



T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ MERTEBEDEN POPÜLASYON MODELLERİNİN ÇÖZÜMÜ

Hülya ALTUNTAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalını

Haziran-2015
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I here by declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Hülya ALTUNTAŞ

Tarih:

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİRLİ MERTEBEDEN POPÜLASYON MODELLERİNİN ÇÖZÜMÜ

Hülya ALTUNTAŞ

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Hasan KÖSE

2015, 59 Sayfa

Jüri

Prof. Dr. DURMUŞ BOZKURT

Prof. Dr. GALİP OTURANÇ

Yrd. Doç. Dr. Hasan KÖSE

Bu çalışmada kesirli mertebeden popülasyon modeli analiz edilmiş, farklı durumlar için elde edilen kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin, Diferansiyel Dönüşüm Metodu (DTM) ile çözümü yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar Homotopi Perturbasyon Metodu (HPM) ve Varyasyonel İterasyon Metodu (VIM) kullanılarak elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kesirli mertebeden popülasyon modeli; Diferansiyel Dönüşüm Metodu; Kesirli Mertebeden Türev; Nüfus Modeli.

ABSTRACT

MS THESIS

SOLUTION OF THE FRACTIONAL ORDER POPULATION MODELS

Hülya ALTUNTAŞ

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE DEPARTMANT OF MATHEMATİCS

Advisor: Assist. Prof. Dr. Hasan KÖSE

2015, 59 Pages

Jury

Prof. Dr. DURMUŞ BOZKURT

Prof. Dr. GALİP OTURANÇ

Assist. Prof. Dr. Hasan KÖSE

In this paper, we have introduced fractional ordered population model which has been solved with the help of differantial transformation methot (D.T.M) for different cases. This paper represents a comparison between D.T.M, H.P.M and V.I.M for solving our fractional-ordered population model dor different fractional orders.

Keywords: Prey-Predator Population Model, Fractional Ordered Derivative, Population Model

ÖNSÖZ

Son yıllarda pek çok bilimsel çalışma matematik modellemeler oluşturularak yapılmaktadır. Matematik modelleme ise denklemlere dayalı kurgulardır. Kullanılan denklemler, üzerinde çalışılan probleme göre lineer denklemlerden diferansiyel denklemlere kadar farklılık göstermektedir. Nüfus modellemelerinde daha çok diferansiyel ve fark denklemlerden yararlanılır.

Şimdilerde ise kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerle kurulan nüfus modellemelerinin çözüm yöntemleri matematikçiler arasında oldukça dikkat çekmektedir. Bu çalışmada da kesirli mertebeden nüfus modellerinin çözümleri H.P.M, V.I.M ve D.T.M ile yapılmış ve elde edilen çözümler karşılaştırılmıştır.

Çalışmanın ilk bölümünde tezin yapılma amacı ve bu alanda yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir. İkinci bölümünde kesirli türev ve kesirli integral kavramları açıklanarak kesirli diferansiyel denklem tanımı yapılmıştır. Üçüncü bölümde yaklaşık çözüm yöntemleri anlatılmış ve dördüncü bölümde de kesirli mertebeden nüfus modelinin kuruluşu anlatılmıştır. Modelin kuruluşunda Lotka-Voltera denklemi ve lojistik denklemler dikkate alınmıştır. Beşinci bölümde nüfus modeli farklı yaklaşık çözüm metotları ile çözülerek son bölümde çözümler karşılaştırılmıştır.

Bu tezi hazırlamamda bana yol gösterip yardımlarını esirgemeyen başta danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Hasan KÖSE'ye, Doç. Dr. Yıldıray KESKİN 'e ve Prof. Dr. Durmuş BOZKURT çok teşekkür ederim.

Hülya ALTUNTAŞ
KONYA-2015

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

1. GİRİŞ **1**

1.1. Amaç ve Kapsam 1
1.2. Kaynak Araştırması 2

2. KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER **3**

2.1. Diferansiyel Denklem 3
2.2. Kesirli Diferansiyel Denklem 3
2.3. Kesirli Türev-Kesirli İntegral 4
2.3.1. Gamma Fonksiyonu 4
2.3.2 Kesirli İntegral 5
2.3.3. Riemann –Liouville Kesirli Türevleri 5
2.3.4. Caputo Kesirli Türevi 5

3. DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ **7**

3.1. Diferansiyel Dönüşüm Metodu: 7
3.1.1. Genelleştirilmiş Taylor Formülü: 7
3.1.2. Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi 8
3.2. Homotopi Perturbasyon Metodu 9
3.3. Varyasyonel İterasyon Yöntemi: 13

4. KESİRLİ POPÜLASYON MODELİ **15**

4.1. Matematik Model 15
4.2. Lojistik Denklem 16
4.3. Lotka-Voltera Denklemi 16
4.4. Kesirli Popülasyon Modeli 17
4.4.1. Model Kuruluşu 18

5. KESİRLİ MERTEBEDEN POPÜLASYON MODELLERİNİN ÇÖZÜMÜ **21**

5.1. Modelin Diferansiyel Dönüşüm Metodu (D.T.M) İle Çözümü 21
5.2. Modelin Homotopi Perturbasyon Metodu (H.P.M) ile Çözümü 25
5.3. Modelin Varyasyonel İterasyon Metodu (V.I.M) ile Çözümü 31

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER **35**

6.1 Sonuçlar 35
6.2 Öneriler 40

KAYNAKLAR 41

EKLER 44

ÖZGEÇMİŞ 51

1. GİRİŞ

1.1. Amaç ve Kapsam

Fen ve sosyal bilimlerin pek çok alanında matematik modellemeler oluşturulmaktadır. Matematik modelleme en genel anlamda hayata dair her somut ve soyut bilginin matematiksel olarak ifade edilmesi sürecidir. Matematiksel modelleme sürecinde verilenleri kullanarak bir çözüme ulaşma, çözümü gerçek hayat durumuyla karşılaştırma, eğer yeterli değilse çözümü geliştirme veya daha farklı bir çözüm geliştirme gibi birden fazla döngü vardır. Matematiksel modelleme sürecinde bahsedilen modelleme döngüsü, yani modellemenin döngü içeren bir süreç olduğu fikri, modelleme yaklaşımlarında gözlemlenen ortak fikir olarak karşımıza çıkmaktadır (Zbiek ve Conner, 2006).

Biyoloji ve istatistik alanlarında karşımıza çıkan nüfus modelleri ise daha çok diferansiyel denklemlerle karşımıza çıkmaktadır. Bu denklemlerin çözümleri genel olarak analitik yöntemlerle yapılmakta idi. Ancak birçok denklemin analitik çözümle elde edilemeyen sonuçları için, sayısal metotlarla elde edilen yaklaşık çözümler ortaya çıkmıştır. Son yıllarda ise oluşturulan matematik modellerin önemli bir kısmı kesirli mertebeden denklemlerle ifade edilmektedir. Bu şekilde kurulan denklemlerin çözümü için ise yaklaşık çözüm metotları geliştirilmiştir. Bu metotlar, Adomian Ayrışım Metodu, Homotopi Perturbasyon Metodu, Varyasyonel İterasyon Metodu, Homotopi Analiz Metodu, Diferansiyel Dönüşüm Metodu, Sonlu Farklar Metodu, Kesirli Lineer Adım Toplama Metodu, Ekstrapolasyon Metodu ve Belirleyici-Doğrulayıcı Metot olarak ifade edilebilir.

Diferansiyel Dönüşüm Metodu kesirli mertebeden hesaplamalar için oldukça pratik bir metot olarak karşımıza çıkmaktadır. Diferansiyel denklemlerin cebirsel denklemlere dönüştürülmesi temeline dayanan bu yöntem bilgisayar programlamasına da daha uygundur.

Bu çalışmada kesirli mertebeden Lojistik Avcı-Av Modeli üzerinden hesaplamalar yapılarak Diferansiyel Dönüşüm Metodu (DTM) , Varyasyonel İterasyon Metodu (VIM) ve Homotopi Perturbasyon Metodu (HPM) çözümleri Mapple programı kullanılarak oluşturulan grafiklerle karşılaştırılmıştır.

1.2. Kaynak Araştırması

Diferansiyel Dönüşüm Yöntemini ilk olarak Zhou (1986) çalışmasında, elektrik devre analizlerinde otaya çıkan lineer ve lineer olmayan başlangıç değer problemlerini çözmek için ortaya koymuştur. Chen, C.K., Ho, S.H.(1996) ise çalışmasında, diferansiyel dönüşüm (DT) metodunu özdeğer problemlerine uygulamıştır. Daha sonra Chen, C.K., Ho, S.H.; (1999) yalnızca adi türevli diferansiyel denklemler için uygulanabilen diferansiyel dönüşüm metodunu, bu çalışmayla birlikte ilk olarak kısmi türevli diferansiyel denklemlere genişletmiş olup bunun için iki boyutlu diferansiyel dönüşümü tanımlamıştır. Ayrıca Jang, M.J., Chen, C.L., Liu, Y.C.;(2000) çalışmalarında, ilk olarak lineer ve lineer olmayan başlangıç değer problemleri gridler yardımıyla diferansiyel dönüşüm yöntemi kullanarak çözmüşlerdir. Benzer olarak, Bor-Lih Kuo (2005) Serbest Konveksiyon Problemini diferansiyel dönüşüm yöntemini kullanarak çözmüştür. Oturanç G., Kurnaz A., Keskin Y.(2007). çalışmalarında kesirli türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerine yönelik yeni bir yaklaşık analitik metot sunmuşlardır. Ayrıca Kurnaz A.,Keskin Y., Oturanç G. (2007) çalışmalarında lineer

olmayan kesirli türevli diferansiyel denklem sistemlerine ve lineer çok terimli diferansiyel denklemlerin çözümlerine yönelik yeni bir yaklaşık analitik metodunu sunmuşlar, verilen teknikle ilgili problem çözümleri verilmiştir. I.H. Abel-Halim Hasan (2008) ise diferansiyel denklem sistemlerinin çözümleri için diferansiyel dönüşüm yöntemini kullanmış ve analitik çözümle karşılaştırmıştır. Diferansiyel dönüşüm yönteminin lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklem sistemleri için daha güçlü bir araç olduğunu ortaya koymuştur.

Bu çalışma Swarnalı Sharma ve ,G.P. Samanta (2010) Avcı-Av Popülasyon Modelinin Analizi adlı makale esas alınarak hazırlanmıştır.

2. KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

2.1. Diferansiyel Denklem

Pek çok bilim dalında uygulama problemlerinde ortaya çıkan denklemler genel olarak diferansiyel denklemlerdir. Diferansiyel denklemler bilinmeyen bir fonksiyon ve bu fonksiyonun türevlerini içeren denklemler olarak tanımlanır. Bir diferansiyel denklemde bir veya daha fazla sayıda bağımlı değişken olmasına karşın eğer yalnız bir bağımsız değişken varsa bu denkleme *adi türevli diferansiyel denklem* denir. Birinci mertebeden adi diferansiyel denklemler;

$$F\left(x,y,y'\right)=0 \Leftrightarrow F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0$$

ve ya

$$y'=f\left(x,y\right) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=f\left(x,y\right)$$

biçimindedir.

n. mertebeden adi diferansiyel denklemler;

$$F\left(x,y,y',y'',...,y^{(n)}\right)=0 \Leftrightarrow F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},...,\frac{d^ny}{dx^n}\right)$$

ve ya

$$y^{(n)}=\left(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)}\right) \Leftrightarrow \frac{d^ny}{dx^n}=f\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},...,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

biçimindedir.

Bir diferansiyel denklem, bir tek bağımlı değişkenin iki veya daha fazla sayıda bağımsız değişken cinsinden türevlerini içeriyorsa bu denkleme *kısmi türevli diferansiyel denklem* denir.

2.2. Kesirli Diferansiyel Denklem

Matematik modelleri betimleyen diferansiyel denklemlerin dereceleri, ele alınan modelde bir değişim hızı belirlemektedir. Tamsayı dereceden diferansiyel denklemlerin, bazı modellemeleri açıklamaktaki zayıflıklarından dolayı, bu noktada kesirli dereceden diferansiyel denklemlere ihtiyaç duyulmuştur. Modelin karakterinin anlaşılmasında da kesirli diferansiyel denklemler büyük bir rol oynamaktadır.

Kesirli diferansiyel denklem kendi isminden de anlaşılacağı üzere türev ve integralin tam olmayan derecelere genişletilmiş şeklidir. Konu diferansiyel hesap kadar eski olup, Leibniz ve Newton'un diferansiyel hesaplama tekniğine kadar uzanır. (Bayın S.2004)

Bir fonksiyonun birinci, ikinci, üçüncü, vs. türevlerinin nasıl alındığını biliyoruz, ancak 4/3 üncü türevini nasıl alabiliriz?

Aynı, şekilde fonksiyonu iki ya da üç defa integre edebiliriz, fakat 1/2 defa integre edebilir miyiz? Leibniz'in 1695 te L.Hospital a sorduğu "Tamsayı basamaktan türevler kesirli basamaktan türevlere genişletilebilir mi?" sorusu kesirli diferansiyelin çıkış tarihi olarak gösterilebilir. Leibniz'in yanı sıra Liouville, Riemann, Weyl, Lagrange, Laplace, Fourier, Euler, Abel gibi birçok matematikçi de bu konu üzerine çalışmışlardır. (Loverro A.2004)

Kesirli diferansiyel denklemler diferansiyel denklemlerle kurulan birçok matematik modelden daha hassas modelleme problemlerinde özellikle popülasyon modellerinde karşımıza çıkmaktadır.

2.3. Kesirli Türev-Kesirli İntegral

Kesirli mertebeden türev veya integral hesaplarının yapılabilmesi için gama fonksiyonunu tanımlamak gerekir.

2.3.1. Gamma Fonksiyonu

Gamma fonksiyonu, kesirli diferansiyel ile doğrudan ilişkilidir. Gamma fonksiyonunun en basit anlamı faktöriyelin bütün reel sayılar için genelleştirilmesidir. $\Gamma(x)$ ile göstereceğimiz gamma fonksiyonu:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

genelleştirilmiş integrali ile tanımlanır. Gamma fonksiyonuna faktöriyel fonksiyonu da denir.

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt$$

genelleştirilmiş integrali yardımıyla

$$n! = \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

olur.

2.3.2 Kesirli İntegral

Literatürde, kesirli mertebeden integralin en sık karşılaşılan açıklaması aşağıda verilen **Riemann-Liouville** integralidir.

$$J^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt$$

Burada $\alpha > 0$, $\alpha \in R$ *ve* $n-1 \le \alpha \le n,$ $n \in Z$ ‘ dir.

