



T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YENİ KESİKLİ DAĞILIMLAR VE ÖZELLİKLERİ

Kadir KARAKAYA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İstatistik Anabilim Dalını

AĞUSTOS-2015
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Kadir KARAKAYA

Tarih: 18/08/2015

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YENİ KESİKLİ DAĞILIMLAR VE ÖZELLİKLERİ

Kadir KARAKAYA

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Doç.Dr. İsmail KINACI

2015, 51 Sayfa

Jüri
Doç.Dr. İsmail KINACI
Prof.Dr. Mehmet Fedai KAYA
Yrd.Doç.Dr. Ahmet PEKGÖR

Bu tez çalışmasında, *k*-ardıl *q*-Binom dağılımının genellemesi yapılmıştır. $N_{n,k,l}^{q}$; *n* uzunluğundaki iki sonuçlu deneme dizilerinde l-örtüşen ardışık k başarı sayılarını temsil etmek üzere, $N_{n,k,l}^{q}$ rasgele değişkenine ilişkin dağılım fonksiyonu ve ilk iki moment elde edilmiştir. Ayrıca i-1 ile i. şoklar arasında geçen zamanın 1/pi ortalamalı geometrik dağılıma sahip olduğu varsayılarak yeni bir şok model önerilmiştir. Önerilen bu modele ilişkin olasılık fonksiyonu, olasılık üreten fonksiyonu, beklenen değeri ve varyansı elde edilmiştir. Yeni dağılımın gerçek veri modellemesini göstermek için ayrıca sayısal bir değerlendirme yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: İki sonuç alan denemeler, Kesikli Dağılımlar, Olasılık Üreten Fonksiyonu, Tekrar İstatistiği, *q*-Dağılımlar, *δ*- Şok Model

ABSTRACT

MS THESIS

NEW DISCRETE DISRIBUTION AND THEIR PROPERTIES

Kadir KARAKAYA

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN STATISTICS

Advisor:
Assoc. Prof. Dr. İsmail KINACI

Jury
Assoc. Prof. Dr. İsmail KINACI
Prof.Dr. Mehmet Fedai KAYA
Assist.Prof.Dr. Ahmet PEKGÖR

2015, 51 Pages

In this study, we consider a generalization of a q-Binomial distribution of order k. $N^{q}_{n,k,l}$ denote the number of l-overlapping success runs of lenght k in n Bernoulli trials under q-sequence of binary trials. The probabilty mass function, first and second moment of $N^{q}_{n,k,l}$ random variables are obtained. Also we think a shock model. We assume that the interarrival times between two consecutive shocks follow a geometric distribution with mean $1/p_i$.The pmf probabity generating function, mean and variance of the system are obtained. A numerical example is also given to show the capacity of new distribution for modelling any real data.

Keywords: Binary trials, Discrete Distributions, Probabity Generating Function, Run Statistic, q-Distributions, δ-Shock Model

ÖNSÖZ

Bu çalışmada büyük emeği geçen, yol göstericiliği ve bilgisiyle yönlendiren değerli danışmanım Doç. Dr. İsmail KINACI' ya, bu tez çalışmasındaki katkılarından dolayı Prof. Dr. Coşkun KUŞ Hocama, değerli arkadaşlarım Arş. Gör. Yunus AKDOĞAN ve Fatih ŞAHİN' e teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca her zaman yanımda olan eşim Emine KARAKAYA' ya ve bütün aileme teşekkür ederim. TÜBİTAK 2211 Yurt İçi Lisansüstü Burs Programına desteğinden dolayı teşekkür ederim.

Kadir KARAKAYA
KONYA-2015

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

1. GİRİŞ **1**

2. TEMEL KAVRAMLAR **3**

2.1. q-Sayılar İlişkin Bazı Bilgiler 3
2.2. Momentler 4
2.3. Olasılık Üreten Fonksiyon 4
2.4. Oran Tahmini 4

3. BAZI TEKRAR İSTATİSTİKLERİ VE DAĞILIMLARI **6**

3.1. q-Binom Dağılımı 6
3.2. k-ardıl Binom Dağılımı 7
3.3. k-ardıl q-Binom Dağılımı 7
3.4. k-ardıl Geometrik Dağılımı 8
3.5. k-ardıl q- Geometrik Dağılımı 9
3.6. Ling's Binom Dağılımı 10
3.7. q-Ling's Binom Dağılımı 11

4. $N_{n,k,l}^{q}$ RASGELE DEĞİŞKENİNİN DAĞILIMI VE BAZI ÖZELLİKLERİ **12**

4.1. $N_{n,k,l}^{q}$ rasgele değişkenin dağılımı 12
4.2. $N_{n,k,l}^{q}$ rasgele değişkenin beklenen değeri 17

5. YENİ BİR δ-ŞOK MODELİ **25**

5.1. Tanımlanan Sistem ve Sistemin Olasılık Fonksiyonu 25
5.2. Olasılık Üreten Fonksiyonu ve Momentler 31
5.3. Oran Tahmini 34
5.4. Sayısal Bir Örnek 37

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER **39**

KAYNAKLAR **40**

ÖZGEÇMİŞ **44**

1. GİRİŞ

İki sonuçlu denemeler (binary trials), Başarı-Başarısız, Sağlam-Bozuk gibi sonuçlar alan ve genellikle "1" ve "0" elemanları ile gösterilen denemelerdir. İki sonuç alan denemeler kullanılarak birçok tanım ortaya atılmıştır. İki sonuç alan denemelerin üst üste gelen aynı tür elemanlarının (1 veya 0) diğer türden elemanla sonlanması ile oluşan alt dizilere tekrar (run) adı verilmektedir. İki değer alabilen tekrar istatistikleri birçok uygulama alanında kullanılmaktadır. Bu uygulama alanlarından bazıları rasgelelik testleri, istatistiksel süreç kontrolü, güvenirlik ve moleküler biyoloji olarak sıralanabilir.

İlk olarak De Moivre (1738) yılında yazmış olduğu kitabında tekrar istatistikleri ile alakalı problemler ortaya koymuştur. 1940' lı yıllarda tekrar istatistikleri ile alakalı çalışmalara olan ilgi ortaya çıkmaya başlamıştır. İlk olarak bir dizinin rasgele dizilip dizilmediğinin test edilmesi amacıyla run testi kullanılmıştır. Bu testteki test istatistiğine ilişkin bazı sonuç çıkarımlar Mood (1940) ve Wald ve Wolfowitz (1940) çalışmalarında incelenmiştir. Daha sonraki yıllarda birçok tekrar istatistiği tanımlanmış ve tanımlanan tekrar istatistiklerine ilişkin bazı sonuç çıkarımları yapılmıştır. Literatürde tanımlanmış olan tekrar istatistiklerine ilişkin dağılım fonksiyonlarının elde edilmesinde kombinatorik yaklaşım, olasılık üreten fonksiyonu yaklaşımı ve Markov zinciri yaklaşımı yöntemleri kullanılmaktadır.

Mood (1940), Wald ve Wolfowitz (1940), Monsteller (1941) ve Wolfowitz (1943) tekrar istatistiklerinin temelini teşkil eden toplam tekrar sayısını (R_n) ve toplam tekrar başarı sayısını ($R_n^{(1)}$) temel alan çalışmalarını yapmışlardır. Philippou ve Makri (1986), Hirano (1986) iki sonuç alabilen n uzunluğundaki denemedeki k uzunluğuna sahip başarı tekrarlarının sayısını gösteren $E_{n,k}$ tekrar istatistiği üzerinde, Muselli (1996) yine n uzunluğundaki denemedeki k ve k' dan büyük uzunluğuna sahip başarı tekrarların sayısını gösteren $G_{n,k}$ tekrar istatistiği üzerinde, Hirano(1986), Aki ve Hirano (1988), Phillippou ve Makri (1986), Godbole (1992) n uzunluğuna sahip bir denemede örtüşmeyen (non-overlapping) ardıl olarak k tane başarı sayısını gösteren $N_{n,k}$ üzerine, Ling (1988), Ling (1989), Hirano ve ark.(1991), Koutras ve Alexandrou (1997) n uzunluğuna sahip bir denemede örtüşen (overlapping) ardıl olarak k tane başarı sayısını gösteren $M_{n,k}$ üzerine çalışmalar yapmışlardır. Tekrar istatistikleri kullanılarak Geometrik, Binom, Negatif Binom gibi bilinen bazı dağılımları genellemiştir. Philippou ve ark. (1983) geometrik dağılımını, Yalçın (2013) Ling's Binom dağılımını, Philippou (1984)

Negatif Binom dağılmını, Yalçın ve Eryılmaz (2014) *k*-ardıl geometrik ve *k*-ardıl binom dağılımlarını genellemişlerdir.

Yine 0 ve 1 değerlerini alabilen iki sonuçlu denemeleri göz önüne alalım. Ancak buradaki 0 ve 1 değerlerine yükleyeceğimiz anlam "0: şok" "1: şok değil" şeklinde olsun. Temelde iki sonuç alan denemeler üzerine kurulu olarak şok modeller tanımlanabilir. Şok modeller, rasgele büyüklükteki bir şokun rasgele bir zamanda meydana geldiği sistemlerdir. Üç farklı tür şok model bulunmaktadır. Bunlar tekrar şok modelleri, aşırı şok modeller ve birikimli şok modellerdir. Şok model son yıllarda büyük ilgi çeken konular arasında yer almaktadır. Sumita ve Shanthikumar (1985), Gut (1990), Mallor ve Omey (2001) şok modelle ilgili incelemelerde bulunmuşlardır. Bir sistemde iki ardışık şok arasındaki süre belirli bir δ değerinin altında ise böyle sistemlere δ-şok model adı verilmektedir. δ-şok model Li ve Kong (2007), Eryılmaz (2012) tarafından çalışılmıştır. Eryılmaz (2013) çalışmasında, iki şok arasındaki geçen sürenin *1/p* ortalamalı geometrik dağılıma sahip olduğu bir binom süreci olduğunu ele almış ve δ-şok modelin kesikli versiyonunu incelemiştir.

Bu çalışmada herbir başarısızlıktan sonra başarı olasılığı geometrik olarak azalan *n* tane Bernoulli denemesindeki *l* tanesi örtüşen k-ardıl başarıların sayısı şeklinde yeni bir rasgele değişken tanımlanmıştır. Ayrıca iki şok arasında geçen zamanın(yani yapılan deneme sayısının) $1/p_i$ ortalamalı geometrik dağılıma sahip olduğu varsayılarak yeni bir δ-şok model önerilmiştir.

Bu tez çalışmasının ikinci bölümünde genel tanımlar verilmiştir.

Çalışmanın üçüncü bölümünde belirli varsayımlar altında literatürde tanımlı çeşitli tekrar istatistiklerine ilişkin olasılık dağılımları ve bazı özellikleri verilmiştir.

Çalışmanın dördüncü bölümünde ise yeni tanımlanmış olan $N^{q}_{n,k,l}$ rasgele değişkenine ilişkin dağılım fonksiyonu, ilk iki momenti ele alınmıştır. Ayrıca bazı nümerik sonuçlar verilmiştir.

Çalışmanın beşinci bölümünde ise yeni bir δ-Şok model tanımlanacaktır. Tanımlanacak olan modelin olasılık fonksiyonu, olasılık üreten fonksiyonu, ortalama ve varyans değerleri verilmiştir. Yeni dağlımın gerçek veri modelleme performansını görmek için ayrıca sayısal bir değerlendirme yapılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. *q*-Sayılar İlişkin Bazı Bilgiler

x ve *q* reel sayılar (*q*≠1) ve *k* bir tamsayı olsun. $[x]_q = (1-q^x)/(1-q)$ *q*-sayısı olarak adlandırılır. $[k]_q$ ise *q*-tamsayı olarak adlandırılır. $[x]_q$ *q*-sayısının *k*. sıra faktöriyeli

$$[x]_{k,q} = [x]_q [x-1]_q \ldots [x-k+1]_q, \quad k = 0,1,\cdots \tag{2.1}$$

olarak ifade edilir ve *x*' in *k* -ardıl *q*-faktöriyeli olarak adlandırılır. *q*-Binom katsayısı (ya da Gaussian Polinomu)

$\begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}_q = \dfrac{[x]_{k,q}}{[k]_q!}$, $k = 0,1,\ldots$ olarak ifade edilir(Charalambides (2010)).

Phillips (1997) çalışmasında, [0,1] aralığında değer alabilen herhangi bir sürekli fonksiyonun *n* -ardıl *q*-Bernstein polinomunu

$$B_n(f(t),q;x) = \sum_{r=0}^{n} f(t_r) \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q x^r \prod_{i=1}^{n-r} (1-xq^{i-1}),\ n = 1,2,\ldots$$

olarak ifade etmiştir. Burada $0 < x < 1, q > 0$ *ve* $t_r = [r]_q / [n]_q, r = 0,1,\ldots,n$ şeklindedir. *q*=1 olması durumunda ise bu polinom bilinen *k*-ardıl Bernstein polinomuna

$$B_n(f(t);x) = \sum_{r=0}^{n} f(t_r) \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r},\ n = 1,2,\ldots \tag{2.2}$$

dönüşmektedir.

$$P_{n,r}(x,q) = \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q x^r \prod_{i=1}^{n-r} (1-xq^{i-1}),\ r = 0,1,\ldots,n \quad 0 < x < 1, \quad 0 < q < 1 \tag{2.3}$$

formu ise Basis q-Bernstein olarak adlandırılır.

II'inskii ve Ostrovska (2002) ve Ostrovska(2003) çalışmalarında q-Berntein Polinomunun yakınsaması üzerine çalışmalar yapmışlardır. Ostrovska (2003) çalışmasında Eşitlik 2.3' te verilen $B_n(f(t),q;x),\ n \to \infty$ *q*-Bernstein polinomunun yakınsamasını $x = q^{-m},\ q > 1$ ve *m* pozitif tamsayı olması özel durumları altında

$$P_{n,r}(q^{-m},q)=\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q q^{-rm}\prod_{i=1}^{n-r}(1-q^{-m+i-1}) \\ =\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_{q^{-1}} q^{-r(m-n+r)}(1-q^{-1})^{n-r}\left[m\right]_{n-r,q^{-1}},r=0,1,...,n \tag{2.4}$$

şeklinde elde etmiştir.

