



T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SOFT TOPOLOJİK UZAYLAR ÜZERİNE VE SOFT ÖRTÜ TABANLI ROUGH KÜMELERİN TIP ALANINDA UYGULAMASI

Zehra GÜZEL ERGÜL

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz-2015
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Zehra GÜZEL ERGÜL tarafından hazırlanan " Soft Topolojik Uzaylar Üzerine ve Soft Örtü Tabanlı Rough Kümelerin Tıp Alanında Uygulaması " adlı tez çalışması 14/07/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Prof. Dr. Cemil YILDIZ	.....
Danışman Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL	.....
Üye Prof. Dr. Eşref HATIR	.....
Üye Doç. Dr. Aynur KESKİN KAYMAKCI	.....
Üye Yrd. Doç. Dr. Yusuf BECEREN	.....

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Aşır GENÇ
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Zehra GÜZEL ERGÜL

Tarih: 14/07/2015

ÖZET

DOKTORA TEZİ

SOFT TOPOLOJİK UZAYLAR ÜZERİNE VE SOFT ÖRTÜ TABANLI ROUGH KÜMELERİN TIP ALANINDA UYGULAMASI

Zehra GÜZEL ERGÜL

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL

2015, 68 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL
Prof. Dr. Cemil YILDIZ
Prof. Dr. Eşref HATIR
Doç. Dr. Aynur KESKİN KAYMAKCI
Yrd. Doç. Dr. Yusuf BECEREN

Bu tezin amacı; bazı regüler genelleştirilmiş kapalı küme çeşitlerini soft topolojik uzaylarda, supra soft topolojik uzaylarda ve soft topolojik uzaylarda bir soft ideal kavramına dayanarak incelemektir. Ayrıca soft rough kümelerin genelleştirilmesi olan soft örtü tabanlı rough kümeleri tanımlamak ve bu kümelerin, tıp alanında hastalık teşhisinde kullanılan bir uygulamasını vermektir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; tezde kullanılan kavramların literatür bilgileri kısaca verilmiştir.

İkinci bölümde; belirsizlik için iki farklı matematiksel yaklaşım olarak önerilen rough küme ve soft küme teorileri ile ilgili bilinen temel kavramlar ve bazı özellikler verilmiştir.

Üçüncü bölümde; klasik topolojik uzaylardan daha genel olan soft topolojik uzaylar ve özellikleri hatırlatılmıştır. Soft topolojik uzaylarda daha önce tanımlanmış olan soft genelleştirilmiş kapalı kümeler ve soft regüler genelleştirilmiş kapalı kümelerden daha zayıf olan soft genelleştirilmiş pre-regüler kapalı kümeler ve özellikleri incelenmiştir. Ayrıca soft regüler genelleştirilmiş kapalı kümeler, soft ideal kavramına dayanılarak yeniden tanımlanmış ve özellikleri araştırılmıştır.

Dördüncü bölümde; soft topolojik uzaylardan daha genel olan supra soft topolojik uzay kavramı verilmiş ve bu uzaylarda supra soft regüler genelleştirilmiş kapalı kümeler ve özellikleri araştırılmıştır. Ayrıca karşıt örnekler verilerek soft regüler genelleştirilmiş kapalı kümelerin bazı özelliklerinin supra soft topolojik uzaylarda sağlanmadığı gösterilmiştir.

Son bölümde; rough kümeler ve soft örtü kümeler kullanılarak soft örtü yaklaşım uzayı elde edilmiştir. Soft rough kümelerin genelleştirilmesi olan soft örtü tabanlı rough kümeler ve çeşitleri incelenmiş, bu kümelerin temel özellikleri ve topolojik özellikleri de araştırılmıştır. Ayrıca soft örtü tabanlı rough kümeler; biyopsi gerekliliğini belirleyen ve doktorlara kanser riskinin sıralamasını veren bir metod ile birlikte kullanılmış ve sonuç olarak biyopsi yapılan hasta sayısı azaltılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Soft topolojik uzay, soft genelleştirilmiş pre-regüler kapalı kümeler, soft ideale bağlı soft regüler genelleştirilmiş kapalı kümeler, supra soft regüler genelleştirilmiş kapalı kümeler, soft rough kümeler, soft örtü tabanlı rough kümeler

ABSTRACT

Ph.D THESIS

ON SOFT TOPOLOGICAL SPACES AND APPLICATION OF SOFT COVERING BASED ROUGH SETS IN MEDICINE

Zehra GÜZEL ERGÜL

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY
IN MATHEMATICS

Advisor: Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL

2015, 68 Pages

Jury
Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL
Prof. Dr. Cemil YILDIZ
Prof. Dr. Eşref HATIR
Assoc. Prof. Dr. Aynur KESKİN KAYMAKCI
Asst. Prof. Dr. Yusuf BECEREN

The aim of this thesis is to examine some kinds of regular generalized closed sets in soft topological spaces, supra soft topological spaces and soft topological spaces depending on a concept of soft ideal. The thesis also to define soft covering based rough sets, which is an extension of the concept of soft rough sets, and to give an application which used in medicine for disease diagnosis.

This thesis consists of five sections.

In the first chapter, the literature of notions that are used in this thesis is briefly given.

In the second chapter, some basic concepts and properties related to rough set and soft set theories, which proposed as two different mathematical approaches for vagueness, are given.

In the third chapter, soft topological spaces, which are more general than the classical topological spaces and their properties, are recalled. Soft generalized pre-regular closed sets, which are weaker than the soft generalized closed sets and soft regular generalized closed sets that are defined in soft topological spaces before, and their properties are examined. Moreover, soft generalized regular closed sets are redefined depending on a concept of soft ideal and their properties are investigated.

In the fourth chapter, supra soft topological spaces, which are more general than the soft topological spaces, are given and properties of supra soft regular generalized closed sets are investigated in these spaces. Also, by giving counterexamples it is shown that some properties of soft regular generalized closed sets are not provided in supra soft topological spaces.

In the last chapter, soft covering approximation space is obtained by using the rough sets and soft covering sets. Some types of soft covering based rough sets, which is an extension of the concept of soft rough sets and basic and topological properties of these sets are investigated. Besides, soft covering based rough sets are used together with a method which determines the necessity of biopsy and gives to doctors a range of the risk of cancer. Consequently, the number of patients that are biopsied is reduced.

Keywords: Soft topological space, soft generalized pre-regular closed sets, soft regular generalized closed sets with respect to a soft ideal, supra soft regular generalized closed sets, soft rough sets, soft covering based rough sets

ÖNSÖZ

Bu çalışma Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL yönetiminde yapılarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Doktora Tezi olarak sunulmuştur.

Bu tezin hazırlanmasında değerli fikir ve tecrübeleriyle bana büyük destek sağlayan, özveri ve sabırla yol gösteren, akademik hayatıma başladığım günden beri deneyimleriyle yolumu aydınlatan kıymetli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL'e, minnettarlığımı, teşekkürlerimi, saygılarımı ve sevgilerimi sunarım.

Hayatımın her döneminde benden desteklerini, sevgilerini ve ilgilerini esirgemeyen, her zaman yanımda olan sevgili aileme teşekkür ederim.

Zehra GÜZEL ERGÜL
KONYA-2015

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

SİMGELER VE KISALTMALAR ..... **viii**

1. GİRİŞ ve KAYNAK ARAŞTIRMASI **1**

2. TEMEL KAVRAMLAR **5**

2.1. Rough Kümeler 5
2.2. Soft Kümeler 8
2.3. Rough Kümeler ve Soft Kümeler Arasındaki İlişki 12

3. SOFT TOPOLOJİK UZAYLARDA BAZI SOFT GENELLEŞTİRİLMİŞ KAPALI KÜMELER **16**

3.1. Soft Topolojik Uzaylar 16
3.2. Soft Topolojik Uzaylarda Soft Genelleştirilmiş Pre-regüler Kapalı Kümeler 20
3.3. Soft İdeal Topolojik Uzaylarda Soft Regüler Genelleştirilmiş Kapalı Kümeler 27

4. SUPRA SOFT TOPOLOJİK UZAYLARDA SUPRA SOFT REGÜLER GENELLEŞTİRİLMİŞ KAPALI KÜMELER **36**

4.1. Supra Soft Topolojik Uzaylar 36
4.2. Supra Soft Topolojik Uzaylarda Supra Soft Regüler Genelleştirilmiş Kapalı Kümeler 37

5. SOFT ÖRTÜ TABANLI ROUGH KÜMELER VE TIP ALANINDA BİR UYGULAMASI **43**

5.1. Soft Rough Kümeler 43
5.2. Soft Örtü Tabanlı Rough Kümeler 46
5.3. Soft Örtü Tabanlı Rough Kümelerin Tıp Alanında Bir Uygulaması 55

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER **63**

6.1 Sonuçlar 63
6.2 Öneriler 64

KAYNAKLAR **65**

ÖZGEÇMİŞ **69**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$=$: Eşittir
$\neq$: Eşit değildir
$\in$: Ait
$\notin$: Ait değildir
$\forall$: Her
$\exists$: Vardır
$\ni$: Öyleki
$\Longrightarrow$: Gerek koşul
$\Longleftarrow$: Yeter koşul
$\Leftrightarrow$: Gerek ve yeter koşul
$\emptyset$: Boş küme
X : Evren küme
$\mathcal{P}(X)$: Güç kümesi
$\subseteq$: Alt küme
$\cup$: Birleşim
$\cap$: Kesişim
A^c : Tümleyen
$\mathcal{R}$: Denklik bağıntısı
$X/\mathcal{R}$: Bölüm kümesi
$[x]_{\mathcal{R}}$: x noktasının denklik sınıfı
$(X, \mathcal{R})$: Yaklaşım uzayı
(X, A) : Bilgi sistemi
$IND_{(X,A)}(B)$: B-ayırt edilmezlik bağıntısı
$com(X, \mathcal{R})$: Kompoze kümelerin ailesi
$\mathcal{R}_$: Alt yaklaşım
$\mathcal{R}^-$: Üst yaklaşım
POZ : Pozitif bölge
NEG : Negatif bölge
SNR : Sınır bölge
E : Parametre kümesi
$G = (F, E)$: Soft küme
$\mathcal{S}(X, E)$: Soft kümelerin ailesi
ϕ_E : Boş soft küme
$\tilde{E}$: Tam soft küme
$\tilde{\in}$: Soft ait
$\tilde{\notin}$: Soft ait değildir
$\sqsubseteq$: Soft alt küme
$\sqcup$: Soft birleşim
$\sqcap$: Soft kesişim
$(F, A)'$: Soft relative tümleyen
$(X, \tilde{\tau}, E)$: Soft topolojik uzay
$\tilde{\tau}_Y$: Y üzerindeki soft relative topoloji
$\tilde{\tau}'$: Soft kapalı kümelerin ailesi
$(X, \tilde{I}, E)$: Soft ideal
$(X, \tilde{\mu}, E)$: Supra soft topolojik uzay

$\overline{(F,E)}$: (F,E) soft kümesinin soft kapanışı
$(F,E)^{\circ}$: (F,E) soft kümesinin soft içi
$\overline{(F,E)}^{P}$: (F,E) soft kümesinin soft pre-kapanışı
$(F,E)^{\circ P}$: (F,E) soft kümesinin soft pre-içi
$\overline{(F,E)}^{S}$: (F,E) soft kümesinin supra soft kapanışı
$(F,E)^{\circ S}$: (F,E) soft kümesinin supra soft içi
Md_S : Soft minimal tasvir
C_G : Soft örtü küme
$S=(X,C_G)$: Soft örtü yaklaşım uzayı
$S=(X,G)$: Soft yaklaşım uzayı
$apr_{_}$: S-soft alt yaklaşım
apr^{-} : S-soft üst yaklaşım
$S_{1_}$: 1.tip soft örtü alt yaklaşım
$S_1^{\ -}$: 1.tip soft örtü üst yaklaşım
$S_{2_}$: 2.tip soft örtü alt yaklaşım
$S_2^{\ -}$: 2.tip soft örtü üst yaklaşım
μ : Üyelik fonksiyonu
(f,A) : Fuzzy soft küme

1. GİRİŞ ve KAYNAK ARAŞTIRMASI

Günlük hayatta ya da bilimsel çalışmalarda karşılaşılan ve içerisinde belirsizlik durumları bulunduran problemleri modellemek için klasik küme yaklaşımı yetersiz kalmaktadır. Bu yüzden klasik mantığın tanımlayamadığı belirsiz kavramların matematiksel olarak ifade edilebilmesinin öneminden dolayı araştırmacılar belirsizliğe dayalı teoriler üretmişlerdir. Bunlara örnek olarak; fuzzy (bulanık) küme teorisi (Zadeh, 1965), intuitionistic fuzzy (sezgisel bulanık) küme teorisi (Atanassov, 1986), rough (kaba) küme teorisi (Pawlak, 1982) ve soft (esnek) küme teorisi (Molodtsov, 1999) verilebilir.

Klasik küme kuramında bir küme elemanlarıyla belirlenir ve kümenin elemanları hakkında ilave hiçbir bilgi bulunmaz. Bir eleman kümeye aittir ya da değildir. Bu tezde klasik küme kuramının aksine, bir kümenin tanımlanması için başlangıçta evrenin elemanları hakkında bazı bilgilere gereksinim olduğu varsayımına dayanan Pawlak (1982) tarafından verilen rough (kaba) küme teorisi ve Molodtsov (1999) tarafından verilen soft (esnek) küme teorisi üzerinde durulacaktır.

Pawlak (1982), "Rough Sets" isimli makalesinde sonlu bir evrensel küme üzerindeki bir denklik bağıntısına dayalı uzayları yaklaşım uzayı olarak adlandırmıştır. Pawlak, yaklaşım uzayında bir evrensel kümenin alt kümesi olan rough kümeyi, denklik sınıfları yardımıyla alt ve üst yaklaşım adı verilen iki küme çifti aracılığıyla tanımlamış ve temel özelliklerini incelemiştir. Ayrıca topolojik açıdan da bazı önemli sonuçlar elde etmiştir. Böylece Pawlak'ın (1982) bu makalesi topolojik kavramların rough kümelerde çalışılması için başlangıç noktası olmuştur.

Lashin ve ark. (2005) ikili bağıntılardan üretilen topolojiyi, temel rough küme kavramlarını genelleştirmede kullanmışlardır. Ayrıca topolojik uzayların rough üyelik fonksiyonları kavramını vermişler ve rough üyelik fonksiyonlarını kullanarak bir fuzzy kümenin nasıl elde edildiğini göstermişlerdir. Kozae ve ark. (2007) bilgi sistemlerinde, yaklaşım uzayında karar analizi için araç olarak klasik topolojik yapıları kullanmışlardır. Allam ve ark. (2008) ikili bağıntıları kullanarak topolojiler üretmek için bazı metodlar elde etmişler ve bu metodlar arasındaki ilişkileri incelemişlerdir. Ayrıca elde edilen topolojilerin bazı özelliklerini göstermişlerdir. Wu ve ark. (2008) topolojik rough uzay kavramını ve bu uzayın bazı özelliklerini incelemişlerdir. Ayrıca topolojik rough uzaylarda topolojik dönüşümler, homeomorfizm ve özellikleri üzerine çalışmışlardır. Zhu ve Wang (2003) klasik rough küme teorisini, Pawlak yaklaşım

uzayında denklik bağıntısı (parçalanış) yerine örtü kullanarak, örtü yaklaşım uzaylarına ve örtü tabanlı rough küme teorisine genişletmişlerdir. Zhu (2007) örtü tabanlı rough kümeleri topolojik bakımdan incelemiştir. Ayrıca bu tip rough kümelerin topolojik özelliklerini inceleyip alt ve üst yaklaşımlar arasındaki ilişkiyi ve aynı alt yaklaşımı ve üst yaklaşımı doğuran iki örtünün hangi koşullar altında elde edileceğini göstermiş, alt ve üst yaklaşım operatörleri için aksiyomatik sistemler de vermiştir. Daha sonra bazı araştırmacılar da benzer çalışmalar yapmışlardır (Zhu ve Wang, 2007; Wu ve ark., 2009).

Rough küme teorisi; veri indirgeme, nitelik indirgeme, verideki gizli ilişkilerin ortaya çıkarılması, karar analizi ve bilgi almayı hızlandırma gibi yapay zekâ alanlarındaki uygulamaları ile dikkat çekmiş ve çağımızdaki birçok probleme çözüm bulduğundan dolayı birçok araştırmacı tarafından geliştirilip, uygulama alanları genişletilmiştir. Rough küme teorisi, hızla gelişim göstermesine rağmen, parametre değeri hesaba katılmadığı için, belirsizlik ve kararsızlık içeren problemlerin modellenmesinde tam anlamıyla yeni bir yaklaşım metodu olan soft küme teorisine (Molodtsov,1999) göre bazı yapısal zorluklara sahiptir. Bu nedenle, Molodtsov sözü edilen tüm bu zorluklardan tamamen bağımsız olan soft kümeyi, bir evren kümesinin alt kümelerinin parametrelendirilmiş bir ailesi olarak tanımlamıştır. Ayrıca Molodtsov (1999), yaklaşım tanımında hiçbir kısıtlama olmayan soft küme teorisini kullanarak, sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonlar, Riemann integrasyonu, Perron integrasyonu, oyun teorisi, olasılık teorisi, ölçüm teorisi vb. alanlarda başarılı çalışmalar yapmıştır (Molodtsov, 2004).

Soft kümelerin Molodtsov tarafından ortaya atılmasından sonra, ilk olarak Maji ve ark. (2003) soft kümelerin küme-teorisel özelliklerini tanımlamışlar ve ilişkilerini incelemişlerdir. Daha sonra soft küme işlemleri üzerine birçok araştırmacı çalışmalar yapmıştır. Bunlardan bazıları; Aktaş ve Çağman, 2007; Feng ve ark., 2008; Ali ve ark., 2009; Ge ve Yang, 2011 olarak sıralanabilir.

Rough ve soft kümeler, belirsizliği modellemek için iki farklı matematiksel araç olsalar da aralarında ilginç bağlantılar vardır. Aktaş ve Çağman (2007)'da gösterildiği gibi her rough küme bir soft küme gibi düşünülebilir. Ayrıca bilgi sistemleri ve soft kümeler yakından ilişkilidir (Chen ve ark., 2005; Zou ve Xiao, 2008). Bu yüzden rough kümeler ve soft kümeler farklı açılardan da ele alınmıştır. Soft küme teorisi, belirsizlik içeren problemlerde karşılaşılan güçlüklerin çözümlenmesinde çok kullanışlı matematiksel bir araç olduğundan karar verme problemleri üzerine birçok çalışmanın

yapılmasını ve dolayısıyla soft karar verme metotlarının ortaya atılmasını sağlamıştır. Örneğin, Maji ve ark. (2002) eksik, yetersiz ve belirsiz bilgilerin düzenlenerek veri analizi için uygun hale getirildiği bir karar verme probleminde, Pawlak (1982)'ın yaklaşımlı küme teorisi yardımıyla soft kümelerin bir uygulamasını verdiler. Pei ve Miao (2005) soft kümelerin özel bilgi sistemlerinin bir sınıfı olduğunu gösterdiler. Kong ve ark. (2008) karar verme problemlerinde soft küme teorik yaklaşımını uyguladılar. Feng ve ark. (2010) soft rough kümeler olarak adlandırılan rough kümeler ve soft kümelerin bir kombinasyonunu verdiler. Aslında Pawlak (1982)'ın yaklaşımlı küme teorisinde denklik bağıntısı yerine soft kümeyi kullanarak soft yaklaşım uzayını elde ettiler. Ayrıca 2011 yılında Feng soft rough kümeleri veri analizi için uygun hale getirerek günlük hayatta uygulanabilen bir metod verdi.

Soft küme, parametrelerle belirlendiği için geniş bir alanda birçok uygulamaya sahip olduğundan literatürde birçok yazar tarafından çalışılmıştır. 2011 yılından itibaren de bazı yazarlar tarafından soft kümelerin topolojik yapısı incelenmeye başlanmıştır: Shabir ve Naz (2011) bir başlangıç evreni üzerinde parametrelerin sabitlenmiş bir kümesiyle soft topoloji kavramını tanımlamış ve soft topolojik uzayda soft açık küme, soft kapalı küme, soft iç nokta, soft kapanış noktası gibi temel kavramları vermişlerdir. Ayrıca soft alt uzay, soft T_i- uzaylar, soft normal ve soft regüler uzay kavramlarını tanımlamış ve bazı özelliklerini incelemişlerdir. Daha sonra bazı araştırmacılar (Min, 2011; Hussain ve Ahmad, 2011; Aygünoğlu ve Aygün, 2012; Zorlutuna ve ark., 2012; Pazar Varol ve Aygün, 2013; Yüksel ve ark., 2014a) soft topolojik uzayların genel özellikleri, soft ayırma aksiyomları, soft kompaktlık, soft süreklilik, soft çarpım topolojisi, soft bağlantılılık gibi kavramlar üzerinde çalışmışlardır. Ayrıca bazı araştırmacılar da klasik topolojide bilinen bazı küme çeşitlerini soft topolojik uzaylarda incelemişlerdir. Chen (2013) soft topolojik uzaylarda soft semi açık kümeleri, Kandil ve ark. (2014a) soft pre açık, soft α-açık, soft semi açık ve soft β-açık kümeleri, ayrıca Akdag ve Ozkan (2014), Yumak ve Kaymakcı (2013) soft β-açık kümeleri çalışmışlardır. Kannan (2012) ve Yüksel ve ark. (2013) soft genelleştirilmiş kapalı kümeleri, Yüksel ve ark. (2014b) soft regüler genelleştirilmiş kapalı kümeleri ve Mustafa ve Sleim (2014) soft genelleştirilmiş kapalı kümeleri bir soft ideale dayalı olarak incelemişlerdir.

Soft kümelerin topolojik yapıları farklı açılardan da ele alınmıştır. Örneğin, Çağman ve ark. (2011) soft topolojik uzayı Shabir ve Naz (2011)'dan daha genel bir yaklaşımla tanımlamış ve temel kavramları vermişlerdir. El-Sheikh ve Abd El-Latif

(2014) bir başlangıç evreni üzerinde parametrelerin sabitlenmiş bir kümesiyle supra soft topolojik uzay kavramını tanımlamış ve Shabir ve Naz (2011) tarafından tanımlanan soft topolojik uzaylardan daha genel olan supra soft topolojik uzaylarda supra soft açık küme, supra soft kapalı küme, supra soft iç nokta, supra soft kapanış noktası gibi temel kavramları vermişlerdir. Ayrıca supra soft küme çeşitleri ve supra soft süreklilik çeşitlerini inceleyip bazı ayrışımlar elde etmişlerdir.

Biz tez çalışmamız süresince geniş bir literatür taraması yaparak, soft topolojik uzaylar ve soft rough kümeler üzerine çalıştık. İlk olarak tez içerisinde kullanılan kavramların kısaca literatür bilgilerini ve belirsizliğe iki farklı matematiksel yaklaşım olarak verilen rough küme ve soft küme teorileri ile ilgili temel kavramları verdik. Klasik topolojik uzaylardan daha genel olan soft topolojik uzayları inceleyip, Kannan (2012) ve Yüksel ve ark. (2014b) tarafından incelenen soft genelleştirilmiş kapalı kümeler ve soft regüler genelleştirilmiş kapalı kümelerden daha zayıf olan soft genelleştirilmiş pre-regüler kapalı kümeleri ve özelliklerini inceledik. Daha sonra Yüksel ve ark. (2014b) tarafından verilmiş olan soft regüler genelleştirilmiş kapalı kümeleri, Mustafa ve Sleim (2014) tarafından verilmiş olan soft ideal kavramına dayanarak yeniden tanımladık. Bir soft ideale bağlı soft regüler genelleştirilmiş kapalı kümeler olarak adlandırılan bu kümelerin bazı temel özelliklerini araştırdık. Ayrıca Shabir ve Naz (2011) tarafından tanımlanan soft topolojik uzaylardan daha genel olan supra soft topolojik uzaylarda supra soft regüler genelleştirilmiş kapalı kümeleri ve özelliklerini araştırdık.

Son olarak rough kümeler ve soft örtü kümelerin kombinasyonu ile soft örtü yaklaşım uzayını elde ederek, soft rough kümelerin genelleştirilmesi olan soft örtü tabanlı rough kümeleri inceledik. Soft örtü tabanlı rough kümelerin temel özelliklerini, yani Pawlak (1982) tarafından incelenen klasik rough kümelerin hangi özelliklerinin sağlanıp sağlanmadığını ve topolojik özelliklerini araştırdık. Sağlanmayan özellikler için örnekler verdik. Ayrıca bu soft örtü tabanlı rough kümeleri tıp alanında biyopsi gerekliliğini belirleyen, doktorlara kanser riskini sıralayan ve biyopsi yapılan hasta sayısını azaltmayı amaçlayan bir metod ile birlikte kullandık. Meram Tıp Fakültesinden aldığımız hastalık verilerini kullanarak uyguladığımız bu metod ile hastalık teşhisinde son derece önemli olan gerçekçi kurallar ve daha kesin yanıtlar vereceğimiz sonuçlar elde ettik.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tez çalışmamız boyunca kullanacağımız rough kümeler ve soft kümeler ile ilgili bazı temel kavramlar verilmiştir. Bu çalışma boyunca kullanacağımız X, boş kümeden farklı ve sonlu bir başlangıç evreni olarak kabul edilecektir. Ayrıca $\emptyset$ sembolü ile boş küme ve $A^c = X - A$ sembolü ile $A \subseteq X$ alt kümesinin tümleyeni ifade edilecektir.

2.1. Rough Kümeler

Pawlak (1982) tarafından verilen rough küme teorisi, sonlu bir evrensel küme üzerindeki bir denklik bağıntısına dayanır. Bir evrensel kümenin alt kümesi olan rough küme, alt ve üst yaklaşım adı verilen iki küme çifti tarafından tanımlanır. Alt ve üst yaklaşımlar denklik sınıfları ile inşa edilir. Böylece rough küme teorisi, klasik küme teorisinin bir genişlemesi olarak düşünülebilir. Bu bölümde rough küme teori ile ilgili temel kavramları hatırlatacağız.

2.1.1.Tanım. (Pawlak, 1982) X bir evrensel küme ve $\mathcal{R} \subseteq X \times X$ bir denklik bağıntısı olsun. $(X, \mathcal{R})$ ikilisine yaklaşım uzayı denir.

Herhangi bir $x \in X$ için, x noktasının denklik sınıfı, $[x]_{\mathcal{R}}$ sembolü ile ve X kümesinin $\mathcal{R}$ denklik bağıntısına göre oluşan tüm denklik sınıflarının kümesi yani X kümesinin $\mathcal{R}$ denklik bağıntısıyla belirlenmiş parçalanışı, $X/\mathcal{R}$ sembolü ile gösterilir.

2.1.2.Tanım. (Pawlak, 1982) $(X, \mathcal{R})$ yaklaşım uzayı olsun. $\mathcal{R}$ denklik bağıntısının denklik sınıflarına $(X, \mathcal{R})$ yaklaşım uzayında elemanter kümeler (atomlar) denir. $(X, \mathcal{R})$ yaklaşım uzayındaki tüm atomların kümesi $X/\mathcal{R}$ ile gösterilir. Ayrıca boş küme, elemanter küme (atom) olarak kabul edilir.

2.1.3.Tanım. (Pawlak, 1982) $(X, \mathcal{R})$ yaklaşım uzayı olsun. $(X, \mathcal{R})$ yaklaşım uzayında ki elemanter kümelerin her sonlu birleşimi, kompoze (oluşmuş) küme olarak adlandırılır. $(X, \mathcal{R})$ yaklaşım uzayında ki bütün kompoze kümelerin ailesi, $com(X, \mathcal{R})$ ile gösterilir.

2.1.4.Tanım. (Pawlak, 1982) $(X, \mathcal{R})$ yaklaşım uzayı ve $A \subseteq X$ olsun.A kümesini kapsayan en küçük kompoze kümeye, A kümesinin $(X, \mathcal{R})$ yaklaşım uzayındaki üst yaklaşımı denir ve $\mathcal{R}^-(A)$ ile gösterilir.

$$\mathcal{R}^{-}(A) = \cup_{x\in X}\{[x]_{\mathcal{R}} \in X/\mathcal{R} : [x]_{\mathcal{R}} \cap A \neq \emptyset\}$$

şeklinde yazılır. Yani bir kümenin üst yaklaşımı, kümeyle arakesiti boş kümeden farklı olan denklik sınıflarının birleşiminden oluşur.

2.1.5.Tanım. (Pawlak, 1982) $(X,\mathcal{R})$ yaklaşım uzayı ve $A \subseteq X$ olsun. A kümesi tarafından kapsanan en büyük kompoze kümeye, A kümesinin $(X,\mathcal{R})$ yaklaşım uzayındaki alt yaklaşımı denir ve $\mathcal{R}_{-}(A)$ ile gösterilir.

$$\mathcal{R}_{-}(A) = \cup_{x\in X}\{[x]_{\mathcal{R}} \in X/\mathcal{R} : [x]_{\mathcal{R}} \subseteq A\}$$

şeklinde yazılır. Yani bir kümenin alt yaklaşımı, küme tarafından kapsanan denklik sınıflarının birleşiminden oluşur.