2.3.3. Riemann –Liouville Kesirli Türevleri

$${}_aD_x^{\alpha} f(x) = {}_aD_x^{\alpha}\, {}_aJ_x^{m-\alpha} f(x) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{d^m}{dx^m}\left[\dfrac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \displaystyle\int_0^x (x-u)^{m-1-\alpha} f(u) du \right] & m-1 \le \alpha \le m \\ \dfrac{d^m}{dx^m} f(x) & \alpha = m \end{cases}$$

eşitliği ile verilen kesirli türev tanımı “Riemann-Liouville” tanımıdır. D^{α} sembolünün anlamı, eğer $\alpha \le 0$ ise q defa integrasyon, $\alpha > 0$ ise α defa diferansiyeldir. ${}_aD_x^{\alpha}$ Riemann-Liouville kesirli türev operatörüdür.

2.3.4. Caputo Kesirli Türevi

Bir $f(x)$ fonksiyonunun Caputo kesirli türevi şu şekilde tanımlanır:

$${}_aD_*^{\alpha} f(x) = {}_a J_x^{m-\alpha}\, {}_aD_x^{m} f(x) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \displaystyle\int_a^x \frac{f^{(m)}}{(x-u)^{\alpha+1-m}} du & m-1 < \alpha < m \\ \dfrac{d^m}{dx^m} f(x), & \alpha = m \end{cases}$$

Burada $m-1<\alpha\le m$, $m\in N$, $x>0$, $f\in C_{-1}^{m}$ dir.

Özellikleri

1- $D_{*}^{\alpha}f(x)=J^{m-\alpha}D^{m}f(x)\neq D^{m}J^{m-\alpha}f(x)=D^{\alpha}f(x)$

2- $D_{*}^{\alpha}f(x)=D^{\alpha}\left(f(x)-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{x^{k}}{k!}f^{(k)}(0^{+})\right)$

3- $\lambda_1,\lambda_2\in R$ olmak üzere

$$D_{*}^{\alpha}(\lambda_1 f(x)+\lambda_2 g(x))=\lambda_1 D_{*}^{\alpha}f(x)+\lambda_2 D_{*}^{\alpha}g(t)$$

eşitliğinde görüldüğü gibi Caputo kesirli türevinin **lineerlik özelliği** vardır.

4- $D_{*}^{\alpha}D_{*}^{\beta}f(x)=D_{*}^{\alpha+\beta}f(x)=D_{*}^{\beta}D_{*}^{\alpha}f(x)$

5- $D_{*}^{\alpha}(x^{n})=\begin{cases}0 & ,n<m\ ,n\in N\\ \dfrac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\alpha)}x^{n-\alpha} & ,n\ge m\ ,\ n\in N\end{cases}$

6- $D_{*}^{\alpha}c=0$ (c sabit)

7- $D_{*}^{\alpha}J^{\alpha}f(x)=f(x)$

8- $J^{\alpha}D_{*}^{\alpha}f(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{x^{k}}{k!}f^{(k)}(0^{+})$, $m-1<\alpha\le m$, $m\in N$ ve $f\in C_{\mu}^{m}$, $\mu\ge -1$

Kesirli hesap (kesirli türev, kesirli integral) kullanılarak oluşturulan modellemeler kesirli diferansiyel denklemler olarak karşımıza çıkmaktadır. Örneğin;

$$\frac{dy}{dt}+D_{*}^{0,5}-2y^{2}=0\quad ,\quad y(0)=1$$

başlangıç koşul problemi, bir lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemdir.

3. DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Bu bölümde diferansiyel denklemleri cebirsel denklemlere dönüştürerek yaklaşık çözümler elde etmeyi hedefleyen metotlarından üç tanesini, Diferansiyel Dönüşüm Metodu (D.T.M.), Homotopi Perturbasyon Metodu (H.P.M.) ve Varyasyonel İterasyon Yöntemi (V.I.M.) hakkında kısaca bilgi verilecektir.

3.1. Diferansiyel Dönüşüm Metodu:

Diferansiyel dönüşüm metodu, seri formda hemen hemene analitik çözümler kurar. Sonsuz seri çözüm kapatılabildiği takdirde analitik çözüm fonksiyonuna ulaşılmış olur. Bu metot ile diferansiyel denklemler dönüştürülebilir ve elde edilen cebirsel denklemler de bazı basit işlemlerle kolaylıkla sistematik bir şekilde çözülebilir. Kesirli diferansiyel denklemlerin çözümü için genelleştirilmiş Taylor formülünden yararlanılır.

Burada, literatürde mevcut olan tek boyutlu, iki boyutlu ve n boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi hakkında bilgi verilecektir (Zhou 1986, Chen 1996, Ayaz, 2003, Kurnaz 2005).

Bu yöntem, tek değişkene bağlı diferansiyel denklemlerin çözümleri için kullanılır.

3.1.1. Genelleştirilmiş Taylor Formülü:

Kabul edelim ki; ${}_aD_*^{k\alpha} f(t) \in C(a,b]$ $\quad k = 0,1,2,...,n+1$ $\quad 0 < \alpha \le 1$ olsun. Bu durumda;

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(t-a)^{ia}}{\Gamma(i\alpha+1)} \left[D_*^{i\alpha} \right]_{t=a} + R_n^{\alpha}(t,a)$$

ifadesi Genelleştirilmiş Taylor Formülü olarak adlandırılır. Burada;

$$R_n^{\alpha}(t,a) = \frac{(t-a)^{(n+1)\alpha}}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} \left[{}_aD_*^{(n+1)\alpha} f(t) \right]_{t=\xi}, \ \xi \in [a,t], \ \forall t \in (a,b] \quad \text{dır.}$$

Ayrıca $D_*^{n\alpha} = D_*^{\alpha} D_*^{\alpha} ... D_*^{\alpha}$ $\quad (n \ \ defa)$ ifade etmektedir.

Tanım 3.1.1.:

Tek değişkenli $u(x)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $U(k)$ olmak üzere, $u(x)$ ' nin tek boyutlu diferansiyel dönüşümü

$$U(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}u(x)\right]_{x=0} \qquad (3.1.1)$$

olarak tanımlanır. (G. Oturanç, Y. Keskin 2011)

Tanım 3.1.2.:

Diferansiyel ters dönüşüm fonksiyonu, $U(k)$ dönüşüm fonksiyonunun tersini ifade eder ve

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}U(k)x^k \qquad (3.1.2)$$

biçimde tanımlanır. (3.1.1) eşitliğinde (3.1.2) ifadesi yazılarak aşağıdaki (3.1.3) eşitliği elde edilir.

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}u(x)\right]_{x=0}x^k \qquad (3.1.3)$$

(Chen ve Ho 1996, Chen ve Liu 1998, Chen ve Ho 1999, Abdel-Halim 2004, Arikoglu ve Özkol 2004):

3.1.2. Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Bir $y(t)$ fonksiyonunun kesirli diferansiyel dönüşümü şu şekilde tanımlanır;

$$Y_\alpha(\mathrm{k})=\frac{1}{\Gamma(\alpha k+1)}\left[D_*^{k\alpha}y(t)\right]_{t=t_0} \qquad 0<\alpha\le 1\ ,\ k=0,1,2,... \qquad (3.1.1.1.)$$

Burada $D_*^{k\alpha}=D_*^{\alpha}D_*^{\alpha}...D_*^{\alpha}$ (k defa) olarak ifade edilir.

$\{Y_\alpha(k)\}_{k=0}^{\infty}$ serisinin kesirli diferansiyel dönüşümünün tersi ise;

$$y(\mathrm{t})=\sum_{k=0}^{\infty}Y_\alpha(k)(t-t_0)^{k\alpha} \qquad (3.1.1.2.)$$

olarak bulunur.

(3.1.1.1.) ve (3.1.1.2) eşitliklerini kullanarak

$$Y(\mathrm{t})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha k+1)}\left[D_{*}^{k\alpha}y(t)\right]_{t=t_0}(t-t_0)^{k\alpha} \qquad (3.1.1.3)$$

eşitliğinin sağlandığını söyleyebiliriz. (G. Oturanç, A. Kurnaz, Y. Keskin,2008)

Bu şekilde elde edilen kesirli diferansiyel dönüşümlerin bazı temel özellikleri aşağıdaki tabloda özetlenmiştir.

Fonksiyon	**Diferansiyel Dönüşümü**
$y(t)=u(t)\pm v(t)$	$Y_\alpha(k)=U_\alpha(k)\pm V_\alpha(k)$
$y(t)=cu(t)$	$Y_\alpha(k)=cU_\alpha(k)$, c sabit
$y(t)=D_{*}^{\alpha}u(t)$	$Y_\alpha(k)=U_\alpha(k+1)\frac{\Gamma(k\alpha+\alpha+1)}{\Gamma(k\alpha+1)}$
$y(t)=D_{*}^{n\alpha}u(t)$	$Y_\alpha(k)=U_\alpha(k+n)\frac{\Gamma(k\alpha+n\alpha+1)}{\Gamma(k\alpha+1)}$
$y(t)=u(t)v(t)$	$Y_\alpha(k)=U_\alpha(r)\otimes V_\alpha(k-r)=\sum_{k=0}^{k}U_\alpha(r)V_\alpha(k-r)$
$y(t)=t^p$	$Y_\alpha(k)=\delta(k\alpha-p)=\begin{cases}1, & k=p/\alpha\\ 0, & k\neq p/\alpha\end{cases}$

3.2. Homotopi Perturbasyon Metodu

Pertürbasyon teorisi, tam olarak çözülemeyen bir problemin yaklaşık çözümünü bulmak için kullanılan matematiksel metotlar içerir. Eğer problem, bir "küçük" terim eklenerek tam olarak çözülebilen probleme formüle ediliyorsa probleme pertürbasyon teorisi uygulanabilir. Pertürbasyon teorisi, problemin çözümünü, tam olarak çözülebilen problemden sapmayı ölçen bir "küçük" parametrenin kuvvet serisi cinsinden bulmayı

amaçlar. Kuvvet serisindeki ilk terim, tam olarak çözülebilen problemin çözümü iken, diğer terimler, çözümde başlangıç problemine göre sapmayı tanımlarlar. *A* çözümüne yaklaşım için aşağıdaki küçük parametreye göre açılan (burada parametre ε'dur) seri verilsin:

$$A = \varepsilon^0 A_0 + \varepsilon^1 A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \ldots$$

Bu örnekte A_0, tam olarak çözülebilen başlangıç probleminin bilinen çözümünü ve A_1, A_2,...., bir sistematik yöntemle iteratif olarak bulunan daha yüksek dereceden çözümleri gösterir. ε' un çok küçük olması durumunda, yukarıdaki serinin yakınsak olması, küçük ε değeri için bulunan daha yüksek dereceden çözümlerin daha az önemli olduğu anlamına gelir. Bir yaklaşık pertürbasyon çözümü, seriyi bir yerden sonra kesip, genelde sadece ilk iki terimi, başlangıç çözümü ve "birinci derece" pertürbasyon düzeltmesini, bırakarak elde edilir. ε çok küçük olmasına rağmen, bazı problemlerde çözüm yakınsak olmayabilir. Birçok önemli problemde küçük pertürbasyonların verilmesi, çözümlerin niceleyici ve niteleyici özelliklerini ortaya koyar fakat bu özellikler, pertürbe edilmeyen problemlerin çözümlerininkilerden oldukça farklı olabilirler. Örneğin ;

$$u' + u - \varepsilon = 0,\ u(0) = 1 \text{ ve } u' - u - \varepsilon = 0,\ u(0) = 1$$

denklemleri göz önüne alınsın. Birinci denklemin çözümü $u(t) = \varepsilon + (1-\varepsilon)e^{-t}$ iken pertürbe edilmemiş denklemin çözümü $u_0(t) = e^{-t}$ dir. ε<<1 olduğunda $|u(t) - u_0(t)| \le \varepsilon$ için pertürbasyon çözümünün doğruluğu yüksektir. İkinci denklem için ise pertürbe edilmemiş problemin çözümü $u_0(t) = e^t$ 'dir ve $|u(t) - u_0(t)| = \varepsilon |1 - e^t|$ elde edilir. Burada , $t > 1$ olduğunda u_0 , denklemin yaklaşık çözümü olarak düşünülemez.

Pertürbasyon metotları, orijinal problemin, tam olarak çözmeye yetecek kadar basitleştirilmiş formuyla başlar. Genel yöntem, fen ve mühendislikte çok kullanılan matematiksel bir araçtır: basitleştirilmiş bir problemle başlamak ve aşamalı olarak düzeltmeler eklerken düzelmiş problemin giderek gerçeği temsil eden formüle yakınlaşmasını sağlamak.

Homotopi, diferansiyel topolojinin önemli bir konusudur. Bir nonlineer cebirsel denklemin bütün köklerini bulmak için homotopi teknikleri uygulanabilir. Bunu göstermek için aşağıdaki denklem göz önüne alınsın:

$$f(x)=0\ ,\ x\in IR \tag{3.2.1}$$

Bu denklemde homotopiyi uygulayabilmek için, $p\in[0,1]$ bir gömme (embedding) parametresi, x_0 , (3.2.1) denkleminin başlangıç yaklaşımı olmak üzere aşağıdaki $H: IR\times[0,1]\to IR$ homotopisi kurulabilir.

$$H(\xi,p)=pf(\xi)+(1-p)\left[f(\xi)-f(x_0)\right]=0 \qquad \xi\in IR,\ p\in[0,1] \tag{3.2.2.a}$$

veya

$$\begin{aligned} H(\xi,p)&=f(\xi)-f(x_0)=0\\ H(\xi,1)&=f(\xi)=0 \end{aligned} \tag{3.2.2.b}$$

olduğu açıktır.

$p=0$ dan $p=1$ 'e değiştikçe , $H(\xi,p)$ değeri $f(\xi)-f(x_0)$ dan $f(\xi)$ ye değişir. Bu bir topolojik deformasyondur. $f(\xi)-f(x_0)$ ve $f(\xi)$ de homotopiktir. $0\le p\le 1$ olduğundan gömme parametresi "küçük parametreler" olarak düşünülebilir. Pertürbasyon tekniği uygulanarak (3.2.2) denkleminin çözümü p'nin bir kuvvet serisi olarak şu şekilde yazılabilir:

$$\xi=\xi_0+p\xi_1+p^2\xi_2+... \tag{3.2.3}$$

p parametresi 1'e yakınsarken (3.2.2.a.b) denklemleri (3.2.1) denklemine karşılık gelir ve (3.2.3) serisi, (3.2.1) denkleminin bir yaklaşık çözümü olur ve çözüm:

$$x=\lim_{p\to 1}\xi=\xi_0+\xi_1+\xi_2 \tag{3.2.4}$$

olarak bulunur.

(3.2.2) denkleminin yaklaşık çözümünü elde etmek için $f(\xi)$ fonksiyonu, ξ_0 noktası civarında Taylor serisine açılır;

$$f(\xi)=f(\xi_0)+f'(\xi_0)\left(p\xi_1+p^2\xi_2...\right)+\frac{1}{2!}f''(\xi_0)\left(p\xi_1+p^2\xi_2...\right)^2+... \tag{3.2.5}$$

(3.2.5) eşitliği, (3.2.2.b) eşitliğinde yerine konup, p 'nin kuvvetlerine göre katsayılar eşitlenerek;

$$p^0: f(\xi_0)-f(x_0)=0 \tag{3.2.6}$$

$$p^1 : f'(\xi_0)\xi_1 + f(x_0) = 0 \tag{3.2.7}$$

$$p^2 : f'(\xi_0)\xi_2 + \frac{1}{2!} f''(\xi_0)\xi_1^2 = 0 \tag{3.2.8}$$

$$p^3 : f'(\xi_0)\xi_3 + \frac{1}{2!} f''(\xi_0) 2\xi_1\xi_2 + \frac{1}{3!} f'''(\xi_0)\xi_1^3 = 0 \tag{3.2.9}$$

.

