



T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ BRUCK-REILLY *- GENİŞLEMESİ VE BAZI CEBİRSEL SONUÇLARI

Seda OĞUZ

DOKTORA TEZİ
Matematik Anabilim Dalı

Eylül, 2015
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

DOKTORA TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ BRUCK-REILLY *- GENİŞLEMESİ VE BAZI CEBİRSEL SONUÇLARI

Seda OĞUZ

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Eylem GÜZEL KARPUZ

2015, 88 Sayfa

Jüri
Doç. Dr. Eylem GÜZEL KARPUZ
Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK
Prof. Dr. Durmuş BOKURT
Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN
Yrd. Doç. Dr. Pınar AYDOĞDU

Bu tez birinci bölüm olan giriş kısmı dışında beş bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde özel yarıgrup sınıfları, kongrüans bağıntıları, Green denklik bağıntıları ile ilgili bilgiler verilmiş olup bunun yanı sıra yarıgrup, monoid ve grup sunuşları ile ilgili hatırlatmalar yapılmıştır.

Üçüncü bölümde, yarıgruplarda sonluluk koşulları ile ilgili ayrıntılı bilgi verilmiştir ve bazı yarıgrup (monoid) yapıları üzerinde sonluluk koşulları ile ilgili yapılmış olan çalışmalar özetlenmiştir.

Dördüncü bölümde, monoidlerin Bruck-Reilly genişlemesi incelenmiş ve bu genişleme türü üzerinde özel yarıgrup sınıfları tanımlanmıştır. Bunun yanı sıra bu genişleme türü üzerinde kongrüans türleri kategorize edilmiş ve sonluluk koşullarının (sonlu sunumluluk ve sonlu üreteçlilik) sağlanması için gerek ve yeter koşullar verilmiştir.

Beşinci bölümde, Bruck-Reilly genişlemesinin bir genelleştirmesi olan genelleştirilmiş Bruck-Reilly *-genişlemesi hakkında bilgi verilmiştir. Bu genişleme türünün özel yarıgrup sınıflarına ait olabilmesi için gerek ve yeter koşullar ispatlanmış ve üzerinde kongrüanslar (grup kongrüans, anonim kongrüans ve çapraz kongrüans) kategorize edilmiştir. Bunun yanı sıra, bir grubun genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemesi ve özel olarak bir Clifford monoidin genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemesi üzerinde bazı sonluluk koşullarının sağlanması için gerek ve yeter şartlar ispatlanmıştır. Ayrıca terslenebilir elemanlarının grubu sonlu üreteçli olmayan fakat kendisi sonlu sunumlu olan yeni bir monoid (sonsuz ranklı bir serbest grubun Bruck-Reilly genişlemesinin genelleştirilmiş Bruck-Reilly *-genişlemesi) örneği verilmiştir.

Son bölümde ise önceki bölümlerde elde edilen sonuçlar özetlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bruck-Reilly Genişlemesi, Genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- Genişlemesi, Kongrüanslar, Özel Yarıgrup Sınıfları, Sonluluk Koşulları.

ABSTRACT

Ph.D THESIS

GENERALIZED BRUCK-REILLY *- EXTENSION AND SOME ALGEBRAIC RESULTS

Seda OĞUZ

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
DOCTOR OF PHILOSOPHY
IN MATHEMATICS

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Eylem GÜZEL KARPUZ

2015, 88 Pages

Jury
Assoc. Prof. Dr. Eylem GÜZEL KARPUZ
Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Assoc. Prof. Dr. Ramazan TÜRKMEN
Asst. Prof. Dr. Pınar AYDOĞDU

This thesis consists of five chapters except introduction part. In the second chapter, it was informed on special semigroup classes, congruence relations, Green equivalence relations. Besides, it was reminded semigroup, monoid and group presentations.

In the third chapter, detailed information was given on finiteness conditions on semigroups and some studies on finiteness conditions of semigroups (monoids) have been summarized.

In Chapter 4, Bruck-Reilly extension of monoids has been investigated and special semigroup classes on this extension type have been defined. Besides, congruence types were characterized on this extension type and also given necessary and sufficient conditions to satisfy finiteness conditions (finite presentability, finite generation) on it.

In Chapter 5, it was informed on generalized Bruck-Reilly *- extension which is a generalization of Bruck-Reilly extension. Necessary and sufficient conditions have been proved for this extension type to belong special semigroup classes and then characterized congruences (group congruence, anonym congruence and crossover congruence) on it. Besides, necessary and sufficient conditions have been proved to satisfy some finiteness conditions for generalized Bruck-Reilly *- extension of a group and specially for generalized Bruck-reilly *- extension of a Clifford monoid. Moreover, a new example of a finitely presented monoid with a non-finitely generated group of units (generalized Bruck-Reilly *- extension of Bruck-Reilly extension of a free group with infinite rank) has been given.

In the last chapter, the results which are obtained according to the previous chapters have been summarized.

Keywords: Bruck-Reilly Extension, Generalized Bruck-Reilly *- Extension, Congruences, Special Semigroup Classes, Finiteness Conditions.

ÖNSÖZ

Doktora çalışmalarım süresince bilgi ve deneyimleri ile bana yol gösteren, kendime olan güvenimi artıran, eğitimime yurtdışında devam etmem konusunda beni teşvik eden ve bu çalışmanın ortaya çıkarılmasında çok önemli katkıları olan değerli danışman hocam Doç. Dr. Eylem GÜZEL KARPUZ'a,

Selçuk Üniversitesi'nde doktoraya başlamama vesile olan, ilk günden bu yana desteğini üzerimden esirgemeyen, her zaman insani ve ahlaki değerlerini de örnek alacağım fahri danışmanım Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK'e,

Öğrenim hayatımda bu günlere ulaşmamda büyük pay sahibi olan tüm hocalarıma,

Çalışmanın ortaya çıkarılmasında en önemli faktör huzurlu bir çalışma ortamının varlığıdır. Bana büyük bir özveriyle bu olanağı sağlayan ve çalışmalarım süresince başarılı olabilmem için her türlü fedakarlıkta bulunan sevgili aileme,

Tanıştığım ilk günden bu yana her an desteğini yanımda hissettiğim, hayatımı değiştiren, kolaylaştıran ve beni daha pozitif bir insan haline getiren hayat arkadaşım Bahattin ÜNAL'a,

sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Seda OĞUZ
KONYA-2015

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

SİMGELER VE KISALTMALAR ..... **ix**

1. GİRİŞ **1**

2. TEMEL BİLGİLER **3**

2.1. Giriş 3
2.2. Yarıgruplar 3
2.3. Green Denklik Bağıntıları 4
2.4. Sunuşlar 8
2.4.1. Serbest grup 8
2.4.2. Grup sunuşları 10
2.4.3. Monoid sunuşları 11
2.4.4. Kongrüanslar 12
2.4.5. Yarıgrup sunuşları 12
2.4.6. Tietze Dönüşümleri 14
2.5. Özel Yarıgrup Sınıfları 15

3. YARIGRUPLARDA SONLULUK KOŞULLARI **20**

3.1. Giriş 20
3.2. Sonlu Üreteçlilik ve Sonlu Sunumluluk 20
3.3. Periyodiklik 21
3.4. Yerel Sonluluk 22
3.5. Artan Sonluluk 23
3.6. Çözülebilir Kelime Problemi 23

4. BRUCK-REILLY GENİŞLEMELERİ VE BAZI CEBİRSEL SONUÇLARI **26**

4.1. Giriş 26
4.2. Monoidlerin Bruck-Reilly Genişlemesi Üzerinde Özel Yarıgrup Sınıfları 27
4.2.1. Bir monoidin Bruck-Reilly genişlemesi üzerinde bazı özel yarıgrup sınıfları 27
4.2.2. k sayıda monoidin direkt çarpımının Bruck-Reilly genişlemesi üzerinde bazı özel yarıgrup sınıfları 30
4.3. Bruck-Reilly Genişlemesi Üzerinde Kongrüanslar 34
4.4. Bruck-Reilly Genişlemeleri Üzerinde Sonlu Üreteçlilik ve Sonlu Sunumluluk 36
4.4.1. Bir monoidin Bruck-Reilly genişlemesinin sonlu üreteçliliği ve sonlu sunumluluğu 38
4.4.2. Bir grubun Bruck-Reilly genişlemesinin sonlu üreteçliliği ve sonlu sunumluluğu 39

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ BRUCK-REILLY *- GENİŞLEMELERİ VE BAZI CEBİRSEL SONUÇLARI 40

5.1. Giriş 40
5.2. Monoidlerin Genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- Genişlemesi Üzerinde Özel Yarıgrup Sınıfları 41
5.2.1. Bir monoidin genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemesi üzerinde bazı özel yarıgrup sınıfları 42
5.2.2. *k* sayıda monoidin direkt çarpımının genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemesi üzerinde bazı özel yarıgrup sınıfları 45
5.3. Genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- Genişlemesi Üzerinde Kongrüanslar 51
5.4. Genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- Genişlemesi Üzerinde Sonlu Üreteçlilik ve Sonlu Sunumluluk 56
5.4.1. Bir grubun genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemesinin sonlu üreteçliliği ve sonlu sunumluluğu 59
5.4.2. Clifford monoidin genelleştirilmiş Bruck-Reilly -* genişlemesinin sonlu sunumluluğu 73
5.4.3. Terslenebilir elemanlarının grubu sonlu üreteçli olmayan bir monoid örneği… 77

6. SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRMELER 81

6.1. Sonuçlar 81

KAYNAKLAR 83

ÖZGEÇMİŞ 87

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler	**Tanımı**
$\mathcal{L}$	Sol Green bağıntısı
$\mathcal{R}$	Sağ Green bağıntısı
$\mathcal{J}$	Green bağıntısı
$\mathcal{H}$	$\mathcal{L}$ ve $\mathcal{R}$ Green bağıntılarının kesişimi
$\mathcal{D}$	$\mathcal{L}$ ve $\mathcal{R}$ Green bağıntılarının bileşkesi
$\iota(w)$	w kelimesinin başlangıç harfi
$\tau(w)$	w kelimesinin son harfi
1_w	Boş kelime
$l(w)$	w kelimesinin uzunluğu
$l_x(w)$	w kelimesindeki herhangi bir x harfinin uzunluğu
$\approx$	Serbest olarak iki kelimenin denkliği
$[w]$	w kelimesinin denklik sınıfı
$F(X)$	X kümesi üzerindeki serbest grup
$\wp =< X \mid R >$	Grup sunuşu
$w_1 \approx_{\wp} w_2$	w_1 ve w_2 kelimeleri $\wp$ sunuşuna bağlı olarak denktir
$[w]_{\wp}$	$\wp$ sunuşuna bağlı olarak $[w]$ kelimesinin denklik sınıfı
$\mathrm{G}(\wp)$	$\wp$ sunuşunun temsil ettiği grup
$[1]_{\wp}$	$\wp$ sunuşuna bağlı grubun birimi
N	Normal kapanış
A^+	A kümesindeki elemanlarla oluşturulan en az bir uzunluklu kelimelerin kümesi
A^*	$A^+ \cup \{1\}$
$\wp_M$	M monoidinin sunuşu
$\wp_S$	S yarıgrubunun sunuşu
G_M	M monoidinin terslenebilir elemanlarının oluşturduğu grup
$E(M)$	M monoidinin idempotent elemanlarının oluşturduğu küme

P	Sonluluk koşulu
$BR(M;\theta)$	M monoidinin θ endomorfizması ile olan Bruck-Reilly genişlemesi
$\times_{i=1}^{k} T_k$	k sayıda monoidin direkt çarpımı
$BR(\times_{i=1}^{k} T_i\ ,\theta)$	k sayıda monoidin direkt çarpımının θ endomorfizması ile olan Bruck-Reilly genişlemesi
$BR(G;\theta)$	G grubunun θ endomorfizması ile olan Bruck-Reilly genişlemesi
τ_C	τ kongrüansının $C = \{(m,1,n)\|m,n \in \mathbb{N}\}$ kümesine kısıtlanışı
τ_M	τ kongrüansının M monoidine kısıtlanışı
$GBR^*(M;\beta,\gamma;u)$	M monoidinin β ve γ homomorfizmaları ile olan genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemesi
$GBR^*(G;\beta,\gamma;u)$	G grubunun β ve γ homomorfizmaları ile olan genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemesi

1. GİRİŞ

Birleştirilmiş yarıgrup teori, birleştirilmiş grup teori çalışmalarının etkisi ile geçtiğimiz yüzyılın ortalarından bu yana çalışılmaktadır. Buna rağmen sadece son yıllarda büyük ilerleme kaydeden bir konu olmuştur ve bağımsız hale gelmiştir. Özellikle yarıgrup sunuşları ve bununla ilgili olarak bir cebirsel yapının sonlu sunumluluğunun ve sonlu üreteçliliğinin araştırılması son zamanlarda yapılan çalışmalarda sıklıkla ele alınmıştır.

Bu tezin ana konusunu oluşturan monoidlerin genelleştirilmiş Bruck-Reilly *-genişlemesi ilk kez 1985 yılında Asibong-Ibe tarafından "*-Bisimple Type A $w-$ semigroups as generalized Bruck-Reilly *- extensions" isimli makalede tanımlanmıştır. Genelleştirilmiş Bruck-Reilly *-genişlemesinin sunuşu "Gröbner-Shirshov bases of the generalized Bruck-Reilly *-extension" isimli makalede verilmiştir (Kocapınar ve ark., 2012). Bu genişleme türü tersinir yarıgrup teoride oldukça önemli rolü olan Bruck-Reilly genişlemesinin bir genelleştirmesidir. Bruck-Reilly genişlemesi ise Bruck (1958), Reilly (1966) ve Munn, (1970) tarafından oluşturulan yapıların genelleştirmesidir. Bu yapının oluşum süreci ilk kez Bruck tarafından 1958'de her yarıgrubun bir basit monoid içerisine gömülebileceğini göstermesiyle başlamıştır. Sonrasında Reilly, 1966 yılında aynı yapıyı tekrar inşa ederek Reilly genişlemesini tanımlamıştır. Son olarak 1970'de Munn, Bruck ve Reilly'nin elde ettiği genişlemeleri genelleştirerek Bruck-Reilly genişlemesi terimini ortaya çıkarmıştır.

Bilindiği üzere yarıgrup teorideki ana problemlerden biri tüm yarıgrupları sınıflandırmak ve bu yapıların tam açıklamasını yapmaktır. Özel yarıgrup sınıfları yarıgrup tanımına ilave olarak bazı özellikler veya koşullar eklenerek elde edilir. Yarıgruplarda ikili işlem sadece birleşme özelliğini sağladığından yarıgrupları sınıflandırmak oldukça zordur. Bu şekildeki yapıların tanımlanabilmesi belirli özel yarıgrup sınıfları için mümkündür. Örneğin; regüler yarıgrupların idempotent elemanlarının kümesinin yapısı tamamen bilinmektedir. Bu sebepten özel yarıgrup sınıflarının yarıgrup teoride önemli bir yeri vardır. Bu tezde ise monoidlerin Bruck-Reilly ve genelleştirilmiş Bruck-Reilly *-genişlemeleri üzerinde önemli görülen özel yarıgrup sınıfları incelenmiştir ve bu genişleme türlerinin özel yarıgrup sınıflarına ait olabilmeleri için gerek ve yeter koşullar ispatlanmıştır.

Bir yarıgrup (monoid) için verilmiş olan bir P özelliği tüm sonlu yarıgruplar (monoidler) için de sağlanıyorsa bu P özelliğine sonluluk koşulu denilmektedir.

Sonluluk koşulları ile ilgili ayrıntılı bilgi için (Howie ve Ruškuc, 1994), (Ruškuc, 1995), (Ayık, 1998) ve (Abu-Ghazalh, 2013) kaynaklarına bakınız. Sonluluk koşulları arasında yer alan sonlu sunumluluk uzun yıllardır çalışılan bir konu olmakla birlikte bu amaçla oluşturulan GAP ve MAGMA gibi bilgisayar programlarının kullanılabilmesi için de cebirsel yapıların sonlu sunuşlarının bilinmesi gerekmektedir. Bu tezin bir diğer amacını da grupların ve özel monoid yapılarının Bruck-Reilly ve genelleştirilmiş Bruck-Reilly *-genişlemeleri üzerinde sonluluk koşulları (sonlu üreteçlilik ve sonlu sunumluluk) oluşturmaktadır.

2. TEMEL BİLGİLER

2.1. Giriş

Bu bölümde tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan temel kavramlar incelenecektir. Bu bölümdeki materyaller ile ilgili detaylı bilgiler (Petrich, 1973), (Lyndon ve Schupp, 1977), (Higgins, 1992) ve (Howie, 1995) gibi kaynaklardan elde edilebilir.

2.2. Yarıgruplar

S boş olmayan bir küme olmak üzere, $S \times S$ den S üzerine tanımlı olan bir "$*$" fonksiyonuna S üzerinde bir ***ikili işlem*** denir. Eğer bu ikili işlem, S üzerinde birleşme özelliğine sahip ise $(S,*)$ ikilisine bir ***yarıgrup*** denir. S yarıgrubu değişme özelliğine sahip ise yani, her $x, y \in S$ için $x * y = y * x$ oluyorsa S ye ***değişmeli yarıgrup*** denir.

S bir yarıgrup ve $z \in S$ olsun. Her $x \in S$ için $zx = z$ oluyorsa z ye S nin bir ***sol sıfır elemanı***, $xz = z$ oluyorsa z ye S nin bir ***sağ sıfır elemanı*** denir. $z \in S$ elemanı hem sol hem de sağ sıfır eleman ise z ye S nin bir ***sıfır elemanı*** denir. Eğer her $x \in S$ için $ex = x$ olacak şekilde bir $e \in S$ varsa e ye S nin ***sol birim elemanı*** ve eğer her $x \in S$ için $xe = x$ olacak şekilde bir $e \in S$ varsa e ye S nin bir ***sağ birim elemanı*** denir. $e \in S$ hem sol hem de sağ birim eleman ise e ye S nin ***birim elemanı*** denir. Bir yarıgrup birim elemana sahip ise tektir. Bir S yarıgrubu birim eleman içeriyorsa S ye bir ***monoid*** denir ve birimi 1_S (veya 1) ile gösterilir.

S yarıgrubuna gerekirse birim eleman eklenerek monoid elde edilebilir ve elde edilen monoid aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$S^1 = \begin{cases} S & : 1 \in S \\ S \cup \{1\} & : 1 \notin S \end{cases}$$

Benzer şekilde S yarıgrubuna sıfır eklenerek S^0 elde edilir.

S bir yarıgrup olmak üzere, her $a \in S$ için

$$Sa = S \text{ ve } aS = S$$

oluyorsa S ye bir ***grup*** denir. Eğer S bir monoid ve G, S nin birim elemanını içeren en büyük alt grubu ise bu durumda, G ye S nin terslenebilir elemanlarının grubu denir.

I, S nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer her $s \in S$ ve her $x \in I$ için $sx \in I$ $(SI \subseteq I)$ oluyor ise I ya S nin bir ***sol ideali*** ve eğer her $s \in S$ ve her $x \in I$ için $xs \in I$ $(IS \subseteq I)$ oluyor ise I ya S nin bir ***sağ ideali*** denir. I, S nin hem sağ hem de sol ideali ise I ya S nin bir ***ideali*** denir. Bir yarıgrubun sol (sağ, iki yanlı) ideallerinin arakesiti de yine bir sol (sağ, iki yanlı) idealdir. I, S nin bir sol (sağ, iki yanlı) ideali olmak üzere, I, S nin her sol (sağ, iki yanlı) ideali tarafından kapsanıyorsa I ya S nin ***minimal ideali*** denir. S nin boştan farklı X alt kümesi ile üretilen sol (sağ, iki yanlı) ideali S nin X i içeren tüm sol (sağ, iki yanlı) ideallerinin arakesitidir. X tarafından üretilen sol ideal S^1X ile X tarafından üretilen sağ ideal XS^1 ile ve X tarafından üretilen iki yanlı ideal S^1XS^1 ile gösterilir. Eğer $X = \{x\}$ tek elemanlı bir küme ise bu durumda, X tarafından üretilen sol (sağ, iki yanlı) ideale X in öz sol (sağ, iki yanlı) ideali denir. S nin ideallerine örnek olarak S nin kendisini ve eğer 0 (sıfır) içeriyorsa $\{0\}$ verilebilir.

S_1 ve S_2 birer yarıgrup olmak üzere, $\varphi: S_1 \to S_2$ fonksiyonu tanımlansın. Eğer $x, y \in S_1$ için

$$(xy)\varphi = (x\varphi)(y\varphi)$$

oluyor ise φ fonksiyonuna S_1 den S_2 ye bir ***homomorfizma*** denir. Eğer φ homomorfizması örten ise ***epimorfizma***, bire-bir ise ***monomorfizma,*** hem bire-bir hem örten ise ***izomorfizma*** adını alır. φ bir izomorfizma olduğunda S_1 ile S_2 ***izomorftur*** denir ve bu $S_1 \cong S_2$ ile gösterilir.

S_1 ve S_2 birer yarıgrup olmak üzere, $\varphi: S_1 \to S_2$ homomorfizması verilsin. Bu homomorfizmanın $im\varphi = S_1\varphi = \{s\varphi | s \in S_1\}$ görüntü kümesi S_2 yarıgrubu için bir alt yarıgruptur. Ayrıca φ fonksiyonu bir monomorfizma ise bu durumda S_1 yarıgrubu $im\varphi$ yarıgrubuna izomorf olur.

2.3. Green Denklik Bağıntıları

Green Denklik bağıntıları beş denklik bağıntısından oluşur ve bir yarıgrubun elemanlarını ürettikleri ideallere göre karakterize eder. Bir S yarıgrubu üzerinde

tanımlanan bir Green denklik bağıntısı S nin sağ, sol veya hem sağ hem de sol ideallerini üretmek için kullanılabilir.

Green denklik bağıntıları ile ilgili detaylı bilgi için (Higgins, 1992) ve (Howie, 1995) kaynaklarına bakınız. Şimdi sırası ile bu bağıntılardan ve teoremlerinden bahsedelim.

Tanım 2.3.1: S bir yarıgrup ve $a, b \in S$ olmak üzere, S üzerinde $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ ve $\mathcal{J}$ bağıntıları sırasıyla

$a\mathcal{L}b \quad \Leftrightarrow \quad S^1a = S^1b \Leftrightarrow a = sb$ ve $b = ra$ olacak şekilde $s, r \in S^1$ vardır

$a\mathcal{R}b \quad \Leftrightarrow \quad aS^1 = bS^1 \Leftrightarrow a = bs$ ve $b = ar$ olacak şekilde $s, r \in S^1$ vardır

$a\mathcal{J}b \quad \Leftrightarrow \quad S^1aS^1 = S^1bS^1 \Leftrightarrow a = sbr$ ve $b = uav$ olacak şekilde $s, r, u, v \in S^1$ vardır

olarak tanımlanırsa; buradaki $\mathcal{L}$ bağıntısına ***sol Green***, $\mathcal{R}$ bağıntısına ***sağ Green*** ve $\mathcal{J}$ bağıntısına da ***Green bağıntısı*** adı verilir.

S nin a elemanını içeren en küçük sol, sağ ve iki taraflı idealleri sırasıyla S^1a, aS^1 ve S^1aS^1 dir.

Önerme 2.3.2 (Howie, 1995): $\mathcal{L}$ bir sağ kongrüans ve $\mathcal{R}$ bir sol kongrüanstır.

Önerme 2.3.3(Howie, 1995): $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{R}$ bağıntıları değişmelidir.

Tanım 2.3.4: S bir yarıgrup olmak üzere, S üzerindeki $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{R}$ bağıntılarının kesişimi alınarak oluşturulan bağıntıya ***$\mathcal{H}$ bağıntısı*** denir.

Tanım 2.3.5: S bir yarıgrup olsun. S üzerinde $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{R}$ bağıntılarının $\mathcal{D} = \mathcal{L}o\mathcal{R}$ şeklinde bileşkesi alınarak oluşturulan bağıntıya ***$\mathcal{D}$ bağıntısı*** denir.

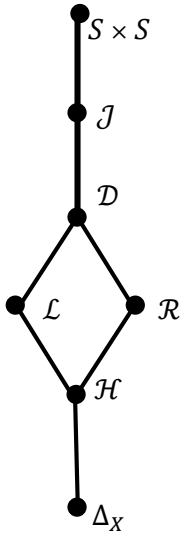
Önerme 2.3.6 (Howie, 1995): $\mathcal{D}$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

Not 2.3.7: $\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$ olduğundan, $\mathcal{H}$ bağıntısının da bir denklik bağıntısı olduğu kolayca görülür.

Bir S yarıgrubu üzerinde verilen Green denklik bağıntıları arasındaki sıralama,

$$\mathcal{H} \subseteq \mathcal{L},\ \mathcal{H} \subseteq \mathcal{R},\ \mathcal{L} \subseteq \mathcal{D}, \mathcal{R} \subseteq \mathcal{D},\ \mathcal{D} \subseteq J \subseteq S \times S$$

şeklinde olup aralarında verilen bu ilişki aşağıda verilen Hasse diyagramı ile ifade edilir.



Şekil 2.1. Green denklik bağıntılarının Hasse diyagramı

Önerme 2.3.8 (Howie, 1995): $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{J}, \mathcal{H}$ *ve* $\mathcal{D}$ Green denklik bağıntıları bir G grubu üzerinde oluşturulursa,

$$\mathcal{L} = \mathcal{R} = \mathcal{J} = \mathcal{H} = \mathcal{D} = G \times G$$

şeklinde bir sıralama elde edilir.

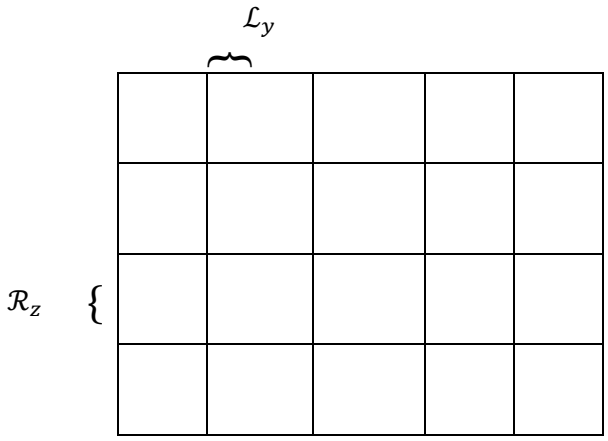
Önerme 2.3.9 (Howie, 1995): Green denklik bağıntıları değişmeli bir Syarıgrubu üzerinde oluşturulursa, $\mathcal{L} = \mathcal{R} = \mathcal{H} = \mathcal{D}$ eşitlikleri sağlanır.

Önerme 2.3.10 (Howie, 1995): S bir yarıgrup olmak üzere,

$$(x, y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \mathcal{L}_x \cap \mathcal{R}_y \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{L}_y \cap \mathcal{R}_x \neq \emptyset$$

dir. Ayrıca $\mathcal{D} = \cup_{y \in D_x} \mathcal{L}_y = \cup_{y \in D_x} \mathcal{R}_y$ dir.

Clifford ve Preston, $\mathcal{D}$-Green denklik sınıfının ayrık $\mathcal{L}$-Green ve $\mathcal{R}$-Green denklik sınıflarının birleşimi olması nedeniyle bir $\mathcal{D}$-sınıfını her satırı bir $\mathcal{R}$ -sınıfını her sütunu bir $\mathcal{L}$-sınıfını ve her hücresi de bir $\mathcal{H}$-sınıfını temsil eden bir egg box (yumurta kutusu) olarak düşünmüşlerdir.



Şekil 2.2. Bir $\mathcal{D}$-Green denklik sınıfının egg box (yumurta kutusu) örneği

Teorem 2.3.11 (Green Denklik Teoremi) (Howie, 1995): S bir yarıgrup olsun. $a, b \in S$ için,

i) Eğer a ve b, $\mathcal{R}$-bağıntılı ise $as = b$ ve $bt = a$ olacak şekilde $s, t \in S^1$ vardır. Ayrıca

$$\rho_s : \mathcal{L}_a \to \mathcal{L}_b,\ x \mapsto xs \quad \text{ve} \quad \rho_t : \mathcal{L}_b \to \mathcal{L},\ x \mapsto xt$$

şeklinde tanımlanan ρ_s ve ρ_t fonksiyonları birbirinin tersi olup, bire-bir ve örten dönüşümlerdir. ρ_s, $\mathcal{L}_a$ sınıfındaki her bir $\mathcal{H}$-sınıfını $\mathcal{L}_b$ de bu $\mathcal{H}$-sınıfının içinde bulunduğu $\mathcal{R}$-sınıfındaki $\mathcal{H}$-sınıfına eşler. Benzer şekilde ρ_t de $\mathcal{L}_b$ deki her bir $\mathcal{H}$-sınıfını $\mathcal{L}_a$ da bu $\mathcal{H}$-sınıfının içinde bulunduğu $\mathcal{R}$-sınıfındaki $\mathcal{H}$-sınıfına eşler.

ii) Eğer a ve b, $\mathcal{L}$-bağıntılı ise $sa = b$ ve $tb = a$ olacak şekilde $s, t \in S^1$ vardır. Ayrıca

$$\lambda_s : \mathcal{R}_a \to \mathcal{R}_b,\ x\lambda_s \mapsto sx \quad \text{ve} \quad \lambda_t : \mathcal{R}_b \to \mathcal{R}_a,\ x\lambda_t \mapsto xt$$

şeklinde tanımlanan λ_s ve λ_t fonksiyonları birbirinin tersi olup, bire-bir ve örten dönüşümlerdir. λ_s, $\mathcal{R}_a$ daki her bir $\mathcal{H}$-sınıfını $\mathcal{R}_b$ de bu $\mathcal{H}$-sınıfının içinde bulunduğu $\mathcal{L}$-sınıfındaki $\mathcal{H}$-sınıfına eşler. Benzer şekilde λ_t de $\mathcal{R}_b$ deki her bir $\mathcal{H}$-sınıfını $\mathcal{R}_a$ da bu $\mathcal{H}$-sınıfının içinde bulunduğu $\mathcal{L}$-sınıfındaki $\mathcal{H}$-sınıfına eşler.

İspat için Howie (1995), Lemma 2.2.1 ve Lemma 2.2.2 ye bakınız.

Teorem 2.3.12 (Howie, 1995): S bir yarıgrup olmak üzere, $\mathcal{H}$, S yarıgrubunun $\mathcal{H}$ -sınıfı olsun. Bu durumda, $\mathcal{H}^2 \cap \mathcal{H} = \emptyset$ veya $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}$ olur. Ayrıca $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}$ olması durumunda $\mathcal{H}$, S nin bir altgrubudur.

İspat için Howie (1995), Teorem 2.2.5 e bakınız.

Yukarıda tanımlanan beş Green denklik bağıntısı dışında literatürde mevcut olan ve bu bağıntıları da kapsayan başka Green denklik bağıntıları da bulunmaktadır. Bu bağıntılar $\mathcal{L}^*, \mathcal{R}^*, \mathcal{J}^*, \mathcal{H}^*$ ve $\mathcal{D}^*$ şeklindedir. Bu bağıntılardan $\mathcal{H}^*$ tezin orijinal bölümlerinden biri olan beşinci bölümde verilen genelleştirilmiş Bruck-Reilly *-genişlemesinin tanımında kullanılması sebebi ile $\mathcal{L}^*, \mathcal{R}^*$ ve $\mathcal{H}^*$ bağıntılarının tanımlarından kısaca aşağıda bahsedilmiştir.

S bir yarıgrup olsun. $a, b \in S$ olmak üzere, her $x, y \in S$ için,

- $a\mathcal{L}^*b$ ise $ax = ay$ olması için gerek ve yeter şart $bx = by$ olmasıdır.
- $a\mathcal{R}^*b$ ise $xa = ya$ olması için gerek ve yeter şart $xb = yb$ olmasıdır.
- $a\mathcal{H}^*b \Leftrightarrow a\mathcal{L}^*b$ ve $a\mathcal{R}^*b$ dir.

Not 2.3.13: Bir S yarıgrubu üzerinde verilen $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{R}$ Green denklik bağıntıları ile $\mathcal{L}^*$ ve $\mathcal{R}^*$ bağıntıları arasında $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^*$ ve $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}^*$ şeklinde bir ilişki vardır. Eğer S yarıgrubu regüler ise $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$ ve $\mathcal{R} = \mathcal{R}^*$ eşitlikleri sağlanır.

2.4. Sunuşlar

Birleştirilmiş grup ve yarıgrup teoride önemli bir yere sahip olan sunuşlar konusu, cebirsel problemlerin çözümünde kolaylık sağlamaktadır. Bu kısımda diğer bölümlere hazırlık sağlaması açısından öncelikle grup, monoid ve yarıgrup sunuşları hakkında bilgi verilmiştir ve daha sonra ise bu cebirsel yapıların sunuşları arasındaki geçişler incelenmiştir.

2.4.1. Serbest grup

X boştan farklı bir küme olsun. Bu küme ile $x \leftrightarrow x^{-1}$ $(x \in X)$ eşleşmesinden yararlanarak X^{-1} kümesi tanımlansın ve bununla birlikte $X^{\pm} = X \cup X^{-1}$ olsun. $X^{\pm}$ kümesinin her bir elemanına ***harf*** adı verilir. Burada, $n \in \mathbb{N}$, $x_i \in X$, $\varepsilon_i = \pm 1$ ve $1 \leq i \leq n$ olmak üzere,

$$x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n} \qquad (2.1)$$

ifadesine X üzerinde bir ***kelime*** adı verilir ve bu tanım w ile gösterilir. w kelimesinin başlangıç harfi $\iota(w)$ ile gösterilip, burada $\iota(w) = {x_1}^{\varepsilon_1}$ olmaktadır. Benzer olarak bitiş harfi $\tau(w)$ ile gösterilmekte olup, (2.1) deki kelimenin bitiş harfi ise $\tau(w) = {x_n}^{\varepsilon_n}$ olmaktadır. Özel olarak $n = 0$ ise ***boş kelime*** elde edilmektedir ve bu boş kelime 1_w ile ifade edilir. (2.1) deki gibi boş olmayan bir kelime ($n > 0$) için her $\varepsilon_i = +1$ oluyorsa w kelimesi ***pozitif kelime*** olarak tanımlanır. Bununla birlikte (2.1) de belirtilen w kelimesinin tersi ise ${x_n}^{-\varepsilon_n} {x_{n-1}}^{-\varepsilon_{n-1}} \cdots {x_1}^{-\varepsilon_1}$ kelimesi olarak tanımlanır. Bu tanım w^{-1} olarak gösterilir.