2.1.6.Tanım. (Pawlak, 1982) $(X,\mathcal{R})$ yaklaşım uzayı ve $A \subseteq X$ olsun.

$$POZ_{\mathcal{R}}(A) = \mathcal{R}_{-}(A)$$
$$NEG_{\mathcal{R}}(A) = X - \mathcal{R}^{-}(A)$$
$$SNR_{\mathcal{R}}(A) = \mathcal{R}^{-}(A) - \mathcal{R}_{-}(A)$$

sırasıyla A kümesinin pozitif, negatif ve sınır bölgeleridir.

2.1.7.Tanım. (Pawlak, 1982) $(X,\mathcal{R})$ yaklaşım uzayı ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer

$$SNR_{\mathcal{R}}(A) = \emptyset \text{ yani } \mathcal{R}^{-}(A) = \mathcal{R}_{-}(A)$$

ise A kümesine $\mathcal{R}$ denklik bağıntısına bağlı tanımlanabilir küme; aksi halde

$$SNR_{\mathcal{R}}(A) \neq \emptyset \text{ yani } \mathcal{R}^{-}(A) \neq \mathcal{R}_{-}(A)$$

ise A kümesine $\mathcal{R}$ denklik bağıntısına bağlı bir rough (kaba) küme denir.

2.1.1.Örnek. $X = \{a,b,c,d,e,f\}$ evren kümesi ve $\mathcal{R}$ denklik bağıntısı da aşağıdaki şekilde verilsin.

$$\mathcal{R} = \{(a,a),(a,e),(b,b),(b,c),(b,f),(c,b),(c,c),$$
$$(c,f),(d,d),(e,a),(e,e),(f,b),(f,c),(f,f)\}.$$

$(X,\mathcal{R})$ ikilisi bir yaklaşım uzayıdır. $(X,\mathcal{R})$ yaklaşım uzayındaki atomların kümesi, yani $\mathcal{R}$ denklik bağıntısının denklik sınıflarının kümesi,

$$X/\mathcal{R} = \{\{a,e\},\{b,c,f\},\{d\}\}$$

şeklindedir.

$A = \{a,b,c,e\} \subseteq X$ kümesini seçelim.

$$\mathcal{R}^{-}(A) = \cup_{x\in X}\{[x]_{\mathcal{R}} \in X/\mathcal{R} : [x]_{\mathcal{R}} \cap A \neq \emptyset\} = \{a,b,c,e,f\},$$
$$\mathcal{R}_{-}(A) = \cup_{x\in X}\{[x]_{\mathcal{R}} \in X/\mathcal{R} : [x]_{\mathcal{R}} \subseteq A\} = \{a,e\}$$

bulunur. $\mathcal{R}_{-}(A) \neq \mathcal{R}^{-}(A)$ olduğundan $A = \{a,b,c,e\} \subseteq X$ kümesi bir rough kümedir.

$B = \{b, c, f\} \subseteq X$ kümesini seçelim.

$$\mathcal{R}^{-}(B) = \bigcup_{x \in X}\{[x]_{\mathcal{R}} \in X/\mathcal{R} : [x]_{\mathcal{R}} \cap B \neq \emptyset\} = \{b, c, f\},$$

$$\mathcal{R}_{-}(B) = \bigcup_{x \in X}\{[x]_{\mathcal{R}} \in X/\mathcal{R} : [x]_{\mathcal{R}} \subseteq B\} = \{b, c, f\}$$

bulunur. $\mathcal{R}_{-}(B) = \mathcal{R}^{-}(B)$ olduğundan $B = \{b, c, f\} \subseteq X$ alt kümesi tanımlanabilir kümedir.

2.1.1.Teorem. (Pawlak, 1982) $(X, \mathcal{R})$ yaklaşım uzayı ve A, $B \subseteq X$ olsun. Pawlak alt ve üst yaklaşım operatörleri aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$\boldsymbol{i})$ $\mathcal{R}_{-}(X) = X = \mathcal{R}^{-}(X)$,

$\boldsymbol{ii})$ $\mathcal{R}_{-}(\emptyset) = \emptyset = \mathcal{R}^{-}(\emptyset)$,

$\boldsymbol{iii})$ $\mathcal{R}_{-}(A) \subseteq A \subseteq \mathcal{R}^{-}(A)$,

$\boldsymbol{iv})$ $A \subseteq B \Longrightarrow \mathcal{R}_{-}(A) \subseteq \mathcal{R}_{-}(B)$,

$\boldsymbol{v})$ $A \subseteq B \Longrightarrow \mathcal{R}^{-}(A) \subseteq \mathcal{R}^{-}(B)$,

$\boldsymbol{vi})$ $\mathcal{R}_{-}(A \cap B) = \mathcal{R}_{-}(A) \cap \mathcal{R}_{-}(B)$,

$\boldsymbol{vii})$ $\mathcal{R}^{-}(A \cup B) = \mathcal{R}^{-}(A) \cup \mathcal{R}^{-}(B)$,

$\boldsymbol{viii})$ $\mathcal{R}_{-}[\mathcal{R}_{-}(A)] = \mathcal{R}_{-}(A)$,

$\boldsymbol{ix})$ $\mathcal{R}^{-}[\mathcal{R}^{-}(A)] = \mathcal{R}^{-}(A)$,

$\boldsymbol{x})$ $\mathcal{R}_{-}(A^{c}) = [\mathcal{R}^{-}(A)]^{c}$,

$\boldsymbol{xi})$ $\mathcal{R}^{-}(A^{c}) = [\mathcal{R}_{-}(A)]^{c}$,

$\boldsymbol{xii})$ $\mathcal{R}_{-}([\mathcal{R}_{-}(A)]^{c}) = [\mathcal{R}_{-}(A)]^{c}$,

$\boldsymbol{xiii})$ $\mathcal{R}^{-}([\mathcal{R}^{-}(A)]^{c}) = [\mathcal{R}^{-}(A)]^{c}$,

$\boldsymbol{xiv})$ $\forall A \in X/\mathcal{R}$ için $\mathcal{R}_{-}(A) = A$,

$\boldsymbol{xv})$ $\forall A \in X/\mathcal{R}$ için $\mathcal{R}^{-}(A) = A$.

Pawlak, rough küme teorisinde topolojik açıdan da bazı önemli sonuçlar elde etmiştir. İç ve kapanış operatörleri, klasik topolojide iki çekirdek kavramdır ve Pawlak bir küme üzerindeki alt ve üst yaklaşımların sırasıyla bu küme üzerindeki iç ve kapanış operatörleri olduğunu göstermiştir. Öncelikle klasik topolojide iç ve kapanış operatörü kavramlarını ele alalım.

2.1.8.Tanım. (Yüksel, 2015) $\mathcal{P}(X)$ ailesi X kümesinin güç kümesini göstermek üzere aşağıdaki özellikleri sağlayan $int: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ fonksiyonuna, X kümesi üzerinde iç operatörü denir. Her $A, B \subseteq X$ için

$\boldsymbol{i})$ $int(X) = X$,

$\boldsymbol{ii})\ int(A) \subseteq A,$

$\boldsymbol{iii})\ int\big(int(A)\big) = int(A),$

$\boldsymbol{iv})\ int(A \cap B) = int(A) \cap int(B).$

2.1.9.Tanım. (Yüksel, 2015) $\mathcal{P}(X)$ ailesi X kümesinin güç kümesini göstermek üzere aşağıdaki özellikleri sağlayan $cl: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ fonksiyonuna, X kümesi üzerinde kapanış operatörü denir. Her $A, B \subseteq X$ için

$\boldsymbol{i})\ cl(\emptyset) = \emptyset,$

$\boldsymbol{ii})\ A \subseteq cl(A),$

$\boldsymbol{iii})\ cl\big(cl(A)\big) = cl(A),$

$\boldsymbol{iv})\ cl(A \cup B) = cl(A) \cup cl(B).$

2.1.1.Önerme. (Pawlak, 1982) X bir evrensel küme ve $\mathcal{R} \subseteq X \times X$ bir denklik bağıntısı olsun. $\mathcal{R}$ denklik bağıntısından üretilen alt ve üst yaklaşımlar sırasıyla iç ve kapanış operatörleridir.

2.1.1.Uyarı. (Pawlak, 1982) $(X, \mathcal{R})$ yaklaşım uzayında $com(X, \mathcal{R})$ ailesi X kümesi üzerinde tek bir topoloji tanımlar ve bu uzay $\tau_{\mathcal{R}} = (X, com(X, \mathcal{R}))$ ile gösterilir. Burada $X/\mathcal{R}$, $\tau_{\mathcal{R}}$ için bir taban olmak üzere, $com(X, \mathcal{R})$ ailesi $\tau_{\mathcal{R}}$ uzayındaki tüm açık kümelerin ailesidir. Pawlak alt ve üst yaklaşım tanımlarından $com(X, \mathcal{R})$ ailesindeki kümeler, $\tau_{\mathcal{R}}$ topolojik uzayında hem açık hem de kapalı kümelerdir. Böylece $\mathcal{R}_(A)$ ve $\mathcal{R}^{-}(A)$ yaklaşımları, $\tau_{\mathcal{R}}$ topolojik uzayında $A \subseteq X$ kümesinin sırasıyla içi ve kapanışı olarak yorumlanır.

2.2. Soft Kümeler

Bu bölümde soft kümeler ile ilgili bazı temel kavramlar verilecektir. X, bir başlangıç evreni ve E, tüm parametrelerin kümesi olsun. Genellikle parametreler; özellikler, karakteristikler ya da X evrenindeki nesnelerin özellikleridir. Her bir parametre, bir kelime ya da bir cümle olarak verilebilir. $\mathcal{P}(X)$ ailesi, X kümesinin güç kümesini göstermek üzere soft küme kavramı aşağıdaki şekilde tanımlanır.

2.2.1.Tanım. (Molodtsov, 1999) X evren kümesi, E parametre kümesi ve $A \subseteq E$ olsun. $F: A \to \mathcal{P}(X)$ küme değerli dönüşüm olmak üzere, (F, A) ikilisine X evreni üzerinde bir soft küme denir.

Yani; X üzerinde bir soft küme, X evren kümesinin alt kümelerinin parametrelendirilmiş bir ailesidir. Her $a \in A$ için $F(a)$ kümesi, (F, A) soft kümesi içinde a-yaklaşım elemanlarının kümesi gibi düşünülebilir. $F(a)$ kümeleri keyfi, bazıları boş küme, bazılarının kesişimi boş küme olabilir. Sonuç olarak, bir soft küme klasik anlamda bir küme değildir.

2.2.1.Örnek. (Molodtsov, 1999; Maji ve ark., 2003) Altı tane evi içeren $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ evren kümesi ve $e_1 = pahalı$, $e_2 = güzel$, $e_3 = ahşap$, $e_4 = ucuz$, $e_5 = yeşil\ çevreli$ olmak üzere $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametreler kümesi olsun. (F, E) soft kümesi, Bay A'nın satın almayı düşündüğü ev için "evlerin cazipliği" ni tanımlayan bir küme olarak alınsın. Bu durumda tanımlanacak olan soft küme; pahalı olan evler, güzel olan evler, ahşap olan evler, ucuz olan evler ve yeşil çevreli olan evler şeklindedir. F dönüşümü " (.) evler " olarak gösterilsin; öyle ki " nokta " $e_i \in E$ parametrelerinin biriyle doldurulsun. Örneğin; $F(e_1)$, "$(pahalı)\ evler$" demektir ve fonksiyonel değeri X evrenindeki tüm pahalı evlerdir. Bu durumda

$$F(e_1) = \{x_2, x_4\},$$
$$F(e_2) = \{x_1, x_3\},$$
$$F(e_3) = \{x_3, x_4, x_5\},$$
$$F(e_4) = \{x_1, x_3, x_5\},$$
$$F(e_5) = \{x_1\}$$

olduğu kabul edilsin. O halde (F, E) soft kümesi, yaklaşımların bir koleksiyonu olarak düşünülebilir, öyle ki her yaklaşım, bir tahmin (parametre) ve yaklaşık değer kümesi olmak üzere iki kısma sahiptir. Örneğin; $(pahalı\ evler, \{x_2, x_4\})$ yaklaşımlardan biridir.

Bu bölümden itibaren X üzerindeki bütün soft kümelerin ailesi $\mathcal{S}(X, E)$ ile gösterilecektir.

2.2.2.Tanım. (Maji ve ark., 2003) $(F, A), X$ evreni üzerinde bir soft küme olsun. Eğer her $a \in A$ için $F(a) = \emptyset$ ise (F, A) soft kümesi, boş soft küme olarak adlandırılır ve ϕ_A simgesi ile gösterilir. Eğer $A = E$ ise ϕ_E simgesi ile gösterilir. Eğer her $a \in A$ için $F(a) = X$ ise (F, A) soft kümesi, $A-$tam soft küme olarak adlandırılır ve $\tilde{A}$ simgesi ile gösterilir. Eğer $A = E$ ise $E-$tam soft kümesi, bir tam soft küme olarak adlandırılır ve $\tilde{E}$ simgesi ile gösterilir.

2.2.3.Tanım. (Shabir ve Naz, 2011) Y, X evreninin boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. Eğer her $e \in E$ için $Y(e) = Y$ ise $\tilde{Y}$ sembolü, X üzerindeki (Y, E) soft kümesini gösterir. Benzer şekilde, (X, E) soft kümesi de $\tilde{X}$ ile gösterilir.

2.2.4.Tanım. (Maji ve ark., 2003) X evreni üzerinde (F, A) ve (G, B) soft kümeleri verilsin. Eğer

$\boldsymbol{i}$) $A \subseteq B$

$\boldsymbol{ii}$) Her $a \in A$ için $F(a)$ ve $G(a)$ aynı (özdeş) yaklaşımlar

ise (F, A) soft kümesine, (G, B) soft kümesinin soft alt kümesi denir ve $(F, A) \sqsubseteq (G, B)$ ile gösterilir.

2.2.5.Tanım. (Maji ve ark., 2003) X evreni üzerinde (F, A) ve (G, B) soft kümeleri verilsin. Eğer $(F, A) \sqsubseteq (G, B)$ ve $(G, B) \sqsubseteq (F, A)$ ise (F, A) ve (G, B) soft kümelerine, soft eşit kümeler denir.

2.2.6.Tanım. (Maji ve ark., 2003) X evreni üzerinde (F, A) ve (G, B) soft kümeleri verilsin. Bu iki soft kümenin birleşimi, $(F, A) \sqcup (G, B) = (H, C)$ soft kümesidir. Burada $C = A \cup B$ ve her $e \in C$ için

$$H(e) = \begin{cases} F(e) & ,eğer\ e \in A - B\ ise \\ G(e) & ,eğer\ e \in B - A\ ise \\ F(e) \cup G(e) & ,eğer\ e \in A \cap B\ ise \end{cases}$$

şeklindedir.

2.2.7.Tanım. (Feng ve ark., 2008) X evreni üzerinde (F, A) ve (G, B) soft kümeleri verilsin. Bu iki soft kümenin kesişimi, $(F, A) \sqcap (G, B) = (H, C)$ soft kümesidir. Burada $C = A \cap B$ ve her $e \in C$ için

$$H(e) = F(e) \cap G(e)$$

şeklindedir.

2.2.8.Tanım. (Zorlutuna ve ark., 2012) I, keyfi bir indis kümesi ve $\{(F_i, E)\}_{i \in I}$ ailesi, X evreni üzerindeki E parametre kümesine bağlı soft kümelerin bir alt ailesi olsun. Bu soft kümelerin birleşimi, $(G, E) = \bigsqcup_{i \in I}(F_i, E)$ soft kümesidir öyle ki her $e \in E$ için $G(e) = \bigcup_{i \in I} F_i(e)$ dir. Bu soft kümelerin keşisimi, $(H, E) = \bigsqcap_{i \in I}(F_i, E)$ soft kümesidir öyle ki her $e \in E$ için $H(e) = \bigcap_{i \in I} F_i(e)$ dir.

2.2.9.Tanım. (Shabir ve Naz, 2011) X evreni üzerinde (F,E) ve (G,E) soft kümeleri verilsin. Bu iki soft kümenin farkı $(H,E)=(F,E)-(G,E)$ soft kümesidir. Burada her $e\in E$ için

$$H(e)=F(e)-G(e)$$

şeklindedir.

2.2.10.Tanım. (Shabir ve Naz, 2011) (F,A), X evreni üzerinde bir soft küme olsun. (F,A) soft kümesinin relative tümleyeni

$$\forall a\in A\ için\ F':A\to\mathcal{P}(X)\ni F'(a)=X-F(a)$$

olmak üzere $(F,A)'$ şeklinde gösterilir.

2.2.11.Tanım. (Shabir ve Naz, 2011) $(F,E)\in\mathcal{S}(X,E)$ ve $x\in X$ olsun. Her $e\in E$ için $x\in F(e)$ ise x noktası, (F,E) soft kümesine aittir denir ve $x\,\widetilde{\in}\,(F,E)$ şeklinde gösterilir. Eğer bazı $e\in E$ için $x\notin F(e)$ ise x noktasına, (F,E) soft kümesine ait değildir denir ve $x\,\widetilde{\notin}\,(F,E)$ şeklinde gösterilir.

2.2.12.Tanım. (Shabir ve Naz, 2011) $x\in X$ olsun. (x,E) sembolü, X üzerinde bir soft küme gösterir öyle ki her $e\in E$ için $x(e)=\{x\}$ şeklindedir.

2.2.1.Önerme. (Maji ve ark., 2003; Ali ve ark., 2009; Shabir ve Naz, 2011; Zorlutuna ve ark., 2012) $(F,E),(G,E),(H,E),(K,E)\in\mathcal{S}(X,E)$ ve I keyfi bir indis kümesi olmak üzere $\{(F_i,E)\}_{i\in I}$ ailesi, $\mathcal{S}(X,E)$ ailesinin bir alt ailesi olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

$\boldsymbol{i})\ (F,E)\sqcap\phi_E=\phi_E,\ \ (F,E)\sqcap\tilde{X}=(F,E),\ \ (F,E)\sqcap(F,E)=(F,E),$

$\boldsymbol{ii})\ (F,E)\sqcup\phi_E=(F,E),\ \ (F,E)\sqcup\tilde{X}=\tilde{X},\ \ (F,E)\sqcup(F,E)=(F,E),$

$\boldsymbol{iii})\ (F,E)\sqcap(G,E)=(G,E)\sqcap(F,E),\ \ (F,E)\sqcup(G,E)=(G,E)\sqcup(F,E),$

$\boldsymbol{iv})\ (F,E)\sqcup[(G,E)\sqcap(H,E)]=[(F,E)\sqcup(G,E)]\sqcap[(F,E)\sqcup(H,E)],$

$\boldsymbol{v})\ (F,E)\sqcap[(G,E)\sqcup(H,E)]=[(F,E)\sqcap(G,E)]\sqcup[(F,E)\sqcap(H,E)],$

$\boldsymbol{vi})\ (F,E)\sqsubseteq(G,E)$ ve $(G,E)\sqsubseteq(H,E)$ ise $(F,E)\sqsubseteq(H,E),$

$\boldsymbol{vii})\ (F,E)\sqsubseteq(G,E)$ ve $(H,E)\sqsubseteq(K,E)$ ise $(F,E)\sqcap(H,E)\sqsubseteq(G,E)\sqcap(K,E),$

$\boldsymbol{viii})\ (F,E)\sqsubseteq(G,E)$ ve $(H,E)\sqsubseteq(K,E)$ ise $(F,E)\sqcup(H,E)\sqsubseteq(G,E)\sqcup(K,E),$

$\boldsymbol{ix})\ (F,E)\sqsubseteq(G,E)\Leftrightarrow(F,E)\sqcap(G,E)=(F,E),$

$\boldsymbol{x})\ (F,E)\sqsubseteq(G,E)\Leftrightarrow(F,E)\sqcup(G,E)=(G,E),$

$\boldsymbol{xi})\ (F,E)\sqsubseteq(G,E)\Leftrightarrow(G,E)'\sqsubseteq(F,E)',$

$\boldsymbol{xii})\ (F,E)\sqcap(G,E)=\phi_E$ ise $(F,E)\sqsubseteq(G,E)',$

$\boldsymbol{xiii})\ (F,E) \sqcup (F,E)' = \tilde{X}, (F,E) \sqcap (F,E)' = \phi_E,$

$\boldsymbol{xiv})\ [(F,E) \sqcup (G,E)]' = (F,E)' \sqcap (G,E)',$

$\boldsymbol{xv})\ [(F,E) \sqcap (G,E)]' = (F,E)' \sqcup (G,E)',$

$\boldsymbol{xvi})\ [\sqcup_{i\in I}(F_i,E)]' = \sqcap_{i\in I}(F_i,E)',$

$\boldsymbol{xvii})\ [\sqcap_{i\in I}(F_i,E)]' = \sqcup_{i\in I}(F_i,E)'.$

2.3. Rough Kümeler ve Soft Kümeler Arasındaki İlişki

Rough ve soft kümeler belirsizliği modellemek için iki farklı matematiksel araç olsalar da aralarında ilginç bağlantılar vardır. Aktaş ve Çağman (2007)'da gösterildiği gibi her rough küme, bir soft küme gibi düşünülebilir.

Pawlak (1982) tarafından verilmiş olan rough küme teorisi, kesin olmayan ve belirsiz durumlar için verilmiş sistematik bir metottur. Birçok veri analizinde, veri depolanır ve bir tablo ile gösterilir öyle ki nesnelerin bir kümesi özelliklerin bir kümesiyle belirlenir. Böyle bir tabloya bilgi sistemi adı verilir. Bilgi sistemindeki özellikler ile tanımlanan denklik bağıntılarından elde edilen parçalanmalar, üzerinde çalışılan kümeyi değişik olarak parçalar. Bu parçalanmalardaki her bir denklik sınıfına, rough küme teorisindeki elemanter (atom) kümeler karşılık gelir. Yani rough küme kavramı bir bilgi sistemi aracılığıyla da verilebilir. Ayrıca bilgi sistemleri ile soft kümeler de yakından ilgilidir (Chen ve ark., 2005).

2.3.1.Tanım. (Pawlak, 1991) X nesnelerin, A kümesi de özelliklerin boş küme olmayan sonlu kümeleri olsun.

$$\forall\, a \in A\ için\ a : X \to V_a \ni V_a\ ;\ a\ özelliklerinin\ değer\ kümesi$$

şeklinde bir fonksiyon olmak üzere (X, A) ikilisine bir bilgi sistemi denir.

2.3.1.Uyarı. Bir bilgi sistemi, her satırı bir nesneyi ya da örneği, her sütunu nesneyi nitelendiren bir özelliği gösteren bir özellik-değer tablosu biçiminde gösterilir. Nesnelere ait özellik değerleri ya ölçüm ile ya da insan deneyimi ile elde edilir.

2.3.2.Tanım. (Pawlak, 1991) (X, A) bir bilgi sistemi olsun. A özelliklerinin herhangi bir B alt kümesi ve $x, y \in X$ için

$$IND_{(X,A)}(B) = \{(x,y) \in X \times X : \forall a \in B \ni a(x) = a(y)\}$$

şeklinde tanımlanan $IND_{(X,A)}(B)$ denklik bağıntısına, B-ayırt edilmezlik bağıntısı denir. $(x, y) \in IND_{(X,A)}(B)$ ise x ve y nesneleri aynı özellik ve karar değerlerine sahip oldukları için "B ye göre ayırt edilemezlerdir" denir.

2.3.2.Uyarı. $IND_{(X,A)}(B)$ denklik bağıntısı, bir bilgi sisteminden elde edilmiştir. 2.1.1.Tanım gereği Pawlak yaklaşım uzayı bir denklik bağıntısına dayandığından, $IND_{(X,A)}(B)$ denklik bağıntısı ile yaklaşım uzayı kurulur. Bir evrensel kümenin alt kümesi olan rough küme, bu bağıntının denklik sınıfları yardımı ile elde edilen alt ve üst yaklaşım adı verilen iki küme çifti tarafından tanımlanır. Böylece Pawlak (1982) tarafından verilen rough küme tanımı, bilgi sistemleri aracılığıyla da verilmiş olur.

2.3.1.Örnek. $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ hastalardan oluşan sonlu evren kümesi, koşul özellikleri; göğüs ağrısı, nefes darlığı, kan basıncı ve karar özelliği; kalp problemi olmak üzere aşağıdaki tablo verilsin.

Tablo 2.3.1. Genel olarak hastalarda görünen kalp hastalıkları belirtileri

Hasta=X	Göğüs ağrısı	Nefes darlığı	Kan Basıncı	Kalp Problemi
a	Yok	Yok	Düşük	Yok
b	Var	Yok	Düşük	Yok
c	Var	Yok	Orta	Var
d	Yok	Var	Orta	Yok
e	Var	Var	Yüksek	Var
f	Var	Var	Yüksek	Var
g	Yok	Var	Yüksek	Yok

$\mathcal{R} = \{(x, y)$: x ve y "aynı nefes darlığı ve kan basıncına sahip"$\} \subseteq X \times X$

şeklinde bir denklik bağıntısını tanımlayalım. Bu durumda

$$\mathcal{R} = \{(a,a),(b,b),(a,b),(b,a),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f),$$
$$(g,g),(e,f),(f,e),(e,g),(g,e),(f,g),(g,f)\}$$

olur. Böylece $(X, \mathcal{R})$ ikilisi bir yaklaşım uzayıdır ve $X/\mathcal{R} = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}, \{e, f, g\}\}$ elde edilir. $A = \{a, e, f, g\} \subseteq X$ kümesini seçelim.

$$\mathcal{R}^{-}(A) = \cup_{x \in X}\{[x]_{\mathcal{R}} \in X/\mathcal{R} : [x]_{\mathcal{R}} \cap A \neq \emptyset\} = \{a, b, e, f, g\}$$
$$\mathcal{R}_{-}(A) = \cup_{x \in X}\{[x]_{\mathcal{R}} \in X/\mathcal{R} : [x]_{\mathcal{R}} \subseteq A\} = \{e, f, g\}$$

bulunur. $\mathcal{R}_{-}(A) \neq \mathcal{R}^{-}(A)$ olduğundan $A \subseteq X$ kümesi bir rough kümedir.

2.3.3.Uyarı. Chen ve ark. (2005) X evren kümesi ve A parametre kümesi olmak üzere; X evreni üzerinde bir $G = (F, A)$ soft kümesi verildiğinde her $a \in A$ özelliği için

$$a : X \longrightarrow V_a = \{0,1\}$$

fonksiyonunu

$$a(x) = \begin{cases} 1, & eğer\ x \in F(a) \\ 0, & diğer\ durumlar \end{cases}$$

şeklinde tanımladılar. Böylece, X evreni üzerinde $G = (F, A)$ soft kümesinin doğal olarak bir bilgi sistemi oluşturduğunu ve her soft kümenin bir bilgi sistemi olarak düşünülebileceğini gösterdiler. Bu da soft kümelerin literatürde sıkça kullanılan tablo gösterimidir.

2.3.2.Örnek. $X = \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \}$ altı tane evi içeren evren kümesi ve $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametreler kümesi olmak üzere 2.2.1.Örnekteki (F, E) soft kümesi verilsin. X evren kümesinin alt kümelerinin parametrelenmiş bir ailesi olan (F, E) soft kümesi, 2.3.3.Uyarı gereği tablo yardımı ile de gösterilebilir.

Tablo 2.3.2. (F, E) soft kümesinin bilgi sistemi (tablosal) olarak gösterimi

X	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
x_1	0	1	0	1	1
x_2	1	0	0	0	0
x_3	0	1	1	1	0
x_4	1	0	1	0	0
x_5	0	0	1	1	0
x_6	0	0	0	0	0

2.3.4.Uyarı. (Chen ve ark., 2005) Bir bilgi sistemini açıklamada, araç olarak bir soft küme kullanılabilir. (X, A) ikilisi bir bilgi sistemi olsun.

$$B = \bigcup_{a \in A} \{a\} \times V_a$$

kümesini, parametre kümesi gibi alarak (F, B) soft kümesi, $a \in A$ ve $v \in V_a$ için

$$F(a, v) = \{x \in X : a(x) = v\}$$

şeklinde tanımlanabilir.

Aktaş ve Çağman (2007), her rough kümenin bir soft küme gibi düşünülebileceğini aşağıdaki tanımdan yararlanıp göstermişlerdir.

2.3.3.Tanım. (Aktaş ve Çağman, 2007) $(X, \mathcal{R})$ yaklaşım uzayı ve $A \subseteq X$ olsun. $\mathcal{R}(A) = \left(\mathcal{R}_-(A), \mathcal{R}^-(A)\right)$ ikilisine A kümesinin rough kümesi denir.

2.3.1.Teorem. (Aktaş ve Çağman, 2007) Her rough küme, bir soft küme gibi düşünülebilir.