.

.

denklemleri elde edilir.

İlk dört denklemden ξ_1, ξ_2, ξ_3 çözülerek ;

$$\xi_1 = -\frac{f(x_0)}{f'(\xi_0)} \ , \tag{3.2.10}$$

$$\xi_2 = -\frac{f''(\xi_0)\xi_1^2}{2! f'(\xi_0)} = -\frac{f''(\xi_0)}{2! f'(\xi_0)}\left(\frac{f(x_0)}{f'(\xi_0)}\right)^2 \ , \tag{3.2.11}$$

$$\xi_3 = -\frac{f''(\xi_0)\xi_1\xi_2}{f'(\xi_0)} - \frac{f'''(\xi_0)\xi_1^3}{3! f'(\xi_0)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{f''(\xi_0)}{f'(\xi_0)}\right)^2\left(\frac{f(x_0)}{f'(\xi_0)}\right)^3 + \frac{f'''(\xi_0)}{6 f'(\xi_0)}\left(\frac{f(x_0)}{f'(\xi_0)}\right)^3, \tag{3.2.12}$$

bulunur.

$p = 1$ iken birinci dereceden yaklaşık çözüm,

$$x = \xi_0 + \xi_1 = \xi_0 - \frac{f(\xi_0)}{f'(\xi_0)} \tag{3.2.13}$$

biçiminde elde edilir. Bu çözüm,

$$x_{n+1} = \xi_n - \frac{f(\xi_n)}{f'(\xi_n)} \tag{3.2.14}$$

iterasyon formülü kullanılarak da yazılabilir.

(3.2.6) denkleminin bir çözümü olan $\xi_0 = x_0$ da (3.2.14) denkleminde yerine yazılarak,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Newton iterasyon formülü elde edilir. Benzer olarak ikinci dereceden yaklaşık çözüm

$$x = \xi_0 + \xi_1 + \xi_2$$

biçimindedir ve iterasyon formülüyle

$$x_{n+1} = \xi_n - \frac{f(\xi_n)}{f'(\xi_n)} - \frac{f''(\xi_n)}{2 f'(\xi_n)}\left(\frac{f(\xi_n)}{f'(\xi_n)}\right)^2$$

veya

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)}\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^2$$

biçiminde gösterilir. Üçüncü dereceden yaklaşık çözüm ise;

$x = \xi_0 + \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$

olduğundan iterasyon formülüyle

$$x_{n+1} = \xi_n - \frac{f(\xi_n)}{f'(\xi_n)} - \frac{f''(\xi_n)}{2f'(\xi_n)}\left(\frac{f(\xi_n)}{f'(\xi_n)}\right)^2 - \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{f''(\xi_n)}{f'(\xi_n)}\right)^2 - \frac{f'''(\xi_n)}{6f'(\xi_n)}\right\}\left(\frac{f(\xi_n)}{f'(\xi_n)}\right)^3$$

veya

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)}\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^2 - \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)}\right)^2 - \frac{f'''(x_n)}{6f'(x_n)}\right\}\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^3$$

ile verilir. (He, J.H.1998, Javidi M.2007)

3.3. Varyasyonel İterasyon Yöntemi:

Varyasyonel iterasyon metodunun uygulanmasında, L lineer operatör, N lineer olmayan operatör ve $g(x)$ ise homojenliği bozan terim olmak üzere, çözüm aranan diferansiyel denklem,

$$Lu + Nu = g(x)$$

formunda ele alınır.

Varyasyonel iterasyon metoduna göre denklemin,

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda \{Lu_n(s) + N\tilde{u}_n(s) - g(s)\} ds$$

formundaki varyasyon fonksiyonu kurulur. Burada λ, Lagrange çarpanı (Inokuti 1978) olup varyasyon teorisinden hareketle Maple, Mathematica gibi paket programları yardımıyla hesaplanır. $\tilde{u}_n$ sınırlanmış varyasyon (He 1999) olup $\delta\tilde{u}_n = 0$'dır. Bulunan λ sayı değerine göre varyasyon fonksiyonu yeniden düzenlenerek aranan çözüm fonksiyonu için rekürans bağıntısı oluşturulmuş olur. Başlangıç koşulu olarak verilen fonksiyon u_0 olarak seçilmek suretiyle $n > 0$ için u_n terimleri için yaklaşımlar elde edilmiş olur. Son olarak çözüm fonksiyonu,

$$u = \lim_{n \to \infty} u_n$$

eşitliğinden elde edilir.

Burada kullanılacak Lagrange çarpanı aşağıdaki tablodan yararlanılarak tespit edilebilir. . (He, J.H.1998)

Denklem	Lagrange çarpanı
$y' = f(t)$	$\lambda(s) = -1$
$y'' = f(t)$	$\lambda(s) = s - t$
$y' + y = f(t)$	$\lambda(s) = -e^{s-t}$
$y' - y = f(t)$	$\lambda(s) = -e^{-s+t}$

4. KESİRLİ POPÜLASYON MODELİ

4.1. Matematik Model

Matematiksel model ya da dinamik model, bir sistemin matematik diliyle ifade edilmesidir. Bir matematiksel model oluşturma süreci matematiksel modelleme olarak adlandırılmaktadır. Fizik, biyoloji, yer bilimleri, meteoroloji gibi doğal bilimlerin yanı sıra farklı mühendislik dallarında da sıkça kullanılan matematiksel modele ekonomi, psikoloji, sosyoloji ve siyaset bilimi gibi sosyal bilim dallarında da rastlanmaktadır. Diferansiyel denklemler doğada dinamik olarak değişen süreçlerin davranışını açıklayan çok güçlü bir araçtır. Cevaplanması zor süreçleri modelleyerek hakkındaki sorulara cevap aramak için diferansiyel denklemleri kullanırız.

Bir matematiksel modelinin kurulabilmesi için birtakım genel koşulların sağlanması gerekmektedir.

Bu koşullar su şekilde sıralanabilir:

1. Süreç evrimsel olmalıdır: Yani, süreç ölçülebilir bir zaman süresinde belirli yasalara uygun olarak gelişmelidir.

2. Süreç, matematiksel olarak, sonlu sayıda parametrenin yardımıyla ifade edilebilmelidir.

3. Sürecin deterministik bir süreç olması gerekmektedir: Diğer bir deyişle, sürecin bir anda belli olan durumuna göre geçmişi ve geleceği tek değerli olarak belirlenebilmelidir.

4. Süreç diferansiyellenebilir fonksiyonlar yardımıyla ifade edilebilecek bir süreç olmalıdır.

Popülasyon modeli Thomas Robert Malthus tarafından 1978 yılında geliştirilmiş olan bir problemdir. Onun modeline göre popülasyon orantılı olarak artmaktadır ve popülasyonu P ile ve her bir birey için sabit doğum oranını α (>0) ile gösterdiğimizde, aşağıdaki diferansiyel denklem ile ifade edilmektedir.

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P \quad , \ \alpha = sabit > 0$$

Böylece limitsiz büyüme bu diferansiyel denklemin ,çözümü olan ve exponansiyel kural olarak da adlandırılan

$$P(t) = P_0 \exp\left(\alpha\left(t - t_0\right)\right)$$

fonksiyonu ile ifade edilmektedir. Burada P_0 , $t = t_0$ anındaki popülasyon ve $P(t)$ ise keyfi t anındaki popülasyon olarak gösterilmektedir. Daha sonraları bu modelin ,çok gerçekçi olmadığı gözlenerek, model mantıksal model olarak adlandırılmıştır ve

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P - \beta P^2 \ , \ \alpha, \beta = sabit \neq 0$$

diferansiyel denklemi ile ifade edilmiştir.

4.2. Lojistik Denklem

β doğum oranının , P nüfus büyüklüğünün bir lineer azalan fonksiyonu olduğu kabul edilsin. Böylece β_0 ve β_1 ler pozitif sabitler olmak üzere $\beta = \beta_0 - \beta_1 P$ dir. Eğer ölüm oranı $\delta = \delta_0$ sabit kalırsa genel nüfus denklemi ;

$$\frac{dP}{dt} = (\beta_0 - \beta_1 P - \delta_0) P$$

şeklini alır. Yani

$a = \beta_0 - \delta_0 > 0$ ve $b = \beta_1 > 0$

olmak üzere elde edilen

$$\frac{dP}{dt} = aP - bP^2$$

denklemine **lojistik denklem** denir. Denklemdeki parametrelerin değerleriyle P(t) nüfusunun davranışını ilişkilendirmek amacı ile, k = b ve M= a/b olmak üzere lojistik denklem ;

$$\frac{dP}{dt} = kP(M - P)$$

olarak da yazılabilir.

4.3. Lotka-Voltera Denklemi

Literatürde Avcı-Av modeli olarak da bilinen denklem sistemi, Amerika'lı matematikçi, fiziko kimyacı ve aynı zamanda istatistikçi olan Alfred J. Lotka (1925) ile İtalyan matematikçi ve fizikçi Vito Volterra'nın (1926) matematiksel biyolojiye yaptıkları katkının önemli bir parçasını oluşturur. İki bilim adamı 1920'li yılların ortasında birbirlerinden bağımsız olarak yaptıkları çalışmalarda aynı biyolojik çevrede bulunan farklı canlı türleri arasındaki nüfus dinamiklerini açıklamaya çalışmışlardır.

Denklem sistemi ile aynı biyolojik çevrede bulunan birisi "avcı" olarak nitelendirilen canlı türü ile bu canlı türünün besin kaynağını oluşturan diğer canlı türü arasındaki nüfus etkileşimleri analiz edilmiştir.

Lotka ve Volterra iki farklı denklem seti geliştirmiştir; bir set av-avcı etkileşimlerine, diğer set ise kaynak rekabetine uygulanır.

Rekabetle ilgili denklem aşağıdaki gibidir:

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left(\frac{K_1 - N_1 - \alpha_{1,2} N_2}{K_1} \right)$$

Burada N_1: Birinci türün popülasyon büyüklüğü

K_1: Birinci türün taşıma kapasitesi

t: zaman

r_1: Birinci türün artış miktarı

$\alpha<1$ ise tür içi rekabet, türler arası rekabetten daha şiddetlidir.

$\alpha>1$ ise türler arası rekabet tür içi rekabetten daha şiddetlidir.

$\alpha=1$ ise rekabet türünün şiddeti eşittir.

4.4. Kesirli Popülasyon Modeli

Bu çalışmada Lotka-Volterra denkleminin genelleştirilmiş biçimini içeren kesirli mertebeden av-avcı popülasyon modeli incelenmiştir. Farklı fonksiyonel tepkiler ve sayısal tepkiler seçerek normal durum ve açlık durumu olarak adlandırılan iki durum olduğunu varsayalım. Bu modelde birinci mertebeden zaman türevi yerine α ve β mertebesinden kesirli türevler kullanılmıştır. ($0 < \alpha \leq 1$, $0 < \beta \leq 1$)

Normal durum ve açlık durumları için kesirli sıralanmış lojistik av-avcı modelini şu şekilde düşünelim:

1.Durum: Normal Koşullarda ($cN \geq aP$):

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha} N(t)}{dt^{\alpha}} = \frac{r}{\lambda} \{1 - (\frac{N(t)}{k})^{\lambda}\} N(t) - aP(t) \qquad (4.4.1)$$

$$\frac{\mathrm{d}^{\beta} P(t)}{dt^{\beta}} = (b - d) P(t), \quad 0 < \beta \leq 1$$

2.Durum: Açlık Koşulunda ($cN \le aP$):

$$\frac{d^{\alpha}N(t)}{dt^{\alpha}} = \left[\frac{r}{\lambda}\left\{1-(\frac{N(t)}{k})^{\lambda}\right\}-c\right]N(t)$$

$$\frac{d^{\beta}P(t)}{dt^{\beta}} = b\frac{c}{a}N(t)-\left[d+\frac{1}{T}\ln\left(\frac{aP(t)}{cN(t)}\right)\right]P(t) \qquad (4.4.2)$$

ilk koşullarla ; $N(0)=c_1$, $P(0)=c_2$ ve $0<\alpha\le 1$, $0<\beta\le 1$. Burada $N(t)$ ve $P(t)$ sırasıyla av ve avcı popülasyon yoğunluğunu göstermektedir. Modeldeki parametreler aşağıda gösterilmiştir:

r: Av popülasyonunun gerçek büyüme oranı

k: Av popülasyonunun taşıma kapasitesi

a: Avcı popülasyonunun maksimum saldırı kapasitesi

b: Avcı doğum oranı

c: Maksimum avlanma oranı

d: Avcı popülasyonunda doğal ölüm oranı

T: Açlığa yanıt veren tipik zaman

(Swarnalı Sharma ve ,G.P. Samanta 2010)

4.4.1. Model Kuruluşu

Genel lojistik kuralını ele alacak olursak;

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{r}{\lambda}\{1-(\frac{N(t)}{k})^{\lambda}\}N(t) \qquad 0<\lambda\le 1$$

$\lambda \to 0$ ise model Gompertz modeli olarak adlandırılır. $\lambda = 1$ İse model basit lojistik model olur. Şimdi bunu kesirli mertebeden av-avcı modelimizde kullanalım.

Fonksiyonel Tepki Fonksiyonu $\phi(N,P)$:

Fonksiyonel tepki fonksiyonu, her bir avcının verilen av ve avcı yoğunluğunda birim zamanda tükettiği av sayısı olarak tanımlanır.

Model şu iki varsayım üzerine kurulur:

Maksimum fonksiyonel tepki bir a sabitidir, yani, avcının saldırı kapasitesinin bir limiti olduğunu varsayıyoruz.

Geniş bir avcı popülasyonu bütün av popülasyonunu tek bir zamanda yiyemeyeceğinden, av popülasyonunun sadece sabit bir miktarının, birim zamanda tüm av popülasyonu tarafından yakalanabileceğini kabul ederiz. P avcı cN avı paylaşmak zorunda olduğundan, fonksiyonel tepki $c\frac{N}{P}$ olur. c aynı zamanda maksimum avlanma oranı olarak bilinir.

1 ve 2 varsayımlarını birleştirirsek, modelimiz için fonksiyonel tepki fonksiyonu:

$$\phi(N,P)=\begin{cases} a, & cN \geq aP \\ c\dfrac{N}{P}, & cN \leq aP \end{cases}$$ (4.4.3) olarak verilir.

Durumda: Fonksiyonel tepki her bir avcının saldırı kapasitesine eşittir. Bu duruma normal durum diyoruz.