(2.1) de verilen w kelimesinin uzunluğu ise w içindeki harflerin sayısı olarak tanımlanır. Bununla birlikte w kelimesindeki herhangi bir x harfinin uzunluğu da $\sum_{x_1=x} |\varepsilon_i|$ şeklinde hesaplanır ve bunların gösterimi sırasıyla $l(w)$ ve $l_x(w)$ şeklinde olmaktadır.

X kümesi üzerinde verilen iki kelime w ve u olsun. w ve u kelimelerinin çarpımını, w kelimesinin arkasına u kelimesi getirilerek yan yana yazılmasıyla elde edilir. Elde edilen bu çarpım ise wu ile ifade edilir. Belirtilen bu çarpım altında, kelimeler üzerinde aşağıdaki şekilde işlemler tanımlanabilir.

(I) $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere, herhangi bir kelime içinde $x^{\varepsilon}x^{-\varepsilon}$ çiftleri varsa, bu çiftler silinir. Yapılan bu işleme ***indirgeme işlemi*** adı verilir.

$(I)^{-1}$ $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere, herhangi bir kelimeye $x^{\varepsilon}x^{-\varepsilon}$ şeklindeki ters harf çiftleri eklenebilir. Gerçekleştirilen bu işleme ise kelime üzerinde ***ekleme işlemi*** adı verilir.

X kümesi üzerindeki iki kelime w ve w' olsun. Eğer bu kelimelerden biri diğerine yukarıda belirtilen (I) ve $(I)^{-1}$ işlemlerinin sonlu sayıdaki uygulamasıyla elde ediliyorsa, bu iki kelime ***serbest olarak eşit*** şeklinde adlandırılır ve serbest olarak eşitlik ise $w \approx w'$ şeklinde gösterilir. Bu kısımda $\approx$ olarak gösterilen serbest olarak eşitlik, aslında bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısından dolayı herhangi bir w kelimesini içeren serbest denklik sınıfı $[w]$ ile gösterilir. Eğer X kümesi üzerindeki tüm kelimelerin serbest denklik sınıflarının kümesi $F(X)$ ile gösterilecek olursa, $F(X)$ üzerindeki çarpma işlemi

$$[w][u] = [wu]. \qquad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır. (2.2) ile verilen çarpma işlemi, iyi tanımlıdır. Bu çarpma işlemi altında $F(X)$ bir grup oluşturmaktadır ve oluşan bu grup, X kümesi üzerindeki ***serbest grup*** olarak adlandırılır.

X kümesi üzerinde alınan u, v ve w kelimeleri için $w' = uwv$ eşitliği varsa, bu durumda, w kelimesine w' kelimesinin ***alt kelimesi*** denir. X kümesi üzerindeki bir kelime, $x_i{}^{\varepsilon_i} x_i{}^{-\varepsilon_i} (x_i \in X,\ \varepsilon_i = \pm 1)$ harf çiftini içermiyorsa bu kelime ***indirgenmiş kelime*** olarak adlandırılır. Bu duruma ilave olarak devirsel indirgenmiş kelime tanımı yapılacak olursa; (2.1)'deki gibi bir kelime için $x_1{}^{\varepsilon_1} \neq x_n{}^{-\varepsilon_n}$ ise bu kelimeye ***devirsel indirgenmiş kelime*** adı verilir.

Aşağıda belirtilen sonuç, grup sunuşlarının oluşturulmasında önemli bir yere sahiptir.

Teorem 2.4.1 (Normal Form Teoremi) (Cohen, 1989): Her bir denklik sınıfı tek bir indirgenmiş kelime içerir.

2.4.2. Grup sunuşları

X üreteç sembollerinin bir kümesi ve R de, X kümesi üzerindeki devirsel indirgenmiş kelimelerden oluşan boştan farklı bağıntı kelimelerinin kümesi olsun. Bu durumda,

$$\wp = \langle X | R \rangle$$

ikilisine bir ***grup sunuşu*** adı verilir. X ve R kümelerinin her ikisi birden sonlu ise $\wp$ ***sunuşu sonludur*** denir. (Lyndon ve Schupp,1977)

X kümesindeki kelimeler üzerinde, yukarıda belirtilen (I) ve $(\text{I})^{-1}$ işlemlerine ilave olarak ve aşağıda belirtilen işlemler kullanılarak, $\wp$ sunuşu ile bir grup tanımlanır. Bunun için, X kümesi üzerinde bir kelime w olsun.

(II) w kelimesi $r^{\varepsilon} (r \in R, \varepsilon = \pm 1)$ şeklinde bir alt kelime içeriyorsa bu alt kelime silinir.

$\mathbf{(II)^{-1}}$ w kelimesi içinde herhangi bir yere, $r^{\varepsilon} (r \in R, \varepsilon = \pm 1)$ alt kelimesi eklenir.

X kümesi üzerindeki iki kelime w_1 ve w_2 olsun. Eğer w_1 kelimesinden w_2 kelimesine, sonlu sayıda $(\text{I})^{\pm 1}, (\text{II})^{\pm 1}$ işlemleriyle ulaşılabiliyorsa, w_1 ve w_2

kelimelerine $\wp$ sunuşuna bağlı olarak ***denk kelimeler*** adı verilir. Bu denklik durumu $w_1 \approx_{\wp} w_2$ ile gösterilir. Buradaki $\approx_{\wp}$ bağıntısı X üzerindeki bütün kelimelerin kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Bununla birlikte w kelimesini içeren denklik sınıfı $[w]_{\wp}$ ile gösterilirse, bu denklik sınıfı üzerindeki çarpma işlemi

$$[w_1]_{\wp}[w_2]_{\wp} = [w_1 w_2]_{\wp}$$

şeklinde tanımlanır. Yukarıdaki çarpma işleminin iyi tanımlı olduğu kolayca gösterilebilir. Bu çarpma işlemi altında, tüm denklik sınıflarının kümesi bir grup oluşturur. Bu grup $G(\wp)$ ile gösterilir. $G(\wp)$ grubunun birim elemanı ise $[1]_{\wp}$ ile gösterilir.

Eğer $G \cong G(\wp)$ ise G grubu $\wp$ ile sunuluyor (ya da $\wp$ sunuşunun temsil ettiği grup G dir) denir. Şimdi, $N = \{[r] | r \in R\}$ kümesi grubun normal kapanışı olarak tanımlanırsa, aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 2.4.2 (Lyndon ve Schupp, 1977): $G(\wp) \cong F(X)/N$ dir.

Örnek 2.4.3: X kümesi üzerinde serbest grubun sunuşu $\wp = < X | >$ şeklindedir. Burada dikkat edilirse bağıntı kelimelerinin kümesi olan R boş kümedir.

2.4.3. Monoid sunuşları

M bir monoid, A ise bu monoidin üreteç kümesi olmak üzere, A^+ kümesi A üreteç kümesindeki elemanlarla oluşturulan en az bir uzunluklu kelimelerin kümesi olarak tanımlanır. Ayrıca monoidler için tanımlanan kelimeler ise $A^* = A^+ \cup \{1\}$ kümesinden alınır.

Tanım 2.4.4: A boştan farklı üreteç kümesi olan bir küme ve $U \subseteq A^* \times A^*$ olacak şekilde U alt kümesi, bağıntı kelimelerinin bir kümesi olsun. Bu durumda,

$$\wp_M = [\, A \,;\, U \,]$$

ikilisine bir ***monoid sunuşu*** adı verilir. Gruplardakine benzer olarak A ve U kümelerinin her ikisi de sonlu ise $\wp_M$ sunuşu da sonludur.

2.4.4. Kongrüanslar

M bir monoid, (veya S bir yarıgrup) ve ρ, M üzerindeki (veya S) bir denklik bağıntısı olsun. Bu durumda, her $x, y, s \in M$ (veya S) için $(x, y) \in \rho \Rightarrow (xs, ys) \in \rho$ oluyor ise ρ bağıntısına bir ***sağ kangrüans*** bağıntısı adı verilir. Bu duruma benzer olarak, her $x, y, s \in M$ için, $(x, y) \in \rho \Rightarrow (sx, sy) \in \rho$ oluyor ise ρ bağıntısına bir ***sol kongrüsans*** bağıntısı denir. Ayrıca ρ bağıntısı hem sağ hem de sol kongrüans oluyor ise bu ρ bağıntısına ise ***kongrüans*** bağıntısı denir. İkinci bir tanım yapılacak olursa, her $(x_i, y_i) \in \rho \ (i = 1, 2)$ için, $(x_1, y_1).(x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1y_2) \in \rho$ ise ρ bağıntısına ***kongrüans*** bağıntısı adı verilir.

Bu kısım ile ilgili detaylı bilgi (Neumann,1967), (Howie, 1995) ve (Ruškuc, 1995) gibi kaynaklardan elde edilebilir.

Teorem 2.4.5: M bir monoid, A M monoidi için bir üreteç kümesi ve ρ, A^* kümesi üzerinde U bağıntı kümesini içeren en küçük kongrüans olsun. Bu durumda,

$$M \cong A^* / \rho$$

dir.

2.4.5. Yarıgrup sunuşları

Yarıgrup sunuşlarında genel olarak iki tip problem ortaya çıkmaktadır. Bunlardan birincisi, verilen bir yarıgrubun sunuşunu bulmak, ikincisi ise verilen bir sunuş tarafından temsil edilen yarıgrubu bulmaktır. Yarıgrubun belirlenmesinin ardından bu yarıgrubun birçok cebirsel özelliğe sahip olup olmaması da yarıgrup teoride çalışma konusu olan önemli bir konu başlığıdır.

Bu alt bölüm ile ilgili ayrıntılı bilgi için (Neumann,1967) ve (Ruškuc, 1995) kaynaklarına bakınız.

Tanım 2.4.6: A boştan farklı bir üreteç kümesi ve $R \subseteq A^+ \times A^+$ kümesi, $u, v \in A^+$ için $(u, v) \in R$ (Bu durum genellikle $u = v$ şeklinde gösterilir.) elemanlarından oluşan bir bağıntı kümesi olsun. Bu durumda, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ ve $R = \{u_1 = v_1, \ldots, u_n = v_n\}$ için,

$$\wp_S = [A \mid R] = [a_1, \ldots, a_m \mid u_1 = v_1, \ldots, u_n = v_n]$$

ikilisine bir ***yarıgrup sunuşu*** adı verilir. A kümesi sonlu ise $\wp_S$ sunuşunun temsil ettiği yarıgrup ***sonlu üreteçlidir***, hem A hem de R kümesinin sonlu olması durumunda ise $\wp_S$ sunuşunun temsil ettiği yarıgrup, ***sonlu sunumludur*** denir.

Tanım 2.4.7: $\wp_S = [A \mid R]$ bir yarıgrup sunuşu ve $w_1, w_2 \in A^+$ olsun. Eğer $\alpha, \beta \in A^+$ ve $(u, v) \in R$ (ya da $(v, u) \in R$) için $w_1 = \alpha u \beta$ ve $w_2 = \alpha v \beta$ oluyorsa, w_2 *kelimesi* w_1 *kelimesinden elde ediliyor* olarak adlandırılır. Bununla birlikte w_1 ve w_2 kelimeleri arasında, $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \in A^+$ olmak üzere, $w_1 = \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n = w_2$ şeklinde sonlu bir dizi varsa (ayrıca burada her bir γ_{i+1}, γ_i'den R bağıntısı elde edilir), $w_1 = w_2$ bağıntısı R bağıntısının (bu duruma alternatif olarak $\wp_S$ sunuşunun) ***bir sonucudur*** denir.

Herhangi bir w kelimesinin $\wp_S$ sunuşuna bağlı olarak denklik sınıfı $[w]_{\wp_S}$ şeklindedir.

Teorem 2.4.8: S bir yarıgrup, A kümesi S için bir üreteç kümesi ve ρ, A^+ kümesi üzerinde R bağıntı kümesini içeren en küçük kongrüans olsun. Bu durumda,

$$S \cong A^+/\rho$$

dir.

Teorem 2.4.9: $\wp_S = [A \mid R]$ bir yarıgrup sunuşu olsun. Bu sunuşun temsil ettiği yarıgrup ise $S \cong A^+/\rho$ olsun. $w_1, w_2 \in A^+$ için, $w_1 = w_2$ bağıntısının S içinde sağlanması için gerek ve yeter koşul, onun $\wp_S$ nin bir sonucu olmasıdır.

Örnek 2.4.10: A boştan farklı bir küme olmak üzere, A^+ kümesi üzerinde boş kümeyi içeren en küçük kongrüans $\{(w, w) | w \in A^+\}$ dır ve $[A \mid]$ sunuşu A^+ serbest yarıgrubunu tanımlar.

Örnek 2.4.11: $[\, a \mid a^2 = a \,]$ sunuşunun temsil ettiği yarıgrup $\{a\}$ ile üretilen tekil yarıgruptur.

Örnek 2.4.12: $[\, a \mid a^{n+r} = a^r \,]$ sunuşunun temsil ettiği yarıgrup $n + r - 1$ mertebeli devirli (monogenic) yarıgruptur.

Not 2.4.13: Her yarıgrup sunuşu aynı zamanda bir monoid sunuşu haline de getirilebilir. Bu durum bir örnek ile açıklanacak olursa; $[A \mid R]$ sunuşunun temsil ettiği yarıgrup S olsun. Söz konusu yarıgruba birim eleman eklenmesi durumunda $[A \mid R]$ sunuşunun temsil ettiği bir monoid elde edilir. Eğer S yarıgrubunun $e \in A^+$ ile temsil

edilen bir birim elemanı içermesi durumunda, $[A \mid R, e = 1]$ sunuşu, S için bir monoid sunuşu olacaktır.

Konu ile ilgili olarak $[B \mid Q]$ sunuşunun temsil ettiği monoid M olarak ele alınırsa;

$$[B, e \mid Q', e^2 = e, eb = be = b(b \in B)]$$

sunuşu, M için bir yarıgrup sunuşudur. Bu kısımda yer alan Q' bağıntı kümesi, Q bağıntı kümesindeki $w = 1$ formundaki her bir bağıntının $w = e$ bağıntısıyla yer değiştirildiği bir kümedir.

Not 2.4.14: $< A \mid R >$ sunuşunun temsil ettiği grup G iken,

$$[A, A^{-1} \mid R, aa^{-1} = a^{-1}a = 1\ (a \in A)]$$

sunuşu, G için bir monoid sunuşu olur. (Burada, $A^{-1} = \{a^{-1}; a \in A\}$ kümesi A dan farklıdır. Ancak A nın elemanları ile birebir eşlemeli yeni bir kümedir.)

Not 2.4.15: $\langle B \mid Q \rangle$ (tersinir yarıgrup) sunuşu ile tanımlı olan bir tersinir yarıgrup

$$\langle B, B^{-1} | Q, ww^{-1}w = w, ww^{-1}zz^{-1} = zz^{-1}ww^{-1}, (w, z \in (B \cup B^{-1})^{+}) \rangle$$

sunuşu ile tanımlı yarıgruptur.

Yarıgrup, monoid ve grup sunuşu tanımları ile Not 2.4.13 ve Not 2.4.14 kullanılarak aşağıda verilen önermelerin sağlandığı görülür.

Önerme 2.4.16: Bir monoidin monoid olarak sonlu sunumlu olabilmesi için gerek ve yeter koşul bir yarıgrup olarak sonlu sunumlu olmasıdır.

Önerme 2.4.17: Bir grubun grup olarak sonlu sunumlu olabilmesi için gerek ve yeter koşul bir monoid olarak sonlu sunumlu olmasıdır.

2.4.6. Tietze Dönüşümleri

Herhangi bir S yarıgrubu için bir sunuş bulmanın diğer bir yöntemi ise Tietze dönüşümlerini kullanmaktır. Bu bölüm ile ilgili ayrıntılı bilgi (Neumann, 1967), (Ruškuc, 1995) ve (Campbell ve ark., 1996) kaynaklarından elde edilebilir.

$\wp = [A \mid R]$ bir yarıgrup sunuşu olsun. Bu yarıgrup sunuşu üzerinde aşağıda sıralanan maddeler Tietze dönüşümlerini oluşturur. (Ruškuc, 1996)

(T1) $u = v$ bağıntısı, $[A \mid R]$ sunuşunun bir sonucu ise yani, R bağıntı kümesindeki bağıntılardan elde edilebiliyorsa, söz konusu bağıntı $[A \mid R]$ sunuşuna eklenir.

(T2) Yukarıda belirtilen (T1) dönüşümünün tersi uygulanır.

(T3) Herhangi bir $w \in A^+$ için, $[A \mid R]$ sunuşuna yeni bir b üreteç elemanı ve $b = w$ bağıntısı eklenir.

(T4) Yukarıda belirtilen (T3) dönüşümünün tersi uygulanır.

Aşağıda yer alan Tietze dönüşümüne ilişkin teoremin ispatı için (Ruškuc, 1995) e bakınız.

Teorem 2.4.18 (Ruškuc, 1995): İki sonlu sunuşun aynı yarıgruba ait olabilmeleri için gerek ve yeter koşul bunlardan birine sonlu sayıda (T1), (T2), (T3) ve (T4) dönüşümlerinin uygulanmasıyla diğerinin elde edilmesidir.

Yarıgruplar için verilen bu dönüşümler monoid yapısı üzerinde de aynı şekilde uygulanır. Grup yapısı ile ilgili detaylı bilgi için Johnson (1990) a bakınız.

Önerme 2.4.19: S sonlu sunumlu bir yarıgrup ve B, S nin herhangi bir üreteç kümesi olsun. Bu durumda, $S = \langle B|Q \rangle$ olacak şekilde $Q \subseteq B^+ \times B^+$ bağıntılar kümesi vardır.

Önerme 2.4.20: S sonlu sunumlu bir yarıgrup ve B, S nin sonlu bir üreteç kümesi olmak üzere, S nin her $\langle B|Q \rangle$ (Q sonlu olmayabilir) sunuşu için $\langle B|Q_0 \rangle$ sunuşu da S yi tanımlıyor olacak şekilde sonlu bir $Q_0 \subseteq$ Q bağıntı kümesi vardır.

2.5. Özel Yarıgrup Sınıfları

Özel yarıgrup sınıfları, yarıgrup tanımına ilave olarak bazı özellikler veya koşullar eklenerek elde edilir. Yarıgrup teorideki ana problemlerden biri tüm yarıgrupları sınıflandırmak ve bu yapıların tam açıklamasını yapmaktır. Yarıgruplarda ikili işlem sadece birleşme özelliğini sağladığından yarıgrupları sınıflandırmak oldukça zordur. Bu şekildeki yapıların tanımlanabilmesi belirli özel yarıgrup sınıfları için mümkündür. Örneğin; regüler yarıgrupların idempotent elemanlarının kümesinin yapısı tamamen bilinmektedir. Bu sebepten özel yarıgrup sınıflarının yarıgrup teoride önemli bir yeri vardır.

Tezin bu bölümünde önemli görülen ve yarıgrup teoride en sık kullanılan yarıgrup sınıfları verilecek ve bu yarıgrup sınıfları arasındaki geçişler incelenecektir. Bu bölüm ile ilgili ayrıntılı bilgi (Higgins, 1992), (Howie, 1995) ve (Petrich, 1973) kaynaklarından elde edilebilir.

Tanım 2.5.1: S bir yarıgrup olmak üzere, $x \in S$ için, $xyx = x$ olacak şekilde bir $y \in S$ varsa, x elemanına S nin bir ***regüler elemanı*** denir. Eğer S yarıgrubunun her elemanı regüler ise S ye bir ***regüler yarıgrup*** denir.

Regüler yarıgruplara örnek olarak gruplar, tersinir yarıgruplar, idempotent yarıgruplar ve tam transformasyon yarıgruplar verilebilir.

Tanım 2.5.1 de verilen regüler eleman özelliği bir S yarıgrubunun D-sınıfının elemanları için de geçerlidir. Herhangi bir D-Green denklik sınıfında regülerlik özelliği değişmezdir.

Teorem 2.5.2 (Howie, 1995): S bir yarıgrup ve $x \in S$ regüler eleman olsun. Eğer bir $y \in S$ için $x\mathcal{D}y$ ise y elemanı da regülerdir.

Sonuç 2.5.3 (Howie, 1995): S bir yarıgrup ve $a \in S$ regüler eleman olsun. Bu durumda, a nın $\mathcal{D}$-sınıfı olan $\mathcal{D}_a$ nın her elemanı regülerdir.

Tanım 2.5.4: S bir yarıgrup olmak üzere, $x \in S$ için $xyx = x$ ve $yxy = y$ olacak şekilde x elemanının S yarıgrubunda tek bir tersi mevcut ise bu y elemanına ***tersinir eleman*** denir. Bununla birlikte her elemanının tersi olan bir S yarıgrubuna ise ***tersinir yarıgrup*** denir.

Tersinir yarıgruplara örnek olarak gruplar ve yarılatisler verilebilir.

Teorem 2.5.5 (Howie, 1995): S bir yarıgrup olsun. Herhangi bir $x \in S$ nin tersinir olması için gerek ve yeter koşul bu x elemanının regüler olmasıdır.

$\mathcal{D}$-Green denklik sınıfı Teorem 2.5.2 de verilen regülerlik koşulunda olduğu gibi tersinir eleman konusunda da benzer bir özelliğe sahiptir. Bununla ilgili olarak aşağıdaki teorem verilmiştir.

Teorem 2.5.6 (Howie, 1995): S bir yarıgrup ve $a \in S$ bir regüler eleman olmak üzere, $\mathcal{D}$ bu elemanın $\mathcal{D}$-sınıfı olsun.

i) Eğer a nın tersi a' ise bu durumda, $a' \in \mathcal{D}$ dir. Ayrıca $\mathcal{H}$-sınıf olan $\mathcal{R}_a \cap \mathcal{L}_{a'}$ kümesi aa' idempotent elemanını ve $\mathcal{L}_a \cap \mathcal{R}_{a'}$ kümesi de $a'a$ idempotent elemanını içerir.

ii) Eğer $\mathcal{R}_a \cap \mathcal{L}_b$ kümesi e ve $\mathcal{R}_b \cap \mathcal{L}_a$ kümesi de f idempotent elemanlarını içerecek şekilde $b \in \mathcal{D}$ varsa $\mathcal{H}_b$ kümesi a nın tersi olan a' elemanlarından sadece birini içerir ve $aa' = e$ ve $a'a = f$ eşitlikleri sağlanır.

Tanım 2.5.7: X bir küme olsun. Tüm $\alpha: X \to X$ şeklindeki fonksiyonları T_X ile gösterelim. Bu durumda, T_X e X üzerinde ***tam transformasyon yarıgrubu*** denir.

Grup teoride yer alan ve oldukça önemli olan "Cayley Teoremi" ne benzer bir teorem yarıgrup teoride de yer almaktadır. Bu teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.5.8 (Howie, 1995): Her yarıgrup bir tam transformasyon yarıgrubunun alt yarıgrubuna izomorftur.

Tanım 2.5.9: S bir yarıgrup olmak üzere, $x \in S$ için $xy = yx$ olacak şekilde bir $y \in V(x)$ (Burada $V(x)$, x in terslerinin kümesini göstermektedir) varsa x elemanına ***tamamen regüler eleman*** denir. Eğer S yarıgrubunun her elemanı tamamen regüler ise S yarıgrubuna ***tamamen regüler yarıgrup*** denir.

Tanım 2.5.10: S bir yarıgrup olmak üzere, her $x \in S$ için $xyx = x$ olacak şekilde $y \in G$ (Burada G, S yarıgrubunun terslenebilir elemanlarının oluşturduğu grubu göstermektedir) varsa S yarıgrubuna ***terslenebilir regüler*** denir.

Tanım 2.5.11: Bir S yarıgrubu tersinir yarıgrup ve her $e \in E(S)$ ve $s \in S$ için,

$es \in E(S) \Rightarrow s \in E(S)$ veya $se \in E(S) \Rightarrow s \in E(S)$

oluyor ise S yarıgrubuna ***E −unitary tersinir yarıgrup*** denir.

Tanım 2.5.12: S bir yarıgrup olmak üzere, her $x, y \in S$ için, $xyx = x$ eşitliği sağlanırsa S yarıgrubuna ***dikdörtgensel band*** denir.

Tanım 2.5.12 den anlaşılacağı üzere dikdörtgensel band olan bir yarıgrupta her bir eleman bir diğerinin tersidir. Aşağıdaki teoremde dikdörtgensel band yarıgrup için denk tanımlar verilmiştir.

Teorem 2.5.13 (Howie, 1995): S bir yarıgrup olmak üzere, aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) S dikdörtgensel band yarıgruptur.

(ii) S nin her elemanı idempotenttir ve her $x, y, z \in S$ için, $xyz = xz$ dir.

(iii) $S \cong L \times R$ olacak şekilde bir L sol sıfır yarıgrubu ve R sağ sıfır yarıgrubu vardır.

(iv) A ve B boştan farklı iki küme olsun. $A \times B$ kümesi üzerinde tanımlanan

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1, b_2) \tag{2.3}$$

işlemi altında $A \times B$ bir yarıgruptur ve $S \cong A \times B$ dir.

Tanım 2.5.14: Eğer bir S yarıgrubu, regüler ve idempotent elemanlarının oluşturduğu küme bir alt yarıgrup oluyor ise S yarıgrubuna ***orthodox yarıgrup*** denir.

Tanım 2.5.12 ve Tanım 2.5.14 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.5.15: Bir S yarıgrubu dikdörtgensel band ise orthodox yarıgruptur.

Bu sonucun tersi doğru değildir. Çünkü S yarıgrubu özel olarak bir grup ise orthodox olma özelliğini sağlar fakat dikdörtgensel band olma özelliği sadece yarıgruplara aittir. Dolayısıyla orthodox yarıgrup, dikdörtgensel band olmayabilir.

Tanım 2.5.16: S bir yarıgrup ve $U = \{U_i | i \in I, I \neq \emptyset\}$ kümesi S yarıgrubunun alt yarıgruplarının oluşturduğu bir küme olsun. $U_i \neq \emptyset$ alt yarıgruplarının kesişiminin S nin bir alt yarıgrubu olduğu açıktır. S yarıgrubunun boştan farklı her A alt kümesi için, A yı içeren en az bir alt yarıgrubu vardır. Dolayısıyla S nin A yı içeren tüm alt yarıgruplarının kesişimi yine S nin A yı içeren bir alt yarıgrubudur. Bu yarıgruba A kümesi ile üretilen alt yarıgrup denir ve $< A >$ ile gösterilir.

$< A >$ yarıgrubu aşağıda verilen iki özelliği sağlar:

1) $A \subseteq < A >$ dır.

2) Eğer U, S nin A yı içeren bir alt yarıgrubu ise $< A > \subseteq U$ dur.

Eğer $< A >$ alt yarıgrubu S nin tüm elemanlarını içeriyorsa, S yarıgrubunun tüm elemanları A kümesindeki elemanların bir çarpımı şeklinde yazılabilir. Bu durumda, A ya S yarıgrubunun ***üreteç kümesi*** denir.

Tanım 2.5.17: S yarıgrubu için Tanım 2.5.16 da verilen A kümesi $A = \{a\}$ şeklinde tek bir eleman içeriyorsa bu durumda, $A = < a >$ yarıgubuna S nin a ile üretilen devirli alt yarıgrubu denir. Eğer S yarıgrubu a elemanı ile üretiliyorsa, S yarıgrubuna ***devirli (monogenic) yarıgrup*** denir.

Tanım 2.5.18: S bir yarıgrup, I ve Λ iki indeks kümesi olsun. Ayrıca S deki elemanlar ile $\Lambda \times I$ boyutlu $P = (p_{\lambda i})_{\lambda \in \Lambda, i \in I}$ şeklindeki matris tanımlansın. Bu matrise ***Rees Matrisi*** denir.

$I \times S \times \Lambda$ kümesi üzerinde

$$(i, g, \lambda)(j, h, \mu) = (i, gp_{\lambda j}h, \mu) \tag{2.4}$$

işlemi tanımlansın. $I \times S \times \Lambda$ kümesi üzerinde tanımlanan (2.4) işlemine göre, bir yarıgrup oluşturur. Bu yarıgruba (P matrisine bağlı olarak S ile oluşturulan) ***Rees Matris Yarıgrubu*** denir ve bu yarıgrup $M[S; I, \Lambda, P]$ ile gösterilir.

Tanım 2.5.19: Eğer bir S yarıgrubu tersinir ve her $s \in S$ için $ss^{-1} = s^{-1}s$ ise S yarıgrubuna ***Clifford yarıgrup*** denir.

3. YARIGRUPLARDA SONLULUK KOŞULLARI

3.1. Giriş

Bir yarıgrup için sağlanan bir P özelliği eğer tüm sonlu yarıgruplar için sağlanıyorsa, bu P özelliğine ***sonluluk koşulu*** denir.

Bu bölümde sırasıyla, sonlu üreteçlilik, sonlu sunumluluk, periyodiklik, yerel sonluluk, artan sonluluk ve çözülebilir kelime problemi gibi önemli görülen sonluluk koşullarından detaylı bir şekilde bahsedilmiştir. Ayrıca bu sonluluk koşulları ile ilgili literatürde yer alan bazı önemli çalışmalar verilmiştir. Bu bölüm ile ilgili ayrıntılı bilgi (Howie ve Ruškuc, 1994), (Ruškuc, 1995) ve (Ayık, 1998) gibi kaynaklardan elde edilebilir.

3.2. Sonlu Üreteçlilik ve Sonlu Sunumluluk

Bu alt bölümde sonlu üreteçlilik ve sonlu sunumluluk ile ilgili önemli görülen bazı teoremler ve örnekler yer almaktadır.

Her sonlu yarıgrup sonlu üreteçli olması nedeniyle, Tanım 2.4.6 da verilen sonlu üreteçlilik bir sonluluk koşuludur.

S bir yarıgrup ve T, S nin bir alt yarıgrubu olsun. Eğer S/T sonlu ise S, T nin bir küçük genişlemesidir denir. Ayrıca bu kümenin mertebesine T nin S deki indeksi denir ve $[S:T]$ ile gösterilir.

Teorem 3.1.1 ve Teorem 3.1.2 de bir S yarıgrubunun ve sonlu indeksli bir alt yarıgrubunun sonlu üreteçli ve sonlu sunumlu olabilmesi için gerek ve yeter şartlar verilmiştir.

Teorem 3.1.1 (Jura, 1978): S bir yarıgrup ve T, S nin sonlu indeksli bir altyarıgrubu olsun. Bu durumda, S nin sonlu üreteçli olabilmesi için gerek ve yeter koşul T nin sonlu üreteçli olmasıdır.

Teoremin ispatı (Jura, 1978) de yer almaktadır. (Campbell ve ark., 1995) de bu teorem yeniden ispatlanmıştır.

S bir yarıgrup olmak üzere, S kümesinin kendisi üreteç kümesi ve çarpım tablosu (Cayley tablosu) bağıntıların kümesi olarak alınsın. Bu durumda, eğer bir yarıgrup sonlu ise sonlu sunumludur. Dolayısıyla sonlu sunumluluk bir sonluluk koşuludur.

Örnek 2.4.10, Örnek 2.4.11 ve Örnek 2.4.12 de tanımlanan yarıgruplar, sonlu sunumlu yarıgruplar için birer örnektir

Teorem 3.1.2 (Ruškuc, 1998): S bir yarıgrup ve T, S nin sonlu indeksli bir altyarıgrubu olsun. Bu durumda, S nin sonlu sunumlu olabilmesi için gerek ve yeter koşul T nin sonlu sunumlu olmasıdır.

Teoremin ispatı için Ruškuc (1998), Teorem 1.3 e bakınız.

Literatürde çarpım ve genişlemeler üzerinde sonlu üreteçlilik ve sonlu sunumluluk ile ilgili birçok çalışma mevcuttur. Bu konuda yapılmış olan bazı önemli çalışmalar aşağıda listelenmiştir.

● Rees matris yarıgrupların sonlu üreteçliliği ve sonlu sunumluluğu (Ayık ve Ruškuc, 1999)

● İki yarıgrubun direkt çarpımının sonlu üreteçliliği ve sonlu sunumluluğu (Araujo ve Ruškuc, 2000)

● Yarıgrupların Wreath çarpımının sonlu üreteçliliği ve sonlu sunumluluğu, (Robertson ve ark., 2001)

● Schützenberger çarpımın sonlu üreteçliliği ve sonlu sunumluluğu (Gallagher ve Ruškuc, 2007)

3.3. Periyodiklik

S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. a tarafından üretilen devirli (monogenic) altyarıgrubu $< a >= \{a, a^2, a^3, \ldots\}$ ele alalım. Eğer $a, a^2, a^3, \ldots$ elemanlarında $m \neq n$ iken $a^m = a^n$ şeklinde bir yineleme oluyor ise bu durumda, $< a >$ monogenic altyarıgrubu sonludur. Bir yarıgrubun tüm monogenic altyarıgrupları sonlu ise bu yarıgruba ***periyodik*** denir. Başka bir ifadeyle, S bir yarıgrup olmak üzere, her $a \in S$ sonlu mertebeye sahip ise yani $a^{r+n} = a^r$ olacak şekilde $r, n \in \mathbb{Z}^+$ varsa bu durumda, S yarıgrubuna periyodik denir. Her sonlu yarıgrup periyodik olduğu için periyodiklik bir sonluluk koşuludur.

Örnek 3.1.4 de kullanılmak üzere aşağıdaki tanım verilmiştir.

Tanım 3.1.3: A bir küme ve $\mathcal{SL}_A$, A nın boştan farklı tüm alt kümelerinin oluşturduğu bir küme olsun. Küme birleşim işlemi ($\cup$) bir ikili işlem olarak ele alınırsa bu işlemle birlikte $\mathcal{SL}_A$ bir yarılatis oluşturur ve buna A üzerinde ***serbest yarılatis*** denir.

Örnek 3.1.4: A sonsuz bir küme olsun. $\mathcal{SL}_A$ sadece idempotent elemanlardan oluştuğu için $\mathcal{SL}_A$ periyodiktir. Sol (sağ) sıfır yarıgruplar ve dikdörtgensel band yarıgruplar periyodiktir fakat sonlu olması gerekli koşul değildir.

Çarpım, genişlemeler ve monoid yapıları üzerinde periyodiklik ile ilgili yapılmış olan bazı önemli çalışmalar aşağıda sıralanmıştır.