İspat. X evreninde $\mathcal{R}$ denklik bağıntısına göre $A \subseteq X$ kümesinin

$$\mathcal{R}(A) = (\mathcal{R}_(A), \mathcal{R}^{-}(A))$$

rough kümesi alınsın. $p_1(x)$ tahmini "$[x]_{\mathcal{R}} \subseteq A$" ve $p_2(x)$ tahmini "$[x]_{\mathcal{R}} \cap A \neq \emptyset$" şeklinde tanımlansın. Bu durumda $p_1(x)$ ve $p_2(x)$ koşulları bir parametre kümesinin elemanları olarak düşünülebilir, yani; $E = \{ p_1(x), p_2(x)\}$ olup F fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$F: E \longrightarrow \mathcal{P}(X) \ni i = 1,2 \; için \; F\big(p_i(x)\big) = \{x \in X: p_i(x) \; doğru\}.$$

Böylece, $A \subseteq X$ kümesinin her $\mathcal{R}(A) = (\mathcal{R}_(A), \mathcal{R}^{-}(A))$ rough kümesi,

$$(F, E) = \{ (p_1(x), \mathcal{R}_(A)), (p_2(x), \mathcal{R}^{-}(A))\}$$

formunda bir soft küme gibi düşünülebilir.

3. SOFT TOPOLOJİK UZAYLARDA BAZI SOFT GENELLEŞTİRİLMİŞ KAPALI KÜMELER

3.1. Soft Topolojik Uzaylar

Bir kümeyi, parametrelerle belirlediği için geniş bir alanda, birçok uygulamaya sahip olan soft küme teorisi, literatürde birçok yazar tarafından çalışılmıştır. 2011 yılından itibaren de bazı yazarlar tarafından soft kümelerin topolojik yapısı incelenmeye başlanmıştır: Shabir ve Naz (2011) bir başlangıç evreni üzerinde parametrelerin sabitlenmiş bir kümesiyle soft topoloji kavramını tanımlamış ve soft topolojik uzayda soft açık küme, soft kapalı küme, soft iç nokta, soft kapanış noktası gibi temel kavramları vermişlerdir. Ayrıca soft alt uzay, soft T_i- uzaylar, soft normal ve soft regüler uzay kavramlarını tanımlamış ve bazı özelliklerini incelemişlerdir.

Bu kesimde, soft topolojik uzay ve soft topolojik uzayda bazı temel kavramlar verilecektir.

3.1.1.Tanım. (Shabir ve Naz, 2011) X evren kümesi ve E parametre kümesi olsun. X evreni üzerindeki E parametre kümesine bağlı soft kümelerin bir alt ailesi olan $\tilde{\tau}$, aşağıdaki özellikleri sağlarsa, $\tilde{\tau}$ ailesine X evreni üzerinde soft topoloji denir.

$\boldsymbol{i}$) $\phi_E, \tilde{X} \in \tilde{\tau}$,

$\boldsymbol{ii}$) $\tilde{\tau}$ ailesine ait sonlu ya da sonsuz çokluktaki soft kümelerin birleşimi $\tilde{\tau}$ ailesine aittir,

$\boldsymbol{iii}$) $\tilde{\tau}$ ailesine ait iki soft kümenin kesişimi $\tilde{\tau}$ ailesine aittir.

$\tilde{\tau}$ ailesinin her elemanına, soft açık küme ve $(X, \tilde{\tau}, E)$ üçlüsüne, soft topolojik uzay denir.

3.1.1.Örnek. (Shabir ve Naz, 2011) $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ evren kümesi, $E = \{e_1, e_2\}$ parametreler kümesi olsun.

$$F_1(e_1) = \{x_2\}, F_1(e_2) = \{x_1\}$$
$$F_2(e_1) = \{x_2, x_3\}, F_2(e_2) = \{x_1, x_2\}$$
$$F_3(e_1) = \{x_1, x_2\}, F_3(e_2) = X$$
$$F_4(e_1) = \{x_1, x_2\}, F_4(e_2) = \{x_1, x_3\}$$

olmak üzere $\tilde{\tau} = \{\phi_E, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E)\}$ ailesi, X evreni üzerinde soft topolojik uzaydır.

3.1.2.Tanım. (Shabir ve Naz, 2011) X evren kümesi ve E parametre kümesi olsun. $\tilde{\tau} = \mathcal{S}(X, E)$ ise $\tilde{\tau}$ ailesine, X evreni üzerinde soft ayrık topoloji ve $\tilde{\tau} = \{\phi_E, \tilde{X}\}$ ise $\tilde{\tau}$ ailesine, X evreni üzerinde soft ayrık olmayan topoloji denir.

3.1.1.Önerme. (Shabir ve Naz, 2011) $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzayı verilsin.

$$\tilde{\tau}_e = \{F(e) : (F, E) \in \tilde{\tau}\}$$

ailesi her $e \in E$ için X evreni üzerinde bir klasik topoloji tanımlar.

3.1.2.Örnek. (Shabir ve Naz, 2011) $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ evren kümesi, $E = \{e_1, e_2\}$ parametreler kümesi olmak üzere 3.1.1.Örnekteki $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzayı verilsin.

$\tilde{\tau}_{e_1} = \{\emptyset, X, \{x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_1, x_2\}\}$ ve $\tilde{\tau}_{e_2} = \{\emptyset, X, \{x_1\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_2\}\}$

aileleri, X evreni üzerinde birer klasik topoloji tanımlar.

3.1.1.Uyarı. Soft topolojik uzay kavramında, her bir parametreye karşılık başlangıç evreni üzerinde bir klasik topoloji var olduğundan, parametreler önemli rol oynar. Soft topolojik uzay, bir başlangıç evreni üzerindeki klasik topolojilerin parametrelendirilmiş bir ailesidir. Bu durumun karşıtı doğru değildir. Yani her bir parametreye karşılık bir klasik topolojik uzay verildiğinde, soft kümelerin bazı ailesi soft topolojik uzay oluşturmayabilir. Dolayısıyla soft topolojik uzayların klasik topolojik uzaylardan daha kapsamlı ve daha genel olduğunu söyleyebiliriz.

3.1.3.Örnek. (Shabir ve Naz, 2011) $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ evren kümesi, $E = \{e_1, e_2\}$ parametreler kümesi olsun.

$\tilde{\tau}_{e_1} = \{\emptyset, X, \{x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_1, x_2\}\}$ ve $\tilde{\tau}_{e_2} = \{\emptyset, X, \{x_1\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}\}$

aileleri, 3.1.2.Örnek gereği X evreni üzerinde, birer klasik topoloji tanımlar. Ancak X evreni üzerindeki bazı soft kümeler

$$F_1(e_1) = \{x_2\}, F_1(e_2) = \{x_1\}$$
$$F_2(e_1) = \{x_2, x_3\}, F_2(e_2) = \{x_1, x_2\}$$
$$F_3(e_1) = \{x_1, x_2\}, F_3(e_2) = \{x_1, x_2\}$$
$$F_4(e_1) = \{x_2\}, F_4(e_2) = \{x_1, x_3\}$$

olmak üzere $\tilde{\tau} = \{\phi_E, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E)\}$ ailesi, X evreni üzerinde bir soft topoloji değildir.

3.1.3.Tanım. (Shabir ve Naz, 2011) $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzay olsun. X evreni üzerindeki (F, E) soft kümesinin relative tümleyeni olan $(F, E)'$ soft kümesi, $\tilde{\tau}$ ailesine ait ise (F, E) soft kümesine, soft kapalı küme denir.

3.1.2.Önerme. (Shabir ve Naz, 2011) $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzay ve $\tilde{\tau}'$ ailesi, tüm soft kapalı kümelerin ailesini göstersin. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:

$\boldsymbol{i})$ $\phi_E, \tilde{X} \in \tilde{\tau}'$,

$\boldsymbol{ii})$ $\tilde{\tau}'$ ailesine ait sonlu yada sonsuz çokluktaki soft kümelerin kesişimi $\tilde{\tau}'$ ailesine aittir,

$\boldsymbol{iii})$ $\tilde{\tau}'$ ailesine ait iki soft kümenin birleşimi $\tilde{\tau}'$ ailesine aittir.

3.1.4.Tanım. (Shabir ve Naz, 2011) $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzayı verilsin. $(F, E) \in \mathcal{S}(X, E)$ ve $x \in X$ olsun. Eğer $x \,\tilde{\in}\, (G, E) \sqsubseteq (F, E)$ olacak şekilde bir (G, E) soft açık kümesi varsa x noktasına, (F, E) soft kümesinin soft iç noktası ve (F, E) soft kümesine de, x noktasının bir soft komşuluğu denir.

3.1.2.Uyarı. Klasik topolojide, bir noktanın komşuluğu kavramı, topolojinin karakterizasyonu için çok önemlidir. Bir soft küme, bilinen anlamda klasik bir küme olmadığından Shabir ve Naz (2011) tarafından verilen soft topolojik uzaylarda komşuluk aksiyomları kavramı, klasik topolojiden farklıdır.

3.1.3.Önerme. (Shabir ve Naz, 2011) $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzayı verilsin ve $(F, E), (G, E) \in \mathcal{S}(X, E)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:

$\boldsymbol{i})$ Her $x \in X$ noktası bir soft komşuluğa sahiptir,

$\boldsymbol{ii})$ Eğer (F, E) ve (G, E), $x \in X$ noktasının soft komşulukları ise $(F, E) \sqcap (G, E)$ soft kümesi de x noktasının bir soft komşuluğudur,

$\boldsymbol{iii})$ Eğer (F, E), $x \in X$ noktasının bir soft komşuluğu ve $(F, E) \sqsubseteq (G, E)$ ise (G, E) soft kümesi de x noktasının bir soft komşuluğudur.

3.1.5.Tanım. (Shabir ve Naz, 2011) $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzayı verilsin ve $(F, E) \in \mathcal{S}(X, E)$ olsun. (F, E) soft kümesini kapsayan tüm soft kapalı kümelerin kesişimine, (F, E) soft kümesinin soft kapanışı denir ve $\overline{(F, E)}$ ile gösterilir.

3.1.1.Teorem. (Shabir ve Naz, 2011) $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzayı verilsin ve $(F, E), (G, E) \in \mathcal{S}(X, E)$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

$\boldsymbol{i})\ \overline{\phi_E} = \phi_E, \overline{\tilde{X}} = \tilde{X},$

$\boldsymbol{ii})\ (F,E) \sqsubseteq \overline{(F,E)},$

$\boldsymbol{iii})\ (F,E)$ soft kümesinin soft kapalı olması için $\Leftrightarrow (F,E) = \overline{(F,E)}$ olmasıdır,

$\boldsymbol{iv})\ \overline{\overline{(F,E)}} = \overline{(F,E)},$

$\boldsymbol{v})\ (F,E) \sqsubseteq (G,E)$ ise $\overline{(F,E)} \sqsubseteq \overline{(G,E)},$

$\boldsymbol{vi})\ \overline{(F,E)} \sqcup \overline{(G,E)} = \overline{[(F,E) \sqcup (G,E)]},$

$\boldsymbol{vii})\ \overline{[(F,E) \sqcap (G,E)]} \sqsubseteq \overline{(F,E)} \sqcap \overline{(G,E)}.$

3.1.6.Tanım. (Hussain ve Ahmad, 2011) $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzay ve $(F,E) \in \mathcal{S}(X,E)$ olsun. (F,E) soft kümesinin kapsadığı tüm soft açık kümelerin birleşimine, (F,E) soft kümesinin soft içi denir ve $(F,E)^{\circ}$ şeklinde gösterilir.

3.1.2.Teorem. (Hussain ve Ahmad, 2011) $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzay ve $(F,E),(G,E) \in \mathcal{S}(X,E)$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

$\boldsymbol{i})\ \phi_E{}^{\circ} = \phi_E, \tilde{X}^{\circ} = \tilde{X},$

$\boldsymbol{ii})\ (F,E)^{\circ} \sqsubseteq (F,E),$

$\boldsymbol{iii})\ (F,E)$ soft kümesinin soft açık olması için $\Leftrightarrow (F,E) = (F,E)^{\circ}$ olmasıdır,

$\boldsymbol{iv})\ (F,E)^{\circ\circ} = (F,E)^{\circ},$

$\boldsymbol{v})\ (F,E) \sqsubseteq (G,E)$ ise $(F,E)^{\circ} \sqsubseteq (G,E)^{\circ},$

$\boldsymbol{vi})\ (F,E)^{\circ} \sqcap (G,E)^{\circ} = [(F,E) \sqcap (G,E)]^{\circ},$

$\boldsymbol{vii})\ (F,E)^{\circ} \sqcup (G,E)^{\circ} \sqsubseteq [(F,E) \sqcup (G,E)]^{\circ}.$

3.1.3.Teorem. (Hussain ve Ahmad, 2011) $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzay ve $(F,E) \in \mathcal{S}(X,E)$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

$\boldsymbol{i})\ [(F,E)']^{\circ} = \left[\overline{(F,E)}\right]',$

$\boldsymbol{ii})\ \overline{[(F,E)']} = [(F,E)^{\circ}]'.$

3.1.7.Tanım. (Shabir ve Naz, 2011) $(F,E) \in \mathcal{S}(X,E)$ ve Y, X evreninin boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. Y kümesi üzerindeki (F,E) soft kümesi, her $e \in E$ için $F(e)^Y = Y \cap F(e)$ şeklinde tanımlanır ve $(F,E)^Y = \tilde{Y} \sqcap (F,E)$ ile gösterilir.

3.1.8.Tanım. (Shabir ve Naz, 2011) $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzay ve Y, X evreninin boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. $\tilde{\tau}_Y = \{(F,E)^Y : (F,E) \in \tilde{\tau}\}$ ailesine,

Y üzerindeki soft relative topoloji denir ve $(Y, \tilde{\tau}_Y, E)$ üçlüsüne de $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzayının soft alt uzayı denir.

3.1.4.Teorem. (Shabir ve Naz, 2011) $(Y, \tilde{\tau}_Y, E)$, $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzayının soft alt uzayı ve $(F, E) \in \mathcal{S}(X, E)$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

$\boldsymbol{i}$) (F, E) soft kümesinin Y üzerinde soft açık küme olması için gerek ve yeter koşul $(F, E) = \tilde{Y} \sqcap (G, E)$ olacak şekilde bir $(G, E) \in \tilde{\tau}$ kümesinin varlığıdır.

$\boldsymbol{ii}$) (F, E) soft kümesinin Y üzerinde soft kapalı küme olması için gerek ve yeter koşul $(F, E) = \tilde{Y} \sqcap (G, E)$ olacak şekilde bir $(G, E) \in \tilde{\tau}'$ kümesinin varlığıdır.

3.1.9.Tanım. (Yüksel ve ark., 2014a) $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzay ve $(F, E), (G, E) \in \mathcal{S}(X, E)$ olsun. Eğer $\overline{(F, E)} \sqcap (G, E) = \phi_E$ ve $\overline{(G, E)} \sqcap (F, E) = \phi_E$ ise (F, E) ve (G, E) soft kümelerine soft bağlantılı olmayan küme denir.

3.2. Soft Topolojik Uzaylarda Soft Genelleştirilmiş Pre-regüler Kapalı Kümeler

Klasik topolojide bilinen bazı küme çeşitleri soft topolojik uzaylarda incelenmiştir. Kandil ve ark. (2014a) soft pre açık, soft α-açık, soft semi açık ve soft β-açık kümeleri, Kannan (2012) soft genelleştirilmiş kapalı kümeleri ve Yüksel ve ark. (2014b) soft regüler genelleştirilmiş kapalı kümeleri çalışmışlardır. Bu kesimde soft regüler genelleştirilmiş kapalı kümelerden daha zayıf olan soft genelleştirilmiş pre-regüler kapalı kümeleri ve özelliklerini inceledik. Ayrıca soft genelleştirilmiş pre-regüler kapalı kümelerin, bazı soft küme çeşitleri ile ilişkilerini araştırdık.

İlk olarak, Kandil ve ark. (2014a) tarafından verilen soft pre-kapanış ve soft pre-iç kavramlarını ve Kannan (2012) ve Yüksel ve ark. (2014b) tarafından verilmiş olan soft küme çeşitlerini hatırlatacağız.

3.2.1.Tanım. (Kandil ve ark., 2014a) $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzayı verilsin. $(F, E) \in \mathcal{S}(X, E)$ soft alt kümesi için $(F, E) \sqsubseteq \left[\overline{(F, E)}\right]^{\circ}$ ise (F, E) soft kümesine, soft pre-açık küme denir. Relative tümleyeni soft pre-açık olan kümeye, soft pre-kapalı denir.

3.2.1.Uyarı. (Kandil ve ark., 2014a) Bir soft topolojik uzayda her soft kapalı küme, soft pre-kapalı kümedir.

3.2.2.Tanım. (Kandil ve ark., 2014a) $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzayı verilsin. $(F,E)\in\mathcal{S}(X,E)$ olsun. (F,E) soft kümesini kapsayan tüm soft pre-kapalı kümelerin kesişimine, (F,E) soft kümesinin soft pre-kapanışı denir ve $\overline{(F,E)}^{P}$ ile gösterilir.

3.2.1.Teorem. (Kandil ve ark., 2014a) $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzayı verilsin. $(F,E),(G,E)\in\mathcal{S}(X,E)$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

$\boldsymbol{i})\ \overline{\phi_E}^{P}=\phi_E,\ \bar{\tilde{X}}^{P}=\tilde{X},$

$\boldsymbol{ii})\ (F,E)\sqsubseteq\overline{(F,E)}^{P},$

$\boldsymbol{iii})\ \overline{\overline{(F,E)}^{P}}^{P}=\overline{(F,E)}^{P},$

$\boldsymbol{iv})\ (F,E)\sqsubseteq(G,E)$ ise $\overline{(F,E)}^{P}\sqsubseteq\overline{(G,E)}^{P},$

$\boldsymbol{v})\ \overline{(F,E)}^{P}\sqcup\overline{(G,E)}^{P}\sqsubseteq\overline{[(F,E)\sqcup(G,E)]}^{P},$

$\boldsymbol{vi})\ \overline{[(F,E)\sqcap(G,E)]}^{P}\sqsubseteq\overline{(F,E)}^{P}\sqcap\overline{(G,E)}^{P}.$

3.2.3.Tanım. (Kandil ve ark., 2014a) $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzayı verilsin. $(F,E)\in\mathcal{S}(X,E)$ olsun. (F,E) soft kümesinin kapsadığı tüm soft pre-açık kümelerin birleşimine, (F,E) soft kümesinin soft pre-içi denir ve $(F,E)^{\circ P}$ ile gösterilir.

3.2.2.Teorem. (Kandil ve ark., 2014a) $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzayı verilsin. $(F,E),(G,E)\in\mathcal{S}(X,E)$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

$\boldsymbol{i})\ {\phi_E}^{\circ P}=\phi_E,\ \tilde{X}^{\circ P}=\tilde{X},$

$\boldsymbol{ii})\ (F,E)^{\circ P}\sqsubseteq(F,E),$

$\boldsymbol{iii})\ (F,E)^{\circ P\circ P}=(F,E)^{\circ P},$

$\boldsymbol{iv})\ (F,E)\sqsubseteq(G,E)$ ise $(F,E)^{\circ P}\sqsubseteq(G,E)^{\circ P},$

$\boldsymbol{v})\ [(F,E)\sqcap(G,E)]^{\circ P}\sqsubseteq(F,E)^{\circ P}\sqcap(G,E)^{\circ P},$

$\boldsymbol{vi})\ (F,E)^{\circ P}\sqcup(G,E)^{\circ P}\sqsubseteq[(F,E)\sqcup(G,E)]^{\circ P}.$

3.2.3.Teorem. (Kandil ve ark., 2014a) $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzayı verilsin ve $(F,E)\in\mathcal{S}(X,E)$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

$\boldsymbol{i})\ [(F,E)']^{\circ P}=\left[\overline{(F,E)}^{P}\right]',$

$\boldsymbol{ii})\ \overline{[(F,E)']}^{P}=[(F,E)^{\circ P}]'.$

3.2.4.Tanım. (Kannan, 2012) $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzay ve $(F,E)\in\mathcal{S}(X,E)$ olsun. $(F,E)\sqsubseteq(G,E)$ ve $(G,E)\in\tilde{\tau}$ olmak üzere $\overline{(F,E)}\sqsubseteq(G,E)$ oluyorsa (F,E) soft kümesine, soft genelleştirilmiş kapalı küme (soft g-kapalı küme) denir. Relative

tümleyeni soft genelleştirilmiş kapalı olan kümeye, soft genelleştirilmiş açık küme (soft g-açık küme) denir.

3.2.4.Teorem. (Kannan, 2012) Bir soft topolojik uzayda her soft kapalı küme, soft g-kapalı kümedir.

3.2.5.Tanım. (Yüksel ve ark., 2014b) $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzayı verilsin. $(F, E) \in \mathcal{S}(X, E)$ olsun. Eğer $\left[\overline{(F, E)}\right]^{\circ} = (F, E)$ ise (F, E) soft kümesine, soft regüler açık küme ve $\overline{[(F, E)^{\circ}]} = (F, E)$ ise (F, E) soft kümesine, soft regüler kapalı küme denir.

3.2.2.Uyarı. (Yüksel ve ark., 2014b) Bir soft topolojik uzayda her soft regüler açık küme, soft açık kümedir.

3.2.6.Tanım. (Yüksel ve ark., 2014b) $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzayı verilsin ve $(F, E) \in \mathcal{S}(X, E)$ olsun. $(F, E) \sqsubseteq (G, E)$ ve (G, E) soft kümesi, soft regüler açık olmak üzere $\overline{(F, E)} \sqsubseteq (G, E)$ oluyorsa (F, E) soft kümesine, soft regüler genelleştirilmiş kapalı küme (soft rg-kapalı) denir. Relative tümleyeni soft regüler genelleştirilmiş kapalı olan kümeye, soft regüler genelleştirilmiş açık küme (soft rg-açık) denir.

3.2.5.Teorem. (Yüksel ve ark., 2014b) Bir soft topolojik uzayda her soft g-kapalı küme, soft rg-kapalı kümedir.

Şimdi soft topolojik uzaylarda soft genelleştirilmiş pre-regüler kapalı küme tanımını ve bu kümelerin özelliklerini verelim. Ayrıca Kannan (2012), Yüksel ve ark. (2014b) ve Kandil ve ark. (2014a) tarafından verilmiş olan soft küme çeşitleri ile ilişkilerini inceleyelim.

3.2.7.Tanım. $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzayı verilsin ve $(F, E) \in \mathcal{S}(X, E)$ olsun. $(F, E) \sqsubseteq (G, E)$ ve (G, E) soft kümesi, soft regüler açık olmak üzere $\overline{(F, E)}^{P} \sqsubseteq (G, E)$ oluyorsa (F, E) soft kümesine, soft genelleştirilmiş pre-regüler kapalı küme (soft gpr-kapalı) denir.

3.2.3.Uyarı. Yukarıdaki verilen 3.2.1.Tanım, 3.2.5.Tanım ve 3.2.7.Tanım gereği açıktır ki bir soft topolojik uzayda her soft regüler kapalı küme, soft pre-kapalıdır ve her soft pre-kapalı küme de, soft gpr-kapalıdır. Ancak genelde karşıtı doğru değildir:

3.2.1.Örnek. $X = \{x_1, x_2\}$ evren küme ve $E = \{e_1, e_2\}$ parametre kümesi olsun.

$$F_1(e_1) = \{x_2\}, F_1(e_2) = \{x_2\}$$
$$F_2(e_1) = \{x_1\}, F_2(e_2) = \emptyset$$
$$F_3(e_1) = X, F_3(e_2) = \{x_2\}$$
$$F_4(e_1) = \{x_2\}, F_4(e_2) = \emptyset$$
$$F_5(e_1) = X, F_5(e_2) = \emptyset$$

olmak üzere $\tilde{\tau} = \{\phi_E, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E), (F_5, E)\}$ soft topolojisi ve $H(e_1) = \{x_1\}, H(e_2) = X$ olmak üzere $(H, E) \in \mathcal{S}(X, E)$ soft kümesi verilsin. (H, E) soft kümesi, soft gpr-kapalıdır ancak soft regüler kapalı değildir.

3.2.2.Örnek. $X = \{x_1, x_2\}$ evren küme ve $E = \{e_1, e_2\}$ parametre kümesi olmak üzere 3.2.1.Örnekteki $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzayı ve $G(e_1) = X, G(e_2) = \{x_2\}$ olmak üzere $(G, E) \in \mathcal{S}(X, E)$ soft kümesi verilsin. (G, E) soft kümesi, soft gpr-kapalıdır ancak soft pre-kapalı değildir.

3.2.6.Teorem. $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzay ve $(F, E) \in \mathcal{S}(X, E)$ olsun. (F, E) soft rg-kapalı küme ise (F, E) soft gpr-kapalı kümedir.

İspat. (F, E) soft kümesi $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzayında soft rg-kapalı küme, $(F, E) \sqsubseteq (G, E)$ ve (G, E) soft kümesi, soft regüler açık olsun. (F, E) soft kümesi, soft rg-kapalı olduğundan $\overline{(F, E)} \sqsubseteq (G, E)$ olur. 3.2.1.Uyarı gereği her soft kapalı küme, soft pre-kapalı küme olduğundan $\overline{(F, E)}^P \sqsubseteq \overline{(F, E)}$ olur. Buradan $\overline{(F, E)}^P \sqsubseteq (G, E)$ olup, (F, E) soft kümesi soft gpr-kapalıdır.

3.2.4.Uyarı. Aşağıdaki örnekte verildiği üzere 3.2.6.Teoremin karşıtı genelde doğru değildir.

3.2.3.Örnek. $X = \{x_1, x_2\}$ evren küme ve $E = \{e_1, e_2\}$ parametre kümesi olsun.

$$F_1(e_1) = \{x_1\}, F_1(e_2) = \{x_1\}$$
$$F_2(e_1) = \{x_2\}, F_2(e_2) = \emptyset$$
$$F_3(e_1) = X, F_3(e_2) = \{x_1\}$$

olmak üzere $\tilde{\tau} = \{\phi_E, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E)\}$ soft topolojik uzayı ve $H(e_1) = \{x_1\}$, $H(e_2) = \emptyset$ olmak üzere $(H, E) \in \mathcal{S}(X, E)$ soft kümesi verilsin. (H, E) soft kümesi, soft gpr-kapalıdır ancak soft rg-kapalı değildir.

3.2.5.Uyarı. Bir soft topolojik uzayda 3.2.4.Teorem, 3.2.5.Teorem ve 3.2.6.Teorem gereği aşağıdaki 3.2.1.Şekil verilebilir:

soft kapalı küme $\Longrightarrow$ soft g-kapalı küme $\Longrightarrow$ soft rg-kapalı küme $\Longrightarrow$ soft gpr-kapalı küme

3.2.1.Şekil

3.2.7.Teorem. $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzay ve $(F,E)\in\mathcal{S}(X,E)$ olsun. Eğer (F,E) soft regüler açık ve soft gpr-kapalı küme ise (F,E) soft pre-kapalı kümedir.

İspat. (F,E) soft kümesi $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzayında soft regüler açık ve soft gpr-kapalı küme ise $\overline{(F,E)}^{P}\sqsubseteq(F,E)$ olur. Soft pre-kapanış tanımı gereğince $(F,E)\sqsubseteq\overline{(F,E)}^{P}$ olduğundan (F,E) soft pre-kapalı kümedir.

3.2.6.Uyarı. Bir soft topolojik uzayda iki soft gpr-kapalı kümenin birleşimi, genellikle soft gpr-kapalı küme değildir:

3.2.4.Örnek. $X=\{x_1,x_2\}$ evren kümesi ve $E=\{e_1,e_2\}$ parametreler kümesi olmak üzere 3.2.3.Örnekteki $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzayı, $H(e_1)=\{x_1\}$, $H(e_2)=\emptyset$ ve $G(e_1)=\emptyset$, $G(e_2)=\{x_1\}$ olmak üzere $(H,E),(G,E)\in\mathcal{S}(X,E)$ soft kümeleri verilsin. Açıktır ki (H,E) ve (G,E) soft kümeleri, soft gpr-kapalıdır ancak $(H,E)\sqcup(G,E)$ soft kümesi, soft gpr-kapalı değildir.

3.2.7.Uyarı. Bir soft topolojik uzayda iki soft gpr-kapalı kümenin kesişimi, genellikle soft gpr-kapalı küme değildir:

3.2.5.Örnek. $X=\{x_1,x_2\}$ evren kümesi ve $E=\{e_1,e_2\}$ parametreler kümesi olmak üzere 3.2.1.Örnekteki $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzayı, $H(e_1)=X$, $H(e_2)=\{x_2\}$ ve $G(e_1)=\{x_2\}$, $G(e_2)=X$ olmak üzere $(H,E),(G,E)\in\mathcal{S}(X,E)$ soft kümeleri verilsin. Açıktır ki (H,E) ve (G,E) soft kümeleri, soft gpr-kapalıdır ancak $(H,E)\sqcap(G,E)$ soft kümesi, soft gpr-kapalı değildir.