2.2. Momentler

X bir rasgele değişken ve k pozitif bir tamsayı olmak üzere $E\left(X^k\right)$ değerine X rasgele değişkeninin k. momenti, $E\left((X)_k\right)=E\left(X(X-1)\cdots(X-k+1)\right)$ değerine X rasgele değişkeninin k. faktoriyel momenti adı verilmektedir.

2.3. Olasılık Üreten Fonksiyon

X kesikli bir rasgele değişken olmak üzere

$$\psi\left(z\right)=E(z^X)=\sum_{x=0}^{\infty}p(x)z^x$$

değeri olasılık üreten fonksiyonu olarak adlandırılmaktadır. Burada p, X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonudur. Bu seri $|z|\le 1$ için mutlak yakınsaktır (Shahbazov (2005)).

Olasılık üreten fonksiyonu kullanılarak X rasgele değişkeninin beklenen değeri ve varyansı

$$E\left(X\right)=\psi'(1),$$
$$Var\left(X\right)=\psi''(1)+\psi'(1)-\left[\psi'(1)\right]^2.$$

şeklinde elde edilir.

2.4. Oran Tahmini

Khan ve ark. 1989 yılında kesikli Weibull dağılımının parametrelerinin tahmini için bir yöntem önermişlerdir. Yöntemin daha iyi anlaşılması için teorisi düzgün geometrik dağılımı üzerinden anlatılmaya çalışılacaktır.

$X_1,X_2,\ldots,X_n$ Düzgün-Geometrik dağılımından alınmış rasgele örneklem olmak üzere, $i=1,2,\ldots,n$ için $\nu(.)$ indikatör fonksiyonu

$$\nu(X_i) = \begin{cases} 1, & X_i = 1 \\ 0, & X_i > 1 \end{cases}$$

şeklindedir. $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \nu(X_i)$, örneklemde bulunan 1 değerinin örneklemdeki oranını gösterir. Y oranı, $P(X=1)$ olasılığının yansız ve tutarlı bir tahminidir.

$$E(Y) = P(X=1)$$

Böylece, düzgün geometrik dağılımının p parametresinin oran tahmin edicisi $\tilde{p}$

$$y = -\frac{p\log(p)}{(1-p)}$$

denkleminin çözümü ile elde edilir.

3. BAZI TEKRAR İSTATİSTİKLERİ VE DAĞILIMLARI

k-ardıl kesikli dağılımlar istatistiksel kalite kontrol süreci ve güvenilirlik alanlarında sıkça kullanılmaktadır. Örneğin, ardışık *k* tane nokta kontrol limitinin dışına düşünüyorsa üretim sürecinin kontrol dışında olduğu söylenebilir. İlk kontrol sinyali dışına düşen bir parçadan önceki toplanan örneklemin sayısı *k*-ardıl geometrik dağılıma sahip bir rasgele değişkendir. *k* uzunluğunda tekrarların sayısı ile veya ilk *k* uzunluğundaki tekrar oluncaya kadar beklenen zaman ile ilgileniliyorsa *k*-ardıl kesikli dağılımlar uygun birer modeldir (Yalçın ve Eryılmaz (2014)). Aşağıda literatürde yer alan bu modellerden bazıları verilmiştir.

3.1. *q*-Binom Dağılımı

q-Binom dağılım Charalambides' in 2010 çalışmasında incelenmiştir. Bu çalışmada *q*-Binom dağılımı başarı olasılığı geometrik olarak değişen Bernolli denemeleri üzerine kurulmuştur. (*i*-1). ile *i*. başarısızlık arasındaki denemelerde başarısızlık olasılığı

$$q_i = 1-\theta q^{i-1}, i = 1,2,\cdots, 0<\theta<1, 0<q\le 1 \qquad (3.1)$$

eşitliğine göre değişmektedir.

Z_n: *n* tane iki sonuç alan denemedeki başarıların sayısı olarak tanımlanan bir rasgele değişken olduğunda bu rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu

$$P\{Z_n = r\} = \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q \theta^r \prod_{i=1}^{n-r}(1-\theta q^{i-1}), \quad 0<\theta<1,\ 0<q<1, r = 0,1,\cdots,n \qquad (3.2)$$

şeklindedir.

Bu dağılıma ilişkin faktöriyel momentler

$$E\left[Z_n\right] = \frac{1}{1-q}\sum_{j=1}^{n}\frac{\left[n\right]_{j,q}}{\left[j\right]_q}(1-q)^j\theta^j$$

ve

$$E\left[(Z_n)_2\right] = \frac{2}{(1-q)^2}\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}\frac{\left[n\right]_{j,q}}{\left[i\right]_q\left[j\right]_q}(1-q)^j\theta^j$$

şeklinde ifade edilmiştir.

q-Binom dağılımı $q\to 1$ iken bilinen Binom dağılımına yakınsamaktadır.

3.2. *k*-ardıl Binom Dağılımı

k-ardıl Binom dağılım Philippou ve Makri (1986) çalışmasında incelenmiştir. Bu dağılım Binom dağılımının bir genellemesidir. Bu dağılımın genellemesi olan *k*-ardıl *q*-Binom dağılımı ise Yalçın ve Eryılmaz (2014) tarafından çalışılmıştır.

$N_{n,k}$: *n* denemedeki *k* uzunluğunda örtüşmeyen başarıların sayısı olarak tanımlanan bir rasgele değişken olmak üzere bu rasgele değişkene ilişkin olasılık fonksiyonu

$$P\left\{N_{n,k}=x\right\}=\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{x_1,\cdots,x_k}\binom{x_1+\cdots+x_k+x}{x_1,\cdots,x_k,x}p^n\left(\frac{q}{p}\right)^{x_1+\cdots+x_k},\ x=0,1,\cdots,\left[\frac{n}{k}\right] \tag{3.3}$$

şeklindedir. Burada $\left[x\right]$, x değerinini tam kısmını göstermekte ve $x_1,\cdots,x_k$ $x_1+2x_2+\cdots+kx_k=n-i-kx$ eşitliğini sağlayan negatif olmayan tamsayılardır.

3.3. *k*-ardıl *q*-Binom Dağılımı

k-ardıl *q*-Binom dağılım Yalçın ve Eryılmaz (2014) tarafından incelenmiştir. Bu dağılımın olasılık fonksiyonunun elde edilmesinde aşağıdaki Lemma' dan yararlanılacaktır.

Lemma 3.1.

$0<q\le 1$ için

$$A_q(r,s,t)=\sum\cdots\sum_{\substack{y_1+\cdots+y_r=s\\ \left[\frac{y_1}{k}\right]+\cdots+\left[\frac{y_r}{k}\right]=t\\ y_1\ge 0,\cdots,y_r\ge 0}}q^{y_2+2y_3+\cdots+(r-1)y_r}$$

şeklinde tanımsın. Burada $\left[x\right]$'ler x_i'lerin tam kısmını göstermekte ve y_i'ler tamsayıdır. Ayrıca $A_q(r,s,t)$ için

$$A_q(r,s,t)=\begin{cases}\sum_{j=0}^{s}q^{(r-1)j}A_q(r-1,s-j,t-\left[\frac{j}{k}\right]), & r>1,s\ge 0,t\ge 0\\ 1, & r=1,s\ge 0,\left[\frac{s}{k}\right]=t\\ 0, & d.y.\end{cases}$$

indirgeme bağıntısı yazılabilir.

(i-1). ile i. başarısızlık arasındaki denemelerde başarısızlık olasılığı $q_i = 1-\theta q^{i-1}, i = 1,2,\cdots, 0<\theta<1, 0<q\le 1$ eşitliğine göre değişen n tane Bernoulli denemesi göz önüne alınsın.

$N_{n,k}^{q}$: n denemedeki k uzunluğunda örtüşmeyen başarıların sayısı olarak tanımlanan bir rasgele değişken olmak üzere bu rasgele değişkene ilişkin olasılık fonksiyonu

$0<q\le 1$ için

$$P\left\{N_{n,k}^{q}=x\right\}=\sum_{i=0}^{n-kx}\theta^{n-i}\prod_{j=1}^{i}(1-\theta q^{j-1})A_q(i+1,n-i,x),\qquad x=0,1,\cdots,\left[\frac{n}{k}\right] \tag{3.4}$$

şeklindedir.

k-ardıl q-Binom dağılımının olasılık fonksiyonunda q=1 alındığında k-ardıl Binom dağılımının olasılık fonksiyonu

$$P\left\{N_{n,k}^{q}=x\right\}=\sum_{i=0}^{n-kx}\theta^{n-i}\left(1-\theta\right)^{i}A_1(i+1,n-i,x),\qquad x=0,1,\cdots,\left[\frac{n}{k}\right] \tag{3.5}$$

elde edilmiş olur.

3.4. *k*-ardıl Geometrik Dağılımı

k-ardıl Geometrik dağılım Philippou ve ark. (1983) tarafından incelenmiştir. Bu dağılım Binom dağılımının bir genellemesidir. Bu dağılımın genellemesi olan k-ardıl q-Geometrik dağılım Yalçın ve Eryılmaz (2014) tarafından çalışılmıştır.

T_k : İlk ardışık k başarı elde edilinceye kadar yapılan denemelerin sayısı olarak tanımlanan bir rasgele değişken olmak üzere bu rasgele değişkene ilişkin olasılık fonksiyonu

$$P\left\{T_k=x\right\}=\sum_{x_1,\cdots,x_k}\binom{x_1+\cdots+x_k}{x_1,\cdots,x_k}p^{x}\left(\frac{q}{p}\right)^{x_1+\cdots+x_k},\quad x\ge k \tag{3.6}$$

şeklindedir. Burada $x_1,\cdots,x_k$ $x_1+2x_2+\cdots+kx_k=x-k$ eşitliğini sağlamayan negatif olmayan tamsayılardır.

T_k rasgele değişkeninin olasılık üreten fonksiyonu

$$\psi(z) = p^k z^k (1 - pz) / \left(1 - z + qp^k z^{k+1}\right), |z| \le 1$$

şeklindedir.

T_k rasgele değişkeninin beklenen değeri ve varyansı sırasıyla

$$E(T_k) = \left(1 - p^k\right) / qp^k$$

ve

$$Var(T_k) = \left[1 - (2k+1) qp^k - p^{2k+1}\right] / \left(q^2 p^{2k}\right)$$

olarak verilmiştir.

k=1 alındığı zaman *k*-ardıl Geometrik dağılım bilinen Geometrik dağılıma gitmektedir.

3.5. *k*-ardıl *q*- Geometrik Dağılımı

k-ardıl *q*-geometrik dağılım Yalçın ve Eryılmaz (2014) tarafından incelenmiştir. Bu dağılımın olasılık fonksiyonunun elde edilmesinde kullanılan aşağıdaki Lemma' dan faydalanılacaktır.

Lemma 3.2.

$$C_q(r,s) = \sum \cdots \sum_{\substack{x_1 + \cdots x_r = s \\ 0 \le x_1 < k, \cdots, 0 \le x_r < k}} q^{x_2 + 2x_3 + \cdots + (r-1)x_r}$$

burada $0 < q \le 1$ ve x_i 'ler tamsayıdır. Ayrıca $C_q(r,s)$ için

$$C_q(r,s) = \begin{cases} \sum_{t=0}^{k-1} q^{t(r-1)} C_q(r-1, s-t), & r > 1, 0 \le s \le (k-1)r \\ 1, & r = 1, 0 \le s \le k \\ 0, & d.y. \end{cases}$$

indirgeme bağıntısı yazılabilir.

(i-1). ile i. başarısızlık arasındaki denemelerde başarısızlık olasılığı $q_i = 1-\theta q^{i-1}, i = 1,2,\cdots, 0<\theta<1, 0<q\le 1$ eşitliğine göre değişen Bernoulli denemeleri göz önüne alınsın.

$0<q\le 1$ için

T_k^q: Ardışık ilk k başarı elde edilinceye kadar yapılan denemelerin sayısı olarak tanımlanan bir rasgele değişken olmak üzere bu rasgele değişkene ilişkin olasılık fonksiyonu

$$P\left\{T_k^q = x\right\} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{x-k} q^{ik}\theta^{x-i}\prod_{j=1}^{i}(1-\theta q^{i-1})C_q(i, x-i-k), & x \ge k+1 \\ \theta^k, & x = k \\ 0, & d.y. \end{cases} \tag{3.7}$$

şeklindedir.

k-ardıl geometrik dağılımın olasılık fonksiyonunda q=1 alındığında başarı olasılığı θ olan Bernoulli denemelerinde ilk ardışık k başarı elde edilinceye kadar yapılan denemelerin sayısının dağılımı yani k-ardıl geometrik dağılım elde edilmiş olur.

3.6. Ling's Binom Dağılımı

Ling's Binom dağılımı Ling (1988) tarafından incelenmiştir. Bu dağılımın aynı zamanda k-ardıl Tip II Binom dağılımı olarak da adlandırılmaktadır. Başarı olasılığı p olan bağımsız ve aynı dağılıma sahip n tane Bernoulli denemesini göz önüne alalım.

$M_{n,k}$: n denemedeki k uzunluğunda örtüşen başarıların sayısı olarak tanımlanan bir rasgele değişken olmak üzere bu rasgele değişkene ilişkin olasılık fonksiyonu

$$P\left\{M_{n,k} = x\right\} = \begin{cases} p^n, & x = n-k+1 \\ 2p^{n-1}q, & x = n-k(>0) \\ \sum_{j=1}^{x+k} p^{j-1}qP\left\{M_{n-j,k} = x-\max(0, j-k)\right\}, & 0\le x\le n-k \end{cases} \tag{3.8}$$

şeklindedir. Ayrıca $M_{n,k}$ rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu

$$P\left\{M_{n,k} = x\right\} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{\substack{x_1+2x_2+\cdots+nx_n+i=n \\ \max(0,i-k+1)+\sum_{j=k+1}^{n}(i-j)x_j = x}} \binom{x_1+x_2+\cdots+x_n}{x_1, x_2, \cdots, x_n} p^n \left(\frac{q}{p}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \tag{3.9}$$

biçiminde de ifade edilebilir.