Durumda: Fonksiyonel tepki saldırı kapasitesinden küçüktür. Yani daha fazla av erişilebilir durumda ise avcılar yakalamalarını artıracaktır. Bu duruma açlık durumu diyoruz. (Swarnalı Sharma ve ,G.P. Samanta 2010)

Sayısal Tepki Fonksiyonu $\varphi(N,P)$:

Sayısal tepki, av yoğunluğunun artmasıyla avcıların daha verimli hale gelmesi demektir. Modelimiz için sayısal tepki fonksiyonunun avcıların doğum ve ölüm oranlarının beslenmelerine bağlı olduğunu varsayalım. φ fonksiyonunun;

$\varphi=\varphi^{+}-\varphi^{-}$ olacak şekilde φ^{+} pozitif kısmı ve φ^{-} negatif kısmı vardır.

φ^{+} avcı popülasyonunun toplam doğum oranıdır. Normal durumda doğum oranı maksimum b değerindedir ve açlık durumunda doğum oranı besin açığı ile orantılı olarak düşer. Burada b/a yı (4.4.3) ile orantılı çarpan olarak alırsak;

$$\varphi^{+}(N,P)=\begin{cases} b, & cN \geq aP \\ b\dfrac{cN}{aP}, & cN \leq aP \end{cases}$$

elde edilir. φ^{-} avcı popülasyonunun açlık nedeniyle ölüm oranıdır. $\varphi^{-}(N,P)=\frac{1}{T}\ln\left(\frac{a}{\phi(N,P)}\right)$ formülünü kullanarak ve (4.4.3) ile ,

$$\varphi^{-}(N,P)=\begin{cases} 0, & cN \geq aP \\ \frac{1}{T}\ln\left(\frac{aP}{cN}\right), & cN \leq aP \end{cases}$$

elde ederiz. Böylece yukarıdaki varsayımları birleştirdiğimiz zaman (4.4.1) ve (4.4.2) de tanımlamış olduğumuz kesirli mertebeden av-avcı modelini kurmuş oluyoruz. (Swarnalı Sharma ve ,G.P. Samanta 2010)

5. KESİRLİ MERTEBEDEN POPÜLASYON MODELLERİNİN ÇÖZÜMÜ

Kesirli mertebeden diferansiyel denklemler kullanılarak elde edilen modellemelerin çözümleri genellikle farklı yaklaşık çözüm metotları ile elde edilen çözümlerdir. Biz de burada (4.4.1) ve (4.4.2) denklemlerini üç farklı metotla çözerek, elde edeceğimiz çözümleri karşılaştıracağız.

5.1. Modelin Diferansiyel Dönüşüm Metodu (D.T.M) İle Çözümü

Şimdi diferansiyel dönüşüm metodunu kullanarak (4.4.1) ve (4.4.2) denklemlerinin çözümünü bulalım:

1. Durum: Normal Koşullarda ($cN \geq aP$):

$$\frac{d^{\alpha}N(t)}{dt^{\alpha}} = \frac{r}{\lambda}\left\{1-\left(\frac{N(t)}{k}\right)^{\lambda}\right\}N(t) - aP(t) \qquad (4.4.1)$$

$$\frac{d^{\beta}P(t)}{dt^{\beta}} = (b-d)P(t)$$

Burada başlangıç koşulları;

$N(0)=c_1$, $P(0)=c_2$ ve $0<\alpha\leq 1$, $0<\beta\leq 1$

r =10

k =1

a = 10

b =20

d = 1

λ = 1

değerleri ile ve $\alpha = ms$, $\beta = ns$ olarak aldığımızda (4.4.1) denklemini;

$$D^{ms}N = 10(1-N)N - 10P$$

$$D^{ns}P = (20-1)P = 19P$$

olarak yazabiliriz. Şimdi bu denklemin diferansiyel dönüşümünü yazarsak;

$$N(k+m)\frac{\Gamma(ks+ms+1)}{\Gamma(ks+1)} = 10N(k) - 10\sum_{r=0}^{k}N(r)N(k-r) - 10P(k)$$

$$P(k+n)\frac{\Gamma(ks+ns+1)}{\Gamma(ks+1)}=19P(k)$$

bulunur. Şimdi $N(0)=1$, $P(0)=0.05$ alarak α ve β nın farklı değerleri için hesaplama yapalım:

1. $\alpha=\beta=1$ için,

Bu durumda denklem kesirli mertebeden olmaz, adi diferansiyel denklem haline gelir. Buna göre;

$$\frac{dN(t)}{dt}=10(1-N(t)).N(t)-10P(t)$$

$$\frac{dP(t)}{dt}=(20-1)P(t)=19P(t)$$

olur. Bu denklemin DTM karşılığı;

$$N(k+1)(k+1)=10N(k)-10\sum_{r=0}^{k}N(r)N(k-r)-10P(k)$$

$$P(k+1)(k+1)=19P(k)$$

şeklindedir. $N(0)=1$ ve $P(0)=0.05$ için mapple programından yararlanarak iterasyon uyguladığımızda (bkz. Ek1.) sonuçlar grafik olarak elde edilir.

2. $\alpha=\beta=0.8$ için,

Bu durumda;

$\alpha=4*0.2,\ \beta=4*0.2$ ve $l=0,2,m=4,s=4$

olur. Buna göre;

$$N[k+4].\frac{\Gamma(0,2k+1,8)}{\Gamma(0,2k+1)}=10N[k]-10\sum_{r=0}^{k}N[r].N[k-r]-10P[k]$$

$$\mathrm{P}[k+4].\frac{\Gamma(0,2k+1,8)}{\Gamma(0,2k+1)}=19P[k]$$

$\mathrm{N}[0]=1, P[0]=0,05$ ve $\mathrm{N}[k]=0,\ P[k]=0$, k= -1,-2,…

şeklinde alınıp mapple programı yazıldığında (bkz. Ek2)

3. $\alpha = \beta = 0.6$ için,

$\alpha = 3*0.2, \beta = 3*0.2$ ve $l = 0,2, m = 3,\ s = 3$

olur. Buna göre;

$$N[k+3].\frac{\Gamma(0,2k+1,6)}{\Gamma(0,2k+1)} = 10N[k] - 10\sum_{r=0}^{k} N[r].N[k-r] - 10P[k]$$

$$\mathrm{P}[k+3].\frac{\Gamma(0,2k+1,6)}{\Gamma(0,2k+1)} = 19P[k]$$

$\mathrm{N}[0] = 1,\ P[0] = 0.05$ ve $\mathrm{N}[k] = 0,\ P[k] = 0$, k= -1,-2,…

şeklinde alınır ve Maple programı yazıldığında (bkz. Ek3)

4. $\alpha = \beta = 0.4$ için,

$\alpha = 2*0.2, \beta = 2*0.2$ ve $l = 0,2, m = 2, \mathrm{s} = 2$ olur.

Buna göre;

$$N[k+2].\frac{\Gamma(0,2k+1,4)}{\Gamma(0,2k+1)} = 10N[k] - 10\sum_{r=0}^{k} N[r].N[k-r] - 10P[k]$$

$$\mathrm{P}[k+2].\frac{\Gamma(0,2k+1,4)}{\Gamma(0,2k+1)} = 19P[k]$$

$\mathrm{N}[0] = 1, P[0] = 0.05$ ve $\mathrm{N}[k] = 0, P[k] = 0$, k= -1,-2,…

şeklinde alınır ve mapple programı yazıldığında (bkz. Ek4)

<u>II. Durum</u>: Açlık Koşulunda ($cN \le aP$):

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha} N(t)}{dt^{\alpha}} = \left[\frac{r}{\lambda} \left\{ 1 - (\frac{N(t)}{k})^{\lambda} \right\} - c \right] N(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}^{\beta} P(t)}{dt^{\beta}} = b\frac{c}{a} N(t) - \left[d + \frac{1}{T} \ln\left(\frac{aP(t)}{cN(t)} \right) \right] P(t) \qquad (4.4.2)$$

$N(0) = c_1$, $P(0) = c_2$ ve $0 < \alpha \le 1$, $0 < \beta \le 1$ denkleminin diferansiyel dönüşüm karşılığını yazalım:

$\alpha = ms$, $\beta = ns$ olarak aldığımızda;

$$\mathrm{N}[k+m].\frac{\Gamma(ks+ms+1)}{\Gamma(ks+1)} = \sum_{r=0}^{k} R[k].N[k-r]$$

$$\mathrm{P}[k+n].\frac{\Gamma(ks+ns+1)}{\Gamma(ks+1)} = b\frac{c}{a}N[k] - \sum_{r=0}^{k} Q[k].P[k-r]$$

şeklindedir. Burada R[k] , $\frac{r}{\lambda}\{1-(\frac{N(t)}{k})^{\lambda}\}-c$ nin , Q[k] ise $d+\frac{1}{T}\ln(\frac{aP(t)}{cN(t)})$ nin dönüşüm karşılığını göstermektedir.

a =10 , b =20 , c = 10 , d = 1 , r = 100 , k = 50 , λ =1 , T = 40 , c_1 =0,5 , c_2 = 50 olmak üzere,

1. α = β = 1 için;

$$\mathrm{N}[k+1].(\mathrm{k}+1) = 100N[k] - 2\sum_{r=0}^{k} \mathrm{N}[\mathrm{r}].N[k-r] - 10N[k]$$

$$\mathrm{P}[k+1].(\mathrm{k}+1) = 20N[k] - \sum_{r=0}^{k} Q[k].P[k-r]$$

N[0]= 0,5 P[0] = 50 alınıp mapple programı ile (bkz. Ek 5) iterasyon uygulandığında çözüm elde edilir: (Q[k] için yazılan mapple programı için bkz. Ek 6)

2. α = β = 0.8 için;

$$N[k+4] = \sum_{r=0}^{k} R[k]N[k-r]\frac{\Gamma(0.2k+1)}{\Gamma(0.2k+1.8)}$$

$$P[k+4] = \left(b\frac{c}{a}N[k] - \sum_{r=0}^{k} Q[k]P[k-r]\right)\frac{\Gamma(0.2k+1)}{\Gamma(0.2k+1.8)}$$

N[0] = 0,5 P[0] = 50 alınıp mapple programı ile (bkz. Ek 7) iterasyon uygulandığında çözüm elde edilir: (R[k] için yazılan mapple programı için bkz. Ek 8)

3. α = β = 0.6 için;

$$N[k+3] = \sum_{r=0}^{k} R[k]N[k-r]\frac{\Gamma(0.2k+1)}{\Gamma(0.2k+1.6)}$$

$$P[k+3] = \left(b\frac{c}{a}N[k] - \sum_{r=0}^{k} Q[k]P[k-r]\right)\frac{\Gamma(0.2k+1)}{\Gamma(0.2k+1.6)}$$

N[0] = 0,5 P[0] = 50 alınıp mapple programı ile (bkz. Ek 7) iterasyon uygulandığında çözüm elde edilir: (R[k] için yazılan mapple programı için bkz. Ek 8)

4. $\alpha = \beta = 0.4$ için;

$$N[k+2] = \sum_{r=0}^{k} R[k]N[k-r]\frac{\Gamma(0.2k+1)}{\Gamma(0.2k+1.4)}$$
$$P[k+2] = \left(b\frac{c}{a}N[k] - \sum_{r=0}^{k} Q[k]P[k-r]\right)\frac{\Gamma(0.2k+1)}{\Gamma(0.2k+1.4)}$$

N[0] = 0,5 P[0] = 50 alınıp mapple programı ile (bkz. Ek 7) iterasyon uygulandığında çözüm elde edilir: (R[k] için yazılan mapple programı için bkz. Ek 8)

5.2. Modelin Homotopi Perturbasyon Metodu (H.P.M) ile Çözümü

Homotopi perturbasyon metodunu kullanarak (4.4.1) ve (4.4.2) denklemlerinin çözümünü bulalım:

1. Durum: Normal Koşullarda ($cN \geq aP$):

Homotopi perturbasyon metoduna göre aşağıdaki eşitliği kurabiliriz:

$$D_t^{\alpha} N(t) = p\left[\frac{r}{\lambda}\left\{1-\left(\frac{N(t)}{k}\right)^{\lambda}\right\}N(t)\right] - aP(t) \quad (4.4.3.1)$$
$$D_t^{\beta} P(t) = p(b-d)P(t)$$

Gömme parametresi $0 \leq p \leq 1$ küçük parametre olarak düşünülürse, klasik pertürbasyon tekniği uygulanarak (4.4.3.1) denkleminin çözümünü p'nin bir kuvvet serisi olarak verildiğini düşünebiliriz. Yani;

$$N(t) = N_0(t) + pN_1(t) + p^2N_2(t) + p^3N_3(t) + \ldots$$
$$P(t) = P_0(t) + pP_1(t) + p^2P_2(t) + p^3P_3(t) + \ldots \quad (4.4.3.2)$$

$p \to 1$ iken (4.4.3.1) denklemi (4.4.1) denklemini sağlar,(4.4.3.2) denklemi (4.4.1) denkleminin yaklaşık çözümü haline gelir.