3.2.8.Teorem. $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzay ve $(F,E)\in\mathcal{S}(X,E)$ olsun. Eğer (F,E) soft gpr-kapalı küme ise $\left[\overline{(F,E)}^{P}-(F,E)\right]$ soft kümesi, boş soft kümeden başka hiçbir soft regüler kapalı kümeyi kapsamaz.

İspat. (F,E) soft kümesi $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzayında soft gpr-kapalı, $(H,E)\sqsubseteq\left[\overline{(F,E)}^{P}-(F,E)\right]$ ve (H,E) soft kümesi, soft regüler kapalı olsun. Buradan

$(H,E) \sqsubseteq \left[\overline{(F,E)}^P \sqcap (F,E)'\right]$ ve $(F,E) \sqsubseteq (H,E)'$ elde edilir. (F,E) soft kümesi, soft gpr-kapalı ve $(H,E)'$ soft regüler açık küme olduğundan $\overline{(F,E)}^P \sqsubseteq (H,E)'$ ve relative tümleme işlemi gereğince $(H,E) \sqsubseteq \left[\overline{(F,E)}^P\right]'$ olur. Hipotez gereği $(H,E) \sqsubseteq \overline{(F,E)}^P$ olduğundan $(H,E) \sqsubseteq \left[\overline{(F,E)}^P \sqcap \left[\overline{(F,E)}^P\right]'\right] = \phi_E$ olur. Böylece $(H,E) = \phi_E$ elde edilir. Bu yüzden $\left[\overline{(F,E)}^P - (F,E)\right]$ soft kümesi, boş soft kümeden başka hiçbir soft regüler kapalı kümeyi kapsamaz.

3.2.8.Uyarı. Aşağıdaki örnekte verildiği üzere 3.2.8.Teoremin tersi, genelde doğru değildir:

3.2.6.Örnek. $X = \{x_1, x_2\}$ evren kümesi ve $E = \{e_1, e_2\}$ parametreler kümesi olmak üzere 3.2.3.Örnekteki $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzayı ve (F_2, E) soft kümesi verilsin. $\left[\overline{(F_2,E)}^P - (F_2,E)\right]$ soft kümesi, yalnızca ϕ_E soft regüler kapalı kümesini içerir. Ancak (F_2, E) soft kümesi, soft gpr-kapalı değildir.

3.2.9.Teorem. $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzay ve $(F,E) \in \mathcal{S}(X,E)$ soft gpr-kapalı küme olsun. (F,E) soft kümesinin, soft pre-kapalı olması için gerek ve yeter koşul $\left[\overline{(F,E)}^P - (F,E)\right]$ soft kümesinin, soft regüler kapalı olmasıdır.

İspat. $\Longrightarrow$ (F,E) soft kümesi $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzayında soft gpr-kapalı olsun. Eğer (F,E) soft pre-kapalı küme ise $\overline{(F,E)}^P = (F,E)$ olup $\left[\overline{(F,E)}^P - (F,E)\right]$ soft kümesi, ϕ_E soft regüler kapalı kümesine eşittir.

$\Longleftarrow$ $\left[\overline{(F,E)}^P - (F,E)\right]$ soft regüler kapalı olsun. (F,E) soft kümesi, soft gpr-kapalı olduğundan $\left[\overline{(F,E)}^P - (F,E)\right] = \phi_E$ olur. Böylece $\overline{(F,E)}^P = (F,E)$ olup (F,E) soft kümesi, soft pre-kapalıdır.

3.2.10.Teorem. $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzay ve $(F,E), (G,E) \in \mathcal{S}(X,E)$ olsun. Eğer (F,E) soft kümesi, soft gpr-kapalı küme ve $(F,E) \sqsubseteq (G,E) \sqsubseteq \overline{(F,E)}^P$ ise (G,E) soft kümesi, soft gpr-kapalı kümedir.

İspat. (F,E) soft kümesi $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzayında soft gpr-kapalı olsun. $(G,E) \sqsubseteq (H,E)$ ve (H,E) soft regüler açık kümesi verilsin. Hipotezden $(F,E) \sqsubseteq (G,E)$ olup $(F,E) \sqsubseteq (H,E)$ olur. (F,E) soft kümesi, soft gpr-kapalı küme olduğundan $\overline{(F,E)}^P \sqsubseteq (H,E)$ elde edilir. Hipotez gereği $(G,E) \sqsubseteq \overline{(F,E)}^P$ olup $\overline{(G,E)}^P \sqsubseteq \overline{(F,E)}^P$ olur. Buradan $\overline{(G,E)}^P \sqsubseteq (H,E)$ olup (G,E) soft kümesi, soft gpr-kapalı kümedir.

3.2.8.Tanım. $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzay olsun. Relative tümleyeni soft genelleştirilmiş pre-regüler kapalı olan kümeye, soft genelleştirilmiş pre-regüler açık küme (soft gpr-açık) denir.

3.2.11.Teorem. $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzay ve $(F,E),(H,E)\in\mathcal{S}(X,E)$ olsun. (F,E) soft kümesinin, soft gpr-açık olması için gerek ve yeter koşul (H,E) soft kümesi, soft regüler kapalı ve $(H,E)\sqsubseteq(F,E)$ olduğunda $(H,E)\sqsubseteq(F,E)^{\circ P}$ olmasıdır.

İspat. $\Longrightarrow$ (F,E) soft kümesi $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzayında soft gpr-açık küme (H,E) soft kümesi, soft regüler kapalı ve $(H,E)\sqsubseteq(F,E)$ olsun. Buradan $(H,E)'$ soft kümesi, soft regüler açık ve $(F,E)'\sqsubseteq(H,E)'$ olur. $(F,E)'$ soft kümesi, soft gpr-kapalı olduğundan $\left[\overline{(F,E)'}^{P}\right]\sqsubseteq(H,E)'$ olup böylece $(H,E)\sqsubseteq\left[\overline{(F,E)'}^{P}\right]'=(F,E)^{\circ P}$ olur.

$\Longleftarrow$ (H,E) soft kümesi, soft regüler kapalı ve $(H,E)\sqsubseteq(F,E)$ olduğunda $(H,E)\sqsubseteq(F,E)^{\circ P}$ olsun. $(F,E)'$ soft kümesinin soft gpr-kapalı olduğunu gösterelim. $(F,E)'\sqsubseteq(G,E)$ ve (G,E) kümesi, soft regüler açık olsun. Buradan $(G,E)'\sqsubseteq(F,E)$, $(G,E)'$ soft kümesi, soft regüler kapalı ve hipotez gereği $(G,E)'\sqsubseteq(F,E)^{\circ P}$ olur. Relative tümleme işleminden $[(F,E)^{\circ P}]'\sqsubseteq(G,E)$ ve $\overline{[(F,E)']}^{P}=[(F,E)^{\circ P}]'\sqsubseteq(G,E)$ elde edilir. Buradan $(F,E)'$ soft kümesi, soft gpr-kapalı olup sonuç olarak (F,E) soft kümesi soft gpr-açıktır.

3.2.12.Teorem. $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzay ve $(F,E),(G,E)\in\mathcal{S}(X,E)$ olsun. Eğer (F,E) soft kümesi, soft gpr-açık küme ve $(F,E)^{\circ P}\sqsubseteq(G,E)\sqsubseteq(F,E)$ ise (G,E) soft kümesi, soft gpr-açık kümedir.

İspat. Relative tümleme işlemi ve 3.2.10.Teorem gereği ispat açıktır.

3.2.13.Teorem. $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzay ve $(F,E)\in\mathcal{S}(X,E)$ olsun. Eğer (F,E) soft gpr-kapalı küme ise $\left[\overline{(F,E)}^{P}-(F,E)\right]$ soft kümesi, soft gpr-açık kümedir.

İspat. (F,E) soft kümesi soft gpr-kapalı küme, (H,E) soft regüler kapalı küme ve $(H,E)\sqsubseteq\left[\overline{(F,E)}^{P}-(F,E)\right]$ olsun. 3.2.8.Teorem gereğince $(H,E)=\phi_E$ ve $(H,E)\sqsubseteq\left[\overline{(F,E)}^{P}-(F,E)\right]^{\circ P}$ olur. Böylece 3.2.11.Teorem gereği $\left[\overline{(F,E)}^{P}-(F,E)\right]$ soft kümesi soft gpr-açık kümedir.

3.2.9.Uyarı. Aşağıdaki örnekte verildiği üzere 3.2.13.Teoremin tersi, genelde doğru değildir:

3.2.7.Örnek. $X = \{x_1, x_2\}$ evren kümesi ve $E = \{e_1, e_2\}$ parametreler kümesi olmak üzere 3.2.3.Örnekteki $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzayı ve (F_2, E) soft kümesi verilsin. $\left[\overline{(F_2, E)}^P - (F_2, E)\right]$ soft kümesi, soft gpr-açık kümedir ancak (F_2, E) soft kümesi, soft gpr-kapalı değildir.

3.3. Soft İdeal Topolojik Uzaylarda Soft Regüler Genelleştirilmiş Kapalı Kümeler

Bu kesimde klasik topolojide bilinen regüler genelleştirilmiş kapalı kümeleri, soft topolojik uzaylarda Mustafa ve Sleim (2014) tarafından verilmiş olan soft ideal kavramına dayanarak inceledik. Bir soft ideale bağlı soft regüler genelleştirilmiş kapalı kümeler olarak adlandırılan bu kümelerin bazı temel özelliklerini araştırdık. Yüksel ve ark. (2014b) tarafından verilen soft regüler genelleştirilmiş kapalı kümelerin bir genişlemesi olan bu kümelerin, Mustafa ve Sleim (2014) tarafından verilen bir soft ideale bağlı soft genelleştirilmiş kapalı kümeler ile ilişkilerini araştırdık. Öncelikle Mustafa ve Sleim (2014) tarafından verilmiş olan soft ideal kavramını verelim.

3.3.1.Tanım. (Mustafa ve Sleim, 2014) X evren kümesi ve E parametre kümesi olsun. X evreni üzerindeki E parametre kümesine bağlı soft kümelerin bir alt ailesi olan $\tilde{I}$, aşağıdaki özellikleri sağlarsa $\tilde{I}$ ailesine X evreni üzerinde soft ideal denir ve $(X, \tilde{I}, E)$ simgesi ile gösterilir.

$\boldsymbol{i}$) Her (F, E),$(G, E) \in \tilde{I}$ soft kümeleri için $(F, E) \sqcup (G, E) \in \tilde{I}$,

$\boldsymbol{ii}$) Her $(F, E) \in \tilde{I}$ ve $(G, E) \sqsubseteq (F, E)$ soft alt kümesi için $(G, E) \in \tilde{I}$.

3.3.2.Tanım. (Mustafa ve Sleim, 2014) $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzay, $(X, \tilde{I}, E)$ soft ideal ve $(F, E) \in \mathcal{S}(X, E)$ olsun. $(F, E) \sqsubseteq (G, E)$ ve $(G, E) \in \tilde{\tau}$ olmak üzere $[\overline{(F, E)} - (G, E)] \in \tilde{I}$ oluyorsa (F, E) soft kümesine, $\tilde{I}$ soft idealine bağlı soft genelleştirilmiş kapalı küme (soft $\tilde{I}$-g-kapalı) denir. Relative tümleyeni soft $\tilde{I}$-g-kapalı olan soft kümeye, soft $\tilde{I}$-g-açık küme denir.

3.3.3.Tanım. $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzayı ve $(X, \tilde{I}, E)$ soft ideali verilsin. $(F, E) \in \mathcal{S}(X, E)$ olsun. $(F, E) \sqsubseteq (G, E)$ ve (G, E) soft kümesi, soft regüler açık olmak üzere $[\overline{(F, E)} - (G, E)] \in \tilde{I}$ oluyorsa (F, E) soft kümesine, $\tilde{I}$ soft idealine bağlı soft regüler genelleştirilmiş kapalı küme (soft $\tilde{I}$-rg-kapalı) denir.

3.3.1.Örnek. $X = \{ x_1, x_2, x_3 \}$ evren kümesi ve $E = \{e_1, e_2\}$ parametreler kümesi olsun.

$$F_1(e_1) = \{x_1\}, F_1(e_2) = \{x_1\}$$
$$F_2(e_1) = \{x_2\}, F_2(e_2) = \emptyset$$
$$F_3(e_1) = \{x_1, x_2\}, F_3(e_2) = \{x_1\}$$

olmak üzere $\tilde{\tau} = \{\phi_E, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E)\}$ soft topolojisi ve

$$I_1(e_1) = \{x_3\}, I_1(e_2) = \{x_2, x_3\}$$
$$I_2(e_1) = \{x_3\}, I_2(e_2) = \{x_3\}$$
$$I_3(e_1) = \emptyset, I_3(e_2) = \{x_3\}$$
$$I_4(e_1) = \{x_3\}, I_4(e_2) = \{x_2\}$$
$$I_5(e_1) = \emptyset, I_5(e_2) = \{x_2\}$$
$$I_6(e_1) = \emptyset, I_6(e_2) = \{x_2, x_3\}$$
$$I_7(e_1) = \{x_3\}, I_7(e_2) = \emptyset$$

olmak üzere $\tilde{I} = \{\phi_E, (I_1, E), (I_2, E), (I_3, E), (I_4, E), (I_5, E), (I_6, E), (I_7, E)\}$ soft ideali verilsin. Açıktır ki (F_2, E) soft $\tilde{I}$-rg-kapalı kümedir. Gerçekten $(F_2, E) \sqsubseteq (F_2, E)$ ve (F_2, E) soft kümesi, soft regüler açık olup $[\overline{(F_2, E)} - (F_2, E)] \in \tilde{I}$ elde edilir.

3.3.1.Önerme. $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzayı ve $(X, \tilde{I}, E)$ soft ideali verilsin. $(F, E) \in \mathcal{S}(X, E)$ olsun. (F, E) soft rg-kapalı küme ise (F, E) soft $\tilde{I}$-rg-kapalı kümedir.

İspat. (F, E) soft kümesi $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzayında soft rg-kapalı, $(F, E) \sqsubseteq (G, E)$ ve (G, E) soft kümesi, soft regüler açık olsun. (F, E) soft kümesi, soft rg-kapalı olduğundan $\overline{(F, E)} \sqsubseteq (G, E)$ olur. Buradan $[\overline{(F, E)} - (G, E)] = \phi_E \in \tilde{I}$ olup, (F, E) soft kümesi, soft $\tilde{I}$-rg-kapalıdır.

3.3.1.Uyarı. Aşağıdaki örnekte verildiği üzere 3.3.1.Önermenin tersi, genelde doğru değildir:

3.3.2.Örnek. $X = \{ x_1, x_2, x_3 \}$ evren kümesi ve $E = \{e_1, e_2\}$ parametreler kümesi olmak üzere 3.3.1.Örnekteki $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzayı, $(X, \tilde{I}, E)$ soft ideali ve $H(e_1) = \{x_1\}$, $H(e_2) = \emptyset$ olmak üzere $(H, E) \in \mathcal{S}(X, E)$ soft kümesi verilsin. (H, E) soft kümesi, soft $\tilde{I}$-rg-kapalıdır ancak soft rg-kapalı değildir.

3.3.1.Teorem. $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzayı ve $(X, \tilde{I}, E)$ soft ideali verilsin. $(F, E) \in \mathcal{S}(X, E)$ olsun. (F, E) soft $\tilde{I}$-g-kapalı küme ise (F, E) soft $\tilde{I}$-rg-kapalı kümedir.

İspat. (F,E) soft kümesi $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzayında soft $\tilde{I}$-g-kapalı, $(F,E) \sqsubseteq (G,E)$ ve (G,E) soft kümesi, soft regüler açık olsun. (G,E) soft kümesi, soft regüler açık olduğundan (G,E) soft kümesi, soft açık olur. Böylece $(F,E) \sqsubseteq (G,E)$ ve (G,E) soft kümesi, soft açık ve (F,E) soft kümesi, soft $\tilde{I}$-g-kapalı olduğundan $[\overline{(F,E)} - (G,E)] \in \tilde{I}$ olur. Buradan (F,E) soft kümesi, soft $\tilde{I}$-rg-kapalıdır.

3.3.2.Uyarı. Aşağıdaki örnekte verildiği üzere 3.3.1.Teoremin tersi, genelde doğru değildir:

3.3.3.Örnek. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ evren kümesi ve $E = \{e_1, e_2\}$ parametreler kümesi olsun.

$$F_1(e_1) = \{x_1\}, F_1(e_2) = X$$
$$F_2(e_1) = \{x_1, x_2\}, F_2(e_2) = X$$
$$F_3(e_1) = \{x_1, x_2, x_3\}, F_3(e_2) = X$$

olmak üzere $\tilde{\tau} = \{\phi_E, \tilde{X}, (F_1,E), (F_2,E), (F_3,E)\}$ soft topolojisi,

$$I_1(e_1) = \{x_2\}, I_1(e_2) = \emptyset$$
$$I_2(e_1) = \emptyset, I_2(e_2) = \{x_3\}$$
$$I_3(e_1) = \{x_2\}, I_3(e_2) = \{x_3\}$$

olmak üzere $\tilde{I} = \{\phi_E, (I_1,E), (I_2,E), (I_3,E)\}$ soft ideali ve $H(e_1) = \{x_1\}, H(e_2) = \emptyset$ olmak üzere $(H,E) \in \mathcal{S}(X,E)$ soft kümesi verilsin. (H,E) soft kümesi, soft $\tilde{I}$-rg-kapalıdır ancak soft $\tilde{I}$-g-kapalı değildir.

3.3.2.Teorem. $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzay, $(X,\tilde{I},E)$ soft ideal ve (F,E), $(G,E) \in \mathcal{S}(X,E)$ olsun. Eğer (F,E) ve (G,E) soft kümeleri, soft $\tilde{I}$-rg-kapalı ise $(F,E) \sqcup (G,E)$ soft kümesi, soft $\tilde{I}$-rg-kapalıdır.

İspat. (F,E) ve (G,E) soft $\tilde{I}$-rg-kapalı kümeler, $(F,E) \sqcup (G,E) \sqsubseteq (H,E)$ ve (H,E) soft kümesi, soft regüler açık olsun. Buradan $(F,E) \sqsubseteq (H,E)$ ve $(G,E) \sqsubseteq (H,E)$ olur. (F,E) ve (G,E) soft $\tilde{I}$-rg-kapalı kümeler olduğundan

$$[\overline{(F,E)} - (H,E)] \in \tilde{I} \text{ ve } [\overline{(G,E)} - (H,E)] \in \tilde{I}$$

olur. Böylece

$$\left[\overline{[(F,E) \sqcup (G,E)]} - (H,E)\right] = \left[\overline{(F,E)} - (H,E)\right] \sqcup \left[\overline{(G,E)} - (H,E)\right] \in \tilde{I}$$

olup buradan $(F,E) \sqcup (G,E)$ soft $\tilde{I}$-rg-kapalı kümedir.

3.3.3.Uyarı. $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzay ve $(X,\tilde{I},E)$ soft ideal olsun. İki soft $\tilde{I}$-rg-kapalı kümenin kesişimi, genellikle soft $\tilde{I}$-rg-kapalı değildir.

3.3.4.Örnek. $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ evren kümesi ve $E=\{e_1,e_2\}$ parametreler kümesi olsun.

$$F_1(e_1)=\{x_1\},F_1(e_2)=\{x_1\}$$
$$F_2(e_1)=\{x_2\},F_2(e_2)=\{x_2\}$$
$$F_3(e_1)=\{x_1,x_2\},F_3(e_2)=\{x_1,x_2\}$$
$$F_4(e_1)=\{x_1,x_2,x_3\},F_4(e_2)=X$$

olmak üzere $\tilde{\tau}=\{\phi_E,\tilde{X},(F_1,E),(F_2,E),(F_3,E),(F_4,E)\}$ soft topolojisi ve

$$I_1(e_1)=\{x_4\},I_1(e_2)=\emptyset$$
$$I_2(e_1)=\emptyset,I_2(e_2)=\{x_2\}$$
$$I_3(e_1)=\{x_4\},I_3(e_2)=\{x_2\}$$

olmak üzere $\tilde{I}=\{\phi_E,(I_1,E),(I_2,E),(I_3,E)\}$ soft ideali verilsin. $H(e_1)=\{x_1,x_4\}$, $H(e_2)=\{x_1\}$ ve $K(e_1)=\{x_1,x_2,x_3\}$, $K(e_2)=\{x_1,x_3\}$ olmak üzere X üzerinde verilen (H,E) ve (K,E) soft kümeleri, soft $\tilde{I}$-rg-kapalıdır ancak $(H,E)\sqcap(K,E)$ soft kümesi, soft $\tilde{I}$-rg-kapalı değildir.

3.3.3.Teorem. $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzayı ve $(X,\tilde{I},E)$ soft ideali verilsin. $(H,E),(F,E)\in\mathcal{S}(X,E)$ olsun. $(H,E)\sqsubseteq[\overline{(F,E)}-(F,E)]$ ve (H,E) soft kümesi, soft regüler kapalı olsun. Eğer (F,E) soft kümesi, soft $\tilde{I}$-rg-kapalı küme ise $(H,E)\in\tilde{I}$ olur.

İspat. (F,E) soft kümesi $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzayında soft $\tilde{I}$-rg-kapalı, $(H,E)\sqsubseteq[\overline{(F,E)}-(F,E)]$ ve (H,E) soft kümesi, soft regüler kapalı olsun. Buradan $(H,E)\sqsubseteq\overline{(F,E)}\sqcap(F,E)'$ ve $(F,E)\sqsubseteq(H,E)'$ olur. (F,E) soft kümesi, soft $\tilde{I}$-rg-kapalı olduğundan $[\overline{(F,E)}-(H,E)']\in\tilde{I}$ olur. Ayrıca $(H,E)\sqsubseteq[\overline{(F,E)}-(H,E)']$ olduğundan ve soft ideal tanımı gereği $(H,E)\in\tilde{I}$ elde edilir.

3.3.4.Uyarı. Aşağıdaki örnekte verildiği üzere 3.3.3.Teoremin tersi, genelde doğru değildir.

3.3.5.Örnek. $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ evren kümesi ve $E=\{e_1,e_2\}$ parametreler kümesi olmak üzere 3.3.4.Örnekteki $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzayı, $(X,\tilde{I},E)$ soft ideali ve (F_2,E) soft kümesi verilsin. $[\overline{(F_2,E)}-(F_2,E)]$ soft kümesi, yalnızca $(H,E)=\phi_E$

soft regüler kapalı kümesini içerir ve $\phi_E \in \tilde{I}$ olur. Ancak (F_2, E) soft kümesi, soft $\tilde{I}$-rg-kapalı değildir.

3.3.4.Teorem. $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzay, $(X, \tilde{I}, E)$ soft ideal ve $(F, E), (G, E), (H, E) \in \mathcal{S}(X, E)$ olsun. $(H, E) \sqsubseteq [\overline{(G, E)} - (G, E)]$ ve (H, E) soft kümesi, soft regüler kapalı olsun. Eğer (F, E) soft kümesi, soft $\tilde{I}$-rg-kapalı ve $(F, E) \sqsubseteq (G, E) \sqsubseteq \overline{(F, E)}$ ise $(H, E) \in \tilde{I}$ olur.

İspat. (F, E) soft kümesi $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzayında soft $\tilde{I}$-rg-kapalı, $(H, E) \sqsubseteq [\overline{(G, E)} - (G, E)]$ ve (H, E) soft kümesi, soft regüler kapalı olsun. Hipotez gereği eğer $(F, E) \sqsubseteq (G, E)$ ise relative tümleme işleminden $(G, E)' \sqsubseteq (F, E)'$ ve eğer $(G, E) \sqsubseteq \overline{(F, E)}$ ise soft kapanış özelliklerinden $\overline{(G, E)} \sqsubseteq \overline{(F, E)}$ olur. Buradan

$$\left[\overline{(G, E)} \sqcap (G, E)'\right] \sqsubseteq \left[\overline{(F, E)} \sqcap (F, E)'\right] \text{ ve } \left[\overline{(G, E)} - (G, E)\right] \sqsubseteq \left[\overline{(F, E)} - (F, E)\right]$$

ifadeleri elde edilir. Hipotez gereği $(H, E) \sqsubseteq \left[\overline{(G, E)} - (G, E)\right]$ olduğundan

$$(H, E) \sqsubseteq \left[\overline{(G, E)} - (G, E)\right] \sqsubseteq \left[\overline{(F, E)} - (F, E)\right] \text{ ve } (H, E) \sqsubseteq \left[\overline{(F, E)} - (F, E)\right]$$

olur. (F, E) soft $\tilde{I}$-rg-kapalı olduğundan 3.3.3.Teorem gereği $(H, E) \in \tilde{I}$ elde edilir.

3.3.5.Teorem. $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzay, $(X, \tilde{I}, E)$ soft ideal, Y kümesi X evreninin boş kümeden farklı bir alt kümesi ve $(F, E) \in \mathcal{S}(Y, E)$ olsun. Eğer $\tilde{Y} \in \tilde{\tau}$ ve (F, E) soft kümesi, $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzayında soft $\tilde{I}$-rg-kapalı ise (F, E) soft kümesi, $\tilde{I}_Y = \{(H, E) \sqsubseteq \tilde{Y} : (H, E) \in \tilde{I}\}$ soft idealine bağlı $(Y, \tilde{\tau}_Y, E)$ soft alt topolojik uzayında soft $\tilde{I}$-rg-kapalıdır.

İspat. (F, E) soft kümesi $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzayında soft $\tilde{I}$-rg-kapalı, $(F, E) \sqsubseteq \tilde{Y} \sqcap (G, E)$ ve (G, E) soft kümesi, $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzayında soft regüler açık olsun. Buradan $(F, E) \sqsubseteq (G, E)$ olur. (F, E) soft kümesi, $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzayında soft $\tilde{I}$-rg-kapalı olduğundan $[\overline{(F, E)} - (G, E)] \in \tilde{I}$ elde edilir. $(F, E) \sqsubseteq \tilde{Y}$ soft kümesinin $(Y, \tilde{\tau}_Y, E)$ soft alt uzayına göre soft kapanışını $\overline{(F, E)}^Y = \overline{(F, E)} \sqcap \tilde{Y}$ şeklinde gösterelim. $\tilde{Y} \sqcap (G, E)$ soft kümesi, $(Y, \tilde{\tau}_Y, E)$ soft alt topolojik uzayında soft regüler açık olup

$$\begin{aligned} \overline{(F, E)}^Y - [\tilde{Y} \sqcap (G, E)] &= [\tilde{Y} \sqcap \overline{(F, E)}] - [\tilde{Y} \sqcap (G, E)] \\ &= [\tilde{Y} \sqcap (\overline{(F, E)} - (G, E))] \in \tilde{I}_Y \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak (F, E) soft kümesinin, $\tilde{I}_Y = \{(H, E) \sqsubseteq \tilde{Y} : (H, E) \in \tilde{I}\}$ soft idealine bağlı $(Y, \tilde{\tau}_Y, E)$ soft alt topolojik uzayında soft $\tilde{I}$-rg-kapalı olduğu ispatlanır.

3.3.4.Tanım. $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzay ve $(X,\tilde{I},E)$ soft ideal olsun. Relative tümleyeni soft $\tilde{I}$-rg-kapalı olan soft kümeye, soft $\tilde{I}$-rg-açık denir.

3.3.6.Teorem. $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzayı ve $(X,\tilde{I},E)$ soft ideali verilsin. $(F,E),(G,E),(H,E)\in S(X,E)$ olsun. (F,E) soft kümesinin, soft $\tilde{I}$-rg-açık olması için gerek ve yeter koşul (G,E) soft kümesi, soft regüler kapalı ve $(G,E)\sqsubseteq(F,E)$ olduğunda bazı $(H,E)\in\tilde{I}$ soft kümeleri için $[(G,E)-(H,E)]\sqsubseteq(F,E)^{\circ}$ olmasıdır.

İspat. $\Longrightarrow$ (F,E) soft kümesi $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzayında soft $\tilde{I}$-rg-açık, (G,E) soft kümesi, soft regüler kapalı ve $(G,E)\sqsubseteq(F,E)$ olsun. Buradan $(G,E)'$ soft kümesi, soft regüler açık ve $(F,E)'\sqsubseteq(G,E)'$ olur. $(F,E)'$ soft kümesi, soft $\tilde{I}$-rg-kapalı olduğundan $[\overline{(F,E)'}-(G,E)']\in\tilde{I}$ olur. Böylece

$$\left[\overline{(F,E)'}-(G,E)'\right]=[\overline{(F,E)'}\sqcap(G,E)]=(H,E)\in\tilde{I}$$

olur. Buradan $\left[\overline{(F,E)'}\sqcap(G,E)\right]\sqcup(G,E)'=(H,E)\sqcup(G,E)'$ elde edilir ve bazı $(H,E)\in\tilde{I}$ soft kümeleri için $\overline{(F,E)'}\sqsubseteq(H,E)\sqcup(G,E)'$ olur. Sonuç olarak

$$[(H,E)\sqcup(G,E)']'\sqsubseteq\left[\overline{(F,E)'}\right]'=(F,E)^{\circ}\text{ ve}$$

$$[(G,E)-(H,E)]=[(G,E)\sqcap(H,E)']\sqsubseteq(F,E)^{\circ}$$

elde edilir.

