI & 0 & I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2S^3+2acS & 0 & 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2S^4+2I & 0 & 0 & 0 & I & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ SP_{m-2}(S)+aP_{m-3}(S) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & aP_{m-2}(S) & \begin{matrix}P_{m-2}(S)B_1+\dots\\ +P_1(S)B_{m-2}+\\ P_0(S)B_{m-1}\end{matrix} \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. (Son-1). sütunu E gibi bir matrisle çarparsak

(Öyleki; $E\cdot(aP_{m-2})$ = I olacak şekilde ve sonuncu satırın "2cES" katını alıp ilk sütuna eklersek…)

$$M = \begin{bmatrix} P_y(S) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & K \\ P_1(S) & I & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ P_2(S) & 0 & I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ P_3(S) & 0 & 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ P_4(S) & 0 & 0 & 0 & I & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{m-1}(S) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Burada $K=\sum_{i=1}^{m} P_{m-i}(\mathrm{S})\,B_i$ ve

$P_y = 2cES(SP_{m-2}(S)+aP_{m-3}(S)) + 2acI(SP_{m-3}(S)+aP_{m-4}(S))$

dir. P ve Q tersinir matrisler ise öyleki; $PP_y(\mathrm{S})\mathrm{Q}$ bir diagonal matrise eşittir. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} P & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I \end{pmatrix}_{mn\times mn} \times M \times \begin{pmatrix} Q & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I \end{pmatrix}_{(mn+1)\times(mn+1)}$$

$$= \begin{pmatrix} PP_y(S) & 0 & 0 & \dots & 0 & PK \\ P_1(S) & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ P_2(S) & 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ P_3(S) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ P_4(S) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{m-1}(S) & 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix}_{(mn)\times(mn+1)} \times \begin{pmatrix} Q & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & I \end{pmatrix}_{(mn+1)\times(mn+1)}$$

olup

$$= \begin{pmatrix} PP_y \text{ S Q} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & PK \\ P_1(S)Q & I & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ P_2(S)Q & 0 & I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ P_3(S)Q & 0 & 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ P_4(S)Q & 0 & 0 & 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{m-1}(S)Q & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix} = (T', B')$$

matrisi elde edilir. $f = \max\{i \text{Id}_{ii} \neq 0\}$ olsun (rank D=f) . $\ell_{ii} \neq 0$ olacak şekilde $i \geq f$ ise $(PP_y(\text{S})\text{Q} = \text{D}, \text{PK} = \text{L})$ bir çözüme sahip değildir. Burada

$$L = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix}$$

dir.

Uyarı: TX=0 homojen lineer denklem sisteminin W çözüm uzayının boyutu n-r dir. Burada n bilinmeyen sayısı ve r katsayılar matrisinin rankıdır. Şimdi eğer D bir sıfır matrisi ise, $L \neq 0$ olması durumunda çözümü hesaplamak için, tüm mümkün durumlardan L=0 durumunu çıkarmak yeterlidir. Bundan dolayı

$$\left|GOE\right| = 3^{mn} - 3^{m(n-r)}$$

dir.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

CA birçok bilim dalında geniş çapta incelenen bir kavramdır. CA öngörüsel bir teorem olduğundan dolayı şu anda tıpta, şehir planlamalarında, biyolojide, fizikte ve benzeri alanlarda ilgi duyulan ve çokça kullanılan bir teorem olmuştur. Örneğin, tıpta kanser hücrelerinin gelişimi takip edilebiliyor ve şehir planlamacılığında (İstanbul 2023 Projesi) CA kullanılıyor.

Bu çalışmada daha çok CA kavramının bazı özel lokal kurallar tarafından Adiabatic Sınır Şartı ve Refleksive Sınır Şartı altında üretilen temsili matrislerin elde edilişi incelendi. Ardından erişilemez ve inşa edilemez konfigürasyonlar olan Garden Eden kavramından bahsedildi. Sıfır Sınır Şartı, Adiabatic, Refleksive ve Periyodik Sınır Şartı altındaki temsili matrislerin Garden Of Eden (GOE) sayıları hesaplandı.

