



T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAYESCİ DOĞRUSAL OLMAYAN YAPISAL EŞİTLİK MODELİ

İlkay ALTINDAĞ

DOKTORA TEZİ

İstatistik Anabilim Dalını

Ağustos-2015
KONYA
Her Hakkı Saklıdır
TEZ KABUL VE ONAYI

ÖZET

DOKTORA TEZİ

BAYESCİ DOĞRUSAL OLMAYAN YAPISAL EŞİTLİK MODELİ

İlkay ALTINDAĞ

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Aşır GENÇ

2015, 151 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Aşır GENÇ
Prof. Dr. Coşkun KUŞ
Doç. Dr. Halil AYDOĞDU
Doç. Dr. İsmail KINACI
Yrd. Doç. Dr. Aydın KARAKOCA

Yapısal Eşitlik Modeli, gözlenen ve gizil değişkenler arasındaki nedensel ve karşılıklı ilişkilerin bir arada bulunduğu modellerin test edilmesi için kullanılan kapsamlı istatistiksel bir yaklaşımdır. Pek çok bilim alanında kullanımı olan Yapısal Eşitlik Modeli, anlamlı modellerin test edilmesi ve ölçme için kapsamlı bir yöntem sağlamaktadır. Temel olarak, Doğrulayıcı Faktör Analizi, Path Analizi ve Regresyon Analizinin birleşimidir.

Yapısal Eşitlik Modelinde genellikle başvurulan varsayım; gözlenen ve gizil değişkenler arasındaki ilişkilerin doğrusal olması yönündedir. Son zamanlarda, gözlenen ve gizil değişkenler arasındaki doğrusal olmayan ilişkiler ve bazı karmaşık durumlar için uygun modeller kurulmasının daha çok önemli olduğu kabul edilmektedir. Veri setinin kompleks olduğu ve normal dağılıma uygun olmadığı durumlarda klasik yöntemler her zaman iyi sonuç vermemektedir. Bu problemin giderilmesinde kullanılan Bayesci yöntem ham veri seti yerine örneklem kovaryans matrisini kullanarak analiz yapmaktadır.

Bu çalışmada, Doğrusal Olmayan Yapısal Eşitlik Modellemesi için Bayesci Yaklaşım tüm bileşenleriyle ayrıntılı olarak ele alınmış ve teorik yapısı incelenmiştir. Çalışmada uygulama verisi olarak Türkiye İstatistik Kurumundan alınan 2013 yılına ait Yaşam Memnuniyeti Araştırması anket çalışmasından yararlanılmıştır. Uygulama kapsamında, ikametgâh memnuniyetini açıklayacak en uygun kurumsal modelin belirlenmesi amaçlamıştır. Bu amaçla uygun beş farklı modelleme yapılmış ve model karşılaştırma testlerini kullanarak en uygun model tespit edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bayesci Doğrusal Olmayan Yapısal Eşitlik Modellemesi, Doğrulayıcı Faktör Analizi, Gizil Değişken, Path Analizi, Yapısal Eşitlik Modeli.

ABSTRACT

Ph.D THESIS

BAYESIAN NON LINEAR STRUCTURAL EQUATION MODEL

İlkay ALTINDAĞ

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE DOCTOR OF PHILOSOPHY
IN STATISTICS

Advisor: Prof. Dr. Aşır GENÇ

Year, 151 Pages

Jury
Prof. Dr. Aşır GENÇ
Prof. Dr. Coşkun KUŞ
Assoc. Prof. Dr. Halil AYDOĞDU
Assoc. Prof. Dr. İsmail KINACI
Assist. Prof. Dr. Aydın KARAKOCA

Structural Equation Model is a comprehensive statistical approach, which is used to test models that have combined and reciprocal causal relationship between observed and latent variables. Structural Equation Model, which is used in many scientific areas, provides a comprehensive method for testing and measuring meaningful theories. Basically, it is the combination of Confirmatory Factor Analysis, Path Analysis and Regression Analysis.

The assumption generally considered in Structural Equation Model is that the relationship between observed and latent variables must be linear. Recently, making approriate modeling for non-linear relationship between observed and latent variables and for complex situations is considered to be much more important. When the data set is complex and is not normally distributed, the traditional methods do not always give the best results. Bayesian method, which is used in eliminating this problem, makes analyses using the sample covariance matrix rather than the raw data set.

In this study, Bayesian methods for Nonlinear Structural Equation Modeling was discussed in detail with all components and its theoretical structures were examined. Application data set was obtained from Turkey Statistical Institute of Life Satisfaction Survey-2013. Within the application, it was aimed to determine the most appropriate organization model for explaining the domicile satisfaction. For this purpose, five different suitable modeling were used, and the most suitable model was determined using the model comparison test.

Keywords: Bayesian Nonlinear Structural Equation Modeling, Confirmatory Factor Analysis, Latent Variables, Path Analysis, Structural Equation Model.

ÖNSÖZ

Bu çalışma Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü Öğretim Üyesi Prof. Dr. Aşır GENÇ yönetiminde yapılarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Doktora tezi olarak sunulmuştur.

Bu çalışma yedi bölümden oluşmaktadır. Çalışmanın Birinci Bölümünde, doğrusal ve doğrusal olmayan Yapısal Eşitlik Modeli (YEM), Bayesci YEM ve önceki çalışmalar hakkında genel bilgiler verilmiştir. İkinci Bölüm'de, Doğrusal olmayan Bayesci YEM için gerekli temel kavramlardan; path analizi, Faktör Analizi, Açıklayıcı Faktör Analizi, Doğrulayıcı Faktör Analizi ve Bayesci İstatistik kavramları verilmiştir. Üçüncü Bölüm'de, gözlenen değişkenlerle yapısal eşitlik modellerinin belirlenmesi, tanımlanması ve tahmini kavramlarından bahsedilmiştir. Dördüncü Bölüm'de, gizil değişkenli yapısal eşitlik modelleri için temel kavramlar verilmiştir. Beşinci Bölüm'de Bayesci YEM için; Bayesci faktör analizi, Bayesci Doğrusal YEM, Bayesci Doğrusal Olmayan YEM kavramları verilmiştir. Ayrıca bu bölümde Bayes Yönteminde Kullanılan Model Değerlendirme ve Karşılaştırma Testlerinden bahsedilmiştir. Altıncı Bölüm'de TÜİK'ten alınan 2013 YMA anketinden yararlanılarak test edilen 5 ayrı model için Bayesci Doğrusal Olmayan Yapısal Eşitlik Modeli Analizi yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar model değerlendirme ve karşılaştırma testleri yardımıyla irdelenmiştir. Yedinci Bölüm'de, tez çalışmasının sonuçları özetlenmiştir.

"Bayesci Doğrusal Olmayan Yapısal Eşitlik Modeli" adlı doktora tezimin seçimi ve çalışma süresince yardımını esirgemeyen, çalışmalarımda yol gösteren ve bilgileriyle bana yardımcı olan danışman hocam Prof. Dr. Aşır GENÇ'e desteklerinden dolayı TÜBİTAK ve TÜİK'e saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışma süresince bana verdikleri desteklerden dolayı Eşim Şerife Burcu ALTINDAĞ, Annem Hatice ALTINDAĞ, Babam Ramazan ALTINDAĞ ve Kardeşim Berkay ALTINDAĞ'a teşekkür ederim.

İLKAY ALTINDAĞ
KONYA-2015

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

ÇİZELGELER DİZİNİ ..... **x**

SİMGELER VE KISALTMALAR ..... **xi**

1. GİRİŞ VE KAYNAK ARAŞTIRMASI **1**

1.1. Giriş 1
1.2. Kaynak Araştırması 4

2. TEMEL KAVRAMLAR **7**

2.1. Path Analizi 7
2.1.1. Path Analizi için Temel Kavram ve Gösterimler 7
2.1.2. Path Sembol ve Diyagramları 8
2.1.3. Yapısal Model (Gizil Değişken Modeli) ve Ölçüm Modeli 11
2.1.4. Kovaryans ve Korelasyon Ayrıştırması 19
2.2. Açıklayıcı ve Doğrulayıcı Faktör Analizi 23
2.2.1. Açıklayıcı Faktör Analizi 23
2.2.2. Doğrulayıcı Faktör Analizi Modeli 25
2.3. Bayes Yaklaşımı 35
2.3.1. Önsel Dağılım 37
2.3.2. Markov Zinciri Monte Carlo Yöntemi 40
2.3.2. Metropolis Hastings (MH) Algoritması 41
2.3.3. Gibbs Örneklemesi 42

3. GÖZLENEN DEĞİŞKENLERLE YAPISAL EŞİTLİK MODELLERİ **44**

3.1. Gözlenen Değişkenli Yapısal Eşitlik Modelinin Belirlenmesi 44
3.2. Gözlenen Değişkenlerle Yapısal Eşitlik Modelinin Kovaryans Yapısı 47
3.3. Gözlenen Değişkenlerle Yapısal Eşitlik Modelinin Tanımlanması 48
3.3.1. *t*- Kuralı 49
3.3.2. B Yokluk Kuralı 50
3.3.3. Yineleme Kuralı 51
3.3.4. Rank ve Mertebe Koşulları 53
3.4. Gözlenen Değişkenlerle Yapısal Eşitlik Modellerinin Tahmini 58
3.4.1. En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi 60
3.4.2. Ağırlıklandırılmamış En Küçük Kareler Tahmin Edicisi 64
3.4.3. Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Tahmin Edicisi 65
3.4.4. Ağırlıklandırılmış En Küçük Kareler Tahmin Edicisi 67

4. GİZİL DEĞİŞKENLİ YAPISAL EŞİTLİK MODELLERİ **69**

4.1. Genel Modelin Özellikleri 69
4.3. Gizil Değişkenli Yapısal Eşitlik Modelinin Tanımlanması 71
4.3.1. *t*-Kuralı 73
4.3.2. İki Adım Kuralı 73
4.3.3. Çoklu Gösterge Çoklu Nedensellik Kuralı 74
4.4. Gizil Değişken Modelinin Standartlaştırılmış ve Standartlaştırılmamış Katsayıları 74
4.5. Ortalamalar ve Eşitlik Sabitleri 75
4.7.2. Betimleyici Uygunluk Ölçüleri 80
4.7.3. Model Karşılaştırmalarını Temel Alan Betimleyici Ölçüler 83

5. YAPISAL EŞİTLİK MODELİNDE BAYES TAHMİN YÖNTEMİ 87

5.1. Bayesci Faktör Analizi 90
5.2. Bayesci Doğrusal Yapısal Eşitlik Modeli 93
5.3. Doğrusal Olmayan Yapısal Eşitlik Modeli 96
5.4. Bayesci Doğrusal Olmayan Yapısal Eşitlik Modeli 101
5.4.1. Bayesci Doğrusal Olmayan YEM'de Sonsal Simülasyon İçin Gibbs Örneklemesi 103
5.4.2. Bayesci Doğrusal Olmayan YEM'de Tam Koşullu Dağılım 104
5.5. Bayes Yönteminde Kullanılan Model Değerlendirme ve Karşılaştırma Testleri 107
5.5.1. Bayes Faktörü 107
5.5.2. AIC (Akaike Bilgi Kriteri) 109
5.5.3. BIC (Bayes Bilgi Kriteri) 109
5.5.4. DIC (Sapma Bilgi Kriteri) 110
5.5.5. Sonsal Öngörü Değeri - *ppp* değeri (Posterior Predictive p-Value) 110

6. UYGULAMA 113

6.1. Araştırmanın Amacı ve Kapsamı 113
6.2. Örnekleme Planı ve Verilerin Toplanması 113
6.3. Gizil Değişkenler için Ölçüm Modeli 118
6.3.1. Ölçüm Modeli İçin Ayrımsama Geçerliliği 121
6.4. Yapısal Eşitlik Modelinin Oluşturulması ve Analiz Sonuçları 122

7. SONUÇ VE ÖNERİLER 139

KAYNAKLAR 142

ÖZGEÇMİŞ 150

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Bir path diyagram örneği 10
Şekil 2.2. Yapısal Model için path diyagram örneği 12
Şekil 2.3. Yapısal Model için path diyagram örneği 12
Şekil 2.4. Dışsal Gizil Değişken İçin Ölçüm Modeli 16
Şekil 2.5. Dört gösterge değişkenli tek gizil değişkene ait path diyagramı 20
Şekil 2.6. Sanayileşme ve siyasal demokrasi modeline ilişkin path diyagramı 22
Şekil 2.7.Açıklayıcı faktör analizi modeli (Üç faktörlü model) 24
Şekil 2.8. Doğrulayıcı faktör analizi modeli (Üç Faktörlü Model) 26
Şekil 2.9 Dışsal gizil değişkenli DFA modeli ve temel gösterimler 29
Şekil 2.10. İçsel gizil değişkenli DFA modeli ve temel gösterimler 30
Şekil 3.1. Yinelemeli yapısal eşitlik modelinin üç örneği 45
Şekil 3.2. Yinelemesiz yapısal eşitlik modeline ilişkin iki örnek 46
Şekil 4.1. İki gizil değişkenli bir model 72
Şekil 5.1. Doğrusal Olmayan YEM için path diyagramı gösterimi 100
Şekil 6.1. Test edilen ölçüm modeli path diyagramı gösterimi 119
Şekil 6.2. Ölçüm Modeli katsayıları path diyagramı gösterimi 122
Şekil 6.3. Model 3'e ilişkin gizil değişkenler arasındaki yapısal model 136
Şekil 6.4. Model 3'e ilişkin katsayılar ve path diyagramı gösterimi 138

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1. Path analizinde kullanılan temel semboller 9
Çizelge 2.2. Gizil Değişken Modeli için Notasyon 14
Çizelge 2.3. Ölçüm Modellerinde Kullanılan Notasyonlar 19
Çizelge 2.4. Dışsal gizil değişkenli DFA modeli ve temel gösterimler 29
Çizelge 2.5. İçsel gizil değişkenli DFA modeli ve temel gösterimler 30
Çizelge 2.6. Farklı dağılımlar için Jeffrey önselleri 39
Çizelge 2.7. Farklı dağılımlar eşlenik önseller 39
Çizelge 3.1. Ölçme hatalarının olmadığı varsayımı altında gözlenen değişkenli yapısal eşitlikler için tanımlama kuralları 58
Çizelge 4.1. ξ ve η 'nın η , y ve x Üzerindeki Doğrudan, Dolaylı ve Toplam Etkileri 78
4.7.2. Betimleyici Uygunluk Ölçüleri 80
4.7.3. Model Karşılaştırmalarını Temel Alan Betimleyici Ölçüler 83
Çizelge 5.1. Bayesci Yapısal Eşitlik Modelinde Kullanılan Önsel ve Sonsal Dağılımlar 90

Çizelge 5.2. Çeşitli Ürün Göstergesi Yöntemlerine ilişkin Parametre Kısıtları ve Varsayımları 99
Çizelge 5.3. Bayes faktörü değeri için model seçimi 108
Çizelge 6.1. Uygulamaya Alınan Fertlerin Cinsiyete Göre Dağılımı 114
Çizelge 6.2. Uygulamaya Alınan Fertlerin Medeni Duruma Göre Dağılımı 114
Çizelge 6.3. Uygulamaya Alınan Fertlerin Yaşadığı Şehirlere Göre Dağılımı 115
Çizelge 6.4. Gizil Değişkenler ve Gösterge Değişkenleri 116
Çizelge 6.5. Uygulamaya Alınan Fertlerin Yaşam Memnuniyeti Soruları İçin Tanımlayıcı İstatistikler ve Tek Değişkenli Normallik Testi 117
Çizelge 6.6. Uygulamaya Alınan Fertlerin Yaşam Memnuniyeti Soruları İçin Mardia'nın Çarpıklık, Basıklık Katsayıları ve Çok Değişkenli Normallik Testi 117
Çizelge 6.7. Ölçüm Modeli için Gösterge ve Belirlilik Katsayıları 120
Çizelge 6.8. Gizil Değişkenler Arasındaki Korelasyonlar İçin %95 Güven Aralığı 121
Çizelge 6.9. Model 1 için Gösterge ve Belirlilik Katsayıları 126
Çizelge 6.10. Model 2 için Gösterge ve Belirlilik Katsayıları 128
Çizelge 6.11. Model 3 için Gösterge ve Belirlilik Katsayıları 130
Çizelge 6.12. Model 4 için Gösterge ve Belirlilik Katsayıları 132
Çizelge 6.13. Model 5 için Gösterge ve Belirlilik Katsayıları 134
Çizelge 6.14. Test edilen 5 Modele İlişkin BIC, DIC, AIC ve *ppp* Değerleri 135
Çizelge 6.15. Model 3'e ilişkin Yapısal Eşitlikler ve Tahmin Değerleri 136

7. SONUÇ VE ÖNERİLER 139

KAYNAKLAR 142

ÖZGEÇMİŞ 150

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

Cov	:Kovaryans
$diag$	:Matrisin Esas Köşegen Elemanları
tr	:Matrisin izi
Var	:Varyans
χ^2	:Ki-Kare

Kısaltmalar

ADF	:Asymptotically Distribution-Free (Asimptotik Dağılım gerektirmeyen
AFA	:Açıklayıcı Faktör Analizi
AIC	: Akaike Bilgi Kriteri
AGFI	: Adjusted Goodness-of-fit Index (Düzeltilmiş Uyum İyiliği İndeksi)
BIC	: Bayes Bilgi Kriteri
CFI	: Comparative Fit Index (Karşılaştırmalı Uyum İndeksi)
CPI	: Constrained Product Indicator (Kısıtlı Ürün Göstergesi)
ÇHKM	: Çalışma Hayatı ve Kazançtan Memnuniyet
ÇGÇN	: Çoklu Gösterge Çoklu Nedensellik Kuralı
DFA	: Doğrulayıcı Faktör Analizi
DIC	: Sapma Bilgi Kriteri
FA	: Faktör Analizi
EYSYA	: Highest Posterior Density Region (En Yüksek Sonsal Yoğunluk Aralığı)
EKK	: En Küçük Kareler
GAPI	: Generalized Appended Product Indicator (Genelleştirilmiş Ek Ürün Göstergesi)
GEKK	: Genelleştirilmiş En Küçük Kareler
GFI	: Goodness of fit Index (Uyum İyiliği İndeksi)
İM	: İkametgâh Memnuniyeti
KİM	: Kişisel İlişkilerden Memnuniyet
KHM	: Kamu Hizmetlerinden Memnuniyet
LISREL	: Linear Structural Relationships
MC	: Monte Carlo
MCMC	: Markov Chain Monte Carlo (Markov Zinciri Monte Carlo)
MH	: Metropolis Hastings
ML	: En Çok Olabilirlik
NFI	: Normed Fit Index (Normlaştırılmış Uyum İndeksi)
NNFI	: Non-Normed Fit Index (Normlaştırılmamış Uyum İndeksi)
RMSEA	: Root Mean Square Error of Approximation (Yaklaşık Hataların Ortalama Karekökü)
RMR	:Root Mean Square Error (Hata Kareler Ortalamasının Karekökü)
SRMR	:Standardized Root Mean Square Residual (Standartlaştırılmış Hata Kareler Ortalamasının Karekökü)
PGFI	: Parsimony Goodness-of-fit Index (Tutarlı Uyum İyiliği İndeksi)

PNFI : Parsimonious Normed Fit Index (Tutarlı Normlaştırılmış Uyum İndeksi)

ppp değeri : Posterior Predictive p-value (Sonsal Öngörü Değeri)

SIC : Schwarz Bilgi Kriteri
TÜİK : Türkiye İstatistik Kurumu
UPI : Unconstrained Product Indicator (Kısıtsız Ürün Göstergesi)
YMA : Yaşam Memnuniyeti Anketi
YEM : Yapısal Eşitlik Modeli

1. GİRİŞ VE KAYNAK ARAŞTIRMASI

1.1. Giriş

Yapısal Eşitlik Modeli (YEM) gözlenen ve gizil değişkenler arasındaki nedensel ve karşılıklı ilişkilerin bir arada bulunduğu modellerin test edilmesi için kullanılan kapsamlı istatistiksel bir yaklaşımdır. Pek çok bilim alanında kullanımı olan YEM, anlamlı teorilerin test edilmesi ve ölçme için kapsamlı bir yöntem sağlar. YEM, bir konu ile ilgili yapısal kuramın çok değişkenli analizine hipotez testi yaklaşımı getiren istatistiksel yöntemler dizisi de denilebilir. Bu yapısal kuram, birçok değişken üzerinde gözlemlenen nedensel süreçleri göstermektedir (Hoyle,1995; Raykov ve Marcoulides, 2006; Çelik, 2009).

Birçok istatistiksel yöntemde ölçüm hatalarından kaynaklanan sorunlar, YEM'e yönelimi artırmıştır. Geleneksel yöntemlerde ölçüm hatası ve verinin istatistiksel çözümlemesi sonucunda hesaplanan hatalar ayrı ayrı ele alınmaktadır. Yapısal Eşitlik modelleme teknikleri veriyi istatistiksel olarak çözümlerken ölçüm hatalarını açıkça hesaba katmaktadır.

Bollen (1989), yapısal eşitlik modellemesinin tarihsel seyrinde başlıca üç bileşeninin bulunduğunu ifade etmektedir, bunlar: (1) path analizi, (2) yapısal model ve ölçüm modellerinin kavramsal sentezi ve (3) genel tahmin süreçleridir. YEM' in tarihsel gelişimini açıklamaya çalışmak çok kolay değildir. İlişikli modeller tarihsel bir düzende gelişme göstermiştir, bu modeller; regresyon analizi, path analizi, doğrulayıcı faktör analizi (DFA) ve yapısal eşitlik modellemesidir (Çelik, 2009).

Günümüzde uygulanan, YEM'i destekleyen istatistiksel teoriler, 1970'lerin başlarında ortaya çıkmıştır (Jöreskog, 1973; Keesling, 1972; Wiley, 1973) ve birkaç yıl içerisinde sosyal bilimler araştırmacılarının dikkatini birçok araştırma alanında çekmekte gecikmemiştir (Bielby ve Hauser, 1977; Jöreskog ve Sörbom, 1979).

YEM modelleri araştırmacılara, değişkenler arasında doğrudan ve dolaylı etkileri belirleme olanağı sağlamaktadır. YEM kuramsal yapılar arasındaki etkileşimleri, yapılara ölçme hatalarını ve hatalar arasındaki ilişkileri dâhil ederek modelleyen çok değişkenli istatistiksel bir tekniktir. YEM, Eşanlı eşitlik modelleri veya çok değişkenli regresyon modelleri olarak ta tanımlanmaktadır (Bollen, 1989; Schumacker ve Lomax, 2004; Kline, 2005; Çelik, 2009).

Sosyal ve davranışsal bilimlerde araştırılan soruların tanımlanma ve karmaşıklığındaki artış (Hoyle, 1995) ve kullanıcı dostu bilgisayar yazılımlarının (Bentler, 1992; Jöreskog ve Sörbom, 1993; Muthén 1988) ortaya çıkması, araştırma hipotezlerinin testinde makul bir yaklaşım olarak YEM'e olan ilginin artmasına sebep olmuştur (Tezcan, 2008).

Zaman içinde YEM yazılım programlarının giderek kullanıcı dostu bir görünüm kazanmasıyla, yöntemin kullanımı ve yaygınlığı artmıştır. Örneğin, LISREL yazılımında kullanıcılar 1993'e kadar, modellerini programa sorgu komutları yazarak tanımlamak zorunda kalmıştır. Bu durumda araştırmacılar yardıma ihtiyaç duymuş, çünkü programı kullanabilmek için karmaşık kodlama ve YEM sorgu dizimi bilgisine ihtiyaç duyulmuştur. Artık YEM yazılım programları daha basit kullanışlı ve Windows tabanlı diğer paket programlarla benzer özelliklere sahiptir. Aşırı karmaşık bir yapısal eşitlik modeli bile programlardaki çizim modülü ile oluşturulan şekiller yardımı ile kolaylıkla programa tanımlanabilmektedir (Schumacker ve Lomax, 2004).

YEM'in popülerleşmesinin bir diğer sebebi, araştırmacıların çoklu sayıda gözlenmiş değişkenler ile araştırmalarını aydınlatma gereksinimine daha fazla ihtiyaç duymaları olarak tanımlanabilmektedir. Temel istatistiksel yöntemlerin aksine YEM'de ölçülemeyen kavramların modele yerleştirilebilmesi yöntemin ilgi çekiciliğini artırmıştır (Tezcan, 2008).

YEM ile klasik yaklaşımların (EKK, MLE) çoğunun önemli bir ortak özelliği hepsinin doğrusal modeller temelli olmasıdır. Bu nedenle YEM kullanıldığında sıklıkla başvurulan varsayım; gözlenen ve gizil değişkenler arasındaki ilişkilerin doğrusal olduğu yönündedir.

Ancak son zamanlarda, gözlenen ve gizil değişkenler arasındaki doğrusal olmayan ilişkiler ve bazı karmaşık durumlar için doğru modeller kurulmasının daha çok önemli olduğu kabul edilmektedir. Bu alanda öncü olan birçok araştırmacı vardır. Örneğin, Busemeyer ve Jones (1993), Bollen Paxton, (1998), Jonsson (1998) ve Kenny ve Judd, (1984), Bagozzi ve ark. (1992), Schumacker ve Marcoulides (1998), bu alanda çeşitli uygulamalı araştırmalar yapmıştır. Bu çalışmalarda gizil faktörlerin karesel ve etkileşim etkilerinin önemini ortaya koymuşlardır (Lee ve Zhu, 2002).

Kenny ve Judd tarafından 1984 yılında doğrusal olmayan yapısal eşitlik modelinde parametrelerin tahminlerine ilişkin ilk istatistiksel yöntem olan "ürün gösterge" (PI) yöntemini önermiştir. Bu model doğrusal ölçüm modeli ile özel bir kuadratik veya çapraz ürün yapısal modeli olarak ele alınmıştır. Kenny ve Judd'un (1984)

temel fikri var olan değişkenlerden yeni “gözlenen değişkenler” üretmekti ve daha sonra onlara modelde doğrusal olmayan terimlerin ek göstergeleri kullanarak "gözlenen değişkenler" yaratmaktı ardından bu yeni değişkenler kullanılarak modeldeki doğrusal olmayan terimler modele dâhil edilerek “ek gösterge” olarak ele alınmıştır (Wall, 2007). Bu yöntem kovaryans matris modeli üzerinde zorlukla hesaplanan kısıtlamaları barındırıyordu. Zahmetli modelleme kısıtlamalara rağmen, Kenny ve Judd (1984) ürün göstergesi yöntemi mevcut doğrusal yapısal eşitlik modelleme yazılım programları ile örneğin LISREL programı ile uygulamak mümkün olmuştur (Wall, 2007).

Doğrusal olmayan yapısal eşitlik modelinin ve gizil değişkenler ve hataların dağılım varsayımlarının parametrik formu göz önüne alındığında, bir olabilirlik fonksiyonu yazılabilir ve dolayısıyla parametreler için teorik olarak en çok olabilirlik (ML) veya Bayes tahmini yapmak mümkündür (Wall, 2007).

Modeldeki doğrusal olmama durumunun analitik formun kapalı bir şekilde olmasını engellemesinden dolayı yakın zamana kadar hesaplama zorluğundan dolayı bu tarz çalışmalara ilgi fazla olmamıştır. Ancak son 25 yılda güçlükle hesaplanan olabilirlik fonksiyonlarının ve sonsal dağılımdan zor bir şekilde üretilen sayıların daha kolay hesaplanması için istatistiksel hesaplama yöntemlerinde büyük gelişmeler olmuştur. Bu gelişmelerle birlikte, ML ve Bayes yöntemleri sıklıkla kullanılmış ve özellikle doğrusal olmayan yapısal eşitlik modellerinin farklı formlarının tahmini üzerinde durulmuştur. ML yöntemini kullanan başlıca araştırmacılar; Klein ve ark. (1997), Klein ve Moosbrugger (2000),Lee ve Zhu (2002), Lee ve Song (2003), Bayes yöntemi alanında çalışma yapan başlıca araştırmacılar ise; Arminger ve Muthen (1998), Zhu ve Lee (1999), Lee ve Zhu (2000), Lee (2007), Song ve ark. (2009), Yang ve Dunson (2010), Song ve ark. (2011), Song ve Lee (2012a), Song ve Lee (2012b), Hall ve ark. (2014), şeklinde literatürde rastlanmaktadır.

YEM analizi, gözlenen kovaryans matrisi ile önerilen kovaryans yapısının birbiriyle uyumunu dikkate almaktadır. YEM analizinde ve gözlenen veri seti normal dağılıma uygunluk gösterdiğinde ve büyük örneklem hacimlerinde klasik yöntemler ile iyi sonuçlar elde edilmektedir. Ancak klasik yöntemlerde (MLE, EKK) birçok karmaşık durumlarda ciddi zorluklarla karşı karşıya kalınmaktadır. Örneğin kovaryans yapısının hesaplanmasının zor olduğu durumlarda veya veri yapısının kompleks olduğu durumlarda klasik yöntemler iyi sonuçlar vermeyebilir (Song ve Lee, 2012a).

Son zamanlarda, YEM analizinde Bayes yönteminin kullanılması başta sağlık ve sosyo-psikolojik alanlarında olmak üzere birçok araştırma için yararlı olmuştur. Bayes

yönteminde ham gözlemlerin yerine örneklemin kovaryans matrisinin kullanılması birtakım avantajlar sağlamaktadır. Bu avantajlar:

I. Bayes yaklaşımı sonuçları elde etmek için gözlenen verilerin bilgilerine ek olarak önsel bilgi kullanımına izin verir.
   i. Uyum iyiliği ve model karşılaştırma istatistikleri için daha iyi sonuçlar verir
   ii. Sonsal dağılımın ortalama ve yüzdelik gibi diğer kullanışlı istatistikleri elde edilir.
II. Bayes Yöntemi küçük örneklem hacminde daha uygun sonuçlar vermektedir (Dunson, 2000; Lee ve Song, 2004).

biçimindedir. Bu avantajlarından dolayı Bayes yöntemi YEM analizi için oldukça popüler bir yaklaşımdır.

Bu tez çalışmasının amacı, gözlenen değişkenlerle gizil değişkenler arasındaki doğrusal olmayan ilişkileri açıklamaya yardımcı olan Doğrusal Olmayan Yapısal Eşitlik Modelinde Bayes yönteminin nasıl kullanıldığını anlatmak ve bu yöntemle doğrusal olmayan yapısal eşitlik modeli analizi uygulamasını gerçekleştirmektir. Tezin analiz aşamasında Bayesci doğrusal olmayan YEM analizi için uygulama verisi olarak Türkiye İstatistik Kurumundan (TÜİK) alınan 2013 yılına ait Yaşam Memnuniyeti Araştırması (YMA-2013) anket çalışmasından yararlanılmıştır.

1.2. Kaynak Araştırması

Bayesci Yapısal Eşitlik Modellemesi alanındaki ilk çalışmalar Arminger ve Muthen (1998) ve Lee ve Zhu (2000) tarafından yapılmıştır. Önerilen Bayesci YEM analizinde tahminler için MCMC (Markov Chain Monte Carlo) yöntemi kullanılmaktadır.

Scheines ve ark. (1999) makalelerinde, YEM'de Bayes tahmininden ve model testinden bahsetmişlerdir.

Lee ve ark. (2003) makalelerinde, doğrusal olmayan yapısal eşitlik modeli için ihmal edilebilen kayıp gözlem barındıran veriler için en çok olabilirlik yönteminden elde edilen EM algoritması geliştirmişlerdir. Koşullu beklenen değerleri elde etmek için kullanılan integrallerin hesaplama zorluğundan kaçınmak için Gibbs örnekleme ve Metropolis-Hastings (MH) algoritmasını birleştiren melez bir algoritma önermişlerdir.

Lee ve ark. (2004) makalelerinde, kayıp verileri olan doğrusal olmayan yapısal eşitlik modelinde ikincil düzensizliklerin yerel etkisini değerlendirmek için bir yöntem önermişlerdir. Çalışmanın temel fikri normal eğri elde edilmesinde Zhu ve Lee'nin (2002) eksik gözlem içermeyen tam veri seti için EM algoritması ile ilgili log-olabilirlik

fonksiyonunun koşullu beklenen değer yaklaşımını uygulamaktır. Gizil değişkenler yardımıyla elde edilen tanısal ölçümlere ulaşmak için Gibbs örneklemi ve MH algoritmasından yararlanılmıştır.

Lee ve Song (2004) makalelerinde, Bayesci doğrusal olmayan YEM analizi uygulamasını felçli hastaların yaşam kalitesi değişkenlerini dikkate alarak gerçekleştirmişlerdir.

Wall ve Amemiya (2007) makalelerinde, mevcut yaklaşımlar için bazı doğrusal olmayan modeller için yapısal eşitlik modeli tasarlamışlardır. Genel doğrusal olmayan yapısal eşitlik modeli analizi için istatistiksel bir formülasyon tanıtmış ve gizil değişken dağılımları için zayıf varsayımlar altında geçerli olan genel uygun bir yöntem geliştirmişlerdir. Yeni yöntem kullanılarak çok terimli doğrusal olmayan yapısal eşitlik modeli bir örnek ile ele alınmıştır.

Lee ve ark. (2007) makalelerinde, YEM'de Bayes tahminlerinin ML tahminleri ile aynı optimal istatistiklere sahip olduğunu göstermişlerdir.

Palomo ve ark. (2007) makalelerinde, Bayesci YEM'in endüstri ve demokrasi alanında uygulamasını gerçekleştirmişlerdir.

Wall (2007) makalesinde, YEM için Bayes ve ML yöntemleri açıklanmış ve doğrusal olmayan YEM analizi için 2 örnek üzerinde sonuçlar elde edilmiştir.

Lee (2007) çalışmasında, Bayesci yaklaşım için; doğrusal ve doğrusal olmayan faktör analizi ve YEM yöntemlerinden, kayıp veriye sahip YEM çalışmalarından, sürekli, sıralı ve kategorik veriye sahip YEM analizlerinden, Bayesci model değerlendirme ve karşılaştırma testlerinden bahsetmişlerdir.

Tang ve ark. (2009) makalelerinde, üretici dağılım modeli için belirgin ve kayıp gözlemlerin ihmal edilemediği durumda doğrusal olmayan yapısal eşitlik modellerini analiz etmek için Bayes yöntemini geliştirmişlerdir. Kayıp gözlemlerin ihmal edilemediği teknikler bir lojistik regresyon modeli ile belirtilmiştir. Gibbs örneklemesi ve MH algoritmasını birleştiren hibrid bir algoritma Bayesci yapısal parametre tahminlerini elde etmek için kullanılmıştır ve modeli karşılaştırmak için Bayes faktörünün hesaplanmasında path analizi kullanılmıştır. Bir simülasyon çalışması ve gerçek bir örnek veri seti ile yeni geliştirilen Bayes yöntemi açıklanmıştır.

Wang ve Fan (2010) makalelerinde, Monte Carlo Markov Chain (MCMC) yönteminden yararlanarak zaman serileri alanında Bayesci YEM modeli analizini gerçekleştirmişlerdir.

Jiang ve ark. (2010) makalelerinde, tahmini ve ölçülerek elde edilmiş zaman serisi verilerinin belirsizlik dikkate alınarak, dinamik sistemlerin hiyerarşik model değerlendirmesinde yeni bir Bayesci doğrusal olmayan yapısal denklem modellemesi yaklaşımı sunmuşlardır. Doğrusal olmayan, gizil değişkenler ile genelleştirilmiş yapısal eşitlik modellemesi yani çok değişkenli hiyerarşik model değerlendirmesi, sistem düzeyinde veri hesaplama modeli ve sistem düzeyinde düşük seviyeli veri ilişkileri, iki takım modeli halinde sunulmuştur.

Cai ve ark. (2008), makalelerinde, iki veya daha çok gözlenen veriyle ilişkili olan çok boyutlu kavramın belirlenmesinde yaygın bir şekilde kullanılan gizil değişkenlerden bahsetmişlerdir. Çalışmalarında yapılan çalışma genotip ve fenotip gizil değişkenlerin ve bunların etkileşimlerinin analizine duyulan büyük ihtiyaç dikkate alınarak tamamlanmıştır.

Kelava ve Nagengast (2012) makalelerinde, gizil kestirim değişkeni normal dağılmadığı durumda gizil doğrusal olmayan etkilerin tahmini için Bayesci YEM analizini göstermişlerdir.

Song ve Lee (2012a) çalışmasında Bayesci doğrusal ve doğrusal olmayan YEM'den bahsetmişler ve bir simülasyon çalışmasıyla doğrusal olmayan Bayesci YEM analizi uygulaması gerçekleştirmişlerdir.

Song ve Lee (2012b) çalışmalarında, Bayesci yaklaşım için; doğrusal ve doğrusal olmayan DFA ve YEM yöntemlerinden, kayıp veriye sahip YEM çalışmalarından, sürekli, sıralı ve kategorik veriye sahip YEM analizlerinden, Bayesci model değerlendirme ve karşılaştırma testlerinden bahsetmişlerdir.

Yanuar ve ark. (2013) makalelerinde, sağlık endeksi verisi için ayrı ayrı klasik YEM ile Bayesci YEM analizini gerçekleştirmiştir.

Yanuar (2014) makalesinde, Gibbs örneklemesi için koşullu dağılımlar bilindik dağılımlardan alınması gerekmekte olduğunu ve bu durumda algoritmanın oldukça etkin olduğunu göstermiştir.

Hall ve ark. (2014) makalelerinde, zaman serisi alanında neo-klasik büyüme modelleri için Bayesci YEM analizinden bahsetmişlerdir.

Altındağ ve Genç (2015) makalelerinde, Bayesci doğrusal olmayan YEM'den bahsetmişler ve Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi öğrencilerine uygulanan benlik saygısı ölçeği ile Bayesci doğrusal olmayan YEM analizi gerçekleştirmişlerdir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Path Analizi

Path analizi, incelenen değişkenler arası nedensel ve nedensel olmayan ilişkilerin gösterildiği diyagramlar ve bu değişkenler arası ilişkilerin kovaryans ve korelasyonların hesaplandığı yapısal denklemler setinin tahminini kapsamayan bir yöntem olarak tanımlanmaktadır. Bu bölümde YEM analizine kullanılan path analizi modeli yapısından bahsedilecektir.

2.1.1. Path Analizi için Temel Kavram ve Gösterimler

Bir dizi gözlenmiş değişken arasındaki yapısal ilişkilerin modelleme sistemi genellikle path analizi olarak bilinir (Kaplan, 2000). Yapısal eşitlik modellemesinin gelişim süreci path analizinin genetik çalışmalarda kullanılmak üzere geliştirilmesiyle başlamaktadır. Sewall Wright path analiziyle ilgili ilk çalışmalarını 1918'de yayınlamaya başlamış, sonrasında 1921'de bilinen anlamıyla path analizini olgunlaştırmış ve temel kurallarını belirlemiştir (Özkoç, 2011).

Sewall Wright'in (1918, 1921)'de önerdiği path analizi yöntemi, üç temel bileşenden oluşmaktadır. Bunlar sırası ile

1. Path diyagramı
2. Kovaryans ve Korelasyonların Ayrıştırılması
3. Doğrudan, Dolaylı ve Toplam Etkilerin Ayrıştırılması

şeklinde ifade edilmektedir (Bollen, 1989).

1960'lı yılların sonunda ve 1970'li yılların başında path analizinin iktisat ve sosyoloji başta olmak üzere sosyal bilimlerde kullanımı başlamıştır (Bollen, 1989; Özkoç, 2011). Ekonometride ilk çalışmanın Simon (1954) tarafından sahte ve dolaylı nedensellik çalışmalarında yapıldığı görülmektedir. Bu yıllarda ilk sosyoloji uygulaması Blalock (1961) tarafından gerçekleştirilmiştir. Bu analiz için çok uzun süre isim kargaşası yaşanmış olsa da tek yönlü bir nedensellik akışının olduğu ve her bir kavramsal değişkenin kusursuz olarak ölçüldüğü modeller Duncan tarafından Path Analiz Modelleri olarak isimlendirilmişlerdir (Duncan, 1975; Özkoç, 2011). Path analizinin gelişmesine yönelik diğer önemli çalışmaların Goldberger (1972) ve Blalock (1961, 1963, 1964) tarafından gerçekleştirildiği görülmektedir (Bollen, 1989; Yılmaz ve Çelik, 2009).

Path analizi, çoklu regresyon modelinin mantıksal açılımıdır. Path analizi yöntemi hala çoklu gözlenmiş değişkenleri içeren modelleri kapsamasına rağmen, herhangi bir

sayıda bağımsız ve bağımlı değişken ve herhangi bir sayıda eşitlik barındırabilir. Bu yüzden path analizi, gözlenen değişkenler kullanarak birçok çoklu regresyon eşitliğine ihtiyaç duyar (Schumacker ve Lomax, 2004)

Path analizi modeli çoklu regresyon analizi ile benzerlikler taşısa da pek çok açıdan çoklu regresyon analizine üstünlük sağlamıştır. Regresyon analizinde yalnızca nedensel ilişkiler ele alınırken, path analizinde nedensel ve nedensel olmayan ilişkiler ortaya konulabilmektedir. Ayrıca path analizi modelleri ilişkilerin ortaya konmasından çok, var olan ilişkilerin teorik yapıların test edilmesi fikrine dayanmaktadır (Schumacker ve Lomax, 2004).

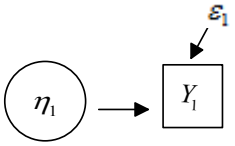
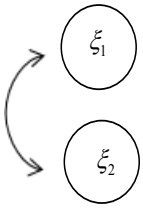
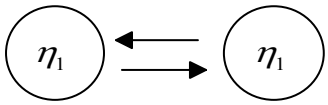
Path analizi modellerinde çoklu regresyon analizindeki bağımlı bağımsız değişken ayrımı yerine içsel ve dışsal değişken kavramları kullanılmaktadır. Path analizinde model belirlenirken dışsal değişkenlerin içsel değişkenler üzerindeki etkilerinin yönünün belirlenmesi temel alınarak analizler gerçekleştirilir. Path katsayıları dışsal değişkende meydana gelen bir birimlik artışın içsel değişkenlerin ortalamasında ne kadar değişim meydana getirdiği şeklinde yorumlanmaktadır. Ayrıca path analizinde yol katsayıları standartlaştırılmış çoklu regresyon katsayıları olarak ifade edilmektedirler (Loehlin, 1992; Geyik, 2014).

Path analizi çalışmalarının temel ve en önemli aşaması path diyagramının oluşturulmasıdır. Bu diyagram istatistikî analiz için gerekli olmamasına rağmen değişkenler arası ilişkilerin yönünü ve yapısını ortaya koyması açısından son derece önemli ve faydalı bir araçtır. Burada önemli olan araştırmacının ilgilenilen konuya ilişkin teorik bilgisinin tam olması ve konuya çok hâkim olması gerekmektedir. Path analizinde model belirlenirken dışsal değişkenlerin içsel değişkenler üzerindeki etkilerinin yönü belirlenerek analiz yapılır. Değişkenler arası ilişkilerin yanlış yansıtılması analizin sonucunda toplam etkilerin hesaplanmasında sapmalara neden olacaktır (Geyik, 2014).

2.1.2. Path Sembol ve Diyagramları

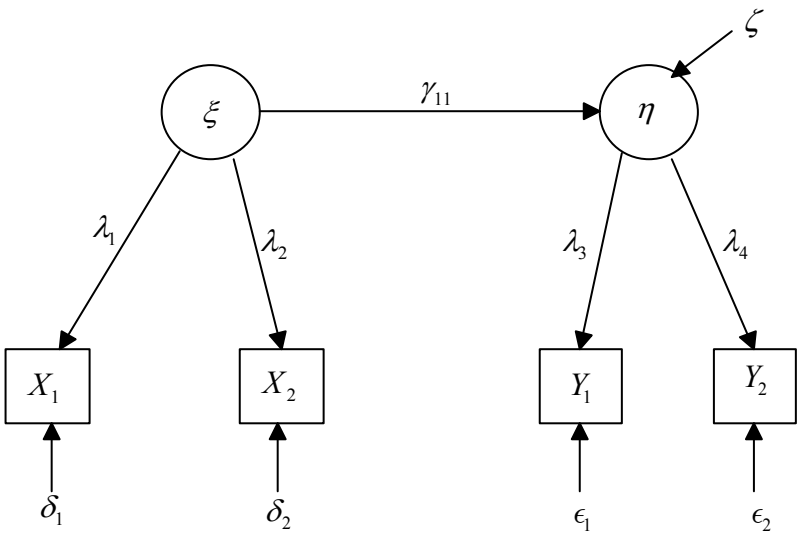
Path diyagramı eşanlı denklem sisteminin bir resimsel temsilini göstermektedir. Path diyagramı önemli avantajlarından biri değişkenler arasındaki ilişkilerin resmini sunuyor olmasıdır. Birçok araştırmacı için değişkenler arası ilişkilerin eşitlikler yerine path diyagramından daha net anlaşıldığını söylemişlerdir (Bollen, 1989). Path analizinde kullanılan semboller ve gösterimler aşağıdaki Çizelge 2.1'de verilmiştir.

Çizelge 2.1. Path analizinde kullanılan temel semboller

Semboller	Açıklama
	Dikdörtgen veya kare kutu, gözlenen değişken
	Daire veya Elips, gizil (latent) değişken
	Gizil değişkenden gözlenen değişkene olan nedensel etkiyi gösterir. ε_1 hata terimidir.
	İki bağımsız gözlenen değişken arasındaki eğri değişkenler arasındaki kovaryansı ifade eder
	İki değişkeni birbirine bağlayan tek yönlü oklar, iki değişken arasında bilgi akışı veya neden sonuç ilişkisi olduğunu gösterir.

Bollen, 1989.

Path modelleri, yapısal eşitlik modellerinde kullanılan belli ortak çizim kurallarına tabidir. Gözlenebilir değişkenler kutuyla veya dikdörtgenle çevrilmişlerdir. Bir gözlenen değişkenden diğer bir gözlenen değişkene çizilen doğrular direkt etkileri ifade eder, başka bir ifadeyle bir değişkenin diğer bir değişken üzerindeki direkt etkisini gösterir. İki bağımsız gözlenen değişken arasındaki eğri ve çift yönlü doğru kovaryansı ifade eder ki bu iki değişkenin ilişkili olduğu anlamına gelir. Sonunda, her bağımlı değişkenin, doğru bağımlı değişkeni gösteren temsil edildiği bir çember bulunur. Değişkenlerin birbirleriyle ilişkilerinde açıklanamayan kısım "hata" olarak tanımlanır (Schumacker ve Lomax, 2004).