$\Longleftarrow$ (G,E) soft kümesi, soft regüler kapalı ve $(G,E)\sqsubseteq(F,E)$ olduğunda bazı $(H,E)\in\tilde{I}$ soft kümeleri için $[(G,E)-(H,E)]\sqsubseteq(F,E)^{\circ}$ olsun. $(F,E)'$ soft kümesinin, soft $\tilde{I}$-rg-kapalı olduğunu gösterelim. $(F,E)'\sqsubseteq(K,E)$ ve (K,E) soft kümesi, soft regüler açık olsun. Buradan $(K,E)'\sqsubseteq(F,E)$ ve hipotez gereğince bazı $(H,E)\in\tilde{I}$ soft kümeleri için $[(K,E)'-(H,E)]\sqsubseteq(F,E)^{\circ}=\left[\overline{(F,E)'}\right]'$ elde edilir. Böylece

$$[(K,E)\sqcup(H,E)]'\sqsubseteq\left[\overline{(F,E)'}\right]'$$

ve relative tümleme işlemi gereği

$$\overline{(F,E)'}\sqsubseteq(K,E)\sqcup(H,E)$$

olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\left[\overline{(F,E)'}-(K,E)\right]&\sqsubseteq[(K,E)\sqcup(H,E)]-(K,E)\\&=[(K,E)\sqcup(H,E)]\sqcap(K,E)'\\&=(H,E)\sqcap(K,E)'\\&\sqsubseteq(H,E)\in\tilde{I}\end{aligned}$$

olup soft ideal tanımı gereği $\left[\overline{(F,E)'}-(K,E)\right]\in\tilde{I}$ olur. Buradan $(F,E)'$ soft kümesi, soft $\tilde{I}$-rg-kapalı ve relative tümleyeni olan (F,E) soft kümesi, soft $\tilde{I}$-rg-açık olur.

3.3.5.Uyarı. $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzay ve $(X,\tilde{I},E)$ soft ideal olsun. İki soft $\tilde{I}$-rg-açık kümenin birleşimi, genellikle soft $\tilde{I}$-rg-açık değildir.

3.3.7.Teorem. $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzayı ve $(X,\tilde{I},E)$ soft ideali verilsin. $(F,E),(G,E)\in\mathcal{S}(X,E)$ olsun. Eğer soft bağlantılı olmayan (F,E) ve (G,E) soft kümeleri, soft $\tilde{I}$-rg-açık ise $(F,E)\sqcup(G,E)$ soft kümesi, soft $\tilde{I}$-rg-açıktır.

İspat. Soft bağlantılı olmayan (F,E) ve (G,E) soft $\tilde{I}$-rg-açık kümelerini alalım. $(H,E)\sqsubseteq(F,E)\sqcup(G,E)$ ve (H,E) soft kümesi, soft regüler kapalı olsun. Hipotez gereği $\left[(H,E)\sqcap\overline{(F,E)}\right]\sqsubseteq(F,E)$ olup ve 3.3.6.Teorem gereği bazı $(K,E)\in\tilde{I}$ soft kümeleri için

$$\left[(H,E)\sqcap\overline{(F,E)}\right]-(K,E)\sqsubseteq(F,E)^{\circ}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\left[(H,E)\sqcap\overline{(G,E)}\right]\sqsubseteq(G,E)$ olup bazı $(L,E)\in\tilde{I}$ soft kümeleri için

$$\left[(H,E)\sqcap\overline{(G,E)}\right]-(L,E)\sqsubseteq(G,E)^{\circ}$$

elde edilir. Buradan

$$\left[(H,E)\sqcap\overline{(F,E)}\right]-(F,E)^{\circ}\in\tilde{I}\text{ ve }\left[(H,E)\sqcap\overline{(G,E)}\right]-(G,E)^{\circ}\in\tilde{I}$$

olup

$$\left[\left[(H,E)\sqcap\overline{(F,E)}\right]-(F,E)^{\circ}\right]\sqcup\left[\left[(H,E)\sqcap\overline{(G,E)}\right]-(G,E)^{\circ}\right]\in\tilde{I}$$

elde edilir. Böylece

$$\left[(H,E)\sqcap\left[\overline{(F,E)}\sqcup\overline{(G,E)}\right]\right]-[(F,E)^{\circ}\sqcup(G,E)^{\circ}]\in\tilde{I}$$

olur. Ancak

$$(H,E)=(H,E)\sqcap[(F,E)\sqcup(G,E)]\sqsubseteq(H,E)\sqcap\overline{[(F,E)\sqcup(G,E)]}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}(H,E)-[(F,E)\sqcup(G,E)]^{\circ}&\sqsubseteq\left[(H,E)\sqcap\overline{[(F,E)\sqcup(G,E)]}\right]-[(F,E)\sqcup(G,E)]^{\circ}\\&\sqsubseteq\left[(H,E)\sqcap\overline{[(F,E)\sqcup(G,E)]}\right]-[(F,E)^{\circ}\sqcup(G,E)^{\circ}]\in\tilde{I}.\end{aligned}$$

elde edilir. Soft ideal tanımı gereğince $(H,E)-[(F,E)\sqcup(G,E)]^{\circ}\in\tilde{I}$ elde edilir. Burada $(D,E)=[(H,E)-[(F,E)\sqcup(G,E)]^{\circ}]\in\tilde{I}$ olarak alınırsa,

$$(H,E)-(D,E)=(H,E)-[(H,E)-[(F,E)\sqcup(G,E)]^{\circ}]\sqsubseteq[(F,E)\sqcup(G,E)]^{\circ}$$

olur. Böylece bazı $(D,E)\in\tilde{I}$ soft kümeleri için $(H,E)-(D,E)\sqsubseteq[(F,E)\sqcup(G,E)]^{\circ}$ olup $(F,E)\sqcup(G,E)$ soft kümesi, soft $\tilde{I}$-rg-açık olur.

3.3.1.Sonuç. $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzayı ve $(X,\tilde{I},E)$ soft ideali verilsin. $(F,E),(G,E)\in\mathcal{S}(X,E)$ olsun. Eğer (F,E) ve (G,E) soft kümeleri, soft $\tilde{I}$-rg-açık ise $(F,E)\sqcap(G,E)$ soft kümesi, soft $\tilde{I}$-rg-açıktır.

İspat. Eğer (F,E) ve (G,E) soft kümeleri, soft $\tilde{I}$-rg-açık ise $(F,E)'$ ve $(G,E)'$ soft kümeleri, soft $\tilde{I}$-rg-kapalıdır. 3.3.2.Teorem gereği

$$[(F,E)\sqcap(G,E)]'=(F,E)'\sqcup(G,E)'$$

soft kümesi, soft $\tilde{I}$-rg-kapalıdır. Böylece $(F,E)\sqcap(G,E)$ soft kümesi, soft $\tilde{I}$-rg-açık olur.

3.3.8.Teorem. $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzay, $(X,\tilde{I},E)$ soft ideal, Z kümesi X evreninin boş kümeden farklı bir alt kümesi ve $(F,E)\in\mathcal{S}(Z,E)$ olsun. Eğer $\tilde{Z}\in\tilde{\tau}$ ve (F,E) soft kümesi, $(Z,\tilde{\tau}_Z,E)$ soft topolojik uzayında $\tilde{I}_Z=\{(H,E)\sqsubseteq\tilde{Z}:(H,E)\in\tilde{I}\}$ soft idealine bağlı soft $\tilde{I}$-rg-açık ise (F,E) soft kümesi, $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzayında soft $\tilde{I}$-rg-açıktır.

İspat. $(F,E)\sqsubseteq\tilde{Z}$ ve (G,E) soft kümesi, $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzayında soft regüler kapalı ve $(G,E)\sqsubseteq(F,E)$ olsun. $(F,E)\sqsubseteq\tilde{Z}$ soft kümesinin, $(Z,\tilde{\tau}_Z,E)$ soft alt topolojik uzayına göre soft içini $(F,E)^{Z^\circ}=(F,E)^\circ\sqcap\tilde{Z}$ şeklinde gösterelim. (F,E) soft kümesi $(Z,\tilde{\tau}_Z,E)$ soft topolojik uzayında soft $\tilde{I}$-rg-açık olduğundan 3.3.6.Teorem gereği bazı $(H,E)\in\tilde{I}_Z$ soft kümeleri için

$$[(G,E)-(H,E)]\sqsubseteq(F,E)^{Z^\circ}=(F,E)^\circ\sqcap\tilde{Z}$$

olur. $(Z,\tilde{\tau}_Z,E)$ soft topolojik uzayında $\tilde{I}_Z=\{(H,E)\sqsubseteq\tilde{Z}:(H,E)\in\tilde{I}\}$ soft ideal tanımı gereğince $(H,E)\in\tilde{I}$ elde edilir. Sonuç olarak bazı $(H,E)\in\tilde{I}$ soft kümeleri için $[(G,E)-(H,E)]\sqsubseteq(F,E)^\circ$ olup 3.3.6.Teorem gereği (F,E) soft kümesi, $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzayında soft $\tilde{I}$-rg-açıktır.

3.3.9.Teorem. $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzayı ve $(X,\tilde{I},E)$ soft ideali verilsin. $(F,E)\in\mathcal{S}(X,E)$ olsun. Eğer (F,E) soft kümesi, soft $\tilde{I}$-rg-kapalı ise $[\overline{(F,E)}-(F,E)]$ soft kümesi, soft $\tilde{I}$-rg-açıktır.

İspat. (F,E) soft $\tilde{I}$-rg-kapalı küme, $(H,E)\sqsubseteq\left[\overline{(F,E)}-(F,E)\right]$ ve (H,E) soft regüler kapalı küme olsun. O zaman $(H,E)\in\tilde{I}$ olur ve böylece bazı $(G,E)\in\tilde{I}$ soft kümeleri için $[(H,E)-(G,E)]=\phi_E$ elde edilir. Açıktır ki

$$[(H,E)-(G,E)]\sqsubseteq\left[\overline{(F,E)}-(F,E)\right]^\circ$$

olup sonuç olarak 3.3.6.Teorem gereği $[\overline{(F,E)}-(F,E)]$ soft kümesi, soft $\tilde{I}$-rg-açıktır.

3.3.6.Uyarı. Aşağıdaki örnekte verildiği üzere 3.3.9.Teoremin tersi, genelde doğru değildir.

3.3.6.Örnek. $X = \{ x_1, x_2, x_3, x_4\}$ evren kümesi ve $E = \{e_1, e_2\}$ parametreler kümesi olmak üzere 3.3.4.Örnekteki $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzayı, $(X, \tilde{I}, E)$ soft ideali ve (F_1, E) soft kümesi verilsin. $[\overline{(F_1, E)} - (F_1, E)]$ soft kümesi, soft $\tilde{I}$-rg-açıktır. Ancak (F_1, E) soft kümesi, soft $\tilde{I}$-rg-kapalı değildir.

4. SUPRA SOFT TOPOLOJİK UZAYLARDA SUPRA SOFT REGÜLER GENELLEŞTİRİLMİŞ KAPALI KÜMELER

4.1. Supra Soft Topolojik Uzaylar

El-Sheikh ve Abd El-Latif (2014) bir başlangıç evreni üzerinde, parametrelerin sabitlenmiş bir kümesiyle supra soft topolojik uzay kavramını tanımlamış ve Shabir ve Naz (2011) tarafından verilen soft topolojik uzaylardan daha genel olan supra soft topolojik uzaylarda supra soft açık küme, supra soft kapalı küme, supra soft iç nokta, supra soft kapanış noktası gibi temel kavramları vermişlerdir. Ayrıca supra soft küme çeşitleri ve supra soft süreklilik çeşitlerini inceleyip, bazı ayrışımlar elde etmişlerdir.

Bu kesimde soft topolojik uzayların sağladığı özelliklerle supra soft topolojik uzayların sağladığı özellikleri ayırt edebilmek için El-Sheikh ve Abd El-Latif (2014) tarafından verilmiş olan bazı kavramlar ve teoremler verilecektir.

4.1.1.Tanım. (El-Sheikh ve Abd El-Latif, 2014) X evren kümesi ve E parametre kümesi olsun. X evreni üzerindeki E parametre kümesine bağlı soft kümelerin bir alt ailesi olan $\tilde{\mu}$, aşağıdaki özellikleri sağlarsa $\tilde{\mu}$ ailesine X evreni üzerinde supra soft topoloji denir.

$\boldsymbol{i}$) $\phi_E, \tilde{X} \in \tilde{\mu}$,

$\boldsymbol{ii}$) $\tilde{\mu}$ ailesine ait sonlu yada sonsuz çokluktaki soft kümelerin birleşimi $\tilde{\mu}$ ailesine aittir.

$\tilde{\mu}$ ailesinin her elemanına, supra soft açık küme ve $(X, \tilde{\mu}, E)$ üçlüsüne, supra soft topolojik uzay denir. Relative tümleyeni supra soft açık olan soft kümeye, supra soft kapalı küme denir.

4.1.1.Uyarı. (El-Sheikh ve Abd El-Latif, 2014) X evren kümesi ve E parametre kümesi olsun. X evreni üzerindeki her soft topolojik uzay, supra soft topolojik uzaydır.

4.1.2.Tanım. (El-Sheikh ve Abd El-Latif, 2014) $(X, \tilde{\mu}, E)$ supra soft topolojik uzay ve $(F, E) \in \mathcal{S}(X, E)$ olsun. (F, E) soft kümesini kapsayan tüm supra soft kapalı kümelerin kesişimine, (F, E) soft kümesinin supra soft kapanışı denir ve $\overline{(F, E)}^S$ ile gösterilir.

4.1.3.Tanım. (El-Sheikh ve Abd El-Latif, 2014) $(X, \tilde{\mu}, E)$ supra soft topolojik uzay ve $(F, E) \in \mathcal{S}(X, E)$ olsun. (F, E) soft kümesinin kapsadığı tüm supra soft açık

kümelerin birleşimine, (F,E) soft kümesinin supra soft içi denir ve $(F,E)^{\circ S}$ ile gösterilir.

Yukarıda verilen ifadelerin soft topolojik uzaylarda sağlanan bazı özellikleri, supra soft topolojik uzaylarda sağlanmaz. Bu özellikleri ayırt eden teorem El-Sheikh ve Abd El-Latif (2014) tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir.

4.1.1.Teorem. (El-Sheikh ve Abd El-Latif, 2014) $(X,\tilde{\mu},E)$ supra soft topolojik uzay ve $(F,E),(G,E)\in\mathcal{S}(X,E)$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

$\boldsymbol{i})$ $\overline{(F,E)}^{S}\sqcup\overline{(G,E)}^{S}\sqsubseteq\overline{[(F,E)\sqcup(G,E)]}^{S}$,

$\boldsymbol{ii})$ $[(F,E)\sqcap(G,E)]^{\circ S}\sqsubseteq(F,E)^{\circ S}\sqcap(G,E)^{\circ S}$.

4.2. Supra Soft Topolojik Uzaylarda Supra Soft Regüler Genelleştirilmiş Kapalı Kümeler

Kandil ve ark. (2014b) supra soft genelleştirilmiş kapalı kümeleri, supra soft topolojik uzaylarda ve supra soft ideal topolojik uzaylarda incelemişlerdir. Biz bu kesimde supra soft topolojik uzaylarda, supra soft regüler genelleştirilmiş kapalı kümeleri ve özelliklerini inceledik. Karşıt örnekler vererek Yüksel ve ark. (2014b) tarafından soft topolojik uzaylarda verilmiş olan soft regüler genelleştirilmiş kapalı kümelerin bazı özelliklerinin supra soft topolojik uzaylarda sağlanmadığını gösterdik. Ayrıca her supra soft genelleştirilmiş kapalı kümenin, supra soft regüler genelleştirilmiş kapalı küme olduğunu gösterdik. İlk olarak Kandil ve ark. (2014b) tarafından verilmiş olan supra soft genelleştirilmiş kapalı kümeleri hatırlatacağız.

4.2.1.Tanım. (Kandil ve ark., 2014b) $(X,\tilde{\mu},E)$ supra soft topolojik uzay ve $(F,E)\in\mathcal{S}(X,E)$ olsun. $(F,E)\sqsubseteq(G,E)$ ve $(G,E)\in\tilde{\mu}$ olmak üzere $\overline{(F,E)}^{S}\sqsubseteq(G,E)$ oluyorsa (F,E) soft kümesine, supra soft genelleştirilmiş kapalı küme (supra soft g-kapalı küme) denir.

4.2.1.Uyarı. (Kandil ve ark., 2014b) Bir supra soft topolojik uzayda her supra soft kapalı küme, supra soft g-kapalı kümedir.

4.2.2.Tanım. $(X,\tilde{\mu},E)$ supra soft topolojik uzay ve $(F,E)\in\mathcal{S}(X,E)$ olsun. Eğer $\left[\overline{(F,E)}^{S}\right]^{\circ S}=(F,E)$ ise (F,E) soft kümesine, supra soft regüler açık küme ve $\overline{[(F,E)^{\circ S}]}^{S}=(F,E)$ ise (F,E) soft kümesine, supra soft regüler kapalı küme denir.

4.2.2.Uyarı. Bir supra soft topolojik uzayda her supra soft regüler kapalı küme, supra soft kapalı kümedir.

4.2.1.Örnek. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ evren kümesi ve $E = \{e_1, e_2\}$ parametreler kümesi olsun.

$$F_1(e_1) = \{x_1, x_2\}, F_1(e_2) = \{x_1, x_4\}$$
$$F_2(e_1) = \{x_2\}, F_2(e_2) = \{x_4\}$$
$$F_3(e_1) = \{x_3, x_4\}, F_3(e_2) = \{x_2, x_3\}$$
$$F_4(e_1) = \{x_2, x_3, x_4\}, F_4(e_2) = \{x_2, x_3, x_4\}$$

olmak üzere $\tilde{\mu} = \{\phi_E, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E)\}$ supra soft topolojisi verilsin. Açıktır ki $(F_4, E)'$ soft kümesi, supra soft kapalıdır ancak supra soft regüler kapalı değildir.

4.2.3.Tanım. $(X, \tilde{\mu}, E)$ supra soft topolojik uzay ve $(F, E) \in \mathcal{S}(X, E)$ olsun. $(F, E) \sqsubseteq (G, E)$ ve (G, E) soft kümesi, supra soft regüler açık küme olmak üzere $\overline{(F, E)}^S \sqsubseteq (G, E)$ oluyorsa (F, E) soft kümesine, supra soft regüler genelleştirilmiş kapalı küme (supra soft rg-kapalı) denir.

4.2.1.Teorem. $(X, \tilde{\mu}, E)$ supra soft topolojik uzay ve $(F, E) \in \mathcal{S}(X, E)$ olsun. (F, E) soft kümesi, supra soft g-kapalı ise (F, E) supra soft rg-kapalı kümedir.

İspat. (F, E) soft kümesi $(X, \tilde{\mu}, E)$ supra soft topolojik uzayında supra soft g-kapalı, $(F, E) \sqsubseteq (G, E)$ ve (G, E) soft kümesi, supra soft regüler açık olsun. (G, E) soft kümesi, supra soft regüler açık ise (G, E) soft kümesi, supra soft açık olur ve (F, E) soft kümesi, supra soft g-kapalı olduğundan $\overline{(F, E)}^S \sqsubseteq (G, E)$ olup, böylece (F, E) soft kümesinin, supra soft rg-kapalı olduğu elde edilir.

4.2.3.Uyarı. Aşağıdaki örnekte verildiği üzere 4.2.1.Teoremin tersi, genelde doğru değildir.

4.2.2.Örnek. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ evren kümesi ve $E = \{e_1, e_2\}$ parametreler kümesi olmak üzere 4.2.1.Örnekte verdiğimiz $(X, \tilde{\mu}, E)$ supra soft topolojik uzayı ve $H(e_1) = \{x_2, x_3\}, H(e_2) = \{x_4\}$ olmak üzere $(H, E) \in \mathcal{S}(X, E)$ soft kümesi verilsin. (H, E) soft kümesi, supra soft rg-kapalıdır ancak supra soft g-kapalı değildir.

4.2.4.Uyarı. Bir supra soft topolojik uzayda 4.2.1.Uyarı, 4.2.2.Uyarı ve 4.2.1.Teorem gereği aşağıdaki 4.2.1.Şekil verilebilir.

supra soft regüler kapalı $\Longrightarrow$ supra soft kapalı $\Longrightarrow$ supra soft g-kapalı $\Longrightarrow$ supra soft rg-kapalı

4.2.1.Şekil

4.2.5.Uyarı. Bir supra soft topolojik uzayda iki supra soft rg-kapalı kümenin birleşimi, genellikle supra soft rg-kapalı küme değildir.

4.2.3.Örnek. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ evren kümesi ve $E = \{e_1, e_2\}$ parametreler kümesi olsun.

$$F_1(e_1) = \{x_2, x_5, x_6\}, F_1(e_2) = \{x_4, x_5, x_6\}$$
$$F_2(e_1) = \{x_5\}, F_2(e_2) = \{x_5\}$$
$$F_3(e_1) = \{x_1, x_2, x_3\}, F_3(e_2) = \{x_1\}$$
$$F_4(e_1) = \{x_2\}, F_4(e_2) = \{x_4, x_6\}$$
$$F_5(e_1) = \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6\}, F_5(e_2) = \{x_1, x_4, x_5, x_6\}$$
$$F_6(e_1) = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}, F_6(e_2) = \{x_1, x_5\}$$
$$F_7(e_1) = \{x_2, x_5\}, F_7(e_2) = \{x_4, x_5, x_6\}$$
$$F_8(e_1) = \{x_1, x_2, x_3\}, F_8(e_2) = \{x_1, x_4, x_6\}$$
$$F_9(e_1) = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}, F_9(e_2) = \{x_1, x_4, x_5, x_6\}$$
$$F_{10}(e_1) = X, F_{10}(e_2) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6\}$$
$$F_{11}(e_1) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6\}, F_{11}(e_2) = X$$

olmak üzere $\tilde{\mu} = \{\phi_E, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E), (F_5, E), \dots, (F_{11}, E)\}$ supra soft topolojisi ve $H(e_1) = \emptyset$, $H(e_2) = \{x_5\}$ ve $G(e_1) = \{x_5\}$, $G(e_2) = \emptyset$ olmak üzere $(H, E), (G, E) \in \mathcal{S}(X, E)$ soft kümeleri verilsin. Açıktır ki (H, E) ve (G, E) soft kümeleri, supra soft rg-kapalıdır ancak $(H, E) \sqcup (G, E)$ soft kümesi, supra soft rg-kapalı değildir.

4.2.6.Uyarı. Bir supra soft topolojik uzayda iki supra soft rg-kapalı kümenin kesişimi, genellikle supra soft rg-kapalı küme değildir.

4.2.4.Örnek. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ evren kümesi ve $E = \{e_1, e_2\}$ parametreler kümesi olmak üzere 4.2.3.Örnekte verdiğimiz $(X, \tilde{\mu}, E)$ supra soft topolojik uzayı verilsin. $H(e_1) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $H(e_2) = \{x_1, x_4, x_6\}$ ve $G(e_1) = \{x_1, x_2, x_3\}$, $G(e_2) = \{x_1, x_4, x_5, x_6\}$ olmak üzere $(H, E), (G, E) \in \mathcal{S}(X, E)$ olsun. Açıktır ki (H, E)

ve (G,E) soft kümeleri, supra soft rg-kapalıdır ancak $(H,E) \sqcap (G,E)$ soft kümesi, supra soft rg-kapalı değildir.

4.2.2.Teorem. $(X,\tilde{\mu},E)$ supra soft topolojik uzay ve $(F,E) \in \mathcal{S}(X,E)$ olsun. Eğer (F,E) soft kümesi, supra soft rg-kapalı ise $\left[\overline{(F,E)}^{S} - (F,E)\right]$ soft kümesi, boş soft kümeden başka hiçbir supra soft regüler kapalı kümeyi kapsamaz.

İspat. (F,E) soft kümesi $(X,\tilde{\mu},E)$ supra soft topolojik uzayında supra soft rg-kapalı, $(H,E) \sqsubseteq \left[\overline{(F,E)}^{S} - (F,E)\right]$ ve (H,E) soft kümesi, supra soft regüler kapalı olsun. Buradan $(H,E) \sqsubseteq \overline{(F,E)}^{S} \sqcap (F,E)'$ ve $(F,E) \sqsubseteq (H,E)'$ olur. (F,E) soft kümesi, supra soft rg-kapalı ve $(H,E)'$ soft kümesi, supra soft regüler açık küme olduğundan $\overline{(F,E)}^{S} \sqsubseteq (H,E)'$ elde edilir. Relative tümleme işleminden $(H,E) \sqsubseteq \left[\overline{(F,E)}^{S}\right]'$ olur. Hipotez gereği $(H,E) \sqsubseteq \overline{(F,E)}^{S}$ olduğundan $(H,E) \sqsubseteq \left[\overline{(F,E)}^{S} \sqcap \left[\overline{(F,E)}^{S}\right]'\right] = \phi_E$ olur. Böylece $(H,E) = \phi_E$ elde edilir. Bu yüzden $\left[\overline{(F,E)}^{S} - (F,E)\right]$ soft kümesi, boş soft kümeden başka hiçbir supra soft regüler kapalı kümeyi kapsamaz.

4.2.7.Uyarı. Aşağıdaki örnekte verildiği üzere 4.2.2.Teoremin tersi, genelde doğru değildir.

4.2.5.Örnek. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ evren kümesi ve $E = \{e_1, e_2\}$ parametreler kümesi olmak üzere 4.2.3.Örnekte verdiğimiz $(X,\tilde{\mu},E)$ supra soft topolojik uzayı ve (F_8,E) soft kümesi verilsin. $\left[\overline{(F_8,E)}^{S} - (F_8,E)\right]$ soft kümesi, yalnızca ϕ_E supra soft regüler kapalı kümesini içerir. Ancak (F_8,E) soft kümesi, supra soft rg-kapalı değildir.

4.2.1.Sonuç. $(X,\tilde{\mu},E)$ supra soft topolojik uzay ve $(F,E) \in \mathcal{S}(X,E)$ supra soft rg-kapalı olsun. (F,E) soft kümesinin, supra soft regüler kapalı olması için gerek ve yeter koşul $\left[\overline{[(F,E)^{\circ S}]}^{S} - (F,E)\right]$ soft kümesinin, supra soft regüler kapalı olmasıdır.

İspat. $\Longrightarrow$ (F,E) soft kümesi $(X,\tilde{\mu},E)$ supra soft topolojik uzayında supra soft rg-kapalı olsun. Eğer (F,E) soft kümesi, supra soft regüler kapalı ise

$$\left[\overline{[(F,E)^{\circ S}]}^{S} - (F,E)\right] = \phi_E$$

olur. Böylece $\left[\overline{[(F,E)^{\circ S}]}^{S} - (F,E)\right]$ soft kümesi, ϕ_E supra soft regüler kapalı kümesine eşittir.

$\Leftarrow \left[\overline{[(F,E)^{\circ S}]}^{S} - (F,E)\right]$ soft kümesi, supra soft regüler kapalı olsun. (F,E) soft kümesi, supra soft rg-kapalı ve

$$\left[\overline{[(F,E)^{\circ S}]}^{S} - (F,E)\right] \sqsubseteq \left[\overline{(F,E)}^{S} - (F,E)\right]$$

olduğundan 4.2.2.Teorem gereği $\left[\overline{[(F,E)^{\circ S}]}^{S} - (F,E)\right] = \phi_E$ elde edilir. Böylece $\overline{[(F,E)^{\circ S}]}^{S} = (F,E)$ olup (F,E) soft kümesi, supra soft regüler kapalıdır.

4.2.3.Teorem. $(X,\tilde{\mu},E)$ supra soft topolojik uzay ve $(F,E),(G,E) \in \mathcal{S}(X,E)$ olsun. Eğer (F,E) soft kümesi, supra soft rg-kapalı ve $(F,E) \sqsubseteq (G,E) \sqsubseteq \overline{(F,E)}^{S}$ ise $\left[\overline{(G,E)}^{S} - (G,E)\right]$ soft kümesi, boş soft kümeden başka hiçbir supra soft regüler kapalı kümeyi kapsamaz.

İspat. (F,E) soft kümesi $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzayında supra soft rg-kapalı olsun. Hipotez gereğince $(F,E) \sqsubseteq (G,E)$ olduğundan relative tümleme işleminden $(G,E)' \sqsubseteq (F,E)'$ olur. Ayrıca hipotez gereği $(G,E) \sqsubseteq \overline{(F,E)}^{S}$ olup supra soft kapanış özelliklerinden

$$\overline{(G,E)}^{S} \sqsubseteq \overline{\overline{(F,E)}^{S}}^{S} = \overline{(F,E)}^{S}$$

elde edilir. Buradan

$\left[\overline{(G,E)}^{S} \sqcap (G,E)'\right] \sqsubseteq \left[\overline{(F,E)}^{S} \sqcap (F,E)'\right]$ ve $\left[\overline{(G,E)}^{S} - (G,E)\right] \sqsubseteq \left[\overline{(F,E)}^{S} - (F,E)\right]$

ifadeleri elde edilir. (F,E) supra soft rg-kapalı küme olduğundan 4.2.2.Teorem gereği $\left[\overline{(F,E)}^{S} - (F,E)\right]$ soft kümesi, boş soft kümeden başka hiçbir supra soft regüler kapalı kümeyi kapsamaz. Dolayısıyla $\left[\overline{(G,E)}^{S} - (G,E)\right]$ soft kümesi, boş soft kümeden başka hiçbir supra soft regüler kapalı kümeyi kapsamaz.