3.7. *q*-Ling's Binom Dağılımı

q-Ling's Binom dağılım Yalçın (2013) tarafından incelenmiştir. Bu dağılımın olasılık fonksiyonunun elde edilmesinde aşağıdaki Lemma' dan yararlanılacaktır.

Lemma 3.3.

$0 < q \le 1$ için

$$B_q(r,s,t) = \sum \cdots \sum_{\substack{y_1+\cdots+y_r=s \\ I_1y_1+\cdots+I_ry_r-(k-1)(I_1+\cdots+I_r)=t \\ y_1\ge 0,\cdots,y_r\ge 0}} q^{y_2+2y_3+\cdots+(r-1)y_r}$$

şeklinde tanımlansın. Burada

$$I_j = \begin{cases} 1, & y_j \ge k \\ 0, & d.y. \end{cases}$$

ve $y_j\,(j=1,2,\cdots,r)$'ler negatif olmayan tamsayılardır. Ayrıca $B_q(r,s,t)$ için

$$B_q(r,s,t) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{k-1} q^{(r-1)j} B_q(r-1,s-j,t) + \sum_{j=k}^{s} q^{(r-1)j} B_q(r-1,s-j,t-j+k-1), & r>1, s\ge 0, t\ge 0 \\ 1, & r=1, s\ge k,\ t=s-k+1 \text{ ya da } r=1, 0\le s<k, t=0 \\ 0, & d.y. \end{cases}$$

indirgeme bağıntısı yazılabilir.

(i-1). ile i. başarısızlık arasındaki denemelerde başarısızlık olasılığı $q_i = 1-\theta q^{i-1}, i=1,2,\cdots, 0<\theta<1, 0<q\le 1$ eşitliğine göre değişen n tane Bernoulli denemesi göz önüne alınsın.

$M_{n,k}$: *n* denemedeki *k* uzunluğunda örtüşen başarıların sayısı olarak tanımlanan bir rasgele değişken olmak üzere bu rasgele değişkene ilişkin olasılık fonksiyonu

$0 < q \le 1$ için

$$P\{M_{n,k}=x\} = \sum_{i=0}^{n} \theta^{n-i} \prod_{j=1}^{i} (1-\theta q^{j-1}) B_q(i+1, n-i, x), \qquad x=0,1,\cdots,n-k+1 \quad (3.10)$$

şeklindedir.

Bu dağılımda *q*=1 alındığında Ling's Binom dağılımının olasılık fonksiyonu elde edilmiş olur.

4. $N_{n,k,l}^{q}$ RASGELE DEĞİŞKENİNİN DAĞILIMI VE BAZI ÖZELLİKLERİ

Tez çalışmasının bu bölümünde, her bir başarısızlıktan sonra başarı olasılığı geometrik olarak azalan *n* tane Bernoulli denemesindeki *l* tanesi örtüşen *k*-ardıl başarıların sayısı şeklinde bir rasgele değişken tanımlanmıştır. Tanımlanan bu rasgele değişken $N_{n,k,l}^{q}$ ile gösterilmiştir. Örneğin n=15 için Bernoulli denemelerinin dizisi aşağıdaki gibi olsun.

1 1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 0

Bu durumda *l*=2 ve *k*=3 olduğu zaman $N_{15,3,2}^{q}$ = 6 olarak belirlenir. Başarı tekrarları ise şu şekildedir;

1 2 3, 5 6 7, 6 7 8, 10 11 12, 11 12 13, 12 13 14

l=1 ve *k*=3 için ise $N_{15,3,1}^{q}$=4 olarak belirlenir. Başarı tekrarları ise şu şekildedir;

1 2 3, 5 6 7, 10 11 12, 12 13 14

4.1. $N_{n,k,l}^{q}$ rasgele değişkenin dağılımı

$N_{n,k,l}^{q}$ rasgele değişkeninin dağılımına geçmeden önce bize yardımcı olacak aşağıdaki lemma verilsin.

Lemma 4.1. 0<q≤1 için,

$$A_q(r,s,t)=\sum_{B}\cdots\sum q^{y_2+2y_3+\cdots+(r-1)y_r},$$

olsun. Burada

$$B=\{\mathbf{y}\ :\ y_1+y_2+\cdots+y_r=s,\ c_1+c_2+\cdots+c_r=t,\ y_1\geq 0,\ldots,y_r\geq 0\},$$

$$c_j=\begin{cases}\left[\frac{y_j-l}{k-l}\right] & , y_j\geq k\\ 0 & d.y.\end{cases}$$

$\mathbf{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_r)$ şeklindedir. $[x]$, x'in tam kısımlarını göstermektedir ve y_i' lerin (i=1,2,…,r) tamamı tam sayıdır. Bu durumda $A_q(r,s,t)$ için

$$A_q(r,s,t)=\begin{cases}\sum_{j=0}^{s} q^{(r-1)j} A_q\left(r-1,s-j,t-d_j\right), & r>1, s\geq 0, t\geq 0\\ 1, & \left(r=1, s\geq k, t=\frac{s-l}{k-l}\right) \text{ veya } \left(r=1, 0\leq s<k, t=0\right)\\ 0, & d.y.,\end{cases}$$

indirgeme bağıntısı yazılabilir. Burada j=0, 1, . . ., s için

$$d_j=\begin{cases}\left[\frac{j-l}{k-l}\right] & , j\geq k\\ 0 & d.y.\end{cases}$$

şeklindedir.

İspat. r >1 için y_r 'nın alabileceği değerler

$$\begin{aligned}A_q(r,s,t)&=\sum_{B_0}\cdots\sum q^{y_2+2y_3+\cdots+(r-2)y_{r-1}}+q^{r-1}\sum_{B_1}\cdots\sum q^{y_2+2y_3+\cdots+(r-2)y_{r-1}}\\&\quad+q^{2(r-1)}\sum_{B_2}\cdots\sum q^{y_2+2y_3+\cdots+(r-2)y_{r-1}}+\cdots+q^{s(r-1)}\sum_{B_s}\cdots\sum q^{y_2+2y_3+\cdots+(r-2)y_{r-1}}\\&=A_q(r-1,s,t-d_0)\\&\quad+q^{r-1}A_q(r-1,s-1,t-d_1)+\cdots+q^{s(r-1)}A_q(r-1,0,t-d_s)\\&=\sum_{j=0}^{s} q^{(r-1)j}A_q(r-1,s-j,t-d_j),\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Burada

$$B_j=\left\{\mathbf{y}\ :\ y_1+y_2+\cdots+y_{r-1}=s-j,\ c_1+c_2+\cdots+c_{r-1}=t-d_j,\ y_1\geq 0,\ldots,y_{r-1}\geq 0\right\},$$

j=0, 1, . . ., s

ve $B=\bigcup_{j=1}^{s} B_j$ şeklindedir. Eşitliğin diğer parçaları oldukça açıktır.

Teorem 4.1. $N_{n,k,l}^{q}$ her bir başarısızlıktan sonra başarı olasılığı geometrik olarak azalan *n* tane Bernoulli denemesindeki *l* tanesi örtüşen *k*-ardıl başarıların sayısını göstersin. Bu durumda 0<q≤1 için $N_{n,k,l}^{q}$ rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu;

$$P\left\{N_{n,k,l}^{q}=x\right\}=\sum_{i=0}^{v(x)}\theta^{n-i}\prod_{j=1}^{i}\left(1-\theta q^{j-1}\right)A_q\left(i+1,n-i,x\right),\ x=0,1,\ldots,\left[\frac{n-l}{k-l}\right] \quad (4.1)$$

şeklindedir. Burada

$$\nu(x)=\begin{cases} n & , \quad x=0 \\ n-\left(x\left(k-l\right)+l\right) & , \quad d.y. \end{cases}$$

ve $A_q(r,s,t)$ Lemma 4.1. deki tanımlandığı gibidir.

İspat. S_n, n denemedeki sıfırların sayısını göstersin. O zaman

$$P\left\{N_{n,k,l}^{q}=x\right\}=\sum_{i}P\left\{N_{n,k,l}^{q}=x,S_n=i\right\}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\left\{N_{n,k,l}^{q}=x,S_n=i\right\}$ olayı tam i tane sıfırdan oluşan n denemelik

$$\underbrace{1\ldots1}_{y_1}0\underbrace{1\ldots1}_{y_2}0\ldots0\underbrace{1\ldots1}_{y_i}0\underbrace{1\ldots1}_{y_{i+1}}$$

şeklindeki bir dizilişte $y_j\geq 0, \quad j=1,2,\ldots,i+1,$ olmak üzere

$$y_1+y_2+\cdots+y_{i+1}=n-i$$
$$c_1+c_2+\cdots+c_{i+1}=x$$

olmasına karşılık gelmektedir. Ayrıca i değerinin en az 0 ve en çok $\nu(x)$ değerini alacağı açıktır. Buna göre Charalambides (2010) modeli altında,

$$\begin{aligned} &P\left\{N_{n,k,l}^{q}=x\right\} \\ &=\sum_{i=0}^{\nu(x)}\sum_{\substack{\sum_{j=1}^{i+1}y_j=n-i \\ \sum_{j=1}^{i+1}c_j=x \\ y_1\geq 0,\cdots,y_{i+1}\geq 0}}\cdots\sum\left(\theta q^{0}\right)^{y_1}\left(1-\theta q^{0}\right)\left(\theta q\right)^{y_2}\left(1-\theta q\right)\times\cdots\times\left(\theta q^{i-1}\right)^{y_i}\left(1-\theta q^{i-1}\right)\left(\theta q^{i}\right)^{y_{i+1}} \\ &=\sum_{i=0}^{\nu(x)}\theta^{n-i}\prod_{j=1}^{i}\left(1-\theta q^{j-1}\right)\sum_{\substack{\sum_{j=1}^{i+1}y_j=n-i \\ \sum_{j=1}^{i+1}c_j=x \\ y_1\geq 0,\ldots,y_{i+1}\geq 0}}\cdots\sum q^{y_2+2y_3+\cdots+(i-1)y_i+iy_{i+1}} \\ &=\sum_{i=0}^{\nu(x)}\theta^{n-i}\prod_{j=1}^{i}\left(1-\theta q^{j-1}\right)A_q\left(i+1,n-i,x\right). \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Böylece ispat tamamlanmış $N_{n,k,l}^{q}$ rasgele değişkininin olasılık fonksiyonu elde edilmiştir.

Aşağıdaki tabloda q ve θ'nın farklı değerleri için $N_{12,3,2}^{q}$ olasılık fonksiyonun aldığı değerler verilmiştir.

Tablo 4.1. $N_{12,3,2}^{q}$' nın olasılık fonksiyonu

x	$q=0.5,\theta=0.5$	$q=0.5,\theta=0.8$	$q=0.8,\theta=0.5$
0	0.8594	0.4526	0.7668
1	0.0733	0.1169	0.1243
2	0.0343	0.0888	0.0570
3	0.0166	0.0694	0.0270
4	0.0082	0.0550	0.0130
5	0.0041	0.0438	0.0062
6	0.0020	0.0350	0.0030
7	0.0010	0.0312	0.0016
8	0.0005	0.0215	0.0004
9	0.0002	0.0172	0.0003
10	0.0002	0.0687	0.0002

Aşağıda farklı k,l,q,θ değerleri için $N_{12,k,l}^{q}$ rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonun grafiği verilmiştir.

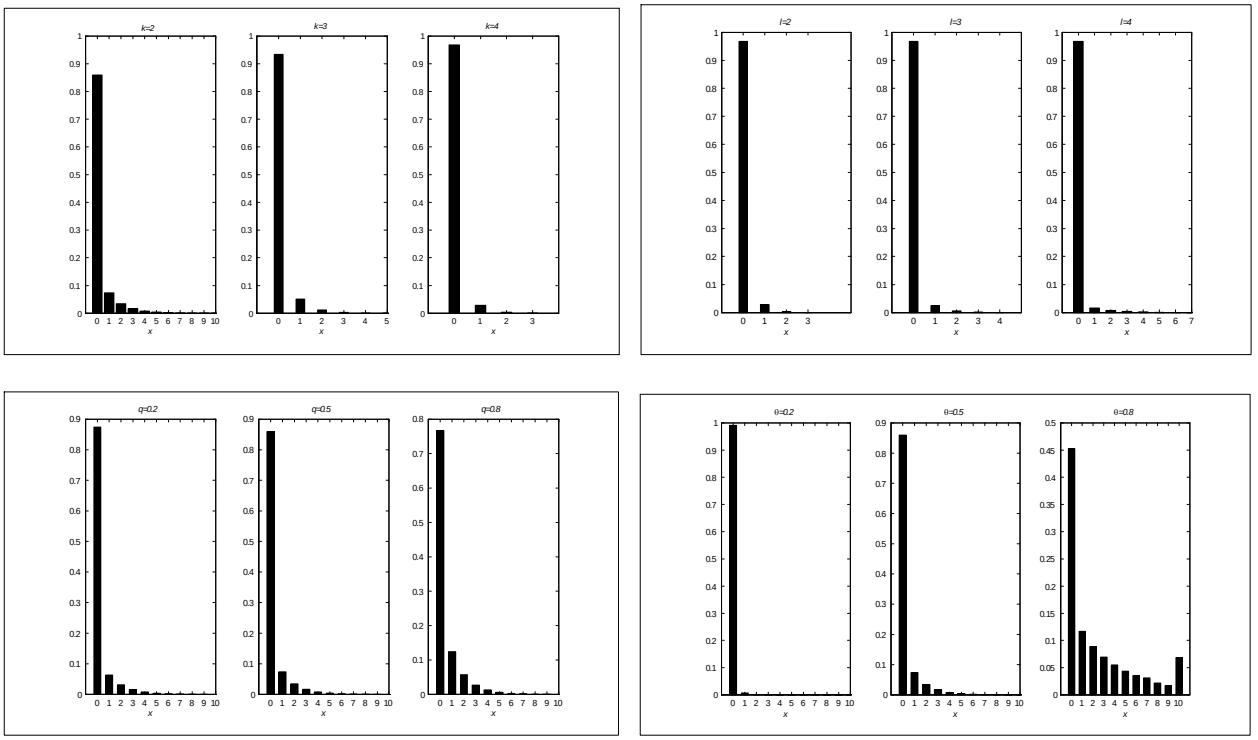
k=2,3,4 durumu için çizilen grafikte n=12, l=2, q=0.5 ve θ=0.5

l=2,3,4 durumu için çizilen grafikte n=12, k=5, q=0.5 ve θ=0.5

q=0.2, 0.5, 0.8 durumu için çizilen grafikte n=12, k=3, l=2 ve θ=0.5

θ=0.2, 0.5, 0.8 durumu için çizilen grafikte n=12, k=3, l=2 ve q=0.5

değerleri düşünülmüştür.