Şekil 2.1. Bir path diyagram örneği

Şekil 2.1'de verilen path diyagramının eşanlı denklem sitemi ve varsayımları;

$$\eta = \gamma_{11}\xi_1 + \zeta \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1\xi + \delta_1 \qquad x_2 = \lambda_2\xi + \delta_2 \\ y_1 &= \lambda_3\eta + \epsilon_1 \qquad y_2 = \lambda_4\eta + \epsilon_2 \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} &Cov(\xi,\delta_1)=0 \quad Cov(\xi,\delta_2)=0 \quad Cov(\xi,\epsilon_1)=0 \quad Cov(\xi,\epsilon_2)=0 \\ &Cov(\xi,\zeta)=0 \quad Cov(\eta,\epsilon_1)=0 \quad Cov(\eta,\epsilon_2)=0 \quad Cov(\delta_1,\delta_2)=0 \\ &Cov(\delta_1,\epsilon_1)=0 \quad Cov(\delta_1,\epsilon_2)=0 \quad Cov(\delta_2,\epsilon_1)=0 \quad Cov(\delta_2,\epsilon_2)=0 \\ &Cov(\epsilon_1,\epsilon_2)=0 \quad Cov(\delta_1,\zeta)=0 \quad Cov(\delta_2,\zeta)=0 \quad Cov(\epsilon_1,\zeta)=0 \\ &Cov(\epsilon_2,\zeta)=0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

olarak gösterilmektedir.

İçsel değişkenler, kendilerine gösteren tek yönlü oklara sahiptirler. Dışsal açıklayıcı değişkenler önceden belirlenmiş gibi ele alınır ve sadece modelin dışında tutulan değişkenlerden etkilenirler. Bunlar genellikle tek yönlü oka sahip değildirler, bunun yerine analiz edilmemiş ilişkileri göstermek için eğri çizgiler (iki yönlü eğri oklar) tarafından bağlanırlar. Rasgele hatalar, içsel değişkenlerdeki ihmal edilen nedenleri gösterirler ve bunlar genellikle içsel değişkenlerden bağımsız olarak ele alınırlar ancak ilişkili de olabilirler (Bollen, 1989; Hair, ve ark., 1998; Raykov ve Marcoulides, 2006; Çelik, 2007).

2.1.3. Yapısal Model (Gizil Değişken Modeli) ve Ölçüm Modeli

Teorik model geliştirildikten ve path diyagramı oluşturulduktan sonra, modele ait denklemlerin belirlenmesi gerekmektedir. Bu durum, yapısal denklemlerin oluşturulması, gizil değişkenleri ölçen değişkenlerin etkinliğinin ölçüm modeli ile belirlenmesi, gözlenen veya gizil değişkenler arasındaki korelasyonların test edilmesi için matrislerin düzenlenmesi aşamalarını içermektedir (Hair ve ark., 1998; Bolat, 2009).

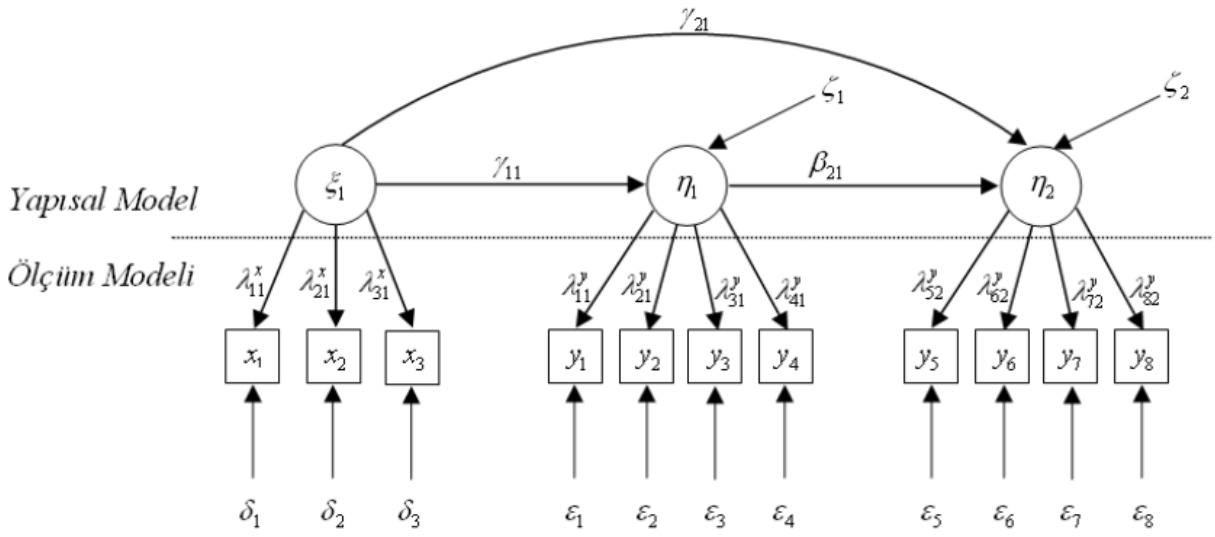
YEM analizinin başlangıcında yer alan en önemli konu gizil değişkenler ile gözlenen değişkenler arasındaki ayrımdır. Davranış bilimlerinde araştırmacılar sıklıkla direkt olarak gözlenemeyen teorik yapılar ile ilgilenmektedirler. Bunlara gizil değişkenler veya faktörler adı verilmektedir. Gizil değişkenler direkt gözlenemediği için doğrudan ölçülememektedirler. Bu nedenle gözlenemeyen değişken gözlenebilen bir değişkene bağlanarak ölçülmektedir. Diğer bir ifade ile direkt olarak gözlenemeyen veya ölçülemeyen değişkenlere gizil değişkenler adı verilmektedir.

Gözlenen değişkenler veya gizil bir değişkenin göstergeleri (indikatörleri) sistematik veya rassal ölçme hatalarını kapsar, ancak gizil değişkenler bunlardan bağımsız durumdadırlar. Tüm gizil değişkenler kavramlara karşılık geldiği için varsayımsal değişkenlerdir. Kavramlar ve gizil değişkenler ancak kuramsal soyutluluk derecesine göre değişim gösterirler. Akıl, sosyal sınıf, güç ve beklentiler oldukça soyut gizil değişkenlere örnek olarak verilebilir. Yaş, eğitim ve gelir gibi değişkenler daha az soyuttur ve gizil değişkenlerin bu çeşitleri doğrudan ölçülebilmektedir (Bollen, 1989; Loehlin, 2004; Çelik, 2007).

Yapısal eşitlik modelleri kendi içerisinde farklı analiz düzeylerini içermektedir:

- ✓ Gizil bağımsız (eksojen) değişkenlerin gizil bağımlı (endojen) değişkenler ile ilişkilerini gösteren yapısal model;
- ✓ Gözlenen bağımsız değişkenlerin gizil bağımsız değişkenlerle ilişkilerini gösteren (eksojen) ölçüm modeli;
- ✓ Gözlenen bağımlı değişkenlerin gizil bağımlı değişkenlerle ilişkilerini gösteren bağımlı (endojen) ölçüm modeli olarak tanımlanmaktadır.

YEM analizinde kullanılan ölçüm modeli, gizil değişkenler ile gözlenen değişkenler arasındaki ilişkiyi belirtirken; yapısal model ise içsel ve dışsal gizil değişkenlerin birbiriyle arasındaki ilişkiyi belirtmektedir (Loehlin, 2004).

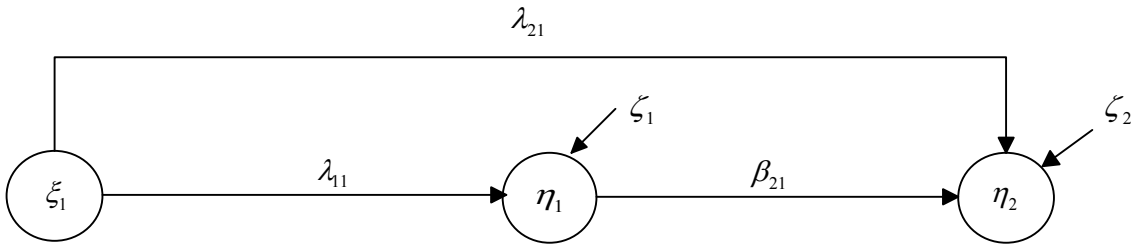


Şekil 2.2. Yapısal Model için path diyagram örneği

2.1.3.1. Yapısal Model

Gizil değişkenler arası yapısal ilişkileri tanımlayan modeller gizil değişken modelleri veya yapısal model olarak adlandırılmaktadır. Değişkenler arasındaki bağlantılar yapısal parametrelerle ifade edilmekte ve iki değişken arasındaki nedensel ilişkileri göstermektedir.

İki dışsal gizil değişken ve bir içsel gizil değişkenden oluşan bir yapısal model için yol diyagramı Şekil 2.3'te verilmiştir.



Şekil 2.3. Yapısal Model için path diyagram örneği

$$\eta_1 = \gamma_{11}\xi_1 + \zeta_1 \tag{2.4}$$

$$\eta_2 = \beta_1\eta_1 + \gamma_{12}\xi_1 + \zeta_2 \tag{2.5}$$

Eşitliklerde yer alan ξ dışsal gizil değişkenleri ve η içsel gizil değişkenleri göstermektedir. Dışsal değişkene ait gözlenen değişkenler ***x*** ile, içsel değişkene ait belirgin değişkenler ise **y** ile gösterilir. Modelde açıklanamayan bileşenler ise ζ ile

temsil edilmektedir. ζ, eşitliklerde yer alan rassal hataları ifade etmektedir. İçsel gizil değişkenler için sadece geçerli olan ζ, ilgili içsel gizil değişkendeki dışsal değişkenler tarafından etkilenmeyen hata varyansını göstermektedir. ζ_1 ve ζ_2 rassal hatalarının dışsal değişkenler ile ilişkisiz ve beklenen değerlerinin sıfır olduğu varsayılır. YEM' de hiçbir gizil değişkeninin tam olarak ölçülemeyeceği kabul edilerek, gizil değişken konumundaki değişkenlerin hata varyansları da modele dâhil edilir. β_{21} katsayısı yapısal parametredir. Bu parametre ζ_1 sabit tutulduğunda η_1'deki bir birimlik artıştan sonra η_2 'nin beklenen değerindeki değişimin göstergesidir. γ_{11} ve γ_{21} regresyon katsayıları benzer bir açıklamaya sahiptir. β_{21} katsayısı gizil içsel değişken ile ilişkiliyken, γ_{11} ve γ_{21} gizil dışsal değişkenle ilişkilidirler (Bollen, 1989; Jöreskog; 1996; Sharma, 1996; Raykov ve Marcoulides, 2006; Çelik, 2009). Eşitlik 2.4 ve 2.5' ün matris gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \beta_{21} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\end{bmatrix} \tag{2.6}$$

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{B}\,\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\Gamma}\,\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\zeta} \tag{2.7}$$

Eşitlik 2.7 gizil değişken modeli için yapısal eşitliklerin genel matris gösterimidir. Bu modele ilişkin yapılan varsayımlar:

- ✓ Bağımlı, bağımsız gizil değişkenlerin ve modelin hatasının beklenen değeri sıfırdır.

$$\begin{aligned}&E(\boldsymbol{\eta}) = 0\\ &E(\boldsymbol{\xi}) = 0\\ &E(\boldsymbol{\zeta}) = 0\end{aligned} \tag{2.8}$$

- ✓ Hatalar ve bağımsız gizil değişkenler arasında bağımlılık yoktur.

$$Cov(\xi, \zeta) = 0 \tag{2.9}$$

- ✓ Modele ilişkin kovaryans matrisi tekil olmamalıdır. Yani, (**I** − **B**) tekil değildir.

olarak verilmektedir. Ayrıca *i*'inci yapısal denklemdeki hata terimi olan ζ_i'nin homeskedastik ve otokorelasyonsuz oldukları varsayılmaktadır. Yapısal modellerde kullanılan notasyon ve tanımlar Çizelge 2.2'de verilmektedir.

Çizelge 2.2. Gizil Değişken Modeli için Notasyon

Gizil Değişken İçin Yapısal Model

$$\eta = \mathbf{B}\eta + \Gamma\xi + \zeta$$

Varsayımlar

$$E(\eta) = 0$$

$$E(\xi) = 0$$

$$E(\zeta) = 0$$

ξ ile ζ ilişkisizdir.

$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})$ tekil değildir.

$$Cov(\xi, \zeta) = 0$$

Notasyon	İsim	Boyut	Tanım
Değişkenler			
η	Eta	$m \times 1$	Gizil içsel değişken
ξ	Ksi	$n \times 1$	Gizil dışsal değişken
ζ	Zeta	$m \times 1$	Eşitliklerdeki gizil hatalar
		Katsayılar	
B	Beta	$m \times m$	Gizil içsel değişkenin katsayı matrisi
Γ	Gamma	$m \times n$	Gizil dışsal değişkenin katsayı matrisi
		Kovaryans Matrisleri	
Φ	Phi	$n \times n$	$E(\xi\xi')$ Kovaryans matrisi
Ψ	Psi	$m \times m$	$E(\zeta\zeta')$ Kovaryans matrisi

Bollen, 1989.

$\boldsymbol{B}$ ve Γ katsayı matrisleridir. $\boldsymbol{B}$, $m \times m$ boyutlu gizil içsel değişkenler için katsayı matrisidir. Tipik elemanı B_{ij}'dir. Burada *i* ve *j* sütun ve satır pozisyonlarına karşılık gelmektedir. $\boldsymbol{B}$'nin ana diyagonali daima sıfırdır. Burada yer alan herhangi bir sıfır değeri, gizil bir içsel değişken üzerinde başka bir gizil içsel değişkenin etkisinin olmadığını ifade etmektedir. Γ gizil dışsal değişkenler için $m \times n$ boyutlu katsayı matrisidir, elemanları γ_{ij} ile gösterilir. Eşitlik 2.5'te Γ matrisi iki gizil içsel ve bir gizil dışsal değişken olduğu için 2×1 boyutludur. ξ, η_1 ve η_2'nin her ikisini de etkilediği için Γ matrisi sıfır elemanı içermez (Bollen, 1989; Çelik, 2009).

İki kovaryans matrisi de Çizelge 2.2'deki gizil değişken modelinin bir parçasıdır. Kovaryans matrisi, ana köşegen dışındaki tüm değişken çiftlerinin kovaryansı ve ana köşegen boyunca değişken varyansları ile standartlaştırılmış bir korelasyon matrisidir. Gizil dışsal değişkenlerin $n \times n$ boyutlu kovaryans matrisi elemanları ϕ_{ij} olan $\mathbf{\Phi}$ matrisidir. Tüm kovaryans matrislerine benzer biçimde bu matriste simetriktir (Bollen, 1989; Kaplan, 2000; Kline, 2005; Çelik 2009).

Çizelge 2.2'deki $m \times m$ boyutlu kovaryans matrisi $\mathbf{\Psi}$ 'dir. Bu matrisin elemanları Ψ_{ij} ile gösterilir. $\mathbf{\Psi}$ 'nin ana köşegenindeki her bir elemanı *i.* eşitliğin içerdiği açıklayıcı değişkenlerce açıklanamayan η_i değişkenine karşılık gelen varyanstır.

Kovaryans matrisleri;

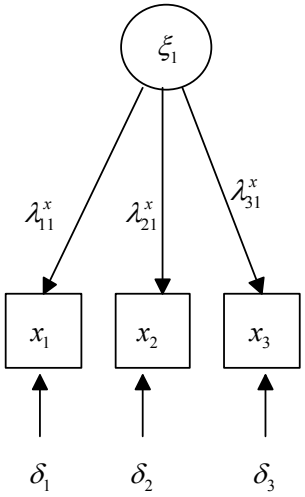
$$\mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} \psi_{11} & 0 \\ 0 & \psi_{22} \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \phi_{11} \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

olarak gösterilir.

2.1.3.2. Ölçüm Modeli

Ölçüm modeli gizil değişkenlerin tanımlandığı ve bütün değişkenler arasındaki yönü tanımlanmamış ilişkilerin (korelasyonların) hesaplandığı modeldir ve bu modelde bütün parametreler serbest bırakılmıştır. İyi bir YEM analizinin ölçüm modeliyle başlaması gerekir (Anderson ve Gerbing, 1988). Her bir gizil değişken çeşitli gözlenen değişkenlerce ölçülür. Şekil 2.2' de yer alan genel gösterim için dışsal gizil değişkene dair ölçüm modeli Şekil 2.4' teki gibidir;



Şekil 2.4. Dışsal Gizil Değişken İçin Ölçüm Modeli

η ve ξ 'yi açıklayan elemanların birbiriyle ilişkisiz (korelasyonsuz) olduğu varsayılarak, Şekil 2.4' te yer alan diyagram için ölçüm modeli ve matris gösterimleri;

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

$$\boldsymbol{\theta_\delta} = \begin{bmatrix} \sigma_{\delta_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\delta_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\delta_3}^2 \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

biçiminde yazılır. Buna uygun denklem sistemi,

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 \xi_1 + \delta_1 \\ x_2 &= \lambda_2 \xi_1 + \delta_2 \\ x_3 &= \lambda_3 \xi_1 + \delta_3 \end{aligned} \tag{2.14}$$

dir. Genel biçim:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Lambda}_x \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\delta} \tag{2.15}$$

şeklindedir. Şekil 2.2 için içsel değişkenlere ait doğrusal eşitlikler ve matris gösterimleri ise;

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_4 & 0 \\ \lambda_5 & 0 \\ \lambda_6 & 0 \\ \lambda_7 & 0 \\ 0 & \lambda_8 \\ 0 & \lambda_9 \\ 0 & \lambda_{10} \\ 0 & \lambda_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \\ \epsilon_7 \\ \epsilon_8 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\Theta}_{\varepsilon} = diag\left[\sigma^2_{\varepsilon_i}\right] \tag{2.16}$$

olup buna uygun denklem sistemi;

$$\begin{aligned} y_1 &= \lambda_4\eta_1 + \varepsilon_1 & y_5 &= \lambda_8\eta_2 + \varepsilon_5 \\ y_2 &= \lambda_5\eta_1 + \varepsilon_2 & y_6 &= \lambda_9\eta_2 + \varepsilon_6 \\ y_3 &= \lambda_6\eta_1 + \varepsilon_3 & y_7 &= \lambda_{10}\eta_2 + \varepsilon_7 \\ y_4 &= \lambda_7\eta_1 + \varepsilon_4 & y_8 &= \lambda_{11}\eta_2 + \varepsilon_8 \end{aligned} \tag{2.17}$$

şeklinde yazılıp matris formu,

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Lambda}_y\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.18}$$

şeklinde olacaktır. x_1, x_2, x_3, ξ_1'nin ölçümlerini göstermektedir. y_1, y_2, y_3, y_4 değişkenleri η_1'in, y_5, y_6, y_7, y_8 değişkenler ise η_2'nin ölçümleridir. Tüm belirgin değişkenler gizil değişkenlere bağlıdır. Gözlenen $\boldsymbol{x}$'teki rasgele değişkenler, gizil dışsal değişkenlerin göstergeleridir. Gözlenen $\boldsymbol{x}$ değişkenleri $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}$ ve $\boldsymbol{x}$ sabit olduğu zaman rassal değildirler. Gizil değişkenler ile belirgin değişkenler arasındaki faktör yükleri ise sırasıyla $\boldsymbol{\lambda}^x$ ve $\boldsymbol{\lambda}^y$ simgeleriyle ifade edilmektedir. $\boldsymbol{\lambda}^x$, $q \times n$ boyutlu (burada *n*, $\boldsymbol{\xi}$'lerin sayısıdır), $\boldsymbol{\lambda}^y$, $p \times m$ boyutludur (burada *m*, $\boldsymbol{\eta}$'ların sayısıdır). λ_i katsayıları gizil değişkendeki bir birimlik değişim için gözlenen değişkenlerdeki beklenen değişimin büyüklüğünü vermektedir (Bollen, 1989; Sharma,1996; Raykov ve Marcoulides, 2006). Bu katsayılar, gözlenen değişkenler üzerindeki gizil değişkenlerin etkilerini göstermek için kullanılan katsayılardır. Gizil dışsal değişken ile (bağımsız) gizil içsel değişken (bağımlı) arasındaki regresyon katsayıları $\boldsymbol{\gamma}$ ile gösterilmektedir. Dışsal değişkenlere ait ölçüm hataları $\boldsymbol{\delta}$ içsel değişkenlere ait ölçüm hataları ise $\boldsymbol{\varepsilon}$ ile temsil edilir. Ölçüm hataları, gözlenen değişkenler ile gizil değişkenler arasındaki ilişkilerin bozulmasına neden olan hatalardır. Ölçme hatalarının beklenen değerinin sıfır olduğu, bunların tüm $\boldsymbol{\xi}$'ler, $\boldsymbol{\eta}$'lar ve $\boldsymbol{\zeta}$'lar

ile ilişkisiz olduğu varsayımı benimsenir. Ayrıca δ_i ve ε_j bütün *i* ve *j*' ler için ilişkisizdir (Bollen, 1989).

Herhangi bir ξ veya η ile δ_i ve ε_j'nin korelasyonu, regresyon analizindeki bir açıklayıcı değişkenle ilişkili hata korelasyonuna benzer biçimde, tutarsız parametre tahminlerine neden olmaktadır. δ_i ve ε_j bazen faktör analizinde tek faktörler olarak da adlandırılmaktadır. Her bir δ_i ve ε_j özel ve özel olmayan bileşenler içinde ayrılır. Sonuç olarak; her δ_i ve ε_j gözlemler boyunca otokorelasyonsuz ve sabit varyanslıdır. Θ_δ ve Θ_ε ölçme hatalarının kovaryans matrisleridir. Ana köşegenleri göstergelerle ilişkili hata varyanslarını içerir. Köşegenler dışında yer alan elemanlar ise farklı göstergeler için ölçüm hatalarının kovaryanslarıdır. Ölçülen bir değişkendeki hata başka bir değişken ile korelasyonlu olabilir (Bollen, 1989; Jöreskog; 1996; Sharma, 1996; Raykov ve Marcoulides, 2006; Çelik, 2009).

Her iki ölçüm modeli, varsayımları ve kullanılan notasyon ve tanımları Çizelge 2.3'te verilmektedir.

Çizelge 2.3. Ölçüm Modellerinde Kullanılan Notasyonlar

Ölçüm Modeli için Yapısal Eşitlikler

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Lambda}_x \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\delta}$$
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Lambda}_y \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

Varsayımlar

$$E(\boldsymbol{\eta}) = 0$$
$$E(\boldsymbol{\xi}) = 0$$
$$E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$$
$$E(\boldsymbol{\delta}) = 0$$
$$Cov(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\varepsilon}) = 0, Cov(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\varepsilon}) = 0, Cov(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\varepsilon}) = 0$$
$$Cov(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\delta}) = 0, Cov(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\delta}) = 0$$

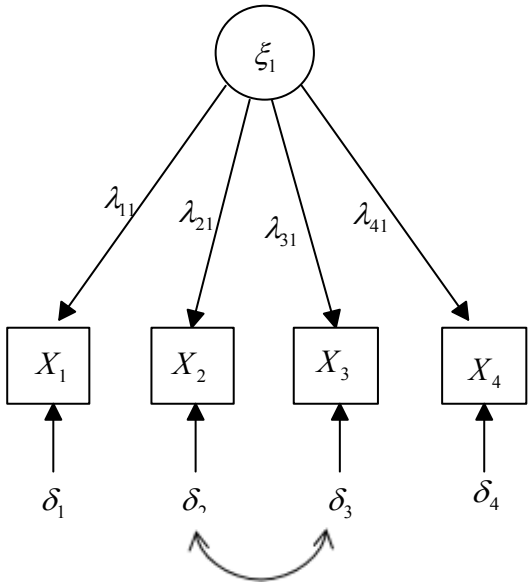
Notasyon	İsim	Boyut	Tanım
		Değişkenler	
$\boldsymbol{x}$	-	$p \times 1$	$\boldsymbol{\eta}$ ' nin gözlenen değişkenleri
$\boldsymbol{y}$	-	$q \times 1$	$\boldsymbol{\xi}$' nin gözlenen değişkenleri
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Epsilon	$p \times 1$	$\boldsymbol{y}$ için ölçme hataları
$\boldsymbol{\delta}$	Delta	$q \times 1$	$\boldsymbol{x}$ için ölçme hataları
		Katsayılar	
$\boldsymbol{\Lambda}_y$	Lamda *y*	$p \times m$	$\boldsymbol{y}$ 'yi $\boldsymbol{\eta}$ ile bağlayan katsayılar
$\boldsymbol{\Lambda}_x$	Lamda *x*	$q \times n$	$\boldsymbol{x}$ 'i $\boldsymbol{\xi}$ ile bağlayan katsayılar
		Kovaryans Matrisleri	
$\boldsymbol{\Theta}_\varepsilon$	Theta-Epsilon	$p \times p$	$\boldsymbol{\varepsilon}$ 'nin kovaryans matrisi $E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}')$
$\boldsymbol{\Theta}_\delta$	Theta-Delta	$q \times q$	$\boldsymbol{\delta}$ 'nin kovaryans matrisi $E(\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}')$

Bollen, 1989.

2.1.4. Kovaryans ve Korelasyon Ayrıştırması

Path analizi iki değişken arasındaki kovaryans ve korelasyonun model parametrelerinin bir fonksiyonu olarak yazılmasını sağlamaktadır. Şekil 2.5'te basit modelde dört gösterge değişkenine $(x_1, \ldots, x_4)$ sahip tek bir gizil değişken (ξ_1) gösterilmiştir. δ_2 ve δ_3 dışındaki diğer ölçme hataları arasında korelasyon

bulunmamaktadır. Bütün ölçme (δ_i) ve ξ_1 ile korelasyonsuz olduğu ve bütün *i*'ler için $E(\delta_i)=0$ olduğu varsayılmaktadır (Bollen, 1989).



Şekil 2.5. Dört gösterge değişkenli tek gizil değişkene ait path diyagramı

$Cov(x_1,x_4)$'ün ayrıştırılması;

$$
\begin{aligned}
&Cov(x_1,x_4)=E(x_1,x_4)-E(x_1)E(x_4)\\
&Cov(x_1,x_4)=E(x_1,x_4)-E(\lambda_{11}\xi_1+\delta_1)E(\lambda_{41}\xi_1+\delta_4)\\
&Cov(x_1,x_4)=E(x_1,x_4)-\left[\lambda_{11}E(\xi_1)+E(\delta_1)\right]\left[\lambda_{41}E(\xi_1)+E(\delta_4)\right]\\
&Cov(x_1,x_4)=E(x_1,x_4)-[0+0][0+0] \qquad (2.19)\\
&Cov(x_1,x_4)=E\left[(\lambda_{11}\xi_1+\delta_1)(\lambda_{41}\xi_1+\delta_4)\right]\\
&Cov(x_1,x_4)=\lambda_{11}\lambda_{41}E(\xi_1,\xi_1)+\lambda_{11}E(\xi_1,\delta_4)+\lambda_{41}E(\delta_1,\xi_1)+E(\delta_1,\delta_4)\\
&Cov(x_1,x_4)=\lambda_{11}\lambda_{41}\phi_{11}
\end{aligned}
$$

biçiminde olmaktadır. Denklemin sağ tarafı x_1 ve x_4 için path diyagramında tanımlanan denklemlerden oluşmaktadır. Buradan $Cov(x_1,x_4)$'ün x_1 ve x_4'ün ξ_1 üzerindeki etkisinin ve ξ_1 gizil değişkeninin varyansının bir fonksiyonu olduğu görülmektedir. Daha kompleks modellerde ise matris cebrinin kullanılması uygun olacaktır. $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\Lambda}_x\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\delta}$ olmak üzere $\boldsymbol{x}$ 'in kovaryans matrisi $\boldsymbol{xx}'$'nün beklenen değeri olmaktadır.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{xx}' &= \left(\Lambda_x\xi + \delta\right)\left(\Lambda_x\xi + \delta\right)' \\ &= \left(\Lambda_x\xi + \delta\right)\left(\xi'\Lambda_x' + \delta\right) \\ &= \Lambda_x\xi\xi'\Lambda_x' + \Lambda_x\xi\delta' + \delta\xi'\Lambda_x' + \delta\delta' \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned} E\left(\boldsymbol{xx}'\right) &= \Lambda_x E\left(\xi\xi'\right)\Lambda_x' + \Lambda_x E\left(\xi\delta'\right) + E\left(\delta\xi'\right)\Lambda_x' + E\left(\delta\delta'\right) \\ \Sigma &= \Lambda_x\Phi\Lambda_x' + \Theta_\delta \end{aligned} \tag{2.21}$$

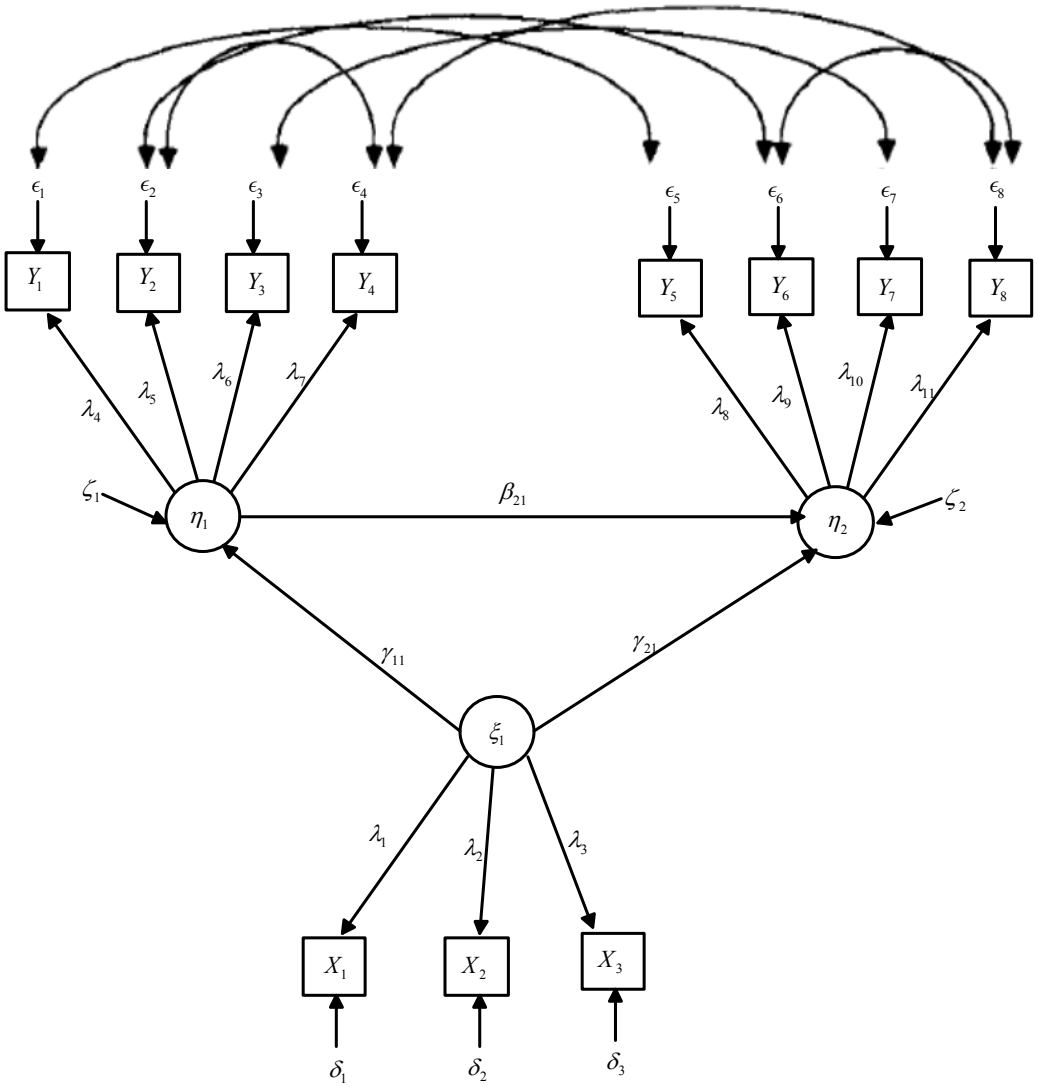
Böylece x 'in kovaryans matrisi Σ, Λ_x, Φ ve Θ_δ 'daki elemanlar cinsinden ayrıştırılmış olmaktadır. Bu bağlamda bütün değişkenler için kovaryanslar benzer şekilde ayrıştırılabilir. Ayrıştırmalar kovaryanslarla ilişkili parametreleri ve farklık kovaryansların farklı parametre değerlerine sebep olduğunu gösterdiğinden önemlidir (Bollen, 1989).

2.4. Toplam, Doğrudan ve Dolaylı Etkiler

Path analizinde farklı üç tip etki türü vardır. Bunlar; doğrudan, dolaylı ve toplam etki olarak ayrılmaktadır. Doğrudan etki path analizinde bir değişkenin başka bir değişken üzerinde olan direkt etkisini göstermektedir. Bir değişkenin dolaylı etkisi ise en az bir aracı değişken tarafından açıklanır (Bollen, 1989). Doğrudan ve dolaylı etkilerin toplamı toplam etkiyi vermektedir:

Toplam Etkiler = Doğrudan Etki + Dolaylı Etkiler

Etkilerin ayrıştırılması bir spesifik model ile ilgilidir. Eğer eşitlikler sistemi, modele dâhil edilen veya çıkartılan değişkenler tarafından değişirse, toplam, doğrudan ve dolaylı etkilerin tahminleri değişebilir (Bollen, 1989). Etkilerin ayrıştırılması için bir örnek bir path diyagramı Şekil 2.6 aracılığıyla gösterilmiştir.



Şekil 2.6. Sanayileşme ve siyasal demokrasi modeline ilişkin path diyagramı (Bollen, 1989)

Şekil 2.6'ya göre doğrudan etkiler açıklanırsa; η_2'deki η_1'in etkisi doğrudan etkiyi göstermektedir (β_{21}). y_5'te η_2'nin doğrudan etkisi λ_8 iken, η_2'de ξ_1'in doğrudan etkisi γ_{21}'dir. Dolaylı etkileri göstermek için; η_2'de ξ_1'in etkisi göz önüne alındığından, η_1 aracı değişkendir. ξ_1'de bir birimlik değişim η_1'de bir γ_{11} kadar beklenen değişime neden olacaktır. η_1'de bu γ_{11} beklenen değişimi; η_2'deki β_{21}'in beklenen doğrudan bir değişimine neden olur. Böylece η_2'deki ξ_1'in dolaylı etkisi $\gamma_{11}\beta_{21}$'dir. Benzer biçimde y_7 'deki η_1' in dolaylı etkisi $\beta_{21}\lambda_{10}$ 'dur. η_2'deki ξ_1'in toplam etkisi, dolaylı ve doğrudan etkilerin toplanması ile elde edilecektir.

$$Toplam\ Etkiler = Doğrudan\ Etki + Dolaylı\ Etkiler$$
$$= \gamma_{21} + \gamma_{21}\beta_{21}$$

y_8 'deki ξ_1 'in toplam etkisi ise,

$$Toplam\ Etkiler = Doğrudan\ Etki + Dolaylı\ Etkiler$$
$$= 0 + \left(\gamma_{21}\lambda_{11} + \gamma_{11}\beta_{21}\lambda_{11} \right)$$

olacaktır. Regresyon analizindeki regresyon katsayısı, bir değişkenin doğrudan etkisinin tahminidir. Eğer dolaylı etkiler ihmal edilirse, bir değişkene ait tüm etkilerin belirlenmesinde hata yapılır (Bollen, 1989).

2.2. Açıklayıcı ve Doğrulayıcı Faktör Analizi

Faktör analizi, birbiriyle ilişkili *p* tane değişkeni bir araya getirerek daha az sayıda ilişkisiz ve kavramsal olarak anlamlı yeni değişkenler (gizil değişkenler, faktörler, boyutlar) bulmayı, keşfetmeyi amaçlayan çok değişkenli bir istatistiksel yöntemdir.

Faktör analizi, bir grup değişkenin kovaryans yapısını incelemek ve bu değişkenler arasındaki ilişkileri, faktör olarak isimlendirilen çok daha az sayıdaki gözlenemeyen gizil değişkenler bakımından açıklamayı sağlamak üzere düzenlenmiş bir tekniktir.

Faktör analizinde kullanılan iki genel yaklaşım vardır.

- Açıklayıcı faktör analizi (AFA, exploratrory factor analysis)
- Doğrulayıcı faktör analizi (DFA, confirmatory factor analysis)

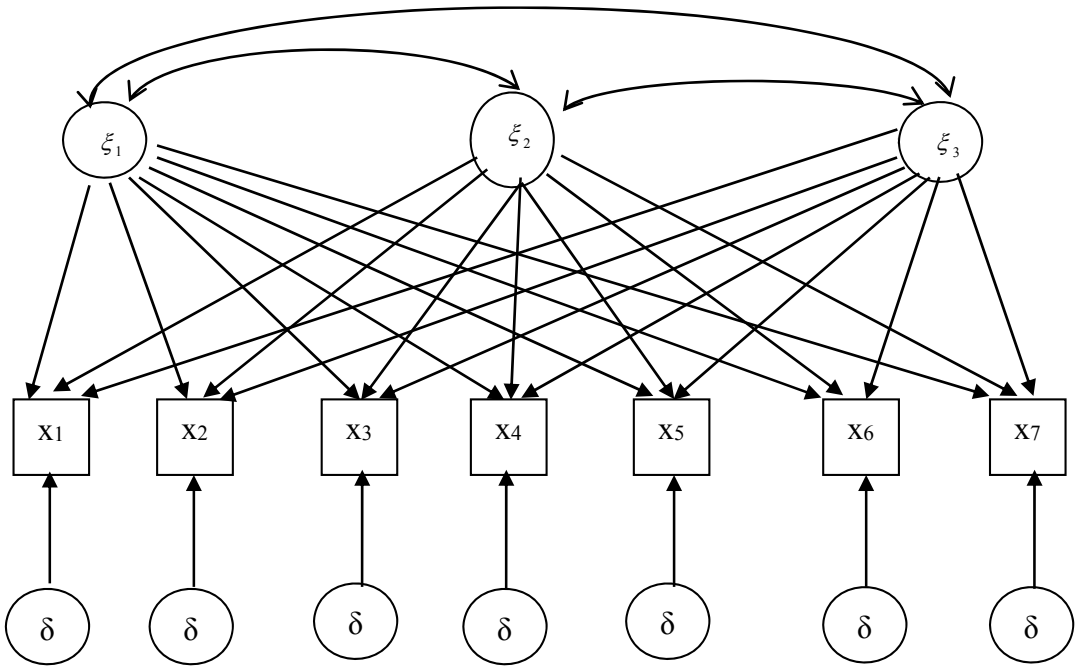
Açıklayıcı faktör analizinde, değişkenler arasındaki ilişkilerden hareketle faktör bulmaya yönelik bir işlem; doğrulayıcı faktör analizinde ise değişkenler arasındaki ilişkiye dair daha önce saptanan bir modelin ya da hipotezin test edilmesi söz konusudur (Meydan ve Şeşen, 2011).

2.2.1. Açıklayıcı Faktör Analizi

Açıklayıcı Faktör Analizi (AFA), gözlenen değişkenler arasındaki kovaryans veya korelasyonları göreli olarak daha az sayıdaki gizil değişkenler aracılığıyla açıklamayı amaçlayan bir veri indirgeme yöntemidir. Varlığı teorik olarak bilinen fakat doğrudan gözlenemeyen veya ölçülemeyen değişkenler faktör çözümleme modelinin ortaya çıkmasını sağlayan ana etkenlerdir. Açıklayıcı faktör analizinde ilgili yapı ya da faktörlerin sayısı, gözlenen ve gözlenemeyen değişkenler arasındaki ilişki hakkında önsel

herhangi bir beklenti veya varsayım bulunmamaktadır. AFA araştırmacının beklentilerini gerektirmez ve analizler bu beklentilerle şekillenmez.(Şimşek, 2007).

Literatürde aksi belirtilmedikçe faktör analizi açıklayıcı faktör analizi olarak anılmaktadır. Açıklayıcı faktör analizinde ilgili yapı ya da faktörlerin sayısı, gözlenen gözlenmeyen değişkenler arası ilişki vs. hakkında önsel spesifik herhangi varsayım ya da beklenti yoktur. Açıklayıcı faktör analizi araştırmacının beklentilerini gerektirmez ve analizler bu beklentilerle şekillenmez (Avşar, 2007).



Şekil 2.7.Açıklayıcı faktör analizi modeli (Üç faktörlü model)

Burada Path analizinde olduğu gibi, çemberler ile ifade edilen değişkenler gizil değişkenleri, kare simgesi ile ifade edilen değişkenler ise gözlenen değişkenleri göstermektedir. Gizil değişkenlerden gözlenen değişkenlere doğru tek yönlü çizilen oklar ise, gizil değişkenin gözlenen değişken üzerindeki nedensel etkisini ifade etmektedir. Gizil değişkenler arasındaki çift yönlü eğrisel oklar ise gizil değişkenler arasındaki nedensel ilişkiyi ifade etmektedir. Şekilde ifade edilen model 7 gözlenen, 3 gizil değişkenden oluşan bir AFA modelidir. ξ ile ifade edilen faktörlerin etkileri X_i'ler ile ifade edilen gözlenen değişkenlerin hepsinin üzerinde ayrı ayrı görülmektedir. Bir gizil değişkenin etkisi birden çok gözlenen değişken üzerinde ortak olarak görülmesi nedeniyle bu değişkenlere başka bir deyişle faktörlere *ortak faktör* adı verilmektedir. δ ile ifade

edilen faktörler ise her bir gözlenen değişkene ait hataları göstermekte olup sadece ilgili olduğu gözlenen değişkeni etkilediğinden bu faktörlere *tekil faktörler* adı verilmektedir. AFA modelinde faktörler ve değişkenler arasındaki nedensel yapıyı araştırmacı belirleyememektedir, araştırma öncesinde herhangi bir önsel bilgiye dayanılmamaktadır. Araştırmacı kısmen de olsa gözlenen değişken sayısı ve ortak faktör sayısı haricinde analize müdahale edememektedir (Long, 1983; Geyik, 2014).

AFA'nın uygulanabilmesi için bazı temel varsayımların gerçekleşmesi gerekmektedir. Söz konusu varsayımlar istatistiksel olmaktan çok kavramsal varsayımlardır. Çok değişkenli normal dağılıma uygunluk ve doğrusallık gibi istatistiksel varsayımlardan sapmalar durumunda hesaplanan korelasyon katsayıları küçülecektir. Normallik varsayımı ise yalnızca faktörlerin anlamlılığı test edilecekse gereklidir. AFA'da değişkenler arasındaki iç ilişkiler araştırıldığından, burada en önemli varsayım değişkenler arasında belirli bir oranda çoklu doğrusal bağlantının var olmasıdır (Hair ve ark., 1998; Geyik, 2014).

AFA için aşağıdaki varsayımlar geçerlidir;

i. Bütün ortak faktörler ilişkilidir/ilişkisizdir. (Şekil 2.7' de ki açıklayıcı faktör analizinde bütün ortak faktörler ilişkilidir.)
ii. Bütün ortak faktörler (gizil değişkenler) bütün gözlenen değişkenlerden direkt olarak etkilenirler.
iii. Özgün faktörler ilişkili oldukları gözlenen değişken dışında herhangi bir diğer faktör ile ilişkisizdirler.
iv. Herbir gözlenen değişken bir tek özgün faktörle ilişkilidir.
v. Bütün ξ_i 'ler bütün δ_i 'lerle ilişkisizdir.

2.2.2. Doğrulayıcı Faktör Analizi Modeli

İlk olarak 1970'lerde Jöreskog tarafından geliştirilen Doğrulayıcı Faktör Analizi (DFA), AFA modelinin doğal bir uzantısıdır (Lee, 2007). DFA açıklayıcı faktör analizindeki sınırlamaları ortadan kaldırmakta ve araştırmacının modeli gerçekten ifade edebilen mantıklı kısıtları modele dahil etmesine olanak sağlamaktadır (Jöreskog, 1969). Bu kısıtlar:

- ✓ Hangi ortak faktör çiftinin (veya çiftlerinin) korelasyonlu olduğunu,
- ✓ Hangi gözlenen değişkenlerin hangi ortak faktörlerden etkilendiğini,
- ✓ Hangi gözlenen değişkenlerin bir özgün faktörden etkilendiğini,

- ✓ Hangi özgün faktör çiftinin korelasyonlu olduğunu,

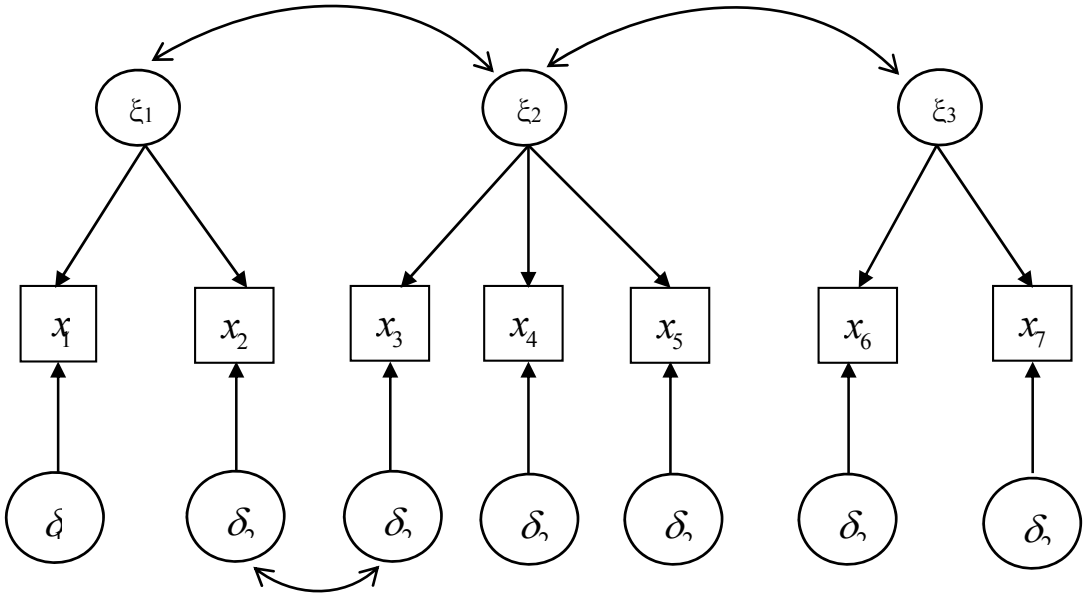
belirlemektedirler.

DFA modeli ile örneklem verilenin başlangıçtaki teorik modeli doğrulayıp doğrulamadığının araştırılması amaçlanır. Bu durumu sağlayan bir faktör yapısının varlığı ve söz konusu yapının istatistiksel olarak anlamlılığı test edilmektedir. Bunun sonrasında modele uygun olan ek örneklem verisiyle, hipotezlenen modelin geçerliliği doğrulanır (Schumacker ve Lomak; 2004). Kısıtlı Faktör Analizi olarak da bilinen DFA, teorik modeli gerçekten ifade edebilen mantıklı kısıtların modele dâhil edilebilmesini sağlar (Jöreskog, 1969). DFA'nın uygulanabilmesi için araştırmacı üç temel unsur hakkında bilgi sahibi olmalıdır. Bunlar;

1. Kullanılacak faktör sayısı,
2. Hangi değişkenlerin hangi faktörleri belirlediği,
3. Faktörlerin korelasyonlu olup olmadığı

şeklindedir.