4.2.4.Tanım. $(X,\tilde{\mu},E)$ supra soft topolojik uzay olsun. Relative tümleyeni supra soft regüler genelleştirilmiş kapalı küme olan soft kümeye, supra soft regüler genelleştirilmiş açık küme (supra soft rg-açık) denir.

4.2.4.Teorem. $(X,\tilde{\mu},E)$ supra soft topolojik uzay ve $(F,E),(H,E) \in \mathcal{S}(X,E)$ olsun. (F,E) soft kümesinin, supra soft rg-açık olması için gerek ve yeter koşul (H,E) soft kümesi, supra soft regüler kapalı ve $(H,E) \sqsubseteq (F,E)$ olduğunda $(H,E) \sqsubseteq (F,E)^{\circ S}$ olmasıdır.

İspat. $\Longrightarrow$ (F,E) soft kümesi supra soft rg-açık, (H,E) soft kümesi supra soft regüler kapalı ve $(H,E) \sqsubseteq (F,E)$ olsun. O halde relative tümleme işleminden $(H,E)'$

soft kümesi, supra soft regüler açık ve $(F,E)' \sqsubseteq (H,E)'$ olur. $(F,E)'$ soft kümesi, supra soft rg-kapalı olduğundan $\left[\overline{(F,E)'}^{S}\right] \sqsubseteq (H,E)'$ elde edilir. Sonuç olarak

$$(H,E) \sqsubseteq \left[\overline{(F,E)'}^{S}\right]' = (F,E)^{\circ S}$$

ifadesi elde edilir.

$\Leftarrow$ (H,E) soft kümesi, supra soft regüler kapalı ve $(H,E) \sqsubseteq (F,E)$ olduğunda $(H,E) \sqsubseteq (F,E)^{\circ S}$ olsun. $(F,E)'$ soft kümesinin supra soft rg-kapalı olduğunu gösterelim. $(F,E)' \sqsubseteq (G,E)$ ve (G,E) soft kümesi, supra soft regüler açık olsun. Buradan $(G,E)' \sqsubseteq (F,E)$, $(G,E)'$ soft kümesi, supra soft regüler kapalı ve hipotez gereği $(G,E)' \sqsubseteq (F,E)^{\circ S}$ olur. Relative tümleme işleminden

$$[(F,E)^{\circ S}]' \sqsubseteq (G,E) \text{ ve } \overline{[(F,E)']}^{S} = [(F,E)^{\circ S}]' \sqsubseteq (G,E)$$

elde edilir. Buradan $(F,E)'$ soft kümesinin, supra soft rg-kapalı olduğu, dolayısıyla (F,E) soft kümesinin, supra soft rg-açık olduğu ispatlanır.

5. SOFT ÖRTÜ TABANLI ROUGH KÜMELER VE TIP ALANINDA BİR UYGULAMASI

2010 da Feng ve ark. tarafından verilen soft rough kümeler, belirsizliğe iki farklı matematiksel yaklaşım olan rough kümeler ile soft kümelerin birlikte ele alınmış halidir. Bu bölümde soft kümelerin yerine, soft örtü kümeleri kullanarak soft rough kümelerin genelleştirilmesi olan, soft örtü tabanlı rough kümeleri tanımladık. Soft örtü yaklaşım uzayını elde ederek, soft örtü yaklaşımlar olarak adlandırılan yapıları, bu yapıların temel ve topolojik özelliklerini araştırdık. Ayrıca bu soft örtü tabanlı rough kümeleri, tıp alanında prostat kanser riskini belirleyen bir metod ile birlikte kullandık.

5.1. Soft Rough Kümeler

2010 da Feng ve ark. rough küme teorisinde denklik bağıntısı yerine soft kümeyi kullanarak soft yaklaşım uzayını, soft alt ve üst yaklaşımları elde ettiler. Soft yaklaşım uzayında soft alt ve üst yaklaşım kavramları aracığıyla, soft rough kümeleri tanımlayıp, temel özelliklerini incelediler. Ayrıca Pawlak'ın rough kümelerinin, soft rough kümelerin özel bir durumu olduğunu gösterdiler.

5.1.1.Tanım (Feng ve ark., 2010) $G = (F, A)$, X evreni üzerinde bir soft küme olsun. $S = (X, G)$ ikilisine bir soft yaklaşım uzayı denir. S-soft yaklaşım uzayını temel alarak $U \subseteq X$ alt kümesi için S-soft alt ve S-soft üst yaklaşım operatörleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$apr_(U) = \{x \in X: \exists a \in A, [x \in F(a) \subseteq U]\},$$

$$apr^{-}(U) = \{x \in X: \exists a \in A, [x \in F(a) \cap U \neq \emptyset]\}.$$

Keyfi bir $U \subseteq X$ alt kümesinin S-soft pozitif, S-soft negatif ve S-soft sınır bölgeleri sırasıyla aşağıdaki şekildedir:

$$POZ_S(U) = apr_(U),$$

$$NEG_S(U) = X - apr^{-}(U),$$

$$SNR_S(U) = apr^{-}(U) - apr_(U).$$

Eğer $apr^{-}(U) = apr_(U)$ ise U kümesi, S-soft yaklaşım uzayında S-tanımlanabilir küme; $apr^{-}(U) \neq apr_(U)$ ise U kümesi, S-soft yaklaşım uzayında S-soft rough küme olarak adlandırılır.

5.1.1.Önerme (Feng ve ark., 2010) $G = (F, A)$, X evreni üzerinde bir soft küme ve $S = (X, G)$ soft yaklaşım uzayı olsun. Her $U \subseteq X$ alt kümesi için aşağıdakiler sağlanır:

$$apr_(U) = \bigcup_{a \in A}\{F(a): F(a) \subseteq U\},$$
$$apr^{-}(U) = \bigcup_{a \in A}\{F(a): F(a) \cap U \neq \emptyset\}.$$

5.1.1.Teorem (Feng ve ark., 2010; Feng ve ark., 2011) $G = (F, A)$, X evreni üzerinde bir soft küme, $S = (X, G)$ soft yaklaşım uzayı ve $U, V \subseteq X$ olsun. S-soft alt ve S-soft üst yaklaşım operatörleri aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$\boldsymbol{i})\ apr_(X) = apr^{-}(X) = \bigcup_{a \in A} F(a)$,

$\boldsymbol{ii})\ apr_(\emptyset) = apr^{-}(\emptyset) = \emptyset$,

$\boldsymbol{iii})\ apr_(U) \subseteq U$,

$\boldsymbol{iv})\ apr_(U) \subseteq apr^{-}(U)$,

$\boldsymbol{v})\ U \subseteq V \Longrightarrow apr_(U) \subseteq apr_(V)$,

$\boldsymbol{vi})\ U \subseteq V \Longrightarrow apr^{-}(U) \subseteq apr^{-}(V)$,

$\boldsymbol{vii})\ apr_(U \cap V) \subseteq apr_(U) \cap apr_(V)$,

$\boldsymbol{viii})\ apr_(U \cup V) \supseteq apr_(U) \cup apr_(V)$,

$\boldsymbol{ix})\ apr^{-}(U \cup V) = apr^{-}(U) \cup apr^{-}(V)$,

$\boldsymbol{x})\ apr^{-}(U \cap V) \subseteq apr^{-}(U) \cap apr^{-}(V)$,

$\boldsymbol{xi})\ apr^{-}\big(apr^{-}(U)\big) \supseteq apr^{-}(U)$,

$\boldsymbol{xii})\ apr_\big(\ apr_(U)\big) =\ apr_(U)$.

5.1.2.Tanım. (Feng ve ark., 2010) $G = (F, A)$, X evreni üzerinde bir soft küme olsun. Eğer $\bigcup_{a \in A} F(a) = X$ ise $G = (F, A)$ soft kümesine, tüm soft küme denir.

5.1.3.Tanım. (Feng ve ark., 2011) $G = (F, A)$, X evreni üzerinde bir soft küme olsun. Eğer $\{F(a): a \in A\}$ ailesi, X evreninin bir parçalanışı oluşturuyorsa $G = (F, A)$ soft kümesine, parçalı soft küme denir.

5.1.1.Uyarı. 5.1.2.Tanım ve 5.1.3.Tanım gereği her parçalı soft kümenin, bir tüm soft küme olduğu açıktır.

5.1.2.Teorem (Feng ve ark., 2011) $G = (F, A)$, X evreni üzerinde bir soft küme ve $S = (X, G)$ soft yaklaşım uzayı olsun. Aşağıdaki koşullar eşdeğerdir:

$\boldsymbol{i})$ $G = (F, A)$ bir tüm soft kümedir.

$\boldsymbol{ii})\ apr_(X) = X.$

$\boldsymbol{iii})\ apr^{-}(X) = X.$

$\boldsymbol{iv})\ \forall\ U \subseteq X$ için $U \subseteq apr^{-}(U).$

$\boldsymbol{v})\ \forall\ x \in X$ için $apr^{-}(\{x\}) \neq \emptyset.$

5.1.2.Uyarı. Feng ve ark. (2011) aşağıdaki teoremlerde Pawlak'ın rough kümelerinin, soft rough kümelerin özel bir durumu olduğunu gösterdiler.

5.1.3.Teorem. (Feng ve ark., 2011) X evren küme ve $G = (F, A) \in \mathcal{S}(X, A)$ olsun. Buradan $G = (F, A)$ soft kümesi, $\mathcal{R}_G \subseteq A \times X$ ikili bağıntısını oluşturur ve bu bağıntı; her $x \in A, y \in X$ için

$$(x, y) \in \mathcal{R}_G \Leftrightarrow y \in F(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Tersine, $\mathcal{R}$ bağıntısı, A parametre kümesinden X evrenine bir ikili bağıntı olsun. Her $x \in A$ için

$$F_{\mathcal{R}}: A \longrightarrow \mathcal{P}(X)\ \ni\ F_{\mathcal{R}}(x) = \{y \in X: (x, y) \in \mathcal{R}\}$$

küme değerli dönüşümü tanımlansın. Bu durumda $G_{\mathcal{R}} = (F_{\mathcal{R}}, A)$, X üzerinde bir soft kümedir. Üstelik $G_{\mathcal{R}_G} = G$ ve $\mathcal{R}_{G_{\mathcal{R}}} = \mathcal{R}$ olur. Ayrıca $\mathcal{R}_G$, $G = (F, A)$ soft kümesinin kanonik bağıntısı ve $G_{\mathcal{R}}$, $\mathcal{R}$ ikili bağıntısının kanonik soft kümesi olarak adlandılır.

5.1.4.Teorem. (Feng ve ark., 2011) $\mathcal{R}$ bağıntısı, X evreni üzerinde bir denklik bağıntısı $G_{\mathcal{R}} = (F_{\mathcal{R}}, X)$ soft kümesi, $\mathcal{R}$ denklik bağıntısının kanonik soft kümesi ve $S = (X, G_{\mathcal{R}})$ bir soft yaklaşım uzayı olsun. O halde her $U \subseteq X$ kümesi için $\mathcal{R}_(U)$ ve $\mathcal{R}^{-}(U)$ Pawlak yaklaşım operatörleri olmak üzere,

$$\mathcal{R}^{-}(U) = apr^{-}(U) \text{ ve } \mathcal{R}_(U) = apr_(U)$$

olur. Bu koşullarda $U \subseteq X$ kümesinin, bir rough küme (Pawlak anlamında) olması için gerek ve yeter koşul S-soft rough küme olmasıdır.

5.1.5.Teorem. (Feng ve ark., 2011) X evren küme, $G = (F, A) \in \mathcal{S}(X, A)$ parçalı soft küme ve $S = (X, G)$ soft yaklaşım uzayı olsun. X evreni üzerinde bir $\mathcal{R}$ denklik bağıntısı; her $x, y \in X$ için

$$(x, y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \exists a \in A, \qquad \{x, y\} \subseteq F(a)$$

şeklinde tanımlansın. O halde her $U \subseteq X$ kümesi için $\mathcal{R}_(U)$ ve $\mathcal{R}^{-}(U)$ Pawlak yaklaşım operatörleri olmak üzere,

$$\mathcal{R}^{-}(U) = apr^{-}(U) \text{ ve } \mathcal{R}_(U) = apr_(U)$$

olur.

5.1.3.Uyarı. Pawlak (1982) çalışmasında $(X, \mathcal{R})$ yaklaşım uzayında 2.1.1.Uyarı. da verildiği gibi X kümesi üzerinde tek bir topolojik uzay tanımlandığını ve bu topolojik uzayda, bir $U \subseteq X$ kümesinin $\mathcal{R}_(U)$ ve $\mathcal{R}^{-}(U)$ yaklaşım kümelerinin sırasıyla, U kümesinin içine ve kapanışına eşit olduğunu göstermiştir. 5.1.4.Teorem ve 5.1.5.Teorem gereği soft rough kümelerin topolojik kavramlarla ilişkisi gösterilmiş olur.

5.2. Soft Örtü Tabanlı Rough Kümeler

Bu kesimde, soft örtü kümeleri kullanarak soft örtü yaklaşım uzayını ve soft örtü yaklaşımlar olarak adlandırılan yapıları tanımladık. Soft örtü yaklaşımlar aracığıyla, soft örtü yaklaşım uzayında rough kümeleri ve çeşitlerini inceledik. Soft rough kümelerin genelleştirilmesi olan soft örtü tabanlı rough kümelerin temel özelliklerini yani Pawlak (1982) tarafından incelenen klasik rough kümelerin hangi özelliklerinin sağlanıp sağlanmadığını ve topolojik özelliklerini araştırdık. Sağlanmayan özellikler için karşıt örnekler verdik.

5.2.1.Tanım. (Feng ve ark., 2010) X evren küme ve $G = (F, A) \in \mathcal{S}(X, A)$ tüm soft küme olsun. Eğer her $a \in A$ için $F(a) \neq \emptyset$ ise $G = (F, A)$ soft kümesine bir soft örtü küme denir.

Bundan sonra, soft örtü kümeyi C_G ile göstereceğiz.

5.2.2.Tanım. X evren küme ve $G = (F, A) \in \mathcal{S}(X, A)$ soft örtü küme olsun. $S = (X, C_G)$ ikilisine, soft örtü yaklaşım uzayı denir.

5.2.3.Tanım. $S = (X, C_G)$ bir soft örtü yaklaşım uzayı ve $x \in X$ olsun.
$Md_S(x) = \{F(a): a \in A \ \wedge x \in F(a) \wedge (\forall e \in A \wedge x \in F(e) \subseteq F(a) \Longrightarrow F(a) = F(e))\}$ ailesi, C_G soft örtüsüne göre, x noktasının soft minimal tasviri olarak adlandırılır.

5.2.1.Uyarı. Bir nesneyi ifade etmek için, bu nesneyle ilgili tüm karakteristikler yerine, yalnızca temel karakteristiklere ihtiyaç duyarız. Minimal tasvir kavramının amacı budur.

5.2.4.Tanım. $S = (X, C_G)$ bir soft örtü yaklaşım uzayı olsun. $U \subseteq X$ alt kümesi için 1.tip soft örtü alt ve üst yaklaşımları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$S_1_(U) = \bigcup_{a\in A}\{F(a): F(a) \subseteq U\},$$

$$S_1{}^{-}(U) = \bigcup\{Md_S(u): u \in U\}.$$

Keyfi bir $U \subseteq X$ alt kümesinin soft örtü pozitif, soft örtü negatif ve soft örtü sınır bölgeleri sırasıyla aşağıdaki şekildedir:

$$POZ_{S_1}(U) = S_1_(U),$$

$$NEG_{S_1}(U) = X - S_1{}^{-}(U),$$

$$SNR_{S_1}(U) = S_1{}^{-}(U) - S_1_(U).$$

Herhangi bir $U \subseteq X$ alt kümesinin soft örtü sınırı, $SNR_{S_1}(U) = \emptyset$ ise $U \subseteq X$ alt kümesine, soft örtü yaklaşım uzayında 1.tipe göre soft örtü tabanlı tanımlanabilir küme; $SNR_{S_1}(U) \neq \emptyset$ ise $U \subseteq X$ alt kümesine, soft örtü yaklaşım uzayında 1.tipe göre soft örtü tabanlı rough küme denir.

5.2.1.Örnek. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ evren küme, $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ parametreler kümesi ve

$$F(a_1) = \{x_1, x_2\},$$
$$F(a_2) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\},$$
$$F(a_3) = \{x_3, x_4\},$$
$$F(a_4) = \{x_3, x_4, x_5, x_6\},$$
$$F(a_5) = \{x_1, x_2, x_5, x_6\},$$
$$F(a_6) = \{x_3, x_5, x_6\}$$

olmak üzere X üzerinde $G = (F, A)$ soft örtü kümesi verilsin. Bu durumda $S = (X, C_G)$ ikilisi bir soft örtü yaklaşım uzayıdır.

$X_1 = \{x_1, x_2\} \subseteq X$ alt kümesini ele alalım.

$$S_1_(X_1) = \bigcup_{a\in A}\{F(a): F(a) \subseteq X_1\} = \{x_1, x_2\} \text{ ve}$$

$$S_1{}^{-}(X_1) = \bigcup\{Md_S(x): x \in X_1\} = \{x_1, x_2\}$$

olup $S_1_(X_1) = S_1{}^{-}(X_1)$ olduğundan $X_1 \subseteq X$ kümesi, soft örtü yaklaşım uzayında 1.tipe göre soft örtü tabanlı tanımlanabilir kümedir.

$X_2 = \{x_1, x_2, x_4\} \subseteq X$ alt kümesini ele alalım.

$$S_1_(X_2) = \bigcup_{a\in A}\{F(a): F(a) \subseteq X_2\} = \{x_1, x_2\} \text{ ve}$$

$$S_1{}^{-}(X_2) = \bigcup\{Md_S(x): x \in X_2\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

olup $S_1_(X_2) \neq S_1{}^{-}(X_2)$ olduğundan $X_2 \subseteq X$ kümesi, soft örtü yaklaşım uzayında 1.tipe göre soft örtü tabanlı rough kümedir.

5.2.5.Tanım. $S=(X,C_G)$ bir soft örtü yaklaşım uzayı olsun. $U\subseteq X$ alt kümesi için 2.tip soft örtü alt ve üst yaklaşımları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$S_2_(U)=\cup_{a\in A}\{F(a):F(a)\subseteq U\},$$

$$S_2{}^{-}(U)=S_2_(U)\cup\{\cup(\cap_{F(a)\in Md_S(u)}F(a):u\in(U-S_2_(U)))\}.$$

Keyfi bir $U\subseteq X$ alt kümesinin soft örtü pozitif, soft örtü negatif ve soft örtü sınır bölgeleri sırasıyla aşağıdaki şekildedir:

$$POZ_{S_2}(U)=S_2_(U),$$

$$NEG_{S_2}(U)=X-S_2{}^{-}(U),$$

$$SNR_{S_2}(U)=S_2{}^{-}(U)-S_2_(U).$$

Herhangi bir $U\subseteq X$ alt kümesinin soft örtü sınırı, $SNR_{S_2}(U)=\emptyset$ ise $U\subseteq X$ alt kümesine, soft örtü yaklaşım uzayında 2.tipe göre soft örtü tabanlı tanımlanabilir küme; $SNR_{S_2}(U)\neq\emptyset$ ise $U\subseteq X$ alt kümesine, soft örtü yaklaşım uzayında 2.tipe göre soft örtü tabanlı rough küme denir.

5.2.1.Teorem. X evren kümesi üzerinde $G=(F,A)$ soft örtü kümesi ve $S=(X,C_G)$ soft örtü yaklaşım uzayı verilsin. Her $U\subseteq X$ alt kümesi için

$$S_2{}^{-}(U)=\{\cup(\cap_{F(a)\in Md_S(u)}F(a):u\in U)\}$$

sağlanır.

İspat. $S_2_(U)=\emptyset$ ise 5.2.5.Tanım gereği

$$S_2{}^{-}(U)=S_2_(U)\cup\{\cup(\cap_{F(a)\in Md_S(u)}F(a):u\in(U-S_2_(U)))$$

$$=\{\cup(\cap_{F(a)\in Md_S(u)}F(a):u\in U)\}$$

elde edilir. $S_2_(U)\neq\emptyset$ ise $\{\cup(\cap_{F(a)\in Md_S(u)}F(a):u\in U)\}$ ifadesi

$\{\cup(\cap_{F(a)\in Md_S(u)}F(a):u\in S_2_(U))\}\cup\{\{\cup(\cap_{F(a)\in Md_S(u)}F(a):u\in(U-S_2_(U)))\}$ ifadesine eşittir. Bu durumda yalnızca

$$\{\cup(\cap_{F(a)\in Md_S(u)}F(a):u\in S_2_(U))\}=S_2_(U)$$

olduğunu göstermemiz yeterlidir. 5.2.3.Tanım gereği her $a\in A$ ve her $F(a)\subseteq U$ için

$$\{\cup(\cap_{F'(a)\in Md_S(u)}F'(a):u\in F(a))\}=F(a)$$

olup bu durumda

$$S_2_(U)=\cup_{a\in A}\{F(a):F(a)\subseteq U\}$$

$$=\cup_{a\in A}\{\cup(\cap_{F'(a)\in Md_S(u)}F'(a):u\in F(a)\subseteq U)\}$$

elde edilir. Her $a\in A$ ve her $F(a)\subseteq U$ için $F(a)\subseteq S_2_(U)$ olduğundan

$$S_2_(U)=\{\cup(\cap_{F'(a)\in Md_S(u)}F'(a):u\in S_2_(U))\}$$

olur. Böylece $S_2^{-}(U) = \{\bigcup(\bigcap_{F(a)\in Md_S(u)} F(a): u \in U)\}$ ifadesi sağlanır.

5.2.2.Örnek. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ evren küme, $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ parametreler kümesi olmak üzere 5.2.1.Örnekteki $S = (X, C_G)$ soft örtü yaklaşım uzayı verilsin.

$X_1 = \{x_1, x_2\} \subseteq X$ alt kümesini ele alalım.

$$S_{2_}(X_1) = \bigcup_{a\in A}\{F(a): F(a) \subseteq X_1\} = \{x_1, x_2\} \text{ ve}$$

$$S_2^{-}(X_1) = \{\bigcup(\bigcap_{F(a)\in Md_S(x)} F(a): x \in X_1)\} = \{x_1, x_2\}$$

olup $S_{2_}(X_1) = S_2^{-}(X_1)$ olduğundan $X_1 \subseteq X$ alt kümesi, soft örtü yaklaşım uzayında 2.tipe göre soft örtü tabanlı tanımlanabilir kümedir.

$X_2 = \{x_1, x_2, x_5\} \subseteq X$ alt kümesini ele alalım.

$$S_{2_}(X_2) = \bigcup_{a\in A}\{F(a): F(a) \subseteq X_2\} = \{x_1, x_2\} \text{ ve}$$

$$S_2^{-}(X_2) = \{\bigcup(\bigcap_{F(a)\in Md_S(x)} F(a): x \in X_2)\} = \{x_1, x_2, x_5, x_6\}$$

olup $S_{2_}(X_2) \neq S_2^{-}(X_2)$ olduğundan $X_2 \subseteq X$ alt kümesi, soft örtü yaklaşım uzayında 2.tipe göre soft örtü tabanlı rough kümedir.

5.2.2.Uyarı. Soft yaklaşım uzayında "rough küme" bir soft kümeye bağlı olarak ifade edilirken, soft örtü yaklaşım uzayında bir "rough küme" bir soft örtü kümeye bağlı olarak ifade edilir. Aslında Feng ve ark. (2010) tarafından verilen soft rough küme, bir soft örtü yaklaşım uzayında ele alındığında soft örtü tabanlı rough kümelerin yeni bir tipi olarak düşünülebilir. 1.tip ve 2.tip soft örtü alt yaklaşım operatörleri ile bir soft örtü yaklaşım uzayında verilen S-soft alt yaklaşım operatörünün (Feng ve ark., 2010) aynı olduğunu görmek, 5.2.4.Tanım, 5.2.5.Tanım ve 5.1.1.Önerme gereği kolaydır.

5.2.1.Sonuç. $G = (F, A)$, X evreni üzerinde bir soft örtü küme, $S = (X, C_G)$ soft örtü yaklaşım uzayı ve $U, V \subseteq X$ olsun. S-soft alt ve S-soft üst yaklaşım operatörleri aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$\boldsymbol{i})\ apr_{_}(X) = apr^{-}(X) = \bigcup_{a\in A} F(a) = X,$

$\boldsymbol{ii})\ apr_{_}(\emptyset) = apr^{-}(\emptyset) = \emptyset,$

$\boldsymbol{iii})\ \forall U \subseteq X$ için $apr_{_}(U) \subseteq U,$

$\boldsymbol{iv})\ apr_{_}(U) \subseteq apr^{-}(U),$

$\boldsymbol{v})\ U \subseteq V \Longrightarrow apr_{_}(U) \subseteq apr_{_}(V),$

$\boldsymbol{vi})\ U \subseteq V \Longrightarrow apr^{-}(U) \subseteq apr^{-}(V),$

$\boldsymbol{vii})\ apr_{_}(U \cap V) \subseteq apr_{_}(U) \cap apr_{_}(V),$

$\boldsymbol{viii}$) $apr_(U \cup V) \supseteq apr_(U) \cup apr_(V)$,

$\boldsymbol{ix}$) $apr^{-}(U \cup V) = apr^{-}(U) \cup apr^{-}(V)$,

$\boldsymbol{x}$) $apr^{-}(U \cap V) \subseteq apr^{-}(U) \cap apr^{-}(V)$,

$\boldsymbol{xi}$) $apr^{-}\big(apr^{-}(U)\big) \supseteq apr^{-}(U)$,

$\boldsymbol{xii}$) $apr_\big(\, apr_(U)\big) = \; apr_(U)$,

$\boldsymbol{xiii}$) $\forall U \subseteq X$ için $U \subseteq apr^{-}(U)$,

$\boldsymbol{xiv}$) $\forall x \in X$ için $apr^{-}(\{x\}) \neq \emptyset$.

İspat. 5.1.1.Teorem ve 5.1.2.Teoremin direkt sonucudur.

Şimdi 1.tip ve 2.tip soft örtü üst yaklaşım operatörlerinin temel özelliklerini inceleyelim.

5.2.2.Teorem. $G = (F, A)$, X evreni üzerinde bir soft örtü küme, $S = (X, C_G)$ soft örtü yaklaşım uzayı ve $U, V \subseteq X$ olsun. 1.tip soft örtü üst yaklaşım operatörleri aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$\boldsymbol{i}$) ${S_1}^{-}(X) = X$,

$\boldsymbol{ii}$) ${S_1}^{-}(\emptyset) = \emptyset$,

$\boldsymbol{iii}$) $\forall U \subseteq X$ için $U \subseteq {S_1}^{-}(U)$,

$\boldsymbol{iv}$) ${S_1}^{-}(U \cup V) = {S_1}^{-}(U) \cup {S_1}^{-}(V)$,

$\boldsymbol{v}$) $U \subseteq V \Longrightarrow {S_1}^{-}(U) \subseteq {S_1}^{-}(V)$.

İspat. $\boldsymbol{i}$),$\boldsymbol{ii}$) ve $\boldsymbol{iii}$) şıklarının ispatları, 5.2.4.Tanım gereği açıktır.

$\boldsymbol{iv}$) 5.2.4.Tanım gereği $U, V \subseteq X$ için

$${S_1}^{-}(U) = \cup\{Md_S(x) : x \in U\} \text{ ve } {S_1}^{-}(V) = \cup\{Md_S(x) : x \in V\}$$

olup buradan

$$\begin{aligned} {S_1}^{-}(U) \cup {S_1}^{-}(V) &= (\cup\{Md_S(x) : x \in U\}) \cup (\cup\{Md_S(x) : x \in V\}) \\ &= \cup\{Md_S(x) : x \in U \cup V\} \\ &= {S_1}^{-}(U \cup V) \end{aligned}$$

elde edilir.

$\boldsymbol{v}$) 5.2.4.Tanım gereği keyfi bir $U \subseteq X$ alt kümesinin

$${S_1}^{-}(U) = \cup\{Md_S(x) : x \in U\}$$

1.tip soft örtü üst yaklaşımı,

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_m \in U \text{ ve } F(a_1), F(a_2), F(a_3), \dots, F(a_m) \in \; G = (F, A)$$

olmak üzere $1 \leq i \leq m$ için $F(a_i) \in Md_S(x_i)$ olduğundan

$$S_1^{-}(U) = F(a_1) \cup F(a_2) \cup F(a_3) \cup \ldots \cup F(a_m)$$

şeklinde ifade edilir. Açıktır ki $F(a_i) \subseteq S_1^{-}(U)$ olur. $U \subseteq V$ ve $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m \in U$ olduğundan $x_i \in V$ olur. Buradan $1 \leq i \leq m$ için $F(a_i) \subseteq S_1^{-}(V)$ olup böylece $S_1^{-}(U) \subseteq S_1^{-}(V)$ elde edilir.