Şekil 4.1. Farklı durumlar için $N^{q}_{12,k,l}$' nin olasılık fonksiyonun grafiği

$N^{q}_{n,k,l}$ rasgele değişkeninin dağılımı bazı özel durumlarda tezin üçüncü bölümünde söz edilen dağılımlara dönüşmektedir.

- q→1 iken Makri ve Phillippou(2005)' deki $N_{n,k,l}$ rasgele değişkeninin dağılımına
- l=k-1 iken Eşitlik 3.10' da verilen dağılımına
- q→1 ve l=k-1 iken Eşitlik 3.8' te verilen dağılımına
- l=0 iken Eşitlik 3.4' te verilen dağılıma
- q→1 ve l=0 iken Eşitlik 3.3' te verilen dağılıma

4.2. $N_{n,k,l}^{q}$ rasgele değişkenin beklenen değeri

$N_{n,k,l}^{q}$ rasgele değişkeninin beklenen değerin aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 4.2. $n \le k-1$ için $E\left(N_{n,k,l}^{q}\right)=0$ ve $n \ge k > l \ge 0$ için

$$E\left(N_{n,k,l}^{q}\right)=\theta^{k}+\sum_{i\in A_2}\theta^{i+k-1}+\sum_{i=2}^{n-k+1}\sum_{j=0}^{\left[\frac{i-2}{k-l}\right]}\sum_{s=0}^{\nu_{i,j}}P\left(Z_{\nu_{i,j}}=s\right)\left(1-\theta q^{\nu_{i,j}-s}\right)\left(\theta q^{\nu_{i,j}-s+1}\right)^{k+j(k-l)}$$

şeklindedir. Burada $\nu_{i,j}=i-j(k-l)-2$ ve

$$P(Z_y=s)=\begin{bmatrix} n \\ s \end{bmatrix}_q \theta^s \prod_{i=1}^{n-s}(1-\theta q^{i-1})$$

şeklinde başarı olasılığı θ olan q-binom dağılımının olasılık fonksiyonudur.

İspat. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ başarı olasılığı geometrik olarak değişen Bernoulli rasgele değişkenleri olsun. $i=1, k-l+1, 2(k-l)+1, \ldots, \left[\frac{n-k}{k-l}\right](k-l)+1$ için E_i olayı "$X_1X_2\cdots X_{i+k-1}=1$"olarak ve $i=2,\ldots,n-k+1$ ve $j=0,1,\ldots,\left[\frac{i-2}{k-l}\right]$ için $E_{i,j}$ olayı "$X_{i-j(k-l)-1}=0, X_{i-j(k-l)}\times\cdots\times X_{i+k-1}=1$" olarak tanımlansın. A_1, A_2, A_3 ise $I=\{1,2,\ldots,n-k+1\}$ indis kümesinin

$$A_1=\{1\},$$
$$A_2=\left\{k-l+1, 2(k-l)+1, \ldots, \left[\tfrac{n-k}{k-l}\right](k-l)+1\right\},$$
$$A_3=I-(A_1\cup A_2).$$

şeklinde bir parçalanması olsun

$1 \le i \le n-k+1$ için Y_i rasgele değişkenleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$Y_1=\begin{cases}1 & , \quad E_1 \text{ olayı meydana gelirse} \\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

$i \in A_2$ için

$$Y_i=\begin{cases}1 & , \quad E_i\cup\bigcup_{j=0}^{\left[\frac{i-2}{k-l}\right]}E_{i,j} \text{ olayı meydana gelirse} \\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

$i \in A_3$ için

$$Y_i = \begin{cases} 1 & , \quad \bigcup_{j=0}^{\left[\frac{i-2}{k-l}\right]} E_{i,j} \text{ olayı meydana gelirse} \\ 0 & , \quad d.y.. \end{cases}$$

Bu durumda $N_{n,k,l}^{q}$ rasgele değişkeni Y_i rasgele değişkenleri cinsinden $N_{n,k,l}^{q} = \sum_{i=1}^{n-k+1} Y_i$ olarak yazılabilir (Makri ve Philippou(2005)). Bu durumda

$$E\left(N_{n,k,l}^{q}\right) = P\left(Y_1 = 1\right) + \sum_{i \in A_2} P\left(Y_i = 1\right) + \sum_{i \in A_3} P\left(Y_i = 1\right) \tag{4.2}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlikte üç parça halinde yer alan olasılıklar aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$P\left(Y_1 = 1\right) = P(X_1.X_2.\cdots.X_k = 1) = P(X_1 = 1, X_2 = 1, \cdots, X_k = 1) = \theta^k \tag{4.3}$$

$i \in A_2$ için

$$\begin{aligned} P\left(Y_i = 1\right) &= P\left(E_{i,0} \cup E_{i,1} \cup \cdots \cup E_{i,\left[\frac{i-2}{k-l}\right]} \cup E_i\right) \\ &= P\left(E_{i,0}\right) + P\left(E_{i,1}\right) + \cdots + P\left(E_{i,\left[\frac{i-2}{k-l}\right]}\right) + P\left(E_i\right) \end{aligned} \tag{4.4}$$

ve

$$\begin{aligned} P\left(E_{i,j}\right) &= P\left(X_{i-j(k-l)-1} = 0, X_{i-j(k-l)} \times \cdots \times X_{i+k-1} = 1\right) \\ &= \sum_{s=0}^{\nu_{i,j}} P\left(Z_{\nu_{i,j}} = s\right)\left(1 - \theta q^{\nu_{i,j}-s}\right)\left(\theta q^{\nu_{i,j}-s+1}\right)^{k+j(k-l)}, \; j = 0,1,\ldots,\left[\tfrac{i-2}{k-l}\right], \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$P\left(E_i\right) = P\left(X_1 \times \cdots \times X_{i+k-1} = 1\right) = \theta^{i+k-1}. \tag{4.6}$$

olarak yazılabilir. $i \in A_2$ için, Eşitlik (4.5) ve Eşitlik (4.6), Eşitlik (4.4)' te yerine yazılırsa

$$P\left(Y_i = 1\right) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{i-2}{k-l}\right]} \sum_{s=0}^{\nu_{i,j}} P\left(Z_{\nu_{i,j}} = s\right)\left(1 - \theta q^{\nu_{i,j}-s}\right)\left(\theta q^{\nu_{i,j}-s+1}\right)^{k+j(k-l)} + \theta^{i+k-1}. \tag{4.7}$$

Benzer şekilde $i \in A_3$

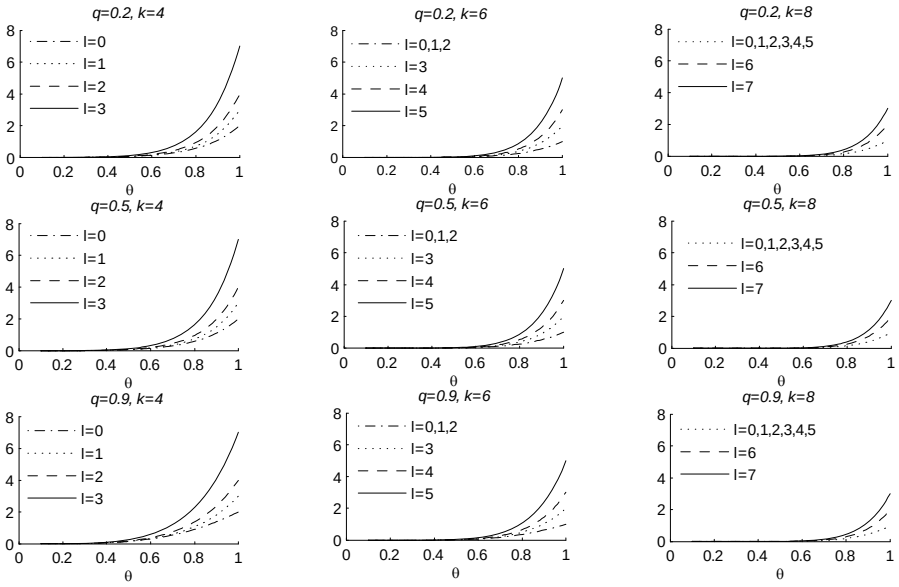
$$P\left(Y_i = 1\right) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{i-2}{k-l}\right]} \sum_{s=0}^{\nu_{i,j}} P\left(Z_{\nu_{i,j}} = s\right)\left(1 - \theta q^{\nu_{i,j}-s}\right)\left(\theta q^{\nu_{i,j}-s+1}\right)^{k+j(k-l)}. \tag{4.8}$$

olarak yazılabilir. İspat Eşitlik (4.3), Eşitlik (4.7) ve Eşitlik (4.8), Eşitlik (4.2)' te yerine yazılarak tamamlanabilir.

Aşağıdaki Tablo 4.2' de farklı θ, q, n, k, l değerleri için $N_{n,k,l}^{q}$ rasgele değişkeninin beklenen değerlerine aldığı değerler verilmiştir. Yine Şekil 4.2' de ise beklenen değere ilişkin grafikler verilmiştir.

Tablo 4.2. Farklı θ, q, n, k ve l değerleri için $E\left(N_{n,k,l}^{q}\right)$

n	l	k	(θ, q)				
			$(0.2, 0.5)$	$(0.5, 0.2)$	$(0.5, 0.5)$	$(0.5, 1)$	$(0.8, 0.5)$
8	0	2	0.05509	0.34237	0.41692	1.22265	1.64504
	1	3	0.00948	0.16504	0.18209	0.52734	1.10233
	2	4	0.00177	0.08212	0.08608	0.22265	0.85677
	3	5	0.00034	0.03907	0.03996	0.08984	0.54280
	4	5	0.00041	0.05860	0.05968	0.12499	0.97420
10	0	2	0.05510	0.34348	0.42003	1.55566	1.78102
	1	3	0.00948	0.16702	0.18471	0.69433	1.24823
	2	4	0.00177	0.08310	0.08734	0.30566	0.96948
	3	5	0.00034	0.04102	0.04204	0.13183	0.67952
	4	5	0.00041	0.06153	0.06279	0.18749	1.21949
12	0	2	0.05510	0.34375	0.42083	1.88890	1.86823
	1	3	0.00948	0.16752	0.18537	0.86107	1.34169
	2	4	0.00177	0.08335	0.08765	0.38891	1.04167
	3	5	0.00034	0.04151	0.04256	0.17358	0.76707
	4	5	0.00041	0.06226	0.06357	0.24999	1.37657



Şekil 4.2. Farklı θ, q, n, k ve l değerleri için $E\left(N_{n,k,l}^{q}\right)$' nin grafiği

Teorem 4.3. $n \le k-1$ için $E\left(N_{n,k,l}^{q}\right)^2 = 0$ ve $n \ge k > l \ge 0$ için

$E\left(N_{n,k,l}^{q}\right)^2 = E\left(N^{q}{}_{n,k,l}\right) + 2\left(I_1 + I_2\right)$ şeklindedir. Burada

$$I_1 = \sum_{r=2}^{n-k+1} \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{r-k-2}{k-l} \right\rfloor} \sum_{s=0}^{\eta_{1,r,j}} P\left(Z_{\eta_{1,r,j}} = s\right) \theta^k \left(1-\theta q^{\eta_{1,r,j}-s}\right) \left(\theta q^{\eta_{1,r,j}-s+1}\right)^{k+j(k-l)} + \sum_{r \in A_2} \theta^{r+k-1},$$

$$I_2 = \sum_{i=2}^{n-k} \sum_{r=i+1}^{n-k+1} \sum_{t_1=0}^{\left\lfloor \frac{i-2}{k-l} \right\rfloor} \left\{ \left(\sum_{t_2=0}^{\left\lfloor \frac{r-i-k-1}{k-l} \right\rfloor} \left[\sum_{s_1=0}^{\nu_{i,t_1}} \sum_{s_2=0}^{\eta_{i,r,t_2}} P\left(Z_{\nu_{i,t_1}} = s_1\right) \left(1-\theta q^{\nu_{i,t_1}-s_1}\right) \left(\theta q^{\nu_{i,t_1}-s_1+1}\right)^{k+t_1(k-l)} \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \times P\left(W_{\eta_{i,r,t_2}} = s_2\right) \left(1-\theta q^{\nu_{i,t_1}+\eta_{i,r,t_2}-(s_1+s_2)+1}\right) \left(\theta q^{\nu_{i,t_1}+\eta_{i,r,t_2}-(s_1+s_2)+2}\right)^{k+t_2(k-l)} \right] \right)$$

$$\left. + \delta \sum_{s_1=0}^{\nu_{r,t_1}} P\left(Z_{\nu_{r,t_1}} = s_1\right) \left(1-\theta q^{\nu_{r,t_1}-s_1}\right) \left(\theta q^{\nu_{r,t_1}-s_1+1}\right)^{r+k-i+t_1(k-l)} \right\}$$

$$+ \sum_{i \in A_2} \sum_{r=i+1}^{n-k+1} \sum_{t_2=0}^{\left\lfloor \frac{r-i-k-1}{k-l} \right\rfloor} \sum_{s=0}^{\eta_{i,r,t_2}} P\left(Z_{\eta_{i,r,t_2}} = s\right) \theta^{i+k-1} \left(1-\theta q^{\eta_{i,r,t_2}-s}\right) \left(\theta q^{\eta_{i,r,t_2}-s+1}\right)^{k+t_2(k-l)}$$

$$+ \sum_{i \in A_2} \sum_{\substack{r \in A_2 \\ r>i}} \theta^{r+k-1},$$

$$\delta = \begin{cases} 1 & , \ \frac{r-i+t_1(k-l)}{k-l} \ tamsayı \ ise \\ 0 & , \ d.y. \end{cases}$$

$\nu_{i,j} = i - j(k-l) - 2$, $\eta_{i,r,j} = r - i - k - j(k-l) - 1$ şeklindedir. Ayrıca

$P\left(Z_a = s_1\right)$ ve $P\left(W_b = s_2\right)$ sırasıyla başlangıç olasılıkları θ ve θq^{a-s_1+1} olan q-binom

dağılımının olasılık fonksiyonlarını göstermektedir.