AFA ile DFA arasındaki farklılıkları görmek için Şekil 2.7'deki açıklayıcı faktör analizi modeli ile Şekil 2.8'deki doğrulayıcı faktör analizi modeli incelenebilir.



Şekil 2.8. Doğrulayıcı faktör analizi modeli (Üç Faktörlü Model)

Şekil 2.8 DFA modeli diyagramında ortak faktör olan ξ_1 ve ξ_2 arasında ilişkisizlik olduğu varsayılmaktadır. Oysa AFA'da bütün ortak faktörlerin mutlaka birbirleri ile ilişkili olduğu ya da alternatif olarak hepsinin ilişkisiz olduğu

varsayılmaktadır. DFA'da gözlenen değişkenler sadece bazı ortak faktörlerin etkisi altındadır. x_1 , ξ_1 ve ξ_3'ün üzerinde yüke sahip değildir. Bunun yanında AFA'da bütün gözlenen değişkenler bütün ortak faktörlerin etkisi altında varsayılmaktadır. Şekil 2.8. DFA'da iki özgün faktörün birbiri ile ilişkili olduğu gözlenmektedir. δ_2 ve δ_3'ün eğrisel çift yönlü oklarla aralarında ilişkili oldukları belirtilmektedir ve gözlenen değerlerden biri olan x_6 'nın hata faktörü ile ortaklıkları yoktur (Avşar, 2007).

DFA'yı YEM'den ayıran en önemli farklılık, DFA'da ortak faktörler arasında yapısal ilişkilere (neden-sonuç ilişkileri) izin verilmemesidir. Bu bakımdan DFA YEM'ye göre oldukça sınırlı bir model olsa da (1) Gizil değişkenlerin ölçme hatalarını gidererek tahmin edilmesini sağlayan ölçme modellerinde, (2) Birden çok gösterge değişkene sahip modellerde ve ortak faktörler arasındaki korelasyonların belirlenmesinde, (3) Her bir özelliğin ölçme yöntemlerinin bozucu etkilerini gidermek amacıyla birden çok yöntemle ölçüldüğü çoklu yöntem-çoklu özellik (multi method-multi trait) modellerinde (4) Gözlenen değişkenlere doğrudan etkisi olmadığı halde bu değişkenleri etkileyen gizil değişkenleri etkileyen gizil değişkenler olması durumunda yani yüksek mertebe faktör modellerinde kullanılması oldukça faydalı olmaktadır (Şimşek, 2007).

2.2.2.1. Doğrulayıcı Faktör Modelinin Belirlenmesi

Doğrulayıcı faktör modelinin geçerliliği için bazı önsel bilgilere ihtiyaç vardır. Aşağıda kesin olarak bilinmesi gereken önsel bilgiler verilmektedir. (Long, 1983):

1. Ortak faktör sayısı,
2. Gözlenen değişken sayısı,
3. Ortak faktörlerin varyans – kovaryansları,
4. Gözlenen değişkenler ve gizil faktörler arasındaki ilişkiler,
5. Hatalar ve gözlenen değişkenler arasındaki ilişkiler,
6. Hataları arasındaki varyans – kovaryanslar.

Bu önsel bilgilere sahip olunduğunda DFA modeli, gözlenen değişkenlere ait eşitlikler Eşitlik 2.19 ve 2.20 ile verilen ölçme modellerine eşit olacak şekilde,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Lambda}_x \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\delta} \tag{2.22}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Lambda}_y \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.23}$$

biçiminde ifade edilir. Burada $\boldsymbol{x}$ ve $\boldsymbol{y}$ gözlemlenen değişkenler, $\boldsymbol{\xi}$ dışsal gizil değişken, $\boldsymbol{\eta}$ içsel gizil değişken, $\boldsymbol{\delta}$ dışsal gizil değişkenli modelde tekil faktörlerin varyansı ve $\boldsymbol{\varepsilon}$ içsel gizil değişkenli modelde tekil faktörlerin varyansını göstermektedir. Gizil değişkenlerin gösterge değişkenler üzerindeki etkileri $\boldsymbol{\Lambda}_x$ ve $\boldsymbol{\Lambda}_y$ katsayılar matrislerinin elemanları ile belirlenmektedir. Örneğin Eşitlik 2.19 için $E(\boldsymbol{\delta}) = 0$ ve $E(\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\delta}') = 0$ varsayılmaktadır. $\boldsymbol{\delta}$ ile belirtilen tekil faktörler ya da hatalar olarak tanımladığımız değişken ise iki bileşenden oluşmaktadır.

$$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{s} + \boldsymbol{e} \tag{2.24}$$

Burada $\boldsymbol{s}$ her değişkenin kendine özgü varyansı ve $\boldsymbol{e}$ ise $\boldsymbol{x}$'te geriye kalan rasgele hata bileşenini göstermektedir. Bu iki bileşen birlikte $\boldsymbol{x}$'in tekil faktörünü oluştururlar. Her iki bileşende $\boldsymbol{\xi}$ ölçülürken $\boldsymbol{x}$'teki hatayı temsil etmelerinin yanı sıra birbirileri ilave $\boldsymbol{\delta}$ ile korelasyonsuz olduklarından rassal ölçme hatası olarak adlandırılmaktadırlar (Bollen, 1989; Geyik, 2014).

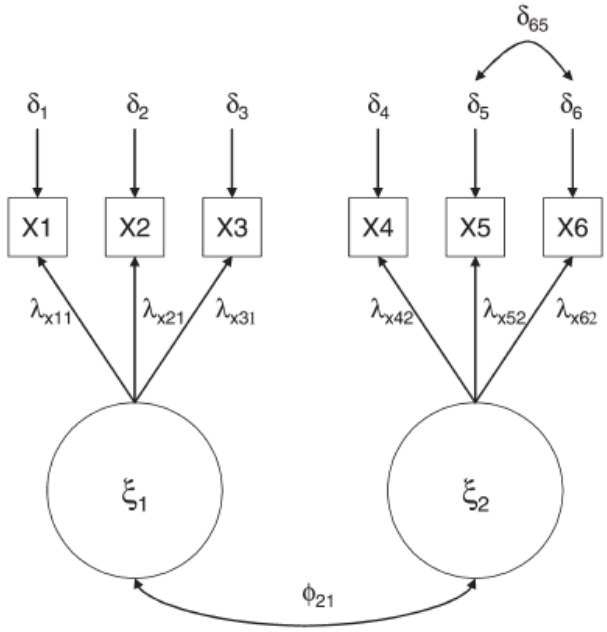
Regresyon ve faktör analizinde bağımlı değişkenler gözlenirken, faktör modellerinde bağımsız değişkenler gözlenememektedir. Bu nedenle modelin parametreleri direkt olarak tahmin edilemez. X bağımlı ve ξ bağımsız değişkenleri üzerine regress edilerek tahmin edilebilir. DFA'da gizil değişkenler direk olarak tahmin edilemediğinden, eşitliğin sağ kısmındaki gözlenen değişkenler arası kovaryansların yapısını incelemek faydalı bir yöntemdir. Eşitlik 2.19 ile belirtilen faktör modeli için kovaryans denklemi

$$\begin{aligned}
\Sigma(\boldsymbol{\theta}) &= E(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}') \\
&= E\left[(\boldsymbol{\Lambda}_x\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\delta})(\boldsymbol{\xi}'\boldsymbol{\Lambda}_x' + \boldsymbol{\delta}')\right] \\
&= \boldsymbol{\Lambda}_x E(\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}')\boldsymbol{\Lambda}_x' + \boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{\delta}} \\
&= \boldsymbol{\Lambda}_x \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Lambda}_x' + \boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{\delta}}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

biçiminde olmaktadır. Bu denklemde gözlenen değişkenlerin ortak faktörlerden daha fazla olduğu varsayılmaktadır. Kovaryans denkleminde $\boldsymbol{\Phi}$ gizil değişkenlerin kovaryans

matrisini, Θ_δ ölçme hatalarının kovaryans matrisini göstermektedir (Bollen, 1989; Long, 1983; Özkoç, 2011).

Gizil dışsal değişkenler ve gizil içsel değişkenler için bir DFA çözümünün matrisleri ve parametreleri için LISREL gösterimi sırasıyla Şekil 2.9, Şekil 2.10'da verilmiştir;



Şekil 2.9 Dışsal gizil değişkenli DFA modeli ve temel gösterimler

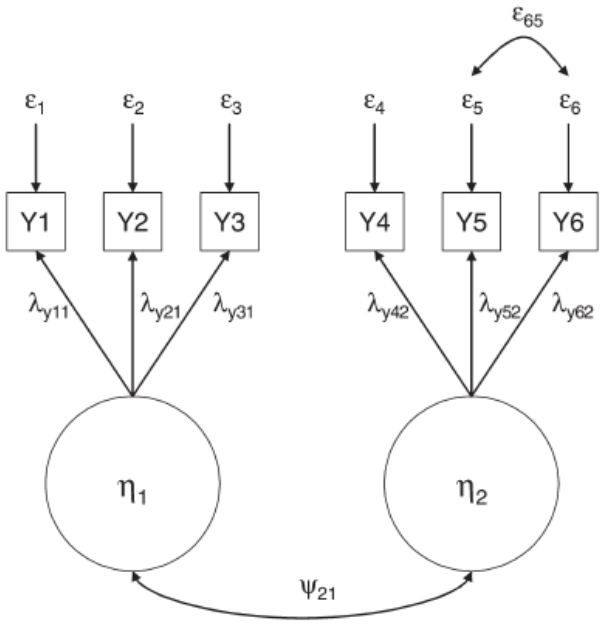
Şekil 2.9 bir hata kovaryansı ile iki faktörlü bir DFA modeli için dışsal gizil değişken gösterimi iken Şekil 2.10 bir hata kovaryansı ile iki faktörlü bir DFA modeli için içsel gizil değişken gösterimini ifade etmektedir (Brown, 2006).

Çizelge 2.4. Dışsal gizil değişkenli DFA modeli ve temel gösterimler

Adı	Parametre	Matris	Türü	Türü
Lambda-*x*	λ_x	Λ_x	Regresyon	Faktör yükleri
Theta delta	δ	Θ_δ	Varyans - kovaryans	Hata varyansları ve kovaryansları
Phi	ϕ	Φ	Varyans - kovaryans	Faktör varyansları ve kovaryansları
Tau- x	τ_x		Ortalama vektör	Gösterge kesişimler
Kappa	κ		Ortalama vektör	Gizil ortalamalar
Xi (Ksi)	ξ		Vektör	Dışsal değişkenlerin isimleri

Brown, 2006.

DFA modellerinde dışsal değişkenler ***x***'in eşiti olarak gösterilebilir, bağımsız değişken ya da açıklayıcı değişkenler olarak adlandırılırlar. İçsel değişkenler ise **y**'ye eşit olmakta ve bağımlı değişken olarak adlandırılmaktadır (Brown, 2006).



Şekil 2.10. İçsel gizil değişkenli DFA modeli ve temel gösterimler

Yukarıda verilen şekillerde göstergelere (örneğin; x_1 ve y_1), faktörlerden (örneğin; ξ_1 ve η_1) gelen tek yönlü oklar (→) gözlenen ölçümler üzerinde gizil boyutların doğrudan etkilerini göstermektedir; spesifik regresyon katsayıları λ'lardır. Θ, gösterge hata varyansları kovaryanslarının matrislerini göstermektedir. Tek yönlü oklar thetaları gözlenen ölçümlere bağlamasına rağmen, bu oklar regresif (geri çekilen) pathleri göstermez (Brown, 2006).

Çizelge 2.5. İçsel gizil değişkenli DFA modeli ve temel gösterimler

Adı	**Parametre**	**Matris**	**Türü**	**Türü**
Lambda-*y*	λ_y	Λ_y	Regresyon	Faktör yükleri
Theta epsilon	ε	Θ_ε	Varyans - kovaryans	Hata varyansları ve kovaryansları
Phi	ψ	Ψ	Varyans - kovaryans	Faktör varyansları ve kovaryansları
Tau - *y*	τ_y		Ortalama vektör	Gösterge kesişimler
Alfa	α		Ortalama vektör	Gizil ortalamalar
Eta	η		Vektör	İçsel değişkenlerin isimleri

Brown, 2006.

Çift yönlü oklar ise kovaryansları (korelasyonları) ifade etmek için kullanılır. Şekil 2.9. ve Şekil 2.10'da yer alan bu eğri oklar, faktörler arasındaki kovaryansları ve göstergeler arasındaki hata kovaryanslarını göstermektedir (Yılmaz ve Çelik, 2009; Brown, 2006).

Söz konusu modeller matris yazılımı ile ifade edilirse Λ_x matrisi;

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \xi_1 & \xi_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \lambda_{11}^x & 0 \\ \lambda_{21}^x & 0 \\ \lambda_{31}^x & 0 \\ 0 & \lambda_{42}^x \\ 0 & \lambda_{52}^x \\ 0 & \lambda_{62}^x \end{bmatrix} \end{array} \tag{2.26}$$

şeklinde ifade edilir. Burada örnek olarak verilirse λ_{11}^x katsayısı x_1'in dışsal gizil değişkenin ξ_1 üzerindeki etkisidir. Benzer şekilde faktörler arasındaki ilişkileri ifade eden matris,

$$\begin{array}{c} \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \xi_1 & \xi_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \end{array} \tag{2.27}$$

şeklinde olup, burada ϕ_{11} ve ϕ_{22} ile gösterilen matrisin köşegen elemanları ortak faktörlerin varyanslarını ϕ_{21} ise faktör kovaryansını ifade etmektedir. Şekil 2.9'da yer alan Θ_δ matrisi ise köşegen elemanları hatalardan oluşan $(p \times p)$ boyutlu simetrik bir matristir.

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \delta_{11} & & & & & \\ 0 & \delta_{22} & & & & \\ 0 & 0 & \delta_{33} & & & \\ 0 & 0 & 0 & \delta_{44} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{55} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{65} & \delta_{66} \end{bmatrix} \end{array} \tag{2.28}$$

Burada örneğin; δ_{65} , x_5 ve x_6 değişkenlerinin ölçme hatalarının kovaryansını ifade etmektedir (Brown, 2006; Geyik, 2014).

DFA'ya ilişkin tüm gösterimlerin kuramsal bir örnekle gösterilmesi için, üç göstergenin basit bir faktör modelini göz önünde bulundurarak modele ilişkin varyans-kovaryans matrisi elde edilirse;

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_{11}\xi_1 + \delta_1 \\ x_2 &= \lambda_{22}\xi_1 + \delta_2 \\ x_3 &= \lambda_{33}\xi_1 + \delta_3 \\ E(\delta_i) &= 0 \\ Cov(\xi_i, \delta_i) &= 0,\ i = 1,2,3 \\ Cov(\delta_i, \delta_j) &= 0,\ i \neq j \end{aligned} \tag{2.29}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\Lambda}_x = \begin{bmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{21} \\ \lambda_{31} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\xi} = [\xi], \boldsymbol{\Phi} = [\phi_{11}] \tag{2.30}$$

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{\delta}} = \begin{bmatrix} Var(\delta_1) & & \\ 0 & Var(\delta_2) & \\ 0 & 0 & Var(\delta_3) \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\Lambda}_x \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Lambda}_x' + \boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{\delta}} \tag{2.32}$$

olacaktır. Eşitlik 2.29'daki $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})$, model parametrelerine dayanan varyans-kovaryans matrisinin parametreler cinsinden yazılırsa,

$$\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \lambda_{11}^2\phi_{11} + Var(\delta_1) & & \\ \lambda_{21}\lambda_{11}\phi_{11} & \lambda_{21}^2\phi_{11} + Var(\delta_2) & \\ \lambda_{31}\lambda_{11}\phi_{11} & \lambda_{31}\lambda_{21}\phi_{11} & \lambda_{31}^2\phi_{11} + Var(\delta_3) \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

şeklinde ifade edilir (Brown, 2006).

2.2.2.2. Doğrulayıcı Faktör Modelinin Tanımlanması

Tahmin aşaması kitle parametrelerinin tahmininin elde edebilmek için örnek verinin kullanılmasını içerir. Tahminlerin gerçek parametrelerle ortalama eşitlikte olup olmaması (yansızlık) ve örnek verilerin en etkili biçimde kullanılıp kullanılmaması diğer araştırma yöntemlerinde olduğu gibi bu analizde ilgilenilmesi gereken önemli sorunlardır. Eğer bir model tanımlanmamışsa parametrelerin ayrı ayrı tahmin edilmesi olanaksızdır, bu durum her bir gözlenen değişkenin bütün kitle için değeri bilinse dahi değişmez. Model tanımlaması, serbestçe tahmin edilen model parametrelerinin miktarı arasındaki

kısmi fark ve varyans – kovaryans girdi matrisindeki bilgi parçacıklarının sayısı ile ilgilidir (Yılmaz ve Çelik, 2009**)**

Orta derecede karmaşık modeller ile ilgilenildiğinde cebirsel yöntemler ile modelin tanımlanabilirliğini araştırılması oldukça zor bir süreçtir. Söz konusu durumlar için DFA modellerinin tanımlanabilirliğinin araştırılması amacıyla geliştirilen yöntemler mevcuttur. Bunlardan başlıca olanları *t*-kuralı, iki gösterge kuralı ve üç gösterge kuralıdır (Bollen, 1989).

Tanımlama ölçütlerinin kullanılabilmesi için her biri ölçülemeyen, gözlenemeyen teorik yapılar olarak adlandırdığımız her bir gizil değişkenin tanımlanmış bir ölçeğe sahip olması gerekmektedir. Bu durumda DFA analizinde gizil değişkenlerin bir ölçekle tanımlanması için iki yaklaşım kullanılmaktadır. Bunlardan ilki gizil değişkenin ilgili gösterge değişkenlerinden birinin ölçü birimini, gizil değişkenin ölçü birimi olarak kabul etmektir. Söz konusu gösterge "*işaretleyici*" veya "*referans göstergesi*" olarak adlandırılmakta ve bu yaklaşım araştırmacılar tarafından en çok tercih edilen en popüler yaklaşım olmaktadır. İkinci yaklaşım ise, gizil değişkenlerin varyansının belli bir değere sabitlenmesidir. Genellikle bir olarak kabul edilen bu değer sayesine modeldeki değişkenlerin standartlaştırılması sağlanır (Brown, 2006; Geyik, 2014).

t – Kuralı

t-kuralının temelini anlamak için, Eşitlik 2.31'de verilen ifade ele alındığında;

$$\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\Lambda}_x \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Lambda}_x' + \boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{\delta}} \tag{2.34}$$

Bu eşitlikteki $\boldsymbol{\Lambda}_x$, $\boldsymbol{\Phi}$ ve $\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{\delta}}$ matrislerinde $\left[qs + s(s+1)/2 + q(q+1)/2\right]$ sayıda bilinmeyen parametre ve $q(q+1)/2$ tanımlı olduğu bilinen parametre bulunmaktadır. Sistemin çözülebilir olması için *t* bağımsız parametre sayısını göstermek üzere,

$$t \leq q(q+1)/2 \tag{2.35}$$

koşulunun sağlanması gerekmektedir. *t* kuralı tanımlılık için gerek fakat yeter olmayan bir şarttır (Şimşek, 2007).

Üç Gösterge Kuralı

Tek faktörlü bir modelin tanımlılığı için yeter koşul, yükleri sıfır olmayan en az üç göstergesi bulunması ve Θ_δ'nın da köşegen bir matris olmasıdır. Çok değişkenli faktör modellerinde ise, üç gösterge kuralının geçerli olması için,

I. Her gizil değişken için üç veya daha fazla gösterge değişken bulunması,

II. Λ_x her bir satırında yalnızca bir tane sıfırdan farklı eleman bulunması,

III. Θ_δ'nın köşegen bir matris olması gerekmektedir.

Üç gösterge kuralına göre söz konusu şartların sağlanması durumunda DFA modeli tanımlanabilmektedir. Üçten çok göstergesi olan bir model aşırı tanımlı olarak adlandırılır. Üç gösterge kuralı tanımlılık için yeter fakat gerek olmayan bir şarttır (Bollen, 1989).

İki Gösterge Kuralı

İki gösterge kuralı ξ'nin birden daha fazla olduğu modeller için yeterli alternatif bir şarttır. Üç gösterge kuralına benzer şekilde, Θ_δ'nın diyagonal olduğu varsayılmaktadır. Her bir gizil değişken aynı ölçeklidir. Bu koşullar altında her gizil değişken iki göstergeye sahip olduğunda tanımlama için yeterli bir durum söz konusudur. İki gizil değişkenli basit bir yapı göz önünde bulundurulduğunda, bu model için Θ_δ matrisi diyagonaldir. Λ_x ve Φ matrisleri;

$$\Lambda_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_{21} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & \lambda_{42} \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

olarak elde edilir. Her bir gözlenen değişken için karmaşık faktör tek olduğundan, ilk koşul sağlanmış olur. Φ'deki elemanlar sıfır olmadığı sürece, ikinci koşul da sağlanmış olur. Bu iki koşul sağlandığı için model tanımlanmış olduğuna karar verilir. İki gösterge kuralı, Σ'nın tanımlanmış parametrelerinin bir fonksiyonu gibi yazılan her bir bilinmeyen parametre tarafından tanımlama için yeterli bir koşul oluşturur (Bollen,1989).

2.3. Bayes Yaklaşımı

Bayes yaklaşımı, özü Bayes Teoremine dayandırılarak yapılandırılmış bir yaklaşım sistemidir. Bayes teoremi, olasılık kuramı içinde incelenen önemli bir konudur. Bu teorem bir rasgele değişken için olasılık dağılımı içinde koşullu olasılıklar ile marjinal olasılıklar arasındaki ilişkiyi gösterir.

Olasılık dağılımların $F = \{ f(\cdot;\theta) : \theta \in \Theta \}$ ailesinde olasılık yoğunluk fonksiyonlarını indisleyen θ parametresi bilinmeyen bir sabit olarak ele alındığı gibi bir olasılık dağılımına sahip rasgele değişken olarak da ele alınmaktadır. İlki klasik, ikincisi Bayes yaklaşımı olarak isimlendirilmektedir. Klasik yaklaşımda θ parametresi, parametre kümesinde bilinmeyen bir değer olmak üzere $X_1, X_2, \ldots, X_n$ örneklemindeki X_i'ler bağımsız ve aynı $f(\cdot;\theta)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip rasgele değişkenler olarak ele alınır. Bayes yaklaşımında bir rasgele değişken olan θ'nın dağılımına önsel (prior) dağılımı olarak adlandırılır. Genellikle bu öznel (subjective) bir dağılım olmak üzere $X_1, X_2, \ldots, X_n$ örneklemi, θ rasgele değişkeni ile koşullandırılmış dağılımdan alınmış gibi düşünülmektedir, yani $i = 1, 2, \ldots, n$ için X_i'ler bağımsız ve her biri $f(\cdot|\theta)$ olasılık (yoğunluk) fonksiyonuna sahip rasgele değişkenler olarak ele alınmaktadır. Bu durumda, örneklemin olasılık (yoğunluk) fonksiyonu,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n|\theta) = f(x_1|\theta) f(x_2|\theta) \ldots f(x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) \tag{2.37}$$

ve θ'nın önsel dağılımının olasılık (yoğunluk) fonksiyonu π olmak üzere,

$$f_{X_1, X_2, \ldots, X_n, \theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta) = f(x_1|\theta) f(x_2|\theta) \ldots f(x_n|\theta) \pi(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) \pi(\theta) \tag{2.38}$$

dır. $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)'$ ve $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ vektör gösterimleri ile

$$f(\boldsymbol{x}|\theta) = f(x_1|\theta) f(x_2|\theta) \ldots f(x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) \pi \tag{2.39}$$

$$f_{\boldsymbol{X},\theta}(\boldsymbol{x}, \theta) = f(\boldsymbol{x}, \theta) \pi(\theta) \tag{2.40}$$

yazılabilir. Buradan, $\boldsymbol{X}$'in marjinal dağılımının olasılık (yoğunluk) fonksiyonu,

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}, \theta) = \int_{\Theta} f(\boldsymbol{x}, \theta) \pi(\theta) d\theta \tag{2.41}$$

olmak üzere, örneklem değerleri verildiğinde ℓ'nın koşullu dağılımının, yani ℓ'nın sonsal (posterior) dağılımının olasılık (yoğunluk) fonksiyonu,

$$\pi\left(\theta|\boldsymbol{x}\right)=\frac{f_{X,\theta}\left(\boldsymbol{x},\theta\right)}{f_X\left(\boldsymbol{x}\right)}=\frac{f\left(\boldsymbol{x},\theta\right)\pi\left(\theta\right)}{f_X\left(\boldsymbol{x}\right)} \tag{2.42}$$

dır. Sonsal dağılım, bir anlamda, önsel dağılımın gözlenen değerler ile güncellenmesi olarak düşünülebilir. Sonsal dağılımın beklenen değeri, bu gözlemleri üreten dağılımdaki ℓ için bir tahmin edici olarak kullanılabilir.

$$\hat{\theta}_B\int_{\Theta}\theta\,\pi\left(\theta|\boldsymbol{X}\right)d\theta \tag{2.43}$$

istatistiğine ℓ'nın Bayes tahmin edicisi denir (Öztürk ve ark., 2006).

Bayes tahmin edicileri, $T\left(\boldsymbol{X}\right)$ bir istatistik olmak üzere, seçilmiş bir $k\left(\theta,T\right)$ kayıp fonksiyonuna dayalı,

$$R\left(\theta,T\right)=\int k\left(\theta,T\left(\boldsymbol{x}\right)\right)f\left(\boldsymbol{x}|\theta\right)d\boldsymbol{x} \tag{2.44}$$

risk fonksiyonunun,

$$R\left(T\right)=\int_{\Theta}R\left(\theta,T\right)\pi\left(\theta\right)d\theta \tag{2.45}$$

beklenen değerini en küçük yapan tahmin edicidir. Özetlenirse, $\mathsf{T}=\left\{T:R\left(T\right)<\infty\right\}$ olmak üzere, bir $T^*\in\mathsf{T}$ için

$$R\left(T^*\right)\in R\left(T\right)\quad,\ T\in\mathsf{T} \tag{2.46}$$

oluyorsa, T^* tahmin edicisine Bayes tahmin edicisi denir. Bu anlamda, yukarıda söz edilen tahmin edici,

$$k\left(\theta,T\right)=\left(T-\theta\right)^2 \tag{2.47}$$

kayıp fonksiyonuna dayalı olan Bayes tahmin edicisidir (Öztürk, 2006).

Bilinmeyen θ parametrelerine ilişkin önsel bilginin temsili, olabilirlik fonksiyonunun şekline bağlı kalarak belli olasılık dağılımı ailesiyle (eşlenik önsel) sınırlandırıldığında bile, bu analitik işlemleri tamamlamak, yüksek dereceden integraller almayı gerektirdiğinden oldukça güçtür. Hatta önsel bilginin uygunsuz (improper) olması durumunda sonsal dağılımın formu da belirlenemeyeceğinden, bu analitik işlemleri yapmak hiç mümkün olmayacaktır. Bu zorluğu gidermek için, karmaşık integrasyon teknikleri yerine koşullu dağılımlardan örneklem çekilerek parametre tahminleri elde

edilmesini sağlayan simülasyon teknikleri geliştirilmiştir. Bu tekniklerin bütünü MCMC olarak bilinir (Gamerman, 1997;Altuntaş, 2011).

2.3.1. Önsel Dağılım

θ'nın önsel dağılımı olabilecek (muhtemel) parametre değerlerini temsil eder. Önsel dağılım ve olabilirlik fonksiyonunun çarpımı parametrenin sonsal dağılımını verir. Sonsal dağılımı kullanarak tüm çıkarımlar yapılabilir. Önsel dağılım kullanmaksızın modelleme veya Bayesci çıkarım yapılamaz (Song ve Lee, 2012a).

Temelde iki tür önsel dağılım vardır. Bunlar bilgi içermeyen (noninformative) ve bilgi içeren (informative) önsel dağılım şeklindedir. 1973 yılında Box ve Tiao bilgi içeren önsel dağılımları, veri seti hakkında bilgi veren, bilgi içermeyen önsel dağılımları ise veri seti hakkında çok az bilgi veren önsel dağılımlar olarak tanımlamışlardır (Congdon, 2003). Bilgi içeren önsel dağılım için, ya ilişkili veri setine çok yakın değerlerden ya da uzmanların sübjektif bilgilerinden yararlanılarak oldukça iyi önsel bilgi elde edilebilir. Bayesci yaklaşımda bilgi içeren önsel dağılım parametreleri, hiperparametre olarak adlandırılır (Song ve Lee, 2012a).

Model parametresi θ hakkında herhangi bir ön bilgi yoksa ya da elde edilmesi zor ise, sonsal dağılım üzerinde en az etkiyi yapacak önsellerin kullanılması tercih edilir. Bu tip önsellere bilgi içermeyen önsel dağılımlar yerine referans önsel dağılımlar adı da verilir. Referans önsel ifadesi standart olarak kullanılmaya uygun olan bir önsel anlamındadır (Demirhan, 2004).

2.3.1.1. Bilgi İçermeyen Önsel Dağılım

Bilgi içermeyen önsel, çalışmalarda en yaygın kullanılan önsel dağılım türüdür ve fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$f(\theta) = a, \quad \theta \in A \tag{2.48}$$

Bilgi içermeyen önseller, parametrenin tanımlı olduğu A aralığı bilgisi dışında hiçbir bilgiye sahip olunmadığı durumda kullanılan önsel dağılımlardır (Karadağ, 2011). Bayesci yaklaşımda bilgi içermeyen önsel dağılım kullanıldığında, sonuçlar klasik yaklaşımla elde edilen sonuçlarla örtüşmektedir. Bunun nedeni, parametre tahmininde eldeki verinin sağladığı bilgi dışında farklı bir bilgi kullanmamasıdır.

Bilgi içermeyen önsel dağılımın aralığının sınırlarından en az biri sonsuz olursa, normalleştirme katsayısı aşağıdaki gibi belirsiz bir integrale eşit olur ve hesaplanamaz.

$$f(y)=\int f(\theta)\,d\theta=\infty \tag{2.49}$$

Bu durumda bilgi içermeyen önsel aynı zamanda da uygun olmayan bir önsel dağılım olmaktadır. Başlıca bilgi içermeyen önsel dağılımlar, yaygın/dağınık (diffuse), zayıf (weak), etkisiz (vague), düzgün (flat) ve eşlenik (Conjugate) gibi adlarla nitelendirilen önsel dağılımlardır (Box ve Tiao, 1973; Gelman ve diğ., 2004; Demirhan, 2004;).

Düzgün Önsel Dağılım

Parametreler hakkında fazla bilginin olmaması veya hiçbir bilginin olmaması durumunda Bayes-Laplace önermesi; $p(\theta|Y,M)\propto L,\ \theta\in R_0$ biçiminde ifade edilen bir düzgün önsel kullanılması önerilmektedir (Murat, 2012).

$$p(\theta|Y,M)\propto p(Y|\theta,M)\,p(\theta) \tag{2.50}$$

Jeffrey Önsel Dağılımı

Jeffrey, bilgi içermeyen önsel dağlım seçimi için 1961 yılında bir kural önermiştir. Bu kurala göre, önsel dağılım orantısal olarak, Fisher bilgi matrisinin determinantının karekökü eşittir ve aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$f(\theta)\propto\left|J(\theta)\right|^{1/2} \tag{2.51}$$

Bir tahmin edicinin, en çok olabilirlik tahmin edicisinin komşuluğundaki duyarlılığını ölçen, Fisher'in bilgi matrisi ise, aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$J(\theta)=-\int\left[\frac{d^2\log f(\theta|y)}{d\theta^2}\right]f(y|\theta)\,dy \tag{2.52}$$

Jeffrey önseli, herhangi parametrik bir model için bilgi içermeyen bir önsel dağılımın elde edilmesine olanak sağlar. Gözlemlerin farklı dağılımları için elde edilen Jeffrey oranları Çizelge 2.6'da verilmiştir (Karadağ, 2011).

Çizelge 2.6. Farklı dağılımlar için Jeffrey önselleri

Olabilirlik Fonksiyonu	Parametre(ler)	Önsel Dağılım
Bernolli	$\theta = p$	$\left(p(1-p)\right)^{-1/2}$
Binom	$\theta = p$	$\left(p(1-p)\right)^{-1/2}$
Poisson	$\theta = \lambda$	$\lambda^{-1/2}$
Normal (σ^2 biliniyor)	$\theta = \mu$	1
Normal (μ biliniyor)	$\theta = \sigma^2$	σ^{-1}
Normal	$\boldsymbol{\theta} = \mu, \sigma^2$	σ^{-1}

Karadağ, 2011.

Eşlenik (Conjugate) Önsel Dağılım

Yapılan çalışmalarda öncelikle sonsal dağılımın kapalı bir formda analitik olarak elde edilmesi hedeflenir. Bu durumda çoğu kez önsel dağılımın eşlenik önsel olması gerekir. Bunun en önemli nedeni, eşlenik önsel varlığında, elde edilen sonsal dağılımın, önsel dağılımla aynı aileye (eşlenik) ait olmasıdır.

Eşlenik önsel dağılımlar aynı zamanda ek veri olarak da algılanabilir (Gelman ve diğ., 2004). Aynı aileye mensup eşlenik dağılımlarla ilgili özet Çizelge 2.7'de gösterilmiştir.

Çizelge 2.7. Farklı dağılımlar eşlenik önseller

Olabilirlik Fonksiyonu	Parametre(ler)	Önsel Dağılım	Sonsal Dağılım
Bernolli	p	Beta	Beta
Binom	p	Beta	Beta
Poisson	λ	Gamma	Gamma
Üstel	λ	Gamma	Gamma
Normal (σ^2 biliniyor)	μ	Normal	Normal
Normal (μ biliniyor)	σ^2	Ters Gamma	Ters Gamma
Normal	μ, σ^2	Normal- Gamma	Normal- Gamma
Tek Biçimli	a,b	Pareto	Pareto
Gamma	α, β	Gamma	Gamma

Karadağ, 2011.

Eşlenik önseller, sonsal dağılımların kapalı formda elde edilmesine olanak sağladıkları için oldukça kullanışlıdırlar (Karadağ, 2011).

2.3.1.2. Bilgi İçeren Önsel Dağılım

Açıklayıcı önsel dağılım, olabilirlik fonksiyonu tarafından etkisi azaltılmayan önsel dağılımdır. Bu tip önseller deneyimlerden, benzer geçmiş çalışmalardan ve uzman görüşlerinden elde edilen bilgi çerçevesinde belirlenirler. Sonsal dağılım üzerinde oldukça etkili oldukları için önsel dağılım belirlenirken çok dikkatli olunmalıdır. Ayrıca açıklayıcı önsel dağılımın matematiksel yapısının da çok karmaşık olmaması gerekir. Aksi halde elde edilen tahminler yanlı olabilir. Veri yapısına uygun ve gerçeği yansıtan önsel dağılım ile çalışıldığında ise Bayesci yöntemin performansı oldukça artmaktadır. Önceki çalışmaların meta analizinin yapılması, verinin histogramının çizilmesi veya kesikli önsel dağılımın kullanılması yardımıyla açıklayıcı önsel dağılımları belirlemek mümkündür (Avcı, 2012).

2.3.2. Markov Zinciri Monte Carlo Yöntemi

Temelde, Bayesci yaklaşımda, önsel dağılım ve gözlemlenen veriye koşullu olarak elde edilen sonsal dağılım kolayca belirlenebilmektedir. Ancak pratikte, çoğu zaman parametreye ait marjinal sonsal dağılım kapalı formda elde edilemez. Bu tip durumlarda, çözümleme analitik olarak sonuçlandırılamaz. Bu problemin aşılmasında, sayısal integral teknikleri içeren birçok stokastik benzetim yöntemi ortaya konulmuştur. Son yıllarda MCMC yöntemi bu problemlerin aşılmasında en yaygın kullanılan teknik haline gelmiştir.

Bayesci yaklaşımda sonsal dağılımın karmaşık bir yapıya sahip olması nedeniyle parametre tahmini MCMC benzetim yöntemi ile yapılır. Oluşturulan örneklemlerden yola çıkan benzetim yöntemi, dağılımdaki parametrelerin diğer parametrelere göre koşullu olasılıklarının elde edilmesiyle uygulanır (Gilks ve ark., 1996; Avcı, 2012). Markov zinciri ve örnekleme yöntemine dayanan Monte Carlo yaklaşımı, çok boyutlu ve karmaşık integral problemlerine yaklaşık çözüm getiren stokastik bir yöntemdir. MCMC ile Monte Carlo benzetim yöntemleri arasındaki temel fark, MCMC'de üretilen değerlerin Monte Carlo benzetimin aksine birbirinden bağımsız olmamasıdır. MCMC'de üretilen rasgele sayılar birbirine oldukça bağımlı yapı gösterir ve her bir benzetim değerinin bir önceki değere bağlı olduğu zincir değeri üretir. Eğer bu zincir yeterince uzun çalışırsa, ilgilenilen son dağılım istenilen şekle gelmiş demektir. Rasgele yürüyüş (random walk) yöntemine göre tesadüfi olarak çekilen örneklemlerden özet istatistikler elde edilir ve bu şekilde son

dağılımın ortalamasına, medyanına ve en yüksek sonsal yoğunluk aralığına ulaşılabilir (Avcı, 2012).

MCMC yönteminin en önemli özelliği, dağılıma en uygun benzetim algoritmasının seçilmesi durumunda, zincirin başlangıç değerine bakılmaksızın sonsal dağılımın yakınsamasını garanti etmesidir. Zincir çok uzun bir benzetim sürecinde çalıştırılırsa sonsal dağılım daha yüksek doğrulukta elde edebilir. İstenen sonuca kaç iterasyon sonucunda yakınsayacağı; belirlenen başlangıç değerlerine, zincir sayısına ve modelin etkin bir şekilde işleyip işlememesine bağlıdır. Bu konuda geliştirilmiş tanımsal yöntemler vardır ve iz grafikleri bunlardan biridir. Son yıllarda tercih edilen bir program olan WinBUGS yardımıyla iterasyonun takibi yapılarak iz grafikleri (Traceplot) elde edilebilmektedir. İz grafiklerinde salınımın veya titreşimin fazla olması, benzetim algoritmasının sonsal dağılımı hızlı bir biçimde yaklaştığını ve Markov Zincirinin (MC) oldukça hızlı bir şekilde yeni alanlara geçiş yaptığını göstermektedir. İterasyon sayısının belirlenmesinde ise MC Hatasına (MC Error) bakılmaktadır. MC Hatası, Markov Zinciri algoritması ile yapılan tahminin standart hatasını gösterir. Bu hatanın, parametre tahmine ilişkin standart hataya oranının mümkün oldukça küçük olması istenir (Genellikle 0.05'ten küçük). MC Hata değerine bakarak zincir sayısına da karar verilir. Parametre sayısı fazla olması durumunda, MCMC uzun çalıştırılmalıdır. Bu durumda iterasyon sayısı artacaktır (Avcı, 2012).

MCMC yöntemleri denince temel olarak MH algoritması ve Gibbs örneklemesi akla gelmektedir. Çünkü MCMC'de en çok kullanılan yöntemlerdir. Bu yöntemler ile karmaşık sonsal dağılımlardan örneklem çekme ve sonsal momentleri hesaplamak mümkün olmaktadır. Her bir parametreye ilişkin çıkarsamalar yapmak, marjinal sonsal dağılımların grafiklerini elde etmek için sonsal dağılımların hesaplanması Bayesci analizde önemli bir parçadır. MCMC yöntemleri bu amaçlara da hizmet etmektedir. (Kumru, 2003; Karadağ, 2011).

2.3.2. Metropolis Hastings (MH) Algoritması

Metropolis algoritması, Amerikalı fizik ve bilgisayar bilimcisi Nicholas C. Metropolis tarafından önerilmiştir. Algoritma basit ve pratiktir ve normalleştirme sabiti olarak bilinen herhangi boyuttaki keyfi kompleks hedef dağılımından rasgele örnekler elde etmek için kullanılır (Cengiz ve ark. 2012).

Sonsal dağılımdan parametre tahmini, MH algoritması kullanılarak aşağıdaki adımlar ile gerçekleştirilir (Avcı, 2012).

Adım 1: Başlangıç değerleri θ_0 seçilir.

Adım 2: Olabilirlik fonksiyonu ve önsel dağılımın çarpımından elde edilen $h(\theta)$ fonksiyonu hesaplanır.

Adım 3: Önerilen dağılımından $(g(\theta))$ üretilen θ_n değerleri kullanılarak

Adım 4: $p_{kabul} = \dfrac{h(\theta)\, g(\theta_n|\theta)}{h(\theta_n)\, g(\theta|\theta_n)}$ kabul olasılığı hesaplanır.

Adım 5: Düzgün dağılımdan bir sayı üretilerek (u) kabul olasılığı karşılaştırılır.

Adım 6: $p_{kabul} < u$ ise θ eski durumunda kalır, aksi takdirde yeni üretilen değerler θ'nın yeni değerleri olarak alınır.

Görüldüğü gibi $g(\theta)$ dağılımı, rasgele sayı üretilmesi kolay bir dağılım olmalı ve aynı zamanda, θ'ya bağlı olmayan bir sabit dışında tamamen bilinmelidir.

$g(\theta)$ önerilen dağılımının simetrik olması durumunda $g(\theta_n|\theta) = g(\theta|\theta_n)$ olacağından,

kabul olasılığı sadece iki noktanın sonsal dağılım oranlarına bağlı olacaktır. Bu durumda:

i. θ_n aday noktası, sonsal dağılım oranını arttırırsa (>1) kabul edilir ve tekrar bir aday noktası seçilir.

ii. θ_n aday noktası, sonsal dağılım oranını azaltırsa (<1) ret edilir ve zincir hareket etmez.

2.3.3. Gibbs Örneklemesi

Amerikan fizikçisi Josiah W.Gibbs' den sonra Geman ve Geman (1984) tarafından isimlendirilen Gibbs örneklemesi, "Metropolis ve Metropolis- Hastings algoritması"nın özel bir durumudur. Bayesci çıkarımda problem çözümü için Gibbs örneklemesini ilk olarak Gelfand ve ark.(1990) kullanmıştır (Cengiz ve ark. 2012).

Gibbs örnekleme algoritması, genellikle bileşik dağılımların doğrudan belirlenmesinin zor olduğu, çok sayıda değişken içeren karmaşık modellerde kullanılmaktadır. Tam koşullu dağılımlardan, parçalama yoluyla örneklemler çekilmesini sağlayan günümüzde kullanımı çok önem kazanmış bir yöntemdir.

Tahmin edilmek istenen parametrelerin vektörünün $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ olduğu varsayılsın. Gibbs algoritmasının oluşturulması süreci, j iterasyon sayısı olmak üzere aşağıdaki gibi gerçekleştirilir.

Adım 1: Birinci iterasyonda, $(j=1)$ parametreler için makul olabilecek başlangıç değerleri; $\boldsymbol{\theta}^{(0)}=\left(\theta_1^{(0)},\theta_2^{(0)},\ldots,\theta_k^{(0)}\right)$ olarak belirlenir.

Adım 2: $\boldsymbol{\theta}^{(j-1)}$ kullanılarak parametre değerlerinin aşağıda belirtilen biçimde ardışık olarak üretilmesi sonucunda yeni $\boldsymbol{\theta}^{(j)}=\left(\theta_1^{(j)},\theta_2^{(j)},\ldots,\theta_k^{(j)}\right)$ vektörü elde edilir.

$$
\begin{aligned}
&\theta_1^{(j)} \sim P\left(\theta_1 \left| \theta_2^{(j-1)},\ldots,\theta_k^{(j-1)}\right.\right)\\
&\theta_2^{(j)} \sim P\left(\theta_2 \left| \theta_1^{(j)},\theta_3^{(j-1)}\ldots,\theta_k^{(j-1)}\right.\right)\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&\theta_k^{(j)} \sim P\left(\theta_k \left| \theta_1^{(j)},\theta_2^{(j)}\ldots,\theta_{k-1}^{(j)}\right.\right)
\end{aligned}
\qquad (2.53)
$$

Adım 3: İterasyon sayısı *j*'nin değeri 1 artırılır ve yakınsama gerçekleşinceye kadar Adım 2'ye dönülerek işlemlere devam edilir.

Gibbs örnekleme sürecinde birinci iterasyonda $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ başlangıç değerleri kullanılırken, ikinci iterasyonda $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$'ın yerine $\boldsymbol{\theta}^{(1)}$ kullanılarak $\boldsymbol{\theta}^{(2)}$ elde edilir. *K* iterasyon sonra Markov özelliğine sahip $\boldsymbol{\theta}^{(0)},\boldsymbol{\theta}^{(1)},\ldots,\boldsymbol{\theta}^{(k)}$ parametre vektörleri elde edilir ve bir Markov zinciri tamamlanmış olur.

İstenilen değere kaç iterasyon sonrasında yakınsanacağı, belirlenen başlangıç değerine ve zincir sayısına bağlıdır. İterasyon sayısı arttıkça, zincir denge koşuluna yaklaşmakta ve yakınsama yaklaşık olarak gerçekleşmektedir (Altuntaş, 2011).

3. GÖZLENEN DEĞİŞKENLERLE YAPISAL EŞİTLİK MODELLERİ

Regresyon temelli modeller birçok bilim dalında yaygın olarak kullanılmaktadır. Bunlar bir içsel (bağımlı) değişkeni açıklamaya yönelik tek denklemden oluşabileceği gibi birden çok içsel değişkeni ve karşılıklı ilişkileri içeren bir denklem takımından da meydana gelebilir. Bu modeller, "klasik ekonometrik modeller" olarak da isimlendirilen modellerin ortak varsayımı içsel ve dışsal değişkenlerde ölçme hatası olmaksızın direkt gözlenmiş olmalıdır. Bir ölçme hatası bulunuyorsa da bu hatanın herhangi bir denklemde dışsal değişken olarak görev yapmayan içsel değişkende meydana gelmesine izin verilmektedir. Bu durumda gözlenen $\boldsymbol{y}$ ve $\boldsymbol{x}$'ler bir önceki bölümde tanımlanan η ve ξ'ye karşılık gelmektedirler. Bu bölümde hem genel YEM'in anlaşılması için bir basamak oluşturduğu hem de uygulamada çok karşılaşıldığı için gizil değişkenlerle YEM'in özel bir hali olan gözlenen değişkenlerle yapısal eşitlik modelleri incelenecektir (Bollen, 1989)

Çalışmanın bu bölümünde öncelikle YEM'in özel bir hali olan gözlenen değişkenlerle yapısal eşitlik modellemesi kısaca incelenecek ve daha sonra gizil değişkenler için yapısal eşitlik modellemesi bütün teorik ayrıntıları ile incelecektir

3.1. Gözlenen Değişkenli Yapısal Eşitlik Modelinin Belirlenmesi

Aşağıda verilen Eşitlik 3.1, gözlenen değişkenlerle yapısal eşitlik modelinin (klasik ekonometrik model) genel bir gösterimidir (Bollen, 1989):

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{X} + \zeta \tag{3.1}$$

Bu Eşitlikte;

$\boldsymbol{B}$ $= m \times m$ boyutlu katsayı matrisi

$\boldsymbol{\Gamma}$ $= m \times n$ boyutlu katsayı matrisi

$\boldsymbol{Y}$ $= p \times 1$ boyutlu içsel değişkenler vektörü

$\boldsymbol{X}$ $= q \times 1$ boyutlu dışsal değişkenler vektörü

$\zeta = p \times 1$ boyutlu eşitlikte yer alan hatalar vektörüdür.