5.2.3.Teorem. $G = (F, A)$, X evreni üzerinde bir soft örtü küme, $S = (X, C_G)$ soft örtü yaklaşım uzayı ve $U, V \subseteq X$ olsun. 2.tip soft örtü üst yaklaşım operatörleri aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i) $S_2^{-}(X) = X$,

ii) $S_2^{-}(\emptyset) = \emptyset$,

iii) $\forall U \subseteq X$ için $U \subseteq S_2^{-}(U)$,

iv) $S_2^{-}(U \cup V) = S_2^{-}(U) \cup S_2^{-}(V)$,

v) $S_2^{-}[S_2^{-}(U)] = S_2^{-}(U)$,

vi) $U \subseteq V \Longrightarrow S_2^{-}(U) \subseteq S_2^{-}(V)$,

vii) $\forall a \in A$ için $S_2^{-}\big(F(a)\big) = F(a)$.

İspat. ***i***), ***ii***), ***iii***) ve ***vii***) şıklarının ispatları 5.2.5.Tanım gereği açıktır.

iv) 5.2.5.Tanım ve 5.2.1.Teorem gereği $U, V \subseteq X$ için

$S_2^{-}(U) = \{\cup(\cap_{F(a)\in Md_S(x)} F(a) : x \in U)\}$ ve $S_2^{-}(V) = \{\cup(\cap_{F(a)\in Md_S(x)} F(a) : x \in V)\}$

olup buradan

$$\begin{aligned} S_2^{-}(U) \cup S_2^{-}(V) &= \{\cup(\cap_{F(a)\in Md_S(x)} F(a) : x \in U)\} \cup \{\cup(\cap_{F(a)\in Md_S(x)} F(a) : x \in V)\} \\ &= \{\cup(\cap_{F(a)\in Md_S(x)} F(a) : x \in U \cup V)\} \\ &= S_2^{-}(U \cup V) \end{aligned}$$

elde edilir.

v) iii) özelliği gereği her $U \subseteq X$ alt kümesi için $U \subseteq S_2^{-}(U)$ olduğundan $S_2^{-}(U) \subseteq S_2^{-}[S_2^{-}(U)]$ olur. 5.2.5.Tanım ve 5.2.1.Teorem gereği her $x \in S_2^{-}[S_2^{-}(U)]$ için $S_2^{-}[S_2^{-}(U)] = \{\cup(\cap_{F'(a)\in Md_S(y)} F'(a) : y \in S_2^{-}(U))\}$ olur. Buradan

$$y_0 \in S_2^{-}(U) = \{\cup(\cap_{F(a)\in Md_S(z)} F(a) : z \in U)\}$$

olacak şekilde bir $y_0 \in S_2^{-}(U)$ vardır ve $x \in \cap_{F'(a)\in Md_S(y_0)} F'(a)$ olur. O zaman $y_0 \in \cap_{F(a)\in Md_S(z_0)} F(a)$ olacak şekilde bir $z_0 \in U$ vardır. Böylece her $F(a) \in Md_S(z_0)$ için $y_0 \in F(a)$ olur. Bu yüzden her $F(a)$ kümesi için $F'(a) \subseteq F(a)$ olacak şekilde bir $F'(a) \in Md_S(y_0)$ vardır. Böylece

$$\cap_{F'(a)\in Md_S(y_0)} F'(a) \subseteq \cap_{F(a)\in Md_S(z_0)} F(a)$$

olup $x \in \bigcap_{F(a)\in Md_S(z_0)} F(a)$ elde edilir. Buradan $S_2^{-}[S_2^{-}(U)] \subseteq S_2^{-}(U)$ olur.

$\boldsymbol{vi}$) $U \subseteq V$ ise 5.2.1.Teorem gereğince

$$\begin{aligned} S_2^{-}(U) &= \{\cup(\cap_{F(a)\in Md_S(x)} F(a): x \in U)\} \\ &\subseteq \{\cup(\cap_{F(a)\in Md_S(x)} F(a): x \in V)\} \\ &= S_2^{-}(V) \end{aligned}$$

elde edilir.

5.2.3.Uyarı. $S = (X, C_G)$ soft örtü yaklaşım uzayında, $U \subseteq X$ alt kümesi için 1.tip ve 2.tip soft örtü alt yaklaşım operatörleri ile bir soft örtü yaklaşım uzayında Feng ve ark. (2010) tarafından verilen S-soft alt yaklaşım operatörleri aynı olduğundan, $S_{1_}(U)$, $S_{2_}(U)$, $apr_{_}(U)$ ifadeleri $S_{_}(U)$ ile gösterilecektir.

5.2.4.Teorem. $G = (F, A)$, X evreni üzerinde bir soft örtü küme, $S = (X, C_G)$ soft örtü yaklaşım uzayı ve $U, V \subseteq X$ olsun. 1.tip ve 2.tip soft örtü alt ve üst yaklaşım operatörleri için aşağıdaki özellikler sağlanmaz:

$\boldsymbol{i}$) $S_{_}(U \cap V) = S_{_}(U) \cap S_{_}(V)$,

$\boldsymbol{ii}$) $S_{_}[(S_{_}(U))^c] = (S_{_}(U))^c$,

$\boldsymbol{iii}$) $S_1^{-}[(S_1^{-}(U))^c] = (S_1^{-}(U))^c$,

$\boldsymbol{iv}$) $S_1^{-}[S_1^{-}(U)] = S_1^{-}(U)$,

$\boldsymbol{v}$) $S_{_}(U) = (S_1^{-}(U^c))^c$,

$\boldsymbol{vi}$) $S_1^{-}(U) = (S_{_}(U^c))^c$,

$\boldsymbol{vii}$) $\forall a \in A$ için $S_1^{-}(F(a)) = F(a)$,

$\boldsymbol{viii}$) $S_2^{-}[(S_2^{-}(U))^c] = (S_2^{-}(U))^c$,

$\boldsymbol{ix}$) $S_{_}(U) = (S_2^{-}(U^c))^c$,

$\boldsymbol{x}$) $S_2^{-}(U) = (S_{_}(U^c))^c$.

5.2.3.Örnek. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ evren kümesi ve $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ parametreler kümesi

$$\begin{aligned} F(a_1) &= \{x_1, x_2\}, \\ F(a_2) &= \{x_2, x_3\}, \\ F(a_3) &= \{x_3, x_4\}, \\ F(a_4) &= \{x_4, x_5\} \end{aligned}$$

olmak üzere X üzerinde $G = (F, A)$ soft örtü kümesi ve $S = (X, C_G)$ soft örtü yaklaşım uzayı verilsin.

i) $S_-(U \cap V) = S_-(U) \cap S_-(V)$ olmadığını gösterelim. $U = \{x_1, x_2\} \subseteq X$ ve $V = \{x_2, x_3, x_4\} \subseteq X$ alt kümelerini ele alalım. $U \cap V = \{x_2\}$ ve $S_-(U \cap V) = \emptyset$ olur. $S_-(U) = \{x_1, x_2\}$ ve $S_-(V) = \{x_2, x_3, x_4\}$ olmak üzere $S_-(U) \cap S_-(V) = \{x_2\}$ olup bu durumda $S_-(X \cap Y) \neq S_-(X) \cap S_-(Y)$ olduğu görülür.

ii) $S_-\left[\left(S_-(U)\right)^c\right] = \left(S_-(U)\right)^c$ olmadığını gösterelim. $U = \{x_1, x_2, x_4, x_5\} \subseteq X$ alt kümesini ele alalım. $S_-(U) = \{x_1, x_2, x_4, x_5\}$ olduğundan $\left(S_-(U)\right)^c = \{x_3\}$ ve $S_-\left[\left(S_-(U)\right)^c\right] = \emptyset$ elde edilir. Bu durumda $S_-\left[\left(S_-(U)\right)^c\right] \neq \left(S_-(U)\right)^c$ olduğu görülür.

iii) $S_1{}^-\left[\left(S_1{}^-(U)\right)^c\right] = \left(S_1{}^-(U)\right)^c$ olmadığını gösterelim. $U = \{x_1\} \subseteq X$ alt kümesini ele alalım. $S_1{}^-(U) = \{x_1, x_2\}$ ve $\left(S_1{}^-(U)\right)^c = \{x_3, x_4, x_5\}$ olmak üzere $S_1{}^-\left[\left(S_1{}^-(U)\right)^c\right] = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}$ olup $S_1{}^-\left[\left(S_1{}^-(U)\right)^c\right] \neq \left(S_1{}^-(U)\right)^c$ olduğu görülür.

iv) $S_1{}^-[S_1{}^-(U)] = S_1{}^-(U)$ olmadığını gösterelim. $U = \{x_1\} \subseteq X$ alt kümesini ele alalım. $S_1{}^-(U) = \{x_1, x_2\}$ ve $S_1{}^-[S_1{}^-(U)] = \{x_1, x_2, x_3\}$ olmak üzere $S_1{}^-[S_1{}^-(U)] \neq S_1{}^-(U)$ olduğu görülür.

v) $S_-(U) = \left(S_1{}^-(U^c)\right)^c$ olmadığını gösterelim. $U = \{x_1, x_2, x_4, x_5\} \subseteq X$ alt kümesini ele alalım. $S_1{}^-(U^c) = \{x_2, x_3, x_4\}$ olduğundan $\left(S_1{}^-(U^c)\right)^c = \{x_1, x_5\}$ olur. Ayrıca $S_-(U) = \{x_1, x_2, x_4, x_5\}$ olup $S_-(U) \neq \left(S_1{}^-(U^c)\right)^c$ olduğu görülür.

vi) $S_1{}^-(U) = \left(S_-(U^c)\right)^c$ olmadığını gösterelim. $U = \{x_1\} \subseteq X$ alt kümesini ele alalım. $S_1{}^-(U) = \{x_1, x_2\}$ ve $S_-(U^c) = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}$ olmak üzere $\left(S_-(U^c)\right)^c = \{x_1\}$ olur. Bu durumda $S_1{}^-(U) \neq \left(S_-(U^c)\right)^c$ olduğu görülür.

vii) Her $a \in A$ için $S_1{}^-\left(F(a)\right) = F(a)$ olmadığını gösterelim. $F(a_1) = \{x_1, x_2\}$ kümesini ele alalım. $S_1{}^-\left(F(a_1)\right) = \{x_1, x_2, x_3\}$ olup bu durumda $S_1{}^-\left(F(a_1)\right) \neq F(a_1)$ olduğu görülür.

5.2.4.Örnek. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ evren kümesi ve $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ parametreler kümesi

$$F(a_1) = \{x_1, x_2\},$$
$$F(a_2) = \{x_1, x_2, x_3\},$$

$$F(a_3) = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}$$

olmak üzere X üzerinde $G = (F, A)$ soft örtü kümesi ve $S = (X, C_G)$ soft örtü yaklaşım uzayı verilsin. $U = \{x_1, x_2, x_3\} \subseteq X$ alt kümesini ele alalım.

$\boldsymbol{viii})$ $S_2{}^{-}\left[\left(S_2{}^{-}(U)\right)^c\right] = \left(S_2{}^{-}(U)\right)^c$ olmadığını gösterelim. $S_2{}^{-}(U) = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $\left(S_2{}^{-}(U)\right)^c = \{x_4, x_5, x_6\}$ olup $S_2{}^{-}\left[\left(S_2{}^{-}(U)\right)^c\right] = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}$ elde edilir. Bu durumda $S_2{}^{-}\left[\left(S_2{}^{-}(U)\right)^c\right] \neq \left(S_2{}^{-}(U)\right)^c$ olduğu görülür.

$\boldsymbol{ix})$ $S_{-}(U) = \left(S_2{}^{-}(U^c)\right)^c$ olmadığını gösterelim. $S_1{}^{-}(U^c) = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}$ olduğundan $\left(S_1{}^{-}(U^c)\right)^c = \{x_1, x_2\}$ elde edilir. Ayrıca $S_{-}(U) = \{x_1, x_2, x_3\}$ olup $S_{-}(U) \neq \left(S_2{}^{-}(U^c)\right)^c$ olduğu görülür.

$\boldsymbol{x})$ $S_2{}^{-}(U) = \left(S_{-}(U^c)\right)^c$ olmadığını gösterelim. $S_2{}^{-}(U) = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $S_{-}(U^c) = \emptyset$ olmak üzere $\left(S_{-}(U^c)\right)^c = X$ olur. Böylece $S_2{}^{-}(U) \neq \left(S_{-}(U^c)\right)^c$ olduğu görülür.

5.2.4.Uyarı. 1.tip ve 2.tip soft örtü üst yaklaşım operatörleri ile bir soft örtü yaklaşım uzayında Feng ve ark. (2010) tarafından verilen S-soft üst yaklaşım operatörleri farklıdır. Üst yaklaşım operatörlerinin tanımları ve incelenen özellikleri gereği, $S_2{}^{-}(U) \subseteq S_1{}^{-}(U) \subseteq apr^{-}(U)$ olur. Ancak genellikle karşıtı doğru değildir:

5.2.5.Örnek. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ evren küme, $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ parametreler kümesi olmak üzere 5.2.1.Örnekteki $S = (X, C_G)$ soft örtü yaklaşım uzayı verilsin. $U = \{x_3, x_4\} \subseteq X$ alt kümesini ele alalım.

$$S_1{}^{-}(U) = \cup\{Md_S(x) : x \in U\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\},$$
$$apr^{-}(U) = \cup_{a \in A}\{F(a) : F(a) \cap U \neq \emptyset\} = X$$

olup sonuç olarak $apr^{-}(U)$ kümesi, $S_1{}^{-}(U)$ kümesinin alt kümesi değildir.

5.2.6.Örnek. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ evren kümesi ve $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ parametreler kümesi olmak üzere 5.2.3.Örnekteki $S = (X, C_G)$ soft örtü yaklaşım uzayı verilsin. $U = \{x_1, x_2\} \subseteq X$ alt kümesini ele alalım.

$$S_1{}^{-}(U) = \cup\{Md_S(x) : x \in U\} = \{x_1, x_2, x_3\},$$
$$S_2{}^{-}(U) = \left\{\cup\left(\cap_{F(a) \in Md_S(x)} F(a) : x \in U\right)\right\} = \{x_1, x_2\}$$

olup sonuç olarak $S_1{}^{-}(U)$ kümesi, $S_2{}^{-}(U)$ kümesinin alt kümesi değildir.

5.3. Soft Örtü Tabanlı Rough Kümelerin Tıp Alanında Bir Uygulaması

Bu kesimde 2011 yılında Feng tarafından soft rough kümeyi günlük hayata uygulamak için verilen metod, tıp alanında soft örtü tabanlı rough kümeler kullanılarak uygulanmıştır. Soft rough kümelerden daha küçük üst yaklaşıma sahip olan soft örtü tabanlı rough kümeler kullanılarak uyguladığımız bu metod aracılığıyla daha kesin sonuçlar elde edilmiştir. Prostat kanseri şüphesiyle doktora başvuran hastaların, prostat kanseri olma riskini sıralayan bu metod; doktora, hasta hakkında bir fikir vermek ve maliyeti yüksek olan, hastada bazı fiziksel zararlara neden olabilen biyopsi işlemini gereksiz yere uygulamayı engellemek için kullanılmıştır.

Prostat kanseri sanayileşmiş ülkelerde, erkeklerde ölüme sebep olan en yaygın ikinci tip kanserdir. Prostat kanseri yaş, genetik ve etnik geçmiş, kandaki prostat spesifik antijen (PSA) seviyesi gibi çeşitli faktörlere dayanır. PSA prostatta üretilen bir madde olduğundan hastalarda başlangıç teşhisi için çok önemli bir faktördür (Catolana ve ark. (1998); Egawa ve ark. (1997); Van Cangh ve ark. (1996)). Fakat kandaki PSA seviyesi prostatın iltihaplanması ve prostatta iyi huylu büyümenin (BPH) sonucu olarak da artabilir. Bu yüzden kandaki PSA seviyesine bakarak kesin teşhis koymak mümkün olmayabilir. Bunun yanı sıra rektal muayene ve transrektal bulgular da doktora, hastalığın teşhisi açısından bilgi verir (Nguyen ve ark. (2001); Mettlin ve ark. (1991); Şeker ve ark. (2003)). Bilindiği gibi prostat kanseri erken teşhis edilebildiği zaman hasta tamamen tedavi edilebilir. Prostat kanserinin kesin teşhisi de biyopsi ile mümkündür. Ama erken teşhis için biyopsi yapılırsa kanser diğer hayati organlara yayılabilir. Bu nedenle biyopsi yöntemi riskli bir yöntemdir.

Biz tez çalışmamızda biyopsi yapılan hasta sayısını azaltmayı amaçladık. Bu sebeple biyopsi gerekliliğini belirleyen ve doktorlara kanser riskini sıralayan bir metot önerdik. Bu süreçte laboratuvar verileri olarak prostat spesifik antijen (PSA), free prostat spesifik antijen (fPSA), prostat hacmi (PV) ve hastanın yaşını kullandık. Sonuç olarak ta bu metodun hızlı, ekonomik ve geleneksel tanı sistemlerinden daha risksiz olduğunu gözlemledik. İlk olarak karar verme metodunu ve bu metotta kullanılan tanımları verelim.

5.3.1.Tanım. (Zadeh, 1965) $X \neq \emptyset$ olmak üzere X evren kümesi üzerinde bir A fuzzy kümesi, $\mu_A: X \to I = [0,1]$ üyelik fonksiyonu ile karakterize edilen

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\}$$

ikililerin oluşturduğu kümedir.

5.3.2.Tanım. (Zadeh, 1965) A ve B kümeleri X evren kümesi üzerinde iki fuzzy küme olsun. Her $x \in X$ için $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ ise A fuzzy kümesine B fuzzy kümesinin alt kümesi denir ve $A \leq B$ simgesiyle gösterilir.

5.3.3.Tanım. (Maji ve ark., 2001) $\mathcal{F}(X)$ simgesi X evren kümesinin tüm fuzzy alt kümelerinin ailesini göstersin. $A \subseteq E$ olmak üzere $f: A \to \mathcal{F}(X)$ bir dönüşüm ise (f, A) ikilisine fuzzy soft küme denir.

5.3.1.Uyarı. Feng 2011 yılında soft rough kümeyi günlük hayata uygulamak için bir karar verme metodu vermiştir. Burada, karar verme metodu aşağıdaki şekilde özetlensin:

U bir başlangıç evreni ve A kümesi, U kümesinde ilgili olan nesnelerin tüm parametrelerinin kümesi olsun.

1.Adım: U evreni üzerindeki $G = (F, A)$ orijinal tanım soft kümesi girilir.

2.Adım:T uzman grubunun ön değerlendirme sonuçları kullanılarak $G_1 = (V, T)$ değerlendirme soft kümesi kurulur.

3.Adım: Soft rough yaklaşımlar hesaplanır ve bu yaklaşımlar aracılığıyla $G_{1_} = (V_, T)$ ve $G_1{}^{-} = (V^{-}, T)$ soft kümeleri elde edilir.

4.Adım: $G_1 = (V, T)$, $G_{1_} = (V_, T)$ ve $G_1{}^{-} = (V^{-}, T)$ soft kümelerinin yerini tutan μ_{G_1}, $\mu_{G_{1_}}$ ve $\mu_{G_1}{}^{-}$ fuzzy kümeleri hesaplanır.

5.Adım: μ_{G_1}, $\mu_{G_{1_}}$ ve $\mu_{G_1}{}^{-}$ fuzzy kümeleri kullanılarak $G_F = (\alpha, C)$ fuzzy soft kümesi kurulur.

6.Adım: R ağırlık vektörü girilir ve her bir $u_k \in U$ alternatifinin $w(u_k)$ ağırlıklı değerlendirme değerleri hesaplanır. Daha sonra bütün alternatifler ağırlıklı değerlendirme değerlerine göre sıralanır ve en büyük ağırlıklı değerlendirme değerine dayanarak bu nesnelerden herhangi biri en iyi alternatif olarak tercih edilir.

Şimdi yukarıda verilen karar verme metodunun adımlarını daha kesin ve gerçekçi sonuçlar elde etmek için soft rough kümelerden daha küçük üst yaklaşıma sahip olan 2.tip soft örtü tabanlı rough kümeleri kullanarak uygulayalım:

Karar verme metodunda kullanılan veriler Meram Tıp Fakültesi, Üroloji bölümünden (Prof. Dr. Ünal SERT) alınmıştır. Prostat kanseri şüphesiyle doktora

başvuran hastaların veri kümesi, 78 hastanın PSA, fPSA, PV ve YAŞ değerlerinden oluşmaktadır (Bkz. Tablo 5.3.1). Feng (2011) tarafından verilen metotta, soft örtü tabanlı rough kümeler ve giriş değerleri olarak PSA, fPSA, PV ve YAŞ kullanılarak; çıkış değeri olarak prostat kanser riskinin yüzdesi elde edilmiştir.

Tablo 5.3.1. Bazı hastaların PSA, fPSA, PV ve YAŞ giriş değerleri

U =HASTALAR	PSA	fPSA	PV	YAŞ
u_1	76	17	30	65
u_5	39	7	48	64
u_{21}	39	9	52	68
u_{30}	27	7	28	51
u_{46}	88	19	37	77
u_{51}	46	12	62	71
u_{54}	42	10	59	80
u_{71}	52	12	35	65
u_{74}	51	12	78	67
u_{78}	41	13	79	80

1.Adım: Prostat kanseri şüphesiyle doktora başvuran 78 hastanın, veri kümesindeki değerler soft küme gösterimine uygun olmadığından ilk olarak PSA, fPSA, PV ve YAŞ değerlerini kullanarak $G = (F, A)$ soft örtü kümesini tanımladık. Uzman doktor yardımıyla soft kümeyi tanımlarken, prostat kanseri şüphesiyle doktora başvuran 78 hastayı, evren küme olarak ve PSA, fPSA, PV ve YAŞ değerlerini bir parametre kümesinin elemanları olarak kullandık. PSA için 50 ve 50 den büyük, fPSA için 12 ve 12 den büyük, PV için 20 ve 20 den büyük, YAŞ için 54 ve 54 den büyük değere sahip olan hastaları belirledik. Yani $U = \{u_k : u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3, \dots, u_{78} = 78\}$ kümesi, 78 hastadan oluşan evren kümesi ve $A = \{a_1 = \text{PSA}, a_2 = \text{fPSA}, a_3 = \text{PV}, a_4 = \text{YAŞ}\}$ parametre kümesi,

F(PSA), 50 ve 50 den büyük değere sahip olan hastaları

F(fPSA), 12 ve 12 den büyük değere sahip olan hastaları

F(PV), 20 ve 20 den büyük değere sahip olan hastaları

F(YAŞ), 54 ve 54 den büyük değere sahip olan hastaları

göstermek üzere uzman doktor yardımıyla $G = (F, A)$ soft örtü kümesini aşağıdaki şekilde tanımladık.

$$F(\text{PSA}) = \{1,4,6,7,9,11,13,15,16,18,19,20,22,23,25,26,28,29,31,33,34,36,37,$$
$$39,40,42,43,45,46,47,48,49,52,53,55,56,58,60,62,63,64,66,68,70,$$
$$71,72,73,74,75,77\}$$

$F(\text{fPSA}) = \{$ 1,4,7,8,9,10,11,13,15,16,17,18,19,20,22,23,24,25,26,28,29,31,
32,33,34,35,36,37,39,40,42,43,45,46,48,49,51,52,53,55,56,58,60,
62,63,64,66,68,70,71,72,73,74,75,76,77,78$\}$

$F(\text{YAŞ}) = \{1,2,3,\dots,29,31,\dots,56,58,60,\dots,78\}$

$F(\text{PV}) = U = \{u_k : u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3, \dots, u_{78} = 78\}$.

Böylece $G = (F, A)$ soft örtü kümesi ve $S = (U, C_G)$ ikilisi de soft örtü yaklaşım uzayı olur. U evren kümesinin alt kümelerinin parametrelendirilmiş bir ailesi olan $G = (F, A)$ soft örtü kümesi, 2.3.3.Uyarı gereği tablo yardımı ile aşağıdaki şekilde gösterilir.

Tablo 5.3.2. $G = (F, A)$ soft kümesinin tablosal gösterimi

U =HASTALAR	PSA	fPSA	PV	YAŞ
u_1	1	1	1	1
u_5	0	0	1	1
u_{21}	0	0	1	1
u_{30}	0	0	1	0
u_{46}	1	1	1	1
u_{51}	0	1	1	1
u_{54}	0	0	1	1
u_{71}	1	1	1	1
u_{74}	1	1	1	1
u_{78}	0	1	1	1

2.Adım: $T = \{T_{d_1}, T_{d_2}, T_{d_3}\}$ uzman doktor grubu olsun. Buradaki uzmanların değerlendirmelerinin aynı önemi olduğunu varsayacağız. $T = \{T_{d_1}, T_{d_2}, T_{d_3}\}$ grubundaki uzmanlar ilk başlangıç verilerinin bir değerlendirmesini yapmıştır. Her bir uzmana göre prostat kanseri şüphesi taşıyan hastaların ön değerlendirme sonuçları kullanılarak, U evren küme $T = \{T_{d_1}, T_{d_2}, T_{d_3}\}$ parametre kümesi olmak üzere

$V(T_{d_1})$, T_{d_1} uzman doktoruna göre prostat kanseri şüphesi taşıyan ve biyopsi yapılması gereken hastaları

$V(T_{d_2})$, T_{d_2} uzman doktoruna göre prostat kanseri şüphesi taşıyan ve biyopsi yapılması gereken hastaları

$V(T_{d_3})$, T_{d_3} uzman doktoruna göre prostat kanseri şüphesi taşıyan ve biyopsi yapılması gereken hastaları

göstermek üzere bir $G_1 = (V, T)$ değerlendirme soft kümesini

$$V : T \to \mathcal{P}(U) \ni V(T_{d_i}) = X_{d_i} \ni i = 1,2,3$$

şeklinde tanımladık.

$$X_{d_1} = V(T_{d_1}) = \{1,4,6,7,8,9,11,13,15,16,17,18,19,20,22,23,25,26,28,29,31,$$
$$33,34,36,37,39,40,42,43,45,46,47,48,49,51,52,53,55,56,58,$$
$$60,62,63,64,66,68,70,71,72,73,74,75,77\}$$

$$X_{d_2} = V(T_{d_2}) = \{1,2,3,4,6,7,9,11,13,15,16,18,20,22,23,24,25,26,28,29,31,33,$$
$$34,36,37,39,40,41,42,43,45,46,47,48,49,51,52,53,55,56,58,$$
$$60,62,64,66,68,70,72,73,74,75,77,78\}$$

$$X_{d_3} = V(T_{d_3}) = \{1,2,4,6,7,9,11,13,15,16,18,19,20,22,23,25,26,28,29,31,33,$$
$$34,36,37,39,40,41,42,43,45,46,47,48,49,51,52,53,54,55,56,$$
$$58,60,62,64,66,67,68,70,72,73,75,76,77,78\}$$

3.Adım: $G_1 = (V, T)$ soft kümesi bize yalnızca ilk başlangıç verilerinin bir değerlendirmesini verir. Bu adımda değerlendirme sonuçlarını kullanarak $S = (U, C_G)$ soft örtü yaklaşım uzayında 2.tip soft örtü yaklaşımları hesapladık ve bu yaklaşımlar aracılığıyla $G_{1_} = (V_, T)$ ve $G_1{}^{-} = (V^{-}, T)$ soft kümelerini elde ettik.

$G_{1_} = (V_, T)$ soft kümesini

$$V_: T \to \mathcal{P}(U) \ni V_(T_{d_i}) = S_(X_{d_i}) \ \ni \ i = 1,2,3$$

şeklinde tanımladık. Böylece

$$V_(T_{d_1}) = S_(X_{d_1}) = F(\text{PSA})$$
$$V_(T_{d_2}) = S_(X_{d_2}) = \emptyset$$
$$V_(T_{d_3}) = S_(X_{d_3}) = \emptyset$$

elde edildi.

$G_1{}^{-} = (V^{-}, T)$ soft kümesini

$$V^{-}: T \to \mathcal{P}(U) \ni V^{-}(T_{d_i}) = S_2{}^{-}(X_{d_i}) \ni i = 1,2,3$$

şeklinde tanımladık. Böylece

$$V^{-}(T_{d_1}) = S_2{}^{-}(X_{d_1}) = \{F(\text{PSA}) \cap F(\text{fPSA})\} \cup F(\text{PSA}) \cup F(\text{fPSA})$$
$$V^{-}(T_{d_2}) = S_2{}^{-}(X_{d_2}) = F(\text{PSA}) \cup F(\text{fPSA}) \cup F(\text{YAŞ}) = F(\text{YAŞ})$$
$$V^{-}(T_{d_3}) = S_2{}^{-}(X_{d_3}) = F(\text{PSA}) \cup F(\text{fPSA}) \cup F(\text{YAŞ}) = F(\text{YAŞ})$$

elde edildi.