İspat.

$\left(N_{n,k,l}^{q}\right)^2$ rasgele değişkeninin Bölüm 4.2'de tanımlanan $Y_i, i=1,2,...,n-k+1$ rasgele değişkenleri cinsinden

$$\left(N_{n,k,l}^{q}\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n-k+1}Y_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n-k+1}Y_i^2+2\sum_{i=1}^{n-k}\sum_{r=i+1}^{n-k+1}Y_iY_r$$

olarak yazılabileceği gayet açıktır. Ayrıca Y_i rasgele değişkenleri 0 yada 1 değerlerini alabildiğinden $\sum Y_i^{\,2}=\sum Y_i=N_{n,k,l}^{q}$

olacak ve

$$E\left(N_{n,k,l}^{q}\right)^2=E\left(N_{n,k,l}^{q}\right)+2\sum_{i=1}^{n-k}\sum_{r=i+1}^{n-k+1}E\left(Y_iY_r\right). \tag{4.9}$$

olarak yazılabilecektir. Eşitlik (4.9)' un sağ tarafı

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-k}\sum_{r=i+1}^{n-k+1}E\left(Y_iY_r\right)&=\sum_{i=1}^{n-k}\sum_{r=i+1}^{n-k+1}P\left(Y_iY_r=1\right)\\&=\sum_{r=2}^{n-k+1}P\left(Y_1Y_r=1\right)+\sum_{i=2}^{n-k}\sum_{r=i+1}^{n-k+1}P\left(Y_iY_r=1\right),\end{aligned}$$

olarak elde edilebilir. Burada

$$\begin{aligned}&P\left(Y_1Y_r=1\right)\\&=\begin{cases}P\left\{E_1\cap\left(\bigcup_{j=0}^{\left[\frac{r-2}{k-l}\right]}E_{r,j}\cup E_r\right)\right\} & , \quad r\in A_2\\ P\left\{E_1\cap\left(\bigcup_{j=0}^{\left[\frac{r-2}{k-l}\right]}E_{r,j}\right)\right\} & , \quad r\in A_3\end{cases}\\&=\begin{cases}\sum_{j=0}^{\left[\frac{r-k-2}{k-l}\right]}\sum_{s=0}^{\eta_{1,r,j}}P\left(Z_{\eta_{1,r,j}}=s\right)\theta^k\left(1-\theta q^{\eta_{1,r,j}-s}\right)\left(\theta q^{\eta_{1,r,j}-s+1}\right)^{k+j(k-l)}+\theta^{r+k-1} & , \quad r\in A_2\\ \sum_{j=0}^{\left[\frac{r-k-2}{k-l}\right]}\sum_{s=0}^{\eta_{1,r,j}}P\left(Z_{\eta_{1,r,j}}=s\right)\theta^k\left(1-\theta q^{\eta_{1,r,j}-s}\right)\left(\theta q^{\eta_{1,r,j}-s+1}\right)^{k+j(k-l)} & , \quad r\in A_3\end{cases},\end{aligned}$$

$$P\left(Y_i Y_r = 1\right) = \begin{cases} P\left\{\left(\bigcup_{t_1=0}^{\left[\frac{i-2}{k-l}\right]} E_{i,t_1} \cup E_i\right) \cap \left(\bigcup_{t_2=0}^{\left[\frac{r-2}{k-l}\right]} E_{r,t_2} \cup E_r\right)\right\} & , \quad i,r \in A_2 \\ P\left\{\left(\bigcup_{t_1=0}^{\left[\frac{i-2}{k-l}\right]} E_{i,t_1} \cup E_i\right) \cap \left(\bigcup_{t_2=0}^{\left[\frac{r-2}{k-l}\right]} E_{r,t_2}\right)\right\} & , \quad i \in A_2, r \in A_3 \\ P\left\{\left(\bigcup_{t_1=0}^{\left[\frac{i-2}{k-l}\right]} E_{i,t_1}\right) \cap \left(\bigcup_{t_2=0}^{\left[\frac{r-2}{k-l}\right]} E_{r,t_2} \cup E_r\right)\right\} & , \quad i \in A_3, r \in A_2 \\ P\left\{\left(\bigcup_{t_1=0}^{\left[\frac{i-2}{k-l}\right]} E_{i,t_1}\right) \cap \left(\bigcup_{t_2=0}^{\left[\frac{r-2}{k-l}\right]} E_{r,t_2}\right)\right\} & , \quad i,r \in A_3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sum_{t_1=0}^{\left[\frac{i-2}{k-l}\right]} \left\{\left(\sum_{t_2=0}^{\left[\frac{r-i-k-1}{k-l}\right]} P\left(E_{i,t_1} \cap E_{r,t_2}\right)\right) + \delta P\left(E_{r,\frac{r-i+t_1(k-l)}{k-l}}\right)\right\} & \\ \quad + \sum_{t_2=0}^{\left[\frac{r-i-k-1}{k-l}\right]} P\left(E_i \cap E_{r,t_2}\right) + P\left(E_i \cap E_r\right) & , \quad i \in A_2, r \in A_2 \\ \sum_{t_1=0}^{\left[\frac{i-2}{k-l}\right]} \left\{\left(\sum_{t_2=0}^{\left[\frac{r-i-k-1}{k-l}\right]} P\left(E_{i,t_1} \cap E_{r,t_2}\right)\right) + \delta P\left(E_{r,\frac{r-i+t_1(k-l)}{k-l}}\right)\right\} & \\ \quad + \sum_{t_2=0}^{\left[\frac{r-i-k-1}{k-l}\right]} P\left(E_i \cap E_{r,t_2}\right) & , \quad i \in A_2, r \in A_3 \\ \sum_{t_1=0}^{\left[\frac{i-2}{k-l}\right]} \left\{\left(\sum_{t_2=0}^{\left[\frac{r-i-k-1}{k-l}\right]} P\left(E_{i,t_1} \cap E_{r,t_2}\right)\right) + \delta P\left(E_{r,\frac{r-i+t_1(k-l)}{k-l}}\right)\right\} & , \quad i \in A_3, r \in A_2 \cup A_3 \end{cases}$$

$$P\left(E_i \cap E_r\right) = \theta^{r+k-1},$$

$$P\left(E_i \cap E_{r,t_2}\right) = \sum_{s=0}^{\eta_{i,r,t_2}} P\left(Z_{\eta_{i,r,t_2}} = s\right) \theta^{i+k-1} \left(1 - \theta q^{\eta_{i,r,t_2} - s}\right) \left(\theta q^{\eta_{i,r,t_2} - s + 1}\right)^{k + t_2(k-l)},$$

$$P\left(E_{i,t_1} \cap E_{r,t_2}\right) = \sum_{s_1=0}^{\nu_{i,t_1}} \sum_{s_2=0}^{\eta_{i,r,t_2}} P\left(Z_{\nu_{i,t_1}} = s_1\right) \left(1 - \theta q^{\nu_{i,t_1} - s_1}\right) \left(\theta q^{\nu_{i,t_1} - s_1 + 1}\right)^{k + t_1(k-l)}$$
$$\times P\left(W_{\eta_{i,r,t_2}} = s_2\right) \left(1 - \theta q^{\nu_{i,t_1} + \eta_{i,r,t_2} - (s_1 + s_2) + 1}\right) \left(\theta q^{\nu_{i,t_1} + \eta_{i,r,t_2} - (s_1 + s_2) + 2}\right)^{k + t_2(k-l)},$$

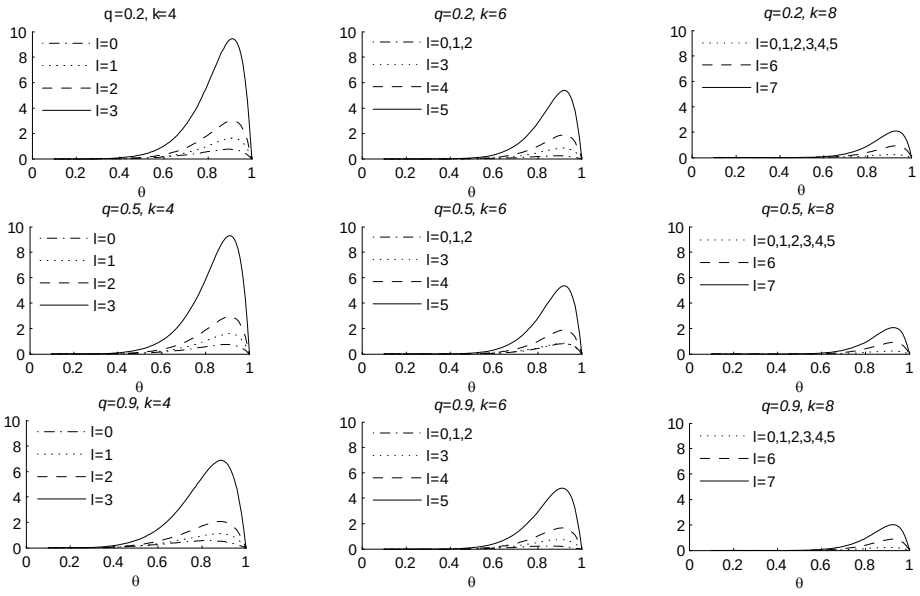
$$P\left(E_{r,\frac{r-i+t_1(k-l)}{k-l}}\right) = \sum_{s_1=0}^{\nu_{r,t_1}} P\left(Z_{\nu_{r,t_1}} = s_1\right) \left(1 - \theta q^{\nu_{r,t_1} - s_1}\right) \left(\theta q^{\nu_{r,t_1} - s_1 + 1}\right)^{r + k - i + t_1(k-l)},$$

şeklindedir. Ayrıca $P\left(Z_a = s_1\right)$ ve $P\left(W_b = s_2\right)$ sırasıyla başlangıç olasılıkları θ ve $\theta q^{a - s_1 + 1}$ olan q-binom dağılımının olasılık fonksiyonlarıdır.

Aşağıdaki Tablo 4.3'te ve Şekil 4.3' te farklı θ, q, n, k, l değerleri için $N_{n,k,l}^{q}$ rasgele değişkeninin varyans değerlerine ilişkin değerler ve grafikler verilmiştir.

Tablo 4.3. Farklı θ, q, n, k ve l değerleri için $Var\left(N_{n,k,l}^{q}\right)$

n	l	k	(θ, q)				
			$(0.2, 0.5)$	$(0.5, 0.2)$	$(0.5, 0.5)$	$(0.5, 1)$	$(0.8, 0.5)$
8	0	2	0.07342	0.44446	0.60066	2.04772	2.26448
	1	3	0.01035	0.23177	0.25033	0.61644	1.42630
	2	4	0.00191	0.12226	0.12588	0.25120	1.32089
	3	5	0.00037	0.05317	0.05407	0.10521	0.66825
	4	5	0.00061	0.14111	0.14252	0.24268	2.39907
10	0	2	0.08553	0.45503	0.68776	3.31330	3.09906
	1	3	0.01090	0.24494	0.27380	1.29621	2.10510
	2	4	0.00192	0.12894	0.13359	0.41536	1.88385
	3	5	0.00037	0.06278	0.06381	0.16523	1.17570
	4	5	0.00061	0.16908	0.17082	0.40429	4.25853
12	0	2	0.09760	0.45946	0.76340	4.42100	3.84258
	1	3	0.01145	0.24924	0.28704	2.02928	2.71397
	2	4	0.00195	0.13111	0.13700	0.78160	2.37884
	3	5	0.00037	0.06616	0.06731	0.25575	1.65544
	4	5	0.00061	0.17900	0.18093	0.59765	6.00807



Şekil 4.3. Farklı θ, q, n, k ve l değerleri için $Var\left(N_{n,k,l}^{q}\right)$' nin grafiği

Tablo 4.3 ve Şekil 4.3'ten de görülebileceği gibi

- l arttığında, $E\left(N_{n,k,l}^{q}\right)$ ve $Var\left(N_{n,k,l}^{q}\right)$ değerleri artmaktadır.
- k arttığında, $E\left(N_{n,k,l}^{q}\right)$ ve $Var\left(N_{n,k,l}^{q}\right)$ değerleri azalmaktadır.
- q veya θ değeri arttığında, $E\left(N_{n,k,l}^{q}\right)$ değeri artarken, $Var\left(N_{n,k,l}^{q}\right)$ değeri monoton bir hareket sergilememektedir.

5. YENİ BİR δ-ŞOK MODELİ

Şok modeller güvenilirlik teorisinde büyük ilgi çeken bir konu haline gelmiştir. Şok modeller, rasgele büyüklükteki şokların rasgele bir zamanda meydana geldiği sistemlerdir. Üç farklı türde şok model mevcuttur. Bunlar tekrar şok modeli, aşırı şok model ve birikimli şok modellerdir. Tekrar şok modellerinde, belirlenmiş sayıda ardışık şok olması, aşırı şok modelde şokun belli bir eşik değerinden daha büyük olması, birikimli şok modelde ise maruz kalınan şok büyüklüklerinin toplamının belli bir eşik değerinden büyük olması bozulma kriteri olarak düşünülür.