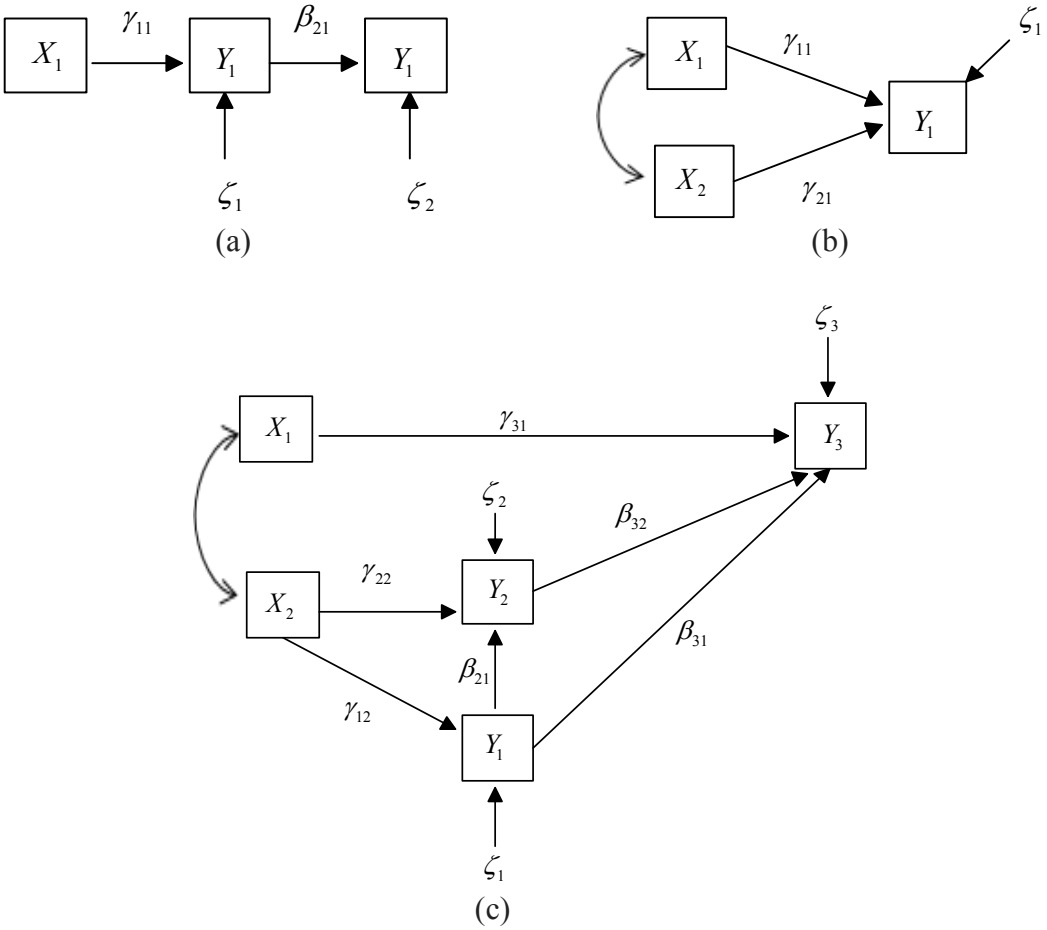
Bu modeller için standart varsayım hataların ζ, $\boldsymbol{X}$'lerle korelasyonsuz olmasıdır.

Gözlenen değişkenlerle yapısal eşitlik modellerinde yer alan ölçüm modeli

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\eta}$$
$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\xi} \qquad (3.2)$$

dir. Burada $\boldsymbol{Y} = p \times 1$ ve $\boldsymbol{X} = q \times 1$ boyutlu gözlenen değişkenlerdir. Bir başka ifade ile $\boldsymbol{X}$ ve $\boldsymbol{Y}$ 'nin gizil $\boldsymbol{\xi}$ ve $\boldsymbol{\eta}$'yı tam olarak temsil ettikleri ve her bir gizil değişken için sadece bir gösterge değişkenin kullanıldığı varsayılmaktadır (Bollen, 1989).

Gözlenen değişkenli yapısal eşitlik modellerinin yinelemeli (recursive) ve yinelemesiz (non-recursive) modeller olmak üzere iki temel türü vardır. (Hayduk, 1987; Bollen, 1989). Yinelemeli modeller karşılıklı nedensellik veya geri beslemeli bir döngü içermeyen denklem sistemleridir. Bu şekilde modelde yer alan $\boldsymbol{B}$ alt üçgen matris olarak yazılabilmektedir. Aynı zamanda denklemlerde yer alan hata terimlerinin korelasyonsuz oldukları varsayıldığından hataların kovaryans matrisi $\boldsymbol{\Psi}$ de köşegen bir matris olmaktadır. Ardışık olmayan modeller ise karşılıklı nedensellik, geri beslemeli döngü veya korelasyonlu hata terimleri içermektedir. Şekil 3.1 yinemeli modeller için varsayımsal örnekleri göstermektedir (Bollen, 1989).

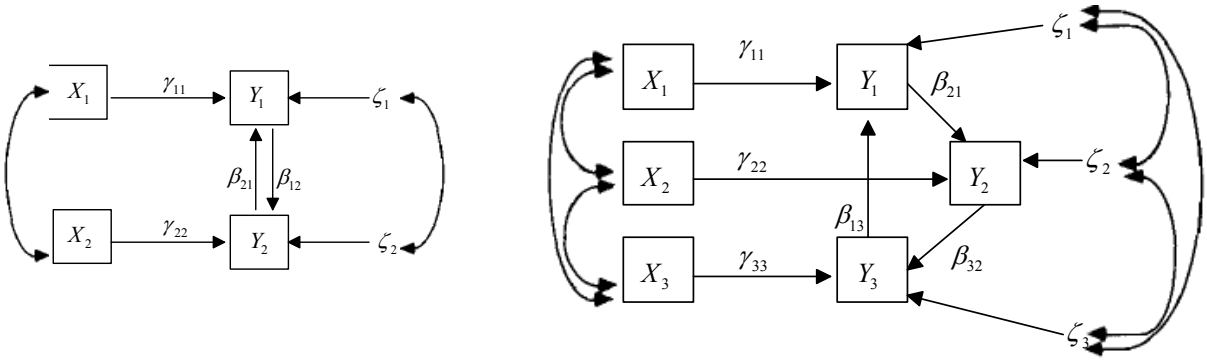


Şekil 3.1. Yinelemeli yapısal eşitlik modelinin üç örneği

Şekil 3.1(c)'deki modelin matris gösterimi Eşitlik 3.3'te verilmiştir. Buna göre $\boldsymbol{B}$ alt üçgen ve köşegen olduğundan modelin ardışık olduğu görülmektedir.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta_{21} & 0 & 0 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{12} \\ 0 & \gamma_{22} \\ \gamma_{31} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

Gözlenen değişkenli yapısal eşitlik modelinin ikinci tipi yinelemesiz modeller, karşılıklı nedensellik, geri beslemeli döngü veya korelasyonlu hata terimleri içermektedir. Bu modeller için varsayımsal iki örnek model şekil 3.2'de gösterilmektedir.



(a) (b)

Şekil 3.2. Yinelemesiz yapısal eşitlik modeline ilişkin iki örnek

Şekil 3.2 (b)'deki varsayımsal yinelemesiz modelin $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\Psi}$ ve $\boldsymbol{\Phi}$ değişkenlerinin matris gösterimi,

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & \beta_{12} & 0 \\ \beta_{21} & 0 & 0 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 \\ 0 & \gamma_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \psi_{11} & & \\ \psi_{12} & \psi_{22} & \\ \psi_{12} & \psi_{23} & \psi_{33} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

biçimindedir. Bu matrisler Dikkate alındığında $\boldsymbol{B}$ alt üçgen matris olarak yazılamadığından ve $\boldsymbol{\Psi}$, köşegen matris olmadığından bu modelin ardışık olmadığı ortaya çıkmaktadır (Bollen, 1989).

3.2. Gözlenen Değişkenlerle Yapısal Eşitlik Modelinin Kovaryans Yapısı

Genel yapısal eşitlik modellerinde temel hipotez

$$\Sigma = \Sigma(\theta) \tag{3.6}$$

şeklinde kurulmaktadır. Burada Σ, $\boldsymbol{Y}$ ve $\boldsymbol{X}$'in kitle kovaryans matrisi, $\Sigma(\theta)$ modelin θ'daki serbest parametrelerinin bir fonksiyonu olarak yazılan kovaryans matrisidir. Eşitlik 3.6, kovaryans matrisinin her bir elemanının model parametrelerinin bir ya da daha fazla bir fonksiyonu olduğunu belirtmektedir. $\Sigma(\theta)$ matrisi üç kısımdan oluşmaktadır:

1. $\boldsymbol{Y}$'nin kovaryans matrisi,
2. $\boldsymbol{X}$ ile $\boldsymbol{Y}$'nin kovaryans matrisi,
3. $\boldsymbol{X}$'in kovaryans matrisi (Long,1987).

Birinci kısımdaki $\boldsymbol{Y}$'nin kovaryans matrisi:

$$\begin{aligned}\Sigma_{YY}(\theta) &= E\left(\boldsymbol{YY}'\right)\\ &= E\left[(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})^{-1}(\Gamma\boldsymbol{X}+\zeta)\left((\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})^{-1}(\Gamma\boldsymbol{X}+\zeta)\right)'\right]\\ &= (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})^{-1}\left(E\left(\Gamma\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}'\Gamma'\right)+E\left(\Gamma\boldsymbol{X}\zeta'\right)+E\left(\zeta\boldsymbol{X}'\Gamma'\right)+E\left(\zeta\zeta'\right)\right)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})^{-1'}\\ &= (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})^{-1}\left(\Gamma\Phi\Gamma'+\Psi\right)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})^{-1'}\end{aligned} \tag{3.7}$$

şeklindedir. Burada Φ matrisi, $\boldsymbol{X}$'in , Ψ matrisi ise ζ 'nın kovaryans matrisidir.

İkinci kısımdaki $\boldsymbol{X}$ ile $\boldsymbol{Y}$'nin kovaryans matrisi

$$\begin{aligned}\Sigma_{XY}(\theta) &= E\left(\boldsymbol{XY}'\right)\\ &= E\left[\boldsymbol{X}\left((\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})^{-1}(\Gamma\boldsymbol{X}+\zeta)\right)'\right]\\ &= \Phi\Gamma'(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})^{-1'}\end{aligned} \tag{3.8}$$

matrisine eşittir. Üçüncü kısımdaki $\boldsymbol{X}$'in kovaryans matrisi:

$$\Sigma_{XX}(\theta) = E\left(\boldsymbol{XX}'\right) = \Phi \tag{3.9}$$

biçimindedir. Böylece her üç kovaryans matrisi Eşitlik 3.6'da yerine konularak,

$$\Sigma(\theta)=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})^{-1}\left(\Gamma\Phi\Gamma'+\Psi\right)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})^{-1'} & (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})^{-1}\Gamma\Phi \\ \Phi\Gamma'(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})^{-1'} & \Phi\end{bmatrix} \tag{3.10}$$

elde edilmektedir (Bollen, 1989; Long, 1987).

3.3. Gözlenen Değişkenlerle Yapısal Eşitlik Modelinin Tanımlanması

Tanımlanma problemi modelin tahmininden önce aşılması gereken ve bütün YEM modellerini ilgilendiren önemli bir problemdir. Matematiksel olarak bir modelin tanımlanması, θ'daki tüm bilinmeyen parametrelerin Σ'nın bir veya daha çok elemanının bir fonksiyonu olarak yazılabilmesi anlamına gelmektedir (Bollen, 1989).

Bilinen ve bilinmeyen parametreleri ilişkilendiren bir veya daha çok eşitlik tanımlılık araştırmasında başlangıcı oluşturmaktadır. Burada bir parametrenin "bilinen" olması bu parametrenin değerinin bilinmesi değil tanımlı olduğunun bilinmesi anlamına gelmektedir. Bu parametreler genellikle tutarlı tahmincileri bulunan ve tanımlılık sorunları olmayan varyans ve kovaryans gibi gözlenen değişkenlerin dağılımının kitle karakteristikleridir. Bilinmeyen parametreler ise tanımlılık durumları "bilinmeyen" parametreler olup araştırmacı bu parametreler için tek bir değerin bulunup bulunmadığını belirlemek zorundadır. Bilinmeyen parametreler YEM'den gelmektedir.

Tanımlılık, bilinmeyen parametrelerin sadece tanımlı parametrelerin fonksiyonları olduğunun ve bu fonksiyonlardan da sadece tek bir çözüm elde edilebileceğinin gösterilmesi ile ortaya çıkartılmaktadır. Bu şekilde gösterilebilen bilinmeyen parametreler tanımlı, aksi halde tanımsızlardır. Böylece, tanımlılık sürecinde, bilinmeyen parametreler tanımlı oldukları bilinen parametreler cinsinden çözülmeye çalışılır. Örneğin $Var(\boldsymbol{y})$'nin tanımlı bir parametre, θ_1 ve θ_2'nin bilinmeyen parametreler ve bunları ilişkilendiren denkleminde $Var(\boldsymbol{y})=\theta_1+\theta_2$ olduğu varsayılırsa bu denklemden tanımlılık θ_1 ve θ_2'nin biricik değerlerinin elde edilip edilemeyeceği ile belirlenir. İki bilinmeyenli tek bir denkleme sahip olunduğundan söz konusu θ_1 ve θ_2 'nin tanımlı olmadığı açıktır. $Var(\boldsymbol{y})$'nin verilen her değeri için $Var(\boldsymbol{y})=\theta_1+\theta_2$ denklemini sağlayan sonsuz sayıda θ_1 ve θ_2 değeri bulunabilir. $\theta_1=\theta_2$ şeklinde ikinci bir denklem olduğu varsayıldığında ise, verilen bir $Var(\boldsymbol{y})$ için, $Var(\boldsymbol{y})/2$,

θ_1 ve θ_2 'nin tek çözümü olduğundan bu parametreler tanımlı olacaklardır (Bollen, 1989; Şimşek, 2007).

Daha karmaşık YEM'ler içinde aynı prensip geçerlidir. θ'da yer alan parametrelerin tanımlama durumu bilinmemektedir. Burada θ; $\boldsymbol{B}, \Gamma, \Psi$ ve Φ'nın kısıtlanmış parametrelerini ve *t* tane serbest parametreyi kapsar. Serbest parametre elde edilen veri seti aracılığıyla hesaplanan ve değeri sıfır olmayan parametredir (Bollen, 1989; Kaplan, 2000; Raykov ve Marcoulides, 2006; Özkoç, 2011).

Model karmaşıklaştıkça cebirsel manipülasyonlarla modeldeki parametrelerin tanımlı oldukları bilinen varyans, kovaryanslar ve diğer parametreler cinsinden yazılmasına çalışılarak tanımlılığın ispatlanmasında hataların yapılması olasıdır. Bu nedenle tanımlılığın kanıtlanması için bazı kurallar da geliştirilmiştir (Şimşek, 2007).

Gözlenen değişkenli YEM'ler için kullanılan tanımlama kuralları; "t-kuralı", "Sıfır B kuralı", "Ardışıklık kuralı", Rank ve mertebe şartları" olmak üzere dört tanedir (Loehlin, 2004; Bollen, 1989).

3.3.1. *t*- Kuralı

Tanımlılık için uygulanabilecek en basit testtir. Fakat tanımlama koşulu için yeterli olmayan kuraldır. Gözlenen değişkenlerin kovaryans matrisindeki gereksiz olmayan elemanların sayısının θ 'daki bilinmeyen parametrelerin sayısından büyük veya bu sayıya eşit olması *t-kuralı* olarak adlandırılmaktadır (Jöreskog ve Sörbom, 1989).

$$t \leq \frac{1}{2}(p+q)(p+q+1) \tag{3.11}$$

t, θ 'daki serbest ve sınırlandırılmamış parametre sayısını ve $(p+q)$ gözlenen değişken sayısını ifade ederken eşitsizliğin sağ tarafı Σ'nın gereksiz olmayan elemanlarının $(1/2)(p+q)(p+q+1)$ tane eşitlik içerdiği anlamına gelmektedir. Bilinmeyenlerin sayısı denklem sayısını aştığı takdirde artık θ 'nın tanımlılığı mümkün olamaz. Modelin tanımlanmış olduğundan bahsedilebilmesi için söz konusun eşitsizliğin sağlanması gereklidir ancak bu tek başına tanımlanmayı garanti etmeyeceğinden diğer kurallar geliştirilmiştir.

3.3.2. B Yokluk Kuralı

İçsel bir değişkenin diğer bir içsel değişkeni etkilemediği çok eşitlik içeren bir model ele alındığında $\boldsymbol{B}$ matrisi sıfır olur (Bollen, 1989). Örnek olarak aşağıdaki iki eşitlik içeren model düşünülsün.

$$\begin{aligned} y_1 &= \gamma_{11}x_1 + \gamma_{12}x_2 + \zeta_1 \\ y_2 &= \gamma_{21}x_1 + \gamma_{23}x_3 + \zeta_2 \\ Cov\left(x_i, \zeta_j\right) &= 0, \quad i = 1,2,3; \quad j = 1,2 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Bu modelde y_1 değişkeni y_2 değişkenini, y_2 değişkeni y_1 değişkenini etkilemediği için B matrisi sıfırdır. Γ, Φ ve Ψ'daki bilinmeyen parametrelerin ve Ψ, Σ'daki tanımlı parametrelerinin fonksiyonları oldukları gösterilebilir. Eşitlik 3.10'da $\boldsymbol{B} = 0$ değeri yerine konulursa;

$$\Sigma = \Sigma(\theta) \tag{3.13}$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{yy} & \Sigma_{yx} \\ \Sigma_{xy} & \Sigma_{xx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma\Phi\Gamma' + \Psi & \Gamma\Phi \\ \Phi\Gamma' & \Phi \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

elde edilir. Eşitlik 3.14'te $\Phi = \Sigma_{xx}$ olduğundan Φ tanımlanmış olur. O zaman;

$$\begin{aligned} \Phi\Gamma' &= \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{xx}\Gamma' &= \Sigma_{xy} \\ \Gamma' &= \Sigma_{xx}^{-1}\Sigma_{xy} \end{aligned} \tag{3.15}$$

Yazılarak Γ 'nın tanımlı oldukları bilinen kovaryans matrislerinin bir fonksiyonu olduğunun gösterilmesinden dolayı tanımlanmış olur. Son olarak Eşitlik 3.14, Φ için incelendiğinde:

$$\begin{aligned} \Psi &= \Sigma_{yy} - \Gamma\Phi\Gamma' \\ &= \Sigma_{yy} - \Sigma_{yx}\Sigma_{xx}^{-1}\Sigma_{xx}\Sigma_{xx}^{-1}\Sigma_{xy} \\ &= \Sigma_{yy} - \Sigma_{yx}\Sigma_{xx}^{-1}\Sigma_{xy} \end{aligned} \tag{3.16}$$

elde edilmesinden dolayı Ψ'deki elemanların da tanımlı oldukları gösterilmiş olur. (Bollen, 1989; Brown, 2004, Kaplan, 2000, Şimşek, 2007). Bu çözümlemelerden sonra görülmektedir ki $\boldsymbol{B} = 0$ olduğunda Γ, Φ ve Ψ, gözlenen değişkenlerin tanımlanmış kovaryans matrislerinin bir fonksiyonu olarak yazılabilmektedir. Böylece bu gözlenen değişkenler tanımlı olmaktadır. Bu tanımlılık şartı, $\boldsymbol{B}$ Yokluk Kuralı olarak

adlandırılmaktadır. **B** Yokluk Kuralı tanımlama için yeterli bir koşuldur. Eğer ***B*** yokluk ifade ediyorsa, bilinmeyen parametreler tanımlıdır. ***B*** Yokluk Kuralı tanımlama için gerekli bir koşul değildir (Bollen, 1989).

3.3.3. Yineleme Kuralı

B yokluk kuralı gibi yineleme kuralı da modelin tanımlılığı için yeterli bir şarttır. Yineleme kuralının uygulanabilmesi için ***B*** alt üçgen matris ve $\boldsymbol{\Psi}$ matrisi de köşegen matris olmalıdır (Bollen, 1989). Her iki koşulun da sağlanması durumunda model tanımlı olacaktır.

Şekil 3.1 (c)'deki gösterilen ***B*** alt üçgen ve $\boldsymbol{\Psi}$ köşegen matris olduğu yinelemeli model dikkate alındığında,

$$y_1 = \gamma_{12} x_2 + \zeta_1 \tag{3.17}$$

$$y_2 = \beta_{21} y_1 + \gamma_{22} x_2 + \zeta_2 \tag{3.18}$$

$$y_3 = \beta_{31} y_1 + \beta_{32} y_2 + \gamma_{31} x_1 + \zeta_3 \tag{3.19}$$

eşitlikleri yazılır. Bütün yinelemeli modellerin genel özelliği hata teriminin, açıklayıcı değişkenlerin tümü ile ilişkisiz olmasıdır. Açıklayıcı dışsal değişkenler için $\boldsymbol{x}$ ile $\boldsymbol{\zeta}$'nin ilişkisiz oldukları varsayılmaktadır. Örneğin yukarıda verilen yinelelemeli modeller incelendiğinde $Cov(x_1, \zeta_3)$, $Cov(x_2, \zeta_1)$ ve $Cov(x_2, \zeta_2)$ değerleri sıfırdır. Ancak başka bir denklemde de açıklayıcı değişken olan içsel değişkenlerle hata terimi arasındaki kovaryansın sıfır olduğunun da ortaya konması gerekmektedir. Eşitlik 3.18 ele alınırsa

$$COV(x_2, \zeta_1) = COV(\zeta_2, \gamma_{12} x_2 + \zeta_1) = 0 \tag{3.20}$$

eşitliği geçerlidir. Böylece ikinci eşitliğin iki açıklayıcı değişkeni y_1 ve x_2 ve ζ_2'i ile ilişkisiz olmaktadır. Benzer biçimde üçüncü eşitlik için $Cov(x_3, \zeta_1), Cov(x_3, \zeta_2)$ değerleri sıfırdır. Herhangi bir yinelemeli modeldeki *i'*inci eşitlik için, ζ_i eşitliklerde yer alan içsel açıklayıcı değişkenler ile ilişkisizdir. Herhangi bir yinelemeli modeldeki *i'*inci eşitlik için, ζ_i eşitliklerde yer alan içsel açıklayıcı değişkenler ile ilişkisizdir şeklinde bir genelleme yapılabilir. Yinemeli modellerdeki $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\Phi}$ ve $\boldsymbol{\Psi}$'nin tanımlılığı ortaya konan bu özellik kullanılarak gösterilebilmektedir. Eğer bir eşitlikte yer alan tüm açıklayıcı değişkenler hatalar ile ilişkisiz ise, o zaman standart regresyon eşitliğine benzer biçimde eşitlikler tanımlanmış olur (Bollen, 1989). Yinelemeli bir modelin *i'* inci eşitliği,

$$y_i = \left[\beta_i^{'} \middle| \gamma_i^{'} \right] z_i + \zeta_i \tag{3.21}$$

biçiminde yazılabilir. Burada y_i bağımlı değişken, ζ_i , *i*'inci eşitlikteki hata terimidir. $\beta_i^{'}$ vektörü tüm sıfır değerlerinin kaldırıldığı ve sadece serbest parametrelerin yer aldığı **B**'nin *i*'inci satırıdır; $\gamma_i^{'}$ benzer bir biçimde $\boldsymbol{\Gamma}$ için tanımlanır. z_i ise y_i üzerinde doğrudan etkilere sahip ***y*** ve ***x***'teki değişkenlerin alt kümesidir. Eşitlik 3.19 için bu tanımlamaların açık biçimleri yazılırsa: $z_3^{'}\left[y_1, y_2, x_1 \right]^{'}$, $\beta_3^{'}\left[\beta_{31}, \beta_{32} \right]$ ve $\gamma_3^{'}\left[\gamma_{31} \right]$ dir. Eşitlik 3.21'in her iki tarafı $z_i^{'}$ ile çarpılıp, beklenen değeri alındığında;

$$\sigma_{y_i z_i}^{'} = \left[\beta_i^{'} \middle| \gamma_i^{'} \right] \Sigma_{z_i z_i} + \sigma_{\zeta_i z_i}^{'} \tag{3.22}$$

elde edilir. Burada $\sigma_{y_i z_i}^{'}$, y_i'nin açıklayıcı değişkenleri ile y_i'nin kovaryans satır vektörüdür. $\Sigma_{z_i z_i}$, z_i'nin tekil olmayan kovaryans matrisi ve $\sigma_{\zeta_i z_i}^{'}$, *i*'inci eşitlik için açıklayıcı değişkenler ile ζ_i ' nin kovaryans vektörüdür. ζ_i, *i*'inci eşitlik için açıklayıcı değişkenler ile ilişkisiz olduğundan $\sigma_{y_i z_i}^{'}$ sıfırdır. Bu terim Eşitlik 3.22'den çıkartılıp, $\left[\beta_i^{'} \middle| \gamma_i^{'} \right]$ için çözümlendiğinde,

$$\left[\beta_i^{'} \middle| \gamma_i^{'} \right] = \sigma_{y_i z_i}^{'} \Sigma_{z_i z_i}^{-1} \tag{3.23}$$

elde edilir. $\sigma_{y_i z_i}^{'}$ ve $\Sigma_{z_i z_i}^{-1}$ gözlenen değişkenlerin kovaryansları tanımlanmıştır ve $\left[\beta_i^{'} \middle| \gamma_i^{'} \right]$ tanımlı parametrelerin bir fonksiyonu olduğu için fazla tanımlanmıştır.

ψ_{ii}'nin tanımlılığın gösterilmesi için, Eşitlik 3.21'in her iki tarafı $y_i^{'}$ ile çarpılıp, beklenen değeri alındığında;

$$Var\left(y_i \right) = \left[\beta_i^{'} \middle| \gamma_i^{'} \right] \Sigma_{z_i z_i} \left[\frac{\beta_i}{\gamma_i} \right] + \psi_{ii} \tag{3.24}$$

elde edilir. Eşitlik 3.24 ψ_{ii} için çözülüp $\left[\beta_i^{'} \middle| \gamma_i^{'} \right]$ yerine Eşitlik 3.23'te bulunan değer yerine konularak çözümlenirse,

$$\psi_{ii} = Var\left(y_i \right) - \sigma_{y_i z_i}^{'} \Sigma_{z_i z_i}^{-1} \sigma_{z_i y_i} \tag{3.25}$$

elde edilir. ψ_{ii} tanımlanmış olan varyans ve kovaryansların bir fonksiyonudur, bu yüzden de tanımlanmış durumdadır.

Elde edilen bu sonuçlar yinelemeli modeldeki $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\Phi}$ ve $\boldsymbol{\Psi}$'nin tanımlanması için yeterlidir. Eşitlik 3.21'deki *i'*inci eşitlik için $\boldsymbol{B}$ ve $\boldsymbol{\Gamma}$'daki serbest parametrelerin *i'*inci satırının tanımlı olduğunu kanıtlamaktadır. Buna benzer ilişkiler tüm eşitlikler için geçerli olduğundan $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{\Gamma}$ ve $\boldsymbol{\Psi}$ tanımlanmıştır. Böylece yinelemeli modeldeki tüm parametrelerin tanımlanması sağlanmış olunur. Yineleme Kuralı model tanımlaması için yeterli bir koşuldur (Hayduk, 1987; Bollen,1989; Çelik, 2009).

3.3.4. Rank ve Mertebe Koşulları

t kuralı dışındaki diğer tanımlama kuralları $\boldsymbol{B}$ ya da $\boldsymbol{\Psi}$ matrisleri hakkında kısıtlamalar içerir. Yinelemesiz modeller bu kısıtları sağlamadığı için ardışık olmayan birçok sisteme uygulanabilen rank ve mertebe koşulu geliştirilmiştir. Yineleme Kuralı ve *B* Yokluk Kuralına benzer biçimde, tanımlamanın Rank ve Mertebe Koşulları eşitlikteki hatalar ile tüm dışsal değişkenlerin ($\boldsymbol{x}$) ilişkisiz olduğunu varsayılmaktadır (Bollen, 1989).

Rank ve Mertebe Koşulları tanımlamanın belirlenmesi için önceki kuralardan birkaç farklı yol izlemektedir. İlk olarak, $(\mathbf{I} - \mathbf{B})$'in tekil olmaması (rankı sütun ya da satır sayısına eşit olan kare matris) koşuluyla **B**'nın her hangi bir formda olduğu varsayılır. İkinci olarak, bir kerede eşitliğin tanımlanmasının yapılmasına yardım eder. Her bir eşitlik aynı koşulları yerine getirmelidir. Üçüncü farklılık ise daha zordur, $\boldsymbol{\Psi}$'nin herhangi bir kısıtlamaya sahip olmadığı varsayılır. $\boldsymbol{\Psi}$'nin hiçbir elemanı sabit bir değere göre kısıtlanmamıştır (örneğin, sıfır). Eğer bir modelin tüm eşitlikleri Rank ve Mertebe Koşulları yerine getiriyorsa, $\boldsymbol{\Psi}$'nin tüm elemanları tanımlıdır ve tahmin edilebilir. Eğer $\boldsymbol{\Psi}$'nin elemanlarının kesin bir biçimde kısıtlandığına dair bir bilgi varsa, bu süreç kullanılamaz (Hayduk, 1987; Bollen, 1989; Çelik, 2009).

Bir eşitliğe konulan tek kısıtın bazı değişkenlerin hariç tutulduğu durumda bir eşitliğin tanımlı olması için gerekli şart olan mertebe koşulu "bir eşitliğin dışında bırakılan değişkenlerin sayısının en az $p-1$ olması durumunda mümkün olmaktadır" şeklinde ifade edilmektedir (Bollen, 1989).

Rank ve Mertebe Koşulları süreçlerinin eşitlikler yardımıyla gösterilmesi için aşağıda Eşitlik 3.24'te ifade edilen bir modele ait tek bir eşitlik ele alındığında;

$$y_i = \left[\beta_i' \middle| \gamma_i' \right] z_i + \zeta_i \tag{3.26}$$

bu eşitlik, Eşitlik 3.21 ile aynıdır. Burada ana farklılık z_i'deki tüm $\boldsymbol{y}$ ve $\boldsymbol{x}$'lerin y_i'e sahip olması beklenir. β_i' vektörü **B**'nin *i*'inci satırına eşittir. γ_i', $\boldsymbol{\Gamma}$ 'nın *i*'inci satırına eşittir ve $1\times q$ boyutlu vektördür. Eşitlik 3.26'nın her iki tarafı $\boldsymbol{x}'$ ile çarpılıp, beklenen değeri alındığında;

$$\sigma_{y_i x}' = \left[\beta_i' \middle| \gamma_i'\right]\Sigma_{z_i x} \tag{3.27}$$

elde edilir. β_i' ve γ_i' sadece $\sigma_{y_i x}'$ ve $\Sigma_{z_i x}$'deki tanımlı kovaryans elemanlarının fonksiyonları oldukları takdirde tanımlı olurlar. Tanımlılığın sağlanmasında gerek ancak yeter olmayan şart, Eşitlik 3.27 ile öne sürülen eşitlik sayısının en azından $\left[\beta_i' \middle| \gamma_i'\right]$'deki bilinmeyen serbest parametrelerin sayısına eşit olmak zorundadır. Eşitliklerin sayısı $\sigma_{y_i x}'$ elemanlarının sayısına (q) eşittir. β_i'' deki bilinmeyenlerin sayısı $p-1$'dir ve γ_i'' daki ise *q*'dur. Açık bir şekilde, $(p-1)+q$ tane bilinmeyenin yer aldığı *q* tane eşitlik ile β_i' ve γ_i' tanımlanamaz. $(p-1)+q$ tane bilinmeyen sayısını *q*'ya indirgenmelidir. Böylece tanımlılık için gerekli koşulun sağlanması için β_i' ve γ_i''deki elemanların üstüne $p-1$ kısıt konulması gerekmektedir. Genel olarak bu kısıt i β_i' ve γ_i'' deki bazı elemanlar sıfırlanarak ilgili parametrelere karşılık gelen değişkenlerin Eşitlikten dışlanması ile sağlanmaktadır. Modele konulan tek tür kısıt sadece bazı değişkenlerin dışlanması olduğu takdirde tanımlılığı mümkün kılmak için *i*'nci denklemden $p-1$ adet değişkenin atılması mertebe şartının sağlandığını ifade etmektedir (Hayduk, 1987; Bollen, 1989; Özkoç, 2011).

Şekil 3.2(b)'deki varsayımsal yinelemesiz modelin Eşitlik 3.4 ve 3.5'te verilen **B** ve $\boldsymbol{\Gamma}$ matrislerindeki ve elemanları sıfır yapılarak kısıtlanmadığı durumda,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \beta_{12} & 0 \\ \beta_{21} & 0 & 0 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 \\ 0 & \gamma_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

olur ve ilk eşitlik için β_{31} ve γ_{12}'nin sıfır olarak kısıtlanmadığı varsayıldığında:

$$y_1 = \beta_{12}y_2 + \beta_{13}y_3 + \gamma_{11}x_1 + \gamma_{12}x_2 + \zeta_1 \tag{3.29}$$

biçimindedir. Bu eşitlik, Eşitlik 3.26 ile aynı biçimdedir. İçsel değişkenler ile eşitliğin her iki tarafı çarpılıp, beklenen değeri alındığında;

$$Cov(y_1, x_1) = \beta_{12} Cov(y_2, x_1) + \beta_{13} Cov(y_3, x_1) y_3 + \gamma_{11} Var(x_1) + \gamma_{12} Cov(x_2, x_1) \quad (3.30)$$

$$Cov(y_1, x_2) = \beta_{12} Cov(y_2, x_2) + \beta_{13} Cov(y_3, x_2) y_3 + \gamma_{12} Var(x_2) + \gamma_{11} Cov(x_1, x_2) \quad (3.31)$$

Dört bilinmeyenli $(\beta_{12}, \beta_{13}, \gamma_{11}, \gamma_{12})$ iki eşitlik elde edildiği için ilgili parametreler tek bir çözüm elde edilemeyecektir. Mertebe şartı birinci denklemden $(p-1) = 2$ değişkenin dışlanmasını gerektirmektedir. Gerçek belirlemede $\beta_{31} = 0$ ve $\gamma_{12} = 0$ 'dır ve bu belirleme dikkate alındığında ilk eşitlik için tanımlama için gerekli koşulun sağlandığı belirlenir.

Bir modeldeki tüm eşitlikler için *Mertebe Koşulunu* kontrol etmenin yolu bir matrise karşılık gelmektedir. Bu matris **C** olarak tanımlanmakta ve $\boldsymbol{C} = \left[(I - B) \middle| \Gamma \right]$ 'dir. Eğer bu matrisin bir satırı $(p-1)$ tane veya daha çok sıfıra sahip ise, Mertebe Koşulunun sağlanmış olduğuna karar verilir (Bollen, 1989; Çelik, 2009). Eşitlik 3.28'de verilen matris gösterimi için **C** matrisi;

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_{12} & 0 & -\gamma_{11} & 0 \\ -\beta_{21} & 1 & 0 & 0 & -\gamma_{22} \\ -\beta_{31} & -\beta_{32} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

dir ve **C**'nin her bir satırı $(p-1)$ veya 2 tane dışlamaya sahip olduğundan, her bir eşitlik Mertebe Koşulunu yerine getirmektedir. Mertebe Koşulu, serbest Ψ'yi yinelemesiz modeller için eksik belirlemenin ortadan kaldırıldığı kolay bir yoldur. Bu gerekli ancak yeterli bir koşul değildir ve bu durumda tanımlamanın Mertebe Koşuluyla yapılabileceği garanti edilemez. Eksik belirleme, aynı biçimdeki ancak eski eşitlikten farklı parametreler ile yeni bir eşitliğin üretiminin olası olduğu durumda, modeldeki diğer eşitliklerin doğrusal bir kombinasyonu olarak ortaya çıkabilir (Bollen, 1989; Çelik, 2009). Bu gösterimin aktarılması için iki eşitlik aşağıda verilmiştir:

$$y_1 = \beta_{12} y_2 + \gamma_{11} x_1 + \gamma_{12} x_{2+} \zeta_1 \quad (3.33)$$

$$y_2 = \beta_{21} y_1 + \gamma_{22} x_2 + \zeta_2 \tag{3.34}$$

Her iki eşitlikte yer alan x_2'nin dışlandığı varsayımı altında $(\gamma_{12} = \gamma_{22} = 0)$, **C** matrisi;

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_{12} & -\gamma_{11} & 0 \\ -\beta_{21} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

şeklinde elde edilir. Eşitliklerin her ikisi için Mertebe Koşulu, her bir eşitlik $(1 = p - 1)$ tane dışlamaya sahip olduğu için sağlanmıştır. **C** matrisinin ikinci satırı *a* olarak isimlendirilen *a* sabiti ile çarpılıp bu çarpım sonucu birinci satıra eklendiğinde:

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 - \beta_{21} a & -\beta_{12} + a & -\gamma_{11} & 0 \\ -\beta_{21} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

elde edilir ve ikinci işlem adımı olarak birinci satırın her bir elemanı $(1 - \beta_{21} a)$ bölündüğünde:

$$\boldsymbol{C}^* = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_{12}^* & -\gamma_{11}^* & 0 \\ -\beta_{21}^* & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

olur. Burada $-\beta_{12}^* = \left(\dfrac{-\beta_{12} + a}{1 - \beta_{21} a} \right)$ ve $-\gamma_{11}^* = \dfrac{-\gamma_{11}}{1 - \beta_{21} a}$ dir. **C***'ın birinci satırında gösterilen ilk eşitlik, Eşitlik 3.36'da ifade edilen **C** matrisinin ilk satırında gösterildiği gibi aynı şekildedir ve aynı değişkenler dışlanmıştır. $-\beta_{12}^*$ ve $-\gamma_{11}^*$' nin sonsuz bir kümesi bu süreçle elde edilebilir. Benzer bir çözümleme süreci **C** matrisinin ikinci satırı içinde gerçekleştirildiğinde;

$$\boldsymbol{C}^* = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_{12} & -\gamma_{11} & 0 \\ -\beta_{21} + a & 1 - a\beta_{12} & a - \gamma_{11} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.38}$$

olur. **C*'** ın yeni ikinci satırı **C**'nin ikinci satırından farklı bir şekle sahiptir. **C*'** ın (2,3) konumu $a - \gamma_{11}$ iken, **C** için aynı konumun değeri sıfırdır. Buradan da görüleceği gibi yeni ikinci eşitlik ilk eşitliğin doğrusal bir kombinasyonundan üretilmemiştir. Bu durumda ikinci eşitlik tanımlıdır. Bu durumda ikinci eşitlik tanımlıdır.

Bu işlemsel sürecin fazlasıyla karmaşık olan çoklu eşitlik sistemlerinde uygulanması oldukça zordur. Rank Kuralı daha az çaba harcayarak tanımlamanın gerçekleştirilmesini sağlamaktadır. Rank Kuralı $C = \left[(I - B) \middle| \Gamma \right]$ matrisi ile başlar (Bollen, 1989; Çelik, 2009). *i'*inci eşitlik için tanımlamanın kontrol edilmesi için **C**

matrisinin i inci satırında sıfır olmayan tüm sütunları silinir. Silme işleminden sonra geriye kalan elemanları ile oluşan yeni matris $\boldsymbol{C}_i$ olarak adlandırılır. $\boldsymbol{C}_i$'nin rankı $(p-1)$'e eşit olduğunda, i'inci eşitliğin tanımlanması için gerekli ve yeterli koşul sağlanmış olunur. Bu işlem süreci Rank Koşulu olarak tanımlanmaktadır (Hayduk, 1987; Bollen, 1989; Çelik, 2009). Eşitlik 3.31 ve 3.32'de verilen iki eşitlikten hareketle Eşitlik 3.34'deki **C** matrisi daha önce elde edilmişti. İlk eşitlik için tanımlama araştırıldığında, sadece ilk satırdaki dördüncü sütunun sıfıra sahip olduğu görülmektedir. Rank Koşulu işlem sürecine göre ilk eşitlik için ilk üç sütun silinir ve C_1 :

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

elde edilir. Bir matrisin veya vektörün rankı bağımsız satır ve sütunlarının sayısıdır. C_1 vektörünün rankı sıfırdır, birden daha az bir rank ile ilk eşitlik tanımsız durumdadır. Eşitlik 3.36'daki **C** matrisinin ikinci eşitliği için;

$$C_2 = \begin{bmatrix} -\gamma_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.40}$$

olur. C_2 vektörünün rankı 1'dir, ikinci eşitlik tanımlanmıştır. Mertebe ve Rank Koşulları eşitliklerin tanımlama durumlarını belirler. Eğer her bir eşitlik rank kuralını karşılıyorsa, o zaman model bir bütün olarak tanımlanmıştır. Bu her iki koşulunda avantajı $\boldsymbol{B}$ matrisi için özel bir biçime ihtiyaç duymamalarıdır (Bollen, 1989; Çelik, 2009).

Çizelge 3.1. Ölçme hatalarının olmadığı varsayımı altında gözlenen değişkenli yapısal eşitlikler için tanımlama kuralları

Tanımlama Kuralı	Değerlendirme	Koşullar	Gerekli Koşul	Yeterli Koşul
t-Kuralı	Model	$t \le \frac{1}{2}(p+q)(p+q+1)$	Evet	Hayır
B Kuralı	Model	$\mathbf{B}=0$	Hayır	Evet
Yineleme Kuralı	Model	$\mathbf{B}$ *Üçgensel* Ψ *Diyagonal*	Hayır	Evet
Rank Koşulu	Eşitlik	$rank(C_i) = p-1$ Ψ *Serbest*	Evet[a]	Hayır
Mertebe Koşulu	Eşitlik	*Kısıtlamalar* $\ge p-1$ Ψ *Serbest*	Evet[a]	Evet[a]

a:Rank ve Mertebe Koşullarının belirlenmesinde, Ψ ' deki tüm elemanların serbest olduğu varsayılır (Bollen, 1989).

Çizelge 3.1'de yukarıda aktarılan tanımlama kuralları özetlenmiş bir şekilde gösterilmiştir.

3.4. Gözlenen Değişkenlerle Yapısal Eşitlik Modellerinin Tahmini

YEM'de, modele ilişkin tahmini kovaryans matrisinin gözlenen kovaryans matrisine eşit olduğu durumda modelin gözlenen veriye uyumlu olduğuna karar verilir. Bir model belirlenmiş ve gözlenen kovaryans matrisi de biliniyorsa, parametre tahminleri için uygun bir metot seçilebilir. Farklı tahmin metotları farklı dağılımsal varsayımlara sahiptir. Bir tahmin süreci kabul edilebilir bir çözüme yakınsadığında, modelin uyumunun değerlendirilmesi gerekmektedir. Model uyumu kavramı YEM'in örneklem verisine uygunluğunun derecesini tanımlar. Tahmin süreci için genel bir yaklaşım; model tanımlanmış olduğunda ve iteratif tahmin süreci belli bir duruma yakınsadığında, tüm parametre tahminleri uygun değerlerin aralığı içindedir (Yılmaz ve Çelik, 2009).

YEM'de tahmin yöntemleri gözlenen değişkenlerin kovaryans matrisi ile yapısal parametreler arasındaki ilişkiden türetilmektedir:

$$\Sigma(\theta) = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})^{-1}(\Gamma\Phi\Gamma' + \Psi)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})^{-1'} & (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})^{-1}\Phi\Gamma \\ \Phi\Gamma'(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})^{-1'} & \Phi \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

Eğer yapısal eşitlik modeli doğru ise ve kitle parametreleri biliniyorsa, bu durumda $\Sigma = \Sigma(\theta)$ olur. Örnek olarak γ_{11} değeri bire eşit olan aşağıdaki basit yapısal model ele alınsın.

$$y_1 = x_1 + \zeta_1 \tag{3.42}$$

y_1 ve x_1 için kitle kovaryans matrisi,

$$\Sigma(\theta) = \begin{bmatrix} Var(y_1) & Cov(y_1, x_1) \\ Cov(x_1, y_1) & Var(x_1) \end{bmatrix} \tag{3.43}$$

şeklinde olur. Yapısal parametrelerin değişkenlerine göre Σ matrisi ise

$$\Sigma(\theta) = \begin{bmatrix} \phi_{11} + \psi_{11} & \phi_{11} \\ \phi_{11} & \phi_{11} \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

olur. Modelin doğru olduğu ve kitle parametrelerinin bilindiği varsayıldığında, Eşitlik 3.43'deki her eleman Eşitlik 3.44'deki elemanlarına karşılık gelmektedir. Bu durumda ϕ_{11} parametresi hem $Var(x_1)$ 'e hem de $Cov(x_1, y_1)$'e eşit olur yani aşırı tanımlanmıştır.

Uygulamalarda çoğunlukla kitle kovaryansları, varyansları ve parametreleri bilinmez. Bu nedenle de örnek tahminlerinin kovaryans matrisine dayanılarak bilinmeyen parametrelerin tahmini elde edilmeye çalışılır (Bollen, 1989).

y_1 ve x_1 için örneklem kovaryans matrisi,

$$S = \begin{bmatrix} Var(y_1) & Cov(y_1, x_1) \\ Cov(x_1, y_1) & Var(x_1) \end{bmatrix} \tag{3.45}$$

şeklindedir. İlk olarak ϕ_{11} ve ψ_{11} ($\hat{\phi}_{11}$ ve $\hat{\psi}_{11}$ ile gösterilir) tahmin değerlerinden oluşan $\hat{\Sigma}$ matrisi,

$$\Sigma(\theta) = \begin{bmatrix} \hat{\phi}_{11} + \hat{\psi}_{11} & \hat{\phi}_{11} \\ \hat{\phi}_{11} & \hat{\phi}_{11} \end{bmatrix} \tag{3.46}$$

Biçiminde belirlenir. $\hat{\Sigma} = \Sigma(\hat{\theta})$ yerine konularak $\boldsymbol{S}$ ile $\hat{\Sigma}$'nin birbirine mümkün olduğunca yaklaşmasını sağlayacak ϕ_{11} ve $\hat{\psi}_{11}$ seçilir (Bollen, 1989).