(4.4.3.2) denklemini (4.4.3.1) denkleminde yerine yazarak aşağıdaki lineer denklemleri elde ederiz: (Swarnalı Sharma ve ,G.P. Samanta 2010)

$$p^0 : D_t^{\alpha} N_0(t) = 0,$$

$$D_t^{\beta} P_0(t) = 0.$$

$$p^1 : D_t^{\alpha} N_1(t) = \frac{r}{\lambda} N_0(t) \left\{ 1 - \left(\frac{N_0(t)}{k} \right)^{\lambda} \right\} - aP_0(t),$$

$$D_t^{\beta} P_1(t) = (b-d) P_0(t).$$

$$p^2 : D_t^{\alpha} N_2(t) = \frac{r}{\lambda} N_0(t) \left\{ -\lambda \frac{\left(N_0(t)\right)^{\lambda-1}}{k^{\lambda}} N_1(t) \right\}$$

$$+ \frac{r}{\lambda} N_1(t) \left\{ 1 - \left(\frac{N_0(t)}{k} \right)^{\lambda} \right\} - aP_1(t)$$

$$D_t^{\beta} P_2(t) = (b-d) P_1(t).$$

$$p^3 : D_t^{\alpha} N_3(t) = \frac{r}{\lambda} N_0(t) \left\{ -\lambda \frac{\left(N_0(t)\right)^{\lambda-1}}{k^{\lambda}} N_2(t) \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} \frac{\left(N_0(t)\right)^{\lambda-1}}{k^{\lambda}} \left(N_1(t)\right)^2 \right\}$$

$$+ \frac{r}{\lambda} N_1(t) \left[-\lambda \frac{\left(N_0(t)\right)^{\lambda-1}}{k^{\lambda}} N_1(t) \right] \qquad (4.4.3.3)$$

$$+ \frac{r}{\lambda} N_2(t) \left[1 - \left(\frac{N_0(t)}{k} \right)^{\lambda} \right] - aP_2(t),$$

$$D_t^{\beta} P_3(t) = (b-d) P_2(t).$$

$$N_0(t)=c_1,$$

$$P_0(t)=c_2,$$

$$N_1(t)=\left[\frac{r}{\lambda}c_1\left\{1-\left(\frac{c_1}{k}\right)^{\lambda}\right\}-ac_2\right]\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)},$$

$$P_1(t)=(b-d)c_2\frac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}.$$

$$N_2(t)=\left[\frac{r}{\lambda}c_1\left\{1-\left(\frac{c_1}{k}\right)^{\lambda}\right\}-ac_2\right]\left[\frac{r}{\lambda}\left\{1-\left(\frac{c_1}{k}\right)^{\lambda}\right\}-r\left(\frac{c_1}{k}\right)^{\lambda}\right]$$

$$\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}-\mathrm{a}(b-d)\mathrm{c}_2\frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)},$$

$$P_2(t)=(b-d)^2c_2\frac{t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta+1)}.$$

$$N_3(t)=\left[\frac{r}{\lambda}c_1\left\{1-\left(\frac{c_1}{k}\right)^{\lambda}\right\}-ac_2\right]\left[\frac{r}{\lambda}\left\{1-\left(\frac{c_1}{k}\right)^{\lambda}\right\}-r\left(\frac{c_1}{k}\right)^{\lambda}\right]$$

$$^2\frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}-\left[\frac{r}{\lambda}\left\{1-\left(\frac{c_1}{k}\right)^{\lambda}\right\}-r\left(\frac{c_1}{k}\right)^{\lambda}\right]\mathrm{a}(b-d)\mathrm{c}_2\frac{t^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)}$$

$$-\frac{(\lambda+1)}{2}r\frac{c_1^{\lambda-1}}{k^{\lambda}}\left[\frac{r}{\lambda}\left\{1-\left(\frac{c_1}{k}\right)^{\lambda}\right\}-r\left(\frac{c_1}{k}\right)^{\lambda}\right]^2$$

$$\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\left(\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(3\alpha+1)\right)}t^{3\alpha}-a(b-d)^2c_2\frac{t^{\alpha+2\beta}}{\Gamma(\alpha+2\beta+1)},$$

$$P_3(t)=(b-d)^3c_2\frac{t^{3\beta}}{\Gamma(3\beta+1)}$$

ve bu şekilde devam eder. (Swarnalı Sharma ve ,G.P. Samanta 2010)

Bu metot J_t^{α} ve J_t^{β} (D_t^{α} *ve* D_t^{β} Caputo türevlerinin ters operatörleri) operatörlerinin (4.4.3.3) denklemlerinin her iki tarafına uygulanmasına dayanır.

x_m ve y_m nin bileşenlerinin geri kalanları için kolayca ileri gidilirse, $m\geq 0$ için HPM sağlanabilir ve buradan seri çözümleri istenen yaklaşımları belirtebilir.

Sonuç olarak $N(t)$ ve $P(t)$ nin yaklaşık çözümlerini aşağıda verilen kısıtlı serilerle buluruz.

$$N(t)=\lim_{M\to\infty}\Phi_M(t),\qquad P(t)=\lim_{M\to\infty}\Psi_M(t)$$

$$\Phi_M(t)=\sum_{m=0}^{M-1}N_m(t),\quad \Psi_M(t)=\sum_{m=0}^{M-1}P_m(t)$$

olmak üzere.

Yukarıdaki bu iki seri çok hızlı olarak reel fizik problemlerinde yakınsamaktadır. Hızlı yakınsama, yaklaşık çözümleri elde etmek için sadece birkaç terimin gerekli olması anlamına gelir. (Swarnalı Sharma ve ,G.P. Samanta 2010)

2. Durum: Açlık Durumunda ($cN \le aP$):

Homotopi perturbasyon metoduna göre (4.4.2) denkleminin homotopisini aşağıdaki gibi kurabiliriz:

$$\begin{aligned} D_t^{\alpha}N(t) &= p\left[\frac{r}{\lambda}\left\{1-\left(\frac{N(t)}{k}\right)^{\lambda}\right\}-c\right]N(t)\\ D_t^{\beta}P(t) &= p\left[b\frac{c}{a}N(t)-P(t)\left\{d+\frac{1}{T}\ln\left(\frac{aP(t)}{cN(t)}\right)\right\}\right] \end{aligned} \qquad (4.4.3.4)$$

Gömme parametresi $0\le p\le 1$ küçük parametre olarak düşünülürse, klasik pertürbasyon tekniği uygulanarak (4.4.3.4) denkleminin çözümünü p'nin bir kuvvet serisi olarak verildiğini düşünebiliriz. Yani;

$$\begin{aligned} N(t) &= N_0(t)+pN_1(t)+p^2N_2(t)+p^3N_3(t)+\ldots\\ P(t) &= P_0(t)+pP_1(t)+p^2P_2(t)+p^3P_3(t)+\ldots \end{aligned} \qquad (4.4.3.5)$$

$p\to 1$ iken (4.4.3.4) denklemi (4.4.2) denklemini sağlar,(4.4.3.5) denklemi (4.4.2) denkleminin yaklaşık çözümü haline gelir.

(4.4.3.5) denklemini (4.4.3.4) denkleminde yerine yazarak aşağıdaki lineer denklemleri elde ederiz:

$$\begin{aligned} p^0:\quad & D_t^{\alpha}N_0(t)=0,\\ & D_t^{\beta}P_0(t)=0.\\ p^1:\quad & D_t^{\alpha}N_1(t)=\left[\frac{r}{\lambda}\left\{1-\left(\frac{N_0(t)}{k}\right)^{\lambda}\right\}-c\right]N_0(t),\\ & D_t^{\beta}P_1(t)=b\frac{c}{a}N_0(t)-P_0(t)\left[d+\frac{1}{T}\ln\left(\frac{aP_0(t)}{cN_0(t)}\right)\right]. \end{aligned}$$

$$p^2: \quad D_t^{\alpha} N_2(t) = \frac{r}{\lambda} N_0(t) \left[-\lambda \frac{\left(N_0(t)\right)^{\lambda-1}}{k^{\lambda}} N_1(t) \right] + \frac{r}{\lambda} N_1(t) \left[1 - \left(\frac{N_0(t)}{k} \right)^{\lambda} \right] - cN_1(t),$$

$$D_t^{\beta} P_2(t) = b\frac{c}{a} N_1(t) - P_0(t) \left[\frac{1}{T} \left(\frac{P_1(t)}{P_0(t)} - \frac{N_1(t)}{N_0(t)} \right) \right] - P_1(t) \left[d + \frac{1}{T} \ln \left(\frac{aP_0(t)}{cN_0(t)} \right) \right].$$

$$p^3: \quad D_t^{\alpha} N_3(t) = \frac{r}{\lambda} N_0(t) \left[-\lambda \frac{\left(N_0(t)\right)^{\lambda-1}}{k^{\lambda}} N_2(t) - \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} \frac{\left(N_0(t)\right)^{\lambda-2}}{k^{\lambda}} \left(N_1(t)^2 \right) \right] + \frac{r}{\lambda} N_1(t) \left[-\lambda \frac{\left(N_0(t)\right)^{\lambda-1}}{k^{\lambda}} N_1(t) \right] + \frac{r}{\lambda} N_2(t) \left[1 - \left(\frac{N_0(t)}{k} \right)^{\lambda} \right] - cN_2(t),$$

$$D_t^{\beta} P_3(t) = b\frac{c}{a} N_2(t) - P_0(t) \left[\frac{1}{T} \left\{ \frac{P_2(t)}{P_0(t)} - \frac{1}{2} \left(\frac{P_1(t)}{P_0(t)} \right)^2 - \frac{N_2(t)}{N_0(t)} + \frac{1}{2} \left(\frac{N_1(t)}{N_2(t)} \right)^2 \right\} \right] - P_1(t) \left[\frac{1}{T} \left(\frac{P_1(t)}{P_0(t)} - \frac{N_1(t)}{N_0(t)} \right) \right] - P_2(t) \left[d + \frac{1}{T} \ln \left(\frac{aP_0(t)}{cN_0(t)} \right) \right].$$

(4.4.3.6)

Ve bu şekilde devam eder.

Bu metot J_t^{α} ! ve J_t^{β} ! (D_t^{α} !Æ½! D_t^{β} ! Caputo türevlerinin ters operatörleri) operatörlerinin (4.4.4.6) denklemlerinin her iki tarafına uygulanmasına dayanır.

$$N_0(t) = c_1$$
$$P_0(t) = c_2$$

$$N_1(t)=\left[\frac{r}{\lambda}c_1\left\{1-\left(\frac{c_1}{k}\right)^{\lambda}\right\}-c\right]c_1\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)},$$

$$P_1(t)=\left[b\frac{c}{a}c_1-c_2\left\{d+\frac{1}{T}\ln\left(\frac{ac_2}{cc_1}\right)\right\}\right]\frac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}.$$

$$N_2(t)=c_1\left[\frac{r}{\lambda}\left\{1-\left(\frac{c_1}{k}\right)^{\lambda}\right\}-c\right]\left[\frac{r}{\lambda}\left\{1-(\lambda+1)\left(\frac{c_1}{k}\right)^{\lambda}\right\}-c\right]\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}$$

$$P_2(t)=c_1\left[\frac{r}{\lambda}\left\{1-\left(\frac{c_1}{k}\right)^{\lambda}\right\}-c\right]\left(b\frac{c}{a}+\frac{c_2}{Tc_1}\right)\frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}$$
$$-\left[b\frac{c}{a}c_1-c_2\left\{d+\frac{1}{T}\ln\left(\frac{ac_2}{cc_1}\right)\right\}\right]$$
$$\left[\frac{1}{T}+\left\{d+\frac{1}{T}\ln\left(\frac{ac_2}{cc_1}\right)\right\}\right]\frac{t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta+1)}.$$

$$N_3(t)=c_1\left[\frac{r}{\lambda}\left\{1-\left(\frac{c_1}{k}\right)^{\lambda}\right\}-c\right]\left[\frac{r}{\lambda}\left\{1-(\lambda+1)\left(\frac{c_1}{k}\right)^{\lambda}\right\}-c\right]^2\frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}$$
$$-\frac{(\lambda+1)}{2}r\frac{c_1^{\lambda-1}}{k^{\lambda}}\left[\frac{r}{\lambda}\left\{1-\left(\frac{c_1}{k}\right)^{\lambda}\right\}-c\right]^2\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\left(\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(3\alpha+1)\right)}t^{3\alpha}$$

$$P_3(t)=\left[\frac{r}{\lambda}\left\{1-\left(\frac{c_1}{k}\right)^{\lambda}\right\}-c\right]$$
$$\left[\frac{r}{\lambda}\left\{1-(\lambda+1)\right\}-c\right]\left(b\frac{c}{a}c_1+\frac{c_2}{T}\right)\frac{t^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)}$$
$$+\left[b\frac{c}{a}c_1-c_2\left\{d+\frac{1}{T}\ln\left(\frac{ac_2}{cc_1}\right)\right\}\right]$$

$$\left[\frac{1}{T}+\left\{d+\frac{1}{T}\ln\left(\frac{ac_2}{cc_1}\right)\right\}\right]^2\frac{t^{3\beta}}{\Gamma(3\beta+1)}$$
$$-c_1\left[\frac{r}{\lambda}\left\{1-\left(\frac{c_1}{k}\right)^{\lambda}\right\}-c\right]\left(b\frac{c}{a}+\frac{c_2}{Tc_1}\right)$$

$$\left[\frac{1}{T}+\left\{d+\frac{1}{T}\ln\left(\frac{ac_2}{cc_1}\right)\right\}\right]\frac{t^{\alpha+2\beta}}{\Gamma(\alpha+2\beta+1)}$$
$$-\frac{1}{2Tc_2}\left[b\frac{c}{a}c_1-c_2\left\{d+\frac{1}{T}\ln\left(\frac{ac_2}{cc_1}\right)\right\}\right]\frac{\Gamma(2\beta+1)}{\left(\Gamma(\beta+1)\right)^2\Gamma(3\beta+1)}t^{3\beta}$$
$$-\frac{c_2}{2T}\left[\frac{r}{\lambda}\left\{1-\left(\frac{c_1}{k}\right)^{\lambda}\right\}-c\right]^2\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\left(\Gamma(\alpha+1)\right)^2\Gamma(2\alpha+\beta+1)}t^{2\alpha+\beta}$$
$$+\frac{1}{T}\left[\frac{r}{\lambda}\left\{1-\left(\frac{c_1}{k}\right)^{\lambda}\right\}-c\right]\left[b\frac{c}{a}c_1-c_2\left\{d+\frac{1}{T}\ln\left(\frac{ac_2}{cc_1}\right)\right\}\right]$$
$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha+2\beta+1)}t^{\alpha+2\beta}.$$

x_m ve y_m nin bileşenlerinin geri kalanları için kolayca ileri gidilirse, m≥0 için HPM sağlanabilir ve buradan seri çözümleri istenen yaklaşımları belirtebilir.

Sonuç olarak N(t) ve P(t) nin yaklaşık çözümlerini aşağıda verilen kısıtlı serilerle buluruz.

$$N(t)=\lim_{M\to\infty}\Phi_M(t) \qquad \mathrm{P}(t)=\lim_{M\to\infty}\Psi_M(t)$$

$$\Phi_M(t)=\sum_{m=0}^{M-1}N_m(t),\ \Psi_M(t)=\sum_{m=0}^{M-1}P_m(t)$$

olmak üzere. Yukarıdaki bu iki seri çok hızlı olarak reel fizik problemlerinde yakınsamaktadır. Hızlı yakınsama, yaklaşık çözümleri elde etmek için sadece birkaç terimin gerekli olması anlamına gelir. (Swarnalı Sharma ve ,G.P. Samanta 2010)

5.3. Modelin Varyasyonel İterasyon Metodu (V.I.M) ile Çözümü

Varyasyonel iterasyon yöntemini kullanarak (4.4.1) ve (4.4.2) denklemlerinin çözümünü bulalım:

1. Durum: Normal Koşullarda ($cN \geq aP$):

Varyasyonel iterasyon metoduna göre (4.4.1) sisteminin iterasyon formülü;

$$N^{(k+1)}(t)=N^{(k)}(t)-\int_0^t\left[D_t^{\alpha}N^k(\tau)-\frac{r}{\lambda}\left\{1-\left(\frac{N^k(\tau)}{k}\right)^{\lambda}\right\}N^k(\tau)+aP^k(\tau)\right]d\tau$$

$$P^{(k+1)}(t)=P^k(t)-\int_0^t\left[D_t^{\beta}P^k(\tau)-(b-d)P^k(\tau)\right]d\tau$$

Yukarıdaki varyasyonel iterasyon formülü ile $N^0(t)=c_1$ ve $P^0(t)=c_2$ ile başlayarak aşağıdaki yaklaşımlar elde edebiliriz.

$$N^{(1)}(t)=c_1+\left[\frac{r}{\lambda}\left\{1-\left(\frac{c_1}{k}\right)^{\lambda}\right\}c_1-ac_2\right]t,$$

$$P^{(1)}(t)=c_2+(b-d)c_2t$$

$$N^{(2)}(t)=c_1+\left[\frac{r}{\lambda}\left\{2-\left(\frac{c_1}{k}\right)^{\lambda}\right\}c_1-2ac_2\right]t+\left[\frac{r}{\lambda}\left\{\frac{r}{\lambda}(1-\left(\frac{c_1}{k}\right)^{\lambda})c_1-ac_2\right\}-a(b-d)c_2\right]\frac{t^2}{2}$$
$$-\frac{r}{\lambda}\frac{\left[c_1+\left\{\frac{r}{\lambda}(1-\left(\frac{c_1}{k}\right)^{\lambda})c_1-ac_2\right\}t\right]^{\lambda+2}}{k^{\lambda}(\lambda+2)\left[\frac{r}{\lambda}\left\{1-\left(\frac{c_1}{k}\right)^{\lambda}\right\}c_1-ac_2\right]}-\left[\frac{r}{\lambda}\left\{1-\left(\frac{c_1}{k}\right)^{\lambda}\right\}c_1-ac_2\right]\frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}$$

$$P^{(2)}(t)=c_2+2(b-d)c_2t+(b-d)^2c_2\frac{t^2}{2}-(b-d)c_2\frac{t^{2-\beta}}{\Gamma(3-\beta)},$$

ve bu şekilde devam eder. Basit işlemler yoluyla N^k ve P^k nın istenen kesin sonucu belirlenebilir.