● Serbest monoidlerin homomorfizmalarının periyodikliği (Harju ve Linna, 1986)

● Yarıgrupların Wreath çarpımının periyodikliği (Robertson ve ark., 2001)

● Rees matris yarıgrupların periyodikliği (Ayık, 2005)

3.4. Yerel Sonluluk

S bir yarıgrup olmak üzere, S nin her sonlu üreteçli alt yarıgrubu sonlu ise S yarıgrubuna ***yerel sonlu*** denir. Her sonlu yarıgrup yerel sonlu olduğundan, yerel sonluluk bir sonluluk koşuludur. Ayrıca her sonlu yarıgrup yerel sonlu sunumlu olduğundan, yerel sonlu sunumluluk bir sonluluk koşuludur.

Not 3.1.5: Sonlu yarıgruplar sonlu sunumlu olduğu için yerel sonlu yarıgruplar yerel sonlu sunumludur.

Aşağıda yerel sonluluk ve yerel sonlu sunumluluk ile ilgili örnekler verilmiştir.

Örnek 3.1.6: A boştan farklı bir küme olsun. Bu durumda, A üzerindeki serbest yarılatis $\mathcal{SL}_A$ yerel sonludur ve yerel sonlu sunumludur. Gerçekten de eğer B, $\mathcal{SL}_A$ nın sonlu bir alt kümesi ise bu durumda, $< B >$, sonlu olan $\mathcal{SL}_B$ nin bir alt yarıgrubuna izomorftur. Böylece $< B >$ sonludur ve $< B >$ sonlu sunumludur.

Örnek 3.1.7: Dikdörtgensel band yarıgruplar yerel sonludur ve yerel sonlu sunumludur. $R = \{(i, j) | i \in I, j \in J\}$ dikdörtgensel band olmak üzere, X, R nin sonlu bir alt kümesi olsun. Ayrıca

$I' = \{i \in I \mid (i, j) \in X$ olacak şekilde $j \in J$ vardır$\}$,
$J' = \{j \in J \mid (i, j) \in X$ olacak şekilde $i \in I$ vardır$\}$

kümeleri tanımlansın. I' ve J' sonlu kümeler olduğundan, dikdörtgensel band olan

$R' = \{(i, j) | i \in I', j \in J'\} \subseteq R$

kümesi sonludur. Ayrıca R', X kümesini kapsar ve $< X' >= R'$ dir. Böylece, dikdörtgensel band yarıgruplar yerel sonludur ve dolayısıyla yerel sonlu sunumludur.

Yerel sonluluk ile ilgili bazı çarpım ve genişlemeler üzerinde yapılmış olan çalışmalar aşağıda verilmiştir.

- Yarıgrupların Wreath çarpımının yerel sonluluğu (Robertson ve ark., 2001)
- Rees matris yarıgrupların yerel sonluluğu (Ayık, 2005)

3.5. Artan Sonluluk

S bir yarıgrup olmak üzere, birbirinden farklı $x, y \in S$ elemanları için S den sonlu bir yarıgruba tanımlı bir φ homomorfizması için $x\varphi \neq y\varphi$ sağlanıyorsa S yarıgrubuna ***artan sonlu*** denir. Her sonlu yarıgrup artan sonlu olduğundan, (S den kendine tanımlanan birim homomorfizma ele alınarak) artan sonluluk bir sonluluk koşuludur.

S ve T iki yarıgrup olmak üzere, $\varphi: S \to T$ bir homomorfizma olsun.

$$Çek\varphi = \{(s,t) \epsilon S \times S | \varphi(s) = \varphi(t)\}$$

S üzerinde bir kongrüanstır.

Artan sonluluk ile ilgili yapılmış olan bazı önemli çalışmalar aşağıda verilmiştir.

- Rees matris yarıgrupların artan sonluluğu (Ayık, 2005)
- HNN genişlemelerinin artan sonluluğu (Baumslag ve Tretkoff, 2007)

3.6. Çözülebilir Kelime Problemi

S bir yarıgrup ve A, S nin bir üreteç kümesi olsun. Herhangi iki $u, v \in A^+$ kelimeleri için, $u = v$ biçiminde bir bağıntının S yarıgrubu içinde sağlanıp sağlanmadığına karar veren bir algoritma bulunabilirse, S yarıgrubu için ***kelime problemi çözülebilirdir*** denir. Eğer S sonlu üreteçli ise kelime probleminin çözülebilirliği S nin üreteç kümesinin seçimine bağlı değildir. Dolayısıyla kelime probleminin çözülebilirliği sonlu üreteçli yarıgrupların bir özelliğidir. Ayrıca her sonlu yarıgrup çözülebilir kelime problemine sahip olduğundan, çözülebilir kelime problemi

bir sonluluk koşuludur. Bu konu ile ilgili detaylı bilgi için (Rotman, 1994) ve (Baumslag, 1993) e bakınız.

Teorem 3.1.8 da bir S yarıgrubu ve bu yarıgrubun sonlu indeksli T alt yarıgrubunun tanımlanan sonluluk koşullarına sahip olabilmesi için gerek ve yeter şartlar verilmiştir.

Teorem 3.1.8: S bir yarıgrup ve T, S nin sonlu indekse sahip bir altyarıgrubu olsun. O halde, aşağıdaki önermeler sağlanır.

(Ruškuc ve Thomas, 1998) i) S nin periyodik olabilmesi için gerek ve yeter koşul T nin periyodik olmasıdır;

(Ruškuc, 1998) ii) S nin yerel sonlu olabilmesi için gerek ve yeter koşul T nin yerel sonlu olmasıdır;

(Ruškuc, 1998) iii) S nin artan sonlu olabilmesi için gerek ve yeter koşul T nin artan sonlu olmasıdır;

(Ruškuc, 1998) iv) Eğer S sonlu üreteçli ise bu durumda, S nin çözülebilir kelime problemine sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşul T nin çözülebilir kelime problemine sahip olmasıdır.

Teorem 3.1.8 de iv) ün ispatı için Ruškuc ve Thomas (1998), Sonuç 4.6 ya ve diğerlerinin ispatları için Ruškuc (1998), Teorem 5.1 e bakınız.

Çarpım ve genişlemeler üzerinde çözülebilir kelime problemi ile ilgili yapılmış olan bazı önemli çalışmalar aşağıda listelenmiştir:

- Yarıgrupların güçlü yarılatisleri için kelime problemi (Ayık ve ark., 2005)
- Tersinir yarıgrupların birleştirilmiş serbest çarpımı için kelime problemi (Mazzucchelli ve Cherubini, 2008)
- Wreath çarpım altında yarıgruplar için kelime problemi (Karpuz ve Çevik, 2009)

Aşağıda verilen tabloda, tezin dördüncü ve beşinci bölümlerinde detaylı olarak bahsedilen Bruck-Reilly ve genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemeleri üzerinde sonluluk koşulları ile ilgili yapılmış ve henüz yapılmamış olan çalışmalar özetlenmiştir. Tabloda "?" henüz yapılmamış bir çalışmayı ve "×" işareti ise verilen sonluluk koşulunun o genişleme türü üzerinde sağlanmadığını göstermektedir.

Monoid Yapısı	Sonlu Üreteçli	Sonlu Sunumlu	Periyodik	Yerel Sonlu	Artan Sonlu	Kelime Problemi
Bir Grubun Bruck-Reilly Genişlemesi	Araujo, Ruškuc, 2001)	Araujo, Ruškuc, 2001)	×	×	?	(Yamamura, 2001)
Bir Monoidin Bruck-Reilly Genişlemesi	(Araujo, 2000)	(Araujo, 2000)	×	×	?	(Yamamura, 2001)
Bir Grubun Genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- Genişlemesi	(Oğuz, Karpuz, 2015b)	(Oğuz, Karpuz, 2015b)	×	×	?	(Kocapınar ve ark., 2012)
Bir Monoidin Genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- Genişlemesi	?	?	×	×	?	(Kocapınar ve ark., 2012)

Çizelge 3.1. Bruck-Reilly ve genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemeleri üzerinde sonluluk koşulları ile ilgili yapılmış çalışmalar

Not 3.1.9: Bir M monoidinin Bruck-Reilly genişlemesi $BR(M,\theta)$ nın $(1,1_M,0)$ üreteci ele alınırsa, n pozitif tam sayısı için $(1,1_M,0)^n = (1,1_M,0)\dots(1,1_M,0) = (n,1_M,0)$ olduğu görülür. Dolayısıyla $(1,1_M,0)$ elemanı sonsuz mertebeye sahiptir ve Bruck-Reilly genişlemesi periyodik değildir. Benzer şekilde bir T monoidinin genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemesi $GBR^*(T;\beta,\gamma;u)$ nin $(0,1,1_T,0,0)$ üreteci de sonsuz mertebelidir. Bu sebepten genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemesi de periyodiklik özelliğini sağlamaz. Diğer taraftan, yerel sonlu grupların devirli alt gruplarının her elemanı sonlu mertebelidir yani periyodiktir. Bruck-Reilly ve genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemeleri periyodiklik koşulunu sağlamaması nedeniyle yerel sonlu değildir.

4. BRUCK-REILLY GENİŞLEMELERİ VE BAZI CEBİRSEL SONUÇLARI

4.1. Giriş

Bu alt bölümde tezde çalışılan iki önemli genişleme türünden biri olan Bruck-Reilly genişlemesinin tanımı ve oluşum süreci ile ilgili temel bilgiler verilmiştir.

Tanım 4.1.1: M bir monoid, 1_M, M monoidinin birim elemanı ve $\theta: M \to M$, M üzerinde bir endomorfizm olsun. θ^0 dönüşümü M üzerindeki birim dönüşümü ve $\mathbb{N}^0$ negatif olmayan tamsayıların kümesini göstersin. $\mathbb{N}^0 \times M \times \mathbb{N}^0$ kümesi üzerinde bir ikili işlem $(m,a,n),(p,b,q) \in \mathbb{N}^0 \times M \times \mathbb{N}^0$ ve $t = max\{n,p\}$ olmak üzere,

$$(m,a,n)(p,b,q) = (m-n+t, (a\theta^{t-n})(b\theta^{t-p}), q-p+t)$$

şeklinde tanımlansın. Bu işlem ile $\mathbb{N}^0 \times M \times \mathbb{N}^0$ kümesi birim elemanı $(0,1_M,0)$ olan bir monoid oluşturur. Bu monoide M monoidinin θ dönüşümü ile olan ***Bruck-Reilly genişlemesi*** denir ve $BR(M,\theta)$ ile gösterilir.

Bu yapı Bruck (1958), Reilly (1966) ve Munn (1970) tarafından oluşturulan yapıların bir genelleştirmesidir. 1958 yılında Bruck, tüm elemanları M monoidinin birim elemanına eşleyen θ homomorfizmini ele almıştır ve her yarıgrubun bir basit monoid içerisine gömülebileceğini ispatlamıştır. (İspatı için Bruck (1958), Teorem 8.3 e bakınız.) 1966 yılında ise Reilly bu yapıyı M nin grup ve θ homomorfizmasının bu grup üzerinde bir endomorfizma olması durumunu ele alarak tekrar oluşturmuştur. Reilly elde ettiği bu monoidin bir katlı-basit tersinir w-yarıgrup olduğunu ve tersine her bir katlı-basit tersinir w-yarıgrubun terslenebilir elemanlarının oluşturduğu grubun Bruck-Reilly genişlemesi olduğunu göstermiştir. (İspatı için Reilly (1966), Teorem 2.2 ve Teorem 3.5 e bakınız.) Son olarak Munn 1970 yılında, bu yapıyı θ homomorfizmasını bir monoidden o monoidin terslenebilir elemanlarının oluşturduğu gruba tanımlayarak genelleştirmiştir. Böylece, basit tersinir yarıgrubun bir özel sınıfı için *yapı teoremi* oluşturulmuştur.

Bu bölümün ikinci kısmını oluşturan "4.2. Monoidlerin Bruck-Reilly Genişlemesi Üzerinde Özel Yarıgrup Sınıfları" alt bölümünde, bir monoidin Bruck-Reilly genişlemesinin bazı özel yarıgrup sınıflarına ait olabilmesi için gerek ve yeter koşullar verilmiştir ve bunun bir özel durumu olarak k sayıda monoidin direkt

çarpımının Bruck-Reilly genişlemesinin bazı özel yarıgrup sınıflarına ait olabilmesi için gerek ve yeter koşullar ispatlanmıştır.

Bu bölümün üçüncü kısmını oluşturan "4.3. Bruck-Reilly Genişlemesi Üzerinde Kongrüanslar" bölümünde, Bruck-Reilly genişlemesi üzerinde grup kongrüans, anonim kongrüans ve çapraz kongrüanslar karakterize edilmiştir. Bu konu ile ilgili ayrıntılı bilgi için Piochi (1995) e bakınız.

Bu bölümün son kısmını oluşturan "4.4. Bruck-Reilly Genişlemeleri Üzerinde Sonluluk Koşulları" bölümünde ise, monoidlerin ve grupların Bruck-Reilly genişlemesi üzerinde 3. bölümde verilen sonluluk koşullarından sonlu sunumluluk ve sonlu üreteçlilik özelliklerin sağlanması için gerek ve yeter koşullar ispatlanmıştır. Bruck-Reilly genişlemeleri ile ilgili detaylı bilgi için Araujo (2000), Araujo (2001), Carvalho (2009a) ve Howie ve Ruškuc (1994) e bakınız.

4.2. Monoidlerin Bruck-Reilly Genişlemesi Üzerinde Özel Yarıgrup Sınıfları

Bu alt bölümde bir monoidin Bruck-Reilly genişlemesinin ve bunun bir özel durumu olan k sayıda monoidin direkt çarpımının Bruck-Reilly genişlemesinin özel yarıgrup sınıflarına ait olabilmesi için gerek ve yeter koşullar ispatlanmıştır.

Bu genişleme türü üzerinde özel yarıgrup sınıfları ile ilgili olarak ilk kez Munn **(**1970) de aşağıda verilen teoremi ispatlamıştır.

Teorem 4.2.1 (Munn, 1970): M bir monoid ve θ, M üzerinde bir endomorfizm olsun. M nin Bruck-Reilly genişlemesi $BR(M,\theta)$ nın tersinir yarıgrup olması için gerek ve yeter koşul M monoidinin tersinir olmasıdır.

Tersinirlik koşulu regülerlik özelliğini de barındırdığı için Teorem 4.2.1 in bir sonucu olarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.2: M bir monoid ve θ, M üzerinde bir endomorfizm olsun. M nin Bruck-Reilly genişlemesi $BR(M,\theta)$ nın regüler olması için gerek ve yeter koşul M monoidinin regüler olmasıdır.

4.2.1. Bir monoidin Bruck-Reilly genişlemesi üzerinde bazı özel yarıgrup sınıfları

Bu alt bölümde elde edilen sonuçlar (Oğuz ve Karpuz, 2015a) çalışmasında yer almaktadır.

Teorem 4.2.3: M bir monoid ve θ, M üzerinde bir endomorfizm olsun. M nin Bruck-Reilly genişlemesi $BR(M,\theta)$ nın terslenebilir regüler olması için gerek ve yeter koşul M monoidinin terslenebilir regüler olmasıdır.

İspat: $BR(M,\theta)$ terslenebilir regüler ve $x \in M$ olsun. Bu durumda, $m,n \in \mathbb{N}^0$ için $(m,x,n) \in BR(M,\theta)$ olup $(m,x,n) = (m,x,n)(n,y,m)(m,x,n)$ olacak biçimde $(n,y,m) \in G$ vardır. (Burada G, $BR(M,\theta)$ daki terslenebilir elemanların oluşturduğu grubu göstermektedir.) O halde,

$$(m,x,n)(n,y,m)(m,x,n) = (m,x,n)$$
$$\Leftrightarrow (m-n+n, (x\theta^{n-n})(y\theta^{n-n}), m-n+n)(m,x,n) = (m,x,n)$$
$$\Leftrightarrow (m,xy,m)(m,x,n) = (m,x,n)$$
$$\Leftrightarrow (m-m+m, (xy)\theta^{m-m}x\theta^{m-m}, n-m+m) = (m,x,n)$$
$$\Leftrightarrow (m,xyx,m) = (m,x,n)$$

elde edilir. Buradan $xyx = x$ olup, M monoidi terslenebilir regülerdir.

Tersine, M monoidi terslenebilir regüler ve $(m,x,n) \in BR(M,\theta)$ olsun. O halde, $x \in M$ ve $x = xyx$ olacak şekilde $y \in G_M$ vardır. (Burada G_M M nin terslenebilir elemanlarının oluşturduğu grubu göstermektedir.) Şimdi her $(m,x,n) \in BR(M,\theta)$ için $(m,x,n) = (m,x,n)(p,y,q)(m,x,n)$ olacak şekilde $(p,y,q) \in G$ olduğunu gösterelim. Burada $p = n$ ve $q = m$ alındığında her $x \in M$ ve $y \in G_M$ için $x = xyx$ olduğundan, $(m,x,n)(p,y,q)(m,x,n) = (m,x,n)$ eşitliğinin sağlandığı görülür. Bu durumda, $BR(M,\theta)$ terslenebilir regülerdir. □

Önerme 4.2.4: M bir monoid ve θ, M üzerinde bir endomorfizm olsun. $(m,x,n) \in BR(M,\theta)$ olmak üzere, eğer (m,x,n) elemanı tamamen regüler ise $m = n$ dir.

İspat: $(m,x,n) \in BR(M,\theta)$ tamamen regüler bir eleman olsun. O halde, Tanım 2.5.9 dan y,x in bir tersi ve $(m,x,n)(n,y,m) = (n,y,m)(m,x,n)$ olacak şekilde $(n,y,m) \in V((m,x,n))$ vardır. Buradan $m = n$ ve $xy = yx$ elde edilir. □

Teorem 4.2.5: $M' = \{(m,x,m) | x \in M, m \in \mathbb{N}^0\} \leq BR(M,\theta)$ alt monoidinin tamamen regüler olması için gerek ve yeter koşul M monoidinin tamamen regüler olmasıdır.

İspat: $M' \leq BR(M,\theta)$ monoidi tamamen regüler olsun. Bu durumda, her $(m,x,m) \in BR(M,\theta)$ için y,x in bir tersi ve $(m,x,m)(m,y,m) = (m,y,m)(m,x,m)$

olacak şekilde $(m,y,m) \in V((m,x,m))$ vardır. Buradan $xy = yx$ elde edilir. Böylece M tamamen regülerdir.

Tersine, M monoidi tamamen regüler olsun. Bu durumda, $x \in M$ için $xy = yx$ olacak şekilde $y \in V(x)$ vardır. Şimdi her $(m,x,m) \in BR(M,\theta)$ için $(m,x,m)(m,y,m) = (m,y,m)(m,x,m)$ olacak şekilde $(m,y,m) \in V((m,x,m))$ olduğunu gösterelim.

$$(m,x,m)(m,y,m) = (m-m+m, x\theta^{m-m}y\theta^{m-m}, m-m+m) = (m,xy,m)$$
$$(m,y,m)\ (m,x,m) = (m-m+m, y\theta^{m-m}x\theta^{m-m}, m-m+m) = (m,yx,m)$$

olup $xy = yx$ sağlandığından M' tamamen regülerdir. □

Teorem 4.2.6: M bir monoid ve θ, M üzerinde bir endomorfizm olsun. M nin Bruck-Reilly genişlemesi $BR(M,\theta)$ nın orthodox olması için gerek ve yeter koşul M monoidinin orthodox olmasıdır.

İspat: $BR(M,\theta)$ orthodox olsun. Bu durumda, Tanım 2.5.14 ve Sonuç 4.2.2 den M monoidi regülerdir. Diğer taraftan,

$$E\big(BR(M,\theta)\big) = \{(m,e,m) | m \in \mathbb{N}^0, e \in M, e^2 = e\},$$

$BR(M,\theta)$ nın bir alt yarıgrubudur. Ayrıca her $e,f \in E(M)$ için $(m,e,m)(m,f,m) = (m,ef,m)$ elemanı $BR(M,\theta)$ da bir idempotent eleman olduğundan, $(ef)^2 = ef$ dir. O halde, M monoidi orthodox monoiddir.

Tersine, M monoidi orthodox olsun. Bu durumda, Tanım 2.5.14 ve Sonuç 4.2.2 den $BR(M,\theta)$ regülerdir. Diğer taraftan $E(M)$, M nin bir alt yarıgrubudur. Ayrıca her $(m,e,m),(n,f,n) \in E(BR(M,\theta))$ için

$$(m,e,m)(n,f,n) = (\max(m,n), (e\theta^{\max(m,n)-m})(f\theta^{\max(m,n)-n}), \max(m,n)) \in E\big(BR(M,\theta)\big)$$

dir. $(e\theta^{\max(m,n)-m})(f\theta^{\max(m,n)-n}) \in E(M)$ olduğundan, $E\big(BR(M,\theta)\big)$, $BR(M,\theta)$ nın bir alt yarıgrubudur. Böylece $BR(M,\theta)$ orthodox monoiddir. □

4.2.2. k sayıda monoidin direkt çarpımının Bruck-Reilly genişlemesi üzerinde bazı özel yarıgrup sınıfları

Bu alt bölümde k sayıda monoidin direkt çarpımının Bruck-Reilly genişlemesi $BR(\times_{i=1}^{k} T_i, \theta)$ monoidinin regüler, terslenebilir regüler, tamamen regüler ve orthodox olabilmesi için gerek yeter koşullar verilmiştir. Bu kısımda yer alan çalışmalar (Oğuz ve Karpuz, 2015c) de ispatlanmıştır.

Bu alt bölüm boyunca $T_i \ \ (1 \leq i \leq k)$ bir monoid olmak üzere,

$$T_1 \times T_2 \times \ldots \times T_k = \{(t_1, t_2, \ldots, t_k) | t_i \in T_i, 1 \leq i \leq k\}$$

kümesi $\times_{i=1}^{k} T_k$ ile gösterilecektir.

Teorem 4.2.7: $BR(\times_{i=1}^{k} T_i, \theta)$ monoidinin regüler olması için gerek ve yeterli koşul $\times_{i=1}^{k} T_i$ monoidinin regüler olmasıdır.

İspat: $BR(\times_{i=1}^{k} T_i, \theta)$ regüler ve $(t_1, t_2, \ldots, t_k) \in \times_{i=1}^{k} T_i$ olsun. Bu durumda, $m, n \in \mathbb{N}^0$ için $(m, (t_1, t_2, \ldots, t_k), n) \in BR(\times_{i=1}^{k} T_i, \theta)$ olup,

$$(m, (t_1, t_2, \ldots, t_k), n) = (m, (t_1, t_2, \ldots, t_k), n)(m', (t_1', t_2', \ldots, t_k'), n')(m, (t_1, t_2, \ldots, t_k), n)$$

olacak şekilde $(m', (t_1', t_2', \ldots, t_k'), n') \in BR(\times_{i=1}^{k} T_i, \theta)$ vardır. $q_1 = max\{n, m'\}$ ve $q_2 = max\{n' - m' + q, m\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
&(m, (t_1, t_2, \ldots, t_k), n) = (m, (t_1, t_2, \ldots, t_k), n)(m', (t_1', t_2', \ldots, t_k'), n')(m, (t_1, t_2, \ldots, t_k), n) \\
&\Leftrightarrow (m - n + q_1, (t_1, t_2, \ldots, t_k)\theta^{q_1 - n}(t_1', t_2', \ldots, t_k')\theta^{q_1 - p}, n' - m' + q_1)(m, (t_1, t_2, \ldots, t_k), n) \\
&\Leftrightarrow (m - n + q_1 - n' + m' - q_1 + q_2, \\
&\Big(\big((t_1, t_2, \ldots, t_k)\theta^{q_1 - n}\big)\big((t_1', t_2', \ldots, t_k')\theta^{q_1 - m'}\big)\Big)\theta^{q_2 - n' + m' - q_1})(t_1, t_2, \ldots, t_k)\theta^{q_2 - m}), \\
&n - m + q_2) = (m, (t_1, t_2, \ldots, t_k), n)
\end{aligned}$$

olup buradan,

$$\begin{aligned}
&m - n - n' + m' + q_2 = m, \\
&n - m + q_2 = n, \\
&\Big(\big((t_1, t_2, \ldots, t_k)\theta^{q_1 - n}\big)\big((t_1', t_2', \ldots, t_k')\theta^{q_1 - m'}\big)\Big)\theta^{q_2 - n' + m' - q_1}\Big)(t_1, t_2, \ldots, t_k)\theta^{q_2 - m}
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Birinci eşitlikten $q_2 = n + n' - m'$ olup $n + n' - m \geq n' - m' + q_1$ ve buradan $n \geq q_1$ olduğu görülür. Diğer taraftan $q_1 \geq n$ olduğundan $q_1 = n$ elde edilir. İkinci eşitlikten ise $m = q_2$ elde edilir. Bunlar son eşitlikte yerine yazılırsa,

$$\left(\left((t_1, t_2, \dots, t_k)\theta^{n-n}\right)\left((t_1', t_2', \dots, t_k')\theta^{n-m'}\right)\right)\theta^{n+n'-m'-n'+m'-n}\Big)\left((t_1, t_2, \dots, t_k)\theta^{m-m}\right)$$
$$= (t_1, t_2, \dots, t_k)\left((t_1', t_2', \dots, t_k')\theta^{n-m'}\right)(t_1, t_2, \dots, t_k) = (t_1, t_2, \dots, t_k)$$

olduğu görülür. O halde, $\times_{i=1}^{k} T_i$ monoidi regülerdir.

Tersine, $\times_{i=1}^{k} T_i$ monoidi regüler ve $(m, (t_1, t_2, \dots, t_k), n) \in BR(\times_{i=1}^{k} T_i, \theta)$ olsun. O halde, $(t_1, t_2, \dots, t_k) \in \times_{i=1}^{k} T_i$ olup

$$(t_1, t_2, \dots, t_k)(t_1', t_2', \dots, t_k')(t_1, t_2, \dots, t_k) = (t_1, t_2, \dots, t_k)$$

olacak şekilde $(t_1', t_2', \dots, t_k') \in \times_{i=1}^{k} T_i$ vardır. Şimdi $BR(\times_{i=1}^{k} T_i, \theta)$ nin regüler olduğunu gösterelim. $m, n \in \mathbb{N}^0$ olmak üzere, $(n, (t_1', t_2', \dots, t_k'), m) \in BR(\times_{i=1}^{k} T_i, \theta)$ için,

$$\begin{aligned}
&(m, (t_1, t_2, \dots, t_k), n)(n, (t_1', t_2', \dots, t_k'), m)(m, (t_1, t_2, \dots, t_k), n) \\
&= (m - n + n, \left((t_1, t_2, \dots, t_k)\theta^0\right)(t_1', t_2', \dots, t_k')\theta^0, m - n + n)(m, (t_1, t_2, \dots, t_k), n) \\
&= (m, (t_1, t_2, \dots, t_k)(t_1', t_2', \dots, t_k'), m)(m, (t_1, t_2, \dots, t_k), n) \\
&= (m - m + m, \left(\left((t_1, t_2, \dots, t_k)(t_1', t_2', \dots, t_k')\right)\theta^0\right)\left((t_1, t_2, \dots, t_k)\theta^0\right), n - m + m) \\
&= (m, (t_1, t_2, \dots, t_k)(t_1', t_2', \dots, t_k')(t_1, t_2, \dots, t_k), n) \\
&= (m, (t_1, t_2, \dots, t_k), n)
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Dolayısıyla $BR(\times_{i=1}^{k} T_i, \theta)$ regülerdir. □

Teorem 4.2.8: $BR(\times_{i=1}^{k} T_i, \theta)$ nin terslenebilir regüler olması için gerek ve yeter koşul $\times_{i=1}^{k} T_i$ monoidinin terslenebilir regüler olmasıdır.

İspat: $BR(\times_{i=1}^{k} T_i, \theta)$ terslenebilir regüler ve $(t_1, t_2, \dots, t_k) \in \times_{i=1}^{k} T_i$ olsun. O halde, $m, n \in \mathbb{N}^0$ için $(m, (t_1, t_2, \dots, t_k), n) \in BR(\times_{i=1}^{k} T_i, \theta)$ olup $(m, (t_1, t_2, \dots, t_k), n) = (m, (t_1, t_2, \dots, t_k), n)(n, (t_1', t_2', \dots, t_k'), m)(m, (t_1, t_2, \dots, t_k), n)$

olacak biçimde $(n,(t_1{}',t_2{}',\dots,t_k{}'),m)\in G$ vardır. (Burada G, $BR(\times_{i=1}^{k}T_i,\theta)$ deki terslenebilir elemanların oluşturduğu grubu göstermektedir.) O halde,

$$(m,(t_1,t_2,\dots,t_k),n)(n,(t_1{}',t_2{}',\dots,t_k{}'),m)(m,(t_1,t_2,\dots,t_k),n)=(m,(t_1,t_2,\dots,t_k),n)$$
$$\Leftrightarrow\quad (m-n+n,((t_1,t_2,\dots,t_k)\theta^{n-n})((t_1{}',t_2{}',\dots,t_k{}')\theta^{n-n}),m-n+n)(m,(t_1,t_2,\dots,t_k),n)$$
$$=(m,(t_1,t_2,\dots,t_k),n)$$
$$\Leftrightarrow\quad (m,(t_1,t_2,\dots,t_k)(t_1{}',t_2{}',\dots,t_k{}'),m)(m,(t_1,t_2,\dots,t_k),n)=(m,(t_1,t_2,\dots,t_k),n)$$
$$\Leftrightarrow\quad (m-m+m,((t_1,t_2,\dots,t_k)(t_1{}',t_2{}',\dots,t_k{}'))\theta^{m-m}(t_1,t_2,\dots,t_k)\theta^{m-m},n-m+m)$$
$$=(m,(t_1,t_2,\dots,t_k),n)$$
$$\Leftrightarrow\quad (m,(t_1,t_2,\dots,t_k)(t_1{}',t_2{}',\dots,t_k{}')(t_1,t_2,\dots,t_k),m)=(m,(t_1,t_2,\dots,t_k),n)$$

elde edilir. Buradan $(t_1,t_2,\dots,t_k)(t_1{}',t_2{}',\dots,t_k{}')(t_1,t_2,\dots,t_k)=(t_1,t_2,\dots,t_k)$ olup M monoidi terslenebilir regülerdir.

Tersine, $\times_{i=1}^{k}T_i$ monoidi terslenebilir regüler ve $(m,(t_1,t_2,\dots,t_k),n)\in BR(\times_{i=1}^{k}T_i,\theta)$ olsun. O halde, $x\in\times_{i=1}^{k}T_i$ ve $(t_1,t_2,\dots,t_k)=(t_1,t_2,\dots,t_k)(t_1{}',t_2{}',\dots,t_k{}')(t_1,t_2,\dots,t_k)$ olacak şekilde $(t_1{}',t_2{}',\dots,t_k{}')\in G_{\times_{i=1}^{k}T_i}$ vardır. (Burada $G_{\times_{i=1}^{k}T_i}$, M nin terslenebilir elemanlarının oluşturduğu grubu göstermektedir.) Şimdi her $(m,(t_1,t_2,\dots,t_k),n)\in BR(\times_{i=1}^{k}T_i,\theta)$ için $(m,(t_1,t_2,\dots,t_k),n)=(m,(t_1,t_2,\dots,t_k),n)(p,y,q)(m,(t_1,t_2,\dots,t_k),n)$ olacak şekilde $(p,(t_1{}',t_2{}',\dots,t_k{}'),q)\in G$ olduğunu gösterelim. Burada $p=n$ ve $q=m$ alındığında her $(t_1,t_2,\dots,t_k)\in\times_{i=1}^{k}T_i$ ve $(t_1{}',t_2{}',\dots,t_k{}')\in G_{\times_{i=1}^{k}T_i}$ için $(t_1,t_2,\dots,t_k)=(t_1,t_2,\dots,t_k)(t_1{}',t_2{}',\dots,t_k{}')(t_1,t_2,\dots,t_k)$ olduğundan,

$$(m,(t_1,t_2,\dots,t_k),n)(p,(t_1{}',t_2{}',\dots,t_k{}'),q)(m,(t_1,t_2,\dots,t_k),n)=(m,(t_1,t_2,\dots,t_k),n)$$

eşitliğinin sağlandığı görülür. Bu durumda, $BR(\times_{i=1}^{k}T_i,\theta)$ terslenebilir regülerdir. □

Önerme 4.2.9: $(m,(t_1,t_2,\dots,t_k),n)\in BR(\times_{i=1}^{k}T_i,\theta)$ olsun. Eğer $(m,(t_1,t_2,\dots,t_k),n)$ elemanı tamamen regüler ise $m=n$ dir.

İspat: $(m,x,n)\in BR(\times_{i=1}^{k}T_i,\theta)$ tamamen regüler bir eleman olsun. O halde, Tanım 2.5.9 dan $(t_1{}',t_2{}',\dots,t_k{}')$, $(t_1,t_2,\dots,t_k)$ in bir tersi ve $(m,(t_1,t_2,\dots,t_k),n)(n,y,m)=(n,(t_1{}',t_2{}',\dots,t_k{}'),m)(m,(t_1,t_2,\dots,t_k),n)$ olacak şekilde, $(n,(t_1{}',t_2{}',\dots,t_k{}'),m)\in V((m,(t_1,t_2,\dots,t_k),n))$ vardır. Buradan $m=n$ ve $(t_1,t_2,\dots,t_k)(t_1{}',t_2{}',\dots,t_k{}')=(t_1{}',t_2{}',\dots,t_k{}')(t_1,t_2,\dots,t_k)$ elde edilir. □

Önerme 4.2.9 kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.2.10: $S = \{(m,(t_1,t_2,\dots,t_k),m) | x \in M, m \in \mathbb{N}^0\} \leq BR(\times_{i=1}^{k} T_i, \theta)$ alt monoidinin tamamen regüler olması için gerek ve yeter koşul $\times_{i=1}^{k} T_i$ monoidinin tamamen regüler olmasıdır.

İspat: $S \leq BR(\times_{i=1}^{k} T_i, \theta)$ monoidi tamamen regüler olsun. Bu durumda, her $(m,(t_1,t_2,\dots,t_k),m) \in BR(\times_{i=1}^{k} T_i, \theta)$ için $(t_1{}',t_2{}',\dots,t_k{}'),(t_1,t_2,\dots,t_k)$ in bir tersi ve $(m,(t_1,t_2,\dots,t_k),m)(m,(t_1{}',t_2{}',\dots,t_k{}'),m) = (m,(t_1{}',t_2{}',\dots,t_k{}'),m)(m,(t_1,t_2,\dots,t_k),m)$ olacak şekilde $(m,(t_1{}',t_2{}',\dots,t_k{}'),m) \in V((m,(t_1,t_2,\dots,t_k),m))$ vardır. Buradan $(t_1,t_2,\dots,t_k)(t_1{}',t_2{}',\dots,t_k{}') = (t_1{}',t_2{}',\dots,t_k{}')(t_1,t_2,\dots,t_k)$ elde edilir. Böylece $\times_{i=1}^{k} T_i$ tamamen regülerdir.