Parametre tahminleri için, örneklem kovaryans matrisi *S* ile modele ilişkin tahmini kovaryans matrisi $\hat{\Sigma}$ arasındaki farkın minimizasyonunu sağlayacak bir fonksiyon

gereklidir. Söz konusu fonksiyon, $F = F\left[\boldsymbol{S}, \Sigma(\boldsymbol{\theta})\right]$ biçimindeki uyum fonksiyonudur. F fonksiyonunun minimize olmasını sağlayan değer $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ için uyum fonksiyonu, $F = F\left[\boldsymbol{S}, \hat{\Sigma}\right]$ şeklindedir. Uyum fonksiyonunun taşıması gereken özellikler aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

I. $F\left[\boldsymbol{S}, \Sigma(\boldsymbol{\theta})\right]$ bir skalerdir.

II. $F\left[\boldsymbol{S}, \Sigma(\boldsymbol{\theta})\right] \geq 0$ olmalıdır.

III. Sadece $\Sigma(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{S}$ eşitliği sağlandığında $F\left[\boldsymbol{S}, \Sigma(\boldsymbol{\theta})\right]$ olur.

IV. $F\left[\boldsymbol{S}, \Sigma(\boldsymbol{\theta})\right]$, $\boldsymbol{S}$ ve $\Sigma(\boldsymbol{\theta})$'da süreklidir.

Browne (1984)'e göre bu özelliklere sahip uyum fonksiyonunun minimizasyonu ile $\boldsymbol{\theta}$'nın tutarlı tahmin edicileri elde edilmektedir. (Bollen, 1989; Browne, 1984).

3.4.1. En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi

Günümüzde genel yapısal eşitlik modelleri için en çok kullanılan teknik en çok olabilirlik (ML - Maximum Likelihood) yöntemidir. Hemen hemen tüm bilgisayar programlarında ML varsayılan (default) tahmin edici olarak kullanılmaktadır. ML yöntemi $\boldsymbol{\theta}$ parametresi tahmin edilirken, ML fonksiyonunun maksimize edilmesi durumudur. İlk olarak ekonometrik eşanlı eşitlik modellerinde tahmin yöntemi olarak ortaya çıkmıştır. ML yöntemi daha sonra Jöreskog (1973) tarafından genel YEM için geliştirilmiştir ve günümüzde yaygın olarak kullanılmaktadır (Kaplan, 2000; Bollen, 1989).

ML yönteminde modeldeki değişkenler çok değişkenli (multivariate) normal dağılımlı oldukları ve bunlara ilaveten kite kovaryans matrisi $\Sigma(\boldsymbol{\theta})$ ile örneklemin kovaryans matrisi $\boldsymbol{S}$'nin pozitif tanımlı olduğu varsayılır. Kitle varyans-kovaryans matrisinin yapısı ile ilgilenilen yapısal denklem modellerinde örneklem varyans-kovaryans matrisinin dağılımı üzerinde durulur.

$\boldsymbol{\theta}$'nın ML tahmini,

$$F_{ML} = \log\left|\Sigma(\boldsymbol{\theta})\right| + tr\left[\boldsymbol{S}\,\Sigma(\boldsymbol{\theta})^{-1}\right] - \log\left|\boldsymbol{S}\right| - (p+q) \tag{3.47}$$

şeklindeki uyum fonksiyonunun $\left(F_{ML}\right)$ minimize edilmesiyle elde edilir.

F_{ML} uyum fonksiyonu $\boldsymbol{y}$ ve $\boldsymbol{x}$'in çok değişkenli normal dağıldıkları varsayımından yararlanılarak türetilmektedir. F_{ML}'nin bulunmasında biri $\boldsymbol{y}$ ve $\boldsymbol{x}$'in çok değişkenli

normal dağılımlı, diğeri örnek kovaryans matrisi $\boldsymbol{S}$ 'nin Wishart Dağılımlı olmasından kaynaklanan iki alternatif yöntem kullanılmaktadır. $\boldsymbol{y}$ ve $\boldsymbol{x}$'in çok değişkenli normal dağıldıkları varsayımına dayanılarak uyum fonksiyonunun doğrudan elde edilmesinde ML yöntemi kullanılmaktadır. $\boldsymbol{y}$ ve $\boldsymbol{x}$ yerine ortalamalarından sapmaları kullanarak ve bu değişkenlerin birleştirilmesiyle elde edilen $(p+q)\times 1$ boyutlu z vektörü

$$f(z;\Sigma)=(2\pi)^{-(p+q)/2}|\Sigma|^{-1/2}\exp\left[\left(-\frac{1}{2}\right)z'\Sigma^{-1}z\right] \tag{3.48}$$

biçimindeki çok değişkenli dağılımdır. n adet bağımsız gözlemli rastgele bir örneğin ortak yoğunluk fonksiyonu (Johnson ve Wichern, 2007; Özkoç, 2011),

$$f(z_1,z_2,\ldots,z_n;\Sigma)=f(z_1;\Sigma)f(z_2;\Sigma)\ldots f(z_n;\Sigma) \tag{3.49}$$

dir. Kovaryans için hipotez $\Sigma=\Sigma(\theta)$'ya bağlı olarak Σ yerine $\Sigma(\theta)$ konularak, çekilen n birimli örneğin en çok benzerlik fonksiyonu ise,

$$L(\theta)=(2\pi)^{-n(p+q)/2}|\Sigma(\theta)|^{-n/2}\exp\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\sum_{i=1}^{n}z_i'\Sigma^{-1}(\theta)z_i\right] \tag{3.50}$$

şeklinde elde edilir. Eşitlik 3.50'deki son terim tekrar yazılarak,

$$\begin{aligned}
&\left(-\frac{1}{2}\right)\sum_{i=1}^{n}z_i'\Sigma^{-1}(\theta)z_i=\left(-\frac{1}{2}\right)\sum_{i=1}^{n}tr\left[z_i'\Sigma^{-1}(\theta)z_i\right]\\
&\left(-\frac{1}{2}\right)\sum_{i=1}^{n}z_i'\Sigma^{-1}(\theta)z_i=\left(-\frac{n}{2}\right)\sum_{i=1}^{n}tr\left[n^{-1}z_iz_i'\Sigma^{-1}(\theta)\right]\\
&\left(-\frac{1}{2}\right)\sum_{i=1}^{n}z_i'\Sigma^{-1}(\theta)z_i=\left(-\frac{n}{2}\right)\sum_{i=1}^{n}tr\left[\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\right]
\end{aligned} \tag{3.51}$$

elde edilir. Eşitlikteki $\boldsymbol{S}^*$ değeri kovaryans matrisinin ML tahmin edicisidir ve paydasında $n-1$ yerine n bulunmaktadır. Eşitlik 3.51'de elde edilen sonuç Eşitlik 3.50'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
&\log L(\boldsymbol{\theta})=sabit-\left(\frac{n}{2}\right)\log|\Sigma(\theta)|-\left(\frac{n}{2}\right)\sum_{i=1}^{n}tr\left[S^*\Sigma^{-1}(\theta)\right]\\
&\log L(\boldsymbol{\theta})=sabit-\left(\frac{n}{2}\right)\left\{\log|\Sigma(\theta)|+\sum_{i=1}^{n}tr\left[\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\right]\right\}
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Eşitlik 3.52 ile Eşitlik 3.47'deki ML fonksiyonu ile karşılaştırıldığında birçok farklılık görülse de bu farklılıklar $\boldsymbol{\theta}$'nın tahminini etkilememektedir. Eşitlik 3.52'deki sabit terimin $\hat{\boldsymbol{\theta}}$'nın seçimi üzerinde bir etkisi olmadığından Eşitlik 3.47'de

bulunmamasının bir sakıncası olmayacaktır. Seçilmiş bir örnek için $\boldsymbol{S}$ ve $(p+q)$ sabit olduklarından $\left(-\log|S|-(p+q)\right)$'nun Eşitlik 3.52'ye eklenmesi $\hat{\boldsymbol{\theta}}$'nın seçimini etkilememektedir. Sadece Eşitlik 3.52'de olup da Eşitlik 3.47'de olmayan teriminin $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 'nın seçimi üzerinde etkisi olmasına rağmen Eşitlik 3.47'de işaretin pozitif yapılması, Eşitlik 3.50'nin maksimizasyonu yerine Eşitlik 3.47'nin minizasyonuna yol açmaktadır. Nihayet bu iki denklem arasındaki son fark, Eşitlik 3.47'de sistematik hatasız örnek kovaryans matrisi $\boldsymbol{S}$ kullanılmış iken Eşitlik 3.42'de ML tahmin edicisinin $\boldsymbol{S}^*$ kullanılmış olmasıdır. $\boldsymbol{S}^* = \left[(n-1)/n\right]\boldsymbol{S}$ olmasından dolayı söz konusu matrisler büyük örneklem hacimlerinde eşit olacaklardır. Böylece $\boldsymbol{S}$ ve $\boldsymbol{S}^*$'daki bu farklılık haricinde F_{ML} ve *ML* ifadeleri ile bulunan $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ tahmin edicisi aynı olmaktadır (Bollen, 1989).

F_{ML}'nin türetilmesindeki ikinci yaklaşım Wishart Dağılımının kullanılmasıdır. x ve y'nin çok değişkenli normal dağılması durumunda sistematik hatasız örnek kovaryans matrisi $\boldsymbol{S}$, Wishart Dağılımına uymaktadır (Anderson 2003, Şimşek, 2007).
ML fonksiyonunun logaritması alınarak

$$\log L(\theta) = \log\left[\frac{|S|^{\left(n^*-(p+q)-1\right)/2}\exp\left\{-\left(n^*/2\right)tr\left[S\right]\Sigma^{-1}(\theta)\right\}\left(n^*/2\right)^{(p+q)/n^*/2}}{\pi^{\left((p+q)-((p+q)-1)\right)/4}\left|\Sigma^{-1}(\theta)\right|^{n^*/2}\prod_{i=1}^{p+q}\Gamma\left[(1/2)\left(n^*+n-i\right)\right]}\right] \tag{3.53}$$

biçiminde hesaplanmaktadır. Burada $n^* = n-1$ ve $\Gamma\left[(1/2)\left(n^*+n-i\right)\right]$ de verilen örneklem hacmi ve değişken sayısı $(p+q)$ için bir sabittir. Eşitlik 3.53'deki logaritmalar alınıp ifade sadeleştirildiğinde

$$\log L(\boldsymbol{\theta}) = -\left(\frac{n^*}{2}\right)\left\{\log\left|\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})\right| + tr\left[\boldsymbol{S}\left|\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\right|\right]\right\} + c \tag{3.54}$$

elde edilmektedir. Eşitlik 3.54 ile Eşitlik 3.47 karşılaştırıldığında her iki fonksiyonun da $\boldsymbol{S}$'yi içerdiği ve $\log L(\boldsymbol{\theta})$'yı maksimize yapan $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ değerinin F_{ML}'yi minimize ettiği görülmektedir (Bollen, 1989; Kaplan, 2000; Özkoç, 2011).

$\boldsymbol{\theta}$'nın *ML* tahmin edicisinin asimptotik kovaryans matrisi

$$ACov\left(\hat{\theta}\right)=\left\{-E\left[\frac{\partial^2 \log L\left(\boldsymbol{\theta}\right)}{\partial\theta\,\partial\theta'}\right]\right\}^{-1} \tag{3.55}$$

biçimindedir. Eşitlik 3.52 ile verilen $\log L\left(\boldsymbol{\theta}\right)$'nın $\boldsymbol{\theta}$ 'ya göre kısmi türevi alındığında sabit terimin ve Eşitlik 3.47'deki ifade için söz konusu türev alındığında son iki ifadenin değeri sıfır olacaktır. Bu iki fonksiyonun ikinci mertebeden kısmi türevleri arasındaki ilişki ise

$$\frac{\partial^2 \log L\left(\boldsymbol{\theta}\right)}{\partial\theta\,\partial\theta'}=-\left(\frac{n^*}{2}\right)\frac{\partial^2 F_{ML}}{\partial\theta\,\partial\theta'} \tag{3.56}$$

biçiminde gösterilebilir. Eşitlik 3.55 ve 3.56 birleştirilirse

$$ACov\left(\hat{\theta}\right)=\left(\frac{2}{n^*}\right)\left\{E\left[\frac{\partial^2 \log L\left(\boldsymbol{\theta}\right)}{\partial\theta\,\partial\theta'}\right]\right\}^{-1} \tag{3.57}$$

biçiminde asimptotik kovaryans matrisi elde edilmiş olur (Bollen, 1989).

ML yönteminde, $\boldsymbol{\theta}$ parametresinin tahmininde $\log L\left(\boldsymbol{\theta}\right)$ olabilirlik fonksiyonunun maksimum olma ya da F_{ML} uyum fonksiyonunun minimum olma durumudur. Bu yöntem ile elde edilen $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ parametre tahmincileri, modele ilişkin tahmini kovaryans matrisi $\boldsymbol{\Sigma}\left(\boldsymbol{\theta}\right)$'nın geçerliliği için gözlenen kovaryans matrisi $\boldsymbol{S}$'nin olabilirliğini maksimum yapan tahmin değerleridir. Modelde yapısal parametrelerin tahmini için kesin sonuçlar F_{ML}'nin minimizasyonu ile elde edilir. Burada uyum fonksiyonunun yapısal parametrelere göre birinci mertebeden kısmi türevinin alınarak sıfıra eşitlenmesi ile elde edilen değerler parametre tahminlerini verecektir. Uyum fonksiyonunun söz konusu parametrelere göre ikinci mertebeden türevler matrisinde tahmin değerleri yerine konulduğunda elde edilecek matrisin pozitif tanımlı olması da uyum fonksiyonunun en küçüklenmesi koşulunu garantileyecektir (Geyik, 2014).

ML yönteminin temel varsayımlarından biri $\boldsymbol{\Sigma}\left(\boldsymbol{\theta}\right)$ ve $\boldsymbol{S}$ matrislerinin pozitif tanımlı olmasıdır. Aksi halde uyum fonksiyonu söz konusu fonksiyonların logaritmasını içerdiğinden F_{ML} tanımsız olacaktır. F_{ML}'nun sıfır olması ise yani $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}=\boldsymbol{S}$ durumunda, uyum fonksiyonu $\boldsymbol{\Sigma}\left(\boldsymbol{\theta}\right)$ yerine $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ koyulduğunda

$$F_{ML} = \log\left|\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})\right| + tr(I) - \log\left|\boldsymbol{S}\right| - (p+q) \tag{3.58}$$

halini alacak ve $tr(I) = (p+q)$ olacağından F_{ML} sıfır değerini alacaktır. Bu durum mükemmel uyumu, örneklem kovaryans matrisinin bütün elemanlarının tahmin edilebildiği durumu işaret etmektedir (Geyik, 2014)

ML tahmininin önemli bir şartı, çok değişkenli güçlü bir normallik varsayımına dayanmasıdır. Dağılıma ilişkin varsayımların ihlal edildiği durumlarda, kaçınılmaz olarak ciddi yanlış sonuçların ortaya çıkmasına neden olur. Ancak yine de *ML* normallik varsayımının bozulduğu durumlarda oldukça robusttır (sağlam). Normal olmayan durumlarda yapılan benzetim çalışmaları, *ML* parametre tahminlerinin tutarlı ancak etkin olmadığını göstermiştir. Model uyumunun bir ölçüsü olarak χ^2 kullanıldığında, modelin reddedilmesinde I. tip hata oranının artmasına neden olmaktadır (Çelik, 2009).

3.4.2. Ağırlıklandırılmamış En Küçük Kareler Tahmin Edicisi

Ağırlıklandırılmamış En Küçük Kareler (EKK) Yöntemi, Çok açık olmamasına rağmen regresyondaki Olağan En Küçük Kareler tahmin yöntemi ile kalıntıların kareleri toplamının minimize edilmesine benzer bir yaklaşımla $\left(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})\right)$ artık matrisinin her bir elemanının kareler toplamının sadece tek tarafını minimize eder. Bu yöntem de ML yönteminden farklı olarak gözlenen değişkenlere ilişkin dağılım varsayımı bulunmamaktadır (Bollen, 1989).

Ağırlıklandırılmamış EKK yönteminde en küçüklenecek uyum fonksiyonu,

$$F_{EKK} = \left(\frac{1}{2}\right) tr\left[\left(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})\right)^2\right] \tag{3.59}$$

biçimindedir. Burada, *tr* matrisin izi, $\boldsymbol{S}$ gözlenen kovaryans matrisi, $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})$ modele ilişkin tahmini kovaryans matrisi ve $\boldsymbol{\theta}$ parametrelerin $(t \times 1)$ boyutlu vektörüdür (Schermelleh-Engel ve ark., 2003; Bollen, 1989).

F_{EKK}'nın $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\Psi}$ ve $\boldsymbol{\Phi}$'deki bilinmeyen parametrelere göre birinci mertebe kısmi türevlerini sıfır yapan değerler ilgili parametrelerin tahminleridir. Uyum fonksiyonunun bilinmeyenlere göre ikinci mertebe kısmi türevler matrisinde tahmin değerleri yerine konulduğunda elde edilen matrisin pozitif tanımlı olması durumunda uyum fonksiyonlarının en küçüklenmesi koşulunun sağlandığı da ispatlanmış olmaktadır. Karmaşık modellerde söz konusu işlemleri basit türev çözümleri ile yapmak zor

olacağından bu yöntemde de *ML* yönteminde olduğu gibi iteratif nümerik yöntemler kullanılmaktadır. Yine *ML* yönteminde olduğu gibi ağırlıklandırılmamış EKK' yönteminden elde edilen $\boldsymbol{\theta}$ için de istatistiksel analizler yapılabilmektedir (Geyik, 2014; Özkoç, 2011).

Ağırlıklandırılmamış EKK yönteminin yanı bir takım dezavantajları da vardır:

1. Ağırlıklandırılmamış EKK, $\boldsymbol{\theta}$ için asimptotik etkin tahmin edici sağlamaz, *ML* *t*ahmin edicisi daha etkindir.
2. F_{EKK} ölçekten bağımsız ve ölçek değişmez değildir.
3. Aşırı belirlenmenin testi F_{EKK} için henüz elde edilmemiştir fakat F_{ML} için bulunmaktadır (Bollen, 1989; Özkoç, 2011).

3.4.3. Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Tahmin Edicisi

Genelleştirilmiş En Küçük Kareler (GEKK) tahmincisi ilk olarak Aitken (1934,1935) tarafından ortaya çıkarılmış daha sonra Jöreskog ve Goldberger (1972) tarafından YEM için geliştirilmiştir (Kaplan, 2000).

GEKK, EKK yönteminin kullanılabilmesi için gerekli bazı varsayımların sağlanmadığı durumlarda tercih edilen bir yöntemdir. Ağırlıklandırılmamış EKK yönteminde kalıntılara ilişkin ortalamanın sıfır ve kalıntıların her değişken için sabit varyanslı olduğu varsayılır. Aynı zamanda kalıntıların birbirinden bağımsız olması gerekmektedir. Bu varsayımların YEM'de her zaman sağlanması mümkün olmamaktadır. Söz konusu varsayımların sağlanmaması durumunda EKK tahmin edicisinin kullanılması sonuçların güvenilirliği açısından hatalı olacağından bu durumda kalıntılara ilişkin varsayımlar gerektirmeyen GEKK tahmin edicisini kullanmak uygun olacaktır. GEKK tahmincisinde uyum fonksiyonu

$$F_{GEKK} = \left(\frac{1}{2}\right) tr\left(\left\{\left[\left(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})\right)^2\right]\boldsymbol{W}^{-1}\right\}^2\right) \tag{3.60}$$

biçimindedir. Burada, *tr* matrisin izi, $\boldsymbol{S}$ gözlenen kovaryans matrisi, $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})$ modele ilişkin tahmini kovaryans matrisi ve $\boldsymbol{\theta}$ parametrelerin $(t \times 1)$ boyutlu vektörü ve $\boldsymbol{W}^{-1}$ artıkların $(p \times p)$ boyutlu matrisidir (Bollen, 1989).

Ağırlık matrisi W^{-1} ya rasgele bir matristir ya da sabitlerin pozitif tanımlı bir matrisidir. F_{ML} ve F_{EKK}'nın özel bir durumudur, burada $W^{-1} = I$'dir. F_{ML} ve F_{EKK} gibi F_{GEKK}'dan elde edilen $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, $\boldsymbol{\theta}$'nın tutarlı bir tahmin edicisidir. $\hat{\boldsymbol{\theta}}$'nın asimptotik dağılımı,

bilinen bir asimptotik kovaryans matrisi ile çok değişkenli normaldir. $\boldsymbol{S}$ 'nin elemanları hakkında yapılan iki varsayım, doğru bir biçimde ağırlıklandırılmış $\boldsymbol{W}^{-1}$ matrisinin seçilmesi için basit bir koşulun ve GEKK $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ için optimal özelliklerin belirlenmesini sağlamaktadır.

Bu varsayımlar:

(1) $E\left(s_{ij}\right)=\sigma_{ij}$

(2) S 'nin elemanlarının asimptotik dağılımı, $N^{-1}\left(\sigma_{ig}\sigma_{jh}+\sigma_{ih}\sigma_{jg}\right)$ 'ye eşit olan s_{ij} ve s_{gh} asimptotik kovaryansları ve σ_{ij} 'nin ortalamaları ile çok değişkenli normal olduğudur. Burada kilit varsayım $ACov\left(s_{ij}s_{gh}\right)=N^{-1}\left(\sigma_{ig}\sigma_{jh}+\sigma_{ih}\sigma_{jg}\right)$ 'dir. Eğer $x$ve y çok değişkenli normal dağılmışlar ise bu varsayım yeterlidir. Yukarıda verilen iki varsayımda sağlanıyor ise $\boldsymbol{W}^{-1}$, $p\lim \boldsymbol{W}^{-1}=\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ olacak şekilde seçilmelidir. GEKK tahmin edicisi asimptotik çok değişkenli normal dağılıma sahiptir ve asimptotik olarak etkindir. F_{GEKK} 'dan elde edilen $\hat{\boldsymbol{\theta}}$'nın asimptotik kovaryans matrisi, $p\lim \boldsymbol{W}^{-1}\neq\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ 'in gerçek olduğu durumdan daha basit biçimde elde edilir. $\hat{\boldsymbol{\theta}}$'nın asimptotik kovaryans matrisi, bilgi matrisinin beklenen değerinin tersinin $\left(2/\left(N-1\right)\right)$ ile çarpımıdır: $\left(2/\left(N-1\right)\right)\left[E\partial^2 F_{GEKK}/\partial\boldsymbol{\theta}\partial\boldsymbol{\theta}'\right]^{-1}$ (Jöreskog, 1981; Bollen, 1989; Hayduk, 1987;Çelik, 2009).

GEKK ağırlık matrisi olarak örneklem kovaryans matrisini kullanır ve en çok kullanılan seçim $\boldsymbol{W}^{-1}=\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ 'dir. Bu durumda F_{GEKK} ,

$$\begin{aligned} F_{GEKK} &= \left(\frac{1}{2}\right) tr\left(\left\{\left[\left(\boldsymbol{S}-\boldsymbol{\Sigma}\left(\boldsymbol{\theta}\right)\right)^2\right]\boldsymbol{S}^{-1}\right\}^2\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) tr\left(\left\{\left[\left(I-\boldsymbol{\Sigma}\left(\boldsymbol{\theta}\right)\right)^2\right]\boldsymbol{S}^{-1}\right\}^2\right) \end{aligned} \tag{3.61}$$

biçiminde olur. Buradaki gösterimler Eşitlik 3.60'daki gibidir. GEKK uyum fonksiyonu genel doğrusal olmayan regresyon modeli ile kovaryans yapısı modelinin benzerliği temel alınarak geliştirilmiştir (Browne, 1982; Bollen, 1989: Kaplan, 2000).

F_{ML} uyum fonksiyonu gözlenen değişkenlerin çok değişkenli normal dağılımından türetilmektedir. F_{ML} ve F_{GEKK} fonksiyonları gözlenen değişkenlerin dağılımının normalden sapan basıklık katsayılarına sahip olmamasına dayanmaktadır.

Anılan bu iki koşulun sağlanması ve modelin geçerli olması halinde F_{ML} ve F_{GEKK} 'den elde edilen $\hat{\theta}$ tutarlı ve asimptotik etkin tahminci olacak ve $\hat{\theta}$ 'nın fark fonksiyonlarında yerine konulup $(n-1)$ ile çarpılmasından elde edilen $(n-1)F_{ML}$ ve $(n-1)F_{GEKK}$ asimptotik χ^2 dağılımlı olacağından genel model uyumunun testinde kullanılabilecektir. Buna ek olarak F_{ML} ve F_{GEKK} 'den elde edilen $\hat{\theta}$ için asimptotik kovaryans matrisleri de sağlandığından parametreler için anlamlılık testleri yapılabilecektir (Özkoç, 2011).

3.4.4. Ağırlıklandırılmış En Küçük Kareler Tahmin Edicisi

Veriler sürekli ancak normal dağılım göstermiyorsa tahmin edici yöntemi olarak genellikle asimptotik olarak dağılımdan bağımsız dağılım (Asymptotically Distribution Free, ADF) önerilir. Ağırlıklandırılmış En Küçük Kareler yaklaşımı(AEKK-WLS-Weigted Least Square Estimation) ADF tahmin edici yöntemlerindendir. Her ne kadar simülasyon çalışmalarında ML tahmin edicisi önerilse de normal dağılım göstermeyen veriler için bir düzeltme yapılmış ya da yapılmamış olsa da performansının ADF den daha iyi olduğu görünür ve tercih edilir. ML'nin tersine, ADF'de verinin analiz edilmesinde ham veriye ihtiyaç duyulmaktadır (Schermelleh-Engel ve ark., 2003).

Bu yöntem, gözlenen değişkenlerin kategorik olduğu ya da normal dağılımdan dikkate değer derecede sapmalar olduğunda tercih edilir. Ayrıca gözlenen değişkenlerin bir kısmı kesikli bir kısmı sürekli olduğu durumda da AEKK yöntemi kullanılabilir (Hayduk, 1987; Bollen, 1989; Schermelleh-Engel, ve ark., 2003; Yılmaz ve Çelik, 2009). AEKK yönteminin minimize edilmiş uyum fonksiyonu

$$F_{GEKK} = \left(\frac{1}{2}\right) tr\left[\boldsymbol{S} - \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})\right]' \boldsymbol{W}^{-1} \left[\boldsymbol{S} - \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})\right] \tag{3.62}$$

biçiminde hesaplanır. Burada $\boldsymbol{\theta}$, parametre vektörünü; $\boldsymbol{S}$, örneklem varyans-kovaryans matrisini; $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})$, türetilen kitle varyans-kovaryans matrisini; $\boldsymbol{W}^{-1}$ gözlenen değişkenlerin sayısı p ve $k = p(p+1)/2$ olmak üzere bir $(k \times k)$ boyutlu pozitif tanımlı matris (Schermelleh-Engel ve ark., 2003).

AEKK yönteminde**,** $\boldsymbol{W}$ matrisi örneklem varyans ve kovaryanslarının (veya korelasyonlarının) analiz edildiği, asimptotik kovaryans matrisinin tutarlı bir tahminidir (Browne, 1984;Kaplan, 2000; Schermelleh-Engel ve ark., 2003).

$\boldsymbol{W}^{-1}$'in elemanları genellikle $\boldsymbol{W}$ matrisinin tersinden yola çıkılarak elde edilir. $\boldsymbol{W}$ matrisinin elemanları,

$$W_{jgh} = \sigma_{ig}\sigma_{jh} + \sigma_{ih}\sigma_{jg} + \left(\frac{N-1}{N}\right)K_{ijgh} \tag{3.63}$$

şeklindedir. Burada $\sigma_{ig}, \sigma_{jh}, \sigma_{ih}$ ve σ_{jg} türetilmiş $\sigma(\boldsymbol{\theta})$ varyans-kovaryans matrisinin elemanları; K_{ijgh} çok değişkenli basıklık ölçüsü (ağırlıklandırılmış 4. moment) ; N ise örneklem hacmidir.

AEKK yöntemi çeşitli avantajlara sahip olmakla birlikte bazı dezavantajlara da sahiptir (Bollen, 1989). Bu yöntemin esas avantajı, gözlenen değişkenlerin dağılımları hakkında en az varsayımları içermesidir. Normal olmayan değişkenlerle yapılan simülasyon çalışmalarında AEKK yönteminin dağılımın karakteristik özelliklerinden nispeten etkilenmediği gözlenmiştir (West ve ark., 1995, Schermelleh-Engel, ve ark., 2003, Schumacher ve Lomax, 2004; Doğan, 2013).

4. GİZİL DEĞİŞKENLİ YAPISAL EŞİTLİK MODELLERİ

Gizil Değişkenli Modeller veya kısaca Yapısal Eşitlik Modeli olarak ta adlandırılan bu tür modeller, daha önceki bölümlerde açıklanmış olan ölçme modeli ile gizil değişkenlerin birbirleriyle olan etkilerini gösteren gizil değişken modelinden (yapısal model) oluşmaktadır. Bu modeller hem gözlenen değişkenlerin gizil değişkenlerle olan ilişkilerini ortaya koyan ölçme modellerinin sunduğu avantajları hem de gizil değişkenlerin birbirleriyle olan ilişkilerini ortaya koyan path modelinin avantajlarını barındırmaktadırlar.

4.1. Genel Modelin Özellikleri

Yapısal eşitliklerin ilk bileşeni yapısal (gizil değişken) modeldir. Bu model,

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{B}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\zeta} \tag{4.1}$$

şeklinde gösterilmektedir. Burada $\boldsymbol{\eta}$ gizil içsel rassal değişkenlerin $m \times 1$ boyutlu vektörü; $\boldsymbol{\xi}$ gizil dışsal rassal değişkenlerin $n \times 1$ boyutlu vektörü; **B**, $m \times m$ boyutlu gizil içsel değişkenlerin birbirleri üzerindeki etkisini gösteren katsayı matrisini ifade etmektedir. **Γ,** $\boldsymbol{\eta}$ üzerindeki $\boldsymbol{\xi}$'nin etkileri için $m \times n$ boyutlu katsayı matrisidir. $(\mathbf{I} - \mathbf{B})$ tekil değildir. Modelde $E(\boldsymbol{\zeta}) = 0$ ve $Cov(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi}) = 0$ olduğu varsayılmaktadır.

Yapısal eşitlik modellerinin ikinci bileşeni ölçüm modelidir. Bu model,

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Lambda}_y \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{4.2}$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Lambda}_x \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\delta} \tag{4.3}$$

eşitliklerinden oluşmaktadır (Muthen, 2002). Modellerde $\boldsymbol{y}$ $(p \times 1)$ ve $\boldsymbol{x}$ $(q \times 1)$ gözlenen değişkenlerin vektörleridir, $\boldsymbol{\Lambda}_y$ $(p \times m)$ ve $\boldsymbol{\Lambda}_x$ $(q \times n)$ sırasıyla $\boldsymbol{y}$ ile $\boldsymbol{\eta}$'nın, $\boldsymbol{x}$ ile $\boldsymbol{\xi}$'nin ilişkisini gösteren katsayı matrisleridir. $\boldsymbol{\varepsilon}(p \times 1)$ ve $\boldsymbol{\delta}(q \times 1)$ sırasıyla $\boldsymbol{y}$ ve $\boldsymbol{x}$ için ölçüm hatalarıdır. Ölçüm hatalarının $\boldsymbol{\xi}$ ve $\boldsymbol{\zeta}$ ile ilişkisiz olduğu varsayılır. $\boldsymbol{\delta}$ ve $\boldsymbol{\varepsilon}$'nin beklenen değerleri sıfırdır. Eşitlik 4.1'de gösterilen yapısal model için $\boldsymbol{\Lambda}_y = \mathbf{I}_m$, $\boldsymbol{\Lambda}_x = \mathbf{I}_n$, $\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{\delta}} = 0$ ve $\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0$ olduğu varsayılırsa model,

$$\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{y} + \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{x} + \boldsymbol{\zeta} \tag{4.4}$$

biçiminde olur. Bu eşitlik Bölüm 3'te verilen gözlenen değişkenli yapısal eşitlikleri ile aynıdır.

4.2. Gizil Değişkenli Yapısal Eşitlik Modelinin Kovaryans Yapısı

$\boldsymbol{\Sigma}_{yy}$, **y** gözlenen değişkenlerinin kovaryans matrisini, $\boldsymbol{\Sigma}_{yy}(\theta)$ ise $\boldsymbol{\Sigma}_{yy}$ 'nin elemanlarının θ vektöründeki modele ilişkin bilinmeyen parametrelerin bir fonksiyonu olarak yazıldığı kovaryans matrisini göstermek üzere;

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma}_{yy}(\theta) &= E\left(\mathbf{y}\mathbf{y}^{'}\right)\\ &= E\left[\left(\boldsymbol{\Lambda}_{y}\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\varepsilon}\right)\left(\boldsymbol{\eta}^{'}\boldsymbol{\Lambda}_{y}^{'}+\boldsymbol{\varepsilon}'\right)\right]\\ &= \boldsymbol{\Lambda}_{y}E\left(\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}^{'}\right)\boldsymbol{\Lambda}_{y}^{'}+\Theta_{\varepsilon}\end{aligned} \tag{4.5}$$

biçiminde elde edilir. Eşitlik 4.5'te $\boldsymbol{\eta}=\left(\mathrm{I}-\mathbf{B}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\zeta}\right)$ eşitliği yerine yazılırsa,

$$\boldsymbol{\Sigma}_{yy}(\theta)=\boldsymbol{\Lambda}_{y}\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Gamma}^{'}+\boldsymbol{\Psi}\right)\left[\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}\right)^{-1}\right]^{'}\boldsymbol{\Lambda}_{y}^{'}+\boldsymbol{\Theta}_{\varepsilon} \tag{4.6}$$

olur. Böylece modeldeki sekiz parametre matrisinden altısının karmaşık bir fonksiyonu olacaktır. **y** ile **x**'in kovaryans matrisi $\boldsymbol{\Sigma}_{yx}$ 'dir. $\boldsymbol{\Sigma}_{yx}$ yapısal parametrelerin bir fonksiyonu olarak adlandırıldığında,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma}_{yx}(\theta) &= E\left(\mathbf{y}\mathbf{x}^{'}\right)\\ &= E\left[\left(\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{y}}\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\varepsilon}\right)\left(\boldsymbol{\xi}^{'}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{x}}^{'}+\boldsymbol{\delta}'\right)\right]\end{aligned} \tag{4.7}$$

olarak elde edilir. Bu Eşitlik tekrar $\boldsymbol{\eta}$ 'nın indirgenmiş formu kullanılarak yazılırsa,

$$\boldsymbol{\Sigma}_{yx}(\theta)=\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{y}}\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}\right)^{-1}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Lambda}_{x}^{'} \tag{4.8}$$

olacaktır. Son olarak ***x***'in kovaryans matrisi $\boldsymbol{\Sigma}_{xx}$, yapısal parametrelerin bir fonksiyonu olarak yazıldığında,

$$\boldsymbol{\Sigma}_{xx}(\theta)=\boldsymbol{\Lambda}_{x}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Lambda}_{x}^{'}+\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{\delta}} \tag{4.9}$$

biçiminde olmaktadır. Eşitlik 4.6, 4.7 ve 4.9, $\boldsymbol{\Sigma}(\theta)$ içinde birleştirilirse, model parametrelerinin bir fonksiyonu gibi gözlenen ***y*** ve ***x*** değişkenleri için kovaryans matrisi,

$$\boldsymbol{\Sigma}(\theta)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{yy}(\theta) & \boldsymbol{\Sigma}_{yx}(\theta)\\ \boldsymbol{\Sigma}_{xy}(\theta) & \boldsymbol{\Sigma}_{xx}(\theta)\end{bmatrix} \tag{4.10}$$

$$\Sigma(\theta)=\begin{bmatrix} \Lambda_y(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\left(\Gamma\Phi\Gamma'+\Psi\right)\left[(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\right]'\Lambda_y'+\Theta_\varepsilon & \Lambda_y(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\Gamma\Phi\Lambda_x' \\ \Lambda_x\Phi\Gamma'\left[(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\right]'\Lambda_y' & \Lambda_x\Phi\Lambda_x'+\Theta_\delta \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

olarak yazılabilmektedir (Bollen, 1989).

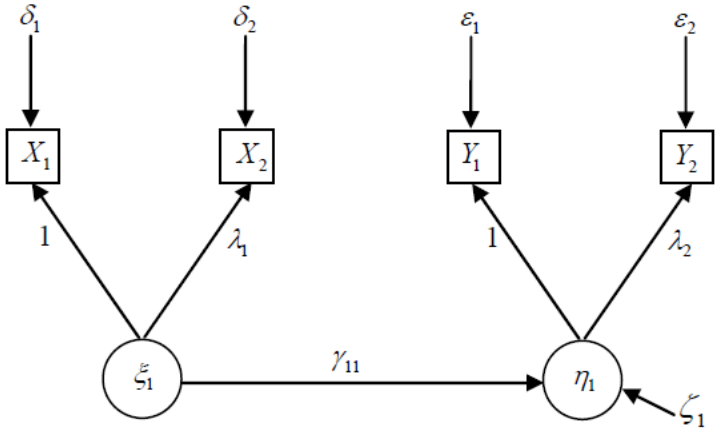
4.3. Gizil Değişkenli Yapısal Eşitlik Modelinin Tanımlanması

Tanımlanma problemi modelin tahmininden önce aşılması gereken ve bütün YEM'leri ilgilendiren önemli bir sorundur Tanımlamanın yapılmasının bir yolu bu sürecin cebirsel olarak sağlanmasıdır. θ'nın her bir elemanı Σ'nın bir veya daha elemanına göre çözülebilmesi gerekmektedir. $\Sigma=\Sigma(\theta)$ kovaryans yapısı $\sigma_{ij}=\sigma_{ij}(\theta)(i\le j)$ formunun $\frac{1}{2}(p+q)(p+q+1)$ artıksız eşitliklerini ifade etmektedir. Burada σ_{ij} ,Σ ' nın *ij* elemanı, $\sigma_{ij}(\theta)$ ise $\Sigma(\theta)$ 'nın *ij'*inci elemanıdır. Eğer θ'nın bir elemanı bir veya daha çok σ_{ij} 'nin bir fonksiyonu gibi yazılabilirse, o zaman tanımlama gerçekleşmiş olur (Bollen, 1989).

θ'nın tüm elemanları bu koşulu sağlarsa, modelin tanımlı olduğu belirtilir. Tanımlama problemi için Şekil 4.1. ele alındığında, path diyagramı için eşitlikler,

$$\begin{aligned} &[\eta_1]=[\gamma_{11}][\xi_1]+[\zeta_1] \\ &\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}[\eta_1]+\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix},\ diag(\Theta_\varepsilon) \\ &\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}[\xi_1]+\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix},\ diag(\Theta_\delta) \end{aligned} \tag{4.12}$$

şeklinde yazılacaktır.



Şekil 4.1. İki gizil değişkenli bir model

Gözlenen değişkenlerin kovaryans matrisi ise Eşitlik 4.13'teki gibi tanımlanır.

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} Var(y_1) & & & \\ Cov(y_{2,}y_1) & Var(y_2) & & \\ Cov(x_1,y_1) & Cov(x_1,y_2) & Var(x_1) & \\ Cov(x_2,y_1) & Cov(x_2,y_2) & Cov(x_2,x_1) & Var(x_2) \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

Eşitlik 4.11'de elde edilen modele ilişkin tahmini kovaryans matrisinin içine Eşitlik 4.12'deki modele dair parametre matrisleri yerleştirilirse, modele ilişkin tahmini kovaryans matrisinin açık biçimi,

$$\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \gamma_{11}^2\phi_{11} + \psi_{11}Var(\varepsilon_1) & & & \\ \lambda_2\left(\gamma_{11}^2\phi_{11} + \psi_{11}\right) & \lambda_2^2\left(\gamma_{11}^2\phi_{11} + \psi_{11}\right)Var(\varepsilon_2) & & \\ \gamma_{11}\phi_{11} & \lambda_2\gamma_{11}\phi_{11} & \phi_{11} + Var(\delta_1) & \\ \lambda_1\gamma_{11}\phi_{11} & \lambda_1\lambda_2\gamma_{11}\phi_{11} & \lambda_1\phi_{11} & \lambda_1^2 + Var(\delta_2) \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

olarak elde edilir. Burada;

$\boldsymbol{\theta}' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \gamma_{11} & \phi_{11} & Var(\varepsilon_1) & Var(\varepsilon_2) & Var(\delta_1) & Var(\delta_1) & \psi_{11} \end{bmatrix}$ 'dir.

$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})$ kovaryans yapısı dokuz tane bilinmeyen parametrenin var olduğu on tane $\left[= \frac{1}{2} \times 4 \times 5\right]$ eşitliğe sebep olmaktadır. $\boldsymbol{\theta}$ 'da yer alan dokuz bilinmeyen için bu eşitlikler çözümlenebilirse, bu modelin tanımlanması sağlanabilir. Bu süreci göstermek için, model tarafından tahmin edilen on eşitlikten ikisi aşağıdaki gibidir,

$$Cov(x_2, y_1) = \lambda_1 \gamma_{11} \phi_{11}$$
$$Cov(x_2, x_1) = \lambda_1 \phi_{11} \tag{4.15}$$

$$\gamma_{11} = \frac{Cov(x_2, y_1)}{Cov(x_2, x_1)} \tag{4.16}$$

Bu kurulumda γ_{11} belirlenmiş durumdadır. Bu tür cebirsel işlemler izlenerek θ'nın tüm elemanlarının tanımlı olduğu gösterilebilir (Çelik, 2009).

Burada YEM için kullanılan tanımlama kurallarından başlıca olanları, *t* Kuralı, İki Adım Kuralı, Çoklu Gösterge Çoklu Nedensellik Kuralı incelenecektir.

4.3.1. *t*-Kuralı

Tanımlanma için gerekli ancak yeterli olmayan bir koşuldur. DFA ve path modellerinde de kullanılan bu koşul aynı zamanda gizil değişkenli YEM'de de geçerlidir

$$t \leq \frac{1}{2}(p+q)(p+q+1) \tag{4.17}$$

Burada t, θ 'daki sınırlandırılmamış ve serbest elemanların sayısını göstermektedir. $\Sigma = \Sigma(\theta)$'nın artıksız elemanları $\frac{1}{2}(p+q)(p+q+1)$ tane eşitliği içerir. Eğer θ'daki bilinmeyenlerin sayısı eşitlik sayısından fazla ise model tanımlanmamış olacaktır (Bollen,1989; Brown, 2006).

4.3.2. İki Adım Kuralı

İki adım kuralı iki adımlı bir süreçten meydana gelmektedir. İlk adımda model bir DFA modeli gibi analiz edilir. Bu adımda gizil değişkenler arasındaki ilişkiler ile ilgilenilir. Bu ilişkiler gizil değişkenlerin varyansları ve kovaryanslarıdır (Φ) . Bu adımda $\mathbf{B}, \Gamma$ ve Ψ elemanları ihmal edilir. Modelin tanımlanmış olduğunu belirlemek için DFA'daki gibi model yeniden formüle edilir. Eğer modelin tanımlanmış olduğuna karar verilirse ikinci adıma geçilir. Eğer birinci adım sonucunda modelin tanımlanmamış ise, bu tanımlama kuralı uygulanmaz.

İkinci adımda orijinal modelin yapısal eşitlikleri incelenir (örneğin $\eta = \mathbf{B}\eta + \Gamma\xi + \zeta$). Bu adımda her bir gizil değişkenin kesin olarak ölçülen bir gözlenen değişken olduğu varsayılır. Sonraki belirleme $\mathbf{B}, \Gamma$ ve Ψ'nin tanımlı olup olmadığının belirlenmesine ilişkindir. Eğer birinci adım sonunda ölçüm parametrelerinin, ikinci adım

sonunda da yapısal model parametrelerinin tanımlı olduğu belirlenirse, o zaman bu tanımlamanın tüm modelin tanımlaması için yeterli olduğuna karar verilir (Bollen,1989).

4.3.3. Çoklu Gösterge Çoklu Nedensellik Kuralı

Çoklu Gösterge Çoklu Nedensellik (ÇGÇN – Multiple Indicators and Multiple Causse (MIMIC)) modelleri genel modellerin özel bir durumu olarak adlandırılmaktadır. Bu modeller, tek bir gizil değişkenin çoklu göstergesi ve çoklu nedenselliği olan gözlenen değişkenleri içermektedirler (Bollen, 1989; Brown, 2006; Çelik, 2009). Bu model için eşitlikler:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \Gamma \boldsymbol{x} + \zeta_1 \\ \boldsymbol{y} &= \Lambda_y \eta_1 + \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{\xi} \end{aligned} \qquad (4.18)$$

biçimindedir. $\boldsymbol{x}$ bir tane olan gizil değişkenin kusursuz bir ölçümüdür ve η_1 verilmiştir. η_1 bir veya daha fazla $\boldsymbol{x}$ değişkenince doğrudan etkilenmiştir. Eğer p ($\boldsymbol{y}$ 'lerin sayısı) iki veya daha çok ve q ($\boldsymbol{x}$'lerin sayısı) bir veya daha çok ise ÇGÇN modellerinin tanımlaması sağlanmış olur. ÇGÇN kuralı $p \geq 2$ *ve* $q \geq 1$ olduğunda tanımlama için yeterli ancak gerekli bir koşul değildir (Bollen, 1989; Kline, 2005;Çelik, 2009).

4.4. Gizil Değişken Modelinin Standartlaştırılmış ve Standartlaştırılmamış Katsayıları

Gözlenen değişkenlerin kovaryans matrisinin analizi standartlaştırılmamış katsayıların elde edilmesine neden olur. Standartlaştırılmamış katsayılar değişkenlere bağlıdır. Aynı bağımlı değişken üzerinde etkili olan iki veya daha fazla değişken farklı ölçüm birimlerine sahip olduğunda, etkileri standartlaştırılmamış katsayıları kullanarak karşılaştırmak oldukça zordur. Standartlaştırılmış katsayılar farklı açıklayıcı değişkenlerin göreli etkilerini değerlendirmede kullanılmaktadır. Standartlaştırılmamış katsayılara dayanarak değişkenlerin göreceli önemlerini karşılaştırmak uygun olmadığından, analizde kullanılan değişkenler kendi ortalamalarından farkları alınıp standart sapmalarına bölünerek standartlaştırılmaktadır. Diğer bir anlatımla değişkenler ölçü birimlerinden arındırılarak varyansları bire eşitlenmektedir. Standartlaştırılmış katsayılar, doğrudan standartlaştırılmamış katsayılardan yararlanarak aşağıdaki eşitlikler yardımıyla da hesaplanabilirler (Hayduk, 1987; Bollen, 1989; Jöreskog ve Sörbom,1996; Schumacker ve Lomax, 2004; Grace, 2006; Çelik, 2009);

$$\hat{\lambda}_{ij}^{s} = \hat{\lambda}_{ij}^{s}\left(\frac{\hat{\sigma}_{jj}}{\hat{\sigma}_{ii}}\right)^{1/2} \qquad \hat{\lambda}_{y}^{s} = \left[diag\left(\hat{\Sigma}_{yy}\right)\right]^{-1/2}\hat{\Lambda}_{y}\left[diag\left(\hat{\mathbf{C}}\right)\right]^{-1/2}$$

$$\hat{\beta}_{ij}^{s} = \hat{\beta}_{ij}\left(\frac{\hat{\sigma}_{jj}}{\hat{\sigma}_{ii}}\right)^{1/2} \quad , \quad \hat{\lambda}_{x}^{s} = \left[diag\left(\hat{\Sigma}_{xx}\right)\right]^{-1/2}\hat{\Lambda}_{x}\left[diag\left(\hat{\Phi}\right)\right]^{-1/2} \qquad (4.19)$$

$$\hat{\gamma}_{ij}^{s} = \hat{\gamma}_{ij}\left(\frac{\hat{\sigma}_{jj}}{\hat{\sigma}_{ii}}\right)^{1/2} \qquad \hat{\mathrm{B}}^{s} = \left[diag\left(\hat{\mathbf{C}}\right)\right]^{-1/2}\hat{\mathrm{B}}\left[diag\left(\hat{\mathbf{C}}\right)\right]^{-1/2}$$

$$\hat{\Gamma}^{s} = \left[diag\left(\hat{\mathbf{C}}\right)\right]^{-1/2}\hat{\Gamma}^{s}\left[diag\left(\hat{\Phi}\right)\right]^{-1/2}$$

burada *s* üst simgesi standartlaştırılmış katsayıyı, *i* bağımlı değişkeni, *j*'de bağımsız veya açıklayıcı değişkeni ve $\hat{\boldsymbol{C}}$, η'nın kovaryans matrisinin tahminini göstermektedir. $\hat{\sigma}_{ii}$ ve $\hat{\sigma}_{jj}$ ise sırasıyla *i*'nci ve *j*'nci değişkenin model tarafından tahmin edilen varyanslarını göstermektedirler. Sağ taraftaki denklemler de sol taraftaki denklemlerin matris gösterimleridirler. Elde edilen standart katsayılar çoklu regresyondaki standartlaştırılmış katsayılar gibi yorumlanmaktadırlar (Çelik, 2009).