2. Durum: Açlık Durumunda ($cN \le aP$):

Varyasyonel iterasyon metoduna göre (4.4.2) sisteminin iterasyon formülü;

$$N^{(k+1)}(t)=N^{(k)}(t)-\int_0^t\left[D_t^{\alpha}N^k(\tau)-\left\{\frac{r}{\lambda}\left(1-\left(\frac{N^k(\tau)}{k}\right)^{\lambda}\right)-c\right\}N^k(\tau)\right]d\tau$$

$$P^{(k+1)}(t)=P^{(k)}(t)-\int_0^t\left[D_t^{\beta}P^k(\tau)-\frac{bc}{a}N^k(\tau)+\left\{d+\frac{1}{T}\ln\left(\frac{aP^k(\tau)}{cN^k(\tau)}\right)\right\}P^k(\tau)\right]d\tau$$

Yukarıdaki varyasyonel iterasyon formülü ile $N^0(t)=c_1$ ve $P^0(t)=c_2$ ile başlayarak aşağıdaki yaklaşımlar elde edebiliriz.

$$N^{(1)}(t)=c_1+\left[\frac{r}{\lambda}\left\{1-\left(\frac{c_1}{k}\right)^{\lambda}\right\}c\right]c_1t\,,$$

$$P^{(1)}(t)=c_2+\left[\frac{bcc_1}{a}-\left\{d+\frac{1}{T}\ln\left(\frac{ac_2}{cc_1}\right)\right\}c_2\right]t$$

$$N^{2}(t)=c_1+\left[\frac{r}{\lambda}\left\{2-\left(\frac{c_1}{k}\right)^{\lambda}\right\}-2c\right]c_1t+c_1\left(\frac{r}{\lambda}-c\right)\left[\frac{r}{\lambda}\left\{1-\left(\frac{c_1}{k}\right)^{\lambda}\right\}-c\right]\frac{t^2}{2}$$

$$-\frac{r}{\lambda}\frac{\left[c_1+\left\{\frac{r}{\lambda}\left(1-\left(\frac{c_1}{k}\right)^{\lambda}\right)-c\right\}c_1t\right]^{\lambda+2}}{k^{\lambda}(\lambda+2)\left[\frac{r}{\lambda}\left\{1-\left(\frac{c_1}{k}\right)^{\lambda}\right\}-c\right]c_1}-\left[\frac{r}{\lambda}\left\{1-\left(\frac{c_1}{k}\right)^{\lambda}\right\}-c\right]c_1\frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}$$

$$P^{(2)}(t)=c_2+\left[\frac{bcc_1}{a}-\left\{d+\frac{1}{T}\ln\left(\frac{ac_2}{cc_1}\right)\right\}c_2\right]t+\left(\frac{bcc_1}{a}-dc_2\right)t+$$

$$\left[\frac{bc}{a}\left\{\frac{r}{\lambda}\left(1-\left(\frac{c_1}{k}\right)^{\lambda}\right)-c\right\}c_1-d\left\{\frac{bcc_1}{a}-\left\{d+\frac{1}{T}\ln\left(\frac{ac_2}{cc_1}\right)\right\}c_2\right\}\right]\frac{t^2}{2}$$

$$-\left[\frac{bcc_1}{a}-\left\{d+\frac{1}{T}\ln\left(\frac{ac_2}{cc_1}\right)\right\}c_2\right]\frac{t^{2-\beta}}{\Gamma(3-\beta)}-\frac{1}{4T\left[\frac{bcc_1}{a}-\left\{d+\frac{1}{T}\ln\left(\frac{ac_2}{cc_1}\right)\right\}c_2\right]}$$

$$\left[-2c_2^2\ln c_2+2c_2^2\ln\left(c_2+\left\{\frac{bcc_1}{a}-\left(d+\frac{1}{T}\ln\left(\frac{ac_2}{cc_1}\right)\right)c_2\right\}t\right)+\left\{\frac{bcc_1}{a}-\left(d+\frac{1}{T}\ln\left(\frac{ac_2}{cc_1}\right)\right)c_2\right\}t\right.$$

$$\left(2c_2+\left\{\frac{bcc_1}{a}-\left(d+\frac{1}{T}\ln\left(\frac{ac_2}{cc_1}\right)\right)c_2\right\}t\right)\left(-1+2\ln\left(a\left(c_2+\left\{\frac{bcc_1}{a}-\left(d+\frac{1}{T}\ln\left(\frac{ac_2}{cc_1}\right)\right)c_2\right\}t\right)\right)\right)\Bigg]$$

$$+\frac{1}{4T\left[\left\{\frac{r}{\lambda}\left(1-\left(\frac{c_1}{k}\right)^{\lambda}\right)-c\right\}c_1\right]^2}\Bigg[-\left\{\frac{r}{\lambda}\left(1-\left(\frac{c_1}{k}\right)^{\lambda}\right)-c\right\}c_1t$$

$$\left(4c_2\left\{\frac{bcc_1}{a}-\left(d+\frac{1}{T}\ln\left(\frac{ac_2}{cc_1}\right)\right)c_2\right\}-2c_1\left\{\frac{bcc_1}{a}-\left(d+\frac{1}{T}\ln\left(\frac{ac_2}{cc_1}\right)\right)c_2\right\}+\right.$$

$$\left.\left\{\frac{r}{\lambda}\left(1-\left(\frac{c_1}{k}\right)^{\lambda}\right)-c\right\}c_1\left\{\frac{bcc_1}{a}-\left(d+\frac{1}{T}\ln\left(\frac{ac_2}{cc_1}\right)\right)c_2\right\}t\right)+$$

$$2a\left(-2c_2c_1\left\{\frac{r}{\lambda}\left(1-\left(\frac{c_1}{k}\right)^{\lambda}\right)-c\right\}+c_1\left\{\frac{bcc_1}{a}-\left(d+\frac{1}{T}\ln\left(\frac{ac_2}{cc_1}\right)\right)c_2\right\}\right)$$

$$\left(\ln c_1-\ln\left(c_1+\left\{\frac{r}{\lambda}\left(1-\left(\frac{c_1}{k}\right)^{\lambda}\right)-c\right\}c_1t\right)\right)+2\left(\left\{\frac{r}{\lambda}\left(1-\left(\frac{c_1}{k}\right)^{\lambda}\right)-c\right\}c_1\right)^2t$$

$$\left.\left(2c_2+\left\{\frac{bcc_1}{a}-\left(d+\frac{1}{T}\ln\left(\frac{ac_2}{cc_1}\right)\right)c_2\right\}t\right)\ln\left(c\left(c_1+\left\{\frac{r}{\lambda}\left(1-\left(\frac{c_1}{k}\right)^{\lambda}\right)-c\right\}c_1t\right)\right)\right]$$

ve bu şekilde devam eder. Basit işlemler yoluyla N^k ve P^k nın istenen kesin sonucu belirlenebilir. (Swarnalı Sharma ve ,G.P. Samanta 2010)

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

6.1 Sonuçlar

Bu bölümde av ve avcı türlerini $\alpha = \beta = 0.4, 0.6, 0.8$ farklı kesirli Brown hareketi için ve $\alpha = \beta = 1$ standart hareketi için DTM , HPM ve VIM kullanılarak, t zamanının çeşitli değerleri için ve tablo 1 ve tablo 2 de verilen diğer değişkenler için sayısal simülasyonları hesaplanmıştır. Bu karşılaştırmalı sonuçlar Şekil 1 –Şekil 8 de grafiklerle verilmiştir.

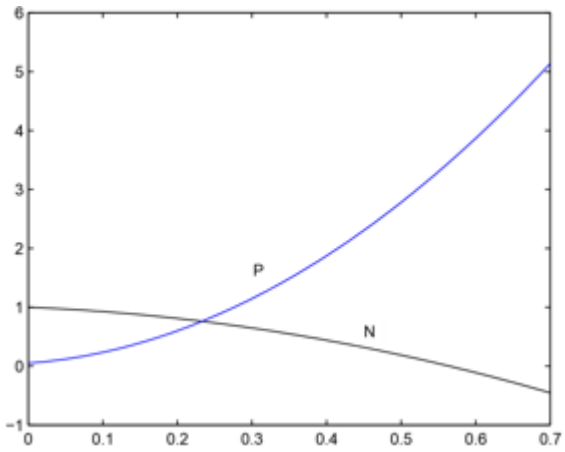
Şekil 1-Şekil 4 de, av-avcı popülasyon yoğunluğunun zaman evrimi normal durum için $(cN \geq aP)$, tablo 1 deki başlangıç koşulları altında DTM, HPM ve VIM nin her biri kullanılarak grafiksel olarak verilmiştir. Bu durumda, her iki popülasyonunda mevcut olduğu fakat t zamanına bağlı olarak av popülasyonunun azaldığı avcı popülasyonunun arttığı gözlemlenmektedir. Diğer taraftan, Şekil 5- Şekil 8 e kadar av-avcı popülasyon yoğunluğunun zaman evrimi açlık durumu için $(cN \leq aP)$, tablo 2 deki başlangıç koşulları altında DTM, HPM ve VIM nin her biri kullanılarak grafiksel olarak verilmiştir. Bu durumda her iki popülasyon da mevcut ve t zamanı ile artmaktadır. Fakat t zamanı ile av popülasyon artış oranı, avcı popülasyonundan daha büyüktür.

(4.4.1) ve (4.4.2) denklemlerinin D.T.M, H.P.M ve V.I.M ile elde edilen çözümleri Maple programı kullanılarak oluşturulan grafiklerle aşağıdaki gibi verilmiştir.

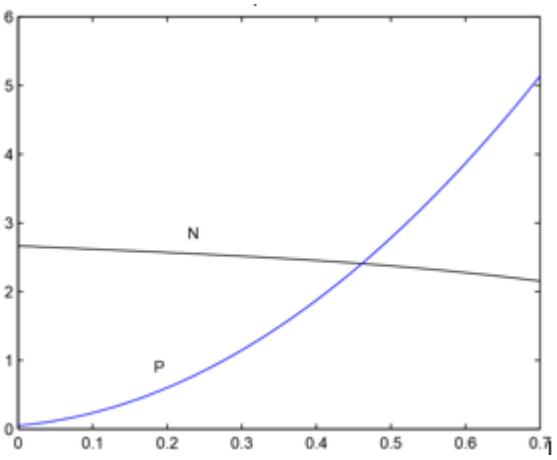
1. durum ve tablo1 değerlerine göre;