Tersine, $\times_{i=1}^{k} T_i$ monoidi tamamen regüler olsun. Bu durumda, $(t_1,t_2,\dots,t_k) \in \times_{i=1}^{k} T_i$ için $(t_1,t_2,\dots,t_k)(t_1{}',t_2{}',\dots,t_k{}') = (t_1{}',t_2{}',\dots,t_k{}')(t_1,t_2,\dots,t_k)$ olacak şekilde $(t_1{}',t_2{}',\dots,t_k{}') \in V((t_1,t_2,\dots,t_k))$ vardır. Şimdi her $(m,(t_1,t_2,\dots,t_k),m) \in BR(\times_{i=1}^{k} T_i, \theta)$ için,

$$(m,(t_1,t_2,\dots,t_k),m)(m,(t_1{}',t_2{}',\dots,t_k{}'),m) = (m,(t_1{}',t_2{}',\dots,t_k{}'),m)(m,(t_1,t_2,\dots,t_k),m)$$

olacak şekilde $(m,(t_1{}',t_2{}',\dots,t_k{}'),m) \in V((m,(t_1,t_2,\dots,t_k),m))$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
&(m,(t_1,t_2,\dots,t_k),m)(m,(t_1{}',t_2{}',\dots,t_k{}'),m)\\
&\qquad = (m-m+m,(t_1,t_2,\dots,t_k)\theta^{m-m}(t_1{}',t_2{}',\dots,t_k{}')\theta^{m-m},m-m+m)\\
&\qquad = (m,(t_1,t_2,\dots,t_k)(t_1{}',t_2{}',\dots,t_k{}'),m)\\
&(m,(t_1{}',t_2{}',\dots,t_k{}'),m)\ (m,(t_1,t_2,\dots,t_k),m)\\
&\qquad = (m-m+m,(t_1{}',t_2{}',\dots,t_k{}')\theta^{m-m}(t_1,t_2,\dots,t_k)\theta^{m-m},m-m+m)\\
&\qquad = (m,(t_1{}',t_2{}',\dots,t_k{}')(t_1,t_2,\dots,t_k),m)
\end{aligned}$$

olup $(t_1,t_2,\dots,t_k)(t_1{}',t_2{}',\dots,t_k{}') = (t_1{}',t_2{}',\dots,t_k{}')(t_1,t_2,\dots,t_k)$ sağlandığından S tamamen regülerdir. □

Teorem 4.2.11: $BR(\times_{i=1}^{k} T_i, \theta)$ monoidinin orthodox olması için gerek ve yeter koşul $\times_{i=1}^{k} T_i$ monoidinin orthodox olmasıdır.

İspat: $BR(\times_{i=1}^{k} T_i, \theta)$ monoidi orthodox olsun. Bu durumda, Tanım 2.5.14 ve Sonuç 4.2.2 den $\times_{i=1}^{k} T_i$ monoidi regülerdir. Diğer taraftan,

$$E\big(BR(\times_{i=1}^{k} T_i,\theta)\big)=\big\{(m,(e_1,e_2,\dots,e_k),m)\big|m\in\mathbb{N}^0,(e_1,e_2,\dots,e_k)\in\times_{i=1}^{k} T_i,(e_1,e_2,\dots,e_k)^2=(e_1,e_2,\dots,e_k)\big\},$$

dir. $BR(\times_{i=1}^{k} T_i,\theta)$ nın bir alt yarıgrubudur. Ayrıca her $(e_1,e_2,\dots,e_k),(f_1,f_2,\dots,f_k)\in E(\times_{i=1}^{k} T_i)$ için,

$$(m,(e_1,e_2,\dots,e_k),m)(m,(f_1,f_2,\dots,f_k),m)=(m,(e_1,e_2,\dots,e_k)(f_1,f_2,\dots,f_k),m)$$

elemanı $BR(\times_{i=1}^{k} T_i,\theta)$ da bir idempotent eleman olduğundan,

$$\big((e_1,e_2,\dots,e_k)(f_1,f_2,\dots,f_k)\big)^2=(e_1,e_2,\dots,e_k)(f_1,f_2,\dots,f_k)$$

dir. O halde, $\times_{i=1}^{k} T_i$ monoidi orthodox monoiddir.

Tersine, $\times_{i=1}^{k} T_i$ monoidi orthodox olsun. Bu durumda, Tanım 2.5.14 ve Sonuç 4.2.2 den $BR(\times_{i=1}^{k} T_i,\theta)$ regülerdir. Diğer taraftan $E(\times_{i=1}^{k} T_i)$ yarıgrubu, $\times_{i=1}^{k} T_i$ nin bir alt yarıgrubudur. Ayrıca her $(m,(e_1,e_2,\dots,e_k),m),(n,(f_1,f_2,\dots,f_k),n)\in E(BR(\times_{i=1}^{k} T_i,\theta))$ için,

$$\begin{aligned}&(m,(e_1,e_2,\dots,e_k),m)(n,(f_1,f_2,\dots,f_k),n)\\&=(\max(m,n),((e_1,e_2,\dots,e_k)\theta^{\max(m,n)-m})((f_1,f_2,\dots,f_k)\theta^{\max(m,n)-n}),\max(m,n))\\&\in E\left(BR\big(\times_{i=1}^{k} T_i,\theta\big)\right)\end{aligned}$$

olduğu görülür. Diğer taraftan,

$$((e_1,e_2,\dots,e_k)\theta^{\max(m,n)-m})((f_1,f_2,\dots,f_k)\theta^{\max(m,n)-n})\in E(\times_{i=1}^{k} T_i)$$

olduğundan, $E\big(BR(\times_{i=1}^{k} T_i,\theta)\big)$, $BR(\times_{i=1}^{k} T_i,\theta)$ nın bir alt yarıgrubudur. Böylece $BR(\times_{i=1}^{k} T_i,\theta)$ orthodox monoiddir. □

4.3. Bruck-Reilly Genişlemesi Üzerinde Kongrüanslar

Bu alt bölümde Bruck-Reilly genişlemesi üzerinde üç tip kongrüans karakterize edilmiştir. Konu ile ilgili detaylı bilgi için (Higgins, 1992), (Howie, 1995) ve (Piochi, 1995) kaynaklarına bakınız.

Konuyla ilgili olarak ilk kez Munn ve Reilly (1966) da bir katlı-basit w-yarıgrup üzerinde tanımlanan bir kongrüansın ya grup kongrüans ya da idempotent-ayrık kongrüans olabileceğini göstermişlerdir. Ault (1975) de ise bir katlı-basit w-yarıgrup üzerinde grup kongrüansın tam sınıflandırmasını yapmıştır ve Petrich (1979) da bu sınıflandırmayı w-yarıgruplar üzerinde göstermiştir. Sonrasında Rankin (1991) de tersinir Bruck-Reilly genişlemesi üzerinde grup ve grup olmayan kongrüansları çalışmıştır. Piochi ise 1995 de bir monoidin Bruck-Reilly genişlemesi üzerinde üç tip kongrüans karakterize etmiştir. Bunlar; grup kongrüans, anonim kongrüans ve çapraz kongrüanstır.

Tanım 4.3.1 (Piochi, 1995): M bir monoid, $\theta: M \to G_M$ (G_M: M nin terslenebilir elemanlarının oluşturduğu grup) bir homomorfizma ve M nin Bruck-Reilly genişlemesi $BR(M,\theta) = S$ olsun. τ, S üzerinde bir kongrüans olmak üzere, τ_C ile τ nun

$$C = \{(m,1,n) | m,n \in \mathbb{N}\}$$

kümesine kısıtlanışı ve τ_M ile de τ kongrüansının M monoidine kısıtlanışı yani τ nun

$$\{(0,a,0) | m,n \in \mathbb{N}\}$$

kümesine kısıtlanışı gösterilsin. Bu durumda $a,b \in M$ olmak üzere, $a\tau_M b$ olması için gerek ve yeter koşul $(0,a,0)\tau(0,b,0)$ olmasıdır.

Tanım 4.3.2 (Piochi, 1995): M bir monoid ve Γ, M üzerinde bir kongrüans olsun. Eğer her $a,b \in M$ için a ve b, Γ bağlantılı iken $a\theta$ ve $b\theta$ da Γ bağlantılı oluyorsa bu durumda, Γ kongrüansına $\boldsymbol{\theta - }$ ***kabul edilebilir kongrüans*** denir.

Teorem 4.3.3 (Piochi, 1995): $S = BR(M,\theta)$ üzerinde tanımlı bir τ kongrüansı aşağıdaki koşullardan birini sağlar.

i) (Grup kongrüans) τ nun bir grup kongrüans olması için gerek ve yeter koşul τ_C nin C üzerinde bir grup kongrüans olmasıdır.

ii) (Anonim kongrüans) $(m,a,n),(p,b,q) \in S$ olmak üzere, $(m,a,n)\tau(p,b,q)$ olması için gerek ve yeter koşul

$m = p, n = q$ ve $a\tau_M b$ olması yani $\tau = (\tau_M)^S$ olmasıdır.

iii) (Çapraz kongrüans) τ bir grup kongrüans değildir ve S nin $(m,a,n)\tau(p,b,q)$ ve $m \neq p$ veya $n \neq q$ koşullarını sağlayan en az bir çift elemanı vardır. Bu durumda, her çift için aşağıdaki durumlar sağlanır.

● $m = p+1, n = q+1$ ve $a\tau_T b\alpha$ veya $p = m+1, q = n+1$ ve $b\tau_T a\alpha$;

● $(m',a',n')\tau(p',b',q')$, $m' = p'$ olması için gerek ve yeter koşul $n' = q'$ olmasıdır. Bu koşulun sağlanması durumunda ise $a'\tau_T b'$ dir.

Teoremin ispatı için Piochi (1995), Teorem 1.6 ya bakınız.

4.4. Bruck-Reilly Genişlemeleri Üzerinde Sonlu Üreteçlilik ve Sonlu Sunumluluk

Bu alt bölümde Bruck-Reilly genişlemeleri üzerinde sonluluk koşullarından, sonlu üreteçlilik ve sonlu sunumluluk koşulları ele alınmıştır.

M bir monoid ve θ, M üzerinde bir endomorfizm olsun. İlk olarak M monoidinin üreteç kümesi ve sunuşu yardımıyla M nin θ ile olan Bruck-Reilly genişlemesi $BR(M,\theta)$ için üreteç kümesini ve sunuşunu gösterelim.

Önerme 4.4.1 (Howie ve Ruškuc, 1994): M monoidinin bir üreteç kümesi A ise M nin θ ile olan Bruck-Reilly genişlemesi $BR(M,\theta)$ nın üreteç kümesi

$$X = \{(0,a,0) | a \in A\} \cup \{(0,1_M,1),(1,1_M,0)\}$$

şeklindedir.

Sonuç 4.4.2: Önerme 4.4.1 den görüldüğü üzere $BR(M,\theta)$ nın üreteç kümesindeki eleman sayısı $|A|+2$ dir ve M monoidi sonlu üreteçli ise M nin Bruck-Reilly genişlemesi de sonlu üreteçlidir.

Önerme 4.4.3 (Howie ve Ruškuc, 1994): $\langle A|R\rangle$, M monoidinin bir sunuşu ve θ, M üzerinde bir endomorfizm olsun. Bu durumda,

$$\langle A,b,c | R, bc = 1, ba = (a\theta)b, ac = c(a\theta)\ (a \in A)\rangle \qquad (4.1)$$

M nin Bruck-Reilly genişlemesi $BR(M,\theta)$ nın bir sunuşudur.

Önerme 4.4.3 ün bir sonucu olarak eğer bir M monoidi sonlu üreteçli (veya sonlu sunumlu) ise M monoidinin Bruck-Reilly genişlemesi $BR(M,\theta)$ da sonlu üreteçlidir (veya sonlu sunumludur). Bu M monoidinin sonlu üreteçli olmaması

durumunda M monoidinin Bruck-Reilly genişlemesi sonlu üreteçli olabilir. Aşağıda buna dair bir örnek yer almaktadır.

Örnek 4.4.4: Sonsuz üretece sahip bir F serbest grubunun Bruck-Reilly genişlemesi $BR(F,\theta)$ sonlu üreteçlidir. $\{x_i | i \geq 1\}$, F serbest grubunun bir üreteç kümesi olsun. $x_i \mapsto x_{i+1}$ (i ≥ 1) dönüşümü $\theta: F \to F$ bir grup homomorfizmasına genişletilirse $x_{i+1} \equiv x_1\theta^i = b^i x_1 c^i$ olduğu için $BR(F,\theta)$ Bruck-Reilly genişlemesi $\{x_1, {x_1}^{-1}, b, c\}$ tarafından üretilir.

Önerme 4.4.3 de verilen (4.1) sunuşu kullanılarak Bruck-Reilly genişlemesinin bazı temel özellikleri verilmiştir.

Önerme 4.4.5 (Araujo, 2000): $S = BR(M,\theta)$, $\langle A|R\rangle$ sunuşu ile tanımlanan M monoidinin Bruck-Reilly genişlemesi olsun.

(i) Her $w \in (A \cup \{b,c\})^*$ kelimesi S de $\alpha \in A^*$, $i,j \geq 0$ olmak üzere, $c^i \alpha b^j$ formundaki bir kelimeye eşittir.

(ii) Her $i,j,k,l \geq 0$ ve her $\alpha,\beta \in A^*$ için $c^i \alpha b^j = c^k \beta b^l$ bağıntısının S de sağlanıyor olması için gerek ve yeter koşul $i = k, j = l$ ve $\alpha = \beta$ nin M de sağlanıyor olmasıdır.

(iii) Her $i,j,k,l \geq 0$ ve her $\alpha,\beta \in A^*$ için

$$c^i \alpha b^j \mathcal{R}^S c^k \beta b^l \quad \Leftrightarrow \quad i = k \text{ ve } \alpha \mathcal{R}^M \beta$$
$$c^i \alpha b^j \mathcal{L}^S c^k \beta b^l \quad \Leftrightarrow \quad j = l \text{ ve } \alpha \mathcal{L}^M \beta$$
$$c^i \alpha b^j \mathcal{H}^S c^k \beta b^l \quad \Leftrightarrow \quad i = k, j = l \text{ ve } \alpha \mathcal{H}^M \beta$$

sağlanır.

Not 4.4.6: Önerme 4.4.3 de verilen bir M monoidinin Bruck-Reilly genişlemesi $BR(M,\theta)$ nın sunuşu ve Tanım 4.1.1 yardımıyla aşağıda verilen özelliklerin sağlandığını görmek mümkündür.

(BR1) $M \cong \{0\} \times M \times \{0\}$.

(BR2) b elemanı sağ tersinir fakat sol tersinir değildir ve c elemanı sol tersinir fakat sağ tersinir değildir.

(BR3) $U(BR(M,\theta)) = \{0\} \times U\{M\} \times \{0\} \cong U\{M\}$.

4.4.1. Bir monoidin Bruck-Reilly genişlemesinin sonlu üreteçliliği ve sonlu sunumluluğu

Bu kısımda bir monoidin Bruck-Reilly genişlemesinin sonlu sunumluluğu ve sonlu üreteçliliği ile ilgili teoremlerin ifadeleri verilecektir. Bu teoremlerin ispatları için Araujo (2000) ve Carvalho (2009b) kaynaklarına bakınız.

Bu alt bölümde yer alan sonuçlar "5.4. Genelleştirilmiş Bruck-Reilly *-Genişlemesi Üzerinde Sonlu Üreteçlilik ve Sonlu Sunumluluk" alt bölümündeki bir grubun genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemesinin sonlu üreteçliliği ve sonlu sunumluluğu ile ilgili sonuçlarında kullanılmıştır.

Önerme 4.4.7 (Araujo, 2000): M bir monoid ve θ, M üzerinde bir endomorfizm olsun. Bu durumda, M nin θ endomorfizması ile olan Bruck-Reilly genişlemesi $S = BR(M,\theta)$ nin sonlu üreteçli olması için gerek ve yeter koşul M nin bir üreteç kümesi $\cup_{i\geq 0} A_0\theta^i$ olacak şekilde sonlu bir $A_0 \subseteq M$ kümesinin var olmasıdır.

Önerme 4.4.8 (Araujo, 2000): M, $\langle A|R\rangle$ sunuşu ile tanımlı bir monoid ve θ, M üzerinde bir endomorfizm olsun ve M nin θ endomorfizması ile olan Bruck-Reilly genişlemesi $S = BR(M,\theta)$ ile gösterilsin. $R = \cup_{k=0}^{\infty} \bar{R}\theta^k$ olmak üzere, eğer M monoidi sonlu üreteçli ise S sonlu sunumludur.

Sonuç 4.4.9 (Araujo, 2000): M bir monoid ve θ, M üzerinde sonlu dereceli bir endomorfizm olsun. $S = BR(M,\theta)$ nin sonlu üreteçli (veya sonlu sunumlu) olabilmesi için gerek ve yeter koşul S nin sonlu sunumlu olmasıdır.

Aşağıda verilen Teorem 4.4.10 da özel bir monoid türü olan Clifford monoid alınarak bu monoidin Bruck-Reilly genişlemesinin sonlu sunumluluğunun sağlanması için gerek ve yeter koşul verilmiştir (Carvalho, 2009b). Bu teorem "5.4.2. Clifford monoidin genelleştirilmiş Bruck-Reilly *genişlemesinin sonlu sunumluluğu" alt bölümünde verilen bir Clifford monoidin genelleştirilmiş Bruck-Reilly *-genişlemesinin sonlu sunumluluğu ile ilgili sonuçta kullanılmıştır.

Teorem 4.4.10 (Carvalho, 2009b): M bir Clifford monoid ve $\theta: M \to M$ bir endomorfizm olsun. M nin Bruck-Reilly genişlemesi $BR(M,\theta)$ nın tersinir monoid olarak sonlu sunumlu olabilmesi için gerek ve yeter koşul bir monoid olarak sonlu sunumlu olmasıdır.

4.4.2. Bir grubun Bruck-Reilly genişlemesinin sonlu üreteçliliği ve sonlu sunumluluğu

Şimdi yukarıda verilen bir monoidin Bruck-Reilly genişlemesi için verilen bazı sonuçları grup özellikleri yardımıyla basite indirgeyerek bir G grubunun Bruck-Reilly genişlemesi $BR(G,\theta)$ nin sonlu sunumluluğu ve sonlu üreteçliliği ile ilgili teoremlerin ifadelerinin verelim. Bu teoremlerin ispatları için Araujo (2000) e bakınız.

Önerme 4.4.11 (Araujo, 2000): G, $\langle A|R\rangle$ sunuşu ile tanımlı bir grup ve θ, G üzerinde bir endomorfizm olsun ve G nin θ endomorfizması ile olan Bruck-Reilly genişlemesi $S = BR(G,\theta)$ olsun. Bu durumda, G grubu S nin terslenebilir elemanlarının oluşturduğu gruba izomorftur.

Teorem 4.4.12 (Araujo, 2000): G bir grup ve θ, G üzerinde bir endomorfizm olsun. Bu durumda, G nin θ endomorfizması ile olan Bruck-Reilly genişlemesi $S = BR(G,\theta)$ nin sonlu üreteçli olması için gerek ve yeter koşul G nin bir üreteç kümesi $\cup_{i\geq 0} A_0\theta^i$ olacak şekilde sonlu bir $A_0 \subseteq G$ kümesinin var olmasıdır.

Teorem 4.4.13 (Araujo, 2000): G bir grup ve θ, G üzerinde bir endomorfizm olsun. Bu durumda, G nin θ endomorfizması ile olan Bruck-Reilly genişlemesi $S = BR(G,\theta)$ olmak üzere, S sonlu sunumlu ise G grubu sonlu üreteçlidir.

Teorem 4.4.14 (Araujo, 2000): G, $\langle A|R\rangle$ sunuşu ile tanımlı bir grup ve θ, G üzerinde bir endomorfizm olsun. Bu durumda, G nin θ endomorfizması ile olan Bruck-Reilly genişlemesi $S = BR(G,\theta)$ nın sonlu sunumlu olması için gerek ve yeter koşul

$$R = \cup_{k=0}^{\infty} \bar{R}\theta^k = \{u\theta^k = v\theta^k | k \geq 0, (u = v) \in \bar{R}\},$$

olmak üzere, sonlu bir A üreteç kümesi ve sonlu bir $\bar{R} \subseteq A^* \times A^*$ bağıntılar kümesinin var olmasıdır.

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ BRUCK-REILLY *- GENİŞLEMELERİ VE BAZI CEBİRSEL SONUÇLARI

5.1. Giriş

Birleştirilmiş grup ve yarıgrup teorideki temel problem, sonlu üreteçli bir yarıgrubun (veya monoidin) üreteç ve bağıntı sistemine göre sunuşunu elde etmek ve bu yarıgrubun (veya monoidin) cebirsel ve geometrik özelliklerini araştırmaktır. Bu amaçla Howie ve Ruškuc (1994) de Bruck-Reilly genişlemesinin sunuşunu ve elemanların yapısının normal formunu elde etmiştir. Elde edilen bu bulgular "4.4. Bruck-Reilly Genişlemeleri Üzerinde Sonlu Üreteçlilik ve Sonlu Sunumluluk" alt bölümünde detaylı olarak verilmiştir. Bu genişleme türü yarıgrup teoride temel bir yapı olarak ele alınmıştır. Regüler yarıgrupların birçok sınıfı Bruck-Reilly genişlemesi ile karakterize edilmiştir. Örneğin; bir katlı-basit regüler w-yarıgrup, bir grubun Reilly genişlemesine izomorftur (Reilly, 1966) ve her basit regüler w-yarıgrup, grupların sonlu bir zincirinin Bruck-Reilly genişlemesine izomorftur (Kocin, 1968), (Munn, 1968). Asibong-Ibe (1985) de yazar genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemesi adında yeni bir monoid tanımlamıştır ve *-bir katlı-basit tipinde A w-yarıgrubunun yapısını oluşturmuştur. Sonrasında Shang ve Wang (2008) de idempotent elemanların w^2 -zincirini tanımlamıştır ve genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemesi olarak *-bir katlı-basit tipinde A w^2-yarıgrubunun *yapı teoremini* vermiştir. (Kocapınar ve ark., 2012) de bir monoidin genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemesinin sunuşu ve elemanların yapısının normal formu elde edilmiştir.

Bu bölümün ikinci kısmını oluşturacak olan "5.2. Monoidlerin Genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- Genişlemesi Üzerinde Özel Yarıgrup Sınıfları" alt bölümünde, bir monoidin genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemesinin bazı özel yarıgrup sınıflarına ait olabilmesi için gerek ve yeter koşullar verilmiştir (Oğuz ve Karpuz, 2015a). Bunun bir özel durumu olarak k sayıda monoidin direkt çarpımının genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemesinin bazı özel yarıgrup sınıflarına ait olabilmesi için gerek ve yeter koşullar ispatlanmıştır. Elde edilen sonuçlar (Oğuz ve Karpuz, 2015c) çalışmasında yer almaktadır.

Bu bölümün üçüncü kısmını oluşturan "5.3. Genelleştirilmiş Bruck-Reilly *-Genişlemesi Üzerinde Kongrüanslar" bölümünde Bruck-Reilly genişlemesi üzerinde grup kongrüans, anonim kongrüans ve çapraz kongrüanslar karakterize edilmiştir. Bu konu ile ilgili ayrıntılı bilgi (Oğuz ve Karpuz, 2015a) da yer almaktadır.

Bu bölümün son kısmını oluşturacak olan "5.4. Genelleştirilmiş Bruck-Reilly *-Genişlemesi Üzerinde Sonlu Üreteçlilik ve Sonlu Sunumluluk" bölümünde ise monoidlerin ve grupların genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemesi üzerinde 3. bölümde verilen sonluluk koşullarından sonlu sunumluluk ve sonlu üreteçlilik özelliklerinin sağlanması için gerek ve yeter koşullar ispatlanmıştır. Bununla ilgili sonuçlar (Oğuz ve Karpuz, 2015b) de yer almaktadır.

Tanım 5.1.1: M, bir monoid ve birim elemanı 1_M olsun. β, $\gamma: M \to {H_1}^*$ şeklinde tanımlı birer homomorfizma ve $u \in H_1$ olsun.

$S = \mathbb{N}^0 \times \mathbb{N}^0 \times M \times \mathbb{N}^0 \times \mathbb{N}^0$ kümesi üzerinde bir çarpma işlemi $(m,n,x,p,q),(m',n',x',p',q') \in S$ ve $d = \max(p,n')$ olmak üzere,

$$(m,n,x,p,q)(m',n',x',p',q') =$$
$$\begin{cases} (m, n-p+d, (x\beta^{d-p})\left(x'\beta^{d-n'}\right), p'-n'+d, q') & \text{eğer } q = m' \\ (m, n, x\left(\left((u^{-n'}(x'\gamma)u^{p'})\gamma^{q-m'-1}\right)\beta^{p}\right), p, q'-m'+q) & \text{eğer } q > m' \\ (m-q+m', n', \left(\left((u^{-n}(x\gamma)u^{p})\gamma^{m'-q-1}\right)\beta^{n'}\right)x', p', q') & \text{eğer } q < m' \end{cases} \quad (5.1)$$

şeklinde tanımlansın. S kümesi bu işlem ile birim elemanı $(0,0,1_M,0,0)$ olan bir monoid olur. Bu monoide M nin β,γ homomorfizmaları ve u elemanı ile belirlenen ***genelleştirilmiş Bruck-Reilly *-genişlemesi*** denir ve $GBR^*(M;\beta,\gamma;u)$ ile gösterilir.

5.2. Monoidlerin Genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- Genişlemesi Üzerinde Özel Yarıgrup Sınıfları

Bu alt bölümde bir monoidin genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemesinin ve bunun bir özel durumu olan k sayıda monoidin direkt çarpımının genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemesinin özel yarıgrup sınıflarına ait olabilmesi için gerek ve yeter koşullar ispatlanmıştır.

Bu genişleme türü üzerinde özel yarıgrup sınıfları ile ilgili olarak Shung ve Wang (2008) de aşağıda verilen iki lemmayı ispatlamışlardır. Bu sonuçlar "5.2.1. Bir monoidin genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemesi üzerinde bazı özel yarıgrup sınıfları" bölümünde yer alan teoremlerin ispatında kullanılmıştır

Lemma 5.2.1 (Shung ve Wang, 2008): $(m,n,x,p,q) \in GBR^*(M;\beta,\gamma;u)$ olsun. Bu durumda, $(m,n,x,p,q) \in E(GBR^*(M;\beta,\gamma;u))$ olması için gerek ve yeter koşul $m=q, n=p$ ve $x \in E(M)$ olmasıdır.

Lemma 5.2.2 (Shung ve Wang, 2008): $(m,n,x,p,q) \in GBR^*(M;\beta,\gamma;u)$ olsun. Bu durumda, (m,n,x,p,q) elemanının $(m',n',x',p',q') \in GBR^*(M;\beta,\gamma;u)$ olacak şekilde bir tersi olması için gerek ve yeter koşul $m'=q, n'=p,\ p'=n, q'=m$ ve x' elemanının $x \in M$ nin bir tersi olmasıdır.

Tersinirlik koşulu regülerlik özelliğini de barındırması sebebi ile Lemma 5.2.2 nin bir sonucu olarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.2.3: $GBR^*(M;\beta,\gamma;u)$ nin regüler olması için gerek ve yeter koşul M monoidinin regüler olmasıdır.

5.2.1. Bir monoidin genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemesi üzerinde bazı özel yarıgrup sınıfları

Bu alt bölümde bir monoidin genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemesinin terslenebilir regüler, tamamen regüler ve orthodox gibi özel yarıgrup sınıflarına ait olması için gerek ve yeter koşullar verilmiştir.

Bu kısımda elde edilen sonuçlar (Oğuz ve Karpuz, 2015a) çalışmasında yer almaktadır.

Teorem 5.2.4: M bir monoid, $\beta,\gamma : M \to {H_1}^*$ şeklinde tanımlı birer homomorfizma olsun. M nin genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemesi $GBR^*(M;\beta,\gamma;u)$ nin terslenebilir regüler olması için gerek ve yeter koşul M monoidinin terslenebilir regüler olmasıdır.

İspat: $GBR^*(M;\beta,\gamma;u)$ monoidi terslenebilir regüler ve $x \in M$ olsun. Bu durumda, $m,n,p,q \in \mathbb{N}^0$ için $(m,n,x,p,q) \in GBR^*(M;\beta,\gamma;u)$ olup,

$$(m,n,x,p,q) = (m,n,x,p,q)(q,p,x',n,m)(m,n,x,p,q)$$

olacak biçimde $(q,p,x',n,m) \in G$ vardır. (Burada G, $GBR^*(M;\beta,\gamma;u)$ daki terslenebilir elemanların oluşturduğu grubu göstermektedir.) O halde,

$$(m,n,x,p,q)(q,p,x',n,m)(m,n,x,p,q) = (m,n,x,p,q)$$
$$\Leftrightarrow (m,n-p+p,(x\beta^{p-p})(x'\beta^{p-p}),n-p+p,m)(m,n,x,p,q) = (m,n,x,p,q)$$

$\Leftrightarrow (m,n,xx',n,m)(m,n,x,p,q) = (m,n,x,p,q)$

$\Leftrightarrow (m,n-n+n,xx'\beta^{n-n}x\beta^{n-n},p-n+n,q) = (m,n,x,p,q)$

$\Leftrightarrow (m,n,xx'x,p,q) = (m,n,x,p,q)$

elde edilir. Buradan $xx'x = x$ olup M monoidi terslenebilir regülerdir.

Tersine, M monoidi terslenebilir regüler ve $(m,n,x,p,q) \in GBR^*(M;\beta,\gamma;u)$ olsun. O halde, $x \in M$ ve $x = xx'x$ olacak şekilde $x' \in G_M$ vardır. (Burada G_M M nin terslenebilir elemanlarının oluşturduğu grubu göstermektedir.) Şimdi her $(m,n,x,p,q) \in GBR^*(M;\beta,\gamma;u)$ için,

$(m,n,x,p,q) = (m,n,x,p,q)(m',n',x',p',q')(m,n,x,p,q)$

olacak şekilde $(m',n',x',p',q') \in G$ olduğunu gösterelim. Burada $m' = q,\ n' = p,$ $p' = n,\ \ q' = m$ alındığında her $x \in M$ ve $x' \in G_M$ için $x = xx'x$ olduğundan, $(m,n,x,p,q)(m',n',x',p',q')(m,n,x,p,q) = (m,n,x,p,q)$ eşitliğinin sağlandığı görülür. Bu durumda, $GBR^*(M;\beta,\gamma;u)$ monoidi terslenebilir regülerdir. □

Önerme 5.2.5: $(m,n,x,p,q) \in GBR^*(M;\beta,\gamma;u)$ olsun. Eğer (m,n,x,p,q) elemanı tamamen regüler ise $m = q$ ve $n = p$ dir.

İspat: $(m,n,x,p,q) \in GBR^*(M;\beta,\gamma;u)$ tamamen regüler bir eleman olsun. O halde, Tanım 2.5.9 dan x', x in bir tersi ve $(m,n,x,p,q)(q,p,x',n,m) = (q,p,x',n,m)(m,n,x,p,q)$ olacak şekilde $(q,p,x',n,m) \in V((m,n,x,p,q))$ vardır. Buradan, $m = q, n = p$ ve $xx' = x'x$ elde edilir. □

Teorem 5.2.6: $M' = \{(m,n,x,n,m) | x \in M, m,n \in \mathbb{N}^0\} \leq GBR^*(M;\beta,\gamma;u)$ alt monoidinin tamamen regüler olması için gerek ve yeter koşul M monoidinin tamamen regüler olmasıdır.

İspat: $M' \leq GBR^*(M;\beta,\gamma;u)$ monoidi tamamen regüler olsun. Bu durumda, her $(m,n,x,n,m) \in GBR^*(M;\beta,\gamma;u)$ için x', x in bir tersi ve

$(m,n,x,n,m)(m,n,x',n,m) = (m,n,x',n,m)(m,n,x,n,m)$

olacak şekilde $(m,n,x,n,m) \in V((m,n,x,n,m))$ vardır. Buradan $xx' = x'x$ elde edilir. Böylece M monoidi tamamen regülerdir.

Tersine, M monoidi tamamen regüler olsun. Bu durumda, $x \in M$ için $xx' = x'x$ olacak şekilde $x' \in V(x)$ vardır. Şimdi her $(m,n,x,n,m) \in GBR^*(M;\beta,\gamma;u)$ için,

$$(m,n,x,n,m)(m,n,x',n,m) = (m,n,x',n,m)(m,n,x,n,m)$$

olacak şekilde $(m,n,x',n,m) \in V((m,n,x,n,m))$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}(m,n,x,n,m)(m,n,x',n,m) &= (m,n-n+n,x\beta^{n-n}x'\beta^{n-n},n-n+n,m)\\ &= (m,n,xx',n,m)\\ (m,n,x',n,m)\ (m,n,x,n,m) &= (m,n-n+n,x'\beta^{n-n}x\beta^{n-n},n-n+n,m)\\ &= (m,n,x'x,n,m)\end{aligned}$$

olup, $xx' = x'x$ sağlandığından M' tamamen regülerdir. □

Teorem 5.2.7: $GBR^*(M;\beta,\gamma;u)$ monoidinin orthodox olması için gerek ve yeter koşul M monoidinin orthodox olmasıdır.

İspat: $GBR^*(M;\beta,\gamma;u)$ monoidi orthodox olsun. Bu durumda, Tanım 2.5.14 ve Sonuç 5.2.3 den M monoidi regülerdir. Diğer taraftan, $GBR^*(M;\beta,\gamma;u)$ nin idempotent elemanlarının oluşturduğu küme

$$E(GBR^*(M;\beta,\gamma;u)) = \{(m,n,e,n,m) | m,n \in \mathbb{N}^0, e \in M, e^2 = e\},$$

$GBR^*(M;\beta,\gamma;u)$ monoidinin bir alt yarıgrubudur. Ayrıca her $e,f \in E(M)$ için $(m,n,e,n,m)(m,n,f,n,m) = (m,n,ef,n,m) \in E(GBR^*(M;\beta,\gamma;u))$ olduğundan, $(ef)^2 = ef$ dir. O halde, M monoidi orthodox monoiddir.

Tersine, M monoidi orthodox olsun. Bu durumda, Tanım 2.5.14 ve Sonuç 5.2.3 den $GBR^*(M;\beta,\gamma;u)$ monoidi regülerdir. Diğer taraftan $E(M)$, M nin bir alt yarıgrubudur.