4.5. Ortalamalar ve Eşitlik Sabitleri

YEM modellerinde ölçme ve yapısal modellere sabit terimlerin ilave edilmesi ile değişken ortalamalarının tahmini mümkün olmaktadır. YEM genel modeline eşitlik sabitlerinin eklenmesi ile model

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{B}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\zeta} \qquad (4.20)$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\nu}_{y} + \boldsymbol{\Lambda}_{y}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad (4.21)$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\nu}_{x} + \boldsymbol{\Lambda}_{x}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\delta} \qquad (4.22)$$

biçiminde olur. Burada $\boldsymbol{\nu}$, $(p\times 1)$ boyutlu ve $\boldsymbol{\nu}_{x}$, $(q\times 1)$ boyutlu ölçme modelleri için sabit terim (intercept) vektörleridir. Yapısal modelde ise $\boldsymbol{\alpha}$, $(m\times 1)$ boyutlu sabit terim vektörüdür. Dışsal değişken $\boldsymbol{\xi}$'nin ortalama değeri $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\xi})$ $(n\times 1)$ boyutlu κ vektöründe yer almaktadır $\boldsymbol{\eta}$'nın beklenen değeri kendisinin $\boldsymbol{\xi}$ ile olan ilişkisine bağlıdır. Gizil içsel değişkenlerin ortalamalarının $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\eta})$ tahmini elde edilemez çünkü bu değişkenlerin ortalamaları dışsal değişkenlerin ortalamaları ve modeldeki yapısal katsayılarca tanımlanmaktadır (Hayduk, 1987; Bollen, 1989; Brown, 2006). Gizil içsel değişkenlerin beklenen değeri,

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{\eta}) = \mathrm{E}\left[(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\zeta})\right] = (\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\kappa}) \tag{4.23}$$

olduğundan $\boldsymbol{\eta}$ 'nın ortalaması sadece $\boldsymbol{\kappa}$ 'nin fonksiyonu olmayıp $\mathbf{B}$, $\boldsymbol{\Gamma}$ ve $\boldsymbol{\alpha}$ 'daki yapısal parametrelere de bağlıdır. Benzer şekilde $\boldsymbol{x}$ ve $\boldsymbol{y}$'nin ortalama vektörleri sırasıyla, x ve y'nin ortalama vektörleri,

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\nu}_x + \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\kappa} \tag{4.24}$$

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\nu}_y + \boldsymbol{\Lambda}_y(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\kappa}) \tag{4.25}$$

biçimindedir. Eşitlik 4.23'te $\boldsymbol{\eta}$ 'nın ortalamasının sadece dışsal değişkenlerin bir fonksiyonu olmadığını aynı zamanda yapısal parametrelerin de bir fonksiyonu olduğunu göstermektedir. Her biri iki göstergeye sahip iki gizil değişkenin varsayımsal olarak olduğu durumda yukarıda verilen Eşitliklerin açılımı yapıldığında;

$$\begin{aligned}
&\eta_1 = \alpha_1 + \gamma_{11}\boldsymbol{\xi} + \zeta_1 \\
&Y_1 = \boldsymbol{\nu}_{Y_1} + \eta_1 + \varepsilon_1 \\
&Y_2 = \boldsymbol{\nu}_{Y_2} + \lambda_4\eta_1 + \varepsilon_2 \\
&X_1 = \boldsymbol{\nu}_{X_1} + \xi_1 + \delta_1 \\
&X_2 = \boldsymbol{\nu}_{X_2} + \lambda_2\xi_1 + \delta_2
\end{aligned} \tag{4.26}$$

olur. ξ_1 'in ölçeği $X_1(\lambda_1 = 1)$ 'e göre η_1 'in ölçeği ise $Y_1(\lambda_3 = 1)$ 'e göre düzenlenmiştir. Yapısal parametrelere göre ortalamalara ilişkin Eşitlikler ise,

$$\begin{aligned}
&E(\eta_1) = \alpha_1 + \gamma_{11}\kappa_1 \\
&\mathrm{E}(Y_1) = \boldsymbol{\nu}_{Y_1} + (\alpha_1 + \gamma_{11}\kappa) \\
&\mathrm{E}(Y_2) = \boldsymbol{\nu}_{Y_2} + \lambda_4(\alpha_1 + \gamma_{11}\kappa) \\
&\mathrm{E}(X_1) = \boldsymbol{\nu}_{X_1} + \kappa_1 \\
&\mathrm{E}(X_2) = \boldsymbol{\nu}_{X_2} + \lambda_2\kappa_1
\end{aligned} \tag{4.27}$$

olacaktır. Eşitlik 4.27'de altı tane yeni parametre $(\alpha_1, \kappa_1, \boldsymbol{\nu}_{X_1}, \boldsymbol{\nu}_{X_2}, \boldsymbol{\nu}_{Y_1}, \boldsymbol{\nu}_{Y_2})$ görülmektedir, bu parametrelerden sadece dört tanesi gözlenen değişkenlerin ortalamasına ilişkindir. Başka kısıtlamalar olmaksızın bu yeni parametreler belirlenemezler. Parametrelerin belirlenmesi için kullanılacak yollardan biri her bir gizil değişkene ait ortalamanın sıfıra eşitlenmesidir. ξ_1 için bu κ_1 'in sıfır olarak sabitlenmesi ile gerçekleştirilir. η_1 için ise ek bir sınırlama α_1 'in sıfır olması zorunluluğudur. Alternatif bir strateji ise bir gizil değişkenin ölçeğinin ve kaynağının gözlenen değişkenlerden birisine denk bir biçimde

düzenlemek olarak tanımlanmaktadır (Bollen, 1989; Çelik, 2009). ξ_1 değişkeni daha önce X_1'e göre ölçeklenmişti. Onun kaynağı, $\boldsymbol{v}_{X_1}$'in sıfıra eşit olarak tanımlanmasıyla X_1 ile aynı biçimde yapılabilir. Benzer biçimde $\boldsymbol{v}_{Y_1}$' in sıfır olarak alınması η_1 için bir kaynak sağlar. $\boldsymbol{v}_{X_1}$ ve $\boldsymbol{v}_{Y_1}$ sıfır olarak alındığında, geriye kalan bilinmeyen parametreler gözlenen değişkenlerin ortalamalarından hareketle belirlenir:

$$\begin{aligned}
&\kappa_1 = \mathrm{E}(X_1) \\
&\mathrm{E}(\eta_1) = \mathrm{E}(Y_1) \\
&\boldsymbol{v}_{X_2} = \mathrm{E}(X_2) - \lambda_2 \mathrm{E}(X_1) \\
&\boldsymbol{v}_{Y_2} = \mathrm{E}(Y_2) - \lambda_4 \mathrm{E}(Y_1) \\
&\alpha_1 = \mathrm{E}(Y_1) - \gamma_{11} \mathrm{E}(X_1)
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Gözlenen değişkenlerin kovaryans matrisi λ_2, λ_4 ve γ_{11} katsayılarının belirlenmesinde kullanılmaktadır. Gözlenen değişkenlerin örneklem varyans ve kovaryansları ana kütle değerlerinin yerine tahmin sürecinde kullanılır. Gözlenen değişkenlerin örneklem ortalamaları gözlenen değişkenlerin beklenen değerlerinin yerlerine geçerler (Bollen, 1989; Çelik, 2009).

4.6. Toplam, Doğrudan ve Dolaylı Etkiler

Doğrudan etkiler $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\lambda}_x$ ve $\boldsymbol{\lambda}_y$ matrislerinde bulunmaktadırlar. YEM'de sadece doğrudan etkilerin incelenmesi Path Analizi'nde olduğu gibi yanlış yorumlara neden olabilmektedir. YEM'de bir değişkenin diğeri üstündeki doğrudan, araya giren değişkenle taşınan dolaylı ve toplam etkileri bulunabilmekte ve etkiler ayrıştırılabilmektedir (Bollen, 1987).

YEM'de toplam etkiler iki yolla anlatılmaktadır. Bu yollardan ilki toplam etkilerin katsayı matrislerinin güçlerinin toplamı olduğudur. İkinci yol ise indirgenmiş biçimdeki katsayıların kullanılmasıyla toplam etkinin adlandırılmasıdır. Her iki yaklaşım sonucunda aynı sonuçlar elde edilmektedir (Bollen, 1989).

Örnek olarak $\boldsymbol{\eta}$ üzerinde $\boldsymbol{\eta}$'nın toplam etkisi veya $\mathbf{T}_{\eta\eta}$ olmak üzere

$$\mathbf{T}_{\eta\eta} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{B}^k \tag{4.28}$$

biçiminde elde edilir. $\mathbf{T}_{\eta\eta}$, ancak sonsuz toplam sonlu elemanları ile bir matrise yakınsadığı durumda tanımlamış olur. Dolaylı etkiler toplam etkiler ile doğrudan etkiler

arası fark olduğundan $\mathbf{T}_{\eta\eta}$'dan doğrudan etkileri gösteren matris çıkarıldığında elde edilen ifade dolaylı etkiyi verecektir.

Toplam ve dolaylı etkiler sadece kesin koşullar altında tanımlıdırlar. Tüm toplam etkiler için yeter koşul, B 'nin öz değerlerinin katsayısının ya da mutlak değerinin birden küçük olması durumunda söz konusu olmaktadır. Gizil değişkenli YEM için etkilerin ayrıştırılması özet bir biçimde Çizelge 4.1'de verilmiştir.

Çizelge 4.1. ξ ve η 'nın η , y ve x Üzerindeki Doğrudan, Dolaylı ve Toplam Etkileri

		η üzerinde	y üzerinde	x üzerinde
ξ 'nin etkisi	Doğrudan	Γ	0	Λ_x
	Dolaylı	$(I-B)^{-1}\Gamma-\Gamma$	$\Lambda_y(I-B)^{-1}\Gamma$	0
	Toplam	$(I-B)^{-1}\Gamma$	$\Lambda_y(I-B)^{-1}\Gamma$	Λ_y
η 'nın etkisi	Doğrudan	B	Λ_y	0
	Dolaylı	$(I-B)^{-1}-I-B$	$\Lambda_y(I-B)^{-1}-\Lambda_y$	0
	Toplam	$(I-B)^{-1}-I$	$\Lambda_y(I-B)^{-1}$	0

Bollen, 1989.

4.7. Modelin Değerlendirilmesi ve Uyum Ölçütleri

Yapısal Eşitlik modeli tanımlandıktan ve parametreler tahmin edildikten sonra modelin veriye uygun olup olmadığı ve modeldeki ilişkilerin anlamlılığı araştırılır. Modelden elde edilecek sonuçların güvenilirliği açısından, bu aşamada seçilecek yöntemin doğruluğu ve başarısı son derece önemlidir. Tahminin başarısı için ilk şart parametrelerin tanımlanmış olmasıdır. Model parametreleri tanımlanmış ve gözlenen kovaryans matrisi verilmişse, model parametreleri uygun tahmin yöntemi seçilerek tahmin edilebilir.

YEM'de test edilmesi gereken temel hipotez,

$$\Sigma = \Sigma(\theta) \tag{4.29}$$

şeklindedir. Bütün uyum ölçüleri bu hipotezin geçerli olup olmadığının değerlendirilmesine yardım eder. Hemen hemen model uyum ölçülerinin tamamı S (örneklem kovaryans matrisi) ve Σ fonksiyonlarını içerirler. Bu uyum indeksleri S'nin $\hat{\Sigma}$'ya yakınlığının ölçüsüdür (Bollen, 1989; Hoyle, 1995; Hair ve ark., 1998;Schermelleh-Engel ve ark., 2003).

Bütün uyum ölçülerinin temel avantajı modelin bütününü değerlendirmeleridir. Uyum ölçüleri model bileşenlerinin (örneğin; Eşitlikler ve parametre tahminleri) uyumu tarafından ortaya çıkartılamayan göstergelerin yetersizliğini değerlendirebilmektedir. Uyum ölçütlerine dair bir sınırlama, onların tam tanımlanmış modellerde kullanılmamalarıdır. Bu durumda daima $\boldsymbol{S} = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ olacaktır ve bu yüzden tam uyumun belirlenmesi durumunda modelin uyumunun değerlendirilmesi YEM' in konusu olmayacaktır. Uyum ölçütlerine dair ikinci bir sınırlama ise tüm uyum ölçütlerinin model bileşenlerinin uyumuna dair olarak farklılık gösterebileceği yönündedir. Örneğin, bir modelin tüm uyumu iyi olabilir ancak parametre tahminleri istatistiksel olarak anlamlı olmayabilir. Ayrıca $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$'nın $\boldsymbol{S}$ ile tam eşleşmesi, açıklayıcı değişkenlerin tahminlerinin ne kadar iyi olduğunu göstermemektedir. Uyum ölçütlerinin tamamı modelin tüm Eşitlikleri için R^2'leri de özetleyecek nitelikte değildir (Bollen, 1989, Hayduk, 1987; Hair ve ark., 1998; Brown; 2006, Çelik, 2009).

Teorik modelin anlamlılığının test edilmesi YEM'in kullanılmasının birinci amacıdır. Bu yüzden araştırmacılar bir teorik modelin istatistiksel anlamını belirlemek için bazı kriterleri dikkate alır (Schumacher ve Lomax 2004;Doğan, 2013):

i. Genelde ki-kare ve RMSEA değerleri dikkate alınır. İstatistiksel olarak anlamlı olan ki-kare değeri örneklem varyans-kovaryans matrisi ile türetilmiş varyans-kovaryans matrisinin benzer olduğunu gösterir.
ii. Modeldeki yollar için yapılan tahminlerin ayrı ayrı anlamlılığına bakılır. Bunlar kritik değerlerdir. Her bir parametre tahmini (λ) kendi standart hatasına (σ_i) bölündüğünde *t* değerleri elde edilir. *t* değerlerinin anlamlılığı *t* tablosuna bakılarak hesaplanabilir.
iii. Bir başka kriter ise ölçekle ilgilenmektir. Bu durumda parametre Tahmininin katsayısına ve işaretine dikkat edilir. Bu değerler ilişkinin gücünü ve yönünü gösterir (Schumacher ve Lomax 2004; Doğan, 2013).

4.7.1. Anlamlılık Testleri

4.7.1.1. Ki-Kare Test İstatistiği

Ki-kare $\left(\chi^2\right)$ değeri gözlenen ve beklenen değerlerin kovaryans matrisleri arasındaki fark ile ilgilidir. Model uyumu örneklem büyüklüğü artarsa (genelde 200 üstü) ya da örneklem büyüklüğü düştüğünde (genelde 100 altı) χ^2 istatistiğinin değeri uyum

sınırlarının dışına çıkmaya eğilimlidir. Bundan dolayı χ^2 istatistiği örneklem büyüklüğü tarafından etkilenir. χ^2 istatistiği aynı zamanda çok değişkenli normallik varsayımından da etkilenir (Schumacher ve Lomax, 2004; Doğan, 2013). Test istatistiği en temel haliyle

$$\chi^2 = (n-1)F_{ML,GLS,WLS} \tag{4.30}$$

biçiminde elde edilir.

4.7.1.2. Ki-Kare Farkı Testi

Kovaryans yapı analiz uygulamalarında araştırmacılar iki veya daha çok alternatif model arasında bir seçim yapma sorunuyla sıklıkla karşılaşmaktadırlar. Birbiriyle rekabet eden birkaç model içinden birinin seçimi için kullanılacak ölçüt, modellerin iç içe olup olmadığına bağlıdır. Eğer spesifik bir model (Model A) daha az kısıtlanmış bir modeldeki (Model B) en az bir serbest parametrenin sabitlenmesiyle Model B' den türetilebiliyorsa, Model A' nın kendisine göre daha az serbestlik derecesi ve daha fazla parametreye sahip Model B ile iç içe olduğu belirtilir. İç içe modellerin her birinin test istatistiği olarak χ^2dağılımı kullanılır. İki iç içe model arasındaki χ^2 değerleri arasındaki farkta χ^2 dağılacaktır. Bu fark için serbestlik derecesinin sayısı iki modele ilişkin serbestlik derecelerinin farkına eşit olacaktır. Bu varsayımlar altında

$$\begin{aligned} \chi^2_{sd_{fark}}(fark) &= \chi^2_{sd_A}(A) - \chi^2_{sd_B}(B) \\ sd_{fark} &= sd_A - sd_B \end{aligned} \tag{4.31}$$

olacaktır (Bollen, 1989; Schermelleh-Engel ve ark., 2003; Çelik, 2009).

Eğer χ^2 farkı anlamlı ise her iki modele ilişkin uyumun eşit olduğuna dair sıfır hipotezi reddedilecektir. Bu sonuca göre de Model B seçilmelidir. Fakat χ^2 farkı anlamlı değil ise sıfır hipotezi reddedilir ve Model A' nın seçilmesine karar verilir (Çelik, 2009).

4.7.2. Betimleyici Uygunluk Ölçüleri

Örneklem büyüklüğüne ilişkin olarak χ^2 istatistiğinin duyarlığından dolayı, alternatif uygunluk ölçüleri geliştirilmiştir. Tüm modelin uyum ölçüleri gözlenen veriye karşılık gelen bir YEM' in boyutunun göstergesidir. Bu kriter modele ilişkin tahmini kovaryans matrisi $\Sigma = \Sigma(\hat{\theta})$ ve örneklem kovaryans matrisi **S** arasındaki farkı temel almaktadır. Tüm modelin uyumuna ilişkin betimleyici ölçüleri: Hata Kareleri Ortalamasının karekökü (RMR - Root Mean Square Residual), Yaklaşım Hatasının Kareli artalamasının Karekökü

(RMSEA- Root Mean Square Error of Approximation) ve Standartlaştırılmış Hata Kareleri Ortalamasının Karekökü (SRMR – StandardizedRoot Mean Square Residual) istatistikleridir (Schermelleh-Engel ve ark, 2003; Brown, 2006; Çelik, 2009).

4.7.2.1. Yaklaşık Hataların Ortalama Karekökü -RMSEA (Root Mean Square Error of Approximation)

Steiger ve Lind (1980) tarafından, YEM' de, modelden elde edilen kovaryans matrisinin, örneklemden elde edilen kovaryans metrisine uygunluk düzeyini ölçmek için geliştirilmiştir. RMSEA için, kitledeki yaklaşık uyumun bir ölçüsüdür denilebilir (Yılmaz ve Çelik, 2009; Şen, 2013). RMSEA değeri Eşitlik 4.32'de verildiği gibidir.

$$\text{RMSEA} = \sqrt{maks\left\{\left(\frac{F\left(\boldsymbol{S},\Sigma\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right)}{sd} - \frac{1}{N-1}\right),0\right\}} \tag{4.32}$$

Burada, $F\left(\boldsymbol{S},\Sigma\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right)$, en küçüklenen uyum fonksiyonu, $sd = s - t$, serbestlik derecesinin sayısı, *N,* örneklem büyüklüğüdür. RMSEA değerinin 0.05'ten küçük veya eşit olması iyi bir uyumu, 0.05 ile 0.08 arasında olması yeterli bir uyumu, 0.08 ile 1 arasında olması ise vasat denilebilecek bir uyumu göstermektedir. RMSEA ana kütledeki yaklaşık uyumun bir ölçümüdür denilebilir (Özçelik, 2011).

Farklı iki hata türü arasındaki ayrımın yapılabilmesi için RMSEA'nın anlaşılabilmesi oldukça önemlidir. *Yaklaşım hatası* ana kütle kovaryans matrisine göre modelin uyumsuzluğunu göstermektedir. Eğer model bu hatanın olası bir ölçüsü ile ana kütle kovaryans matrisine uyum gösteriyorsa en küçüklenen uyum fonksiyonu değeri elde edilir. *Tahmin hatası*, ana kütle kovaryans matrisine uyumlu model ile örneklem kovaryans matrisine uyumlu model arasındaki farklılığı yansıtmaktadır. Ana kütledeki model uyumunun bakış açısından hareketle, tahmin hatası sadece ikinci dereceden ilgilenilecek bir konudur. Çünkü uyum fonksiyonu değeri $F\left(\boldsymbol{S},\Sigma\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right)$ ana kütle yaklaşım hatasının yanlı bir tahmin edicisi konumundadır (Bollen, 1989; Schermelleh-Engel ve ark., 2003; Çelik, 2009).

4.7.2.2. Hata Kareler Ortalamasının Karekökü -RMR (Root Mean Square Residuals)

RMR uyum indeksinde kastedilen hatalar, modelden elde edilen kovaryans matrisiyle örneklemden elde edilen kovaryans matrisi arasındaki fark matrisinin elemanlarından oluşan hatalara dayanılarak hesaplanır. RMR uyum indeksi hataları temel alan elverişsiz bir yöntemdir (Schermelleh-Engel ve ark., 2003; Brown, 2006; Şen, 2013). RMR değeri,

$$RMR = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{i}\left(S_{ij} - \sigma_{ij}\right)^2}{p(p+1)/2}} \tag{4.33}$$

şeklindedir. Bu Eşitlikteki S_{ij} ,örneklem kovaryans matrisinin *i.* satır, *j.* sütun elemanı; σ_{ij} , model kovaryans matrisinin *i.* satır, *j.* sütun elemanı ve p , gözlenen değişken sayısıdır.

RMR, 0 ile 1 aralığında değerler alır. RMR değerinin sıfıra yakın olması iyi uyumun göstergesidir (Schermelleh-Engel ve ark., 2003; Kline, 2012; Şen, 2013). Ölçek verilmeksizin elde edilen bir RMR değerinin iyi ya da kötü uyum sergilediğini değerlendirmek olanaksızdır (Schermelleh-Engel ve ark.,2003; Şen, 2013). Yani, RMR ölçekten bağımsız bir uyum ölçütü değildir. Bu sebeple, bu problemin çözümlenmesi için SRMR uyum ölçütü geliştirilmiştir (Şen, 2013).

4.7.2.3. – Standartlaştırılmış Hata Kareler Ortalamasının Karekökü -SRMR (Standardized Root Mean Square Residual)

SRMR, hem örneklem kovaryans matrisinin hem de tahmin edilen model kovaryans matrisinin korelasyon matrisine dönüştürülmesine dayanır. SRMR, gözlenen ve tahmin edilen korelasyon matrisleri arasındaki fark matrisinin elemanlarından oluşan hataların bir ölçüsüdür (Kline, 2012). Bu yüzden, RMR' ye göre yorumlanması daha anlamlıdır. SRMR değeri,

$$SRMR = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{p}\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{s_{ij} - \hat{\sigma}_{ij}}{s_i s_j}\right)^2}{p(p+1)/2}} \tag{4.34}$$

şeklinde hesaplanır. Burada $S_i = \sqrt{S_{ii}}$ ve $S_j = \sqrt{S_{jj}}$ gözlenen değişkenlerin standart hatalarıdır.

SRMR değeri de, 0 ile 1 aralığında değerler alır. SRMR değeri, 0.01'den küçük olduğunda iyi uyumun, 0.05'den küçük olduğunda ise kabul edilebilir uyumun göstergesidir (Schermelleh-Engel et. al., 2003; Brown, 2006; Kline, 2012; Şen, 2013). SRMR, ölçekten bağımsız bir uyum ölçütüdür.RMR ve SRMR, kareli hataları temel alan bir ölçü olduğundan uyumsuzluğun yönü hakkında bilgi vermez (Schermelleh-Engel et. al.,,2003; Kline, 2005; Brown, 2006; Doğan, 2013).

4.7.3. Model Karşılaştırmalarını Temel Alan Betimleyici Ölçüler

Karşılaştırma indekslerinin ana fikri, ilgilenilen bir modelin uyumunun temel modelin uyumu ile karşılaştırılması odaklıdır. Karşılaştırma modeli olarak bağımsız modeller kullanılmaktadır. Bağımsız modele ilişkin olarak gözlenen değişkenlerin hatasız ölçüldüğü varsayılır. Bağımsız model de; tüm hata varyansları sıfır, tüm faktör yükleri bir ve tüm değişkenler ilişkisiz olarak ele alınmaktadır. Temel model oldukça sınırlayıcı bir modeldir. Temel bir model için uyum indeksi karşılaştırma değeri olarak kullanılır ve genellikle kötü bir model uyumunun göstergesi konumundadır. Bu konu hedef modelin temel modele göre geliştirilip geliştirilmeyeceği odaklıdır (Schumacker ve Lomax, 1996; Kaplan, 2000; Schermelleh-Engel ve ark., 2003; Çelik, 2009).

4.7.3.1. Normlaştırılmış Uyum İndeksi - NFI (Normed Fit Index,)

Bu uyum indeksi ilk defa Bentler ve Bonett tarafından 1980'de ortaya atılmıştır. Örnekleme sayısı ile pozitif ilişkilidir. Bu indeks varsayılan modelin temel ya da sıfır hipoteziyle olan uygunluğunu araştırır. 0-1 arasında değişen değerler alır. 0.95 ile 1 arasında NFI değerine sahip bir modelin iyi uyum içinde olduğu, 0.90 ile 0.95 arasında NFI değerine sahip bir modelin kabul edilebilir uyum içinde olduğu söylenebilir (Özçelik, 2011). *NFI* değeri,

$$NFI = \frac{\chi_s^2 - \chi_h^2}{\chi_s^2} = 1 - \frac{\chi_h^2}{\chi_s^2} = 1 - \frac{F_h}{F_s} \tag{4.35}$$

biçiminde hesaplanır. Burada χ_s^2 ,temel modelin ki-kare değeri; χ_h^2 ,hedef modelin ki-kare değeri; F, tahmin yöntemlerine göre belirlenen uzaklık fonksiyonudur.

NFI'nın dezavantajı örnek sayısından etkilenmesidir. Modeldeki parametre sayısının artmasıyla doğru orantılı olarak artar. Bu da doğru olmayan bir modelin kabulüyle sonuçlanabilir (Özçelik, 2011).

4.7.3.2. Normlaştırılmamış Uyum İndeksi - NNFI (Non-normed Fit Index)

Bentler ve Bonnett (1980), Tucker ve Lewis (1973)'ün çalışmasını geliştirerek *NNFI* uyum indeksini geliştirmişlerdir. *NNFI* değeri,

$$NNFI = \frac{\left(\chi^2_{bağımsız} / df_{bağımsız}\right) - \left(\chi^2_{önerilen} / df_{önerilen}\right)}{\left(\chi^2_{bağımsız} / df_{bağımsız}\right)} \tag{4.36}$$

eşitliğinden bulunur (Doğan, 2013).

4.7.3.3. Karşılaştırılmalı Uyum İndeksi-CFI (Comperative Fit Index)

Mevcut modelin uyumu ile gizil değişkenler arası korelasyonu ve kovaryansı yok sayan sıfır hipotez modelinin uyumunu karşılaştırır. Bir başka ifadeyle, model tarafından tahmin edilen kovaryans matrisi ile sıfır hipotezli modelin kovaryans matrisini karşılaştırır (Özçelik, 2011). *CFI* değeri

$$CFI = \frac{maks\left\{\left(\chi^2_h - sd_h\right), 0\right\}}{maks\left\{\left(\chi^2_h - sd_h\right), \left(\chi^2_s - sd_s\right), 0\right\}} \tag{4.37}$$

biçiminde hesaplanır. Burada χ^2_h, temel modelin ki-kare değeri; χ^2_h:hedef modelin χ^2 değeri ve *sd*, Temel modelin serbestlik derecesidir. *CFI*, 0 ile 1 arasında değerler alır. Daha yüksek *CFI* değerleri, daha iyi uyumun göstergesidir. Eğer bu indeksin değeri 0.97'den büyükse iyi uyum, 0.95'den büyükse kabul edilebilir uyum söz konusudur. Sıklıkla da 1'e yakın değerler almaktadır. *CFI, NNFI* ile karşılaştırıldığında örneklem büyüklüğünden daha az etkilenen uyum indeksidir (Schumacker ve Lomax, 1996; Jöreskog ve Sörbom, 1996; Kaplan, 2000; Schermelleh-Engel ve ark., 2003; Kline, 2005; Şen, 2013).

4.7.3.4. Uyum İyiliği İndeksi -GFI (Goodness-of-fit Index)

GFI gözlenen kovaryans matrisindeki varyans ve kovaryansların göreli miktarının ölçüsüdür. *GFI* değeri,

$$GFI = 1 - \frac{\chi^2_{bağımsız}}{\chi^2_{önerilen}} \tag{4.38}$$

biçiminde hesaplanır. *GFI* değeri 0 ile 1 arasında değişir. *GFI'* nın 0.90'ı aşması iyi bir model göstergesi olarak alınmaktadır. (Ayyıldız ve Cengiz, 2006; Doğan,2013). 0.90'nın üstündeki değerler kabul edilebilir uyumu, 0.95'in üstündeki değerler ise iyi uyumu gösterir (Hair ve ark., 1998; Schermelleh-Engel ve ark., 2003; Raykov ve Marcoulides, 2006; Şen, 2013).

4.7.3.5. Düzeltilmiş Uyum İyiliği İndeksi -AGFI (Adjusted Goodness-of-fit Index)

Örnekleme sayısı dikkate alınarak düzeltilmiş olan bir *GFI* değeridir. Örnekleme sayısının özellikle büyük olduğu durumlarda *AGFI* daha temsili bir uyum indeksidir(Aydın, 2010; Doğan, 2013).

AGFI değeri 0 ile1 arasındadır. *AGFI* değeri 1'e ne kadar yakın olursa uyum o kadar iyidir. Bu değer 0.90'dan büyük olduğunda modelin iyi uyum gösterdiği, 0.85 den büyük olduğunda ise modelin uygunluğunun kabul edilebilir olduğu söylenebilir.
(Hair ve ark., 1998; Schermelleh-Engel ve ark., 2003;Raykov ve Marcoulides, 2006; Özçelik, 2011). *AGFI* değeri,

$$AGFI = 1 - \frac{sd_s}{sd_h}(1 - GFI) = 1 - \frac{\chi^2_h / sd_h}{\chi^2_s / sd_s} \tag{4.39}$$

biçiminde hesaplanır. Burada $sd_s = p(p+1)/2$; χ^2_s, temel modelin ki-kare değeri; χ^2_h, hedef modelin χ^2 'si ve *p,* gözlenen değişken sayısıdır.

Bazı durumlarda *GFI* ve *AGFI* değeri negatif çıkabilmektedir. Yapılan simülasyon çalışmalarında, *GFI* ve *AGFI'*nin örneklem hacminden bağımsız olmadığını göstermiştir (Schermelleh-Engel ve ark., 2003; Şen, 2013).

4.7.3.6. Tutarlı Uyum İyiliği İndeksi (PGFI) ve Tutarlı Normlaştırılmış Uyum İndeksi (PNFI)

PGFI ve *PNFI*, *GFI* ve *NFI'* nin değiştirilmiş formlarıdır.

$$PGFI = \frac{sd_h}{sd_s} GFI \quad \text{ve} \quad PNFI = \frac{sd_h}{sd_s} NFI \tag{4.40}$$

biçiminde hesaplanırlar. *PGFI* ve *PNFI'*nin her ikisi de sıfır ile bir aralığında değerler almakla beraber, yüksek değerler daha iyi bir uyumun göstergesidir. Her iki indekste alternatif modeller arasında bir seçim yapabilmek için kullanılmaktadırlar (Çelik, 2009).

5. YAPISAL EŞİTLİK MODELİNDE BAYES TAHMİN YÖNTEMİ

Yapısal Eşitlik Modelinde Bayes yönteminin kullanılması için gizil değişken içeren bir *M* modeli olarak düşünülür. Gizil değişkenlerin ve parametrelerinin sonsal dağılımı, MCMC yöntemiyle sonsal dağılımdan yeterince büyük sayıda gözlem elde edilmesi ile elde edilir.

Ortalamalar ve değişkenler sonsal dağılım ile elde edilen simüle edilmiş gözlemler ile tahmin edilir. Bu özellik istatistiksel sonuç çıkarımında kullanışıdır. Fakat çoğu YEM için sonsal dağılım $p\left(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{Y}\right)$'nın elde edilmesi karmaşıktır. Bu dağılımı bulmak ve bu dağılımdan sayı üretmek oldukça zordur. Tanner ve Wong (1987) sonsal dağılımdan simülasyon yapmak için önemli bir fikir önermişlerdir. Bu yöntemin stratejisi gizil değişkenleri hipotezsel kayıp veri olarak ele almak ve gözlenen veriye bunu ilave etmektir. Böylelikle tam veri seti temelli sonsal dağılım (veya olasılık yoğunluk) fonksiyonunu ele almak oldukça kolaydır. Bu yöntem özellikle gizil değişken içeren YEM için oldukça kullanışlıdır. YEM' in gizil değişken içermesi onu bilinen regresyon modelinden farklı kılar ve modelin analiz edilmesini zorlaştırır. Eğer gizil değişkenler gözlenseydi YEM bilinen regresyon modeline dönüşürdü.

Uygulamada genellikle elde edilmesi zor olan sonsal olasılık $p\left(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{Y}\right)$ yerine $p\left(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\Omega}\|\boldsymbol{Y}\right)$ üzerinde çalışılmıştır. $\boldsymbol{\Omega}$, modeldeki gizil değişkenler olmak üzere çoğu durumda $p\left(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\Omega}\|\boldsymbol{Y}\right)$ kapalı formda değildir ve bununla direkt ilgilenmek zordur. Fakat $\left(\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{Y}\right)$' den oluşan tam veri seti için koşullu dağılım $\left[\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\Omega},|\boldsymbol{Y}\right]$ genellikle standarttır üstelik koşullu dağılım $\left[\boldsymbol{\Omega}|\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{Y}\right]$ tanımlanan modelden elde etmek daha az zorluk içerir. Sonuç olarak MCMC yöntemi uygulanarak $p\left(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\Omega}\|\boldsymbol{Y}\right)$'den gözlemler elde etmek için onun tam koşullu yoğunluğu $p\left(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{Y}\right)$ ve $p\left(\boldsymbol{\Omega}|\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{Y}\right)$'den yararlanılır. Bu uygulama iteratif olarak gerçekleştirilir. Bu yöntem için kullanışlı bir algoritma Gibbs örneklemesidir. (Geman ve Geman, 1984; Song ve Lee, 2012a).

Model M, parametre vektörü $\boldsymbol{\theta}=\left(\theta_1,\theta_2,...,\theta_a\right)$ ve gizil değişken matrisinin $\boldsymbol{\Omega}=\left(\Omega_1,\Omega_2,...,\Omega_b\right)$ olduğunu düşünülür. Gibbs örneklemi, her bir adımda alternatif koşullu örneklem üreten bir MC algoritmasıdır. Simülasyon genellikle

$$\boldsymbol{\theta}^{(j)} = \left(\theta_1^{(j)}, \theta_2^{(j)}, ..., \theta_a^{(j)}\right) \text{ ve } \boldsymbol{\Omega}^{(j)} = \left(\Omega_1^{(j)}, \Omega_2^{(j)}, ..., \Omega_b^{(j)}\right)$$

$$\theta_1^{(j+1)} \Rightarrow P\left(\theta_1 \middle| \theta_2^{(j)}, ..., \theta_a^{(j)}, \boldsymbol{\Omega}^{(j)}, \boldsymbol{Y}\right)$$

$$\theta_2^{(j+1)} \Rightarrow P\left(\theta_2 \middle| \theta_1^{(j+1)}, ..., \theta_a^{(j+1)}, \boldsymbol{\Omega}^{(j)}, \boldsymbol{Y}\right)$$

. .

. .

(5.1)

. .

$$\theta_a^{(j+1)} \Rightarrow P\left(\theta_a \middle| \theta_1^{(j+1)}, ..., \theta_{a-1}^{(j+1)}, \boldsymbol{\Omega}^{(j)}, \boldsymbol{Y}\right)$$

$$\Omega_1^{(j+1)} \Rightarrow P\left(\Omega_1 \middle| \theta^{(j+1)}, \Omega_2^{(j)}, ..., \Omega_b^{(j)}, \boldsymbol{Y}\right)$$

$$\Omega_2^{(j+1)} \Rightarrow P\left(\Omega_2 \middle| \theta^{(j+1)}, \Omega_1^{(j+1)}, ..., \Omega_b^{(j+1)}, \boldsymbol{Y}\right)$$

. .

. .

. .

$$\Omega_b^{(j+1)} \Rightarrow P\left(\Omega_b \middle| \theta^{(j+1)}, \Omega_1^{(j+1)}, ..., \Omega_{b-1}^{(j+1)}, \boldsymbol{Y}\right)$$

şeklinde gerçekleşmektedir. Gibbs örneklemesinin $j.$ iterasyonunda *(a+b)* tane adım vardır. Her bir adımda $\boldsymbol{\theta}$ ve $\boldsymbol{\Omega}$'nın her bileşimi diğer bileşimlerin son değerlerine göre güncellenir ilk önce $\boldsymbol{\theta}$ daha sonra $\boldsymbol{\Omega}$ şeklinde ya da tam tersi olarak simülasyon başlayabilir. Eşitlik 6.1'de en çok kullanılan dağılımlar; standart normal, Gamma ya da Wishart dağılımıdır. Bu dağılımlardan sayı üretilmesi daha kolaydır. Standart olmayan dağılımlar için MH algoritması (Hastings, 1970) etkili bir simülasyon için kullanılmaktadır (Lee ve Song, 2012a).

Gibbs örneklerinde istenilen değerlere yakınlaşmayı elde etmek için gerekli iterasyon sayısı, birbiri ardına gelen bağımsız parametrelerin grafiklerine bakılarak belirlenebilir. Eğer yakınlaşma farklı başlangıç noktaları ele alındığında paralel olarak elde ediliyorsa sonuçlar iyi anlamına gelmektedir.

İteratif olarak yapılan simülasyon çalışmalarında ikincil problem peş peşe gelen değişkenler arasındaki korelasyondur. Art arda gelen korelasyonları azaltmak için değişkenler $J + c, J + 2c, ..., J + Tc$ şeklinde toplanabilir. Burada $c$bir aralıktır. Birçok

pratik uygulamada istatistiksel analiz için küçük bir c değeri, bilinmeyen parametre ve onun standart hata tahmini içeren uygulamalarda yeterli olmaktadır.

$p\left(\boldsymbol{\theta}\middle|\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{Y}\right)$'dan simüle edilen gözlemler ile modelin istatistiksel sonuç çıkarsaması yapılabilir. Burada $\left\{\left(\boldsymbol{\theta}^{(k)},\boldsymbol{\Omega}^{(k)}\right):k=1,\ldots,K\right\}$'dır. $\boldsymbol{\theta}$'nın Bayes tahmini ve standart hatası

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}=K^{-1}\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{\theta}^{(k)} \tag{5.2}$$

$$\widehat{Var}\left(\boldsymbol{\theta}\middle|\boldsymbol{Y}\right)=\left(K-1\right)^{-1}\sum_{k=1}^{K}\left(\boldsymbol{\theta}^{(k)}-\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\left(\boldsymbol{\theta}^{(k)}-\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)^{T} \tag{5.3}$$

şeklinde elde edilir. $\boldsymbol{\theta}$ üzerinde daha fazla istatistiksel sonuç çıkarımı $\left\{\left(\boldsymbol{\theta}^{(k)}\right):k=1,\ldots,K\right\}$'dan simüle edilen örneklemlerden elde edilebilir. Örneğin, sonsal dağılım ile her bir parametre için % 2.5, % 50 ve % 97.5 yüzdelikler ve % 95'lik güven aralığı elde edilebilir. İstatistiksel analiz için gerekli olan üretilecek toplam gözlem sayısı (K), sonsal dağılım şekline bağlıdır. Çoğu YEM için üretilecek 1000 gözlem sayısı yakınsama için yeterli olmaktadır.

Herhangi bağımsız $\boldsymbol{y}_i$ için $\boldsymbol{\omega}_i$ gizil değişken vektörü, $E\left(\boldsymbol{\omega}_i\middle|\boldsymbol{y}_i\right)$ sonsal dağılımın ortalaması, $Var\left(\boldsymbol{\omega}_i\middle|\boldsymbol{y}_i\right)$ sonsal kovaryans matrisi olsun. $\hat{\boldsymbol{\omega}}_i$'nin Bayes tahmini $\left\{\Omega^{(k)}:k=1,\ldots,K\right\}$:

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_i=K^{-1}\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{\omega}_i^{(k)}=\hat{E}\left(\boldsymbol{\omega}_i\middle|\boldsymbol{y}_i\right) \tag{5.4}$$

olarak elde edilir. Burada $\boldsymbol{\omega}_i^{(k)}$, $\boldsymbol{\Omega}_i^{(k)}$'nın *i.* sütun değeridir. Eşitlik 5.4'te yapısal parametre tahminlerinde açıklanmayan değişkenler için Bayes tahminini verir. Bu nedenle, gizil değişkenleri tahmininde klasik yöntemlerden farklı olarak, Bayes yönteminde tahminlerin örnekleme hataları hesaba katılmaktadır (Song ve Lee, 2012b).

Yapısal Eşitlik Modellemesinde bilinmeyen parametre vektörü $\boldsymbol{\theta}$ ve $\boldsymbol{\Omega}$ gizil değişkenlerinin tahmininde Bayes yöntemini uygulamak için tam koşullu dağılım $p\left(\boldsymbol{\theta}\middle|\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{Y}\right)$ ve $p\left(\boldsymbol{\Omega}\middle|\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{Y}\right)$'den bileşenlerin üretilmesi gerekmektedir.(Song ve Lee, 2012a).

Bayesci YEM için kullanılan önsel dağılımlar Çizelge 5.1'de verilmiştir.

Çizelge 5.1. Bayesci Yapısal Eşitlik Modelinde Kullanılan Önsel ve Sonsal Dağılımlar

Parametre	Önsel Dağılım	Sonsal Dağılım
$\Psi_{\varepsilon k}$	Gamma Dağılımı	Gamma Dağılımı
$\Psi_{\delta k}$	Gamma Dağılımı	Gamma Dağılımı
Φ	Wishart Dağılımı	Ters Wishart Dağılımı
Λ (Ölçüm Modeli)	Çok Değişkenli Normal Dağılım	Çok Değişkenli Normal Dağılım
$\Lambda_{\omega k}$ (Yapısal Model)	Çok Değişkenli Normal Dağılım	Çok Değişkenli Normal Dağılım

Song ve Lee, 2012b.

WinBUGS programı, birçok istatistiksel modellemede güvenilir Bayesci istatistikleri üretmek için oldukça yararlı bir programdır. WinBUGS'ta kullanılan algoritma ağırlıklı olarak MCMC tekniklerinden Gibbs örnekleyicisi (Geman ve Geman, 1984) ve MH algoritması kullanılarak geliştirilmiştir (Hastings, 1970). Bu yazılım "Gibbs örnekleme kullanarak Bayes çıkarsama (BUGS)" 1989 yılında başlatılan projeye dayanmaktadır. Bu yazılım, MRC Biyoistatistik Birimi, araştırma ekibi tarafından geliştirilmektedir.

5.1. Bayesci Faktör Analizi

Bu bölümde YEM'de ölçüm modeline karşılık gelen doğrulayıcı faktör analizi uygulamasından bahsedilecektir.

Doğrulayıcı faktör analizi için model

$$\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i \tag{5.5}$$

biçiminde olsun. Modelde $\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_n)$, gözlenen veri matrisi, $\boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, ..., \boldsymbol{\omega}_n)$ gizil faktör skorları ve $\boldsymbol{\theta}$, bilinmeyen $\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Phi}$ ve $\boldsymbol{\Psi}_{\varepsilon}$ 'den oluşan parametre vektörü olmak üzere Bayes analizinde $\boldsymbol{\Omega}$'daki faktör skorları hipotezsel kayıp veri olarak ele alınır. Sonsal veri analizinde gözlenen veri seti $\mathbf{Y}$'nin yanı sıra gizil değişkenler $\boldsymbol{\Omega}$'larla birlikte gözlenen veri seti arttırılır. Ortak sonsal dağılım $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Omega} | \boldsymbol{Y})$' den yeterince büyük sayıda $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Omega})$ değerlerinin üretilmesi sağlanır. $(j+1)$. iterasyonda $\boldsymbol{\Omega}^{(j)}, \boldsymbol{\Psi}_{\varepsilon}^{(j)}$, $\boldsymbol{\Lambda}^{(j)}$ ve $\boldsymbol{\Phi}^{(j)}$ değerleri aşağıda verilen Gibbs örneklemesi algoritması ile

(i) $\boldsymbol{\Omega}^{(j+1)} \Rightarrow P\left(\boldsymbol{\Omega}\middle|\boldsymbol{\Psi}_{\varepsilon}^{(j)},\boldsymbol{\Lambda}^{(j)},\boldsymbol{\Phi}^{(j)},\boldsymbol{Y}\right)$

(ii) $\boldsymbol{\Psi}_{\varepsilon}^{(j+1)} \Rightarrow P\left(\boldsymbol{\Psi}_{\varepsilon}\middle|\boldsymbol{\Omega}^{(j+1)},\boldsymbol{\Lambda}^{(j)},\boldsymbol{\Phi}^{(j)},\boldsymbol{Y}\right)$ (5.6)

(iii) $\boldsymbol{\Lambda}^{(j+1)} \Rightarrow P\left(\boldsymbol{\Lambda}\middle|\boldsymbol{\Omega}^{(j+1)},\boldsymbol{\Psi}_{\varepsilon}^{(j+1)},\boldsymbol{\Phi}^{(j)},\boldsymbol{Y}\right)$

(iV) $\boldsymbol{\Phi}^{(j+1)} \Rightarrow P\left(\boldsymbol{\Phi}\middle|\boldsymbol{\Omega}^{(j+1)},\boldsymbol{\Psi}_{\varepsilon}^{(j+1)},\boldsymbol{\Lambda}^{(j+1)},\boldsymbol{Y}\right)$

biçiminde üretilir.