Eğer bir sistem, maruz kaldığı iki ardışık şok arasındaki geçen süre belirli bir δ değerinin altında iken ölüyor ise böyle sistemler δ-şok model adını almaktadır. δ-şok modelde iki şok arasındaki şokların büyüklük yerine zaman dikkate alındığında bu modeller dördüncü tür şok modeller olarak düşünülebilir. Li ve Kong (2007) δ-şok modeller üzerine çalışılmıştır. Eryılmaz (2013), δ-şok modelin kesikli versiyonunu çalışmıştır. Bu model, iki şok arasındaki geçen sürenin 1/p ortalamalı geometrik dağılıma sahip olduğu bir binom süreci olarak düşünülmüştür.

Tez çalışmasının bu bölümünde, $i-1$ ile i. şoklar arasında geçen zamanın (yani yapılan deneme sayısının) $1/p_i$ ortalamalı geometrik dağılıma sahip olduğu varsayılmıştır. Burada $p_i = \theta q^{i-1}, i = 1,2,..., 0 < \theta < 1, 0 < p \leq 1$ şeklindedir.

5.1. Tanımlanan Sistem ve Sistemin Olasılık Fonksiyonu

Aşağıda tanımlanacak olan bir şok dizisine maruz kalan bir sistem düşünülsün. 0 (Şok) ve 1 (Şok Değil) 'lerden oluşan bir $I_{1,},...,I_n$ iki sonuç alabilen Bernoulli denemelerini göz önüne alalım. Bu denemelerden *i-1*. şoktan i. şoka kadar olan denemeler bağımsız ve bozulma olasılığı $q_i = 1-\theta q^{i-1}, i = 1,2,..., 0 < \theta < 1, 0 < p \leq 1$ olan Bernoulli dağılıma sahiptir. Bu süreç Charalambides (2010) tarafından çalışılmıştır. Bu süreçle anlatılmak istenileni şu şekilde özetleyebiliriz. i. şokun olması olasılığı q_{i-1} ve olmaması olasılığı $1-q_{i-1}$ şeklindedir. Ve X_0 ilk şoka kadar geçen zamanı, $X_i, i = 1,2,..$ i. ile $i-1$. şok arasındaki zamanı göstersin. Bu durumda bağısız fakat aynı dağılıma sahip olmayan $X_0, X_1,...$ rasgele değişkenlerinin olasılık fonksiyonu;

$$P\{X_i = x\} = q_i(1-q_i)^{x-1},\ x = 1,2,...$$

şeklinde olacaktır. Yukarıdaki varsayımlar altında, incelenecek model kısaca qδ-şok modeli olarak gösterilecektir. Bu durumda qδ-şok modeli üzerine kurulu sistemin yaşam zamanı

$$T_\delta = \sum_{i=0}^{M} X_i$$

olarak tanımlanabilir (Eryılmaz (2013)). Buradaki durdurma rasgele değişkeni M aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\{M = m\} \Leftrightarrow \{X_1 > \delta, ..., X_{m-1} > \delta, X_m \le \delta\}, \quad \delta \ge 1,\ m = 1,2,...$$

Lemma 5.1. $0 < q \le 1$ olmak üzere

$$B_q(r,s) = \sum_{\substack{y_1+y_2+...,y_{r-1}=s \\ y_1\ge 0, y_2\ge\delta,...,y_{r-2}\ge\delta, y_{r-1}\ge\delta}} \cdots \sum q^{y_2+2y_3+3y_4+...+(r-2)y_{r-1}}$$

şeklinde tanımlansın burada y_i' ler tamsayıdır. Buradaki $B_q(r,s)$ için

$$B_q(r,s) = \begin{cases} \sum_{w=\delta}^{s-(r-3)\delta} q^{(r-2)w} B_q(r-1, s-w) & , \quad r \ge 3, s \ge (r-2)\delta \\ 1 & , \quad r = 2, s \ge 0 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

indirgeme bağıntısı yazılabilir.

İspat. $r \ge 3$ ve $s \ge (r-2)\delta.$ değerleri için

$$\begin{aligned} B_q(r,s) &= \sum_{\substack{y_1+y_2+\cdots+y_{r-1}=s \\ y_1\ge 0, y_2\ge\delta,\ldots,y_{r-2}\ge\delta, y_{r-1}\ge\delta}} \cdots \sum q^{y_2+2y_3+3y_4+\cdots+(r-2)y_{r-1}} \\ &= \sum_{w=\delta}^{s-(r-3)\delta} q^{(r-2)w} \sum_{\substack{y_1+y_2+\cdots+y_{r-2}=s-w \\ y_1\ge 0, y_2\ge\delta,\ldots,y_{r-2}\ge\delta}} \cdots \sum q^{y_2+2y_3+3y_4+\cdots+(r-3)y_{r-2}} \\ &= \sum_{w=\delta}^{s-(r-3)\delta} q^{(r-2)w} B_q(r-1, s-w). \end{aligned}$$

yazılarak ispat tamamlanabilir.

Teorem 5.1. T_δ rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu

$$P\{T_\delta = n\} = \sum_{i=2}^{\left[\frac{n+2\delta}{\delta+1}\right]} \left\{ \theta^{n-i} \left(\prod_{j=1}^{i} \left(1-\theta q^{j-1}\right) \right) \sum_{t=0}^{\min(\delta-1,\, n-i)} q^{(i-1)t} B_q\left(i, n-i-t\right) \right\}, n = 2,3,.. \quad (5.1)$$

şeklindedir.

İspat. M rasgele değişkeni $X_0, X_1, \ldots$' e bağımlı olduğu için Eşitlik (5.1)' de verilen T_δ değişkeninin olasılık fonksiyonunu bulmak matematiksel olarak oldukça zordur. T_δ rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonunu bulmak için Eryılmaz (2013) çalışmasındaki T_δ rasgele değişkenine dağılımda eşit olan bir rasgele değişken kullanılmıştır. Bu rasgele değişken W_δ ile gösterilmektedir. W_δ, $I_1, I_2, \ldots$'lerdeki iki tane 0'ın en fazla δ-1 tane başarısızlık (1) ile bölününceye kadar beklenen zamanı göstermektedir. Bu durumda $\delta \geq 1$ için T_δ rasgele değişkeni stokastik olarak W_δ rasgele değişkenine yakınsar. $\left(T_\delta \overset{s.t.}{=} W_\delta \right)$

Bu ifadelerden yola çıkarak T_δ rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilebilir.

n birim uzunluğunda $i(\geq 2)$ tane 0 içeren bir $\{W_n = n\}$ olayı için tipik bir model

$$\underbrace{1\ldots1}_{y_1\geq 0}0\underbrace{1\ldots1}_{y_2\geq\delta}0\underbrace{1\ldots1}_{y_3\geq\delta}0\ldots0\underbrace{1\ldots1}_{y_{i-1}\geq\delta}0\underbrace{1\ldots1}_{0\leq y_i<\delta}0$$

şeklinde ifade edilebilir.

Bu durumda T_δ rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu

$$\begin{aligned}
&P\{T_\delta = n\} \\
&= \sum_{i=2}^{\left[\frac{n+2\delta}{\delta+1}\right]} \sum\cdots\sum_{\substack{y_1+y_2+\cdots+y_i=n-i \\ y_1\geq 0, y_2\geq\delta, \ldots, y_{i-1}\geq\delta, y_i<\delta}} (\theta q^0)^{y_1}(1-\theta q^0)(\theta q)^{y_2}(1-\theta q)\times\cdots\times(\theta q^{i-1})^{y_i}(1-\theta q^{i-1}) \\
&= \sum_{i=2}^{\left[\frac{n+2\delta}{\delta+1}\right]} \left\{ \theta^{n-i}\left(\prod_{j=1}^{i}(1-\theta q^{j-1})\right) \sum\cdots\sum_{\substack{y_1+y_2+\cdots+y_i=n-i \\ y_1\geq 0, y_2\geq\delta, \ldots, y_{i-1}\geq\delta, y_i<\delta}} q^{y_2+2y_3+3y_4+\cdots+(i-1)y_i} \right\} \\
&\sum_{i=2}^{\left[\frac{n+2\delta}{\delta+1}\right]} \left\{ \theta^{n-i}\left(\prod_{j=1}^{i}(1-\theta q^{j-1})\right) \sum_{t=0}^{\min(\delta-1,n-i)} q^{(i-1)t} \sum\cdots\sum_{\substack{y_1+y_2+\cdots+y_{i-1}=n-i-t \\ y_1\geq 0, y_2\geq\delta, \ldots, y_{i-1}\geq\delta}} q^{y_2+2y_3+3y_4+\cdots+(i-2)y_{i-1}} \right\}
\end{aligned}$$

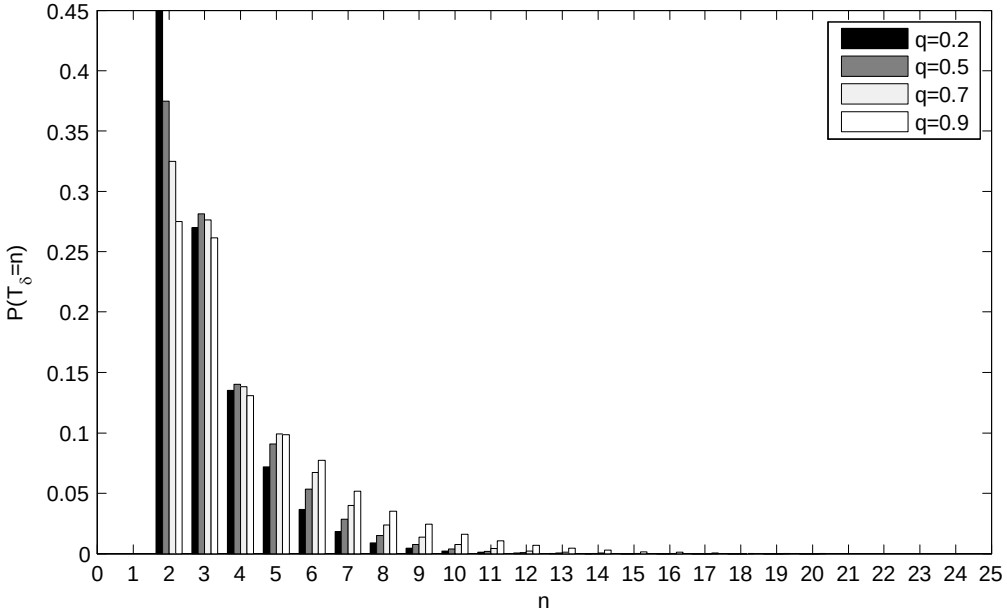
şeklinde elde edilir. Lemma 5.1.'i kullanarak olasılık fonksiyonu

$$P\{T_\delta = n\} = \sum_{i=2}^{\left[\frac{n+2\delta}{\delta+1}\right]} \left\{ \theta^{n-i} \left(\prod_{j=1}^{i} (1-\theta q^{j-1}) \right) \sum_{t=0}^{\min(\delta-1,n-i)} q^{(i-1)t} B_q(i, n-i-t) \right\}.$$

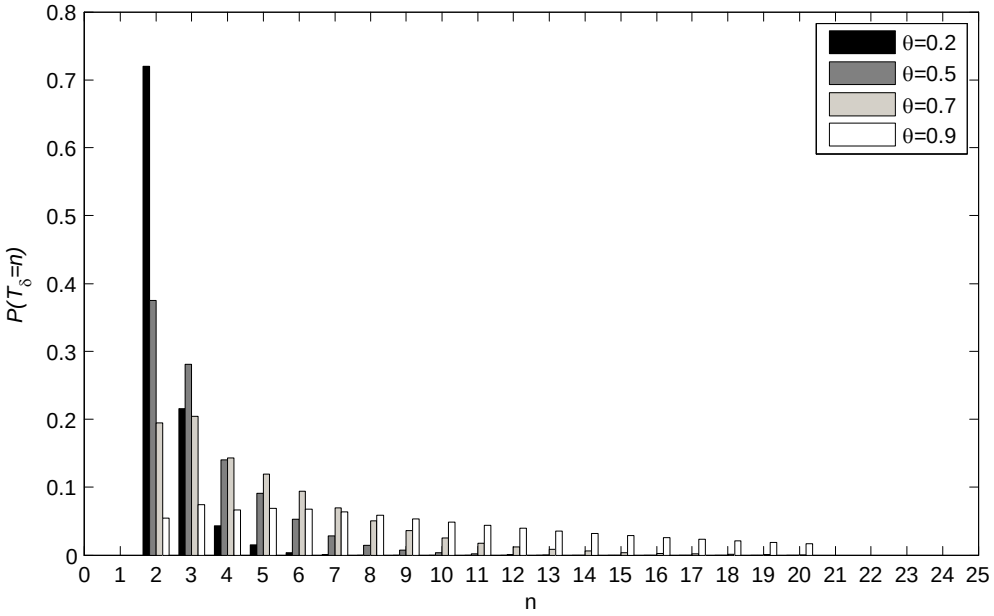
olarak da yazılabilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. T_δ rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu farklı θ, q ve δ değerleri için alacağı değerleri gösteren Tablo 5.1 ve Şekil 5.1, Şekil 5.2 ve Şekil 5.3 aşağıda verilmiştir. (5.1) numaralı eşitlikte verilen modele $q\delta - Sok$ model adı verilecektir.