Şimdi her $(m,n,e,n,m),(m',n',e',n',m') \in E(BR(M,\theta))$ için $(m,n,e,n,m)(m',n',e',n',m')$ çarpımını ele alalım.

1. Durum: Eğer $m = m'$ ise

$$(m,n,e,n,m)(m',n',e',n',m') = \left(m,\mathrm{d},\left(e\beta^{\mathrm{d}-n}\right)\left(e'\beta^{\mathrm{d}-n'}\right),\mathrm{d},m'\right),\ d = \max(n,n')$$

eşitliği elde edilir. M monoidinde idempotent elemanlar değişmeli olduğundan, $\left(e\beta^{\max(n,n')-n}\right)\left(e'\beta^{\max(n,n')-n'}\right) = \left(e'\beta^{\max(n,n')-n'}\right)\left(e\beta^{\max(n,n')-n}\right)$ eşitliği sağlanır. Böylece $\left(e\beta^{\max(n,n')-n}\right)\left(e'\beta^{\max(n,n')-n'}\right) \in E(M)$ olur. O halde, 1. durum için $E(GBR^*(M;\beta,\gamma;u))$, $GBR^*(M;\beta,\gamma;u)$ nin bir alt yarıgrubudur.

2. Durum: Eğer $m < m'$ veya $m > m'$ ise

$$(m,n,e,n,m)(m',n',e',n',m') = \left(m',n',(((u^{-n}(e\gamma)u^{n})\gamma^{m'-m-1})\beta^{n'},e',n',m'\right)$$

veya

$$(m,n,e,n,m)(m',n',e',n',m') = \left(m,n,e\left(\left((u^{-n'}(e'\gamma)u^{n'})\gamma^{m-m'-1}\right)\beta^{n}\right),n,m\right)$$

olduğu görülür. M monoidinde idempotent elemanlar değişmeli olduğundan,

$$\left(\left((u^{-n}(e\gamma)u^{n})\gamma^{m'-m-1}\right)\beta^{n'}\right)e\left(\left((u^{-n'}(e'\gamma)u^{n'})\gamma^{m-m'-1}\right)\beta^{n}\right)$$
$$= e\left(\left((u^{-n'}(e'\gamma)u^{n'})\gamma^{m-m'-1}\right)\beta^{n}\right)\left(\left((u^{-n}(e\gamma)u^{n})\gamma^{m'-m-1}\right)\beta^{n'}\right)$$

eşitliği sağlanır. Böylece,

$$\left(\left((u^{-n}(e\gamma)u^{n})\gamma^{m'-m-1}\right)\beta^{n'}\right)e\left(\left((u^{-n'}(e'\gamma)u^{n'})\gamma^{m-m'-1}\right)\beta^{n}\right) \in E(M)$$

olur. O halde, 2. durum için de $E(GBR^*(M;\beta,\gamma;u))$, $GBR^*(M;\beta,\gamma;u)$ nin bir alt yarıgrubudur. Böylece $GBR^*(M;\beta,\gamma;u)$ orthodox monoiddir. □

5.2.2. k sayıda monoidin direkt çarpımının genelleştirilmiş Bruck-Reilly *-genişlemesi üzerinde bazı özel yarıgrup sınıfları

Bu kısımda k sayıda monoidin direkt çarpımının genelleştirilmiş Bruck-Reilly *-genişlemesinin regüler, terslenebilir regüler, tamamen regüler ve orthodox gibi özel yarıgrup sınıflarına ait olabilmesi için gerek ve yeter koşullar verilmiştir. Bu kısımda yer alan sonuçlar (Oğuz ve Karpuz, 2015c) de yer almaktadır.

Bu alt bölüm boyunca T_i $(1 \leq i \leq k)$ bir monoid olmak üzere,

$$T_1 \times T_2 \times \ldots \times T_k = \{(t_1, t_2, \ldots, t_k) | t_i \in T_i, 1 \leq i \leq k\}$$

kümesi $\times_{i=1}^{k} T_k$ ile gösterilecektir.

Teorem 5.2.8: $GBR^*(\times_{i=1}^{k} T_i ; \beta, \gamma; u)$ monoidinin regüler olması için gerek ve yeterli koşul $\times_{i=1}^{k} T_i$ monoidinin regüler olmasıdır.

İspat: $GBR^*(\times_{i=1}^{k} T_i ; \beta, \gamma; u)$ regüler ve $(t_1, t_2, \ldots, t_k) \in \times_{i=1}^{k} T_i$ olsun. Bu durumda, $m, n, p, q \in \mathbb{N}^0$ için $(m, n, (t_1, t_2, \ldots, t_k), p, q) \in GBR^*(\times_{i=1}^{k} T_i ; \beta, \gamma; u)$ olup,

$$(m, n, (t_1, t_2, \ldots, t_k), p, q) =$$
$$(m, n, (t_1, t_2, \ldots, t_k), p, q)(q, p, (t_1', t_2', \ldots, t_k'), n, m)(m, n, (t_1, t_2, \ldots, t_k), p, q)$$

olacak şekilde $(q, p, (t_1', t_2', \ldots, t_k'), n, m) \in GBR^*(\times_{i=1}^{k} T_i ; \beta, \gamma; u)$ vardır. Yukarıdaki eşitlikten,

$$(t_1, t_2, \ldots, t_k) = (t_1, t_2, \ldots, t_k)(t_1', t_2', \ldots, t_k')(t_1, t_2, \ldots, t_k)$$

olduğu görülür. O halde, $\times_{i=1}^{k} T_i$ monoidi regülerdir.

Tersine, $\times_{i=1}^{k} T_i$ monoidi regüler ve $(m, n, (t_1, t_2, \ldots, t_k), p, q) \in GBR^*(\times_{i=1}^{k} T_i ; \beta, \gamma; u)$ olsun. O halde, $(t_1, t_2, \ldots, t_k) \in \times_{i=1}^{k} T_i$ olup,

$$(t_1, t_2, \ldots, t_k)(t_1', t_2', \ldots, t_k')(t_1, t_2, \ldots, t_k) = (t_1, t_2, \ldots, t_k)$$

olacak şekilde $(t_1', t_2', \ldots, t_k') \in \times_{i=1}^{k} T_i$ vardır. Şimdi $GBR^*(\times_{i=1}^{k} T_i ; \beta, \gamma; u)$ monoidinin regüler olduğunu gösterelim. $q, p, n, m \in \mathbb{N}^0$ olmak üzere, $(q, p, (t_1', t_2', \ldots, t_k'), n, m) \in GBR^*(\times_{i=1}^{k} T_i ; \beta, \gamma; u)$ için,

$$(m, n, (t_1, t_2, \ldots, t_k), p, q)(q, p, (t_1', t_2', \ldots, t_k'), n, m)(m, n, (t_1, t_2, \ldots, t_k), p, q)$$
$$= (m, n - p + p, (t_1, t_2, \ldots, t_k)\beta^{p-p}(t_1', t_2', \ldots, t_k')\beta^{p-p}, n - p + p, m)$$
$$(m, n, (t_1, t_2, \ldots, t_k), p, q)$$
$$= (m, n, (t_1, t_2, \ldots, t_k)(t_1', t_2', \ldots, t_k'), n, m)(m, n, (t_1, t_2, \ldots, t_k), p, q)$$
$$= (m, n - n + n, (t_1, t_2, \ldots, t_k)(t_1', t_2', \ldots, t_k')\beta^{n-n}(t_1, t_2, \ldots, t_k)\beta^{n-n}, p - n + n, q)$$

$= (m, n, (t_1, t_2, \dots, t_k)(t_1', t_2', \dots, t_k')(t_1, t_2, \dots, t_k), p, q)$
$= (m, n, (t_1, t_2, \dots, t_k), p, q)$

eşitliği sağlanır. Dolayısıyla $GBR^*(\times_{i=1}^{k} T_i ; \beta, \gamma; u)$ regülerdir. □

Teorem 5.2.9: $GBR^*(\times_{i=1}^{k} T_i ; \beta, \gamma; u)$ monoidinin terslenebilir regüler olması için gerek ve yeter koşul $\times_{i=1}^{k} T_i$ monoidinin terslenebilir regüler olmasıdır.

İspat: $GBR^*(\times_{i=1}^{k} T_i ; \beta, \gamma; u)$ terslenebilir regüler ve $(t_1, t_2, \dots, t_k) \in \times_{i=1}^{k} T_i$ olsun. O halde, $m, n, p, q \in \mathbb{N}^0$ için, $(m, n, (t_1, t_2, \dots, t_k), p, q) \in GBR^*(\times_{i=1}^{k} T_i ; \beta, \gamma; u)$ olup,

$(m, n, (t_1, t_2, \dots, t_k), p, q) =$
$(m, n, (t_1, t_2, \dots, t_k), p, q)(q, p, (t_1', t_2', \dots, t_k'), n, m)(m, n, (t_1, t_2, \dots, t_k), p, q)$

olacak biçimde $(q, p, (t_1', t_2', \dots, t_k'), n, m) \in G$ vardır. (Burada G, $GBR^*(\times_{i=1}^{k} T_i ; \beta, \gamma; u)$ daki terslenebilir elemanların oluşturduğu grubu göstermektedir.) O halde,

$(m, n, (t_1, t_2, \dots, t_k), p, q)(q, p, (t_1', t_2', \dots, t_k'), n, m)(m, n, (t_1, t_2, \dots, t_k), p, q)$
$= (m, n, (t_1, t_2, \dots, t_k), p, q)$
$\Leftrightarrow (m, n - p + p, (t_1, t_2, \dots, t_k)\beta^{p-p}(t_1', t_2', \dots, t_k')\beta^{p-p}, n - p + p, m)(m, n, (t_1, t_2, \dots, t_k), p, q)$
$= (m, n, (t_1, t_2, \dots, t_k), p, q)$
$\Leftrightarrow (m, n, (t_1, t_2, \dots, t_k)(t_1', t_2', \dots, t_k'), n, m)(m, n, (t_1, t_2, \dots, t_k), p, q)$
$= (m, n, (t_1, t_2, \dots, t_k), p, q)$
$\Leftrightarrow (m, n - n + n, (t_1, t_2, \dots, t_k)(t_1', t_2', \dots, t_k')\beta^{n-n}(t_1, t_2, \dots, t_k)\beta^{n-n}, p - n + n, q)$
$= (m, n, (t_1, t_2, \dots, t_k), p, q)$
$\Leftrightarrow (m, n, (t_1, t_2, \dots, t_k)(t_1', t_2', \dots, t_k')(t_1, t_2, \dots, t_k), p, q) = (m, n, (t_1, t_2, \dots, t_k), p, q)$

elde edilir. Buradan $(t_1, t_2, \dots, t_k)(t_1', t_2', \dots, t_k')(t_1, t_2, \dots, t_k) = (t_1, t_2, \dots, t_k)$ olup, $\times_{i=1}^{k} T_i$ monoidi terslenebilir regülerdir.

Tersine, $\times_{i=1}^{k} T_i$ monoidi terslenebilir regüler ve $(m, n, (t_1, t_2, \dots, t_k), p, q) \in GBR^*(\times_{i=1}^{k} T_i ; \beta, \gamma; u)$ olsun. O halde, $(t_1, t_2, \dots, t_k) \in \times_{i=1}^{k} T_i$ ve $(t_1, t_2, \dots, t_k) = (t_1, t_2, \dots, t_k)(t_1', t_2', \dots, t_k')(t_1, t_2, \dots, t_k)$ olacak şekilde $(t_1', t_2', \dots, t_k') \in G_{\times_{i=1}^{k} T_i}$

vardır. (Burada $G_{\times_{i=1}^{k} T_i}$, $\times_{i=1}^{k} T_i$ nin terslenebilir elemanlarının oluşturduğu grubu göstermektedir.) Şimdi her $(m,n,(t_1,t_2,\dots,t_k),p,q) \in GBR^*(\times_{i=1}^{k} T_i\,;\beta,\gamma;u)$ için

$$(m,n,(t_1,t_2,\dots,t_k),p,q) =$$
$$(m,n,(t_1,t_2,\dots,t_k),p,q)(m',n',({t_1}',{t_2}',\dots,{t_k}'),p',q')(m,n,(t_1,t_2,\dots,t_k),p,q)$$

olacak şekilde $(m',n',({t_1}',{t_2}',\dots,{t_k}'),p',q') \in G$ olduğunu gösterelim. Burada $m' = q$, $n' = p$, $p' = n$ ve $q' = m$ alındığında her $(t_1,t_2,\dots,t_k) \in \times_{i=1}^{k} T_i$ ve $\left({t_1}',{t_2}',\dots,{t_p}'\right) \in G_{\times_{i=1}^{k} T_i}$için,

$$(t_1,t_2,\dots,t_k) = (t_1,t_2,\dots,t_k)({t_1}',{t_2}',\dots,{t_k}')(t_1,t_2,\dots,t_k)$$

olduğundan,

$$(m,n,(t_1,t_2,\dots,t_k),p,q)(q,p,({t_1}',{t_2}',\dots,{t_k}'),n,m)(m,n,(t_1,t_2,\dots,t_k),p,q)$$
$$= (m,n,(t_1,t_2,\dots,t_k),p,q)$$

eşitliğinin sağlandığı görülür. Bu durumda, $GBR^*(\times_{i=1}^{k} T_i\,;\beta,\gamma;u)$ terslenebilir regülerdir. □

Önerme 5.2.10: $(m,n,(t_1,t_2,\dots,t_k),p,q) \in GBR^*(\times_{i=1}^{k} T_i\,;\beta,\gamma;u)$ olsun. Eğer $(m,n,(t_1,t_2,\dots,t_k),p,q)$ elemanı tamamen regüler ise $m = q$ ve $n = p$ dir.

İspat: $(m,n,(t_1,t_2,\dots,t_k),p,q) \in GBR^*(\times_{i=1}^{k} T_i\,;\beta,\gamma;u)$ tamamen regüler bir eleman olsun. O halde, Tanım 2.5.9 dan $({t_1}',{t_2}',\dots,{t_k}'),(t_1,t_2,\dots,t_k)$ in bir tersi ve

$$(m,n,(t_1,t_2,\dots,t_k),p,q)(q,p,({t_1}',{t_2}',\dots,{t_k}'),n,m)$$
$$= (q,p,({t_1}',{t_2}',\dots,{t_k}'),n,m)(m,n,(t_1,t_2,\dots,t_k),p,q)$$

olacak şekilde $(q,p,({t_1}',{t_2}',\dots,{t_k}'),n,m) \in V((m,n,(t_1,t_2,\dots,t_k),p,q))$ vardır. Buradan, $m = q, n = p$ ve $(t_1,t_2,\dots,t_k)({t_1}',{t_2}',\dots,{t_k}') = ({t_1}',{t_2}',\dots,{t_k}')(t_1,t_2,\dots,t_k)$ elde edilir. □

Önerme 5.2.10 dan yararlanılarak aşağıdaki teorem verilmiştir.

Teorem 5.2.11: $M' = \{(m, n, (t_1, t_2, \dots, t_k)n, m) | x \in M, m, n \in \mathbb{N}^0\} \leq GBR^*(\times_{i=1}^{k} T_i; \beta, \gamma; u)$ alt monoidinin tamamen regüler olması için gerek ve yeter koşul $\times_{i=1}^{k} T_i$ monoidinin tamamen regüler olmasıdır.

İspat: $M' \leq GBR^*(\times_{i=1}^{k} T_i; \beta, \gamma; u)$ monoidi tamamen regüler olsun. Bu durumda, her $(m, n, (t_1, t_2, \dots, t_k), n, m) \in GBR^*(\times_{i=1}^{k} T_i; \beta, \gamma; u)$ için $({t_1}', {t_2}', \dots, {t_k}')$, $(t_1, t_2, \dots, t_k)$ in bir tersi ve

$$(m, n, (t_1, t_2, \dots, t_k), n, m)(m, n, ({t_1}', {t_2}', \dots, {t_k}'), n, m)$$
$$= (m, n, ({t_1}', {t_2}', \dots, {t_k}'), n, m)(m, n, (t_1, t_2, \dots, t_k), n, m)$$

olacak şekilde $(m, n, (t_1, t_2, \dots, t_k), n, m) \in V((m, n, (t_1, t_2, \dots, t_k), n, m))$ vardır. Buradan $(t_1, t_2, \dots, t_k)({t_1}', {t_2}', \dots, {t_k}') = ({t_1}', {t_2}', \dots, {t_k}')(t_1, t_2, \dots, t_k)$ elde edilir. Böylece M monoidi tamamen regülerdir.

Tersine, $\times_{i=1}^{k} T_i$ monoidi tamamen regüler olsun. Bu durumda, $(t_1, t_2, \dots, t_k) \in \times_{i=1}^{k} T_i$ için $(t_1, t_2, \dots, t_k)({t_1}', {t_2}', \dots, {t_k}') = ({t_1}', {t_2}', \dots, {t_k}')(t_1, t_2, \dots, t_k)$ olacak şekilde $({t_1}', {t_2}', \dots, {t_k}') \in V((t_1, t_2, \dots, t_k))$ vardır.

Şimdi her $(m, n, (t_1, t_2, \dots, t_k), n, m) \in GBR^*(\times_{i=1}^{k} T_i; \beta, \gamma; u)$ için,

$$(m, n, (t_1, t_2, \dots, t_k), n, m)(m, n, ({t_1}', {t_2}', \dots, {t_k}'), n, m) =$$
$$(m, n, ({t_1}', {t_2}', \dots, {t_k}'), n, m)(m, n, (t_1, t_2, \dots, t_k), n, m)$$

olacak şekilde $(m, n, ({t_1}', {t_2}', \dots, {t_k}'), n, m) \in V(m, n, (t_1, t_2, \dots, t_k), n, m)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}(m, n, (t_1, t_2, \dots, t_k), n, m)&(m, n, ({t_1}', {t_2}', \dots, {t_k}'), n, m)\\ &= (m, n - n + n, (t_1, t_2, \dots, t_k)\beta^{n-n}x'\beta^{n-n}, n - n + n, m)\\ &= (m, n, (t_1, t_2, \dots, t_k)({t_1}', {t_2}', \dots, {t_k}'), n, m)\\ (m, n, ({t_1}', {t_2}', \dots, {t_k}'), n, m)&\ (m, n, (t_1, t_2, \dots, t_k), n, m)\\ &= (m, n - n + n, ({t_1}', {t_2}', \dots, {t_k}')\beta^{n-n}(t_1, t_2, \dots, t_k)\beta^{n-n}, n - n + n, m\\ &= (m, n, ({t_1}', {t_2}', \dots, {t_k}')(t_1, t_2, \dots, t_k), n, m)\end{aligned}$$

olup, $(t_1, t_2, \dots, t_k)({t_1}', {t_2}', \dots, {t_k}') = ({t_1}', {t_2}', \dots, {t_k}')(t_1, t_2, \dots, t_k)$ sağlandığından M' monoidi tamamen regülerdir. □

Teorem 5.2.12: $GBR^*(\times_{i=1}^{k} T_i;\beta,\gamma;u)$ monoidinin orthodox olması için gerek ve yeter koşul $\times_{i=1}^{k} T_i$ monoidinin orthodox olmasıdır.

İspat: $GBR^*(\times_{i=1}^{k} T_i;\beta,\gamma;u)$ monoidi orthodox olsun. Bu durumda, Tanım 2.5.14 ve Sonuç 2.5.3 den $\times_{i=1}^{k} T_i$ monoidi regülerdir. Diğer taraftan,

$$E\big(GBR^*(\times_{i=1}^{k} T_i;\beta,\gamma;u)\big) =$$
$$\big\{(m,n,(e_1,e_2,\dots,e_k),n,m)\big|m,n\in\mathbb{N}^0,(e_1,e_2,\dots,e_k)\in\times_{i=1}^{k} T_i,(e_1,e_2,\dots,e_k)^2=(e_1,e_2,\dots,e_k)\big\},$$

$GBR^*(\times_{i=1}^{k} T_i;\beta,\gamma;u)$ nin bir alt yarıgrubudur. Ayrıca her $(e_1,e_2,\dots,e_k),f\in E(\times_{i=1}^{k} T_i)$ için $(m,n,(e_1,e_2,\dots,e_k),n,m)(m,n,(f_1,f_2,\dots,f_k),n,m)=(m,n,(e_1,e_2,\dots,e_k)(f_1,f_2,\dots,f_k),n,m)$ elemanı $GBR^*(\times_{i=1}^{k} T_i;\beta,\gamma;u)$ da bir idempotent eleman olduğundan, $((e_1,e_2,\dots,e_k)(f_1,f_2,\dots,f_k))^2=(e_1,e_2,\dots,e_k)(f_1,f_2,\dots,f_k)$ dir. O halde, $\times_{i=1}^{k} T_i$ monoidi orthodox monoiddir.

Tersine, $\times_{i=1}^{k} T_i$ monoidi orthodox olsun. Bu durumda, Tanım 2.5.14 ve Sonuç 2.5.3 den $GBR^*(\times_{i=1}^{k} T_i;\beta,\gamma;u)$ regülerdir. Diğer taraftan $E(\times_{i=1}^{k} T_i)$, $\times_{i=1}^{k} T_i$ nin bir alt yarıgrubudur. Şimdi her $(m,n,(e_1,e_2,\dots,e_k),n,m),(m',n',(e_1',e_2',\dots,e_k'),n',m')\in E(BR\big(\times_{i=1}^{k} T_i,\theta\big))$ için, $(m,n,e,n,m)(m',n',e',n',m')$ çarpımını ele alalım.

1. **Durum:** Eğer $m=m'$ ise

$$(m,n,(e_1,e_2,\dots,e_k),n,m)(m',n',(e_1',e_2',\dots,e_k'),n',m')$$
$$=\big(m,\mathrm{d},\big((e_1,e_2,\dots,e_k)\beta^{\mathrm{d}-n}\big)\big((e_1',e_2',\dots,e_k')\beta^{\mathrm{d}-n'}\big),\mathrm{d},m'\big),\qquad d=\max(n,n')$$

dir. $\times_{i=1}^{k} T_i$ monoidinde idempotent elemanlar değişmeli olduğundan,

$$\big((e_1,e_2,\dots,e_k)\beta^{\max(n,n')-n}\big)\big((e_1',e_2',\dots,e_k')\beta^{\max(n,n')-n'}\big)=$$
$$\big((e_1',e_2',\dots,e_k')\beta^{\max(n,n')-n'}\big)\big((e_1,e_2,\dots,e_k)\beta^{\max(n,n')-n}\big)$$

eşitliği sağlanır. Böylece $\big((e_1,e_2,\dots,e_k)\beta^{\max(n,n')-n}\big)\big((e_1',e_2',\dots,e_k')\beta^{\max(n,n')-n'}\big)\in E(\times_{i=1}^{k} T_i)$ olur. O halde, 1. durum için $E\big(GBR^*(\times_{i=1}^{k} T_i;\beta,\gamma;u)\big)$ yarıgrubu $GBR^*(\times_{i=1}^{k} T_i;\beta,\gamma;u)$ nin bir alt yarıgrubudur.

2. Durum: Eğer $m<m'$ veya $m>m'$ ise

$$(m,n,(e_1,e_2,\dots,e_k),n,m)(m',n',(e_1',e_2',\dots,e_k'),n',m')$$
$$=\left(m',n',(((u^{-n}((e_1,e_2,\dots,e_k)\gamma)u^n)\gamma^{m'-m-1})\beta^{n'}(e_1',e_2',\dots,e_k'),n',m'\right)$$

veya

$$(m,n,(e_1,e_2,\dots,e_k),n,m)(m',n',(e_1',e_2',\dots,e_k'),n',m')$$
$$=\left(m,n,(e_1,e_2,\dots,e_k)\left(\left(\left(u^{-n'}((e_1',e_2',\dots,e_k')\gamma)u^{n'}\right)\gamma^{m-m'-1}\right)\beta^n\right),n,m\right)$$

eşitlikleri sağlanır. $\times_{i=1}^{k} T_i$ monoidinde idempotent elemanlar değişmeli olduğundan,

$$\left(\left(\left(u^{-n}((e_1,e_2,\dots,e_k)\gamma)u^n\right)\gamma^{m'-m-1}\right)\beta^{n'}\right)(e_1,e_2,\dots,e_k)\left(\left(\left(\left(u^{-n'}((e_1',e_2',\dots,e_k')\gamma)u^{n'}\right)\gamma^{m-m'-1}\right)\beta^n\right)\right.$$
$$=(e_1,e_2,\dots,e_k)\left(\left(\left(\left(u^{-n'}((e_1',e_2',\dots,e_k')\gamma)u^{n'}\right)\gamma^{m-m'-1}\right)\beta^n\right)\left(\left(\left(u^{-n}((e_1,e_2,\dots,e_k)\gamma)u^n\right)\gamma^{m'-m-1}\right)\beta^{n'}\right)\right.$$

eşitliği sağlanır. Böylece,

$$\left(\left(\left(u^{-n}((e_1,e_2,\dots,e_k)\gamma)u^n\right)\gamma^{m'-m-1}\right)\beta^{n'}\right)(e_1,e_2,\dots,e_k)\left(\left(\left(\left(u^{-n'}((e_1',e_2',\dots,e_k')\gamma)u^{n'}\right)\gamma^{m-m'-1}\right)\beta^n\right)\right.$$
$$\in E(\times_{i=1}^{k} T_i)$$

olur. O halde, 2. durum için de $E\left(GBR^*(\times_{i=1}^{k} T_i;\beta,\gamma;u)\right)$, $GBR^*(\times_{i=1}^{k} T_i;\beta,\gamma;u)$ nin bir alt yarıgrubudur. Böylece $GBR^*(\times_{i=1}^{k} T_i;\beta,\gamma;u)$ orthodox monoiddir. □

5.3. Genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- Genişlemesi Üzerinde Kongrüanslar

Bu alt bölümde monoidlerin genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemesi üzerinde grup kongrüans, anonim kongrüans ve çapraz kongrüans olmak üzere, üç tip kongrüans karakterize edilmiştir. Bu alt bölümde elde edilen sonuçlar (Oğuz ve Karpuz, 2015a) de yer almaktadır.

Tanım 5.3.1: M monoidinin genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemesi $S=GBR^*(M;\beta,\gamma;u)$ olsun ve τ, S üzerinde bir kongrüans olmak üzere, τ_C ile τ nun

$$C=\{(m,n,1,p,q)|m,n,p,q\in\mathbb{N}^0\}$$

kümesine kısıtlanışı gösterilsin. τ_M ile de τ kongrüansının M monoidine kısıtlanışı yani τ nun

$$\{(0,0,a,0,0)|a \in M\}$$

kümesine kısıtlanışı gösterilsin. Bu durumda, $a,b \in M$ olmak üzere, $a\tau_M b$ olması için gerek ve yeter koşul $(0,0,a,0,0)\tau(0,0,b,0,0)$ olmasıdır.

Tanım 5.3.2: M bir monoid ve Γ, M üzerinde bir kongrüans olsun. Eğer her $a,b \in M$ için a ve b Γ bağlantılı iken $a\beta$ ve $b\beta$ da Γ bağlantılı ve $a\gamma$ ve $b\gamma$ da Γ bağlantılı oluyorsa bu durumda, Γ kongrüansına ***$\beta,\gamma-$ kabul edilebilir kongrüans*** denir.

Teorem 5.3.3: $\tau, S = GBR^*(M;\beta,\gamma;u)$ üzerinde bir kongrüans olsun. O halde, τ_M bir $\beta,\gamma-$kabul edilebilir kongrüanstır. Tersine, M monoidi üzerinde tanımlanan her $\beta,\gamma-$ kabul edilebilir Γ kongrüansı için S üzerinde

$$(m,n,a,p,q)\Gamma^S(m',n',a',p',q') \Leftrightarrow m=m',\ n=n',\ p=p' \text{ ve } a\Gamma a'$$

şeklinde tanımlanan Γ^S bağıntısı bir kongrüanstır. Aynı zamanda $(\Gamma^S)_M = \Gamma$ dır.

İspat: $a\tau_M a'$ olsun. O halde, τ_M nin tanımından

$$(0,0,a,0,0)\tau(0,0,a',0,0)$$

olduğu görülür. Burada her iki taraf sağdan $(0,1,1,1,0)$ elemanı ile çarpılırsa,

$$\big(0,1,a_\beta,1,0\big) = (0,0,a,0,0)(0,1,1,1,0)\tau(0,0,a',0,0)(0,1,1,1,0)$$

elde edilir. Elde edilen bu ifadeler soldan $(0,0,1,1,0)$ ile ve sağdan $(0,1,1,0,0)$ elemanları ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned}(0,0,a\beta,0,0) &= (0,0,1,1,0)(0,1,a\beta,1,0)(0,1,1,0,0)\tau(0,0,1,1,0)(0,1,a'\beta,1,0)(0,1,1,0,0)\\ &= (0,0,a'\beta,0,0)\end{aligned}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla $a\beta\tau_M a'\beta$ dır. Benzer şekilde $a\gamma\tau_M a'\gamma$ olduğu gösterilir. Böylece $\tau_M, \beta, \gamma -$ kabul edilebilir kongrüanstır.

Tersine, eğer Γ, M üzerinde $\beta, \gamma -$kabul edilebilir kongrüans ise Γ^S nin bir denklik bağıntısı olduğu açıktır. Ayrıca $(m,n,a,p,q)\Gamma^S(m,n,a',p,q)$ iken her iki elemanı da sağdan (m'',n'',a'',p'',q'') ile çarpıldığında,

$$(m,n,a,p,q)(m'',n'',a'',p'',q'') =$$

$$\begin{cases} \left(m, n-p+\max(p,n''), \left(a\beta^{\max(p,n'')-p}\right)\left(a''\beta^{\max(p,n'')-n''}\right), p''-n''+\max(p,n''), q''\right) & eğer\ q=m'' \\ \left(m,n,a\left(\left(u^{-n''}(a''\gamma)u^{p''}\right)\gamma^{q-m''-1}\right)\beta^{p}, p, q''-m''+q\right) & eğer\ q>m'' \\ \left(m-q+m'', n'', \left(\left((u^{-n}(a\gamma)u^{p})\gamma^{m''-q-1}\right)\beta^{n''}\right)a'', p'', q''\right) & eğer\ q<m'' \end{cases}$$

$$\Gamma^S \begin{cases} \left(m, n-p+\max(p,n''), \left(a'\beta^{\max(p,n'')-p}\right)\left(a''\beta^{\max(p,n'')-n''}\right), p''-n''+\max(p,n''), q''\right) & eğer\ q=m'' \\ \left(m,n,a'\left(\left(u^{-n''}(a''\gamma)u^{p''}\right)\gamma^{q-m''-1}\right)\beta^{p}, p, q''-m''+q\right) & eğer\ q>m'' \\ \left(m-q+m'', n'', \left(\left((u^{-n}(a'\gamma)u^{p})\gamma^{m''-q-1}\right)\beta^{n''}\right)a'', p'', q''\right) & eğer\ q<m'' \end{cases}$$

$$= (m,n,a',p,q)(m'',n'',a'',p'',q'')$$

elde edilir. Bu durumda, Γ^S bir sağ kongrüanstır. Benzer şekilde sol kongrüans olduğu gösterilir. Dolayısıyla Γ^S bir kongrüanstır. Sonuç olarak eğer $a\Gamma^S{}_M a'$ ise $(0,0,a,0,0)\Gamma^S(0,0,a',0,0)$ olduğu görülür. O halde, $a\Gamma a'$ elde edilir.

Tersi açıktır. □

Teorem 5.3.4:

i) $\varphi: GBR^*(M;\beta,\gamma;u) \to GBR^*(M;\beta,\gamma;u)$ dönüşümü

$$(m,n,a,p,q)\varphi = \begin{cases} (m,n+1,a\beta,p+1,q) & (5.1)\ 1.\text{Durum için} \\ (m+1,n,a\beta\gamma,p,q+1) & (5.1)\ 2.\text{ve } 3.\text{Durumlar için} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, φ bir homomorfizmadır.

ii) $\tau,\ S = GBR^*(M;\beta,\gamma;u)$ üzerinde bir grup kongrüans olsun. O halde, her $(m,n,a,p,q) \in S$ için $(m,n,a,p,q)\tau(m,n,a,p,q)\varphi$ dir. ((5.1) 1. durum için)

İspat: i) İspatı açıktır.

ii) Her $(m,n,a,p,q) \in S$ için,

$$(m,n,a,p,q) = (m,n,a,p,q)(0,0,1,0,0)\tau(m,n,a,p,q)(q,p+1,1,p+1,q)$$
$$= (m,n+1,a\beta,p+1,q)$$

elde edilir. O halde $(m,n,a,p,q)\tau(m,n,a,p,q)\varphi$ dir. □

Şimdi bir M monoidinin genelleştirilmiş Bruck-Reilly *-genişlemesi $S = GBR^*(M;\beta,\gamma;u)$ üzerindeki kongrüansların ana sınıflandırmasını verelim.

Teorem 5.3.5: $S = GBR^*(M;\beta,\gamma;u)$ üzerinde tanımlı bir τ kongrüansı aşağıdaki koşullardan birini sağlar.

i) (Grup kongrüans) τ nun bir grup kongrüans olması için gerek ve yeter koşul τ_C nin $C = \{(m,n,1,p,q)|m,n,p,q \in \mathbb{N}\}$ üzerinde bir grup kongrüans olmasıdır.

ii) (Anonim kongrüans) $(m,n,a,p,q)\tau(m',n',a',p',q')$ olması için gerek ve yeter koşul $m = m', n = n', p = p', q = q'$ ve $a\tau_M a'$ olması yani $\tau = (\tau_M)^S$ olmasıdır.

iii) (Çapraz kongrüans) τ bir grup kongrüans değildir ve S nin $(m,n,a,p,q)\tau(m',n',a',p',q')$, $m = m'$, $q = q'$ ve $n \neq n'$ veya $p \neq p'$ koşullarını sağlayan en az bir çift elemanı vardır. Bu durumda, her çift için

$n = n' + 1, p = p' + 1$ ve $a\tau_M a'\beta$
veya
$n' = n + 1, p' = p + 1$ ve $a'\tau_M a\beta$

sağlanır.