5.2. Öneriler

Periyodik Sınır Şartı altında elde edilen temsili matrisin GOE sayısı hesaplanırken bazı şartlar altında Sıfır Sınır Şartı altındaki temsili matrise benzetilerek hesaplandı. Bu durum daha da genişletilebilir ve uygulama alanlarına yer verilebilir. Ayrıca yapılan hesaplamalar algoritmalara dökülerek bilgisayar programlarında GOE sayıları bulunabilir.

5.3. Farklı Çalışma Konuları

Gelecek çalışma konularında 2D CA' ların görüntü alanındaki farklı uygulamaları araştırılması gerekmektedir. Bu anlamda da yine literatüre bakıldığında $\mathbb{F}_p$ cismi için iki boyutlu CA' lar çok az makalede çalışılmıştır. Sadece $\mathbb{F}_2$ ve $\mathbb{F}_3$ cisimleri üzerinde belli sınır koşulları altında bazı çalışmalar yapılmıştır. Bu bölümde farklı sınır koşulları altında CA'lara karşılık gelen matris temsilleri elde edilecek daha sonrada bu matrisler de kullanılarak uygulamalar yapılacaktı.

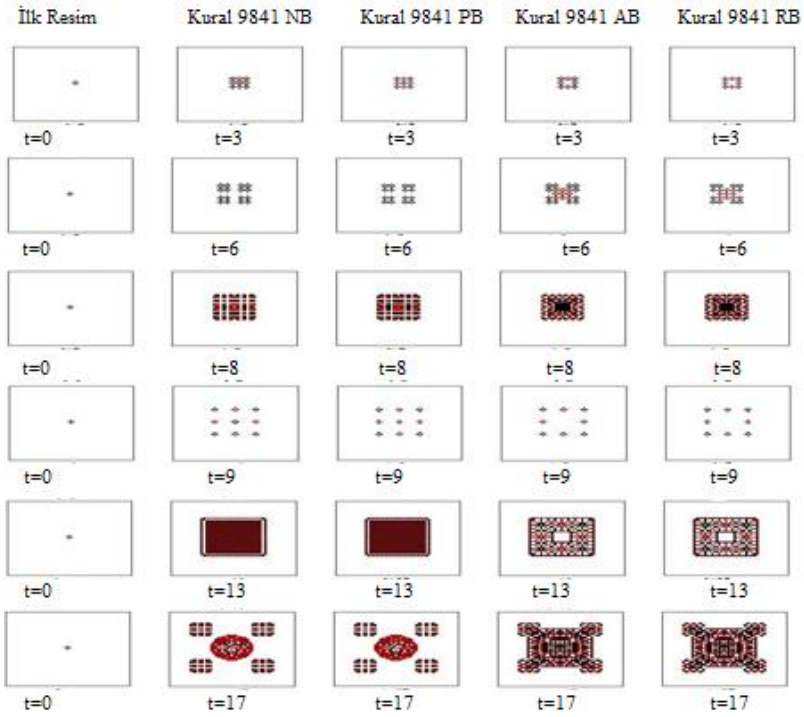
$\Lambda = \begin{bmatrix} (i-1,j+1) & (i,j+1) & (i+1,j+1) \\ (i-1,j) & (i,j) & (i+1,j) \\ (i-1,j-1) & (i,j-1) & (i+1,j-1) \end{bmatrix}$ $(\Lambda \subset \mathbb{Z}^2)$ sonlu örgüsünü göz önüne alalım. Literatüre bakıldığında sonlu 2D CA'lar için yerel kurallar $f: \mathbb{F}_p^{\Lambda} \to \mathbb{F}_p$ olarak tanımlanmıştır. Çoğunlukla$\mathbb{F}_2$ üzerinde ve sınırlı sayıda ise $\mathbb{F}_3$ cismi üzerinde çalışmalar yapılmıştır. Gelecek çalışmalarda sonlu 2D CA'lar iki yönde ilerlenebilir. İlk olarak keyfi $\mathbb{F}_p$ cismi için 2D CA'lar yeni sınıflarının incelenmesidir. İkinci olarak keyfi sonlu $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ alt örgüsü için 2D CA'lar yeni sınıflarını tanımlayarak yeni sonuçlar elde edilmesi problemidir. Önce lineer olanları araştırılması önceliklidir. Şimdiye kadar literatürde bazı lineer olmayan 2D CA'lar incelenmemiş olması bu konunun çalışılması açısından önemlidir. Hedeflenen çalışmalarda lineer olmayan 2D CA'lar yeni ailelerini tanımlayarak, yeni algoritmalar yardımıyla sınıflandırılmalar yapılabilinecektir. Bu sınıflandırmalar sonucunda reversible olup olmadıklarına göre karakterize edilecektir. Sonlu olanların ancak belli koşullarda incelendiği diğer sınır şartları için henüz çalışılmadığı görülmektedir. Ayrıca şimdiye kadar çoğunlukla $\mathbb{F}_2$ cismi üzerinde çalışmalar yapılmıştır (Bakınız siyah-beyaz durumları Şekil 5.1). Bu projemizde önce p asal sayı olmak üzere $\mathbb{F}_p$ cismi üzerinde çalışılacak daha sonra da $\mathbb{F}_{p^k}$ halkası üzerinde çalışılacaktır. Son olarak $m = \prod_{i=1}^{r} {p_i}^{k_i}$ pozitif tamsayısı için $\mathbb{Z}_m$ halkası üzerinde çalışılacaktır.