$P\left(\boldsymbol{\Omega}\middle|\boldsymbol{\Psi}_{\varepsilon},\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{Y}\right)=P\left(\boldsymbol{\Omega}\middle|\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{Y}\right)$'ın üretilmesi, $\left(\boldsymbol{\omega}_i,\boldsymbol{\theta}\right)$ verildiğinde, $\boldsymbol{\omega}_i$'nin ve $\boldsymbol{y}_i$'nin bağımsız olması ile yapılmaktadır. Böylece

$$P\left(\boldsymbol{\Omega}\middle|\boldsymbol{Y},\boldsymbol{\theta}\right)=\prod_{i=1}^{n}P\left(\boldsymbol{\omega}_i\middle|\boldsymbol{y}_i,\boldsymbol{\theta}\right)\propto\prod_{i=1}^{n}P\left(\boldsymbol{\omega}_i\middle|\boldsymbol{\theta}\right)P\left(\boldsymbol{y}_i\middle|\boldsymbol{\omega}_i,\boldsymbol{\theta}\right) \tag{5.7}$$

olur. Ayrıca koşullu olasılık dağılımları,

$$\left(\boldsymbol{\omega}_i\middle|\boldsymbol{\theta}\right)\sim N\left(0,\boldsymbol{\Phi}\right) \tag{5.8}$$

$$\left(\boldsymbol{y}_i\middle|\boldsymbol{\omega}_i,\boldsymbol{\theta}\right)\sim N\left(\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\omega}_i,\boldsymbol{\Psi}_{\varepsilon}\right) \tag{5.9}$$

dır. Eşitlik 5.8 ve Eşitlik 5.9'dan yararlanılarak $\boldsymbol{Y}$ ve $\boldsymbol{\theta}$ verildiğinde $\boldsymbol{\Omega}$'nın dağılımı:

$$\left(\boldsymbol{\omega}_i\middle|\boldsymbol{y}_i,\boldsymbol{\theta}\right)\sim N\left[\left(\boldsymbol{\Phi}^{-1}+\boldsymbol{\Lambda}^{T}\boldsymbol{\Psi}_{\varepsilon}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}\right)^{-1}\boldsymbol{\Lambda}^{T}\boldsymbol{\Psi}_{\varepsilon}^{-1}\boldsymbol{y}_i,\left(\boldsymbol{\Phi}^{-1}+\boldsymbol{\Lambda}^{T}\boldsymbol{\Psi}_{\varepsilon}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}\right)^{-1}\right] \tag{5.10}$$

biçiminde elde edilir.

$\boldsymbol{Y}$ ve $\boldsymbol{\Omega}$ verildiğinde $\boldsymbol{\theta}$'nın dağılımı oransal olarak $P\left(\boldsymbol{\theta}\right)P\left(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{\Omega}\middle|\boldsymbol{\theta}\right)$'ya eşittir. Böylece önsel dağılım fonksiyonu $P\left(\boldsymbol{\theta}\right)$'nın seçimi oldukça önemlidir. Çünkü $P\left(\boldsymbol{\theta}\right)$, $\boldsymbol{\theta}$'nın önsel bilgisini temsil etmektedir. Faktör analizinde $\left(\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{\Psi}_{\varepsilon}\right)$ ve $\boldsymbol{\Phi}$'nın özelliklerinde bağlı olarak $\boldsymbol{\theta}$'nın önsel dağılımı:

$$P\left(\boldsymbol{\theta}\right)=P\left(\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Psi}_{\varepsilon}\right)=P\left(\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{\Psi}_{\varepsilon}\right)P\left(\boldsymbol{\Phi}\right) \tag{5.11}$$

olarak ele alınabilir. Ayrıca $\boldsymbol{\Omega}$ verildiğinde $\boldsymbol{Y}$'nin koşullu dağılımı yalnızca $\boldsymbol{\Lambda}$ ve $\boldsymbol{\Psi}_{\varepsilon}$'ye bağlıdır ve $\boldsymbol{\Omega}$'nın dağılımı sadece $\boldsymbol{\Phi}$'yı içerir. Böylece;

$$\begin{aligned}P\left(\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Psi}_{\varepsilon}\middle|\boldsymbol{Y},\boldsymbol{\Omega}\right)&=P\left(\boldsymbol{\theta}\middle|\boldsymbol{Y},\boldsymbol{\Omega}\right)\propto P\left(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{\Omega}\middle|\boldsymbol{\theta}\right)P\left(\boldsymbol{\theta}\right)\\&=P\left(\boldsymbol{Y}\middle|\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\Omega}\right)P\left(\boldsymbol{\Omega}\middle|\boldsymbol{\theta}\right)P\left(\boldsymbol{\theta}\right)\\&=P\left(\boldsymbol{Y}\middle|\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\Omega}\right)P\left(\boldsymbol{\Omega}\middle|\boldsymbol{\theta}\right)P\left(\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{\Psi}_{\varepsilon}\right)P\left(\boldsymbol{\Phi}\right)\\&=\left[P\left(\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{\Psi}_{\varepsilon}\right)P\left(\boldsymbol{Y}\middle|\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{\Psi}_{\varepsilon},\boldsymbol{\Omega}\right)\right]\left[P\left(\boldsymbol{\Omega}\middle|\boldsymbol{\theta}\right)P\left(\boldsymbol{\Phi}\right)\right]\end{aligned} \tag{5.12}$$

olur. Eşitlik 5.12'in ilk terimi sadece $(\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Psi}_{\varepsilon})$'ye ikinci terimi ise sadece $\boldsymbol{\Phi}$'ye bağlıdır. $P(\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Psi}_{\varepsilon} | \boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\Omega})$'nın marjinal koşullu olasılığı oransal olarak $P(\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Psi}_{\varepsilon}) P(\boldsymbol{Y} | \boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Psi}_{\varepsilon}, \boldsymbol{\Omega})$'ya ve $P(\boldsymbol{\Phi} | \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\Omega})$'nın marjinal koşullu olasılığı $P(\boldsymbol{\Omega} | \boldsymbol{\theta}) P(\boldsymbol{\Phi})$'ya oransal olarak eşittir. Sonuç olarak bu olasılıklar ayrı ayrı düşünülebilir. Bir sonraki birleşik önsel dağılım $(\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Psi}_{\varepsilon})$ ve $\boldsymbol{\Phi}$'den oluştuğu düşünülür. $\boldsymbol{\Psi}_{\varepsilon k}$, *k.* köşegen elemanı ve Λ_k^T, $\boldsymbol{\Lambda}$'nın *k.* satırı olarak ele alınır. Uygunluk olması açısından $k \neq h$ olmak üzere $\Psi_{\varepsilon k}$'nın önsel dağılımının $\Psi_{\varepsilon h}$'den bağımsız olduğunu ve Λ_k'nın Λ_h'den bağımsız olarak ele alındığını kabul edildiğinde,

$$\boldsymbol{\Psi}_{\varepsilon k}^{-1} \sim Gamma[\alpha_{o\varepsilon k}, \beta_{o\varepsilon k}] \tag{5.13}$$

$$[\boldsymbol{\Lambda}_k | \Psi_{\varepsilon k}] \sim N(\boldsymbol{\Lambda}_{ok}, \Psi_{\varepsilon k} \boldsymbol{H}_{oyk}) \tag{5.14}$$

$$\boldsymbol{\Phi} \sim W_r[\boldsymbol{R}_0^{-1}, \rho_0] \tag{5.15}$$

olur. Burada $Gamma(\alpha, \beta)$, şekil parametresi $\alpha > 0$ ve ölçek parametresi $\beta > 0$ olan gamma dağılımını göstermektedir. $W_r[\cdot, \cdot]$, r boyutlu Wishart dağılımıdır. Pozitif tanımlı matris $\boldsymbol{H}_{oyk}$, ρ_0 ve $\alpha_{o\varepsilon k}$, $\beta_{o\varepsilon k}$, Λ_{ok}, ρ_0 parametreleri hiper parametrelerdir. Bunlar önceki çalışmalardan veya diğer çeşitli kaynaklardan elde edilen önsel bilgileri temsil eden değerlerdir.

y_k^T'nin **y**'nin *k.* satırı ve

$$\boldsymbol{A}_k = \left(\boldsymbol{H}_{oyk}^{-1} + \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega}^T\right)^{-1} \tag{5.16}$$

$$\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{A}_k \left(\boldsymbol{H}_{oyk}^{-1} \Lambda_{ok} + \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{y}_k\right) \tag{5.17}$$

$$\beta_{\varepsilon k} = \beta_{o\varepsilon k} + 2^{-1}\left(y_k^T y_k - a_k^T \boldsymbol{A}_k^{-1} a_k + \Lambda_{ok}^T H_{oyk}^{-1} \Lambda_{ok}\right) \tag{5.18}$$

olarak ele alındığında. Bu durumda $\boldsymbol{Y}$ ve $\boldsymbol{\Omega}$ verildiğinde $\left(\boldsymbol{\Lambda}_k, \Psi_{\varepsilon k}^{-1}\right)$'in dağılımı:

$$\left[\psi_{\varepsilon k}^{-1} | \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\Omega}\right] \sim Gamma\left(n/2 + \alpha_{o\varepsilon k}, \beta_{\varepsilon k}\right) \tag{5.19}$$

$$\left[\boldsymbol{\Lambda}_k | \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\Omega}, \Psi_{\varepsilon k}^{-1}\right] \sim N[a_k, \psi_{\varepsilon k} \boldsymbol{A}_k] \tag{5.20}$$

olur ve bu dağılımlar bağımsızdır. Eşitlik 5.19 ve 5.20'den

$$P\left(\boldsymbol{\Lambda}_k, \Psi_{\varepsilon k}^{-1} \middle| \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\Omega}\right) = P\left(\Psi_{\varepsilon k}^{-1} \middle| \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\Omega}\right) P\left(\boldsymbol{\Lambda}_k \middle| \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\Omega}, \Psi_{\varepsilon k}^{-1}\right) \tag{5.21}$$

elde edilir. $P\left(\boldsymbol{\Phi} \middle| \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\Omega}\right)$ üretmek için Eşitlik 5.12'deki oran $P\left(\boldsymbol{\Phi}\right) P\left(\boldsymbol{\Omega} \middle| \boldsymbol{\Phi}\right)$ kullanılabilir. $\boldsymbol{\omega}_i$ bağımsız ise;

$$P\left(\boldsymbol{\Phi} \middle| \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\Omega}\right) \propto P\left(\boldsymbol{\Phi}\right) \prod_{i=1}^{n} P\left(\boldsymbol{\omega}_i \middle| \boldsymbol{\Phi}\right) \tag{5.22}$$

elde edilir. Eşitlik (21)'de verilen $\boldsymbol{\Phi}$'nin önsel dağılımından ve $\left[\boldsymbol{\omega}_i \middle| \boldsymbol{\Phi}\right] \sim N\left(0, \boldsymbol{\Phi}\right)$ olmasından dolayı;

$$\begin{aligned} P\left(\boldsymbol{\Phi} \middle| \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\Omega}\right) &\propto \left[\left|\boldsymbol{\Phi}\right|^{-(\rho_0 + r + 1)/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2} tr\left(R_0^{-1} \boldsymbol{\Phi}^{-1} \right) \right\} \right] \times \left[\left|\boldsymbol{\Phi}\right|^{-n/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\omega}_i^T \boldsymbol{\Phi}^{-1} \boldsymbol{\omega}_i \right\} \right] \\ &= \left|\boldsymbol{\Phi}\right|^{-(n + \rho_0 + r + 1)/2} \exp\left[-\frac{1}{2} tr\left\{ \boldsymbol{\Phi}^{-1} \left(\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega}^T + \boldsymbol{R}_0^{-1} \right) \right\} \right] \end{aligned} \tag{5.23}$$

olur. Eşitlik 5.23'ün sağ tarafı, oransal olarak ters Wishart dağılımına eşittir (Zellner, 1971). Bu durumda

$$P\left(\boldsymbol{\Phi} \middle| \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\Omega}\right) \sim \mathrm{I}\boldsymbol{W}_q \left[\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega}^T + \boldsymbol{R}_0^{-1}, n + \rho_0 \right] \tag{5.24}$$

olur (Song ve Lee, 2012a).

5.2. Bayesci Doğrusal Yapısal Eşitlik Modeli

Bu bölümde, ayrıntılı bir şekilde Yapısal Eşitlik Modeli için Bayes tahmin yöntemi gösterilecektir. Bu model, ölçüm modeli ve yapısal modelden oluşmaktadır. Ölçüm modeli temelde DFA modeline eşittir.

$$\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i \tag{5.25}$$

$\boldsymbol{\Lambda}$, $\boldsymbol{\omega}_i$ ve $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ için aynı tanımlar ve varsayımlar geçerlidir ancak sadece $\boldsymbol{\Phi}$ yerine $\boldsymbol{\omega}_i$ kovaryans matrisi kullanılmaktadır. $q_1 \times 1$ boyutlu içsel gizil değişken vektörü ve $\boldsymbol{\xi}_i$, $q_2 \times 1$ boyutlu dışsal değişken vektörü olmak üzere $\boldsymbol{\omega}_i = \left(\boldsymbol{\eta}_i^T, \boldsymbol{\xi}_i^T\right)^T$ $q \times 1$ gizil değişken vektörü olarak alınır. $\boldsymbol{\eta}_i$ ve $\boldsymbol{\xi}_i$ arasındaki ilişkiyi inceleyen yapısal model:

$$\boldsymbol{\eta}_i = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{\xi}_i\right) + \boldsymbol{\delta}_i \tag{5.26}$$

şeklindedir. Burada $\boldsymbol{B}_{(q_1 \times q_1)}$ ve $\boldsymbol{\Gamma}_{(q_1 \times q_2)}$ regresyon katsayıları için bilinmeyen parametre matrisleri, $\boldsymbol{\varepsilon}_{(p \times 1)}$ ve $\boldsymbol{\delta}_{(q_1 \times 1)}$ hata vektörleridir. Bunların dağılımı $\boldsymbol{\varepsilon}_i \sim N\left[0, \boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\right]$ ve $\boldsymbol{\delta}_i \sim N\left[0, \boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{\delta}}\right]$'dir. $\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{\delta}}$, köşegen matris, $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ ve $\boldsymbol{\delta}_i$ bağımsızdır. İşlem kolaylığı için

$\boldsymbol{B}_0 = |\mathrm{I} - \boldsymbol{B}|$ pozitif tanımlı ve $\boldsymbol{B}$ 'den bağımsız olarak ele alınır. Bu model tanımlı değildir, ancak $\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{B}$ ve $\boldsymbol{\Gamma}$ değişkenlerine kısıtlar koyularak tanımlı hale gelebilir. Modelde $\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_n)$, gözlenen veri matrisi, $\boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, ..., \boldsymbol{\omega}_n)$ gizil faktör skorları ve $\boldsymbol{\theta}$; $\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Psi}_\varepsilon$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{\Gamma}$, $\boldsymbol{\Phi}$ ve $\boldsymbol{\Psi}_\delta$ 'den oluşan bilinmeyen parametre vektörü olarak ele alınır.

Sonsal veri analizinde $\boldsymbol{Y}$ ile birlikte $\boldsymbol{\Omega}$ da düşünülerek gözlenen veri seti arttırılır. Ortak sonsal dağılım $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Omega} | \boldsymbol{Y})$' den yeterince büyük sayıda $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Omega})$ örneklem, DFA da olduğu gibi Gibbs örneklemesi algoritması ile üretilir. Gibbs örneklemi;

(i) $\boldsymbol{\Omega}^{(j+1)}$ için $P(\boldsymbol{\Omega} | \boldsymbol{\theta}^{(j)}, \boldsymbol{Y})$'den (5.27)

(ii) $\boldsymbol{\theta}^{(j+1)}$ için $P(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\Omega}^{(j+1)}, \boldsymbol{Y})$ 'den (5.28)

biçiminde değerler üretilir (Lee, 2007). Buradaki Gibbs örneklemesinde DFA'dan farklı olarak yapısal modelden gelen ek parametreler de vardır.

Yapısal Eşitlik Modellemesi, doğrulayıcı faktör analizinin genellemesidir. Ölçüm modeli DFA'dakine benzer şekilde Gibbs örneklemesi ile elde edilir. Bu yapısal model içinde doğru bir yaklaşımdır. Çünkü YEM, regresyon modeli veya gizil değişken ile birlikte faktör analizinin özel bir halidir.

Benzer tanımlama ve varsayımlar altında; $P(\boldsymbol{\Omega} | \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\theta})$ Eşitlik 5.7' deki gibi ifade edilir. $(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{\theta})$ verildiğinde $\boldsymbol{\omega}_i$'nin koşullu dağılımı Eşitlik 5.8'dekine benzer şekilde verilir. Ancak $\boldsymbol{\Phi}$ yerine, $\boldsymbol{\omega}$'nin kovaryans matrisi

$$\boldsymbol{\Sigma}_\omega = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_0^{-1}\left(\boldsymbol{\Gamma}^T + \boldsymbol{\Psi}_\delta\right)\boldsymbol{B}_0^{-T} & \boldsymbol{B}_0^{-T}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Phi} \\ \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Gamma}^T\boldsymbol{B}_0^{-T} & \boldsymbol{\Phi} \end{bmatrix} \tag{5.29}$$

ele alınır. $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\Omega})$ verildiğinde $\boldsymbol{\theta}$ 'nın dağılımı oransal olarak $P(\boldsymbol{\theta})P(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\Omega} | \boldsymbol{\theta})$'ya eşittir. $\boldsymbol{\theta}_y$,ölçüm modeli için $\boldsymbol{\Lambda}$ ve $\boldsymbol{\Psi}_\varepsilon$ ' deki bilinmeyen parametreleri; $\boldsymbol{\theta}_\omega$,yapısal model için $\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\Phi}$ ve $\boldsymbol{\Psi}_\delta$ ' deki bilinmeyen parametreleri göstersin. Doğal olarak $\boldsymbol{\theta}_y$ ve $\boldsymbol{\theta}_\omega$ 'nın önsel dağılımlarının birbirinden bağımsız olduğu varsayılır. Yani $P(\boldsymbol{\theta}) = P(\boldsymbol{\theta}_y)P(\boldsymbol{\theta}_w)$'dır.

Üstelik $P(\boldsymbol{Y} | \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\theta}) = P(\boldsymbol{Y} | \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\theta}_y)$ ve $P(\boldsymbol{\Omega} | \boldsymbol{\theta}) = P(\boldsymbol{\Omega} | \boldsymbol{\theta}_\omega)$ 'dır. Böylece;

$$P(\boldsymbol{\theta}_y, \boldsymbol{\theta}_\omega | \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\Omega}) \propto \left[P(\boldsymbol{Y} | \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\theta}_y)P(\boldsymbol{\theta}_y)\right]\left[P(\boldsymbol{\Omega} | \boldsymbol{\theta}_\omega)P(\boldsymbol{\theta}_\omega)\right] \tag{5.30}$$

elde edilir. Burada eşitliğin sağ tarafı ilk terimi sadece θ_y ' ye ikinci terimi ise sadece θ_ω 'ye bağlıdır. Bu yüzden $\theta_y \propto P\left(\boldsymbol{Y}\left|\boldsymbol{\Omega},\theta_y\right.\right)P\left(\theta_y\right)$ ve $\theta_y \propto P\left(\boldsymbol{Y}\left|\boldsymbol{\Omega},\theta_\omega\right.\right)P\left(\theta_\omega\right)$ olur. Sonuç olarak bu koşullu olasılıklar ayrı ayrı ele alınabilir. θ_y 'nin marjinal dağılımı

$$P\left(\theta_y\right) = P\left(\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{\Psi}\left|\boldsymbol{Y},\boldsymbol{\Omega}\right.\right) \tag{5.31}$$

dır. $\boldsymbol{\Omega}_1 = \left(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,...,\boldsymbol{\eta}_n\right)$ ve $\boldsymbol{\Omega}_2 = \left(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,...,\boldsymbol{\xi}_n\right)$ olarak ele alındığında; $\boldsymbol{\xi}_i$ ' nin dağılımı sadece $\boldsymbol{\Phi}$'yi içerir ve $P\left(\boldsymbol{\Omega}_2\left|\theta_w\right.\right) = P\left(\boldsymbol{\Omega}_2\left|\boldsymbol{\Phi}\right.\right)$'dır. Ayrıca $\boldsymbol{\Phi}$' nın önsel dağılımı $\boldsymbol{B},\boldsymbol{\Gamma}$ ve $\boldsymbol{\Psi}_\delta$ 'nın önsel dağılımından bağımsızdır.

Böylece; θ_ω ' nin koşullu olasılığı;

$$P\left(\boldsymbol{\Omega}\left|\theta_\omega\right.\right)P\left(\theta_\omega\right) = \left[P\left(\boldsymbol{\Omega}_1\left|\boldsymbol{\Omega}_2,\boldsymbol{B},\boldsymbol{\Gamma},\boldsymbol{\Psi}_\delta\right.\right)P\left(\boldsymbol{B},\boldsymbol{\Gamma},\boldsymbol{\Psi}_\delta\right)\right]\times\left[P\left(\boldsymbol{\Omega}_2\left|\boldsymbol{\Phi}\right.\right)P\left(\boldsymbol{\Phi}\right)\right] \tag{5.32}$$

olarak elde edilir. $\left(\boldsymbol{B},\boldsymbol{\Gamma},\boldsymbol{\Psi}_\delta\right)$ ve $\boldsymbol{\Phi}$'nin marjinal olasılıkları ayrı ayrı ele alınır. $\boldsymbol{\Phi}$'nin eşlenik önsel dağılımı, ρ_0 ve pozitif tanımlı matris $\boldsymbol{R}_0$ hiper parametreli $\boldsymbol{\Phi}^{-1} \sim W_{r_2}\left[\boldsymbol{R}_0,\rho_0\right]$'dır. Doğrulayıcı faktör analizindekine benzer düşünce ile

$$\left[\boldsymbol{\Phi}\left|\boldsymbol{\Omega}_2\right.\right] \sim IW_{r_2}\left[\boldsymbol{\Omega}_2\boldsymbol{\Omega}_2^T + \boldsymbol{R}_0^{-1}, n+\rho_0\right] \tag{5.33}$$

olur. $\boldsymbol{\eta}_i = \boldsymbol{\Lambda}_\omega\boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{\delta}_i$ ve $\boldsymbol{\Lambda}_\omega = \left(\boldsymbol{B},\boldsymbol{\Gamma}\right)$ olarak düşünüldüğünde bu gösterim faktör analizi modeli ile çok benzerdir.

$\Psi_{\delta k}$, $\boldsymbol{\Psi}_\delta$ 'nın *k.* elemanı, $\boldsymbol{\Lambda}_{\omega k}^T$, $\boldsymbol{\Lambda}_\omega$ 'nin *k.* bilinmeyen parametresindeki satır vektörü olarak ele alınır. $\boldsymbol{\Lambda}_{\omega k}$ ve $\Psi_{\delta k}^{-1}$'in eşlenik önsel dağılımı DFA'dakine benzer şekilde Eşitlik 5.34'deki gibi gösterilir.

$$\psi_{\delta k}^{-1} \sim Gamma\left[\alpha_{o\omega k},\beta_{o\omega k}\right] \text{ve } \left[\boldsymbol{\Lambda}_{\omega k}\left|\psi_{\delta k}\right.\right] \sim N\left(\boldsymbol{\Lambda}_{o\omega k},\psi_{\delta k}\boldsymbol{H}_{o\omega k}\right),\ k = 1,2,...,k_1 \tag{5.34}$$

Burada $\alpha_{o\omega k},\beta_{o\omega k}$ ve $H_{o\omega k}$ hiper parametrelerdir. Ayrıca $h \neq k$ olması durumunda $\left(\psi_{\delta k},\boldsymbol{\Lambda}_{\omega k}\right)$ ve$\left(\psi_{\delta k},\boldsymbol{\Lambda}_{\omega h}\right)$'ın olasılıklarının bağımsız olduğu varsayılıp dağılımları

$$\left[\psi_{\delta k}^{-1}\left|\boldsymbol{\Omega}\right.\right] \sim Gamma\left(n/2+\alpha_{0\delta k},\beta_{0\delta k}\right) \tag{5.35}$$

$$\left[\boldsymbol{\Lambda}_{\omega k}\left|\boldsymbol{\Omega},\psi_{\delta k}^{-1}\right.\right] \sim N\left[\boldsymbol{a}_{\omega k},\psi_{\delta k}\boldsymbol{A}_{\omega k}\right] \tag{5.36}$$

şeklindedir. Burada $\boldsymbol{\Omega}_{1k}^{T}$, $\boldsymbol{\Omega}_{1}$' in *k.* satırı olmak üzere

$$\boldsymbol{A}_{\omega k} = \left(\boldsymbol{H}_{o\omega k}^{-1} + \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega}^{T} \right)^{-1} \tag{5.37}$$

$$\boldsymbol{a}_{\omega k} = \boldsymbol{A}_{\omega k} \left(\boldsymbol{H}_{o\omega k}^{-1} \boldsymbol{\Lambda}_{o\omega k} + \boldsymbol{\Omega}_{1k} \right) \tag{5.38}$$

$$\beta_{\delta k} = \beta_{o\delta k} + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\Omega}_{1k}^{T} \boldsymbol{\Omega}_{1k} - \boldsymbol{a}_{\omega k}^{T} \boldsymbol{A}_{\omega k}^{-1} \boldsymbol{a}_{\omega k} + \boldsymbol{\Lambda}_{o\omega k}^{T} \boldsymbol{H}_{o\omega k}^{-1} \boldsymbol{\Lambda}_{o\omega k} \right) \tag{5.39}$$

biçimindedir. Gibbs örneklemesi ile bu koşullu dağılımdan simülasyonla gözlem elde edilmesi hızlı ve kolaydır. Gibbs örneklemesi ile oldukça karmaşık YEM'ler ele alınabilir (Song ve Lee, 2012a).

5.3. Doğrusal Olmayan Yapısal Eşitlik Modeli

Sosyal ve davranış bilimlerindeki birçok teori değişkenler arasında sadece doğrusal etkileri değil, doğrusal olmayan ilişkileri de kabul eder. En sık incelenen doğrusal olmayan etkiler etkileşim etkileridir. Bu etkiler, bir belirleyici ve kriter değişkeni arasındaki ilişkinin, ikinci bir belirleyici değişkeninin (moderatör değişken) değerlerine göre zayıfladığını veya güçlendiğini ima eder (Engel ve ark. 2010).

Kenny ve Judd'un (1984) doğrusal olmayan yapısal eşitlik modellemesi üzerine yazdıkları çığır açan makaleden itibaren, Doğrusal Olmayan YEM analizi için bazı yaklaşımlar geliştirilmiştir (Klein ve Muthén 2007; Marsh ve ark. 2004; Moosbrugger ve ark. 1997; Schumacker ve Marcoulides, 1998).

Kenny ve Judd (1984) yılında doğrusal olmayan yapısal eşitlik modelinde parametrelerin tahminlerine ilişkin ilk istatistiksel yöntem olan "ürün göstergesi" (PI) yöntemini önermiştir. Bu model doğrusal ölçüm modeli ile özel bir kuadratik veya çapraz ürün yapısal modeli olarak ele alınmıştır. Bu yöntemin temel fikri; var olan değişkenlerden yeni "gözlenen değişkenler" üretmek ve daha sonra onlara modelde doğrusal olmayan terimlerin ek göstergeleri kullanarak "gözlenen değişkenler" yaratmaktı ardından bu yeni değişkenler kullanılarak modeldeki doğrusal olmayan terimler için ek gösterge olarak ele alınmıştır. Ancak bu yöntem kovaryans matris modeli üzerinde zor hesaplanan kısıtlamaları barındırıyordu. Zahmetli modelleme kısıtlamalara rağmen, Ürün Göstergesi yöntemi mevcut doğrusal yapısal eşitlik modelleme yazılım programları ile örneğin LISREL programı ile uygulamak mümkün olmuştur (Wall, 2007).

Kenny ve Judd (1984) öncülük ettiği bu fikir birçok bilim adamı tarafından tartışılmıştır: Hayduk (1987), Ping (1995, 1996a, 1996b,1996c), Jaccard ve Wan (1996), Jöreskog ve Yang (1996, 1997), Li ve ark. (1998), Schumacker ve Marcoulides (1998),

Li ve ark., (2000), Algina ve Moulder (2001), Wall ve Amemiya (2001), Moulder ve Algina(2002), Wen ve ark. (2002). Marsh ve arkadaşları 2004 yılında gizil etkileşimi ile bir yapısal model tahmin etmek için bu ürün göstergesi yöntemlerinin karşılaştırması için kullanışlı bir yöntem önerdi. Marsh ve ark. (2004) farklı tahmin yöntemlerini kategorize etti. Bu gruplandırmalara göre: Jöreskog ve Yang (1996) tarafından ortaya atılan, Algina ve Moulder (2001) tarafından geliştirilen yöntem, "Kısıtlı Ürün Göstergesi Yöntemi (CPI)"; Wall ve Amemiya (2001) tarafından GAPI (Genelleştirilmiş Ek Ürün Göstergesi) yöntemi olarak kullanılan yöntem "Kısmi Kısıtlı Yöntem (partially constrained)" son olarak Wall ve Amemiya'nın 2001 yılındaki aynı makalesinde yer alan ve yeni bir yöntem olarak önerilen "Kısıtsız Yöntem, (UPI)'dir.

Doğrusal olmayan yapısal eşitlik modelinin ve gizil değişkenler ve hataların dağılım varsayımlarının parametrik formu göz önüne alındığında, bir olabilirlik fonksiyonunu yazılabilir ve dolayısıyla parametreler için teorik olarak ML veya Bayes tahmini yapmak mümkündür (Wall, 2007).

Yakın zamana kadar hesaplama zorluğu sorun teşkil etmiştir. Bu sorun, modeldeki doğrusal olmama durumu, analitik formun kapalı bir şekilde olmasını engellemesinden kaynaklanmaktadır. Son 25 yılda güçlükle hesaplanan olabilirlik fonksiyonlarının ve sonsal dağılımdan zor bir şekilde üretilen sayıların daha kolay hesaplanması için istatistiksel hesaplama yöntemlerinde büyük gelişmeler olmuştur (Wall, 2007).

Bayes yönteminin dışındaki yöntemlerin temel yaklaşımı değişkenler arasındaki doğrusal olmayan ilişkileri hesap eden analiz için yapay doğrusal olmayan belirgin değişkenleri eklemektir. Bu yaklaşımın aşağıdaki pratik ve teorik zorluklar vardır (Arminger ve Muthen, 1998):

i. Bu doğrusal olmayan değişkenler arasındaki kovaryansları / varyansları elde etmek genellikle zordur.
ii. Değişkenlerin doğrusal olmayan fonksiyonlar içeren belirgin rastgele vektör açıkça normal dağılmamıştır ve çok karmaşık olabilir. Doğru istatistiksel çıkarsama için, asimptotik-dağılım gerektirmeyen (ADF teori) kullanılmalıdır (Bentler, 1983, Browne, 1984). Bu ADF teorisi olarak bilinen teori asimptotik özellikleri elde etmek için çok büyük bir örnek hacmi gerektirir. ML yöntemi de büyük örnek hacmi isteyen bir yöntemdir, ama asimptotik özellikleri elde etmek için ADF teorisine göre daha küçük bir örneklem büyüklüğü gereklidir.

iii. ADF tahmini için gerekli ağırlık matrisi büyüklüğü belirgin değişkenlerin sayısı ile hızlı bir artış olduğu zaman, bu tahminde hesaplama ve depolama sorunlarıyla karşılaşa bilinir.

Bu zorlukları çözmek için, MCMC yöntemlerini kullanan bir yöntem Bayes yaklaşımı Arminger ve Muthen (1998) ve Lee ve Zhu (2000) tarafından geliştirilmiştir.

Ürün Gösterge Yöntemi (PI)

Kenny ve Judd tarafından 1984 yılında doğrusal olmayan yapısal Eşitlik modelinde parametrelerin tahminlerine ilişkin ilk istatistiksel yöntem olan ürün gösterge (PI) yöntemini önermiştir. Bu yöntemin ortaya çıkmasından sonra bu alandaki çalımalar gelişmeye başlamıştır (Wall, 2007; Mars, 2012).

PI yaklaşımında, $\boldsymbol{Y}$ vektöründeki değişkenlerin ürün terimleri $\xi_1\xi_2$ göstergelerini temsil etmek için hesaplanır. Yapısal modeldeki $\boldsymbol{\xi}$ değişkeninin yerine $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_1\xi_2 \end{pmatrix}$ değişkeni kullanılmaktadır. Jöreskog ve Yang (1996) tarafından ortalama yapı modele dâhil edilmiştir. Çünkü $\xi_1\xi_2$'nin ortalaması sadece ξ_1 ve ξ_2 ilişkisiz olduğunda sıfıra eşit olacaktır. PI yönteminin türevleri doğrusal olmayan kısıtlar bakımından farklılık göstermektedir. Bu farklılığı yaratan değişkenler; faktör yükleri $(\boldsymbol{\Lambda})$, dışsal gizil değişkenlerin kovaryans matrisi $(\boldsymbol{\Phi})$ ve dışsal faktörlerin kovaryans matrisidir $(\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{\delta}})$. PI yönteminden kısıtlara bağlı olarak değişen diğer yöntemlere ilişkin bilgiler Çizelge 5.1'de ayrıntılı olarak verilmiştir. Jöreskog ve Yang'ın CPI yaklaşımı çok sayıda kısıt içermektedir. Bu kısıtlar çok değişkenli normallik varsayımı altında uygulanmaktadır. PI yaklaşımlar arasında, CPI yaklaşımı teorik olarak çok değişkenli normallik varsayımı yerine getirilmesi durumunda gizil değişken etkileşimi açısından en güçlü testler verimini vermesi beklenmektedir. Wall ve Amemiya (2001), gözlenen $\boldsymbol{Y}$ değişkenlerinin çok değişkenli normal dağılıma uymadığı durumlarda bu kısıtların doğru olmayacağını belirtmiştir. Onlar $\boldsymbol{\xi}$ elemanlarının kovaryans matrisi $\boldsymbol{\Phi}$ elemanlarından bağımsız olarak tahmin edildiği GAPI yaklaşımını önermiştir, ancak $\boldsymbol{\Lambda}$ ve $\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{\delta}}$ hakkındaki kısıtlamalar korunmuştur. Son olarak Marsh ve ark. (2004) yılında dağılım varsayımlarını minimize eden UPI yöntemini önermiştir. Bu yöntem, $\xi_1\xi_2$'nin ortalamasının ξ_1 ve ξ_2 arasındaki

kovaryansın eşit olması varsayımı ile birlikte tüm doğrusal olmayan model kısıtlarını ortadan kaldırmıştır (Cham ve ark. 2010).

YEM parametre tahminleri için en çok kullanılan yöntem ML tahmin yöntemidir. ML tahmini gözlenen değişkenlerin çok değişkenli normallik koşulları altında parametre tahmininde yüksek verimlilik ve tutarlılık sağlamaktadır (Bollen, 1989).

Y gözlenen değişkeni normal dağılıma uygunluk gösterse bile $\xi_1\xi_2$ teriminin dağılımının normal dağılmamasından dolayı $\xi_1\xi_2$ 'nin tahmini potansiyel olarak problem oluşturmaktadır.(Jöreskog ve Yang, 1996; Klein ve Moosbrugger, 2000),

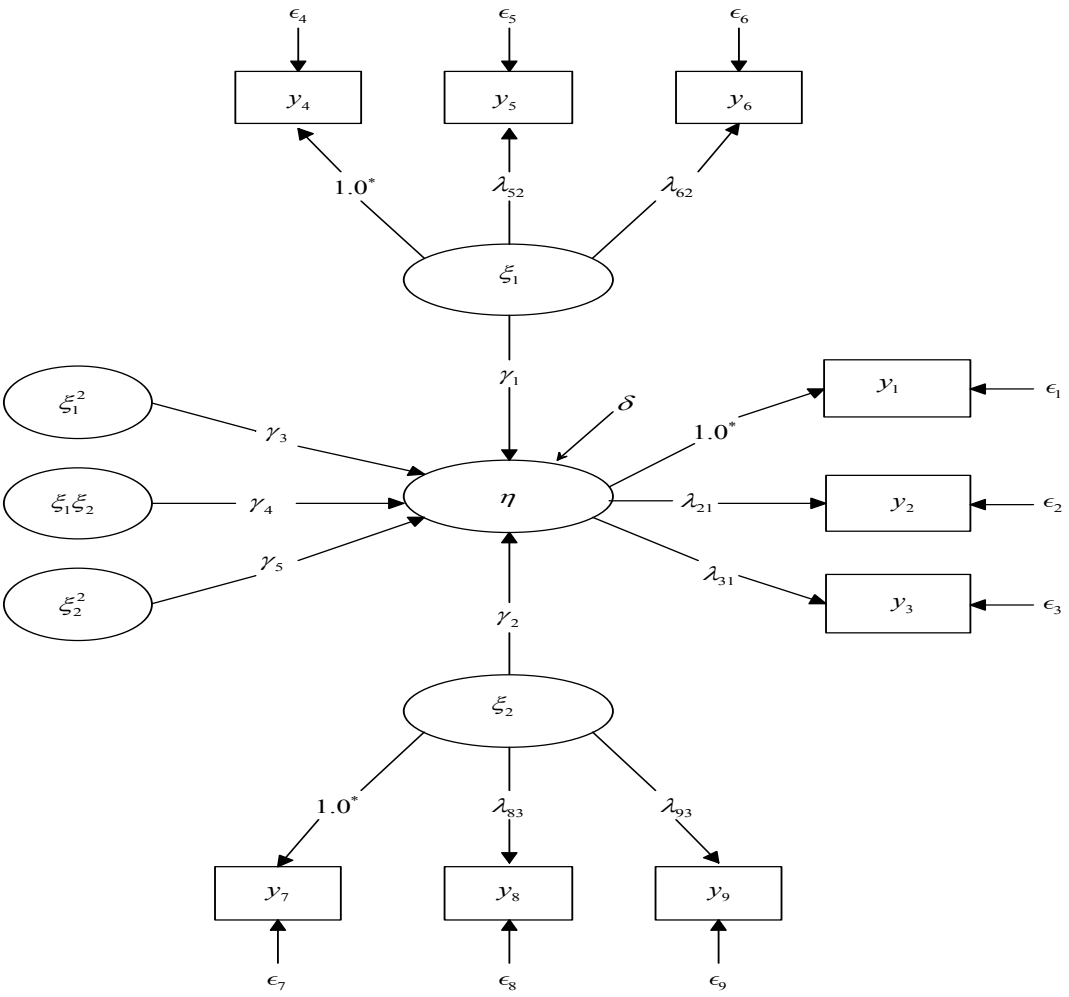
Çizelge 5.2. Çeşitli Ürün Göstergesi Yöntemlerine ilişkin Parametre Kısıtları ve Varsayımları

Model Spesifikasyonu	**CPI**	**GAPI**	**UPI**
1. Üretilen terim $\xi_1\xi_2$ 'nin faktör yükleri.	Var	Var	Yok
2. $E(\xi_1\xi_2) = Cov(\xi_1, \xi_2)$	Var	Var	Var
3. $Var(\xi_1\xi_2) = Var(\xi_1)Var(\xi_2) + Cov^2(\xi_1, \xi_2)$	Var	Yok	Yok
4. $Cov(\xi_1, \xi_1\xi_2) = Cov(\xi_2, \xi_1\xi_2) = 0$	Var	Yok	Yok
5.Ürün göstergelerinin tekil faktörlerinin varyansları. Örneğin $Var(\delta_{Y_1Y_4}) = \lambda_{Y_1} Var(\xi_1) Var(\delta_{Y_4}) + \lambda_{Y_4} Var(\xi_2) Var(\delta_{Y_1}) + Var(\delta_{Y_1}) Var(\delta_{Y_4})$	Var	Var	Yok
6.Tekil dışsal göstergelerin faktörler ve ürün göstergelerinin arasındaki sıfır kovaryans. (Dışsal göstergelerin tekil faktörleri arasındaki kovaryans sıfır varsayılarak).	Var	Var	Var
7.Aynı dışsal göstergeleri paylaşan ürün göstergelerinin tekil faktörler arasındaki kovaryanslar (Dışsal göstergelerin tekil faktörleri arasındaki kovaryans sıfır varsayılarak). Örneğin $Cov(\delta_{Y_1Y_4}, \delta_{Y_1Y_5}) = \lambda_{Y_1}\lambda_{Y_5} Var(\xi_2) Var(\delta_{Y_1})$	Var	Var	Yok
8. Model spesifikasyonda dışsal göstergelerin normallik varsayımları.	Var	Var (Daha az etkilenir)	Var (En az etkilenir)

Cham, 2012.

Gizil Makul Yapısal Eşitlik Yöntemi (LMS)

Önemli bir alternatif yaklaşım Klein ve Moosbrugger (2000) ve Schermelleh- Engel, Klein ve Moosbrugger (1998) tarafından geliştirilen Gizil Makul Yapısal Eşitlik yaklaşımı (**L**atent **M**oderated **S**tructural equations approach;) LMS'dir. LMS yaklaşımı üretilen terim $(\xi_1\xi_2)$ olmadan uygulanan bir yöntemdir. Bunun yerine, LMS yaklaşımı içsel ve dışsal gizil değişkenler arasındaki ikinci dereceden etkilerle doğrusal ve doğrusal olmayan bileşenleri bölümlendirmektedir. Eğer test edilen modelde gizil etkileşim değişkeni varsa ve doğru olarak tanımlanmışsa, gizil ξ_1 ve ξ_2 değişkenleri normal dağılım göstermektedir. ***X*** ve ***Y***'nin tekil faktörleri normal dağılım gösterir ve bu durumda içsel gizil değişkenlerin dışsal gizil değişkenler üzerindeki koşullu dağılımı normal dağılım gösterecektir (Cham ve ark. 2012). LMS yaklaşımının uygulanması Mplus programı tarafından gerçekleştirilmektedir. (Muthén ve Muthén, 1998–2010). Şekil 5.1'de Doğrusal Olmayan YEM için bir path diyagramı örneği verilmiştir.



Şekil 5.1. Doğrusal Olmayan YEM için path diyagramı gösterimi (Song ve Lee, 2012a)

5.4. Bayesci Doğrusal Olmayan Yapısal Eşitlik Modeli

Bu bölümde, Doğrusal Olmayan YEM için Bayes tahmin yöntemi gösterilecektir. Doğrusal Olmayan YEM'de Bayes tahmin yönteminin kullanılmasında Gibbs örneklemesinden yararlanılır. Gibbs örneklemesi için $\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_n)$, gözlenen veri matrisi $\boldsymbol{\theta}$, bilinmeyen $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Lambda}_\omega, \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi}_\varepsilon$ ve $\boldsymbol{\Psi}_\delta$ parametrelerinden oluşan parametre vektörü olsun. $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})$'nın doğrusal olmadığından ML ve EKK yöntemleri ile $\boldsymbol{\theta}$'nın tahminini yapmak oldukça zordur. $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})$'nin doğrusal olmamasından kaynaklanan zorluğu azaltmak için sonsal analizde $\boldsymbol{Y}$ ile birlikte gizil değişken $\boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, ..., \boldsymbol{\omega}_n)$'lar kayıp veri olarak düşünülerek gözlenen değişken sayısı arttırılır. Daha sonra, Gibbs Örneklemesi (Geman ve Geman, 1984) kullanılarak sonsal dağılım $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Omega} | \boldsymbol{Y})$'dan gözlemler üretilir.

Doğrusal olmayan YEM için ölçüm modeli YEM'deki ile aynıdır.

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{5.40}$$

Ancak yapısal model için ise farklılık gösterir. Doğrusal olmayan YEM için yapısal model:

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{\delta} \tag{5.41}$$

Burada $\boldsymbol{y}$, $p \times 1$ boyutlu gözlenen değişken; $\boldsymbol{\mu}$ sabit terim; $\boldsymbol{\eta}$, $q_1 \times 1$ boyutlu içsel gizil değişken vektörü; $\boldsymbol{\xi}$, $q_2 \times 1$ boyutlu dışsal değişken vektörü olmak üzere $\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\eta}^T, \boldsymbol{\xi}^T)^T$, $q \times 1$ gizil değişken vektörü; $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}) = (f_1(\boldsymbol{\xi}), \ldots, f_t(\boldsymbol{\xi}))^T$, $(t \geq q_2)$ olmak üzere $f_1, \ldots, f_t$ fonksiyonlarından lineer bağımsız ve sıfır değeri olmayan vektörü; $\boldsymbol{B}_{(q_1 \times q_1)}$, $\boldsymbol{\eta}$ üzerindeki ve $\boldsymbol{\Gamma}_{(q_1 \times t)}$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})$ üzerindeki bilinmeyen regresyon katsayı matrisleri; $\boldsymbol{\varepsilon}$ ve $\boldsymbol{\delta}$ birbirinden bağımsız hata vektörleri ve bunların dağılımı $\boldsymbol{\varepsilon}_i \sim N[0, \boldsymbol{\Psi}_\varepsilon]$ ve $\boldsymbol{\delta}_i \sim N[0, \boldsymbol{\Psi}_\delta]$'dır. Burada $\boldsymbol{\Psi}_\delta$, köşegen kovaryans matrisidir. Eğer $\boldsymbol{f}_j(\boldsymbol{\xi})$'lerin bazıları doğrusal olmaz ise gözlenen değişken $\boldsymbol{y}$'lerin dağılımı normal dağılım varsayımını sağlamaz. İşlem kolaylığı için $\boldsymbol{B}_0 = |\mathbf{I}_{q_1} - \boldsymbol{B}|$ sıfırdan farklı ve $\boldsymbol{B}$'den bağımsız olduğu varsayılsın. Eşitlik 5.41'deki yapısal model parametre matrisleri $\boldsymbol{B}$ ve $\boldsymbol{\Gamma}$'ya göre doğrusaldır ancak

$\boldsymbol{\xi}$ gizil değişkenine göre doğrusal olmayabilir. Böyle bir durumda $\boldsymbol{\eta}$ gizil değişkeni üzerindeki $\boldsymbol{\xi}$ gizil değişkeninin doğrusal olmayan nedensel etkilerinin değerlendirilmesine olanak verir. $\Lambda_\omega = (\boldsymbol{B}, \Gamma)$ ve $G(\boldsymbol{\omega}) = \left(\boldsymbol{\eta}^T, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})^T\right)^T$ olarak ele alınırsa yapısal model:

$$\boldsymbol{\eta} = \Lambda_\omega G(\boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\delta} \tag{5.42}$$

biçiminde yazılabilir. $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})$'nın bileşenleri herhangi bir diferansiyellenebilen fonksiyondur, bu yüzden gizil değişkenler arasındaki ortak çok terimli ilişkiler incelenebilir. Fakat $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})$'nin seçimi keyfi değildir. Örneğin $\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{\xi}) = \left(\xi_1, \xi_2, \xi_1^2, \xi_1^2\right)$ ve $\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{\xi}) = (\xi_1, \xi_2, \xi_1\xi_2, 0)$ seçimi uygun değildir. Bunun yerine $\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{\xi}) = \left(\xi_1, \xi_2, \xi_1^2\right)$ ve $\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{\xi}) = (\xi_1, \xi_2, \xi_1\xi_2)$ seçilmesi uygundur. Aşağıda verilen eşitlik doğrusal olmayan yapısal model için örnektir.