Tablo 5.1. T_δ rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonunun aldığı değerler

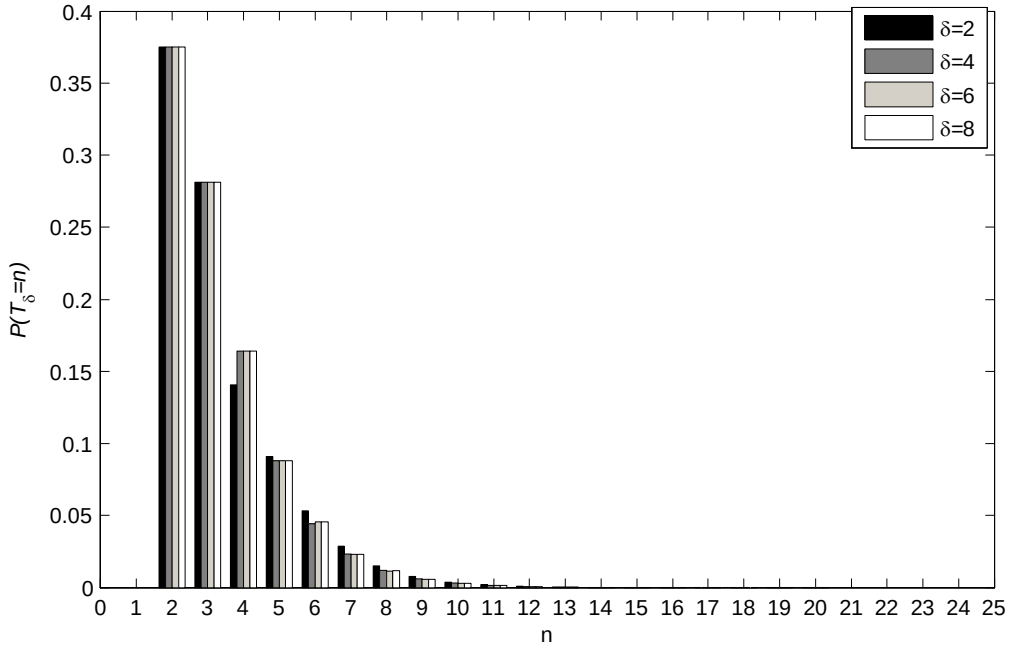
$\theta = 0.5, \quad q = 0.6, \delta = 3$		$\theta = 0.7, \quad q = 0.4, \delta = 5$	
n	$P(T_3 = n)$	n	$P(T_5 = n)$
2	0.3500	2	0.2160
3	0.2800	3	0.2117
4	0.1715	4	0.1651
5	0.0857	5	0.1203
6	0.0506	6	0.0855
7	0.0290	7	0.0599
8	0.0159	8	0.0422
9	0.0083	9	0.0297
10	0.0043	10	0.0208
≥ 11	0.0047	≥ 11	0.0488



Şekil 5.1. (θ=0.5,δ=4) ve bazı q değerleri için T_δ rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu



Şekil 5.2. (q=0.3,δ=4) ve bazı θ değerleri için T_δ rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu



Şekil 5.3. (q=0.5, θ =0.4) ve bazı δ değerleri için T_δ rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu

Eğer q=1 alınırsa

$$\sum_{t=0}^{\min(\delta-1,n-i)} B_q(i,n-i-t) = \begin{pmatrix} n-(i-2)\delta-1 \\ i-1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n-(i-1)\delta-1 \\ i-1 \end{pmatrix}$$

ve

$$P\{T_\delta = n\} = \sum_{i=2}^{\left[\frac{n+2\delta}{\delta+1}\right]} \left[\begin{pmatrix} n-(i-2)\delta-1 \\ i-1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n-(i-1)\delta-1 \\ i-1 \end{pmatrix} \theta^{n-i}(1-\theta)^i \right]$$

şeklinde elde edilir. Bu elde edilen sonuç doğrultusunda, başarı olasılığı $1-\theta$ olan binom süreci (Eryılmaz (2013)) elde edilmiş olur.

5.2. Olasılık Üreten Fonksiyonu ve Momentler

T_δ rasgele değişkeninin birinci ve ikinci momentlerini hesaplamak oldukça zor olduğu için, momentler olasılık üreten fonksiyonu aracılığıyla elde edilecektir. Verilecek olan teorem sayesinde T_δ rasgele değişkeninin olasılık üreten fonksiyonu elde edilecektir.

Teorem 5.2. T_δ rasgele değişkeninin olasılık üreten fonksiyonu

$$\psi(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1-\theta)z^2\left(\prod_{i=1}^{m-1} \frac{(1-\theta q^i)z(\theta q^i z)^\delta}{(\theta q^i)^\delta(1-\theta q^i z)}\right)(1-\theta q^m)(1-(\theta q^m z)^\delta)\left(\prod_{i=1}^{m-1}(\theta q^i)^\delta\right)}{(1-\theta z)(1-\theta q^m z)}.$$

şeklindedir.

İspat. T_δ rasgele değişkeninin olasılık üreten fonksiyonu

$$\psi(z) = E\left(z^{T_\delta}\right) = E\left(z^{X_0}\right)E\left(z^{\sum_{i=1}^{M} X_i}\right),$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$E(z^{X_0}) = \frac{(1-\theta)z}{1-\theta z}$$

ve

$$\begin{aligned}
E\left(z^{\sum_{i=1}^{M} X_i}\right) &= \sum_{m=1}^{\infty} E\left(z^{\sum_{i=1}^{M} X_i} \mid M = m\right) P(M = m) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{m-1} E\left(z^{X_i} \mid X_i > \delta\right)\right) E\left(z^{X_m} \mid X_m \le \delta\right) P(M = m) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{m-1} \frac{(1-\theta q^i)z(\theta q^i z)^\delta}{(\theta q^i)^\delta(1-\theta q^i z)}\right) \frac{(1-\theta q^m)z\left(1-(\theta q^m z)^\delta\right)}{(1-\theta q^m z)\left(1-(\theta q^m)^\delta\right)} \\
&\quad \times\left(\prod_{i=1}^{m-1}(\theta q^i)^\delta\right)\left(1-(\theta q^m)^\delta\right).
\end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir.

T_δ rasgele değişkeninin beklenen değer ve varyans değeri olasılık üreten fonksiyonu kullanılarak

$$E(T_\delta) = \psi'(1),$$
$$Var(T_\delta) = \psi''(1) + \psi'(1) - [\psi'(1)]^2.$$

elde edilebilir.

T_δ rasgele değişkeninin beklenen değeri

$$E(T_\delta) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left(\prod_{i=1}^{m-1} (\theta q^i)^\delta \right) \left(I_1 \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\delta+1-\theta q^j \delta}{1-\theta q^i} + I_2 \right)}{(1-\theta q^m)(1-\theta)} \right\},$$

burada

$$I_1 = (1-\theta)(1-\theta q^m)(1-(\theta q^m)^\delta),$$

ve

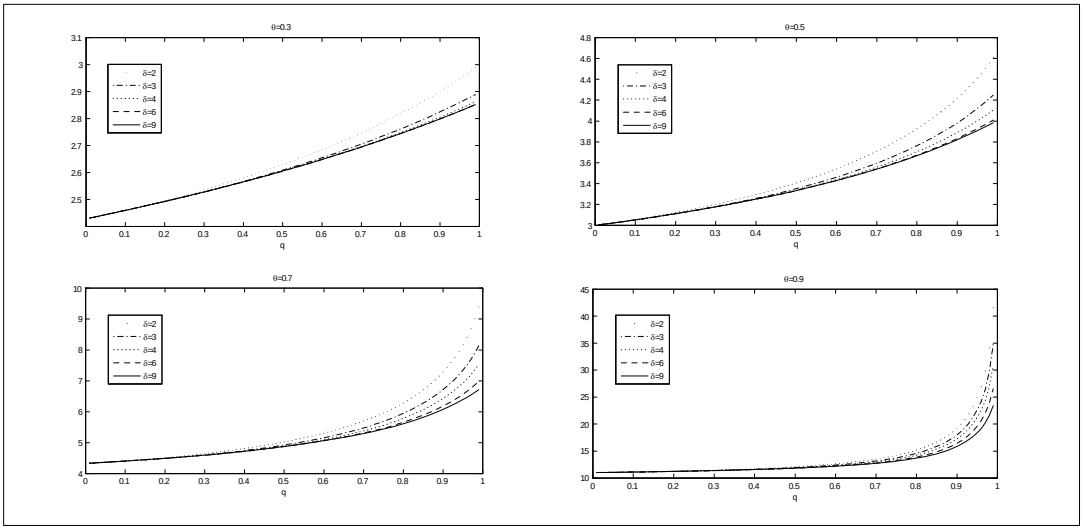
$$I_2 = 2 - \theta(1+q^m) - (\theta q^m)^\delta \{(1-\theta q^m)(1-\delta(1-\theta)) + (1-\theta)\}.$$

şeklindedir.

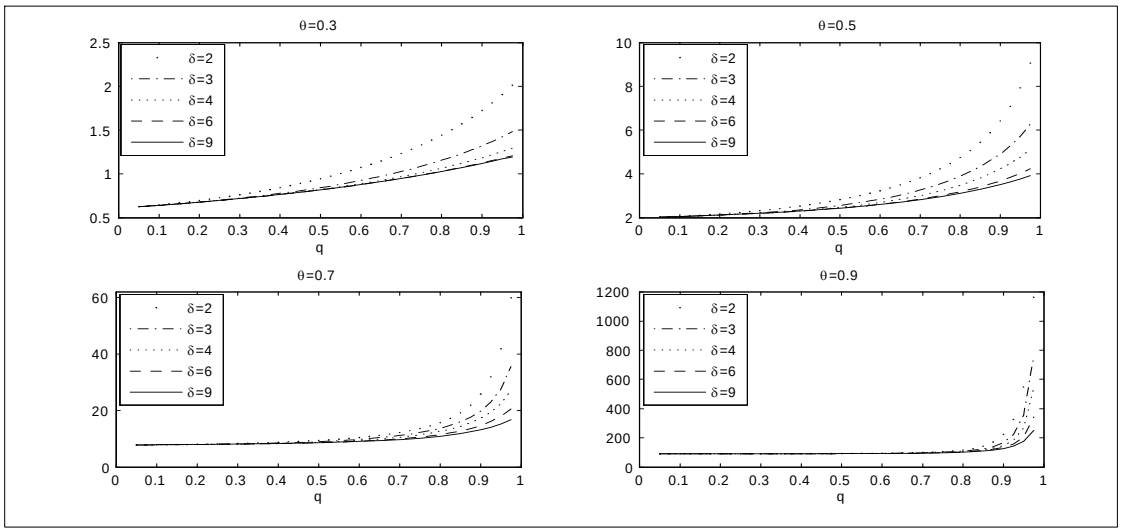
T_δ rasgele değişkeninin beklenen değerine ilişkin değerler farklı θ, q ve δ için Tablo 5.2 ve Şekil 5.4' te verilmiştir. T_δ rasgele değişkeninin varyans değeri formulasyon olarak çok uzun olduğu için burada verilmemiştir. Fakat farklı θ, q ve δ değerleri için Tablo 5.2 ve Şekil 5.5' te verilmiştir. Bu tablo ve grafik değerlerinden de anlaşılacağı gibi $E(T_\delta)$ ve $Var(T_\delta)$ değerleri θ, q değerlerine göre artan fakat δ değerine göre azalandır.

Tablo 5.2. T_δ rasgele değişkeninin beklenen değer ve varyansı

(θ,q)		$E(T_\delta)$	$Var(T_\delta)$	(θ,q)		$E(T_\delta)$	$Var(T_\delta)$
$(0.2,0.2)$	$\delta=2$	2.2932	0.3640	$(0.2,0.5)$	$\delta=2$	2.3716	0.4899
	$\delta=3$	2.2917	0.3564		$\delta=3$	2.3621	0.4434
	$\delta=4$	2.2916	0.3559		$\delta=4$	2.3612	0.4369
$(0.5,0.6)$	$\delta=2$	3.5416	3.2353	$(0.7,0.9)$	$\delta=2$	7.2888	25.8703
	$\delta=3$	3.4616	2.8589		$\delta=3$	6.7188	19.8635
	$\delta=4$	3.4384	2.7056		$\delta=4$	6.4352	17.3293



Şekil 5.4. Farklı q,θ ve δ değerlerine ilişkin beklenen değer



Şekil 5.5. Farklı q,θ ve δ değerlerine ilişkin varyans

5.3. Oran Tahmini

Kesikli Weibull dağılımının bilinmeyen parametrelerin oran tahmininin elde edilmesinde Khan ve ark. (1989) bir metod önermişlerdir. Tanımlanan $q\delta - şok$ dağılımının parametrelerinin oran tahmininin elde edilmesi için de benzer bir metod kullanılacaktır.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ rasgele örneklemi (5.1) numaralı eşitlikte verilen olasılık fonksiyonuna sahip olsun. $i = 1, 2, \ldots, n$ için $\nu(\cdot)$ indikatör fonksiyonu

$$\nu(X_i) = \begin{cases} 1, & X_i = 2 \\ 0, & X_i > 2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \nu(X_i)$ örneklemdeki 2' lerin oranını gösterdiği oldukça açıktır.

Ayrıca Y oranı $f(2) = (1-\theta)(1-q\theta)$ olasılığı için yansızdır.

Benzer şekilde örneklemdeki 3'lerin oranı Z ile gösterildiğinde, Z oranı $f(3) = \theta(1-\theta)(1-q\theta)$ olasılığı için yansızdır. $\delta = 1$ için q ve θ parametrelerinin oran tahmini

$$\begin{aligned} (1-\theta)(1-q\theta) &= Y \\ \theta(1-\theta)(1-q\theta) &= Z \end{aligned}$$

eşitliğinin aynı anda çözülmesi ile elde edilir.

θ ve q parametrelerinin oran tahminleri sırasıyla

$$\hat{\theta} = \frac{Z}{Y} \text{ ve } \hat{q} = \frac{\left(Y^2 - Y + Z\right)Y}{Z\left(Z - Y\right)}$$

şeklinde elde edilir.

$\delta > 1$ için θ ve q parametrelerinin oran tahmini ise

$$\begin{aligned} (1-\theta)(1-q\theta) &= Y \\ \theta(1-\theta)(1-q\theta) + (1-\theta)\theta q(1-q\theta) &= Z, \end{aligned}$$

eşitliğinin aynı anda çözülmesi ile elde edilir. Bu oran tahminleri elde edilirken Newton-Raphson yöntemi kullanılmıştır.