Şekil 5.1. Farklı 2D CA kuralları ile üretilen bazı simetrik modeller

Sonlu durumda 2D belleksiz CA lar $\Lambda = \begin{bmatrix} (i-1,j+1) & (i,j+1) & (i+1,j+1) \\ (i-1,j) & (i,j) & (i+1,j) \\ (i-1,j-1) & (i,j-1) & (i+1,j-1) \end{bmatrix}$ olmak üzere literatürde şimdiye kadar yerel kuralı $f: \mathbb{F}_p^{\Lambda} \to \mathbb{F}_p$ olarak ele alınmıştır. Gelecek çalışmalarda $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ sonlu kümesinin yarıçapını daha büyüterek yeni farklı bellekli-belleksiz CA'lar tanımlanacaktır. Bu durumda ise temsili matrislerin boyutu çok daha büyümekte ve bu matrislerin terslerinin bulunması çok daha karmaşık bir hale gelmektedir. Bu tür matrislerin tersinir olup olmadıklarını araştırmak başlı başına

araştırma konusu olabilmektedir. Bu tür matrisle sınır şartına bağlı olarak köşegen matris (bazen Toeplitz, dairevi dönme, üçgen matrisleri vb olarak karşımıza çıkmaktadır.)

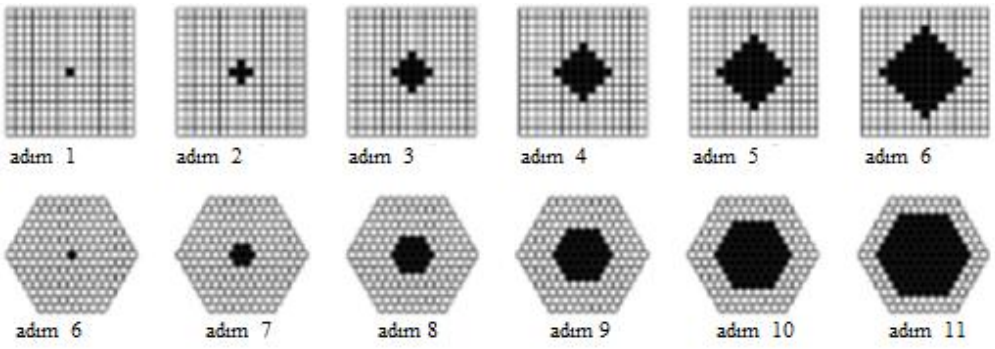


Şekil 5.2. 2D CA ile farklı kural ve sınır koşulları ile görüntü kopyalama