İspat: i) Eğer τ, S üzerinde bir grup kongrüans ise bu durumda, τ_C nin de C üzerinde grup kongrüans olduğu açıktır. Tersine, τ_C, C üzerinde bir grup kongrüans olsun. Teorem 5.3.4 ii) den her $(m,n,e,n,m) \in E(S)$ için,

$(m,n,e,n,m)\tau(m,n,e,n,m)\varphi = (m,n+1,1,n+1,m)\tau(0,0,1,0,0)$

dir. Dolayısıyla tüm idempotent elemanlar τ bağlantılıdır. Her $(m,n,a,p,q) \in S$ için

$(m,n,a,p,q)(q,p+1,(a\beta)^{-1},p+1,q) = (m,n+1,1,p+1,q)$

olduğundan, S/τ bir gruptur yani τ bir grup kongrüanstır.

ii) τ kongrüansının S üzerinde grup kongrüans olmadığını kabul edelim. Bu durumda, τ_C de C üzerinde grup kongrüans değildir. Şimdi her $(m,n,a,p,q),(m',n',a',p',q') \in S$ için $(m,n,a,p,q)\tau(m',n',a',p',q')$ durumunu ele

alalım. Burada her iki eleman da sağdan $(k,k,1,k,k)$ $(k > max\{p,p'\})$ ile çarpılırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

● $q = k\ ve\ q' = k\ için,$

$\left(m, n-p+\mathrm{k}, \left(a\beta^{\mathrm{k}-p}\right), k, k\right)\tau\left(m', n'-p'+k', \left(a'\beta^{k-p'}\right), k, k\right)$

● $q > k\ ve\ q' > k\ için,$

$(m,n,a,p,q)\tau(m',n',a',p',q')$

● $q < k\ ve\ q' < k\ için,$

$(m-q+k, (((u^{-n}(a\gamma)u^{p})\gamma^{k-q-1})\beta^{n}, k, k)\tau\ (m'-q'+k, \left(\left(\left(u^{-n'}(a'\gamma)u^{p'}\right)\gamma^{k-q'-1}\right)\beta^{n'}, k, k\right).$

Buradan $m-q = m'-q'$ ve $n-p = n'-p'$ veya $m-m' = q-q'$ ve $n-n' = p-p'$ olduğu görülür. O halde, $m = m'$ olması için gerek ve yeter koşul $q = q'$ olmasıdır ve $n = n'$ olması için gerek ve yeter koşul $p = p'$ eşitliğinin sağlanmasıdır. Eğer $n = n'$ ve $m = m'$ ise bu durumda,

$(0,0,a,0,0)$
$= (0,0,1,n,m)(m,n,a,p,q)(q,p,1,0,0)\tau(0,0,1,n,m)(m',n',a',p',q')(q,p,1,0,0)$
$= (0,0,a',0,0)$

olması için gerek ve yeter koşul $(m,n,a,p,q)\tau(m',n',a',p',q')$ olmasıdır.

iii) τ kongrüansının grup kongrüans olmadığını kabul edelim. O halde $(m,n,a,p,q),(m',n',a',p',q') \in S$ için $m = m', q = q'$ ve $n \neq n'$ veya $p \neq p'$ olduğu sonucu çıkar. Bu durumda, $n > n'$ ve $p > p'$ olduğunu kabul edebiliriz. $h = n-n' = p-p'$ olsun. O halde,

$(0,0,a,0,0)$
$= (0,0,1,n,m)(m,n,a,p,q)(q,p,1,0,0)\tau(0,0,1,n,m)(m',n',a',p',q')(q,p,1,0,0)$
$= (0,0,a'\beta^{h},0,0)(h = n-n')$

olur. Buradan,

$(0,h,a,h,0)\tau(0,h,a'\beta^h,h,0) = (0,h,1,h,0)(0,0,a',0,0)$

elde edilir. Ayrıca $m = m', q = q', h = n - n' = p - p'$ olmak üzere,

$(0,0,a',0,0)$
$= (0,0,1,n',m')(m',n',a',p',q')(q',p',1,0,0)\tau(0,0,1,n',m')(m,n,a,p,q)(q',p',1,0,0)$
$= (0,h,a,h,0)$

dir. Böylece $(0,0,a',0,0)\tau(0,h,1,h,0)(0,0,a',0,0)$ elde edilir. Eğer bu elemanlar sağdan $(0,1,(a'\beta)^{-1},1,0)$ ile çarpılırsa, $(0,1,1,1,0)\tau(0,h,1,h,0)$ olduğu görülür. Dolayısıyla $h = 1$ dir. Böylece $n = n' + 1$ ve $p = p' + 1$ elde edilir. $(0,0,a,0,0)\tau(0,0,a'\beta^h,0,0)$ olduğu için $a\tau_M a'\beta$ dir. Benzer şekilde $n' > n$ ve $p' > p$ olduğu kabul edilirse $n' = n + 1, p' = p + 1$ ve $a'\tau_M a\beta$ elde edilir. □

5.4. Genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- Genişlemesi Üzerinde Sonlu Üreteçlilik ve Sonlu Sunumluluk

Ateş ve ark. (2011) de monoidlerin graf çarpımı, Schützenberger çarpımı ve Rees matris yarıgrupları için Gröbner-Shirshov tabanlarını vermişlerdir ve elemanların yapılarının normal formunu elde etmişlerdir. Sonrasında Kocapınar ve ark. (2012) de ise bir monoidin genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemesinin sunuşunu elde etmişler ve bu sunuşu kullanarak bu monoidin Gröbner-Shirshov tabanını oluşturmuşlardır. Dolayısıyla elemanların yapısının normal formunu elde etmişlerdir. Aşağıda verilen Lemma 5.4.1, Teorem 5.4.2 ve Sonuç 5.4.3 bu çalışmada yer almaktadır.

Lemma 5.4.1 (Kocapınar ve ark., 2012): M bir monoid ve A, M monoidinin bir üreteç kümesi olsun. Bu durumda,
$\{(0,0,x,0,0)|x \in A\} \cup (0,1,1_M,0,0) \cup (1,0,1_M,0,0) \cup (0,0,1_M,1,0) \cup (0,0,1_M,0,1)$
kümesi M monoidinin genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemesi $GBR^*(M;\beta,\gamma;u)$ için bir üreteç kümesidir.

İspat: $v, v_1, v_2 \in M$ ve $m_i, n_i, p_i, q_i \in \mathbb{N}^0$ $(1 \le i \le 2)$ olmak üzere,

$(0,0,v_1,0,0)(0,0,v_2,0,0) = (0,0,v_1v_2,0,0)$,
$(m_1,0,1_M,0,0)(m_2,0,1_M,0,0) = (m_1 + m_2,0,1_M,0,0)$,

$(0, n_1, 1_M, 0,0)(0, n_2, 1_M, 0,0) = (0, n_1 + n_2, 1_M, 0,0),$
$(0,0, 1_M, p_1, 0)(0,0, 1_M p_2, 0) = (0,0, 1_M p_1 + p_2, 0),$
$(0,0, 1_M, 0, q_1)(0,0, 1_M, 0, q_2) = (0,0, 1_M, 0, q_1 + q_2)$
$(m_1, 0, 1_M, 0,0)(0, n_2, 1_M, 0,0) = (m_1, n_2, 1_M, 0,0),$
$(0,0, 1_M, p_1, 0)(0,0, 1_M, 0, q_2) = (0,0, 1_M, p_1, q_2)$
$(m_1, n_1, 1_M, 0,0)(0,0, v, 0,0)(0,0, 1_M, p_1, q_1) = (m_1, n_1, v, p_1, q_1)$

eşitliklerinden $GBR^*(M; \beta, \gamma; u)$ nin üreteç kümesinin

$$\{(0,0, x, 0,0) | x \in A\} \cup (0,1, 1_M, 0,0) \cup (1,0, 1_M, 0,0) \cup (0,0, 1_M, 1,0) \cup (0,0, 1_M, 0,1)$$

olduğu görülür. □

Teorem 5.4.2 (Kocapınar ve ark., 2012): M, sunuşu $< X \mid R >$ olan bir monoid ve $\beta, \gamma: M \to H_1^*$ şeklinde tanımlı birer homomorfizma olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} &< X, y, z, b, c \mid R, && (1) \\ &\quad yz = 1, bc = 1, && (2) \\ &\quad yx = (x\gamma)y, xz = z(x\gamma), && (3) \\ &\quad bx = (x\beta)b, xc = c(x\beta), && (4) \\ &\quad yb = uy, yc = u^{-1}y, && (5) \\ &\quad bz = zu, cz = zu^{-1} > && (6) \end{aligned} \qquad (5.2)$$

$GBR^*(M; \beta, \gamma; u)$ nin bir monoid sunuşudur.

İspat: $Y = X \cup \{y, z, b, c\}$ olmak üzere, $\varphi: Y^* \to GBR^*(M; \beta, \gamma; u)$ dönüşümü

$x\varphi = (0,0, x, 0,0),\ y\varphi = (0,0, 1_M, 0,1),\ z\varphi = (1,0, 1_M, 0,0),$
$c\varphi = (0,1, 1_M, 0,0),\ b\varphi = (0,0, 1_M, 1,0)$

şeklinde tanımlı bir homomorfizma olsun. Lemma 5.4.1 den φ bir epimorfizmdir. Şimdi (5.2) sunuşunda verilen (1)-(6) bağıntılarının $GBR^*(M; \beta, \gamma; u)$ monoidi üzerinde sağlandığını gösterelim. R kümesindeki bağıntılar M monoidi üzerinde sağlandığından, Lemma 5.4.1 den $GBR^*(M; \beta, \gamma; u)$ üzerinde de sağlanacaktır. $x \in X$ olmak üzere, (5.2)

sunuşunda R nin dışında kalan (2)-(6) bağıntılarının sağlandığı aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

(2): $(0,0,1_M,1,0)(0,1,1_M,0,0) = (0,0,1_M,0,0)$,
$(0,0,1_M,0,1)(1,0,1_M,0,0) = (0,0,1_M,0,0)$;
(3): $(0,0,1_M,0,1)(0,0,x,0,0) = (0,0,x\gamma,0,1) = (0,0,x\gamma,0,0)(0,0,1_M,0,1)$,
$(0,0,x,0,0)(1,0,1_M,0,0) = (1,0,x\gamma,0,0) = (1,0,1_M,0,0)(0,0,x\gamma,0,0)$;
(4): $(0,0,1_M,1,0)(0,0,x,0,0) = (0,0,x\beta,1,0) = (0,0,x\beta,0,0)(0,0,1_M,1,0)$,
$(0,0,x,0,0)(0,1,1_M,0,0) = (01,x\beta,0,0) = (0,1,1_M,0,0)(0,0,x\beta,1,0)$;
(5): $(0,0,1_M,0,1)(0,0,1_M,1,0) = (0,0,u,0,1) = (0,0,u,0,0)(0,0,1_M,0,1)$,
$(0,0,1_M,0,1)(0,1,1_M,0,0) = (0,0,u^{-1},0,1) = (0,0,u^{-1},0,0)(0,0,1_M,0,1)$;
(6): $(0,0,1_M,1,0)(1,0,1_M,0,0) = (1,0,u,0,0) = (1,0,1_M,0,0)(0,0,u,0,0)$,
$(0,1,1_M,0,0)(1,0,1_M,0,0) = (1,0,u^{-1},0,0) = (1,0,1_M,0,0) = (0,0,u^{-1},0,0)$.

Böylece φ dönüşümü (5.2) sunuşunda (1)-(6) ile tanımlanan M' monoidininden $GBR^*(M;\beta,\gamma;u)$ ya tanımlanan bir $\bar{\varphi}$ epimorfizmasına indirgenir.

Bir w kelimesinin uzunluğu $|w|$ ile gösterilsin. Şimdi $m,n,p,q \in \mathbb{N}^0$, $v \in X^*$ ve $f: GBR^*(M;\beta,\gamma;u) \to Y^*$ şeklinde tanımlı bir dönüşüm olmak üzere, M' monoidinde boştan farklı her $w \in Y^*$ kelimesinin $f(m,n,v,p,q) = z^m c^n v b^p y^q$ kelime formuna eşit olduğunu gösterelim. Eğer $x \in X$ veya $w = y = f(0,0,1_M,0,1)$ veya $w = z = f(1,0,1_M,0,0)$ veya $w = c = f(0,1,1_M,0,0)$ veya $w = b = f(0,0,1_M,1,0)$ için $|w| = 1$ ise $w = x = f(0,0,x,0,0)$ sağlanır. Tümevarım yöntemiyle uzunluğu k dan daha küçük olan her kelimenin $f(m,n,v,p,q)$ kelime formuna indirgenebildiğini kabul edelim ve $|w| = k$ olsun. Bu durumda, w kelimesi $f(m,n,v,p,q)x$ $(x \in X)$ veya $f(m,n,v,p,q)y$ veya $f(m,n,v,p,q)c$ veya $f(m,n,v,p,q)b$ veya $f(m,n,v,p,q)z$ formunda yazılabilir. O halde,

$f(m,n,v,p,q)x = z^m c^n v b^p y^q x = z^m c^n v\big((x\gamma^q)\beta^p\big)b^p y^q = f\big(m,n,v\big((x\gamma^q)\beta^p\big),p,q\big)$;
$f(m,n,v,p,q)y = z^m c^n v b^p y^q y = z^m c^n v b^p y^{q+1} = f(m,n,v,p,q+1)$;
$f(m,n,v,p,q)c = z^m c^n v b^p y^q c = \begin{cases} f\big(m,n,v\big((u^{-1}\gamma^{q-1})\beta^p\big),p,q\big) & eğer\ q \geq 1\ ise \\ f(m,n,v,p-1,0) & eğer\ q = 0, p \geq 1\ ise \\ f(m,n+1,v\beta,0,0) & eğer\ q = p = 0 \end{cases}$

$$f(m,n,v,p,q)b = z^m c^n v b^p y^q b = \begin{cases} f\big(m,n,v\big((u\gamma^{q-1})\beta^p\big),p,q\big) & eğer\ q \geq 1\ ise \\ f(m,n,v,p+1,0) & eğer\ q = 0 \end{cases}$$

$$f(m,n,v,p,q)z = z^m c^n v b^p y^q z = \begin{cases} f(m,n,v,p,q-1) & eğer\ q \geq 1\ ise \\ f(m+1,0,u^{-n}(v\gamma)u^p,0,0) & eğer\ q = 0 \end{cases}$$

elde edilir. Son olarak $\bar{\varphi}$ dönüşümünün bire-bir olduğunu gösterelim. Eğer $\big(f(m_1,n_1,v_1,p_1,q_1)\big)\varphi = \big(f(m_2,n_2,v_2,p_2,q_2)\big)\varphi$ ise $(z^{m_1}c^{n_1}v_1b^{p_1}y^{q_1})\varphi = (z^{m_2}c^{n_2}v_2b^{p_2}y^{q_2})\varphi$ eşitliği sağlanır ve böylece $v_1, v_2 \in X^*$ ve $m_i, n_i, p_i, q_i \in \mathbb{N}^0$ $(1 \leq i \leq 2)$ olmak üzere, $(m_1,n_1,v_1,p_1,q_1) = (m_2,n_2,v_2,p_2,q_2)$ eşitliği elde edilir. Bu durumda, $v_1 = v_2$ M de sağlanır ve $m_1 = m_2$, $n_1 = n_2$, $p_1 = p_2$, $q_1 = q_2$ dir. $GBR^*(M;\beta,\gamma;u)$ nin sunuşu R bağıntı kümesini içerdiğinden $v_1 = v_2$, M' monoidinde de sağlanır. Dolayısıyla $z^{m_1}c^{n_1}v_1b^{p_1}y^{q_1} = z^{m_2}c^{n_2}v_2b^{p_2}y^{q_2}$, M' monoidinde sağlanır. Böylece $\bar{\varphi}$ bire-birdir ve dolayısıyla izomorfizma olduğu gösterilmiş olur. □

Sonuç 5.4.3 (Kocapınar ve ark., 2012): $v \in X^*$ olmak üzere,

$$y^m v = (v\gamma^m)y^m,\ vz^m = z^m(v\gamma^m),\ b^n v = (v\beta^n)b^n,\ vc^n = c^n(v\beta^n),$$
$$y^m b^n = (u\gamma^{m-1})^n y^m,\ y^m c^n = (u^{-1}\gamma^{m-1})^n y^m,$$
$$b^n z^m = z^m(u\gamma^{m-1})^n,\ c^n z^m = z^m(u^{-1}\gamma^{m-1})^n$$

bağıntıları $m,n \in \mathbb{N}^0$ için $GBR^*(M;\beta,\gamma;u)$ de sağlanır. Bunun bir sonucu olarak her $w \in (X \cup \{y,z,b,c\})^*$ kelimesi $GBR^*(M;\beta,\gamma;u)$ de $v \in X^*$ ve $m,n,p,q \in \mathbb{N}^0$ olmak üzere, $z^m c^n v b^p y^q$ formundaki bir kelimeye eşittir.

Not 5.4.4: Teorem 5.4.2 de verilen bir M monoidinin genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemesi $GBR^*(M;\beta,\gamma;u)$ nin sunuşu ve Tanım 5.1.1 yardımıyla aşağıda verilen özelliklerin sağlandığını görmek mümkündür.

(GBR1) $M \cong \{0\} \times \{0\} \times M \times \{0\} \times \{0\}$

(GBR2) $U\big(GBR^*(M;\beta,\gamma;u)\big) = \{0\} \times \{0\} \times U(M) \times \{0\} \times \{0\} \cong U(M)$

5.4.1. Bir grubun genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemesinin sonlu üreteçliliği ve sonlu sunumluluğu

Bu alt bölümde yer alan sonuçlar (Oğuz ve Karpuz, 2015b) de yer almaktadır.

Bir M monoidi sonlu sunumlu ise M nin genelleştirilmiş Bruck-Reilly *-genişlemesi $GBR^*(M;\beta,\gamma;u)$ nin de sonlu sunumlu olduğu (5.2) de verilen

bağıntılardan açıktır. Tersinin her zaman doğru olmadığına dair aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 5.4.5: G, sunuşu $\left\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \;\middle|\; {x_1}^{2^i}{x_2}^{2^i} = {x_3}^{2^i}{x_4}^{2^i} \right\rangle$ olan bir grup olsun. Bu ise $\left\{ {x_1}^{2^i}{x_2}^{2^i} \;\middle|\; i \geq 0 \right\}$ tarafından üretilen $< x_1, x_2| >$ ve $< x_3, x_4| >$ serbest alt gruplarının birleştirilmiş serbest çarpımıdır. Verilen üreteç kümesi Nielsen indirgenmiş olduğu için bu altgrup sonsuz ranklıdır. Böylece G sonlu sunumlu değildir. $\beta, \gamma: G \to {H_1}^*$, $x_j \mapsto {x_j}^2$ $(j = 1,2,3,4)$, G grubu üzerinde birer homomorfizma olmak üzere, (5.2) sunuşuna göre genelleştirilmiş Bruck-Reilly *-genişlemesinin monoid sunuşu

$$< x_1, x_2, x_3, x_4, {x_1}', {x_2}', {x_3}', {x_4}', y, z, b, c| \; x_j {x_j}' = {x_j}' x_j = 1, {x_1}^{2^i}{x_2}^{2^i} = {x_3}^{2^i}{x_4}^{2^i},$$
$$yz = 1, bc = 1,$$
$$bx_j = {x_j}^2 b, x_j c = c{x_j}^2, x_j z = z{x_j}^2, yx_j = {x_j}^2 y$$
$$yb = uy, yc = u^{-1}y, bz = zu, cz = zu^{-1} >$$

şeklindedir. Şimdi bu sunuşun aşağıda verilen sunuşa denk olduğunu gösterelim;

$$< x_1, x_2, x_3, x_4, {x_1}', {x_2}', {x_3}', {x_4}', y, z, b, c| \; x_j {x_j}' = {x_j}' x_j = 1, x_1 x_2 = x_3 x_4 \qquad (5.3)$$
$$yz = 1, bc = 1,$$
$$bx_j = {x_j}^2 b, x_j c = c{x_j}^2, x_j z = z{x_j}^2, yx_j = {x_j}^2 y$$
$$yb = uy, yc = u^{-1}y, bz = zu, cz = zu^{-1} >.$$

Bunu ispatlamak için ${x_1}^{2^i}{x_2}^{2^i} = {x_3}^{2^i}{x_4}^{2^i}$ $(i \geq 0)$ bağıntısının (5.3) sunuşunun bir sonucu olduğunu göstermemiz gerekmektedir. i üzerinde tümevarım uygulanırsa, $i = 0$ için elde edilen $x_1 x_2 = x_3 x_4$ bağıntısı (5.3) de verilen bir bağıntıdır. ${x_1}^{2^{i-1}}{x_2}^{2^{i-1}} = {x_3}^{2^{i-1}}{x_4}^{2^{i-1}}$ $(i \geq 1)$ bağıntısının (5.3) deki bağıntıların bir sonucu olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\begin{aligned} {x_1}^{2^i}{x_2}^{2^i} &= {x_1}^{2^i} bc {x_2}^{2^i} && (bc = 1) \\ &= b{x_1}^{2^{i-1}}{x_2}^{2^{i-1}} c && ({x_1}^2 b = b x_1 \text{ ve } c{x_2}^2 = x_2 c) \\ &= b{x_3}^{2^{i-1}}{x_4}^{2^{i-1}} c \end{aligned}$$

$$= {x_3}^{2^i} {x_4}^{2^i}$$

elde edilir. Böylece sonlu sunumlu olmayan bir grubun genelleştirilmiş Bruck-Reilly *-genişlemesinin sonlu sunumlu olabileceği gösterilmiştir.

Lemma 5.4.6: $GBR^*(G;\beta,\gamma;u)$, G grubunun bir genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemesi olsun ve G grubu $\langle X|R\rangle$ sunuşu ile tanımlı olsun. Bu durumda aşağıda belirtilen koşullar $GBR^*(G;\beta,\gamma;u)$ da sağlanır.

(i) Her $w_1, w_2 \in X^*$ ve her $i,j,k,l,r,s,u,v \in \mathbb{N}^0$ için

$$z^i c^j w_1 b^k y^l = z^r c^s w_2 b^u y^v \Leftrightarrow i = r,\ j = s,\ k = u,\ l = v,\ w_1 = w_2 \in G$$

dir.

(ii) Her $w_1, w_2 \in X^*$ ve her $m,n,p,q,d,e,f,g \in \mathbb{N}^0$ için,

$$z^m c^n\, w_1 b^p y^q \mathcal{R} z^d c^e w_2 b^f y^g \Leftrightarrow m = d, n = e,$$
$$z^m c^n\, w_1 b^p y^q \mathcal{L} z^d c^e w_2 b^f y^g \Leftrightarrow p = f, q = g,$$
$$z^m c^n\, w_1 b^p y^q \mathcal{H} z^d c^e w_2 b^f y^g \Leftrightarrow m = d, n = e, p = f, q = g$$

dir.

(iii) B_1 ve B_2 sırasıyla $\langle y,z|yz=1\rangle$ ve $\langle b,c|bc=1\rangle$ sunuşlarına sahip iki devirli monoid olmak üzere, B, B_1 ve B_2 nin birleşimi olsun. Bu durumda, $GBR^*(G;\beta,\gamma;u)$ den

$$B = B_1 \cup B_2 = \langle y,z,b,c|yz=1, bc=1, yb=y, yc=y, bz=z, cz=z\rangle$$

ye $y\pi = y$, $z\pi = z$, $c\pi = c$, $b\pi = b$ ve $x\pi = 1_B$ olacak şekilde bir $\pi: GBR^*(G;\beta,\gamma;u) \to B$ epimorfizmi vardır.

(iv) $U(GBR^*(G;\beta,\gamma;u))$, $GBR^*(G;\beta,\gamma;u)$ nin terslenebilir elemanlarının oluşturduğu grubu göstermek üzere $G \cong U(GBR^*(G;\beta,\gamma;u))$ dir. Bu durumda, $w \in (X \cup \{y,z,b,c\})^*$ kelimesi $U(GBR^*(G;\beta,\gamma;u))$ nin bir elemanını temsil etmesi için gerek ve yeter koşul w kelimesinin X^* dan bir kelimeye denk olmasıdır, yani $w\pi = 1_B$ dir.

İspat: (i) $(X \cup \{y,z,b,c\})^*$ kümesini Y^* ile gösterelim ve φ dönüşümü

$\varphi: Y^* \to GBR^*(G;\beta,\gamma;u)$,
$x\varphi = (0,0,x,0,0),\ y\varphi = (0,0,1_G,0,0),\ z\varphi = (1,0,1_G,0,0)$,
$b\varphi = (0,0,1_G,1,0),\ c\varphi = (0,1,1_G,0,0)$

şeklinde tanımlı bir homomorfizma olsun. Kocapınar ve ark. (2012), Lemma 2.1 den φ nin bir epimorfizm olduğu görülür. Şimdi $z^i c^j w_1 b^k y^l = z^r c^s w_2 b^u y^v$ bağıntısının $GBR^*(G;\beta,\gamma;u)$ de sağlandığını kabul edelim. O halde, $(z^i c^j w_1 b^k y^l)\varphi = (z^r c^s w_2 b^u y^v)\varphi$ dir. $w_1, w_2 \in Y^*$ için $w_1 = x_1 x_2 \dots x_n,\ w_2 = t_1 t_2 \dots t_m,\ (n,m \in \mathbb{N})$ kabul edilirse,

$$(z^i c^j x_1 x_2 \dots x_n b^k y^l)\varphi = (z^r c^s t_1 t_2 \dots t_m b^u y^v)\varphi$$

dir. φ bir homomorfizma olduğundan, $i = r,\ j = s,\ k = u,\ l = v$ ve $w_1 = w_2$ nin G de sağlandığı görülür.

Tersi aşikardır.

ii) $w_1, w_2 \in X^*$ ve $m,n,p,q,d,e,f,g \in \mathbb{N}^0$ için $z^m c^n w_1 b^p y^q$ ve $z^d c^e w_2 b^f y^g$ $\mathcal{R}$-bağlantılı olsun. O halde, $w_3, w_4 \in X^*$ ve $i,k,l,j,\mu,\varepsilon,\rho,\delta \in \mathbb{N}^0$ için,

$$(z^m c^n w_1 b^p y^q)\left(z^i c^k w_3 b^l y^j\right) = z^d c^e w_2 b^f y^g \quad (5.4)$$
$$(z^d c^e w_2 b^f y^g)\left(z^\mu c^\varepsilon w_4 b^\rho y^\delta\right) = z^m c^n w_1 b^p y^q \quad (5.5)$$

olacak şekilde $\left(z^i c^k w_3 b^l y^j\right), \left(z^\mu c^\varepsilon w_4 b^\rho y^\delta\right) \in GBR^*(G;\beta,\gamma;u)$ vardır. (5.4) de verilen eşitlikte,

$q \geq i$ ise $z^m c^n w_1 b^p y^{q-i} c^k w_3 b^l y^j = z^d c^e w_2 b^f y^g$

dir. Sonuç 5.4.3 de verilen bağıntılar kullanılarak $m = d, n = e, p = f, q - i + j = g$ olduğu görülür.

$q < i$ ise $z^m c^n w_1 b^p z^{i-q} c^k w_3 b^l y^j = z^d c^e w_2 b^f y^g$

dir. Sonuç 5.4.3 den $m + i - q = d,\ k = e,\ l = f,\ j = g$ dir ve $q < i$ olduğundan, $d > m$ elde edilir.

(5.5) eşitliğinde, eğer $g \geq \mu$ ise $z^d c^e w_2 b^f y^{g-\mu} c^\varepsilon w_4 b^\rho y^\delta = z^m c^n w_1 b^p y^q$ dir ve Sonuç 5.4.3 den $d = m$ elde edilir ve bu eşitlik $d > m$ ile çelişir.

$g < \mu$ ise $z^d c^e w_2 b^f z^{\mu-g} c^\varepsilon w_4 b^\rho y^\delta = z^m c^n w_1 b^p y^q$

dir. Sonuç 5.4.3 deki bağıntılar kullanılarak $d + \mu - g = m$ olduğu görülür. $g < \mu$ olduğundan, $d < m$ elde edilir. Bu ise $d > m$ ile çelişir. Bu durumda, $q \geq i$, $m = d$, $n = e$ olduğu görülür.

Tersine, $z^m c^n w_1 b^p y^q$, $z^m c^n w_2 b^f y^g \in GBR^*(G;\beta,\gamma;u)$ için $m = d$, $n = e$ olsun. O halde, $z^q c^p w_3 b^f y^g$, $z^g c^f w_4 b^p y^q \in GBR^*(G;\beta,\gamma;u)$ için,

$(z^m c^n w_1 b^p y^q)(z^q c^p w_3 b^f y^g) = z^m c^n w_2 b^f y^g$
$(z^m c^n w_2 b^f y^g)(z^g c^f w_4 b^p y^q) = z^m c^n w_1 b^p y^q$

eşitlikleri sağlanır. Bu ise $z^m c^n w_1 b^p y^q \mathcal{R} z^m c^n w_2 b^f y^g$ olduğunu gösterir. $\mathcal{L}$ bağıntısı için de benzer yol izlenir. $\mathcal{H}$ bağıntısı $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{R}$ bağntılarının kesişimi olduğundan, sonuç $\mathcal{H}$ bağıntısı için de açıktır.

(iii) B_1 ve B_2 iki devirli monoid olsun. $GBR^*(G;\beta,\gamma;u)$ den B_1 e ve $GBR^*(G;\beta,\gamma;u)$ den B_2 ye $w_1 \equiv w_1' t$ $(w_2 \equiv w_2' r)$, $w_1' \in (X \cup \{y,z\})^*$ ve $t \in X \cup \{y,z\}$ $(w_2' \in (X \cup \{b,c\})^*, r \in X \cup \{b,c\})$ için,

$w_1\pi_1 = (w_1' t)\pi_1 = (w_1'\,\pi_1)(t\pi_1)$ $(w_2\pi_2 = (w_2' r)\pi_2 = (w_2'\pi_2)(r\pi_2))$

olacak şekilde

$\pi_1 : GBR^*(G;\beta,\gamma;u) \to B_1$,
$\pi_2 : GBR^*(G;\beta,\gamma;u) \to B_2$

dönüşümleri tanımlansın. B_1 ve B_2 sırasıyla $B_1 =< y,z \mid yz = 1 >$, $B_2 =< b,c \mid bc = 1 >$ sunuşları ile tanımlı olduğundan, π_1 ve π_2 iyi tanımlı örten dönüşümler olup, bu dönüşümlerin birer homomorfizma olduğunu görmek mümkündür. Ayrıca
$\pi : GBR^*(G;\beta,\gamma;u) \to B_1 \cup B_2$

dönüşümü bir epimorfizmdir.

(iv) $w = z^m c^n v b^p y^q$ $(v \in X^*)$ elemanı $GBR^*(G;\beta,\gamma;u)$ nin terslenebilir bir elemanı olsun. Bu durumda,

$$(z^m c^n v b^p y^q)(z^d c^e \lambda b^f y^g) = 1 \qquad (5.6)$$

$$(z^d c^e \lambda b^f y^g)(z^m c^n v b^p y^q) = 1 \qquad (5.7)$$

olacak şekilde $z^d c^e \lambda b^f y^g \in GBR^*(G;\beta,\gamma;u)$ vardır. (5.6) da eğer $q \geq d$ ise $yz = 1$ bağıntısı kullanılarak $m = 0,\ n = 0,\ p = 0,\ q - d + g = 0,\ d = q + g$ elde edilir. Kabulümüz $q \geq d$ olduğundan, $g = 0$ için $q = d$ dir. Eğer $d > q$ ise $m + d - q = 0$, $e = 0,\ f = 0,\ g = 0$ elde edilir. Bu ise $d > q$ ile çelişir. Dolayısıyla $q = d$ dir. Böylece $m = n,\ n = 0,\ p = 0,\ g = 0$ olur ve gerekli işlemler tamamlandıktan sonra $e = 0,\ f = 0$ elde edilir.

(5.7) de eğer $g \geq m$ ise $d = 0,\ e = 0,\ f = 0,\ g - m + q = 0$ elde edilir. Bu ise $g > m$ kabulü ile çelişir. O halde, $g = m$ dir ve bu $q = 0$ iken mümkündür. Bu durumda, $m = n = p = q = 0$ dir. Böylece $w = v \in X^*$ elde edilir.

Tersine, $w \in X^*$ ise $w, v = v_1 v_2 \dots v_k \in X^*$ olmak üzere, $GBR^*(G;\beta,\gamma;u)$ nin $z^0 c^0 v b^0 y^0$ elemanını temsil eder. Bu durumda, $v^{-1} = {v_k}^{-1} \dots {v_2}^{-1} {v_1}^{-1}$ olduğundan,

$$(z^0 c^0 v b^0 y^0)(z^0 c^0 v^{-1} b^0 y^0) = z^0 c^0 v v^{-1} b^0 y^0 = z^0 c^0 (v_1 \dots v_k {v_k}^{-1} \dots {v_1}^{-1}) b^0 y^0 = 1$$

dir. Benzer şekilde $(z^0 c^0 v^{-1} b^0 y^0)(z^0 c^0 v b^0 y^0) = 1$ olup w, $GBR^*(G;\beta,\gamma;u)$ nin terslenebilir bir elemanını temsil eder. Ayrıca X kümesi G grubunu ürettiğinden

$$f: U(GBR^*(G;\beta,\gamma;u)) \to G$$
$$w \equiv z^0 c^0 v b^0 y^0 \mapsto v$$

dönüşümü bir izomorfizmdir. □

Aşağıda verilen teorem bu alt bölümün önemli sonuçları olan Teorem 5.4.8 de ve Teorem 5.4.9 da kullanılmak üzere verilmiştir.

Teorem 5.4.7: G bir grup ve $\beta, \gamma: G \to {H_1}^*$ şeklinde tanımlı birer homomorfizma olsun. $GBR^*(G;\beta,\gamma;u)$ genişlemesinin sonlu üreteçli olması için gerek

ve yeter koşul $(\cup_{i\geq 0} X_0\beta^i) \cup (\cup_{j\geq 0} X_0\gamma^j)$, G nin bir üreteç kümesi olacak şekilde sonlu bir $X_0 \subseteq G$ vardır.