Tablo1	
a	10
b	20
d	1
r	10
k	1
λ	1
c_1	1
c_2	0.05

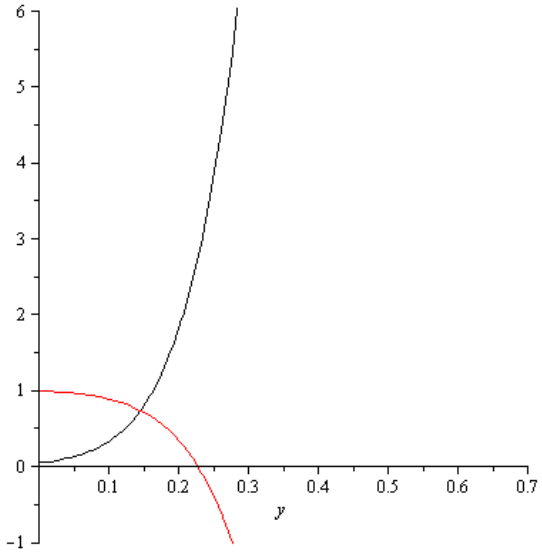
a) $\alpha = \beta = 1$ için,



Şekil 1a HPM

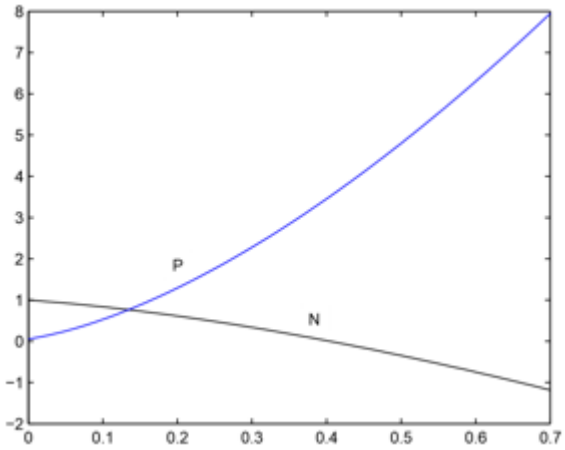


Şekil 1b VIM

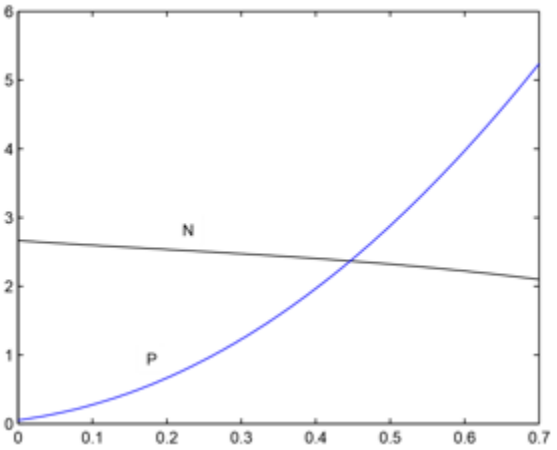


Şekil 1c DTM

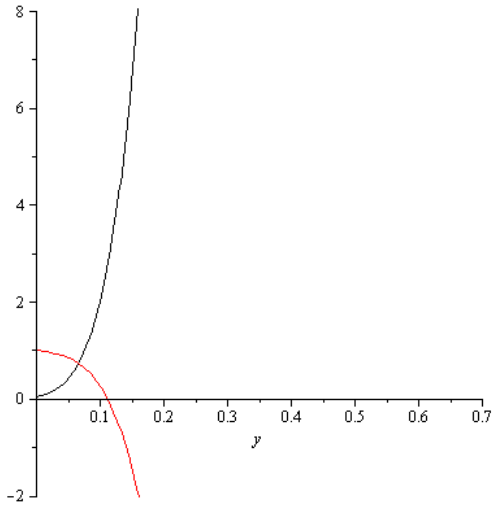
b) $\alpha = \beta = 0.8$ için,



Şekil 2a HPM

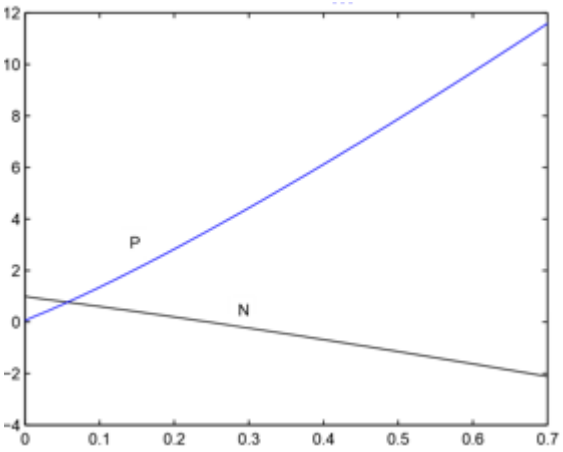


Şekil 2b VIM

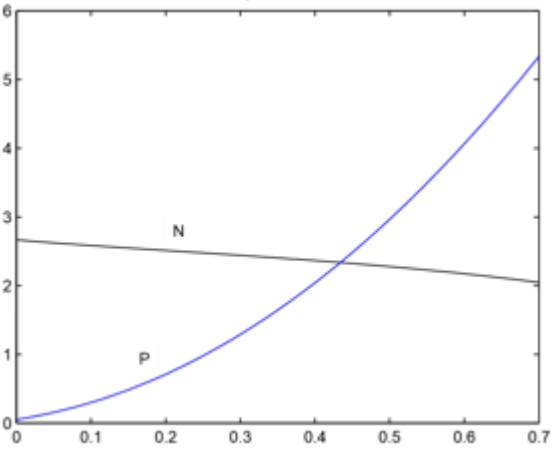


Şekil 2c DTM

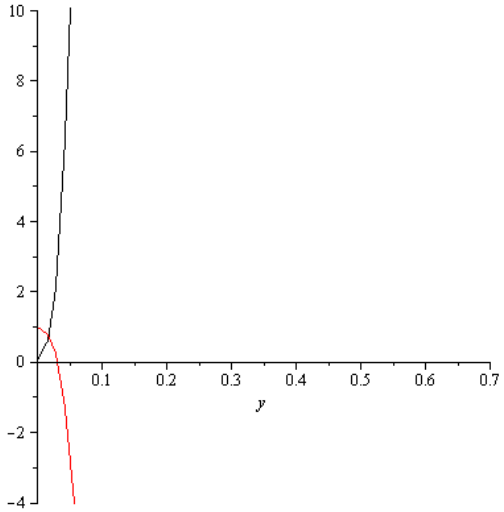
c) $\alpha = \beta = 0.6$ için,



Şekil 3a HPM

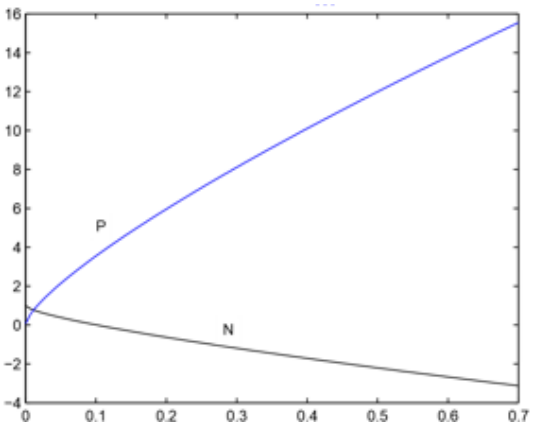


Şekil 3b VIM

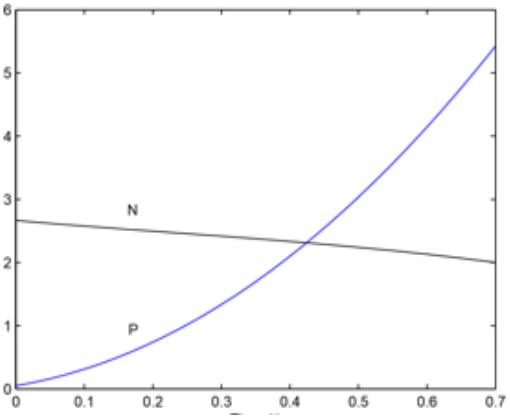


Şekil 3c DTM

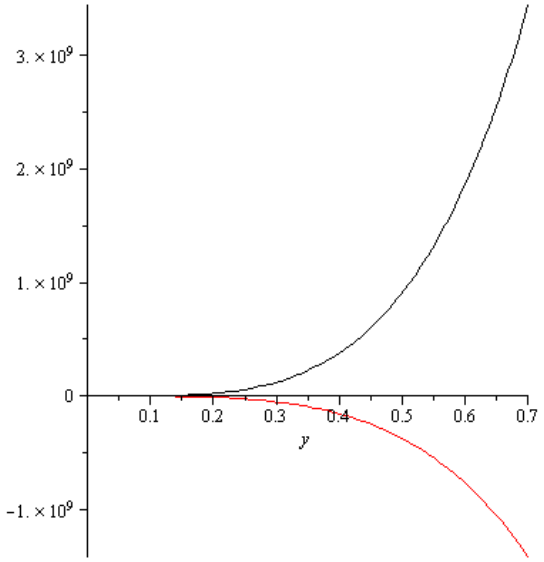
d) $\alpha = \beta = 0.4$ için



Şekil 4a HPM



Şekil 4b VIM

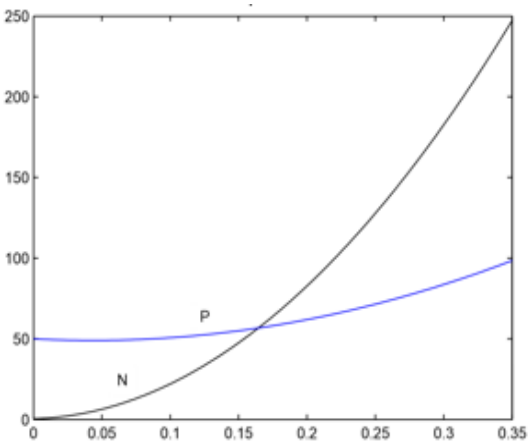


Şekil 4c DTM

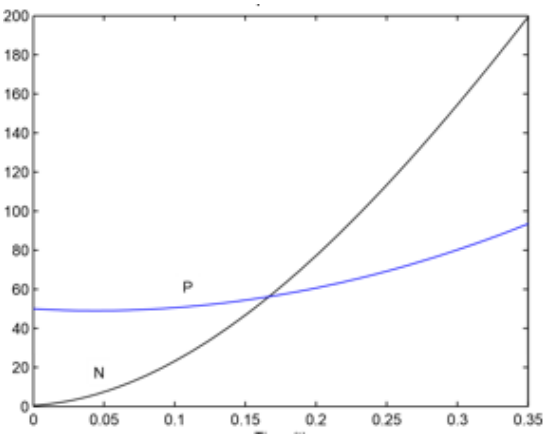
2.durum ve tablo2 değerlerine göre;

Tablo 2	
a	10
b	20
c	10
d	1
r	100
k	50
λ	1
T	40
c_1	0.5
c_2	50

a) $\alpha = \beta = 1$ için

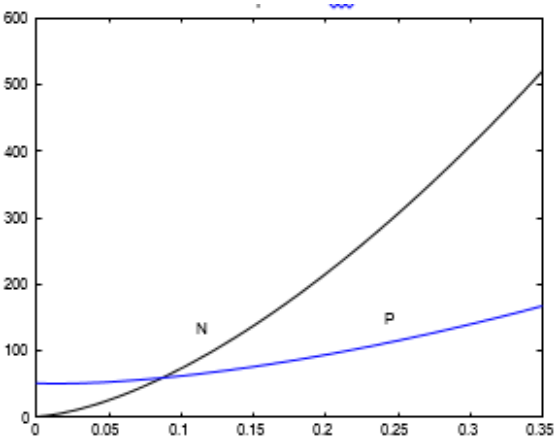


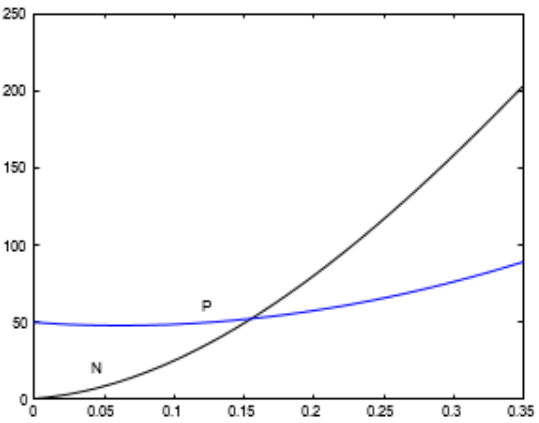
Şekil 5a HPM



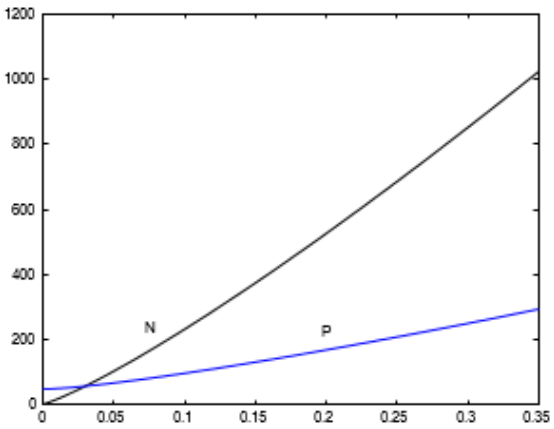
Şekil 5B VIM

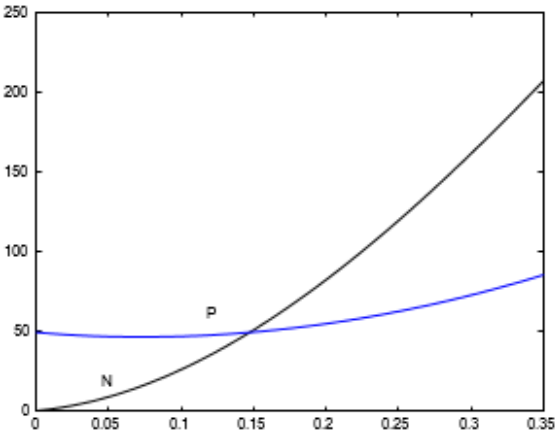
b) $\alpha = \beta = 0.8$ için



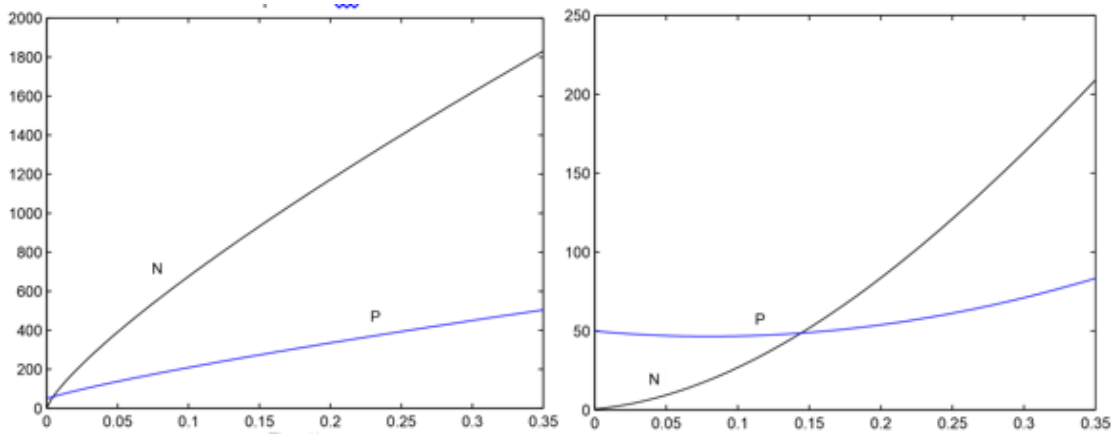


c) $\alpha = \beta = 0.6$ için





d) $\alpha = \beta = 0.4$ için



Grafikler incelendiğinde, farklı dönüşüm metotları kullanılarak elde edilen çözümler arasında bir benzerlik gözlenmiştir. Bu yöntemlerden HPM ve DTM ile elde edilen sonuçlar birbirine daha yakın görülmekte iken VIM ile elde edilen sonuçlar biraz daha farklılık göstermektedir.

6.2 Öneriler

Kesirli mertebeden diferansiyel denklemlere dayalı modellerin gelişim süreci farklı lineer olmayan fenomenlerin yaklaşık tanımını sağlama becerileri nedeniyle dinamik sistemlerin incelenmesinde son zamanlarda popülerlik kazanmıştır. Ekolojik model araştırmacıları ve kesirli hesap araştırmacıları bu alanlarda Brown hareketleri ve farklı kesirli mertebeden diferansiyel sistemlerin avantajlarını kullanarak ve ayrıca Gompertz modeli üzerine yeni çalışmalar yapabilirler.

KAYNAKLAR

A. Arıkoğlu, I. Özkol, Solution of fractional differential equations by using differential transform method. Chaos, Solitons & Fractals 34 (5) (2007), 1473–1481.

Gulsu M.,Sezer M.,2005,A Taylor polynomial approach for solving differential-difference equations, Journal of Comp. and Applied Math.,186,349-364

Gulsu M.,Sezer M., Güney Z., 2006,Approximate solution of general high-order linear nonhomegeneous difference equations by means of Taylor Collacation method, Appl. Math. Comp. 173,683–693

G. Oturanç, Y. Keskin, 2011, Diferansiyel dönüşüm yöntemiyle diferansiyel denklemlerin çözülmesi Konya Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

G. Oturanç, A. Kurnaz, Y. Keskin, A new analytical approximate method for the solution of fractional differential equations. International Journal of Computer Mathematics 85 (1) (2008), 131–142.

He, J.H. 1999. Variational Iteration Method—A Kind Of Nonlinear Analytical Technique: Some Examples, Int. J. Non-Linear Mech. 34, 708–799

He,J.H. Newton-like iteration method for solving algebraic equations, 1998, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 3 (2), 106–109.

Javidi M. 2007, Iterative methods to nonlinear equations, Applied Mathematics and Computation, 193, 360-365.