2D CA ile farklı kural ve sınır koşulları ile farklı modeller elde edilmektedir. Şekil 5.2 de görüldüğü üzere ilk sütun görüntünün ilk hali iken ikinci sütunda sıfır sınır şartı altındaki durumu, üçüncü sütun periyodik sınır şartı, dördüncü sütun adiabatic sınır şartı ve son sütun refleksive sınır şartı altında bir modelin sırasıyla t=3, t=6, t=8, t=9, t=13 ve t=17 anındaki modelleri gösterilmiştir. Başka bir örnek verecek olursak; Şekil 4.3 te de sırasıyla sıfır sınır şartı, periyodik sınır şartı, adiabatic ve refleksive sınır şartları altında bir modelin belirli t anlarındaki durumu gösterilmiştir.

Mikroskobik seviyede kristaller cellular automata' daki gibi düzenli atom dizileri içerirler. Bir sıvı ya da gaz donma noktasının altına kadar soğutulduğunda kristal

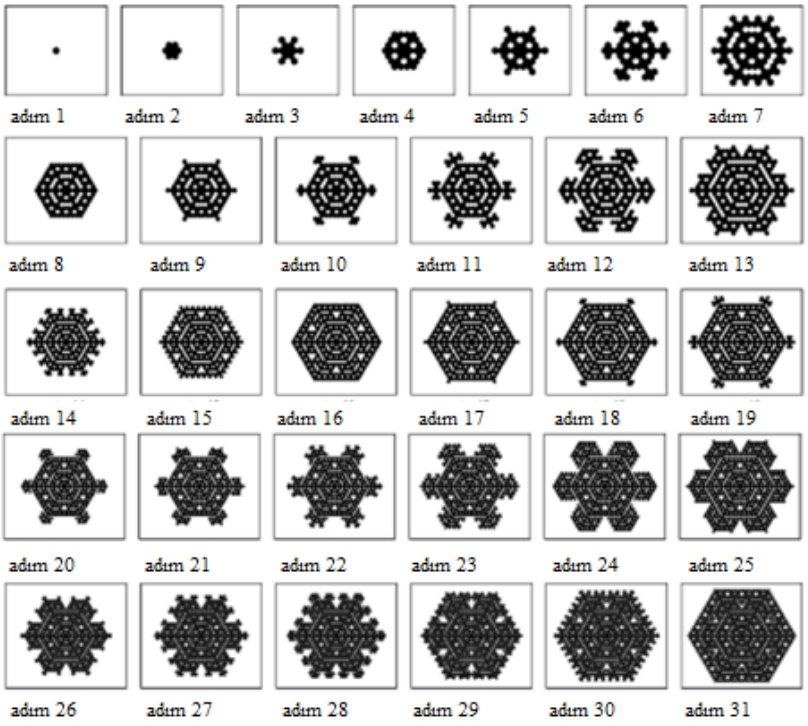
şekli oluşur. Kristaller genelde tanecik veya toz gibi bir çekirdekten başlayarak yüzeylerine atomlar ilave edilmesiyle gelişirler.



Şekil 5.3. Sıvı ya da gazın donma noktasının altına kadar soğutulduğunda oluşan kristal şekil

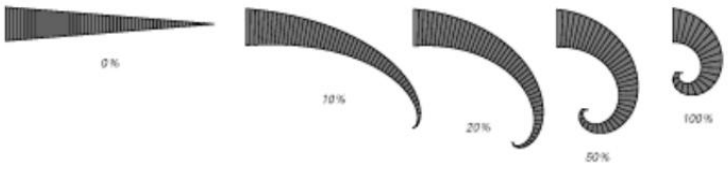
Bitişiğinde siyah bir kutu olan bir hücrenin bir sonraki aşamada siyah olduğu bir kurala sahip bir sistemin gelişimi yukarıdaki şekillerde görülmektedir (Şekil 5.3).