İspat: X_0, G nin sonlu bir alt kümesi olsun. Ayrıca G grubu, $(\cup_{i\geq 0} X_0\beta^i) \cup (\cup_{j\geq 0} X_0\gamma^j)$ tarafından üretilsin. Bu durumda, $(\cup_{i\geq 0} X_0\beta^i) \cup (\cup_{j\geq 0} X_0\gamma^j) \cup \{b,c,y,z\}$, $GBR^*(G;\beta,\gamma;u)$ nin bir üreteç kümesidir. Şimdi $Y = X_0 \cup \{b,c,y,z\}$ kümesinin $GBR^*(G;\beta,\gamma;u)$ nin bir üreteç kümesi olduğunu gösterelim. Bunun için $x \in X_0$ herhangi bir eleman olsun. $x = (x\beta^0) \cup (x\gamma^0)$ şeklinde yazılabileceğinden $x \in (\cup_{i\geq 0} X_0\beta^i) \cup (\cup_{j\geq 0} X_0\gamma^j)$ olup, $X_0 \subseteq (\cup_{i\geq 0} X_0\beta^i) \cup (\cup_{j\geq 0} X_0\gamma^j)$ dir. Diğer taraftan, her $i \in \mathbb{N}$ $(j \in \mathbb{N})$ için Sonuç 5.4.3 den $(x\beta^i)b^i = b^i x$ $((x\gamma^j)y^j = y^j x)$ olup, eşitlik sağdan c^i (z^j) ile çarpıldığında $\cup_{i\geq 0} X_0\beta^i \subseteq (X_0 \cup \{b,c\})^*$ $(\cup_{j\geq 0} X_0\gamma^j \subseteq (X_0\{y,z\})^*)$ elde edilir. Buradan $(\cup_{i\geq 0} X_0\beta^i) \cup (\cup_{j\geq 0} X_0\gamma^j) \subseteq (X_0 \cup \{b,c,y,z\})^*$ olur. Böylece $X_0 \cup \{b,c,y,z\}$ kümesi $GBR^*(G;\beta,\gamma;u)$ nin üreteç kümesi olup, $GBR^*(G;\beta,\gamma;u)$ sonlu üreteçlidir.

Tersine, $GBR^*(G;\beta,\gamma;u)$ sonlu üreteçli olsun. Eğer G bir X kümesi tarafından üretiliyorsa $X_0 \cup \{b,c,y,z\}$ kümesi $GBR^*(G;\beta,\gamma;u)$ nin üreteç kümesidir. Dolaysıyla $X_0 \cup \{b,c,y,z\}$ kümesi, $GBR^*(G;\beta,\gamma;u)$ nin bir üreteç kümesi olacak şekilde sonlu bir $X_0 \subseteq X$ kümesi vardır.

Şimdi Ruškuc (1999) çalışmasındaki Teorem 2.7 yi kullanarak G grubunun üreteçlerini elde edelim. Öncelikle G nin R-sınıfındaki H-sınıflarının Lemma 5.4.6 (ii) den $H_{ij} = Gb^{i-1}y^{j-1}$ $(i,j \geq 1)$ kümeleri olduğu görülür. Ayrıca $G_{r_i}k_j = H_{ij}$ ve $H_{ij}k_j'r_i' = G$ olacak şekilde r_i, r_i', k_j, k_j' elemanlarına ihtiyaç vardır. Eğer bu elemanlar $r_i = b^{i-1}, r_i' = c^{i-1}, k_j = y^{j-1}, k_j' = z^{j-1}$ $(i,j \geq 0)$ şeklinde seçilirse,

$$H_{ij}k_j'r_i' = H_{ij}z^{j-1}c^{i-1} = Gb^{i-1}y^{j-1}c^{i-1} = Gb^{i-1}c^{i-1} = G,$$
$$H_{ij}z^{j-1}c^{i-1} = Gb^{i-1}y^{j-1}z^{j-1}c^{i-1} = Gb^{i-1}c^{i-1} = G \quad (i,j \geq 1)$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür. Ruškuc (1999), Teorem 2.7 den G grubunun üreteç kümesinin

$$Y = Y_1 \cup Y_2 = \{1_G r_i \alpha_1 r_i' \mid i\epsilon I, \alpha_1 \epsilon X_0 \cup \{b,c\}\} \cup \left\{1_G k_j \alpha_1 k_j' \,\middle|\, j\epsilon I, \alpha_1 \epsilon X_0 \cup \{y,z\}\right\} =$$
$$\left\{1_G b^i \alpha_1 c^i, 1_G b^i b c^{i+1}, 1_G b^{i+1} c c^i \,\middle|\, i \geq 0,\ \alpha_1 \epsilon X_0\right\} \cup$$

$\{1_G y^j \alpha_1 z^j, 1_G y^j y z^{j+1}, 1_G y^{j+1} c c^i \mid j \geq 0,\ \alpha_1 \epsilon\, X_0\} = \{\alpha_1 \beta^i \mid i \geq 0, \alpha_1 \epsilon\, X_0\} \cup \{1_G\} \cup \{\alpha_1 \gamma^j \mid j \geq 0, \alpha_1 \epsilon\, X_0\}$

olduğu görülür. Böylece G nin bir monoid üreteç kümesi,

$$\{\alpha_1 \beta^i \mid i \geq 0, \alpha_1 \in X_0\} \cup \{\alpha_1 \gamma^j \mid j \geq 0, \alpha_1 \in X_0\}$$

şeklindedir. □

Teorem 5.4.8: G bir grup, $\beta, \gamma : G \to {H_1}^*$ şeklinde tanımlı birer homomorfizma olsun. Bu durumda, G nin genelleştirilmiş Bruck-Reilly $*$- genişlemesi $GBR^*(G; \beta, \gamma; u)$ sonlu sunumlu ise G sonlu üreteçlidir.

İspat: $GBR^*(G; \beta, \gamma; u)$ sonlu sunumlu ise sonlu üreteçlidir. Teorem 5.4.7 den $X = (\cup_{i \geq 0} X_0 \beta^i) \cup (\cup_{j \geq 0} X_0 \gamma^j) = \{x_k \beta^i \mid 1 \leq k \leq t, i \geq 0\} \cup \{x_k \gamma^j \mid 1 \leq k \leq t, j \geq 0\}$ kümesi G yi (monoid olarak) üretiyor olacak şekilde sonlu bir $X_0 = \{x_1, x_2, \dots, x_t\} \subseteq G$ alt kümesi vardır. $x_k \beta^i$ $(x_k \gamma^j)$ yerine $x_{k,i}$ $(x_{k,j})$ alalım ve $x_{k,0}$, x_k yı göstersin. O halde, $X = \{x_{k,i}, x_{k,j} \mid 1 \leq k \leq t, i \geq 0, j \geq 0\}$ alfabesini ele alalım. $\langle X | R \rangle$, G nin bir sunuşu olsun. Yukarıdaki notasyonlar kullanılarak $GBR^*(G; \beta, \gamma; u)$ nin sunuşu

$$< X, y, z, b, c \mid bc = 1, yz = 1, \quad (5.8)$$
$$b x_{k,i} = x_{k,i+1} b, x_{k,i} c = c x_{k,i+1}, y x_{k,j} = x_{k,j+1} y, x_{k,j} z = z x_{k,j+1},$$
$$yb = uy, yc = u^{-1} y, bz = zu, cz = z u^{-1}\ (1 \leq k \leq t, i, j \geq 0) >$$

şeklinde elde edilir.

$$x_{k,i} = x_{k,0} \beta^i = x_k \beta^i = b^i x_k c^i = b^i x_{k,0} c^i \ (x_{k,j} = x_{k,0} \gamma^j = x_k \gamma^j = y^j x_k z^j = y^j x_{k,0} z^j)$$

olduğundan, (5.8) sunuşundan $x_{k,i}$ ve $x_{k,j}$ $(1 \leq k \leq t, i, j \geq 0)$ gereksiz üreteçleri çıkarılır. R de $x_{k,i}$ $(x_{k,j})$ yerine $b^i x_k c^i$ $(y^j x_k z^j)$ yazılarak elde edilen bağıntılar kümesi R' ile gösterilirse,

$$< x_1, x_2, \dots, x_t, y, z, b, c \mid R', bc = 1, yz = 1, \quad (5.9)$$
$$b^{i+1} x_k c^i = \left(b^{i+1} x_k c^{i+1}\right) b, b^i x_k c^{i+1} = c\left(b^{i+1} x_k c^{i+1}\right),$$

$$y^{j+1}x_kz^j = \left(y^{j+1}x_kz^{j+1}\right)y, y^jx_kz^{j+1} = z\left(y^{j+1}x_kz^{j+1}\right),$$
$$bz = zu, cz = zu^{-1}, yb = uy, yc = u^{-1}y$$
$$(1 \le k \le t, i, j \ge 0) >$$

sunuşu elde edilir. Bu sunuşun sonsuz olduğu açıktır. $GBR^*(G;\beta,\gamma;u)$ sonlu sunumlu olup, $R'' \subseteq R'$ sonlu alt küme ve $s_1, s_2 \ge 1$ olmak üzere, (5.9) sunuşu

$$< x_1, x_2, \dots, x_t, y, z, b, c \mid R'', bc = 1, yz = 1,$$
$$b^{i+1}x_kc^i = \left(b^{i+1}x_kc^{i+1}\right)b,\ b^ix_kc^{i+1} = c\left(b^{i+1}x_kc^{i+1}\right),$$
$$y^{j+1}x_kz^j = \left(y^{j+1}x_kz^{j+1}\right)y,\ y^jx_kz^{j+1} = z\left(y^{j+1}x_kz^{j+1}\right),$$
$$bz = zu, cz = zu^{-1},\ yb = uy,\ yc = u^{-1}y$$
$$(1 \le k \le t,\ 0 \le i \le s_1 - 1,\ 0 \le j \le s_2 - 1) >$$

biçiminde tekrar yazılır. Eğer $R' - R''$ gereksiz bağıntı kümesi ve $x_{k,i} = b^ix_kc^i$, $x_{k,j} = y^jx_kz^j$ $(1 \le k \le t, i, j \ge 1)$ gereksiz üreteçleri sunuşa eklenirse,

$$< X, y, z, b, c \mid R', bc = 1, yz = 1,$$
$$b^{i+1}x_kc^i = \left(b^{i+1}x_kc^{i+1}\right)b,\ b^ix_kc^{i+1} = c\left(b^{i+1}x_kc^{i+1}\right),$$
$$y^{j+1}x_kz^j = \left(y^{j+1}x_kz^{j+1}\right)y,\ y^jx_kz^{j+1} = z\left(y^{j+1}x_kz^{j+1}\right),$$
$$bz = zu,\ cz = zu^{-1},\ yb = uy,\ yc = u^{-1}y,$$
$$x_{k,r_1} = b^{r_1}x_kc^{r_1},\ x_{k,r_2} = y^{r_2}x_kz^{r_2},$$
$$(1 \le k \le t,\ 0 \le i \le s_1 - 1,\ 0 \le j \le s_2 - 1, r_1, r_2 \ge 1) >$$

sunuşu elde edilir. Şimdi $b^{r_1}x_kc^{r_1}$ $(y^{r_2}x_kz^{r_2})$ yerine x_{k,r_1} (x_{k,r_2}) $(1 \le k \le t,\ r_1, r_2 \ge 1)$ yazalım. $r_1, r_2 < s$ için $x_{k,r_1} = b^{r_1}x_kc^{r_1}$, $x_{k,r_2} = y^{r_2}x_kz^{r_2}$ bağıntıları $bx_{k,i} = x_{k,i+1}b$ $(i < s_1)$, $yx_{k,j} = x_{k,j+1}y$ $(j < s_2)$ ile $bc = 1, yz = 1$ bağıntılarının bir sonucudur. O halde, $x_{k,r_1} = b^{r_1}x_kc^{r_1}$, $x_{k,r_2} = y^{r_2}x_kz^{r_2}$ gereksiz bağıntıları sunuştan çıkarılırsa,

$$< X, y, z, b, c \mid R,\ bc = 1,\ yz = 1, \tag{5.10}$$
$$bx_{k,i} = x_{k,i+1}b,\ x_{k,i}c = cx_{k,i+1},$$
$$yx_{k,j} = x_{k,j+1}y,\ x_{k,j}z = zx_{k,j+1},$$
$$bz = zu,\ cz = zu^{-1},\ yb = uy,\ yc = u^{-1}y >$$

sunuşu elde edilir.

Şimdi H, $\{x_{k,i}, x_{k,j} | 1 \leq k \leq t, 0 \leq i \leq s_1 - 1,\ 0 \leq j \leq s_2 - 1\}$ kümesi tarafından üretilen G nin bir alt grubu ve $H \neq G$ olsun. Bu durumda, G nin x_{k,s_1+n}, x_{k,s_2+n} üreteçleri H alt grubuna ait değildir. $GBR^*(G;\beta,\gamma;u)$ nin sunuşunun bir sonucu olarak $bx_{k,s_1+n} = x_{k,s_1+n+1}b$ ve $yx_{k,s_2+n} = x_{k,s_2+n+1}y$ bağıntıları $GBR^*(G;\beta,\gamma;u)$ de sağlanır. Şimdi aşağıda verilen iddia ile bu bağıntıların (5.10) sunuşunun bir sonucu olmadığını gösterelim. Bu çelişki $H \neq G$ kabul etmemizden kaynaklı olup $H = G$ olmak zorundadır. O halde, G sonlu üreteçlidir.

İddia: yx_{k,s_2+n} ve bx_{k,s_1+n} kelimeleri (5.10) da verilen bağıntıların bir sonucu değildir.

İspat: $u_1, v_1\ (u_2, v_2)$, $v_1\ (v_2)$, H nin bir elemanını temsil etmeyecek şekilde birer grup kelimesi olsun ($u_1$ve u_2 boş kelime olabilir). Şimdi $w_1 \equiv u_1 b v_1$ ve $w_2 \equiv u_2 y v_2$ kelimelerine (5.10) da verilen bağıntılar uygulandığında tekrar aynı formdaki $w_1' \equiv u_1' b v_1'$ ve $w_2' \equiv u_2' y v_2'$ kelimelerinin elde edildiğini gösterelim. Uygulanan bağıntılar u_1, b, v_1 ve u_2, y, v_2 yi aynı anda etkileyemez. Çünkü bunu sağlayabilecek bağıntılar $x_{k,s_1+n} = b^{s_1+n} x_k a^{s_1+n}$ ve $x_{k,s_2+n} = y^{s_2+n} x_k z^{s_2+n}$ dir. u_1 in b ile ve u_2 nin y ile bitiyor olması durumu u_1 ve u_2 nin birer grup kelimesi olması ile çelişir. Şimdi diğer durumlar ele alınırsa;

1. Durum: w_1 (w_2) nin u_1 (u_2) alt kelimesine bir bağıntı uygulanması durumunda (5.10) sunuşunda verilen bir bağıntı uygulanarak elde edilen u_1' (u_2') kelimesi için $u_1' = u_1$ ($u_2' = u_2$) ve $v_1 \equiv v_1'$ ($v_2 \equiv v_2'$) olup, w_1 ve w_2 istenen formdadır.

2. Durum: v_1 (v_2) kelimesi için de benzer durum söz konusudur.

3. Durum: w_1' (w_2') den $u_1 b$ ($u_2 y$) alt kelimesine bir bağıntı uygulanarak w_1 (w_2) elde edilmiş olsun. $u_1 b$ ($u_2 y$) bağıntısına uygulanabilecek tek bağıntı u_0 (v_0) bir grup kelimesi olmak üzere, $u_1 \equiv u_0 x_{k,i+1}$ ($u_2 \equiv v_0 x_{k,j+1}$) iken $x_{k,i+1} b = b x_{k,i}$ ($x_{k,j+1} y = y x_{k,j}$) dir. Ayrıca v_1, H nin bir elemanını temsil etmediğinden $x_{k,i} v_1$ de H nin bir elemanını temsil etmez. Böylece w_1' istenen formdadır. Benzer şekilde w_2' nin de istenen formda olduğu gösterilir.

4. Durum: w_1' (w_2'), bv_1 (yv_2) alt kelimesine bir bağıntı uygulanarak w_1 (w_2) den elde edilmiş olsun. v_1 (v_2), c (z) üreteciyle başlamadığı için bu bağıntı $bc = 1$ ($yz = 1$) olamaz. Ayrıca $x_{k,s_1+n} = b^{s_1+n} x_k c^{s_1+n}$ ve ($x_{k,s_2+n} = y^{s_2+n} x_k z^{s_2+n}$)

bağıntıları da olamaz. Çünkü bu durumda v_1 (v_2) nin ön kelimesi $b^{s_1+n}x_k c^{s_1+n}$ ($y^{s_2+n}x_k z^{s_2+n}$) olur ve bu v_1 (v_2) nin bir grup kelimesi olmasıyla çelişir. Böylece bv_1 (yv_2) alt kelimesine uygulanabilecek tek bağıntı $v_1 \equiv x_{k,i}v_0$ ($v_2 \equiv x_{k,j}v_0'$) iken $bx_{k,i} = (x_{k,i+1})b$ ($yx_{k,j} = x_{k,j+1}y$) dir. O halde,

$w_1 \equiv u_1 b v_1 \equiv u_1 b x_{k,i} v_0 = u_1 x_{k,i+1} b v_0,\ w_2 \equiv u_2 y v_2 \equiv u_2 y x_{k,j} v_0' = u_2 x_{k,j+1} y v_0',$
$u_1' \equiv u_1 x_{k,i+1}, u_2' \equiv u_2 x_{k,j+1},\ v_1' \equiv v_0$ ve $v_2' \equiv v_0'$

dir. v_0 (v_0') nin H nin bir elemanını temsil etmeyen bir grup kelimesi olduğuna dikkat edelim. Boş kelime H nin bir elemanını temsil ettiği için sırasıyla bx_{k,s_1+n} ve yx_{k,s_2+n} kelimelerine eşit olan $x_{k,s_1+n+1}b$ ve $x_{k,s_2+n+1}y$ kelimeleri istenen formda değildir. Bu durumda, $x_{k,s_1+n+1}b$ ve x_{k,s_2+n+1} kelimelerine (5.10) sunuşundaki bağıntılar uygulanarak bx_{k,s_1+n} ve yx_{k,s_2+n} kelimeleri elde edilemez. Dolayısıyla, $bx_{k,s_1+n} = x_{k,s_1+n+1}b$ ve $yx_{k,s_2+n} = x_{k,s_2+n+1}y$ bağıntıları (5.10) sunuşunda verilen bağıntıların bir sonucu değildir. □

Teorem 5.4.7 yardımıyla elde edilen ve bu alt bölümün ana teoremi olan bir grubun genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemesinin sonlu sunumluluğu ile ilgili sonuç aşağıda verilmiştir.

Teorem 5.4.9: G bir grup, $\beta, \gamma: G \to {H_1}^*$ şeklinde tanımlı birer homomorfizma olsun. Bu durumda, G nin genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemesi $GBR^*(G; \beta, \gamma; u)$ nin sonlu sunumlu olması için gerek ve yeter koşul

$R = \left(\cup_{i\geq 0} R_0\beta^i\right) \cup \left(\cup_{j\geq 0} R_0\gamma^j\right)$
$= \left\{w_1\beta^i = v_1\beta^i \middle| i \geq 0, (w_1 = v_1) \in R_0\right\} \cup \left\{w_2\gamma^j = v_2\gamma^j \middle| j \geq 0, (w_2 = v_2) \in R_0\right\} \cup$
$\{u = 1 | u \in H_1^*\}$

kümesi alındığında $< X \mid R >$, G nin bir sunuşu olmak üzere, sonlu bir X üreteç kümesi ve sonlu bir $R_0 \subseteq X^* \times X^*$ bağıntı kümesinin var olmasıdır.

İspat: X, G nin sonlu üreteç kümesi ve R_0 sonlu olmak üzere, bağıntı kümesi

$R = \left(\cup_{i\geq 0} R_0\beta^i\right) \cup \left(\cup_{j\geq 0} R_0\gamma^j\right)$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda, G grubunun genelleştirilmiş Bruck-Reilly *-genişlemesi $GBR^*(G;\beta,\gamma;u)$ nin sunuşu

$$< X,y,z,b,c \mid R,\ bc=1,\ yz=1,$$
$$bx=(x\beta)b,\ xc=c(x\beta),\quad yx=(x\gamma)y, xz=z(x\gamma),$$
$$bz=zu, cz=zu^{-1}, yb=uy, yc=u^{-1}y >$$

şeklinde tanımlıdır. Sırasıyla $bx=(x\beta)b,\ bc=1$ ve $yx=(x\gamma)y,\ yz=1$ bağıntıları kullanıldığında her w kelimesi için $w\beta=bwa$ ve $w\gamma=ywz$ olduğu görülür. Böylece her $w_1=v_1\in R_0$ ve $w_2=v_2\in R_0$ için,

$$w_1\beta^i=b^iw_1c^i=b^iv_1c^i=v_1\beta^i \text{ ve } w_2\gamma^j=y^jw_2z^j=y^jv_2z^j=v_2\gamma^j$$

dir. Ayrıca $w_1\beta^i=v_1\beta^i$ ve $w_2\gamma^j=v_2\gamma^j$ $(i,j\geq 1)$ bağıntıları sırasıyla $bx=(x\beta)b$, $bc=1$ ve $yx=(x\gamma)y,\ yz=1$ bağıntılarının birer sonucudur. $R-R_0=\{w_1\beta^i=v_1\beta^i, w_2\gamma^j=v_2\gamma^j \mid i,j\geq 1, (w_1=v_1)\in R_0, (w_2=v_2)\in R_0\}$ bağıntı kümesi T_4 Tietze dönüşümü ile sunuştan çıkarılırsa $GBR^*(G;\beta,\gamma;u)$ için,

$$< X,y,z,b,c \mid R_0,\ bc=1,\ yz=1,$$
$$bx=(x\beta)b,\ xc=c(x\beta),\ yx=(x\gamma)y,\ xz=z(x\gamma),$$
$$bz=zu,\ cz=zu^{-1},\ yb=uy,\ yc=u^{-1}y >$$

sunuşu elde edilir. X ve R_0 sonlu sunumlu olduğundan, $GBR^*(G;\beta,\gamma;u)$ sonlu sunumludur.

Tersine, $GBR^*(G;\beta,\gamma;u)$ sonlu sunumlu olsun. Teorem 5.4.7 den biliyoruz ki G sonlu üreteçlidir. X, G nin sonlu bir üreteç kümesi olmak üzere, $< X \mid \vartheta >$, G nin bir sunuşu olsun. Bu durumda, $GBR^*(G;\beta,\gamma;u)$ nin sunuşu

$$< X,y,z,b,c \mid \vartheta,\ bc=1,\ yz=1,$$
$$bx=(x\beta)b,\ xc=c(x\beta),\ yx=(x\gamma)y,\ xz=z(x\gamma),$$
$$bz=zu,\ cz=zu^{-1},\ yb=uy,\ yc=u^{-1}y >$$

şeklindedir. Önerme 2.4.20 den

$$< X, y, z, b, c \mid R_0,\ bc = 1,\ yz = 1,$$
$$bx = (x\beta)b,\ xc = c(x\beta), yx = (x\gamma)y, xz = z(x\gamma),$$
$$bz = zu, cz = zu^{-1}, yb = uy, yc = u^{-1}y >$$

$GBR^*(G;\beta,\gamma;u)$ nin sunuşu olacak şekilde sonlu bir $R_0 \subseteq \vartheta$ alt kümesi vardır. Lemma 5.4.6 (iv) den G grubunun, $GBR^*(G;\beta,\gamma;u)$ nin bir alt grubu olarak alınabileceğini biliyoruz. G grubunun bir sunuşunu elde etmek için Ruškuc (1999) daki, Teorem 2.9 ve bu alt bölümde bulunan Teorem 5.4.7 yi kullanarak

$H_i = Gb^{i-1}y^{j-1},\ r_i \equiv b^{i-1},\ k_j \equiv y^{j-1},\ r_i' \equiv c^{i-1}$ ve $k_j' \equiv z^{j-1}$ $(i \geq 1, j \geq 1)$

alalım ve Teorem 5.4.7 nin ispatında G grubu için elde edilen

$b^t x c^t, b^t b c^{t+1} (= 1), b^{t+1} c c^t (= 1)$ ve $y^l x z^l, y^l y z^{l+1} (= 1), y^{l+1} z z^l (= 1)$

üreteçlerini temsil eden alfabeyi aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$B = \{[t,x],[t,b],[t+1,c] | t \geq 1, x \in X\} \cup \{[l,x],[l,y],[l+1,z] | l \geq 1, x \in X\}.$$

Şimdi $R_0(l)$ ve $R_0(t)$ nin sırasıyla x ile $[l,x]$ in ve x ile $[t,x]$ in yer değiştirmesiyle elde edilen birer kopyası olduğunu kabul edelim. $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ için $[t,x_1][t,x_2]\ldots[t,x_n]$ ($[l,x_1][l,x_2] \ldots [l,x_n]$) yerine $[t, x_1x_2 \ldots x_n]$ ($[l, x_1x_2 \ldots x_n]$) yazalım. Bu durumda,

$$R_0(t) = \{[t,w_1] = [t,v_1] \mid w_1 = v_1 \in R_0\} \text{ ve } R_0(l) = \{[l,w_2] = [l,v_2] \mid w_2 = v_2 \in R_0\}$$

elde edilir. $b^t x c^t$ ve $y^l x z^l$ sırasıyla $[t,x]$ ve $[l,x]$ ile temsil edildiğinden bu ikisinin temsilini $[[t,l],x]$ ile gösterelim. Ruškuc (1999) çalışmasında yer alan Sonuç 2.15 i kullanarak G için;

$$\begin{aligned} < B \mid\ & R_0(t),\ R_0(l), [t,b][t+1,c] = 1, [t,b][t+1,x] = [t,x\beta][t,b], \\ & [t+1,x][t+1,c] = [t+1,c][t,x\beta],\ [t,b] = 1, \\ & [l,y][l+1,z] = 1,\ [l,y][l+1,x] = [l,x\gamma][l,y], \\ & [l+1,x][l+1,z] = [l+1,z][l,x\gamma],\ [l,y] = 1, \end{aligned} \tag{5.11}$$

$[l,y][t,b] = u[l,y],\ [l,y][t+1,a] = u^{-1}[l,y],$
$[t,b][l+1,z] = [l+1,z]u,\ [t+1,c][l+1,z] = [l+1,z]u^{-1}$
$(t,l \geq 1,\ x \in X) >$

sunuşu elde edilir. $[t,b] = 1$ ve $[l,y] = 1$ den $[t+1,c] = 1$ ve $[l+1,z] = 1$ elde edilir. Dolayısıyla $[t,b], [l,y]$ ve $[t+1,c], [l+1,z]$ üreteçleri gereksizdir. Bu üreteçler T_2 Tietze dönüşümü ile (5.11) sunuşundan çıkarılırsa,

$< [t,x], [l,x] |\ R_0(t), R_0(l), [t+1,x] = [t,x\beta], [l+1,x] = [l,x\gamma], u = 1, u^{-1} = 1 >$ (5.12)

sunuşu elde edilir. Bunun yanı sıra,

$[t+1,x] = [t,x\beta] = \cdots = [1,x\beta^t]$ ve $[l+1,x] = [l,x\gamma] = \cdots = [1,x\gamma^l]$

olup bu eşitlikler $R_0(t)$ ve $R_0(l)$ de yerine yazılırsa,

$R_0(t) = \{[1,w_1\gamma^{i-1}] = [1,v_1\gamma^{j-1}] | w_1 = v_1 \in R_0\}$ ve
$R_0(l) = \left\{\left[1,w_2\beta^{t-1}\right] = [1,v_2\beta^{t-1}] \middle| w_2 = v_2 \in R_0\right\}$

olduğu görülür. $[t+1,x] = [t,x\beta]$ ve $[l+1,x] = [l,x\gamma]$ gereksiz bağıntılarını da T_4 Tietze dönüşümü ile (5.12) den çıkarılırsa,

$< [t,x], [l,x] |\ R_0(t), R_0(l), u = 1\ (t,l \geq 1, x \in X) >$

elde edilir. Son olarak her bir $[t,x]$ ve $[l,x]$üreteci yerine tekrar x yazılırsa G grubunun sunuşu

$< X \mid w_1\beta^i = v_1\beta^i, w_2\gamma^j, u = 1\ (i,j \geq 0, u \in H_1^*, w_1 = v_1 \in R_0, w_2 = v_2 \in R_0) >$

şeklinde elde edilir. İspat tamamlanmış olur. □

5.4.2. Clifford monoidin genelleştirilmiş Bruck-Reilly -* genişlemesinin sonlu sunumluluğu

Bu kısımda bir Clifford monoidin genelleştirilmiş Bruck-Reilly *-genişlemesinin ($u = 1$ alınarak) bir monoid olarak sonlu sunumlu olabilmesi için gerek ve yeter koşulun bir tersinir monoid olarak sonlu sunumlu olduğu ispatlanmıştır.

Bu bölüm boyunca M bir Clifford monoidi temsil edecektir.

Teorem 5.4.10: M nin genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemesi $GBR(M;\beta,\gamma;u)$ nin ($u = 1$ için) bir monoid olarak sonlu sunumlu olabilmesi için gerek ve yeter koşul bir tersinir monoid olarak sonlu sunumlu olmasıdır.

İspat: M nin genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemesi $GBR(M;\beta,\gamma;1)$ in bir monoid sunuşu aynı zamanda bir tersinir monoid sunuşu tanımlar. O halde, $GBR(M;\beta,\gamma;1)$ bir monoid olarak sonlu sunumlu ise tersinir monoid olarak da sonlu sunumludur.

Tersine, $GBR(M;\beta,\gamma;1)$ bir tersinir monoid olarak sonlu sunumlu olsun. $GBR(M;\beta,\gamma;1)$ sonlu sunumlu olduğundan, A üreteç kümesi ve R bağıntı kümesi olmak üzere, $\langle A, b, c, y, z \mid R\rangle$ sunuşu, $GBR(M;\beta,\gamma;1)$ nin bir tersinir monoid sunuşu olsun. (5.2) sunuşunda verilen $bc = 1$ ve $yz = 1$ bağıntıları sırasıyla sağdan b ve soldan y ile çarpılırsa $bcb = b$ ve $yzy = y$ elde edilir. Yani $GBR(M;\beta,\gamma;1)$ de c, b nin tersidir ve z, y nin tersidir. Bu durumda, T_4 Tietze dönüşümünü kullanarak c ve z sunuştan çıkarılırsa $\langle A, b, y \mid R'\rangle$ şeklinde $GBR(M;\beta,\gamma;1)$ nin bir tersinir monoid sunuşu elde edilir. Ayrıca (5.2) sunuşundan

$bb^{-1} = 1, yy^{-1} = 1,$
$ba = (a\beta)b, ab^{-1} = b^{-1}(a\beta),$
$ya = (a\gamma)y, ay^{-1} = y^{-1}(a\gamma) \quad (a \in A)$

bağıntılarının $GBR(M;\beta,\gamma;1)$ de sağlandığı görülür. O halde, bu bağıntılar $GBR(M;\beta,\gamma;1)$ nin sunuşuna eklenebilir. Ayrıca M bir Clifford yarıgrup olduğundan her $a_1, a_2 \in A$ için

$a_1(a_2{a_2}^{-1}) = (a_2{a_2}^{-1})a_1,\ a_1{a_1}^{-1} = {a_1}^{-1}a_1,\ a_1 = a_1{a_1}^{-1}a_1$

bağıntıları da $GBR(M;\beta,\gamma;1)$ nin sunuşuna eklenirse tersinir monoid sunuşu

$$< A, b, y \mid R',\ bb^{-1} = 1,\ yy^{-1} = 1,\ aa^{-1} = a^{-1}a$$
$$ba = (a\beta)b,\ ab^{-1} = b^{-1}(a\beta),\ ya = (a\gamma)y,\ ay^{-1} = y^{-1}(a\gamma),$$
$$yb = y,\ yb^{-1} = y,\ by^{-1} = y^{-1},\ b^{-1}y^{-1} = y^{-1}$$
$$a = aa^{-1}a,\ a(a_1a_1{}^{-1}) = (a_1a_1{}^{-1})a\ \ (a, a_1 \in A) >$$

şeklinde elde edilir. Not 2.4.15 kullanılarak $GBR(M; \beta, \gamma; 1)$ in bir monoid sunuşu

$$< A, A^{-1}, b, b^{-1}, y, y^{-1} \mid R', bb^{-1} = 1, \tag{5.13}$$
$$yy^{-1} = 1, \tag{5.14}$$
$$ba = (a\beta)b, ab^{-1} = b^{-1}(a\beta), \tag{5.15}$$
$$ya = (a\gamma)y, ay^{-1} = y^{-1}(a\gamma), \tag{5.16}$$
$$yb = y, yb^{-1} = y, by^{-1} = y^{-1}, b^{-1}y^{-1} = y^{-1}, \tag{5.17}$$
$$aa^{-1} = a^{-1}a, \tag{5.18}$$
$$a = aa^{-1}a, \tag{5.19}$$
$$a(a_1a_1{}^{-1}) = (a_1a_1{}^{-1})a, \tag{5.20}$$
$$v = vv^{-1}v, vv^{-1}rr^{-1} = rr^{-1}vv^{-1} \tag{5.21}$$
$$(a, a_1 \in A), (v, r \in (A \cup A^{-1} \cup \{b, b^{-1}, y, y^{-1}\})^* >$$

şeklindedir. Ayrıca her $a, a_1 \in A$ için,

$a^{-1}b^{-1} = (ba)^{-1}$ ($GBR(M; \beta, \gamma; 1)$ tersinir monoid)
$= ((a\beta)b)^{-1}$ (5.15) den
$= b^{-1}(a\beta)^{-1}$ ($GBR(M; \beta, \gamma; 1)$ tersinir monoid)
$= b^{-1}(a^{-1}\beta)$ (β homomorfizma)

dir. Benzer şekilde $a^{-1}y^{-1} = y^{-1}(a^{-1}\gamma)$ gösterilir. Ayrıca

$$ba^{-1} = (ab^{-1})^{-1} = (b^{-1}(a\beta))^{-1} = (a^{-1}\beta)b^{-1},$$
$$a^{-1}(a_1a_1{}^{-1}) = (a_1a_1{}^{-1}a)^{-1} = (aa_1a_1{}^{-1})^{-1} = (a_1a_1{}^{-1})a^{-1}$$

eşitlikleri gerçeklenir. Bu son bağıntı (5.18) den gelir. Yani $a^{-1}(a_1{}^{-1}a_1) = (a_1a_1{}^{-1})a^{-1}$ dir. Aynı zamanda $a^{-1} = (aa^{-1}a)^{-1} = a^{-1}aa^{-1}$ eşitliği sağlanır. O halde,

$xb^{-1} = b^{-1}(x\beta),\ bx = (x\beta)b,\ xy^{-1} = y^{-1}(x\gamma),\ yx = (x\gamma)y$
$x(ss^{-1}) = (ss^{-1})x,\ x = xx^{-1}x\ \ (x, s \in A \cup A^{-1})$

bağıntıları sırasıyla (5.15), (5.16), (5.20), (5.18), (5.19) ve (5.21) bağıntılarının birer sonucudur. Diğer taraftan bir $v \in (A \cup A^{-1} \cup \{b, b^{-1}, y, y^{-1}\})^*$ kelimesi bazı $i, k, l, j \geq 0$ ve $a_1, a_2, \dots, a_t \in A \cup A^{-1}$ için (5.13), (5.14), (5.15) ve (5.16) bağıntıları kullanılarak $v = y^{-i}b^{-k}a_1a_2 \dots a_tb^ly^j$ biçminde alınır. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
v\,v^{-1} &= y^{-i}b^{-k}a_1a_2 \dots a_tb^ly^j(y^{-i}b^{-k}a_1a_2 \dots a_tb^ly^j)^{-1} \\
&= y^{-i}b^{-k}a_1a_2 \dots a_tb^ly^j(y^{-j}b^{-l}{a_t}^{-1} \dots {a_2}^{-1}{a_1}^{-1}b^ky^i) \\
&= y^{-i}b^{-k}a_1a_2 \dots a_tb^ly^jy^{-j}b^{-l}{a_t}^{-1} \dots {a_2}^{-1}{a_1}^{-1}b^ky^i \\
&= y^{-i}b^{-k}a_1a_2 \dots a_tb^lb^{-l}{a_t}^{-1} \dots {a_2}^{-1}{a_1}^{-1}b^ky^i \\
&= y^{-i}b^{-k}a_1a_2 \dots a_t{a_t}^{-1} \dots {a_2}^{-1}{a_1}^{-1}b^ky^i \\
&= y^{-i}b^{-k}(a_t{a_t}^{-1})a_1a_2 \dots a_{t-1}{a_{t-1}}^{-1} \dots {a_2}^{-1}{a_1}^{-1}b^ky^i \qquad \text{(5.20) den} \\
&= \dots \\
&= y^{-i}b^{-k}(a_t{a_t}^{-1}) \dots (a_1{a_1}^{-1})b^ky^i
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. Bu eşitlik sağdan v ile çarpıldığında,

$$
\begin{aligned}
v\,v^{-1}\,v &= y^{-i}b^{-k}(a_t{a_t}^{-1}) \dots (a_1{a_1}^{-1})b^ky^iy^{-i}b^{-k}a_1a_2 \dots a_tb^ly^j \\
&= y^{-i}b^{-k}(a_t{a_t}^{-1}) \dots (a_1{a_1}^{-1})b^kb^{-k}a_1a_2 \dots a_tb^ly^j \qquad \text{(5.14) den} \\
&= y^{-i}b^{-k}(a_t{a_t}^{-1}) \dots (a_1{a_1}^{-1})a_1a_2 \dots a_tb^ly^j \qquad \text{(5.13) den} \\
&= y^{-i}b^{-k}(a_t{a_t}^{-1}) \dots a_1{a_1}^{-1}a_1a_2 \dots a_tb^ly^j \\
&= y^{-i}b^{-k}(a_t{a_t}^{-1}) \dots (a_2{a_2}^{-1})a_1a_2 \dots a_tb^ly^j \qquad \text{(5.19) den} \\
&= y^{-i}b^{-k}a_1(a_t{a_t}^{-1}) \dots (a_2{a_2}^{-1})a_2 \dots a_tb^ly^j \qquad \text{(5.20) den} \\
&= y^{-i}b^{-k}a_1(a_t{a_t}^{-1}) \dots (a_3{a_3}^{-1})a_2a_3 \dots a_tb^ly^j \qquad \text{(5.19) den} \\
&= \cdots \\
&= y^{-i}b^{-k}a_1a_2 \dots a_tb^ly^j \\
&= v
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece $v = v\,v^{-1}\,v\ \ (v \in (A \cup A^{-1} \cup \{b, b^{-1}, y, y^{-1}\})^*)$ bağıntısı (5.13)-(5.20) deki bağıntıların bir sonucudur. O halde, bu bağıntı sunuştan çıkarılabilir. Diğer taraftan verilen $r \in (A \cup A^{-1} \cup \{b, b^{-1}, y, y^{-1}\})^*$ kelimesi bazı $p, n, m, q \geq 0$ ve

$a_1', a_2', \dots, a_s' \in A \cup A^{-1}$ için $r = y^{-p}b^{-n}a_1'a_2' \dots a_s'b^m y^q$ biçimindedir. rr^{-1} de vv^{-1} ile aynı formda yazılırsa,

$$vv^{-1}rr^{-1} = y^{-i}b^{-k}(a_t a_t{}^{-1}) \dots (a_1 a_1{}^{-1})b^k y^i y^{-p}b^{-n}\left(a_s' a_s'{}^{-1}\right) \dots (a_1' a_1'{}^{-1})b^n y^p$$

elde edilir.