Burada G_1 soft kümesi bütün uzmanların orta güven veren değerlendirme sonucunu, $G_{1_}$ soft kümesi bütün uzmanların yüksek güven veren değerlendirme sonucunu ve $G_1{}^{-}$ soft kümesi de bütün uzmanların düşük güven veren değerlendirme sonucunu gösterir.

4.Adım: Bütün uzman grubunun değerlendirme sonuçlarını, fuzzy kümelere dayanarak formülüze ettik. Kısaca $G_1 = (V,T)$, $G_{1_} = (V_,T)$ ve $G_1{}^{-} = (V^{-},T)$ soft kümelerinin yerini tutan μ_{G_1}, $\mu_{G_{1_}}$ve $\mu_{G_1}{}^{-}$ fuzzy kümelerini hesapladık. Burada $X \subseteq U$ için χ_X; X kümesinin karakteristik fonksiyonunu göstersin. $G_1 = (V,T)$ soft kümesine dayalı olarak U evreni üzerinde μ_{G_1} fuzzy kümesini

$$\mu_{G_1}: U \to [0,1], u_k \to \mu_{G_1}(u_k) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} \chi_{V(T_{d_i})}(u_k) \ni V(T_{d_i}) = X_{d_i}.$$

şeklinde tanımladık.

Benzer şekilde, $\mu_{G_{1_}}$ ve $\mu_{G_1}{}^{-}$ fuzzy kümelerini de sırasıyla aşağıdaki gibi tanımladık.

$$\mu_{G_{1_}}: U \to [0,1],\ u_k \to \mu_{G_{1_}}(u_k) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} \chi_{V_(T_{d_i})}(u_k) \ni V_(T_{d_i}) = S_(X_{d_i}).$$

$$\mu_{G_1}{}^{-}: U \to [0,1],\ u_k \to \mu_{G_1}{}^{-}(u_k) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} \chi_{V^{-}(T_{d_i})}(u_k) \ni V^{-}(T_{d_i}) = S_2{}^{-}(X_{d_i}).$$

Örneğin u_1 hastası için bu fuzzy kümeleri

$$\mu_{G_1}(u_1) = \frac{1}{3}\left[\chi_{V(T_{d_1})}(u_1) + \chi_{V(T_{d_2})}(u_1) + \chi_{V(T_{d_3})}(u_1)\right] = \frac{1}{3}[1+1+1] = 1,$$

$$\mu_{G_{1_}}(u_1) = \frac{1}{3}\left[\chi_{V_(T_{d_1})}(u_1) + \chi_{V_(T_{d_2})}(u_1) + \chi_{V_(T_{d_3})}(u_1)\right] = \frac{1}{3}[1+0+0] = \frac{1}{3},$$

$$\mu_{G_1}{}^{-}(u_1) = \frac{1}{3}\left[\chi_{V^{-}(T_{d_1})}(u_1) + \chi_{V^{-}(T_{d_2})}(u_1) + \chi_{V^{-}(T_{d_3})}(u_1)\right] = \frac{1}{3}[1+1+1] = 1,$$

şeklindedir.

$S = (U, C_G)$ soft örtü yaklaşım uzayında 2.tip soft örtü alt ve üst yaklaşımlarının tanımı gereği $G_{1_} \subseteq G_1 \subseteq G_1{}^{-}$ olduğundan görmek kolaydır ki $\mu_{G_{1_}} \subseteq \mu_{G_1} \subseteq \mu_{G_1}{}^{-}$ olur. Burada μ_{G_1} fuzzy kümesi; orta risk altındaki hastaları, $\mu_{G_{1_}}$ fuzzy kümesi; yüksek risk altındaki hastaları ve $\mu_{G_1}{}^{-}$ fuzzy kümesi de düşük risk altındaki hastaları gösterir.

5.Adım: μ_{G_1}, $\mu_{G_{1_}}$ ve $\mu_{G_1}{}^{-}$ fuzzy kümelerini kullanarak $G_F = (\alpha, C)$ fuzzy soft kümesini kurduk. Yani

Y: yüksek risk altında,

O: orta risk altında

D: düşük risk altında

olmak üzere $C = \{D,O,Y\}$ parametrelerin bir kümesi olsun. U evren kümesi üzerinde $G_F = (\alpha, C)$ fuzzy soft kümesini

$$\alpha: C \to \mathcal{F}(U) \ni \alpha(D) = \mu_{G_1}{}^{-};\ \alpha(O) = \mu_{G_1};\ \alpha(Y) = \mu_{G_{1_}}$$

şeklinde tanımladık.

6.Adım: R ağırlık vektörünü girdik ve her bir hastanın ağırlıklı değerlendirme değerlerini hesapladık. Yani; $r_D + r_O + r_Y = 1$ olmak üzere $R = (r_D, r_O, r_Y)$ ağırlık vektörü verildiğinde her bir

$$u_k \in U\ (k = 1,2,3, \dots ,78)$$

hastasının ağırlıklı değerlendirme değerini

$$w(u_k) = r_D \times \alpha(D)(u_k) + r_O \times \alpha(O)(u_k) + r_Y \times \alpha(Y)(u_k)$$

şeklinde ifade ettik. Her bir $u_k \in U$ alternatifinin $w(u_k)$ ağırlıklı değerlendirme değerini $R = (r_D, r_O, r_Y)$ ağırlık vektörünü, $R = (0.25, 0.5, 0.25)$ alarak hesapladık.

Örneğin u_1 hastası için $w(u_1)$ ağırlıklı değerlendirme değeri

$$\begin{aligned} w(u_1) &= r_D \times \alpha(D)(u_1) + r_O \times \alpha(O)(u_1) + r_Y \times \alpha(Y)(u_1) \\ &= 0.25 \times 1 + 0.5 \times 1 + 0.25 \times \frac{1}{3} \\ &= 0.83 \end{aligned}$$

şeklinde elde edildi. Bu işlem 78 hasta için tekrarlandı. Son olarak ta yüksek kanser riski taşıyan u_p hastalarını

$$w(u_p) = \max\{w(u_k) : k = 1,2,3, \dots ,78\} \ni u_k : u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3, \dots , u_{78} = 78$$

şeklinde belirledik. Bazı hastaların ağırlıklı değerlendirme değerleri ile $G_F = (\alpha, C)$ fuzzy soft kümesi Tablo 5.3.3. de gösterilmiştir.

Tablo 5.3.3. Bazı hastaların ağırlıklı değerlendirme değerleri ile $G_F = (\alpha, C)$ fuzzy soft kümesinin tablosal gösterimi

U =HASTALAR	$\mu_{G_1}{}_-$	μ_{G_1}	$\mu_{G_1}{}^-$	$w(u_k)$
u_1	$\frac{1}{3}$	1	1	0.83
u_5	0	0	$\frac{2}{3}$	0.17
u_{21}	0	0	$\frac{2}{3}$	0.17
u_{30}	0	0	0	0
u_{46}	$\frac{1}{3}$	1	1	0.83
u_{51}	0	1	1	0.75
u_{54}	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0.33
u_{71}	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0.5
u_{74}	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0.67
u_{78}	0	$\frac{2}{3}$	1	0.58

Sonuç olarak 78 hasta için ağırlıklı değerlendirme değerlerini hesapladık. Bütün hastaları ağırlıklı değerlendirme değerlerine göre sıraladık ve en büyük ağırlıklı değerlendirme değerine dayanarak en yüksek derece kanser riski taşıyan hastaları, en küçük ağırlıklı değerlendirme değerine dayanarak ta en düşük derece kanser riski

taşıyan hastaları belirledik. 78 hastanın ağırlıklı değerlendirme değerlerinin kümesi aşağıdaki verilerden görüldüğü gibi $\{0.83, 0.75, 0.67, 0.58, 0.5, 0.42, 0.33, 0.25, 0.17, 0\}$ şeklindedir.

$$1 \approx 4 \approx 6 \approx 7 \approx 9 \approx 11 \approx 13 \approx 15 \approx 16 \approx 18 \approx 20 \approx 22 \approx 23 \approx 25 \approx 26 \approx 28 \approx 29 \approx 31 \approx 33 \approx 34 \approx 36 \approx 37 \approx 39 \approx 40 \approx 42 \approx 43 \approx 45 \approx 46 \approx 47 \approx 48 \approx 49 \approx 52 \approx 53 \approx 55 \approx 56 \approx 58 \approx 60 \approx 62 \approx 64 \approx 66 \approx 68 \approx 70 \approx 72 \approx 73 \approx 75 \approx 77 = 0.83 > 51 = 0.75 > 19 \approx 41 \approx 74 = 0.67 > 78 = 0.58 > 2 \approx 63 \approx 71 = 0.5 > 8 \approx 17 \approx 24 \approx 76 = 0.42 > 3 \approx 54 \approx 67 = 0.33 > 10 \approx 32 \approx 35 = 0.25 > 5 \approx 12 \approx 14 \approx 21 \approx 27 \approx 38 \approx 44 \approx 50 \approx 61 \approx 65 \approx 69 = 0.17 > 30 \approx 57 \approx 59 = 0$$

Meram Tıp Fakültesinden alınan verilere göre uzman doktora prostat rahatsızlığı şikayeti ile gelen hastalardan yetmiş sekizinin PSA, fPSA, PV ve YAŞ değerleri yüksek olduğundan kanser olma risklerinin yüksek olduğu belirlenmiş bu sebeple de hastalara biyopsi uygulanmıştır. Biyopsi sonuçlarına göre ise bu hastalardan kırk dördünün prostat kanseri olduğu görülmüştür. Yani 34 hastaya gereksiz yere biyopsi yapılmıştır. Aynı hastaların verileri bizim kullandığımız metoda göre analiz edildiğinde ağırlıklı değerlendirme verilerine göre;

- 0.83 en yüksek olasılığa sahip olan 46 hasta, en yüksek derece kanser riskini taşımaktadır; yani biyopsi yapılması gereklidir.
- 0.75 olasılığa sahip olan 1 hasta, 0.67 olasılığa sahip olan 3 hasta ve 0.58 olasılığa sahip olan 1 hasta, toplamda 5 hasta orta derece kanser riski taşır; yalnızca doktor gözetiminde bulunmalıdır.
- Geriye kalan 27 hasta düşük derece kanser riski taşıdığından biyopsi yapmak gereksizdir.

Buna göre, eğer hastalara ait veriler ilk anda bu tahmin sistemi ile değerlendirilmiş olsaydı düşük risk grubunda yer alan 27 hastaya gereksiz biyopsi uygulanmasından kaçınılmış olacaktı.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

6.1 Sonuçlar

Bu çalışmada üç ayrı problem ele alınmıştır.

Çalışmamızın üçüncü bölümünde; Yüksel ve ark. (2014b) tarafından incelenen soft regüler genelleştirilmiş kapalı kümelerden daha zayıf olan soft genelleştirilmiş pre-regüler kapalı kümeler ve özellikleri incelenmiştir. Ayrıca soft regüler genelleştirilmiş kapalı kümeler, Mustafa ve Sleim (2014) tarafından verilmiş olan soft ideal kavramına dayanarak yeniden tanımlanmış ve özellikleri araştırılmıştır. Bir soft ideale bağlı soft regüler genelleştirilmiş kapalı kümeler olarak adlandırılan bu kümelerin, soft regüler genelleştirilmiş kapalı kümelerin bir genişlemesi olduğu gösterilmiş ve soft alt uzaylarda bazı ilginç özellikleri verilmiştir.

Çalışmamızın dördüncü bölümünde; soft topolojik uzaylardan daha genel olan supra soft topolojik uzaylarda, supra soft regüler genelleştirilmiş kapalı kümeler ve özellikleri araştırılmıştır. Soft regüler genelleştirilmiş kapalı kümelerin, bazı özelliklerinin supra soft topolojik uzaylarda sağlanmadığı gösterilmiştir.

Çalışmamızın beşinci bölümünde; 2011 yılında Feng tarafından soft rough kümeleri günlük hayata uygulamak için verilen metod, soft örtü tabanlı rough kümeler kullanılarak tıp alanında prostat kanser riskini belirlemek için uygulanmıştır. Prostat şikayetiyle Meram Tıp Fakültesine başvuran hastaların laboratuvar verileri olarak prostat spesifik antijen (PSA), free prostat spesifik antijen (fPSA), prostat hacmi (PV), hastanın yaşını kullanıp; soft örtü tabanlı rough kümelerin alt ve üst yaklaşımları aracılığıyla bir tahmin sistemi verilmiştir. Soft rough kümelerden daha küçük üst yaklaşıma sahip olan 2.tip soft örtü tabanlı rough kümeleri kullanarak uyguladığımız bu sistem aracılığıyla, daha kesin ve gerçekçi sonuçlar elde edilmiştir. Soft örtü tabanlı rough kümelerin çeşitleri de bu yüzden incelenmiştir.

Hızlı, ekonomik ve geleneksel tanı sistemlerinden daha risksiz olan bu tahmin sistemi, doktora yardımcı olmak amacıyla tasarlanmıştır. Doktor, tahmin sistemine hastaların laboratuvar verileri olarak prostat spesifik antijen, free prostat spesifik antijen, yaş ve prostat hacmi verilerini girerek kanser olma risklerini hesaplayabilir. Böylece doktor, düşük kanser riski taşıyan hastalara, çok pahalı ve bazen hastalarda zararlara neden olabilen bir uygulama olan biyopsi işlemini gereksiz yere yapmaktan kaçınmış olacaktır. Sonuç olarak, Meram Tıp Fakültesinden alınan verilere ve tedavi

süreçlerine dayanarak daha kesin yanıtlar veren sonuçlar elde ettik. Biyopsi gerekliliğini belirleyen ve doktorlara kanser riskini sıralayan bu metotla, biyopsi yapılan hasta sayısını azalttık.

6.2 Öneriler

Soft topolojik uzaylarda verilen küme çeşitlerinin, soft ayırma aksiyomları ile ilişkileri incelenebilir. Bu küme çeşitleri yardımıyla soft süreklilik çeşitleri incelenip, bazı ayrışımlar elde edilebilir.

Soft ideal topolojik uzaylarda ve supra soft topolojik uzaylarda, soft ayırma aksiyomları tanımlanıp, özellikleri ve bu çalışmada verilen küme çeşitleri ile ilişkileri incelenebilir.

Soft topolojik ve supra soft topolojik uzaylarda elde edilen sonuçlar, yeni genelleştirilmiş kapalı küme çeşitleri ile geliştirilebilir.

Prostat kanserinin teşhisi için tasarlanan tahmin sistemi, farklı hastalıkların teşhisi için de kullanılabilir. Bu tahmin sisteminde kullanılmak üzere, soft örtü tabanlı rough kümelerin yeni çeşitleri incelenebilir. Ayrıca bu çalışmada, tanımladığımız soft örtü tabanlı rough kümeler farklı bir metod ile birlikte kullanabilir.

KAYNAKLAR

Ali, M. I., Feng, F., Liu, X., Min, W. K. and Shabir, M., 2009, On some new operations in soft set theory, *Computers and Mathematics with Applications*, 57, 1547-1553.

Akdag, M. and Ozkan, A., 2014, On soft β-open sets and soft β-continuous functions, *Hindawi Publishing Corporation, The Scientific World Journal*, Article ID 843456, 6 pages, http://dx.doi.org/10.1155/2014/843456.

Aktaş, H. and Çağman, N., 2007, Soft sets and soft groups, *Information Sciences*, 177, 2726-2735.

Allam, A. A., Bakeir, M. Y. and Abo Tabl, E. A., 2008, Some methods for generating topologies by relations, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, (2) 31 (1), 35-45.

Atanassov, K. T., 1986, Intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems*, 20 (1), 87-96.

Aygünoğlu, A. and Aygün, H., 2012, Some notes on soft topological spaces, *Neural Computing and Applications*, 21 (1), 113-119.

Catolona, W. J., Partin, A. W., Slawin, K. M., Brawer, M. K., Flanigan, R. C., Patel, A. et al., 1998, Use of the percentage of free prostate-specific antigen to enhance differentiation of prostate cancer from benign prostatic disease: A prospective multicenter clinical trial, *Journal of American Medical Association (JAMA)*, 279 (19), 1542-1547.

Chen, D., Tsang, E. C. C., Yeung, D. S. and Wang, X., 2005, The parameterization reduction of soft sets and its applications, *Computers and Mathematics with Applications*, 49, 757-763.

Chen, B., 2013, Soft semi-open sets and related properties in soft topological spaces, *Applied Mathematics & Information Sciences*, 7 (1), 287-294.

Çağman, N., Karataş, S. and Enginoğlu, S., 2011, Soft topology, *Computers and Mathematics with Applications*, 62, 351-358.

Egawa, S., Soh, S., Ohori, M., Uchida, T., Gohji, K., Fujii, A. et al., 1997, The ratio of free to total serum prostate specific antigen and its use in differential diagnosis of prostate carcinoma in Japan, *Cancer (Online)*, 79 (1), 90-98.

El-Sheikh, S. A. and Abd El-latif, A. M., 2014, Decompositions of some types of supra soft sets and soft continuity, *International Journal of Mathematics Trends and Technology*, 9 (1), 37-56.

Feng, F., Jun, Y. B. and Zhao, X., 2008, Soft semirings, *Computers and Mathematics with Applications*, 56, 2621-2628.

Feng, F., Li, C., Davvaz, B. and Ali, M. I., 2010, Soft sets combined with fuzzy sets and rough sets: a tentative approach, *Soft Computing*, 14, 899-911.

Feng, F., Liu, X., Leoreanu-Fotea, V. and Jun,Y. B., 2011, Soft sets and soft rough sets, *Information Sciences*, 181, 1125-1137.

Feng, F., 2011, Soft rough sets applied to multicriteria group decision making, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 2 (1), 69-80.

Ge, X. and Yang, S., 2011, Investigations on some operations of soft sets, *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 51, 1112-1115.

Hussain, S. and Ahmad, B., 2011, Some properties of soft topological spaces, *Computers and Mathematics with Applications*, 62, 4058-4067.

Kandil, A., Tantawy, O. A. E., El-Sheikh, S. A. and Abd El-Latif, A. M., 2014a, γ-operation and decompositions of some forms of soft continuity in soft topological spaces, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 7 (2), 181-196.

Kandil, A., Tantawy, O. A. E., El-Sheikh, S. A. and Abd El-latif, A. M., 2014b, Supra generalized closed soft sets with respect to an soft ideal in supra soft topological spaces, *Applied Mathematics & Information Sciences*, 8 (4), 1731-1740.

Kannan, K., 2012, Soft generalized closed sets in soft topological spaces, *Journal of Theoretical and Applied Information Technology*, 37 (1), 17-21.

Kong, Z., Gao, L., Wang, L. and Li, S., 2008, The normal parameter reduction of soft sets and its algorithm, *Computers and Mathematics with Applications*, 56, 3029-3037.

Kozae, A. M., Abo Khadra, A. A. and T. Medhat, 2007, Topological approach for approximation space (TAS), *Proceeding of the 5th International Conference INFOS 2007 on Informatics and Systems*, 289-302.

Lashin, E. F., Kozae, A. M., Abo Khadra, A. A. and Medhat, T., 2005 Rough set theory for topological spaces, *International Journal of Approximate Reasoning*, 35-43.

Maji, P. K., Roy, A. R., Biswas, R., 2001, Fuzzy soft sets, *Journal of Fuzzy Mathematics*, 9 (3), 589-602.

Maji, P. K., Roy, A. R. and R. Biswas, 2002, An application of soft sets in a decision making problem, *Computers and Mathematics with Applications*, 44, 1077-1083.

Maji P. K., Biswas, R. and Roy A. R., 2003, Soft set theory, *Computers and Mathematics with Applications*, 45, 555-562.

Mettlin, C., Lee, F., Drago, J. and Murphy, G. P., 1991, The American cancer society national prostate cancer detection, project: Findings on the detection of early prostate cancer in 2425 men, *Cancer*, 67 (12), 2949-2958.

Min, W. K., 2011, A note on soft topological spaces, *Computers and Mathematics with Applications*, 62, 3524-3528.

Molodtsov, D., 1999, Soft set theory-first results, *Computers and Mathematics with Applications*, 37, 19-31.

Molodtsov, D., 2004, The theory of soft sets, *URSS Publishers*, Moscow.

Mustafa, H. I. and Sleim F. M., 2014, Soft generalized closed sets with respect to an ideal in soft topological spaces, *Applied Mathematics & Information Sciences*, 8 (2), 665-671.

Nguyen, H. P. and Kreinovich, V., 2001, Fuzzy logic and its applications in medicine, *International Journal of Medical Informatics*, 62, 165-173.

Pawlak, Z., 1982, Rough sets, *International Journal of Computer and Information Sciences*, 11 (5), 341-356.

Pawlak, Z., 1991, Rough sets: Theoretical aspects of reasoning about data, *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht, Boston, MA.

Pazar Varol, B. and Aygün, H., 2013, On soft Hausdorff spaces, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 5 (1), 15-24.

Pei, D. and Miao, D., 2005, From soft sets to information systems, *Granular Computing* 2005 *IEEE International Conference*, 2, 617-621.

Shabir, M. and Naz, M., 2011, On soft topological spaces, *Computers and Mathematics with Applications*, 61, 1786-1799.

Şeker, H., Odetayo, M. O., Petrovic, D. and Naguib, R. N. G., 2003, A fuzzy logic based method for prognostic decision making in breast and prostate cancers, *IEEE Transactions on Information Technology in Biomedicine*, 7 (2), 114-122.

Van Cangh, P. J., De Nayer, P., De Vischer, L., Sauvage, P., Tombal, B., Lorge, F. et al., 1996, Free to total prostate-specific antiden (PSA) ratio is superior to total PSA in differentiating benign prostate hypertrophy from prostate cancer, *The prostate*, 29, 30-34.

Wu, Q. E., Wang, T., Huang Y. X. and Li, J. S., 2008, Topology theory on rough sets, *IEEE Transactions on Systems, Man, And Cybernetics-Part B:Cybernetics*, 38 (1), 68-77.

Wu, M., Wu, X., Shen, T. and Cao, C., 2009, A new type of covering approximation operators, 2009 *International Conference on Electronic Computer Technology*, 334-338.

Yumak, Y. and Kaymakcı, A. K., 2013, Soft β-Open sets and their applications, submitted, http://arxiv.org/abs/1312.6964.

Yüksel, Ş., Tozlu, N. and Güzel Ergül, Z., 2013, On soft generalized closed sets in soft topological spaces, *Journal of Theoretical and Applied Information Technology*, 55 (2), 273-279.

Yüksel, Ş., Güzel Ergül, Z. and Güven, Z., 2014a, Soft connected spaces, *International Journal of Pure & Engineering Mathematics*, 2 (3), 121-134.

Yüksel, Ş., Tozlu, N. and Güzel Ergül, Z., 2014b, Soft regular generalized closed sets in soft topological spaces, *International Journal of Mathematical Analysis*, 8 (8), 355-367.

Yüksel, Ş., 2015, Genel Topoloji Kitabı, Eğitim Kitabevi Yayınları, No:52, Konya.

Zadeh, L. A., 1965, Fuzzy sets, *Information Control*, 8, 338-353.

Zhu, W. and Wang, F. Y., 2003, Reduction and axiomization of covering generalized rough sets, *Information Sciences*, 152, 217-230.

Zhu, W., 2007, Topological approaches to covering rough sets, *Information Sciences*, 177, 1499-1508.

Zhu, W. and Wang, F. Y., 2007, On three types of covering based rough sets, *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 19 (8), 1131-1144.

Zorlutuna, İ., Akdag, M., Min, W. K. and Atmaca, S., 2012, Remarks on soft topological spaces, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 3 (2), 171-185.

Zou, Y. and Xiao, Z., 2008, Data analysis approaches of soft sets under incomplete information, *Knowedge Based Systems*, 21, 941-945.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Zehra GÜZEL ERGÜL
Uyruğu : TC
Doğum Yeri ve Tarihi : Konya, 19.07.1983
e-mail : zehramguzel@hotmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	**Meram Konya Lisesi**	**2001**
Üniversite	:	**Gazi Üniversitesi**	**2006**
Yüksek Lisans	:	**Selçuk Üniversitesi**	**2009**
Doktora	:	**Selçuk Üniversitesi**	**2015**

UZMANLIK ALANI
Topoloji

YABANCI DİLLER
İngilizce

YAYINLAR

1. Yüksel, S., Simsekler, T. H., Güzel Ergül, Z. and Noiri, T., 2010, Strongly θ-pre-I-continuous functions, *"Vasile Alecsandri" University of Bacău, Faculty of Sciences Scientific Studies and Research Series Mathematics and Informatics*, 20 (2), 111-126.

2. Yüksel, S., Güzel Ergül, Z. and Simsekler, T. H., 2011, On Weakly θ-pre-I-continuous functions, *"Vasile Alecsandri" University of Bacău, Faculty of Sciences Scientific Studies and Research Series Mathematics and Informatics*, 21 (2), 157-172. **(Yüksek Lisans tezinden yapılmıştır)**

3. Yüksel, Ş., Tozlu, N. and Güzel Ergül, Z., 2013, On soft generalized closed sets in soft topological spaces, *Journal of Theoretical and Applied Information Technology*, 55 (2), 273-279.

4. Yüksel, Ş., Güzel Ergül, Z. and Güven, Z., 2014, Soft connected spaces, *International Journal of Pure & Engineering Mathematics*, 2 (3), 121-134.

5. Yüksel, Ş., Tozlu, N. and Güzel Ergül, Z., 2014, Soft regular generalized closed sets in soft topological spaces, *International Journal of Mathematical Analysis*, 8 (8), 355-367.

6. Tozlu, N., Yüksel, Ş. and Güzel Ergül, Z., 2014, Soft C-sets and a decomposition of soft continuity in soft topological spaces, *International Journal of Mathematics Trends and Technology*, 16 (1), 58-69.

7. Yüksel, Ş., Tozlu, N. and Güzel Ergül, Z., 2014, Soft filter, *Mathematical Sciences*, 8 (119), 1-6.

8. Yüksel, Ş., Güzel Ergül, Z. and Tozlu, N., 2014, Soft covering based rough sets and their application, *The Scientific World Journal*, Article ID 970893, 9 pages. **(Doktora tezinden yapılmıştır) SCI –Expanded**

9. Güzel Ergül, Z., Yüksel, Ş. and Tozlu, N., 2014, On soft generalized preregular closed and open sets in soft topological spaces, *Applied Mathematical Sciences*, 8 (158), 7875-7884. **(Doktora tezinden yapılmıştır)**

10. Güzel Ergül, Z. and Yüksel, Ş., On soft regular generalized closed sets with respect to a soft ideal in soft topological spaces, *Filomat*. **(Kabul edildi) (Doktora tezinden yapılmıştır) SCI –Expanded**

11. Güzel Ergül, Z. and Yüksel, Ş., Supra regular generalized closed soft sets in supra soft topological spaces. **(Gönderildi) (Doktora tezinden yapılmıştır)**

12. Güzel Ergül, Z. and Yüksel, Ş., A new type of soft covering based rough sets and their application. **(Gönderildi) (Doktora tezinden yapılmıştır)**

ULUSLARARASI BİLİMSEL TOPLANTILARDA SUNULAN BİLDİRİLER

1. Güzel Ergül, Z., Yüksel, S. and Simsekler, T. H., Weakly θ-pre-I continuous functions, *The 24th International Conference of Jangjeon Mathematical Society* (ICJMS-2011), KONYA. **(Yüksek Lisans tezinden yapılmıştır)**

2. Güzel Ergül, Z., Yüksel, Ş. and Güven, Z., Soft connected spaces, *2nd International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications* (IECMSA-2013), BOSNIA.

3. Yüksel, Ş., Güzel Ergül, Z. and Tozlu, On soft compactness and soft separation axioms, *2nd International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications* (IECMSA-2013), BOSNIA.

4. Tozlu, N., Yüksel, Ş. and Güzel Ergül, Z., Soft filter, *2nd International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications* (IECMSA-2013), BOSNIA.

5. Güzel Ergül, Z. and Yüksel, Ş., A new type of soft covering based rough sets and its application, *Seventh International Conference on Soft Computing, Computing with Words and Perceptions in System Analysis, Decision and Control* (ICSCCW-2013), İZMİR. **(Doktora tezinden yapılmıştır)**

6. Güzel Ergül, Z. and Yüksel, Ş., On soft regular generalized closed sets in soft topological spaces, *Analysis, Topology and Applications* (ATA-2014), Vrnjačka Banja, SERBIA. **(Doktora tezinden yapılmıştır)**

ULUSAL BİLİMSEL TOPLANTILARDA SUNULAN BİLDİRİLER

1. Güzel Ergül, Z. and Yüksel, Ş., Örtü tabanlı soft rough kümelerin karşılaştırılması, *XXV. Ulusal Matematik Sempozyumu*, 2012, NİĞDE. **(Doktora tezinden yapılmıştır)**