Alttaki şekilde ise (Şekil 5.4) komşularından sadece birisi siyah olduğunda bir sonraki adımda kendisi siyah olmalı kuralıyla elde edilmiş Cellular Automata (CA) örneğinin ilk 31 adımı görülmektedir. Bu cellular automata'nın farklı adımları dikkate değer bir şekilde gerçek kar tanelerine benzemektedir.



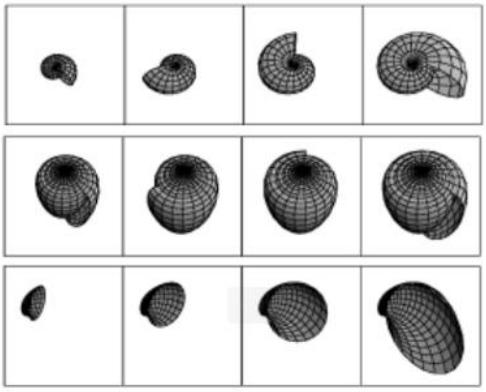
Şekil 5.4. Kar tanesinin 31 adımda gerçekleşen görüntüsü

Hayvan boynuzunda bitkilerdeki gibi dallanma olmaz; ancak kıvrılma söz konusudur. Dümdüz bir boynuz elde etmek için kökün her tarafına eklenen malzeme oranı aynı olmalıdır. Eğer bir farklılık olursa aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi kıvrılmalar olur.



Şekil 5.5. Kökün uçlarına eklenen malzemenin oranına göre boynuzdaki kıvrılma

Şekilden de anlaşılacağı üzere bir tarafa eklenen malzeme oranı ne kadar fazla olursa kıvrılma o derece fazla olmaktadır. Yukarıdaki kıvrılmanın üç boyuttaki benzeri bazı kabuklu hayvanlarda görülmektedir.



Şekil 5.6. Hayvanın kabuğunun açık ucuna kabuk eklenmektedir.

Alttaki şekilde ise (Şekil 5.7) bu hayvanların gerçek resimleri görülmektedir.



Şekil 5.7. Belli kurallar altında oluşan hayvan kabukları

Başlıca farklı araştırma konuları şu şekilde sunulabilir.

i- 2D CA teorisi (2D CA-CAM theory and structure: linear, nonlinear CA, CA rules, matrix representation, reversibility, different algebraic sets, space-time diagrams, etc)

ii- 2D CA teorisi ve görüntü işleme uygulamaları (2D CA theory and image applications: image compression and resizing; skeletonization, erosion and dilation; convex hull computation, edge detection and segmentation; pattern generation*)*

iii-2D CA teorisi ve farklı uygulamaları (2D CA theory with different applications: epidemics, disease spreads, medicine, etc.)

KAYNAKLAR

ANDREWS, G., 2006. Cellular Automata and Applications.

AYAZLI, İ. , BATUK, F., ve DEMİR, H., 2011. Kentsel Yayılma Simülasyon Modelleri ve Hücresel Otomat , TMMOB Harita ve Kadastro Mühendisleri Odası 13. Türkiye Harita Bilimsel ve Teknik Kurultayı 1822, Ankara.

BATTY, M., 2007. City and Complexity: Understanding Cities with Cellular Automata, AgentBased Models, and Fractals, The MIT Press Cambridge.

DAVIS, M., 2000. The Universal Computer: The Road from Leibniz to Turing. New York: Norton.

HEDLUNG, G. A., 1969. Endomorphisms and automorphisms of full shift dynamica dynamical system, Mathematical Systems Theory **3**, p. 320

KARL, J., 2005. Cellular Automata: Tutorial, Department of Mathematics, University of Turku, Finland TUCS(Turku Centre for Computer Science), Turku, Finland

KLAUS, S., Classsification of Cellular Automata, Carnegie Mellon University Pittsburgh, PA 15213

LEIGH, T., 2004. What are Cellular Automata (CA) Illustrative Examples.