Eğer $i > p$ ve $n < i - p$ ise

$$\begin{aligned}
vv^{-1}rr^{-1} &= y^{-i}b^{-k}(a_t a_t{}^{-1}) \dots (a_1 a_1{}^{-1})b^k y^{i-p}b^{-n}\left(a_s' a_s'{}^{-1}\right) \dots (a_1' a_1'{}^{-1})b^n y^p \\
&= y^{-i}b^{-k}(a_t a_t{}^{-1}) \dots (a_1 a_1{}^{-1})b^k y^{i-p}\left(a_s' a_s'{}^{-1}\right) \dots \left(a_1' a_1'{}^{-1}\right)b^n y^p && \text{(5.17) den} \\
&= y^{-i}b^{-k}(a_t a_t{}^{-1}) \dots (a_1 a_1{}^{-1})b^k(\left(a_s' a_s'{}^{-1}\right) \dots (a_1' a_1'{}^{-1}))\gamma^{i-p}y^{i-p}b^n y^p && \text{(5.16) dan} \\
&= y^{-i}b^{-k}(a_t a_t{}^{-1}) \dots (a_1 a_1{}^{-1})b^k(\left(a_s' a_s'{}^{-1}\right) \dots (a_1' a_1'{}^{-1}))\gamma^{i-p}y^i && \text{(5.17) den} \\
&= y^{-i}b^{-k}(a_t a_t{}^{-1}) \dots (a_1 a_1{}^{-1})(((\left(a_s' a_s'{}^{-1}\right) \dots (a_1' a_1'{}^{-1}))\gamma^{i-p})\beta^k b^k y^i && \text{(5.15) den}
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
rr^{-1}vv^{-1} &= y^{-p}b^{-n}\left(a_s' a_s'{}^{-1}\right) \dots (a_1' a_1'{}^{-1})b^n y^p\, y^{-i}b^{-k}(a_t a_t{}^{-1}) \dots (a_1 a_1{}^{-1})b^k y^i \\
&= y^{-p}b^{-n}\left(a_s' a_s'{}^{-1}\right) \dots (a_1' a_1'{}^{-1})b^n\, y^{-i+p}b^{-k}(a_t a_t{}^{-1}) \dots (a_1 a_1{}^{-1})b^k y^i \\
&= y^{-p}b^{-n}\left(a_s' a_s'{}^{-1}\right) \dots (a_1' a_1'{}^{-1})\, y^{-i+p}b^{-k}(a_t a_t{}^{-1}) \dots (a_1 a_1{}^{-1})b^k y^i && \text{(5.17) den} \\
&= y^{-p}b^{-n}\, y^{-i+p}(\left(\left(a_s' a_s'{}^{-1}\right) \dots \left(a_1' a_1'{}^{-1}\right)\right)\gamma^{i-p})b^{-k}(a_t a_t{}^{-1}) \dots (a_1 a_1{}^{-1})b^k y^i && \text{(5.16) dan} \\
&= y^{-i}(\left(\left(a_s' a_s'{}^{-1}\right) \dots \left(a_1' a_1'{}^{-1}\right)\right)\gamma^{i-p})b^{-k}(a_t a_t{}^{-1}) \dots (a_1 a_1{}^{-1})b^k y^i && \text{(5.17) den} \\
&= y^{-i}b^{-k}(\left(\left(a_s' a_s'{}^{-1}\right) \dots \left(a_1' a_1'{}^{-1}\right)\right)\gamma^{i-p})\beta^k(a_t a_t{}^{-1}) \dots (a_1 a_1{}^{-1})b^k y^i
\end{aligned}$$

olduğu görülür. O halde, her $v, r \in (A \cup A^{-1} \cup \{b, b^{-1}, y, y^{-1}\})^*$ kelimeleri için $vv^{-1}rr^{-1} = rr^{-1}vv^{-1}$ bağıntısı (5.13)-(5.20) bağıntılarının bir sonucudur. Bu bağıntı, sunuştan çıkarılırsa $GBR(M; \beta, \gamma; 1)$ in monoid sunuşu,

$$\begin{aligned}
< A, A^{-1}, b, b^{-1}, y, y^{-1} \mid R',\ & bb^{-1} = 1,\quad yy^{-1} = 1 \\
& ba = (a\beta)b,\ ab^{-1} = b^{-1}(a\beta) \\
& ya = (a\gamma)y,\ ay^{-1} = y^{-1}(a\gamma) \\
& yb = y,\ yb^{-1} = y,\ by^{-1} = y^{-1},\ b^{-1}y^{-1} = y^{-1} \\
& a = aa^{-1}a
\end{aligned}$$

$$a(a_1{a_1}^{-1}) = (a_1{a_1}^{-1})a \quad (a, a_1 \in A) >$$

şeklinde elde edilir. A ve R' sonlu olduğu için $GBR(M;\beta,\gamma;1)$ de bir monoid olarak sonlu sunumludur.

5.4.3. Terslenebilir elemanlarının grubu sonlu üreteçli olmayan bir monoid örneği

Bir M monoidinin ve $U(M)$ nin (yani M monoidinin terslenebilir elemanlarının oluşturduğu grup) özellikleri arasındaki ilişki uzun yıllardır çalışma konusu olmuştur. Bu konu ile ilgili olarak Adjan (1966) da özel monoidler ve bu monoidlerin terslenebilir elemanlarının oluşturduğu gruplar için sonlu sunumluluk ve çözülebilir kelime problemi üzerine bir çalışma yapmıştır. Sonrasında Zhang (1991) de özel monoidler için eşlenik problemini ve terslenebilir elemanlarının oluşturduğu gruplar için indirgenmiş eşlenik problemini ele almıştır. Ayrıca Zhang (1992) de özel monoidlerin terslenebilir elemanlarının oluşturduğu grupların sonlu sunumlu olduğunu ispatlamıştır. Carvalho ve Ruškuc (2007) de sonsuz ranklı bir serbest grubun Bruck-Reilly genişlemesinin Bruck-Reilly genişlemesini ele alarak bu monoidin terslenebilir elemanlarının oluşturduğu grubu sonsuz üreteç kümesine sahip iken monoidin sonlu sunumlu olduğunu göstermiştir. Benzer şekilde Karpuz (2010) da yazar, bununla ilgili olarak farklı bir monoid örneği vermiştir.

Tezin bu bölümünde terslenebilir elemanlarının oluşturduğu grubun sonlu üreteçli olmayan fakat kendisi sonlu sunumlu olan bir diğer monoid (sonsuz ranklı bir serbest grubun Bruck-Reilly genişlemesinin genelleştirilmiş Bruck-Reilly *-genişlemesi) örneği verilmiştir. Bu bölümde yer alan sonuç (Oğuz ve Karpuz, 2015c) çalışmasında verilmiştir.

Teorem 5.4.11: Sonsuz ranklı bir serbest grubun Bruck-Reilly genişlemesinin genelleştirilmiş Bruck-Reilly $*$- genişlemesi $GBR(BR(FG_\infty,\theta),\beta,\gamma;u)$ monoidi T ile gösterilsin. Bu durumda, (5.35) de verilen sonlu sunumlu T monoidinin terslenebilir elemanlarının oluşturduğu grup sonlu üreteçli değildir.

İspat: $FG_\infty = \langle a_0, a_1, \dots {a_0}^{-1}, {a_1}^{-1}, \dots \mid {a_i}^{-\varepsilon} a_i{}^{\varepsilon} = 1, \varepsilon = \pm 1, i = 0,1, \dots \rangle$ sonsuz ranklı serbest grubun bir sunuşu ve $\theta: FG_\infty \to FG_\infty$ endomorfizması ${a_i}^{\varepsilon} \mapsto {a_{i+1}}^{\varepsilon}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$\langle {a_i}^{\varepsilon}, b, c \mid {a_i}^{-\varepsilon} a_i{}^{\varepsilon} = 1, bc = 1, b{a_i}^{\varepsilon} = {a_{i+1}}^{\varepsilon} b, {a_i}^{\varepsilon} c = c{a_{i+1}}^{\varepsilon} \ (\varepsilon = \mp 1, i \geq 0)\rangle \quad (5.22)$$

$BR(FG_\infty,\theta)$ nın bir sunuşudur. $bc=1$ ve $ba_i{}^{\varepsilon}=a_{i+1}{}^{\varepsilon}b$ bağıntıları kullanılarak $a_{i+1}{}^{\varepsilon}=ba_i{}^{\varepsilon}c$ elde edilir. O halde, $i=0$ için $a_i{}^{\varepsilon}=ba_0{}^{\varepsilon}c$, $i=1$ için $a_2{}^{\varepsilon}=ba_1{}^{\varepsilon}c=b^2a_0{}^{\varepsilon}c^2$ olduğu görülür ve tümevarım metoduyla $\varepsilon=\pm1$ ve $i\geq0$ için,

$$a_i{}^{\varepsilon}=b^ia_0{}^{\varepsilon}c^i \tag{5.23}$$

elde edilir. Bu durumda, (5.23) kullanılarak (5.22) sunuşundan tüm $a_i{}^{\varepsilon}$ $(\varepsilon=\pm1,\ i\geq0)$ üreteçleri silinebilir. Kolaylık olması açısından $a_0{}^{\varepsilon}$ yerine a^{ε} kullanılırsa sonlu üreteçli olan fakat sonlu sunumlu olmayan $BR(FG_\infty,\theta)$ nın sunuşu

$$< a,a^{-1},b,c \mid b^ia^{-\varepsilon}c^ib^ia^{\varepsilon}c^i,\ bc=1, \tag{5.24}$$
$$b^{i+1}a^{\varepsilon}c^i=b^{i+1}ac^{i+1}b, b^ia^{\varepsilon}c^{i+1}=cb^{i+1}a^{\varepsilon}c^{i+1}\ (\varepsilon=\pm1, i\geq0)>$$

şeklinde elde edilir. (5.24) de sunuşu verilen $BR(FG_\infty,\theta)$ nın genelleştirilmiş Bruck-Reilly $*$- genişlemesini ele alalım. $\beta,\gamma: BR(FG_\infty,\theta)\to H_1{}^*$ ($H_1{}^*$, FG_∞ nin birim elemanını içeren H^*-sınıfını göstermektedir) homomorfizmaları

$$\beta: b\mapsto b,\ c\mapsto c,\ a^{\varepsilon}\mapsto ba^{\varepsilon}c, \tag{5.25}$$
$$\gamma: b\mapsto b,\ c\mapsto c,\ a^{\varepsilon}\mapsto ba^{\varepsilon}c\ (\varepsilon=\pm1)$$

şeklinde tanımlansın. Şimdi (5.25) de verilen β ve γ homomorfizmalarının $BR(FG_\infty,\theta)$ da sağlandığını gösterelim:

$$\left(b^ia^{-\varepsilon}c^ib^ia^{\varepsilon}c^i\right)\beta=b^i.b\ a^{-\varepsilon}cc^ib^ib\ a^{\varepsilon}cc^i=1=1\beta$$
$$\left(b^ia^{\varepsilon}c^i\right)\beta=b^{i+1}.b\ a^{\varepsilon}c.c^i=b^{i+2}a^{\varepsilon}c^{i+1}=b^{i+2}a^{\varepsilon}c^{i+2}b=(b^{i+2}a^{\varepsilon}c^{i+1}b)\beta$$

dır. Benzer şekilde γ için de gösterilir. Böylece $T=GBR(BR(FG_\infty,\theta),\beta,\gamma;u)$ monoidi,

$$< a,a^{-1},b,c,y,z,\bar{b},\bar{c} \mid b^ia^{-\varepsilon}c^ib^ia^{\varepsilon}c^i=1, \tag{5.26}$$
$$bc=1, \tag{5.27}$$
$$b^{i+1}a^{\varepsilon}c^i=b^{i+1}a^{\varepsilon}c^{i+1}\,b,\ b^ia^{\varepsilon}c^{i+1}=cb^{i+1}a^{\varepsilon}c^{i+1}, \tag{5.28}$$
$$\bar{b}\bar{c}=1,\ yz=1, \tag{5.29}$$

$$\bar{b}a^{\varepsilon} = (a^{\varepsilon}\beta)\bar{b}, a^{\varepsilon}\bar{c} = \bar{c}\,(a^{\varepsilon}\beta), \tag{5.30}$$

$$ya^{\varepsilon} = (a^{\varepsilon}\gamma)y, a^{\varepsilon}z = (a^{\varepsilon}\gamma), \tag{5.31}$$

$$yb = uy, bz = zu, uyc = y, czu = z, \tag{5.32}$$

$$y\bar{b} = uy,\ \bar{b}z = zu, uy\bar{c} = y, \bar{c}zu = z,$$

$$\bar{b}b = b\bar{b},\ \bar{b}c = \bar{c}\,b,$$

$$\bar{b}b = (b\beta)\bar{b},\ c\bar{c} = \bar{c}\,c,\ b\bar{c} = \bar{c}\,b, \tag{5.33}$$

$$yb = by,\ yc = cy,$$

$$bz = zb,\ cz = zc > \tag{5.34}$$

sunuşu ile tanımlıdır. Şimdi (5.26) bağıntısını soldan $\bar{b}$ ve sağdan $\bar{c}$ ile çarpalım. (5.29)-(5.34) de verilen bağıntılar kullanılarak

$$\bar{b}b^{i}a^{-\varepsilon}c^{i}b^{i}a^{\varepsilon}c^{i}\bar{c} = \bar{b}\bar{c} \quad \Rightarrow\ b^{i}.ba^{-\varepsilon}c.c^{i}b^{i}.ba^{\varepsilon}c.c^{i}\bar{b}\bar{c} = 1$$
$$\Rightarrow\ b^{i+1}a^{-\varepsilon}c^{i+1}b^{i+1}a^{\varepsilon}c^{i+1} = 1$$

elde edilir. Bu durumda, (5.26) da verilen tüm bağıntıların $a^{-\varepsilon}a^{\varepsilon} = 1$ ve (5.29) - (5.34) bağıntılarının bir sonucu olduğunu görmek kolaydır. Benzer şekilde (5.28) de verilen bağıntılar $i = 1$ için (5.28) deki bağıntıların ve (5.29)-(5.34) de verilen bağıntıların bir sonucudur. O halde, sonlu sunumlu olan T monoidinin sunuşu

$$< a, a^{-1}, b, c, y, z, \bar{b}, \bar{c} \mid aa^{-1} = a^{-1}a = bc = \bar{b}\bar{c} = yz = 1,$$
$$ba^{\varepsilon} = ba^{\varepsilon}cb, a^{\varepsilon}c = cba^{\varepsilon}c,$$
$$b^{i+1}a^{\varepsilon}ci = b^{i+1}a^{\varepsilon}c^{i+1}b,\ b^{i}a^{\varepsilon}c^{i+1} = cb^{i+1}a^{\varepsilon}c^{i+1},$$
$$\bar{b}a^{\varepsilon} = ba^{\varepsilon}c\bar{b}, a^{\varepsilon}\bar{c} = \bar{c}ba^{\varepsilon}c, \tag{5.35}$$
$$ya^{\varepsilon} = ba^{\varepsilon}cy, a^{\varepsilon}z = zba^{\varepsilon}c,$$
$$yb = uy, bz = zu, uyc = y, czu = z,$$
$$y\bar{b} = uy, \bar{b}z = zu, uy\bar{c} = y, \bar{c}zu = z,$$
$$\bar{b}b = b\bar{b}, \bar{b}c = c\bar{b}, c\bar{c} = \bar{c}c, b\bar{c} = \bar{c}b,$$
$$yb = by, yc = cy, bz = zb, cz = zc >$$

şeklindedir. Not 4.4.6 da verilen (BR3) ve Not 5.4.4 de verilen (GBR2) özellikleri yardımıyla

$$U(T) = U\big(GBR(BR(FG_\infty, \theta), \beta, \gamma; u)\big) \cong U\big(BR(FG_\infty, \theta)\big) \cong \{0\} \times U(FG_\infty) \times \{0\} \cong U(FG_\infty) = FG_\infty$$

olduğu görülür. Dolayısıyla T nin terslenebilir elemanlarının oluşturduğu grup FG_∞'a izomorf olduğundan sonlu üreteçli değildir. □

6. SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRMELER

6.1. Sonuçlar

Bu tezde elde edilen yeni sonuçlar tezin dördüncü ve beşinci bölümlerinde bulunmaktadır. Bu sonuçlar aşağıda paragraflar halinde verilmiştir.

Dördüncü bölümün "4.2.1. Bir monoidin Bruck-Reilly genişlemesi üzerinde bazı özel yarıgrup sınıfları" alt bölümünde monoidlerin Bruck-Reilly genişlemesinin önemli görülen özel yarıgrup sınıflarından terslenebilir regüler, tamamen regüler ve orthodox yarıgruplara ait olabilmesi için gerek ve yeter koşullar ispatlanmıştır. Aynı bölümün "4.2.2. k sayıda monoidin direkt çarpımının Bruck-Reilly genişlemesi üzerinde bazı özel yarıgrup sınıfları" alt bölümünde ise k sayıda monoidin direkt çarpımının Bruck-Reilly genişlemesinin, özel yarıgrup sınıflarından regüler, tersinir regüler tamamen regüler ve orthodox yarıgruplara ait olabilmesi için gerek ve yeter şartlar verilmiştir.

Beşinci bölümde ise bu tezin ana konusunu oluşturan genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemesi ile ilgili çalışmalar yer almaktadır. İlk olarak bu bölümün "5.2.1. Bir monoidin genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemesi üzerinde bazı özel yarıgrup sınıfları" alt bölümünde monoidlerin genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemesinin özel yarıgrup sınıflarından terslenebilir regüler, tamamen regüler ve orthodox yarıgrup sınıflarına ait olabilmesi için gerek ve yeter koşullar ispatlanmıştır. Sonrasında "5.2.2. k sayıda monoidin direkt çarpımının genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemesi üzerinde bazı özel yarıgrup sınıfları" alt bölümünde, verilen özel monoidin regüler, terslenebilir regüler, tamamen regüler ve orthodox yarıgrup sınıflarına ait olabilmesi için gerek ve yeter koşular verilmiştir. Beşinci bölümün "5.3. Genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- Genişlemesi Üzerinde Kongrüanslar" alt bölümünde bu genişleme türü üzerinde grup kogrüans, anonim kongrüans ve çapraz kongrüans olmak üzere üç tip kongrüans kategorize edilmiştir. "5.4.1. Bir grubun genelleştirilmiş Bruck-Reilly *-genişlemesinin sonlu üreteçliliği ve sonlu sunumluluğu" alt bölümünde bir grubun genelleştirilmiş Bruck-Reilly *-genişlemesi $GBR^*(G;\beta,\gamma;u)$ nin sonlu üreteçli olması için gerek ve yeter koşulun $(\cup_{i\geq 0} X_0\beta^i) \cup (\cup_{j\geq 0} X_0\gamma^j)$, G nin bir üreteç kümesi olacak şekilde sonlu bir $X_0 \subseteq G$ kümesi olması gerektiği ispatlanmıştır. Bu alt bölümde yer alan diğer ana teoremde ise bir G grubunun genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemesi $GBR^*(G;\beta,\gamma;u)$ nin sonlu sunumlu olması için gerek ve yeter şart verilmiştir. Sonrasında "5.4.2. Clifford monoidin genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemesinin

sonlu sunumluluğu" alt bölümünde bir Clifford monoidin genelleştirilmiş Bruck-Reilly *- genişlemesinin ($u = 1$ alınarak) bir monoid olarak sonlu sunumlu olabilmesi için gerek ve yeter koşulun bir tersinir monoid olarak sonlu sunumlu olduğu ispatlanmıştır. Bu bölümün son alt bölümü olan "5.4.3. Terslenebilir elemanlarının grubu sonlu üreteçli olmayan bir monoid örneği" kısmında ise terslenebilir elemanlarının oluşturduğu grubun sonlu üreteçli olmayan fakat kendisi sonlu sunumlu olan bir monoid (sonsuz ranklı bir serbest grubun Bruck-Reilly genişlemesinin genelleştirilmiş Bruck-Reilly *-genişlemesi) örneği verilmiştir.

KAYNAKLAR

Abu-Ghazalh, N. H., 2013, Finiteness conditions for unions of semigroups, Ph.D. Thesis, *University of St. Andrews*, St. Andrews.

Adjan, S. I., 1966, Defining relations and algorithmic problems for groups and semigroups, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 85, 1-152.

Araujo, I. M., 2000, Presentations for semigroup constructions and related computational methods, Ph.D. Thesis, *University of St. Andrews*, St. Andrews.

Araujo, I. M., Ruškuc, N., 2000, On finite presentability of direct product of two semigroups, *Algebra Colloquium*, 7, 83-91.

Araujo, I. M., 2001, Ruškuc, N., Finite presentability of Bruck-Reilly extensions of groups, *Journal of Algebra*, 242, 20-30.

Asibong-Ibe, U., 1985, *-Bisimple type A *w*-semigroups, *Semigroup Forum*, 31, 99-117.

Ateş, F., Karpuz, E. G., Kocapınar, C., Çevik. A. S., 2011, Gröbner-Shirshov bases of some monoids, *Discrete Mathematics*, 311(1), 1064-1071.

Ault, J. E., 1975, Group congruences on a bisimple *w*-semigroup, *Semigroup Forum*, 10, 351-366.

Ayık, G., Ayık, H., Ünlü, Y., 2005, Presentations and word problem for strong semilattices of semigroups, *Algebra and Discrete Mathematics*, 4, 28-35.

Ayık, H., 1998, Presentations and efficiency of semigroups, Ph.D. Thesis, *University of St. Andrews*, St. Andrews.

Ayık, H., Ruškuc N., 1999, Generators and relations of Rees matrix semigroups, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 42, 481-495.

Ayık, H., 2005, On finiteness conditions of Rees matrix semigroups, *Czechoslovak Mathematical Journal*, 55, 455-463.

Baumslag, B., Tretkoff, M., 1978, Residually finite HNN extensions, *Communications in Algebra*, 6, 179-194.

Baumslag, G., 1993, Topics in combinatorial group theory, *Birkhauser*, Verlag, Basel.

Bruck, N. R., 1958, Bisimple w-semigroups, *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, 7, 160-167.

Campbell, C. M., Robertson, E. F., Ruškuc, N., Thomas, R., M., 1995, Reidemeister-Schreier type rewriting semigroups, *Semigroup Forum*, 51, 47-62.

Campbell, C. M., Robertson, E. F., Ruškuc, N., Thomas, R., M., 1996, On subsemigroups of finitely presented semigroups, *Journal of Algebra*, 180,1-21.

Carvalho, C., 2009a, On presentations of Bruck-Reilly extensions, *Communications in Algebra*, 34, 2871-2886.

Carvalho, C., 2009b, Bruck-Reilly extensions of direct products of monoids and completely (0)-simple semigroups, *Semigroup Forum*, 79, 145-158.

Cohen, D. E., 1989 Combinatorial group theory: topological approach, *Cambridge University Press*., Cambridge.

Gallagher, P., Ruškuc, N., 2007, On finite generation and presentability of Schützenberger products, *J. Aust. Math. Soc.*, 83, 357-367.

Harju, T., Linna M., 1986, On the periodicity of morphisms on free monoids, *Theoratical Informatics and Applications*, 20, 47-54.

Higgins, P. M., 1992, Tecniques of semigroup theory, *Oxford University Press*., Newyork.

Howie, J. M., Ruškuc, N., 1994, Constructions and presentations for monoids, *Communications in Algebra*, 22(1), 6209-6224.

Howie, J. M., 1995, Fundamentals of semigroup theory, *Clarendon Pres*., Oxford.

Johnson, D. L., 1990, Presentations of groups, LMS Lecture Note Series, *Cambridge University Press*., Cambridge.

Jura, A., 1978, Coset enumeration in a finitely presented semigroup, *Canad. Math. Bull*., 21, 37-46.

Karpuz, E. G., Çevik, A. S., 2009, The word and generalized word problem for semigroups under wreath products, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie Tome*, 52(100), 151-160.

Kocapınar, C., Karpuz, E. G., Ateş, F., Çevik. A. S., 2012, Gröbner-Shirshov bases of the generalized Bruck-Reilly *-extension, *Algebra Colloquim*, 19(1), 813-820.

Kocin, B. P., 1968, The structure of inverse ideal-simple w-semigroups, *Vestnik Leningrad Univ.*, 23(7), 41-50

Lallement, G., 1979, Semigroups and combinatorial applications, John Wiley & Sons, Newyork.

Lyndon, R. C., Schupp, P. E., 1977, Combinatorial group theory, Springer-Verlag.

Mazzucchelli, M., Cherubini, A., 2008, On the decidability of the word problem for amalgamated free products of inverse semigroups, *Semigroup Forum*, 76, 309-329.

Munn, W. D., Reilly, N. R., 1966, Congruences on a bisimple w-semigroups, *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, 7, 184-192.

Munn, W., 1970, On simple inverse semigroups, *Semigroup Forum*, 1, 63-74.

Neumann, B. H., 1967, Some remarks on semigroup presentations, *Canad. J. Math*, 19, 1018-1026.

Oğuz, S., Karpuz, E. G., 2015a, Some semigroup classes and congruences on Bruck-Reilly and generalized Bruck-Reilly *- extensions of monoids, *Asian-European Journal of Mathematics*, kabul edildi, DOI: 10.1142/S1793557115500758.

Oğuz, S., Karpuz, E. G., 2015b, Finite presentability of generalized Bruck-Reilly *-extension of groups, gönderildi.

Oğuz, S., Karpuz, E. G., 2015c, Special semigroup classes over some monoid constructions and a new example of a monoid with a non-finitely generated group of units, gönderildi.

Petrich, M., 1973, Introduction to semigroups, E. Kleinfeld, C. E. Merril, *Publishing Co.*, Columbus, Ohio.

Petrich, M., 1979, Congruences on simple w-semigroups, *Glasgow Math. J.*, 20, 87-101.

Piochi, B., 1995, Congruences on Bruck-Reilly extensions of monoids, *Semigroup Forum*, 50, 179-191.

Rankin, S. A., 1991, Congruences on an inverse Bruck-Reilly monoid, *Semigroup Forum*, 42, 279-292.

Reilly, N. R., 1966, Bisimple w-semigroups, *Proc. Glasgow Math. Assoc*., 7, 160-167.

Robertson, E. F., Ruškuc, N., Thomson, M. R., 2001, On finite generation and other finiteness conditions for wreath products of semigroups, *Communications in Algebra*, 30 (8), 3851-3873.

Rotman, J. J., 1994, An introduction to the theory of groups, *Springer Verlag*, Berlin.

Ruškuc, N., 1995, Semigroup presentations, Ph.D. Thesis, *University of St Andrews*.

Ruškuc, N., 1998, On large subsemigroups and finiteness conditions of semigroups, *Proc. London. Math. Soc.*, 76, 383-405.

Ruškuc, N., 1999, Presentations for subgroups of monoids, *Journal of Algebra*, 220, 365-380.

Ruškuc, N., Thomas R. M., 1998, Syntactic and Rees indices of subsemigroups, *Journal of Algebra*, 205, 435-450.

Shung, Y., Wang, L. M, 2008, *-Bisimple type a w^2-semigroups as generalized Bruck-Reilly *-extensions, *Southeast Asian Bulletin of Math.*, 32, 343-361.

Zhang, L., 1991, Congujacy in special monoids, *Journal of Algebra*, 143, 487-497.

Zhang, L., 1992, Applying rewriting methods to special monoids, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 112, 495-505.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Seda Oğuz
Uyruğu	**:**	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	İskenderun – 21.04.1984
Telefon	**:**	0537 650 9337
Faks	**:**	
e-mail	**:**	sdaoguz@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Balıkesir Anadolu Lisesi, Merkez, Balıkesir	2002
Üniversite	:	İstanbul Üniversitesi, Beyazıt, İstanbul	2007
Yüksek Lisans	:	Cumhuriyet Üniversitesi, Merkez, Sivas	2010
Doktora	:	Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	2015

UZMANLIK ALANI

Cebir ve Sayılar Teorisi

YABANCI DİLLER

İngilizce

YAYINLAR

1. Oguz, S., Golbasi, O., 2012, Notes on (σ, τ)- derivations of Lie ideals in prime rings, *Communications of the Korean Mathematical Society*, 27, 441-448. (Yüksek Lisans tezinden yapılmıştır)
2. Oguz, S., Karpuz, E., G., 2015, Some Semigroup Classes and Congruences on Bruck-Reilly and Generalized Bruck-Reilly *-Extensions of Monoids, *Asian European Journal of Mathematics*, kabul edildi, DOI number: 10.1142/S1793557115500758 (Doktora tezinden yapılmıştır)

YAPILAN BİLDİRİLER

1. Karpuz, E., G., Oguz, S., 2012, Some semigroup properties of Bruck-Reilly and generalized Bruck-Reilly *- extensions, *International Congress in Honour of Professor M. Hari Srivastava*, Bursa, konferansının özet kitapçığında basılmıştır.
2. Oguz, S., Karpuz, E., G., 2012, Some semigroup classes on Bruck-Reilly and generalized Bruck-Reilly *- extensions of monoids, *AGMP-8*, Brno, Czech Republic, konferansının özet kitapçığında basılmıştır.

3. Oguz, S., Karpuz, E., G., 2013, Notes on some semigroup constructions, *Antalya Algebra Days*, Şirince, İzmir, konferansının özet kitapçığında basılmıştır.

4. Oguz, S., Karpuz, E., G., 2013, Some finiteness conditions of semigroup and monoid constructions, *International Conference on Algebra in Honour of Patrick Smith's and John Clark's 70th Birthdays*, Burhaniye, Balıkesir, konferansının özet kitapçığında basılmıştır.

5. Oguz, S., Karpuz, E., G., 2014, Some semigroup classes and congruences on some semigroup constructions, *International Congress in Honour of Professor Ravi P. Agarwal*, Bursa, konferansının özet kitapçığında basılmıştır.

6. Oguz, S., Karpuz, E., G., 2015, On finiteness conditions for Bruck-Reilly and generalized Bruck-Reilly *- extensions, *28th ICJMS*, Kemer, Antalya, konferansının özet kitapçığında basılmıştır.

7. Oguz, S., Karpuz, E., G., 2015, Special semigroup classes over some monoid constructions and a new example of a monoid with a non-finitely generated group of units, *28th ICRAPAM*, İstanbul, konferansının özet kitapçığında basılmıştır.