Oran tahminlerinin performansınlarını görmek için Bias ve MSE değerlerine bakılmıştır. Simülasyon çalışması farklı n,θ,q,δ değerleri için 10000 tekrara dayalı olarak yapılmıştır. Bias ve MSE değerleri Tablo 5.3 ve Tablo 5.4‘ te verilmiştir. n değeri arttıkça MSE ve Bias değerlerinin azaldığı görülmüştür.

Tablo 5.3. Oran Tahmininin Ortalama Bias değerleri

		$\delta = 1$		$\delta > 1$	
(θ,q)	n	$\hat{q}$	$\hat{\theta}$	$\hat{q}$	$\hat{\theta}$
$(0.5,0.3)$	100	0.0489	–0.0144	–0.1274	0.0107
	200	0.1216	–0.0060	–0.1179	0.0169
	300	0.0678	–0.0043	–0.1159	0.0192
	400	0.0468	–0.0043	–0.1113	0.0201
	500	0.0362	–0.0010	–0.0939	0.0177
	1000	0.0170	–0.0006	–0.0657	0.0134
$(0.3,0.5)$	100	–0.0373	–0.0047	–0.0198	–0.0220
	200	–0.0165	–0.0036	–0.0394	–0.0119
	300	–0.0124	–0.0016	–0.0567	–0.0060
	400	–0.0064	–0.0015	–0.0605	–0.0037
	500	–0.0029	–0.0011	–0.0616	–0.0016
	1000	–0.0009	–0.0008	–0.0815	0.0043
$(0.5,0.5)$	100	0.0543	–0.0178	–0.0269	–0.0227
	200	0.0177	–0.0065	–0.0515	–0.0069
	300	0.0057	–0.0033	–0.0672	0.0011
	400	0.0036	–0.0028	–0.0658	0.0044
	500	0.0020	–0.0019	–0.0740	0.0073
	1000	0.0004	–0.0009	–0.0771	0.0118
$(0.1,0.7)$	100	–0.1309	–0.0010	0.2090	–0.0330
	200	–0.0516	–0.0002	0.1765	–0.0263
	300	–0.0378	–0.0004	0.1573	–0.0227
	400	–0.0255	–0.0002	0.1510	–0.0208
	500	–0.0183	–0.0002	0.1383	–0.0195
	1000	–0.0112	–0.0001	0.0930	–0.0139

Tablo 5.4. Oran Tahmininin Ortalama MSE değerleri

		$\delta = 1$		$\delta > 1$	
(θ, q)	n	$\hat{q}$	$\hat{\theta}$	$\hat{q}$	$\hat{\theta}$
$(0.5, 0.3)$	100	0.5905	0.0184	0.2482	0.0070
	200	0.1216	0.0091	0.1913	0.0059
	300	0.0678	0.0063	0.1627	0.0053
	400	0.0468	0.0046	0.1446	0.0050
	500	0.0362	0.0036	0.1206	0.0044
	1000	0.0170	0.0018	0.0759	0.0030
$(0.3, 0.5)$	100	0.1459	0.0071	0.2502	0.0060
	200	0.0628	0.0035	0.2062	0.0044
	300	0.0377	0.0022	0.1830	0.0037
	400	0.0274	0.0017	0.1681	0.0034
	500	0.0228	0.0014	0.1555	0.0031
	1000	0.0107	0.0007	0.1280	0.0025
$(0.5, 0.5)$	100	0.8287	0.0250	0.2191	0.0077
	200	0.1591	0.0107	0.1733	0.0054
	300	0.1197	0.0068	0.1516	0.0049
	400	0.0551	0.0050	0.1367	0.0046
	500	0.0438	0.0041	0.1279	0.0044
	1000	0.0208	0.0020	0.0990	0.0037
$(0.1, 0.7)$	100	0.4452	0.0013	0.3931	0.0038
	200	0.1198	0.0007	0.3277	0.0027
	300	0.0751	0.0004	0.2842	0.0021
	400	0.0517	0.0003	0.2681	0.0019
	500	0.0389	0.0003	0.2496	0.0017
	1000	0.0187	0.0001	0.1979	0.0011

5.4. Sayısal Bir Örnek

Burada Phyo (1973) çürük dişler (curious teeth) gerçek verisi kullanılmıştır. Bu veride 10-11 yaşlarında 4 adet azı dişi çıkan 100 adet çocuğun çürük dişleri ölçülmüştür. Veriler aşağıdaki Tablo 5.5 ‘ te verilmiştir.

Tablo 5.5. Toplam Çürük Diş Sayısı

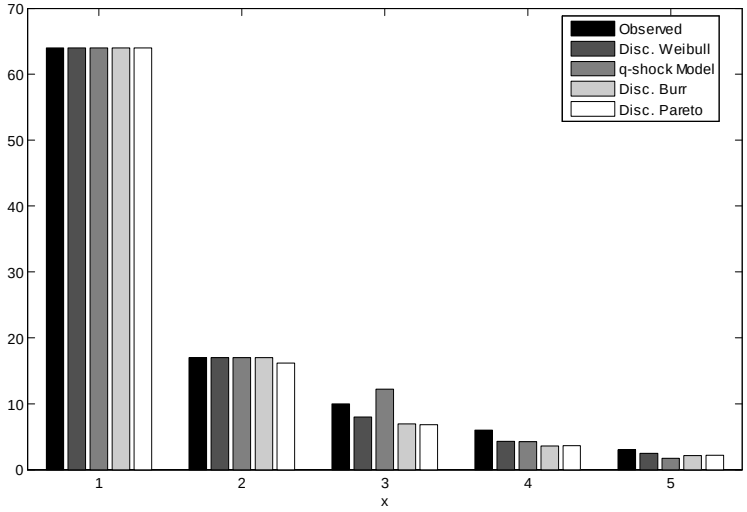
x_i	0	1	2	3	4	Toplam
o_i	64	17	10	6	3	100

Tablodaki o_i gözlenmiş x_i değerlerinin frekanslarını göstermektedir. T_δ rasgele değişkeni 2 veya daha büyük değerler alabildiği için $q\delta - Şok$ modeline χ^2 uyum iyiliği testi için X_i yerine $X_i + 2$ kullanılacaktır.

χ^2 uyum iyiliği testi, Kesikli Burr(DB(Krishna ve Pundir(2009))), Kesikli Pareto(DP(Krishna ve Pundir(2009))), Kesikli Weibull(Dw(Nakagawa ve Osaki(1975))), Geometrik(G), Poisson(P), $\delta = 1$ için $q\delta - Şok$ ve $\delta > 1$ için $q\delta - Şok$ dağılımları için yapılmıştır. *p*-değerlerine göre azalan bir şekilde sıraladığımızda ilk 3 dağılım sıralaması Kesikli Weibull, $\delta = 1$ için $q\delta - Şok$, Kesikli Pareto olarak elde edilir. Ayrıca Şekil 5.6' dan da görülebileceği gibi $\delta = 1$ için $q\delta - Şok$ dağılımı veriye en uygun modeldir. Bu sonuçlara göre $\delta = 1$ için $q\delta - Şok$ dağılımı gerçek kesikli dağılımları modellemede kullanmak için uygun bir dağılımdır yorumu yapılabilir.

Tablo 5.6. Bazı Kesikli dağılımlar için χ^2 uyum iyiliği testi

x_i	o_i	DBD	DWD	DPD	GD	PD	x_i	o_i	$\delta = 1$ için $q\delta - şok$	$\delta > 1$ için $q\delta - şok$
0	64	64	64	64	64	64	2	64	64.0031	64.0052
1	17	17	17	16.1959	23.0400	28.5624	3	17	16.9992	25.5397
2	10	6.9645	7.9926	6.8441	8.2960	6.3735	4	10	12.2279	5.7847
3	6	3.5924	4.2840	3.6325	2.9860	0.9481	5	6	4.2388	2.9650
4	3	2.1226	2.4664	2.1980	1.0750	0.1058	6	3	1.7182	1.1745
	χ^2	3.2294	1.3070	3.3308	8.4238	112.845			2.0938	11.8709
	p-değeri	0.1921	0.5202	0.3434	0.0380	0.0000			0.3510	0.0000



Şekil 5.6 Gerçek Veri için Empirik ve Verilen Dağılımların Grafiği

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışma ile iki yeni rasgele değişken tanımlanmış ve bu rasgele değişkenlerinin dağılımları bulunarak literatüre iki yeni kesikli olasılık dağılımı kazandırılmıştır.

KAYNAKLAR

Aki, S., and Hirano, K., 1988, Some characteristics of the binomial distribution of order k and related distributions, In Statistical Theory and Data Analysis II, Elsevier Science Publishers, B.V., North – Holland, 211 – 222.

Charalambides, C. A., 2010, The q -Bernstein basis as a q-binomial distributions, Journal of Statistical Planning and Inference., 140, 2184-2190.

De Moivre, A., 1738, The Doctrine of Chances: A Method of Calculating the Probabilty of Events in Play(Secon Edition).

Erylmaz, S., 2012, Generalized δ-shock model via runs, Statistics and Probability Letters, 82, 326-331.

Erylmaz, S., 2013, On the lifetime behavior of a discrete time shock model, Journal of Computational and Applied Mathematics, 237, 384-388.

Godbole, A. P., 1992, The exact and asymptotic distribution of overlapping success runs, Commmun. Statist.–Theory Meth., 21(4), 953-967.

Gut, A.,1990, Cumulative shock models, Advances in Applied Probability, 22, 504-507.

Hirano, K., 1986, Some properties of the distributions of order k, In Fibonacci Numbers and Their Applications, D.Reidel Publishing Company, Dordrecht, The Neterhlands, 43–53.

Hirano, K., Aki, S., Kashiwagi, N. and Kuboki, H., 1991, On Ling's binomial and negative binomial distributions of order k, Statistics & Probability Letters, 11, 503-509.

II'inskii, A. and Ostrovska, S., 2002, Convergence of generalized Bernstein polynomials, Journal of Approx. Theory, 116, 100-112.

Khan, M. S. A., Khalique, A. and Abouammoh, A. M., 1989, On estimating parameters in a discrete Weibull distribution, IEEE Transaction on Reliability, 38(3), 348-350.

Koutras, M. V. and Alexandrou, V. A., 1997, Non-parametric randomness testsbased on success runs of fixed length, Statistics & Probability Letters, 32, 393-404.

Krisha, H. and Pundir, P.S., 2009, Discrete Burr and Discrete Pareto distributions, Statistical Methodology, 6, 177-188.

Li, Z. H., X.B. Kong, X. B., 2007, Life behavior of δ-shock model, Statistics and Probability Letters 77, 577-587.

Ling, K.D., 1988, On Binomial distributions of order k, Statistics & Probability Letters, 6, 247 – 250.

Ling, K. D., 1989, A new class of negative binomial distributions of order k, Statistics & Probability Letters, 7, 371-376.

Makri, F.S. and Philippou, A.N., 2005, On Binomial and Circular Binomial Distributions of order k for l-overlapping success runs of length k, Statistical Papers 46(3), 411-432.

Mallor, F., Omey, E., 2001, Shocks, runs and random sums, Journal of Applied Probability, 38, 438-448.

Monsteller, F., 1941, Note on an application of runs to quality control charts, Annal of Mathematical Statistics, 12, 228-232.

Mood, A. M., 1940, The distribution theory of runs, Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 11, 367-392.

Muselli, M., 1996, Simple expressions for success run distributions in Bernoulli trials, Statistics & Probability Letters, 31, 121 – 128.

Nakagawa, T. and Osaki, S., 1975, The discrete Weibull distribution, IEEE Transactions on Reliability, 24, 300-301.

Ostrovska, S., 2003, q-Bernstein polynomials and their iterates, Journal of Approx. Theory, 123, 232-255.

Philippou, A. N. , 1984, The negative binomial distribution of order k and some of its properties, Biom. J., 26, 789-794.

Philippou, A. N., Georghiou, C., and Philippou G. N., 1983, A generalized geometric distribution and some of its properties, Statistics & Probability Letters, 1, 171-175.

Philippou, A.N. and Makri, F.S., 1986, Success runs and longest runs, Statistics & Probability Letters, 4, 211 – 215.

Phillips, G. M., 1997, Bernstein polynomials on q-integer, Ann. Numer Anal., 4, 511-518.

Phyo, I., 1973, Use of a chain binomial in epiemiology of caries, Journal of Dental Research, 52, 750-752

Shahbazov, A., 2005, Olasılık Teorisine Giriş, Birsen Yayınevi, İstanbul.

Sumita, U., Shanthikumar, J.G., 1985, A class of correlated cumulative shock models, Advances in Applied Probability, 17, 347-366.

Wald, A. and Wolfowitz, J., 1940, On a test whether two samples are from the same population, Annal of Mathematical Statistics, 11, 147-162.

Wolfowitz, J., 1943, On the theory of runs with some applications to quality control, Annals of Mathematical Statistics, 14, 280 – 288.

Yalçın, F., 2013, On a generealized Ling's Binomial distribution, Journal of the Turkish Statistical Association, 6 (4), 110-115.

Yalçın, F., and Eryılmaz S., 2014, q-geometrik and q-binomial distribution of order k, Journal of Computational and Applied Mathematics, 271, 31-38.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Kadir KARAKAYA
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : Ereğli/KONYA-1989
Telefon : 03322233910
e-mail : kkarakaya@selcuk.edu.tr

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	**Konya Ereğli Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi,Ereğli,KONYA**	**2008**
Üniversite	:	**S.Ü. Fen Fakültesi İstatistik Bölümü**	**2012**

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2012-	**S.Ü. Fen Fakültesi İstatistik Bölümü**	**Arş. Gör.**

UZMANLIK ALANI

İstatistik

YABANCI DİLLER

İngilizce

YAYINLAR

Karakaya, K., Akdoğan, Y., Kınacı, İ. and Kuş, C., Bayesian Estimation for Discrete Chen Distribution, 9th International Statistics Day Symposium(ISDS 2014), Abstract Book, 1, 10-14 Mayıs 2014.