MITCHELL, M., SANTA, F.E.I., 1998. Computation in Cellular Automata, 1399 Hyde Park Road, In T. Gramss, S. Bornholdt, M. Gross, M. Mitchell, and T. Pellizzari, Nonstandard Computation, pp. 95–140. Weinheim: VCH Verlagsgesellschaft.

SCHIFF, J.L., 2008. Cellular Automata: A Discrete View of the World, Wiley & Sons, Inc. Hoboken, New Jersey.

SIAP, I., AKIN, H., ŞAH, F., 2011, Characterization of two dimensional cellular automata over ternary _elds, Journal of the Franklin Institute, 348

SIAP, I., AKIN, H., and ŞAH, F., 2010. Garden of eden conFgurations for 2-D cellular automaton with rule 2460N, Information Sciences **180**, p. 3562,.

SIAP, I., AKIN, H., and ŞAH F., 2011. Structure and reversibility of 2-dimensional hexagonal cellular automata, Computers Mathematics with Applications **62**, p. 4161,

UGUZ, S., SAHIN, U., AKIN, H. and SIAP, I., 2014. Self replicating patterns 2D linear cellular automata, International Journal of Bifurcation and Chaos (IJBC) vol.24 no:1.

UGUZ, S., SAHIN, U. and SAHIN, F., 2014. Salt and pepper noise filtering CA, Computers and Electrical Engineering, Vol. 40 p.59-69.

UGUZ, S., SAHIN, U., AKIN, H. and SIAP, I., 2014. 2D cellular automata with an image processing application, Acta Physica Polonica A, 125.

UGUZ, S., SAHIN, U., AKIN, H., 2015. The transition rules of 2D linear cellular automata over ternary field and self-replicating patterns, International Journal of Bifurcation and Chaos, vol 26.

UGUZ, S., SAHIN, U., AKIN, H. and SIAP, I., 2015. Three states von Neumann cellular automata and pattern generations, Applied Mathematical Modelling, V Volume 39,Issue 7, 1 April 2015, Pages 2003-2024.

UGUZ, S., SAHIN, U. and SAHIN, F., 2015. Edge Detection with Fuzzy Cellular Automata transition function optimized by PSO, kabul edildi, Computers and Electrical Engineering

Vikipedi , http://www.wolframscience.com/
Vikipedi, http://tr.wikipedia.org/wiki/Conway%27in_Hayat_Oyunu.
Vikipedi , http://www.math.com/students/wonders/life/life.html
Vikipedi , http://www.bitstorm.org/gameoflife/
Vikipedi, www.circassiancenter.com
Vikipedi http://www.wolframscience.com/
WOLFRAM, S., 2002. A New Kind of Science. Champaign, IL: Wolfram Media
YING, Z., ZHONG, Y., and PEI-MIN, D., 2000. On behavior of two-dimensional cellular automata with an exceptional rule.
YÜZER, M. , ve YÜZER, Ş., 2006. Cellular Automata Tabanlı Lucam Modeli İle İstanbul' un Gelişim Ve Dönüşümüne İlişkin Makro Form Simülasyonları, Journal of Istanbul Kültür University. s. 231-244.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Esra AYATA
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : Siverek, 01/01/1991
Telefon : 05426598678
e-mail : iesarey_ayata@hotmail.com

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
İlköğretim	: Gazipaşa İlköğretim O. Siverek, Şanlıurfa	2004
Lise	: Siverek Anadolu Lisesi, Siverek, Şanlıurfa	2008
Üniversite	: Mustafa Kemal Üniversitesi, Matematik Bölümü, Hatay	2013
Yüksek Lisans:	Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Şanlıurfa	2015

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2013-2014	Selçuk İlköğretim Okulu	Öğretmen
2015	Bilgi Evi	Öğretmen

UZMANLIK ALANI

Cebir ve Sayılar Teorisi

YABANCI DİL

İngilizce