K.B. Oldham, J Spanier, The Fractional Calculus. New York: Academic Press; 1974.

Karamete A.,Sezer M.,2002,A Taylor Collacation method for the solution of Linear integro differential equations, Intern. J. Computer Math,79(9),987-1000

Keskin Yıldıray,2005,Yüksek Lisans tezi, Diferansiyel dönüşüm yöntemiyle diferansiyel denklemlerin çözülmesi, Konya Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Keskin Y., Oturanç, G.,2008, The differential transform methods for nonlinear function and its applications,SJAM Winter-Spring,Volume 9,Number 1,69-76

Kurnaz, A., Oturanç, G., Kiriş, M. E. 2005, *n* dimensional differential transformation method for solving PDEs, İnternational journal of Computer Mathematics, 82,Number 3,369-380

Kurnaz, A., Oturanç, G. 2005, The differential transform approximation for the system of ordinary differential equation, International Journal of Computer Mathematics, 82, Number 6, 709-719(11)

Lüleci A., 2011, Yüksek Lisan Tezi, Kesirli basamaktan bazı diferansiyel denklem modelleri, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

N.T. Shawagfeh, Analytical approximate solutions for nonlinear fractional differential equations. Applied Mathematics and Computation 131(2–3) (2002), 517–529.

N.H. Sweilam, M.M. Khader, R. F. Al–Bar, Numerical studies for a multi-order fractional differential equation, Physics Letters A 371 (1–2) (2007), 26–33.

O. Abdulaziz, I. Hashim, S. Momani, Solving systems of fractional differential equations by homotopy–perturbation method. Physics Letters A 372 (4) (2008), 451–459.

S. Abbasbandy, An approximation solution of a nonlinear equation with Riemann–Liouville's fractional derivatives by He's variational iteration method. Journal of Computational and Applied Mathematics 207 (1) (2007), 53–58.

Sema Servi, Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri Üzerine Farklı Yaklaşımlar, Yüksek lisans Tezi, Selcuk University,2008, Konya.

Sezer M., Karamete A.,Gulsu M.,2005,Taylor polynomial solutions of systems of linear differential equations with variable coeffiencients, Intern. J. Computer Math,82(6),755-764

S. Momani, Z. Odibat, Numerical comparison of methods for solving linear differential equations of fractional order. Chaos, Solitons & Fractals 31 (5) (2007), 1248–1255.

S.S. Ray, R.K. Bera, An approximate solution of a nonlinear fractional differential equation by Adomian decomposition method. Applied Mathematics and Computation 167 (1) (2005), 561–571.

Swarnalı Sharma ve ,G.P. Samanta Analysıs Of A Predator-Prey Populatıon Model Department of Mathematics Bengal Engineering and Science University, Shibpur Howrah - 711 103, INDIA(2010)

Y. Hu, Y. Luo, Z. Lu, Analytical solution of the linear fractional differential equation by Adomian decomposition method. Journal of Computational and Applied Mathematics 215 (1) (2008), 220–229.

Çenesiz, Yücel. Bagley-Torvik denkleminin kesirli diferensiyel dönüşüm metodu ile çözümü ve diğer yöntemlerle karşılaştırılması. Diss. Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2007.

Z. Odibat, S. Momani, Application of variational iteration method to nonlinear differential equations of fractional order, Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 7 (1) (2006) 15–27.

V.S. Ertürk, S. Momani, Solving systems of fractional differential equations using differential transform method. Journal of Computational and Applied Mathematics 215 (1) (2008), 142–151.

Y. Hu, Y. Luo, Z. Lu, Analytical solution of the linear fractional differential equation by Adomian decomposition method. Journal of Computational and Applied Mathematics 215 (1) (2008), 220–229.

Z. Odibat, S. Momani, Application of variational iteration method to nonlinear differential equations of fractional order, Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 7 (1) (2006) 15–27.

EKLER

EK-1

```
restart :
 odr := 5 :
p[0] := 1 :
 n[0] := 0.05 :
 #for h from -5 to  −1 do
 #p[h] := 0 :
 #N[h] := 0 :
 #od:
```

for h **from** 0 **to** 5 **do**

$$n[h+1] := simplify\left(\frac{1}{h+1}\left(\left(10\cdot n[h] - 10\cdot\sum_{r=0}^{h} n[r]\cdot n[h-r] - 10\cdot p[h]\right)\right)\right):$$

$$p[h+1] := simplify\left(\frac{(20-1)\cdot p[h]}{h+1}\right):$$

```
print(n[h + 1]) :
print(p[h + 1]) :
od:
```

$$p1 := \sum_{k=0}^{odr} p[k]\cdot y^{k};$$

$$n1 := \sum_{k=0}^{odr} n[k]\cdot y^{k};$$

```
with(plots) :
#plot(numapprox[pade](p1, t, [2, 2]), t = 0 ..0.35, color = black);
#plot(numapprox[pade](n1, t, [2, 2]), t = 0 ..0.35, color = black);
f1 := plot(p1, y = 0 ..0.7, color = black) :
f2 := plot(n1, y = 0 ..0.7, color = red) :
display({f1, f2});
```

EK-2

```
restart :
 odr := 20 :
n[0] := 1 :
 p[0] := 0.05 :
 for h from −5 to −1 do
 p[h] := 0 :
 n[h] := 0 :
 od:


for h from −3 to odr do
n[h + 4] := simplify( ( 10·n[h] − 10· Σ_{r=0}^{h} n[r]·n[h − r] − 10
     ·p[h] ) · GAMMA(0.2·h + 1) / GAMMA(0.2·h + 1.8) ) :
p[h + 4] := simplify( (20 − 1)·p[h]·GAMMA(0.2·h + 1) / GAMMA(0.2·h + 1.8) ) :
print(n[h + 4]) :
print(p[h + 4]) :
 od:
p1 := Σ_{k=0}^{odr} p[k]·y^(0.2·k);
n1 := Σ_{k=0}^{odr} n[k]·y^(0.2· k);
 with(plots) :
 #plot(numapprox[pade](p1, t, [2, 2]), t = 0..0.35, color = black);
 #plot(numapprox[pade](n1, t, [2, 2]), t = 0..0.35, color = black);
 f1 := plot(p1, y = 0..0.7, color = black) :
 f2 := plot(n1, y = 0..0.7, color = red) :
display({f1, f2});
```

EK-3

```
restart :
 odr := 20 :
n[0] := 1 :
 p[0] := 0.05 :
 for h from −5 to −1 do
 p[h] := 0 :
 n[h] := 0 :
 od:
```

$$\textbf{for } h \textbf{ from } -2 \textbf{ to } odr \textbf{ do}$$

$$n[h+3] := simplify\left(\left(10\cdot n[h] - 10\cdot \sum_{r=0}^{h} n[r]\cdot n[h-r] - 10 \cdot p[h]\right)\cdot \frac{\mathrm{GAMMA}(0.2\cdot h+1)}{\mathrm{GAMMA}(0.2\cdot h+1.6)}\right):$$

$$p[h+3] := simplify\left(\frac{(20-1)\cdot p[h]\cdot \mathrm{GAMMA}(0.2\cdot h+1)}{\mathrm{GAMMA}(0.2\cdot h+1.6)}\right):$$

```
print(n[h + 3]) :
print(p[h + 3]) :
od:
```

$$p1 := \sum_{k=0}^{odr} p[k]\cdot y^{0.2\cdot k};$$

$$n1 := \sum_{k=0}^{odr} n[k]\cdot y^{0.2\cdot k};$$

```
with(plots) :
#plot(numapprox[pade](p1, t, [2, 2]), t = 0 ..0.35, color = black );
#plot(numapprox[pade](n1, t, [2, 2]), t = 0 ..0.35, color = black );
f1 := plot(p1, y = 0 ..0.7, color = black ) :
f2 := plot(n1, y = 0 ..0.7, color = red) :
display({f1, f2});
```

EK-4

```
restart :
odr := 20 :
n[0] := 1 :
p[0] := 0.05 :
for h from -5 to -1 do
p[h] := 0 :
n[h] := 0 :
od:
```

```
for h from -1 to odr do
n[h + 2] := simplify(((10·n[h] - 10·sum(n[r]·n[h - r], r = 0 .. h)
·p[h])·GAMMA(0.2·h + 1)/GAMMA(0.2·h + 1.4))) :
p[h + 2] := simplify((20 - 1)·p[h]·GAMMA(0.2·h + 1)/GAMMA(0.2·h + 1.4)) :
print(n[h + 2]) :
print(p[h + 2]) :
od:
p1 := sum(p[k]·y^(0.2·k), k = 0 .. odr);
n1 := sum(n[k]·y^(0.2·k), k = 0 .. odr);
with(plots) :
#plot(numapprox[pade](p1, t, [2, 2]), t = 0 ..0.35, color = black);
#plot(numapprox[pade](n1, t, [2, 2]), t = 0 ..0.35, color = black);
f1 := plot(p1, y = 0 ..0.7, color = black) :
f2 := plot(n1, y = 0 ..0.7, color = red) :
display({f1, f2});
```

EK-5

```
p[0] := 50 :
 n[0] := 0.5 :
 #for h from  −5 to  −1 do
 #p[h] := 0 :
 #N[h] := 0 :
 #od:
 for h from 0 to 4 do
```

$$n[h+4] := simplify\left(\frac{\left(90\cdot n[h] - 2\cdot\sum_{r=0}^{h} n[r]\cdot n[h-r]\right)}{\mathrm{h}+1}\right):$$

$$p[h+4] := simplify\left(\frac{1}{h+1}\left(\left(20\cdot n[h] - p[h] - \frac{\sum_{r=0}^{h}(pp[r]-nn[r])\cdot p[h-r]}{40}\right)\right)\right):$$

```
 print(n[h + 1]) :
 print(p[h + 1]) :
 od:
```

$$p1 := \sum_{k=0}^{3} p[k]\cdot y^{k};$$

$$n1 := \sum_{k=0}^{3} n[k]\cdot y^{k};$$

```
 with(plots) :
 #plot(numapprox[pade](p, t, [2, 2]), t = 0 ..0.35, color = black );
 #plot(numapprox[pade](n, t, [2, 2]), t = 0 ..0.35, color = black );
 f1 := plot(p1, y = 0 ..0.7, color = black ) :
 f2 := plot(n1, y = 0 ..0.7, color = red) :
display({f1, f2});

 f1 := plot(inttrans[invlaplace](subs(y = 1/s, numapprox[pade](subs(s
       = 1/y, inttrans[laplace](p1, y, s)), y = 0, [1, 1])), s, y), y = 0
       ..0.35, color = black ) :
 f2 := plot(inttrans[invlaplace](subs(y = 1/s, numapprox[pade](subs(s
       = 1/y, inttrans[laplace](n1, y, s)), y = 0, [1, 1])), s, y),= 0 ..0.35,
      color = red) :
 display({f1, f2});
```

EK-6

```
restart :
  NF := ln(Np(x, t)) :#Nonlinear Function
 m := 4 :      # Order
 p[t] := sum(p[b]*t^b, b = 0 ..m) :
NF[t] := subs(Np(x, t) = p[t], NF) :
s := expand (NF[t], t) :
dt := unapply (s, t) :
for i from 0  to m do
 pp[i] := ((D@@i)(dt)(0)/i!) :
 od:


with(plots) :
 #plot(numapprox [pade ](p, t, [2, 2]), t = 0 ..0.35, color = black );
 #plot(numapprox [pade ](n, t, [2, 2]), t = 0 ..0.35, color = black );
 f1 := plot(p1, y = 0 ..0.7, color = black ) :
 f2 := plot(n1, y = 0 ..0.7, color = red) :
display ({f1 , f2 });

 f1 := plot(inttrans[ invlaplace](subs(y = 1/s, numapprox[ pade ](subs(s
       = 1/y, inttrans[ laplace](p1, y, s) ), y = 0, [1, 1] ) ), s, y), y = 0
       ..0.35, color = black ) :
 f2 := plot(inttrans[ invlaplace](subs(y = 1/s, numapprox[ pade ](subs(s
       = 1/y, inttrans[ laplace](n1, y, s) ), y = 0, [1, 1] ) ), s, y),= 0 ..0.35,
      color = red ) :
 display ({f1 , f2 });
```

EK-7

$p[0] := 50:$
$n[0] := 0.5:$
for h **from** -5 **to** -1 **do**
$p[\mathrm{h}] := 0:$
$n[\mathrm{h}] := 0:$
$pp[h] := 0:$
$nn[h] := 0:$
od:
for h **from** -2 **to** 10 **do**
$n[h+4]$

$$:= \frac{\left(90\cdot n[h] - 2\cdot \sum_{r=0}^{h} n[r]\cdot n[h-r]\right)\cdot \mathrm{GAMMA}(0.2\cdot h+1)}{\mathrm{GAMMA}(0.2\cdot h+1.8)}:$$

$$p[h+4] := \frac{1}{\mathrm{GAMMA}(0.2\cdot h+1.8)}\left(\left(20\cdot n[h] - p[h] - \frac{\sum_{r=0}^{h}(pp[r]-nn[r])\cdot p[h-r]}{40}\right)\cdot \mathrm{GAMMA}(0.2\cdot h+1)\right):$$

$print(n[h+4]):$
$print(p[h+4]):$
od:

$$p1 := \sum_{k=0}^{10} p[k]\cdot t^{0.2\cdot k};$$

$$n1 := \sum_{k=0}^{10} n[k]\cdot t^{0.2\cdot k};$$

$with(plots):$
$\#plot(numapprox[pade](\mathrm{p}, t, [2,2]), t=0..0.7, color=black);$
$\#plot(numapprox[pade](n, t, [2,2]), t=0..0.7, color=black);$
$f1 := plot(p1, t=0..0.35, color=black):$
$f2 := plot(\mathrm{n1}, \mathrm{t}=0..0.35, color=black):$
$\#f1 := plot\left(subs\left(x=t^{\frac{1}{5}}, numapprox[pade](\mathrm{subs}(\mathrm{t}=\mathrm{x}^5, p), t, [4,4])\right), t=0..0.7, color=black\right):$
$\#f2 := plot\left(subs\left(x=t^{\frac{1}{5}}, numapprox[pade](\mathrm{subs}(\mathrm{t}=\mathrm{x}^5, n), t, [4,4])\right), t=0..0.7, color=red\right):$
$display(\{f1, f2\});$

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Hülya ALTUNTAŞ
Uyruğu : T.C
Doğum Yeri ve Tarihi : KAYSERİ / 1977
e-mail : hulalt@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	T.E.D Kayseri Koleji	1995
Üniversite	:	Erciyes Üniversitesi, Kayseri	2000
Yüksek Lisans	:	Selçuk Üniversitesi, Konya	

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2001-2015	M.E.B (Meram Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi)	Matematik Öğretmeni
2015-Halen	M.E.B (Karatay Anadolu Lisesi)	Matematik Öğretmeni

UZMANLIK ALANI
Uygulamalı Matematik

YABANCI DİLLER
İngilizce