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \gamma_{24} & \gamma_{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_1^2 \\ \xi_1\xi_2 \\ \xi_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} \tag{5.43}$$

Önerilen doğrusal olmayan model, uygun tanımlama şart olmadan aşırı parametrelendirilmiştir. Örneğin ölçüm modelinde tekil olmayan $\boldsymbol{R}$ matrisi için $\Lambda^* = \Lambda\boldsymbol{R}$ ve $\boldsymbol{\omega}^* = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{\omega}$ olarak alındığında $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\mu} + \Lambda^*\boldsymbol{\omega}^* + \boldsymbol{\varepsilon}$ 'dir. YEM'de bu tanımlama sorununu çözmek için Λ'daki bazı bilinen değerleri için elemanlarının sabitlenmesi gerekir. Böylece $\boldsymbol{R}$'nin sadece muhtemel seçimleriyle matris tanımlanır. Benzer bir durum Λ_ω için de düşünülebilir.

Doğrusal olmayan YEM'ler bağlamında, $\boldsymbol{y}$ ortalama vektörünü yorumlamak için daha dikkatli olmak gerekir. Λ_k^T, Λ'nin *k.* satırı olarak ele alınır. $k = 1, \ldots, p$ için Eşitlik 5.40'tan $\boldsymbol{E}(y_k) = \mu_k + \Lambda_k^T \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\omega})$ olur. $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\xi}) = 0$ olmasına rağmen, Eşitlik 5.41'de eğer $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})$, $\boldsymbol{\xi}$'nın doğrusal olmayan fonksiyon ise $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\eta}) \neq 0$'dır. Böylece $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\omega}) \neq 0$ ve

$\boldsymbol{E}(y_k) \neq \mu_k$ olur. $\boldsymbol{\Lambda}_k^T = \left(\boldsymbol{\Lambda}_{k\eta}^T, \boldsymbol{\Lambda}_{k\xi}^T\right)$ ve $\boldsymbol{\omega} = \left(\boldsymbol{\eta}^T, \boldsymbol{\xi}^T\right)^T$ olarak alınırsa $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\xi}) = 0$ ve $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\eta}) = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})^{-1}\left|\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})\right|$ olur. Bu durumda Eşitlik 5.41 için beklenen değer,

$$\boldsymbol{E}(y_k) = \mu_k + \boldsymbol{\Lambda}_{k\eta}^T \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\eta}) + \boldsymbol{\Lambda}_{k\xi}^T \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\xi}) = \mu_k + \boldsymbol{\Lambda}_{k\eta}^T \left[(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{\Gamma}\right] E\left(F(\boldsymbol{\xi})\right) \tag{5.44}$$

biçiminde gösterilir.

Doğrusal YEM için hata teriminin dağılımı $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N[0, \boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{\varepsilon}}]$'dir. Ancak yukarıda verilen doğrusal YEM modelinde uyum iyiliği testi doğrusal YEM'de olduğu gibi test edilemez. Çünkü doğrusal olmayan terimlerden dolayı hata terimi $\boldsymbol{\varepsilon}$'nin dağılımı normal dağılım varsayımına uymaz. Bu nedenle, doğrusal olmayan terimlerin önemi hakkında değerlendirme farklı şekilde değerlendirilmektedir (Lee, 2007).

5.4.1. Bayesci Doğrusal Olmayan YEM'de Sonsal Simülasyon İçin Gibbs Örneklemesi

$\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_n)$, gözlenen veri matrisi, $\boldsymbol{\theta}$, bilinmeyen $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Lambda}_{\omega}, \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi}_{\varepsilon}$ ve $\boldsymbol{\Psi}_{\delta}$ parametrelerinden oluşan parametre vektörü olsun. $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})$'nın doğrusal olmamasından dolayı klasik ML ve EKK zorluğu azaltmak için sonsal analizde $\boldsymbol{Y}$ ile birlikte gizil değişken $\boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, ..., \boldsymbol{\omega}_n)$'lar kayıp veri olarak düşünülerek gözlenen değişken sayısı arttırılır. Daha sonra, aşağıdaki Gibbs Örneklemesi (Geman ve Geman, 1984) kullanılarak sonsal dağılım $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Omega} | \boldsymbol{Y})$'dan gözlemler üretilir.

Gibbs örneklemesi algoritmasının $(j+1)$ iterasyonunda $\boldsymbol{\theta}^{(j)}$ ve $\boldsymbol{\Omega}^{(j)}$ değerleri aşağıdaki algoritmaya göre güncellenir:

(a) $\boldsymbol{\theta}^{(j+1)} \Rightarrow P\left(\boldsymbol{\theta} \middle| \boldsymbol{\Omega}^{(j)}, \boldsymbol{Y}\right)$ (5.45)

(b) $\boldsymbol{\Omega}^{(j+1)} \Rightarrow P\left(\boldsymbol{\Omega} \middle| \boldsymbol{\theta}^{(j+1)}, \boldsymbol{Y}\right)$ (5.46)

a. adımda $\boldsymbol{\theta}$ bilinmeyen parametre vektörü $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Lambda}_{\omega}, \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi}_{\varepsilon}$ ve $\boldsymbol{\Psi}_{\delta}$'den oluşmaktadır. $\boldsymbol{\Omega}$ verildiğinde Eşitlik 5.40 ve 5.41 ile tanımlanan doğrusal olmayan YEM, regresyon modeline dönüşür ve böylelikle tam koşullu dağılımları elde etmek daha kolaydır.

5.4.2. Bayesci Doğrusal Olmayan YEM'de Tam Koşullu Dağılım

θ_y, ölçüm modelindeki $\mu, \Lambda, \Psi_\varepsilon$ bilinmeyen parametrelerini ve θ_ω, yapısal modeldeki $\Lambda_\omega, \Phi, \Psi_\delta$ bilinmeyen parametrelerini olarak ele alınır. Bu durumda θ_y ve θ_ω'nın önsel dağılımlarının birbirinden bağımsız olduğu varsayılır. Yani $P(\theta) = P(\theta_y)P(\theta_w)$'dır.

Ayrıca $P(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{\Omega},\theta) = P(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{\Omega},\theta_y)P(\boldsymbol{\Omega}|,\theta_\omega)$ olarak ele alındığında

$$\begin{aligned} P(\theta_y,\theta_\omega|\boldsymbol{Y},\boldsymbol{\Omega}) &\propto P(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{\Omega}|\theta_y,\theta_\omega)P(\theta_y)P(\theta_\omega) \\ &= \left[P(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{\Omega},\theta_y)P(\theta_y)\right]\left[P(\boldsymbol{\Omega}|\theta_\omega)P(\theta_\omega)\right] \end{aligned} \tag{5.47}$$

elde edilir. Burada eşitliğin sağ tarafındaki ilk terim sadece θ_y' ye ikinci terim ise sadece θ_ω'ye bağlıdır. Bu yüzden $\theta_y \propto P(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{\Omega},\theta_y)P(\theta_y)$ ve $\theta_\omega \propto P(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{\Omega},\theta_\omega)P(\theta_\omega)$ olur. Sonuç olarak bu koşullu olasılıklar ayrı ayrı ele alınabilir. $k = 1,2,...,p$ için:

$$\mu \sim N[\mu_0, \Sigma_0] \tag{5.48}$$

$$\Psi_{\varepsilon k}^{-1} \sim Gamma[\alpha_{0\varepsilon k}, \beta_{0\varepsilon k}] \tag{5.49}$$

$$(\Lambda_k|\psi_{\varepsilon k}) \sim N[\Lambda_{o\varepsilon k}, \psi_{\varepsilon k}\boldsymbol{H}_{oyk}] \tag{5.50}$$

dır. Burada Λ_k^T, Λ'nın *k.* satırıdır ve $\alpha_{o\varepsilon k}, \beta_{o\varepsilon k}, \mu_0, \Lambda_{o\varepsilon k}, \boldsymbol{H}_{oyk}, \Sigma_0$ önceden bilindiği varsayılan hiper parametrelerdir. Ayrıca $h \neq k$ olması durumunda $(\psi_{\delta k}, \Lambda_k)$ ve $(\psi_{\delta k}, \Lambda_h)$'ın olasılıklarının bağımsız olduğu varsayılmaktadır

$\boldsymbol{A}_k = \left(\boldsymbol{H}_{oyk}^{-1} + \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega}^T\right)^{-1}$, $\boldsymbol{Y}_k^* = \left(\boldsymbol{y}_{1k}^*, \boldsymbol{y}_{2k}^*, \ldots, \boldsymbol{y}_{nk}^*\right)^T$, $y_{ik}^* = y_{ik} - \mu_k$, $\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{A}_k\left(\boldsymbol{H}_{oyk}^{-1}\Lambda_{ok} + \boldsymbol{\Omega}_{1k}\right)$

ve $\beta_{\varepsilon k} = \beta_{o\varepsilon k} + 2^{-1}\left(\boldsymbol{Y}_{1k}^{*T}\boldsymbol{Y}_{1k}^* - \boldsymbol{a}_k^T\boldsymbol{A}_k^{-1}\boldsymbol{a}_k + \Lambda_{ok}^T\boldsymbol{H}_{oyk}^{-1}\Lambda_{ok}\right)$ olarak alınması durumunda bu değişkenlerin dağılımları,

$$P(\psi_{\varepsilon k}^{-1}|\boldsymbol{Y},\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{\mu}) \sim Gamma[n/2 + \alpha_{0\varepsilon k}, \beta_{0\varepsilon k}] \tag{5.51}$$

$$P(\Lambda_k|\boldsymbol{Y},\boldsymbol{\Omega},\psi_{\varepsilon k}^{-1},\boldsymbol{\mu}) \sim N[\alpha_k, \psi_{\varepsilon k}\boldsymbol{A}_k] \tag{5.52}$$

$$P(\boldsymbol{\mu}|\boldsymbol{Y},\boldsymbol{\Omega},\Lambda,\boldsymbol{\psi}_\varepsilon) \sim N\left[\left(\Sigma_0^{-1} + n\boldsymbol{\psi}_{\varepsilon k}^{-1}\right)^{-1}\left(n\boldsymbol{\psi}_{\varepsilon k}^{-1}\bar{\boldsymbol{Y}} + \Sigma_0^{-1}\boldsymbol{\mu}_0\right), \left(\Sigma_0^{-1} + n\boldsymbol{\psi}_{\varepsilon k}^{-1}\right)^{-1}\right] \tag{5.53}$$

biçimindedir. Burada $\bar{\boldsymbol{Y}} = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \Lambda\boldsymbol{\omega}_i\right)/n$'dir.

$\boldsymbol{\theta}_{\omega}$'nin dağılımı, oransal olarak $P\left(\boldsymbol{Y}\left|\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{\theta}_{\omega}\right.\right)P\left(\boldsymbol{\theta}_{\omega}\right)$ olduğundan hareketle $\boldsymbol{\Omega}_1=\left(\boldsymbol{\eta}_1,\ldots,\boldsymbol{\eta}_n\right)$, $\boldsymbol{\Omega}_2=\left(\boldsymbol{\xi}_1,\ldots,\boldsymbol{\xi}_n\right)$ ve $G=\left(G\left(\boldsymbol{\omega}_1\right),\ldots,G\left(\boldsymbol{\omega}_n\right)\right)$ olarak ele alınmaktadır. Bu durumda $\boldsymbol{\xi}_i$'nin dağılımı sadece $\boldsymbol{\Phi}$'yi içerir ve $P\left(\boldsymbol{\Omega}_2\left|\boldsymbol{\theta}_{\omega}\right.\right)=P\left(\boldsymbol{\Omega}_2\left|\boldsymbol{\Phi}\right.\right)$ olur. Ayrıca $\boldsymbol{\Phi}$'nin önsel dağılımının $\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{\omega}}$ ve $\boldsymbol{\psi}_{\delta}$'nın önsel dağılımından bağımsız olduğu varsayıldığında;

$$P\left(\boldsymbol{\Omega}\left|\boldsymbol{\theta}_{\omega}\right.\right)P\left(\boldsymbol{\theta}_{\omega}\right)\propto\left[P\left(\boldsymbol{\Omega}_1\left|\boldsymbol{\Omega}_2,\boldsymbol{\Lambda}_{\omega},\boldsymbol{\Psi}_{\delta}\right.\right)\right]P\left(\boldsymbol{\Lambda}_{\omega},\boldsymbol{\Psi}_{\delta}\right)\left[P\left(\boldsymbol{\Omega}_2\left|\boldsymbol{\Phi}\right.\right)P\left(\boldsymbol{\Phi}\right)\right] \tag{5.54}$$

olur. Böylece $\left(\boldsymbol{\Lambda}_{\omega},\boldsymbol{\Psi}_{\delta}\right)$ ve $\boldsymbol{\Phi}$'nin koşullu dağılımları ayrı ayrı düşünülebilir. Bayesci Doğrusal YEM'dekine benzer şekilde $\boldsymbol{\Phi}$'nın eşlenik önsel dağılımı; ρ_0 ve pozitif tanımlı matris $\boldsymbol{R}_0$ hiper parametreli $\boldsymbol{\Phi}^{-1}\sim W_{r_2}\left[\boldsymbol{R}_0,\rho_0\right]$'dır.

$P\left[\boldsymbol{\Phi}\left|\boldsymbol{\Omega}_2\right.\right]$'nın dağılımı ise,

$$P\left(\boldsymbol{\Phi}\left|\boldsymbol{\Omega}_2\right.\right)\sim IW_{q_2}\left[\boldsymbol{\Omega}_2\boldsymbol{\Omega}_2^T+\boldsymbol{R}_0^{-1},n+\rho_0\right] \tag{5.55}$$

biçiminde olur. Doğrusal YEM'dekine benzer şekilde $\boldsymbol{\theta}_{\omega}$'nın eşlenik önsel dağılımı kullanıldığında $\Psi_{\delta k}$, $\boldsymbol{\Psi}_{\delta k}$'nın *k.* elemanı, $\boldsymbol{\Lambda}_{\omega k}^T$, $\boldsymbol{\Lambda}_{\omega}$'nin *k.* satır vektörü olması durumunda;

$$\psi_{\delta k}^{-1}\sim Gamma\left[\alpha_{o\delta k},\beta_{o\delta k}\right],\ k=1,2,\ldots,k_1 \tag{5.56}$$

$$P\left[\boldsymbol{\Lambda}_{\omega k}\left|\psi_{\delta k}\right.\right]\sim N\left(\boldsymbol{\Lambda}_{o\omega k},\psi_{\delta k}\boldsymbol{H}_{o\omega k}\right),k=1,2,\ldots,k_1 \tag{5.57}$$

olur. Burada $\alpha_{o\omega k},\beta_{o\omega k}$ ve $H_{o\omega k}$ hiper parametrelerdir. Ayrıca $h\neq k$ olması durumunda $P\left(\psi_{\delta k},\boldsymbol{\Lambda}_{\omega k}\right)$ ve $P\left(\psi_{\delta h},\boldsymbol{\Lambda}_{\omega h}\right)$'ın olasılıklarının bağımsız olduğu varsayılır.

$\boldsymbol{E}_k^*=\left(\eta_{1k},...,\eta_{nk}\right)$, π_{kj} ve γ_{kl} sırasıyla $\boldsymbol{B}$ ve $\boldsymbol{\Gamma}$'nin elemanları olarak düşünüldüğünde $k=1,2,...,q_1$ için.

$$P\left(\psi_{\delta k}^{-1}\left|\boldsymbol{\Omega}\right.\right)\sim Gamma\left[n/2+\alpha_{o\delta k},\beta_{o\delta k}\right] \tag{5.58}$$

$$P\left(\boldsymbol{\Lambda}_{\omega k}\left|\boldsymbol{\Omega},\psi_{\delta k}^{-1}\right.\right)\sim N\left[\boldsymbol{\alpha}_{o\omega k},\psi_{\delta k}\boldsymbol{A}_{o\omega k}\right] \tag{5.59}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada $\boldsymbol{A}_{\omega k}=\left(\boldsymbol{H}_{o\omega k}^{-1}+\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^{T}\right)^{-1}$, $\boldsymbol{a}_{\omega k}=\boldsymbol{A}_{\omega k}\left(\boldsymbol{H}_{o\omega k}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_{o\omega k}+\boldsymbol{G}\boldsymbol{E}_{k}^{*}\right)$ ve $\beta_{\delta k}=\beta_{0\delta k}+2^{-1}\left(\boldsymbol{E}_{k}^{*T}\boldsymbol{E}_{k}^{*}-a_{wk}^{T}\boldsymbol{A}_{wk}^{-1}a_{wk}+\boldsymbol{\Lambda}_{o\omega k}^{T}\mathbf{H}_{o\omega k}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_{o\omega k}\right)$ olarak ele alınır.

Eşitlik 5.42 için *(a)* adımı tamamlanmış olur. Bu adım için genellikle kullanılan dağılımlar gamma, normal ve ters Wishart dağılımlarıdır. Bu dağılımların sıklıkla kullanılmasının nedeni bu dağılımlardan simülasyonla sayı üretmenin hızlı ve basit olmasından kaynaklanmaktadır. *(b)* adımına geçilirse aynı tanım varsayımları altında;

$$P\left(\boldsymbol{\Omega}|\boldsymbol{Y},\boldsymbol{\theta}\right)=\prod_{i=1}^{n}P\left(\boldsymbol{\omega}_{i}|\boldsymbol{y}_{i},\boldsymbol{\theta}\right)\propto\prod_{i=1}^{n}P\left(y_{i}|\boldsymbol{\omega}_{i},\boldsymbol{\theta}\right)P\left(\boldsymbol{\eta}_{i}|\boldsymbol{\xi}_{i},\boldsymbol{\theta}\right)P\left(\boldsymbol{\xi}_{i}|\boldsymbol{\theta}\right) \tag{5.60}$$

olur. $\boldsymbol{\omega}_{i}$'ler ve $\boldsymbol{y}_{i}$'ler birbirinden bağımsız olduğundan;

$$P\left(\boldsymbol{\omega}_{i}|y_{i},\boldsymbol{\theta}\right)\propto\exp\left\{\begin{matrix}-2^{-1}\boldsymbol{\xi}_{i}^{T}\boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{\xi}_{i}\;-2^{-1}\left(\boldsymbol{y}_{i}-\boldsymbol{\mu}-\Lambda\boldsymbol{\omega}_{i}\right)^{T}\boldsymbol{\psi}_{\varepsilon}^{-1}\left(\boldsymbol{y}_{i}-\boldsymbol{\mu}-\Lambda\boldsymbol{\omega}_{i}\right)-\\ 2^{-1}\left[\boldsymbol{\eta}_{i}-\boldsymbol{\Lambda}_{\omega}\boldsymbol{G}\left(\boldsymbol{\omega}_{i}\right)\right]^{T}\boldsymbol{\psi}_{\delta}^{-1}\left[\boldsymbol{\eta}_{i}-\boldsymbol{\Lambda}_{\omega}\boldsymbol{G}\left(\boldsymbol{\omega}_{i}\right)\right]\end{matrix}\right\} \tag{5.61}$$

yazılabilir. Böylece, *(b)* adımı için gerekli olan koşullu dağılım elde edilir. Bu dağılım standart olmayan ve karmaşık bir dağılımdır. MH algoritması Eşitlik 5.61'de verilen $P\left(\boldsymbol{\omega}_{i}|y_{i},\boldsymbol{\theta}\right)$'dan sayı üretmek için kullanılır. Bu algoritma için dağılım olarak $N\left[0,\sigma^{2}\boldsymbol{\Sigma}_{\omega}\right]$ seçildiğinde burada,

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\omega}^{-1}=\boldsymbol{\Sigma}_{\delta}^{-1}+\boldsymbol{\Lambda}^{T}\boldsymbol{\psi}_{\varepsilon}^{-1}\boldsymbol{\Lambda} \tag{5.62}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\delta}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{0}^{-1}\boldsymbol{\Psi}_{\delta}^{-1}\boldsymbol{B}_{0} & -\boldsymbol{B}_{0}^{-T}\boldsymbol{\Psi}_{\delta}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}\Delta\\ \Delta^{T}\boldsymbol{\Gamma}^{T}\boldsymbol{\Psi}_{\delta}^{-1}\boldsymbol{B}_{0} & \Phi^{-1}+\Delta^{T}\boldsymbol{\Gamma}^{T}\boldsymbol{\Psi}_{\delta}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}\Delta\end{bmatrix} \tag{5.63}$$

$$\Delta=\partial H\left(\boldsymbol{\xi}_{i}\right)/\partial\boldsymbol{\xi}_{i}^{T}\Big|_{\boldsymbol{\xi}_{i}=0} \tag{5.64}$$

olarak ele alınır.

$P\left(.|\boldsymbol{\omega},\sigma^{2}\boldsymbol{\Sigma}_{\omega}\right)$ olasılığının dağılımı $N\left[\boldsymbol{\omega},\sigma^{2}\boldsymbol{\Sigma}_{\omega}\right]$ olarak alındığında; MH algoritması ile istenen olasılık aşağıdaki gibi hesaplanır. *r*. iterasyonda geçerli olan $\boldsymbol{\omega}_{i}^{(r)}$ değerinin bir sonraki aday değeri $P\left(.|\boldsymbol{\omega}_{i}^{(r)},\sigma^{2}\boldsymbol{\Sigma}_{\omega}\right)$'den üretilir. Yeni aday değer aşağıdaki olasılığa dayalı olarak hesaplanır.

$$\min\left[1, \frac{P\left(\omega_i \mid \boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{\theta}\right)}{P\left(\omega_i^{(r)} \mid \boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{\theta}\right)}\right] \tag{5.65}$$

Gelman, Roberts ve Gilks (1995), σ^2 varyans değeri için kabul edilebilirlik oranının 0.25 olarak seçilmesini önermişlerdir (Lee, 2007; Lee ve Song 2012b).

5.5. Bayes Yönteminde Kullanılan Model Değerlendirme ve Karşılaştırma Testleri

Yapısal Eşitlik Modelinde önemli bir istatistiksel çıkarsama; model karşılaştırma veya test edilen modelin çeşitli hipotezleriyle ilgilidir. Yapısal eşitlik modelleme alanında, hipotez testi için klasik yaklaşım, test istatistiklerinin bazı asimptotik dağılımları ile belirlenen *p*-değerine bağlı anlamlılık testlerini kullanmaktır.

Fakat Berger, Sellke ve Delampady (Berger ve Sellke, 1987; Berger ve Delampady, 1987) hipotez testinde kullanılan anlamlılık testi *p*-değerinin sadece birinci tip hatayla ilgili olduğunu, bu değerin de sadece yokluk hipotezini ölçtüğünü ancak bunun yokluk hipotezini desteklediği anlamına gelmediğini belirtmişlerdir.

Kompleks YEM'ler için bu test istatistiklerinin asimptotik dağılımları genellikle türetmek zordur. Ayrıca, anlamlılık testleri yuvalanmamış hipotezleri test etmek ya da yuvalanmamış modelleri karşılaştırmak için uygulanamaz (Song ve Lee, 2012a).

5.5.1. Bayes Faktörü

Bayes Faktörü model karşılaştırma ve model seçimi için önemli bir bayesci istatistiktir (Berger, 1985; Kass ve Raftery, 1995). Bu istatistik büyük bir esneklik sunan sağlam, mantıksal bir temele dayanmaktadır. Bu istatistik birçok istatistiksel modelde uygulanmaktadır (Kass ve Raftery, 1995).

Gözlenen veri seti Y örneklem sayısı n, hesaplanan iki model M_1 ve M_0 ve bunların olasılıkları sırsıyla $p\left(Y \mid M_1\right)$ and $p\left(Y \mid M_0\right)$ olsun. $k = 0,1$ için $p\left(M_k\right)$, önsel olasılık yoğunluğu, $p\left(M_k \mid Y\right)$, sonsal olasılık yoğunluğu olsun.

Bayes teoriminden,

$$\frac{p\left(M_1 \mid Y\right)}{p\left(M_0 \mid Y\right)} = \frac{p\left(Y \mid M_1\right) p\left(M_1\right)}{p\left(Y \mid M_0\right) p\left(M_0\right)} \tag{5.66}$$

elde edilir. M_1'in M_0'a karşı Bayes Faktörü ile değerlendirmesi;

$$B_{10} = \frac{p(Y \mid M_1)}{p(Y \mid M_0)} \tag{5.67}$$

biçimindedir. Bayes faktörü, M_1 modelinin M_0 modeline karşı eldeki veriyle uyumunu ve M_0 'a karşı ne kadar iyi olduğunu ölçer. Kass ve Raftery (1995) Bayes Faktörü dikkate alarak Çizelge 5.3'e göre modellerin kıyaslanabileceğini önermişlerdir (Kass ve Raftery, 1995).

Çizelge 5.3. Bayes faktörü değeri için model seçimi

Bayes Faktör Değeri $\left(B_{i,j}\right)$	**Yorum**	**Ok yönünde artan derecede**
$B_{i,j} < 0.1$	M_j lehine güçlü kanıt	
$0.1 < B_{i,j} < 0.3$	M_j lehine makul kanıt	M_j tercih edilir.
$0.3 < B_{i,j} < 1$	M_j lehine zayıf kanıt	
$1 < B_{i,j} < 3$	M_i lehine zayıf kanıt	
$3 < B_{i,j} < 10$	M_i lehine makul kanıt	M_i tercih edilir.
$B_{i,j} > 10$	M_i lehine güçlü kanıt	

Jeffreys, 1961.

Bayes faktöründeki parametrelerin önsel dağılımı aşağıdaki Eşitlik 5.67'deki gibidir. Kass ve Raftery (1995) belirttiği ettiği gibi, Bayes faktörleri önsel girişlere karşı duyarlıdır ve M_1 modeli üzerindeki parametreler üzerinde bilgiye dayanmayan önseller kullanmak Bayes faktörü açısından karşı hipotez M_0 modelinin tercih edilmesine zorlar.

Çoğu yapısal eşitlik modelinin Bayes analizinde, hiper parametrelerin önsel dağılımı için uygun eşlenik tipi önsel dağılımlar kullanılmaktadır. Genel olarak, marjinal yoğunluklar $p(Y \mid M_k), k = 0,1.,$ bir parametre uzayına entegre edilerek oluşturulur. Yani:

$$p(Y \mid M_k) = \int p(Y \mid \theta_k, M_k) p(\theta_k \mid M_k) d\theta_k, \tag{5.68}$$

Burada θ_k, M_k'daki parametre vektörü ve $p(\theta_k \mid M_k), k = 0,1.$ önsel olasılık ve $p(Y \mid \theta_k, M_k)$, θ_k ve M_k verildiğinde ***Y***'nin olasılığıdır. Yukarıdaki integrali boyutu θ_k 'nın boyutuna eşittir (Song and Lee, 2012a).

Hesaplama açısından, Bayes faktörü değerlendirilmesi zor olabilir. Son zamanlarda, Bayes faktörü hesaplanması için çeşitli algoritmalar MCMC yöntemlerle

sonsal simülasyona dayanarak geliştirilmiştir. Algoritmaların çeşitli karşılaştırma sonuçlarına dayanarak, DiCiccio ark. (1997) köprü örnekleme çekici bir yöntem olduğu sonucuna vardı. Ancak, Gelman ve Meng (1998) path örnekleme yönteminin köprü örnekleme yönteminin doğrudan uzantısı olduğunu ve hatta daha iyi sonuçlar verdiğini gösterdi (Song ve Lee, 2012a).

5.5.2. AIC (Akaike Bilgi Kriteri)

AIC'nin temel amacı elde edilen veriler ile gerçeğe en yakın modelin seçiminin sağlanmasıdır (Cudeck ve Browne, 1983; Çelik, 2009). AIC tahmin edilen parametreler için χ^2 değerini ayarlayarak, kıyaslanan modellerin karşılaştırılması için kullanılmaktadır. AIC' in çeşitli biçimleri bulunmaktadır. AIC' in farklı biçimleri, karşılaştırmalarda değişmediği sürece temel olarak aynıdır. Ayrıca tüm hesaplamalar aynı kovaryans matrisi temel almaktadır (Schermelleh-Engel ve ark., 2003; Çelik, 2009).
AIC farklı sayıda gizil değişken içeren modelleri karşılaştırır ve AIC sadece serbestlik derecesini hesaplamaya dâhil eder, örneklem hacmini dikkate almaz. (Schumacher ve Lomax, 2004; Doğan, 2013). AIC değeri.

$$AIC = -2\log L + 2k \tag{5.69}$$

şeklinde hesaplanır. Burada log$L$ model için log olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan değerdir. k, parametre sayısıdır. AIC gerçekte elverişsiz uyumun bir indeksidir (Kaplan, 2000; Schermelleh-Engel ve Moosbrugger, 2003; Çelik, 2009). AIC rakip modeller arasında seçim yapmakta işe yaramaktadır (Çelik, 2009).

5.5.3. BIC (Bayes Bilgi Kriteri)

Akaike (1978) ve Schwarz (1978) bayes perspektifinden birbirine yakın tutarlı iki model seçim kriteri tasarlamışlardır. Schwarz Koopman-Darmois türünde seçme modeller için SIC (Schwarz Information Criteria) kriterini türetirken buna karşın Akaike doğrusal regresyonda seçilmiş model problemleri için BIC (Bayesian Information Criterion) model seçim kriterini türetmiştir. Eşitlik 5.68'deki gibidir.

$$BIC = -2\log(L) + k\log(n) \tag{5.70}$$

BIC eşitliğin sağ tarafındaki örnek büyüklüğüne bağlı olan ikinci kısım itibariyle AIC'den farklılık gösterir. Fakat AIC ve BIC arasındaki yüzeysel benzerliğe rağmen, daha sonraları Bayes yapısı içinde farklılıklar gösterdiği ortaya çıkmıştır.

Literatür içindeki çalışmalara bakacak olursak BIC değeri bayes faktöründen daha fazla kullanılmaktadır. Bunun da sebeplerinden biri analiz sonrasında büyük hesaplamalara ihtiyaç duyulmasıdır (Ucal, 2006)

5.5.4. DIC (Sapma Bilgi Kriteri)

Model iyiliği karşılaştırma istatistiklerinden biri de model karşılaştırma sapma bilgi kriteri (DIC) 'dir (Spiegelhalter ve ark., 2002). Bu istatistik AIC istatistiğinin bir genellemesi olarak tasarlanmıştır. Test edilecek model M_k ve bu modelin bilinmeyen parametre bir vektörü θ_k sun. DIC değeri;

$$DIC_k = \overline{D(\theta_k)} + d_k, \tag{5.71}$$

biçiminde hesaplanır. Burada $\overline{D(\theta_k)}$, modelin uyum iyiliğini ölçen bir istatistiktir.

$$\overline{D(\theta_k)} = E\left\{-2\log p\left(Y \mid \theta_k, M_k\right) \mid Y\right\} \tag{5.72}$$

Burada d_k, M_k 'daki etkin parametre sayısını temsil etmektedir.

$$d_k = E_{\theta_k}\left\{-2\log p\left(Y \mid \theta_k, M_k\right) \mid Y\right\} + 2\log p\left(Y \mid \tilde{\theta}_k\right) \tag{5.73}$$

$\tilde{\theta}_k$, θ_k'nın Bayes tahminini temsil etsin.. $\left\{\theta_k^{(j)}, j = 1,\ldots,J\right\}$ sonsal dağılımdan simülasyonla de edilen gözlem değerleri olsun. Eşitlik 5.71 ve 5.72'ün beklenen değeri aşağıdaki gibi tahmin edilir:

$$E_{\theta_k}\left\{-2\log p\left(Y \mid \theta_k, M_k\right) \mid Y\right\} = \frac{2}{J}\sum_{j=1}^{J}\log p\left(Y \mid \theta_k^{(j)}, M_k\right) \tag{5.74}$$

Uygulamada DIC değeri daha düşük olan model seçilir (Song ve Lee, 2007).

5.5.5. Sonsal Öngörü Değeri - *ppp* değeri (Posterior Predictive p-Value)

Bayes faktörü test edilen doymuş modeller M_0 veya M_1 arasındaki uyum iyiliğini değerlendirmek için kullanılır. Ancak, bazı karmaşık YEM'leri analiz ederken doymuş bir model tanımlamak oldukça zordur. Örneğin, doğrusal olmayan YEM'leri analizinde hipotez edilen modelin dağılımı normal dağılım değildir. Bu nedenle, genel bir yapılandırılmamış kovaryans matrisi ile normal bir dağılımına sahip olan bir model doymuş bir model olarak kabul edilemez.

Bu gibi durumlarda altında, hipotez edilen model için uyum iyiliği sonuçları ile modeli karşılaştırmak uygun değildir.

Temel doymuş modeli kapsayan olmadan basit ve daha kullanışlı bir alternatif, Rubin'in (1984) sonsal değerlendirilmesine dayanarak Meng, (1994) tarafından sonsal öngörü değeri (posterior predictive *p* value, *ppp* değeri) tanıtıldı.

Bu testin amacı gözlenen değişkenle hipotez edilen modele göre üretilen değerler arasındaki farkı belirlemektir. *ppp* değeri

$$ppp\left(y^{obs};D\right)=P\left\{D\left(y^{rep};\theta\right)\geq D\left(y^{obs};\theta\right)\mid y^{obs}\right\}, \tag{5.75}$$

olarak tanımlanır (Gelman ve ark. 1996). Burada *D, ppp* sayısının hesaplanması için kullanılan özel bir tutarsızlık ölçüsünü göstermektedir. Hipotez edilen model M_0, parametre vektörü θ, gözlenen veri seti *Y*, ve gizil değişkeni Ω olan modelin uyum iyiliğini değerlendirmek için, $D\left(y\middle|\theta,\Omega\right)$ değeri *Y* ile hipoteze uygun olarak üretilen Y^{rep} arasındaki tutarsızlık değişkeni olarak düşünülür. *ppp*- değeri;

$$\begin{aligned} ppp\left(Y\right) &= P\left\{D\left(Y^{rep}\middle|\theta,\Omega\right)\geq D\left(Y\middle|\theta,\Omega\right)\middle|Y,M_0\right\}, \\ &= \int I\left\{D\left(Y^{rep}\middle|\theta,\Omega\right)\geq D\left(Y\middle|\theta,\Omega\right)\right\}P\left(Y^{rep},\theta,\Omega\middle|Y,M_0\right)dY^{rep}d\theta d\Omega, \end{aligned} \tag{5.76}$$

biçimindedir. Burada $I\left(.\right)$ bir gösterge fonksiyonudur. Olasılık şu ortak sonsal dağılım üzerinden alınır *Y* ve M_0 verildiğinde $\left(Y^{rep},\theta,\Omega\right)$'in dağılımı:

$$p\left(Y^{rep},\theta,\Omega\middle|Y,M_0\right)=P\left(Y^{rep}\middle|\theta,\Omega\right)P\left(\theta,\Omega\middle|Y\right) \tag{5.77}$$

biçiminde hesaplanır. Bu olasılığın yaklaşık olarak hesaplanması için; her bir *k* adımı,

$$a_i^{(k)}=\begin{cases}1, & D_i^{(k)}\left(y^{rep},\theta\right)>D_i^{(k)}\left(y^{obs},\theta\right)\\ 0, & D_i^{(k)}\left(y^{rep},\theta\right)<D_i^{(k)}\left(y^{obs},\theta\right)\end{cases} \tag{5.78}$$

biçiminde ele alınırsa

$$ppp\left(Y\right)\approx\frac{1}{n-d+1}\sum_{k=d}^{n}a_i^{(k)} \tag{5.79}$$

elde edilir. *ppp* değeri karmaşık durumlarda çok farklı ve karmaşık durumlarda model kontrolü için yararlıdır. *ppp* değeri 0.5'e uzak değilse önerilen model uygun model olarak kabul edilebilir. Meng (1994), Carlin ve Louis (1996), *ppp* değeri, tek bir modelin değerlendirilmesi iyiliği için yararlı olduğunu, farklı modellerin karşılaştırılması için

uygun olmadığını söylemektedir. Son zamanlarda bu istatistik, ihmal edilemez kayıp veri seti ile doğrusal olmayan YEM analizlerinde kullanılmaktadır (Lee ve Tang, 2006; Lee, 2007).

6. UYGULAMA

Bu bölümde, Bayesci doğrusal olmayan yapısal eşitlik modeli analizi için uygulama verisi olarak Türkiye İstatistik Kurumundan (TÜİK) alınan 2013 yılına ait Yaşam Memnuniyeti Araştırması (YMA) anketinden yararlanılmıştır. Bayesci doğrusal olmayan yapısal eşitlik modeli analizi için WinBUGS 1.4.3. paket programı kullanılmıştır

6.1. Araştırmanın Amacı ve Kapsamı

Mutluluk ve yaşam memnuniyeti kavramlar, dünya genelinde felsefe kapsamında çok eskiden bu yana, çeşitli boyutlarıyla ele alınan bir konudur. Mutluluk kavramı, yıllar içinde bireylerin maddi veya manevi değerleriyle kendi içinde duyduğu öznel beğeniden, toplumun takdirini kazanacak değerlere sahip olmasına, bunların çeşitli oranlardaki bileşimine, sürdüğü yaşam biçiminden hoşnutluğa kadar çeşitli görünümleriyle ortaya konulmuştur. Oysa günümüzde mutluluğu ele alırken algılanan mutluluk, yani bireyin kendi içindeki, kendine özgü değerlendirmenin bir çıktısı olarak kendisini mutlu olarak hissedip hissetmemesi önem kazanmıştır.

Alandan veri toplama yöntemiyle mutluluk düzeyi ölçümü, dünyada 1940'ların ikinci yarısında başlamıştır. Resmi istatistik olarak Türkiye'de yapılan, mutluluk konusunu ele alan ilk araştırma, TÜİK tarafından "Yaşam Memnuniyeti Araştırması" (YMA) adıyla 2003 yılında gerçekleştirilmiştir.

Yaşam Memnuniyeti Araştırması, TÜİK' in toplumsal içerikli ve aynı zamanda öznel öğeler içeren ilk araştırması olma özelliğini taşımaktadır. Araştırmada bireylerin mutluluk, umut, temel yaşam alanlarındaki genel memnuniyeti ve bu alanlardaki kamu hizmetlerinden memnuniyeti ölçülmüştür (YMA, 2013).

6.2. Örnekleme Planı ve Verilerin Toplanması

İlk kez 2013 yılında il düzeyinde tahmin üretilecek biçimde örneklem büyüklüğü hesaplanmıştır. 2013 yılında Türkiye genelinde örneğe çıkan 125 720 haneden 103 312 hanedeki 18 ve daha yukarı yaştaki 196 203 birey ile yüz yüze görüşme yöntemiyle veri toplanmış ve il bazında gerçekleştirilen Yaşam Memnuniyeti Araştırması'nın sonuçlarından oluşmaktadır.

Uygun örneklem büyüklüğünün belirlenmesi oldukça önemli bir konudur. Saunders ve arkadaşları (2000), araştırmacıların normal olarak % 95 güvenirlilik ile çalışmaları gerektiğini ifade etmektedirler. Bunun anlamı, bir örneklem 100 kez

seçildiğinde, bu örneklemin en az % 95' inin kitlenin karakteristik özelliklerini kesin bir biçimde göstermesi yönündedir (Çelik, 2009).

TÜİK 2013 yılı nüfus Yaşam Memnuniyeti 2013 araştırması verileri temel alınarak uygulama için örneklem seçilmiştir. TÜİK 2013 Adrese Dayalı Nüfus Kayıt Sistemi verilerine göre 18 ve daha yukarı yaştaki nüfus genel nüfusun % 67'sini oluşturmaktadır. Örneklem hacminin belirlenmesi için; $p = 0.67$ duyarlılık 0.02 ve anlamlılık düzeyi 0.05 alındığında, uygun örneklem büyüklüğü 2124 birim olarak hesaplanmıştır. Türkiye'deki tüm şehirler ayrı birer tabaka olarak düşünülerek orantılı olarak 81 ilden rasgele 2124 denek seçilmiştir.

Anketi katılanlardan uygulamaya alınan fertlere göre cinsiyet dağılımı yapıldığında elde edile sonuçlar Çizelge 6.1'de medeni durumuna ilişkin sonuçlar Çizelge 6.2'de, yaşadığı şehre ilişkin sonuçlar Çizelge 6.3'te verilmektedir.

Çizelge 6.1. Uygulamaya Alınan Fertlerin Cinsiyete Göre Dağılımı

Cinsiyet	**Frekans**	**Yüzde**
Erkek	901	42.4
Kadın	1223	57.6
Toplam	**2124**	**100**

Çizelge 6.2. Uygulamaya Alınan Fertlerin Medeni Duruma Göre Dağılımı

Cinsiyet	**Frekans**	**Yüzde**
Hiç Evlenmedi	304	14.3
Evli	1624	76.5
Boşandı	42	2.0
Eşi Öldü	154	7.3
Toplam	**2124**	**100**

Yaşam Memnuniyeti Anketinden yararlanılan gizil değişkenler bu gizil değişkenleri temsil ettiği varsayılan gösterge değişkenler olan memnuniyet soruları, analizlerde kullanılacak olan gösterge etiketleri ile beraber Çizelge 6.4'te gösterilmektedir. Memnuniyet soruları genel olarak 4 gizil değişkende toplanmıştır.

Memnuniyet sorularının ölçülmesinde cevaplayıcılardan 1 "Çok Memnun"dan 5 "Hiç Memnun Değil"e kadar likert ölçek üzerinden bir işaretleme yapmaları istenmiştir.

Çizelge 6.3. Uygulamaya Alınan Fertlerin Yaşadığı Şehirlere Göre Dağılımı

Plaka No	İl	Sayı	Plaka No	İl	Sayı
1	Adana	50	41	Kocaeli	40
2	Adıyaman	28	42	Konya	54
3	Afyonkarahisar	25	43	Kütahya	25
4	Ağrı	17	44	Malatya	29
5	Amasya	13	45	Manisa	37
6	Ankara	68	46	Kahramanmaraş	27
7	Antalya	50	47	Mardin	29
8	Artvin	8	48	Muğla	32
9	Aydın	35	49	Muş	17
10	Balıkesir	40	50	Nevşehir	19
11	Bilecik	15	51	Niğde	20
12	Bingöl	18	52	Ordu	22
13	Bitlis	16	53	Rize	10
14	Bolu	14	54	Sakarya	22
15	Burdur	18	55	Samsun	28
16	Bursa	61	56	Siirt	14
17	Çanakkale	21	57	Sinop	14
18	Çankırı	13	58	Sivas	23
19	Çorum	20	59	Tekirdağ	38
20	Denizli	36	60	Tokat	18
21	Diyarbakır	28	61	Trabzon	19
22	Edirne	27	62	Tunceli	14
23	Elazığ	26	63	Şanlıurfa	25
24	Erzincan	14	64	Uşak	23
25	Erzurum	26	65	Van	30
26	Eskişehir	34	66	Yozgat	19
27	Gaziantep	34	67	Zonguldak	30
28	Giresun	13	68	Aksaray	24
29	Gümüşhane	8	69	Bayburt	14
30	Hakkâri	20	70	Karaman	18
31	Hatay	37	71	Kırıkkale	19
32	Isparta	23	72	Batman	18
33	Mersin	45	73	Şırnak	19
34	İstanbul	132	74	Bartın	17
35	İzmir	72	75	Ardahan	13
36	Kars	14	76	Iğdır	11
37	Kastamonu	18	77	Yalova	10
38	Kayseri	36	78	Karabük	18
39	Kırklareli	25	79	Kilis	12
40	Kırşehir	16	80	Osmaniye	21
			81	Düzce	18
				Toplam	**2124**

Çizelge 6.4. Gizil Değişkenler ve Gösterge Değişkenleri

GİZİL KAVRAMLAR	GÖSTERGE DEĞİŞKEN ETİKETİ	GÖSTERGE DEĞİŞKEN
İKAMETGÂH MEMNUNİYETİ	***İM1***	Oturduğunuz konuttan memnun musunuz?
	İM2	Oturduğunuz semtten ya da mahalleden memnun musunuz?
ÇALIŞMA HAYATI VE KAZANÇTAN MEMNUNİYET	***ÇHKM1***	İşinizden memnun musunuz?
	ÇHKM2	İşinizden elde ettiğiniz kazançtan memnun musunuz?
	ÇHKM3	Aylık hane halkı gelirinizden memnun musunuz?
	ÇHKM4	Sosyal hayatınızdan (eğlence, kültürel ve sportif faaliyetler gibi) memnun musunuz?
	ÇHKM5	Kendinize ayırdığınız zamandan memnun musunuz?
	ÇHKM6	İşe geliş gidiş için harcadığınız (ayırdığınız) zamandan memnun musunuz?
KİŞİSEL İLİŞKİLERDEN MEMNUNİYET	***KİM1***	Akrabalarınızla ilişkilerinizden memnun musunuz?
	KİM2	Arkadaşlarınızla ilişkilerinizden memnun musunuz?
	KİM3	Komşularınızla ilişkilerinizden memnun musunuz?
	KİM4	İşinizle ilgili kişilerle ilişkilerinizden memnun musunuz?
KAMU HİZMETLERİNDEN MEMNUNİYET	***KHM1***	Sağlık hizmetlerinden memnun musunuz?
	KHM2	Asayiş (güvenlik) hizmetlerinden memnun musunuz?
	KHM3	Adli hizmetlerden memnun musunuz?
	KHM4	Eğitim hizmetlerinden memnun musunuz?
	KHM5	Sosyal Güvenlik Kurumu'nun hizmetlerinden memnun musunuz?
	KHM6	Ulaştırma hizmetlerinden memnun musunuz?

Anketteki tutum sorularına verilen cevaplar için bazı tanımlayıcı istatistikler ve tek değişkenli normal dağılıma uygunlukları için yapılan testlerin sonuçları Çizelge 6.5'te verilmektedir. Çizelge 6.5. incelendiğinde memnuniyet sorularına uygulamaya alınan cevaplayıcıların genel olarak 2 "Memnun" ile 3 "Orta" arasında bir yanıt verdiği görülmektedir.

Memnuniyet sorularının tek değişkenli normallikleri için yapılan test sonuçlarına bakıldığından gözlenen değişkenlerin normal dağıldığı hipotezi reddedilmektedir. Tek değişkenli normallik sağlanmadığından, çok değişkenli normallik sınaması yapmaya

gerek duyulmadan, veri setinin çok değişkenli normal dağılmadığı sonucunda varılmaktadır. Bununla birlikte kullanılacak veri setinin çok değişkenli normal dağılımdan ne derece farklılık gösterdiğini sınayan, Mardia'nın çok değişkenli çarpıklık ve basıklık katsayıları ve ilgili hipotez testinin sonuçları Çizelge 6.6'da verilmektedir. Yapılan analiz neticesinde veri setinin çok değişkenli normallik varsayımını sağlamadığı belirlenmiştir$(p < 0.05)$. Bu durumda modelleme aşamasında en çok olabilirlik yönteminin kullanılması doğru olmayacaktır. DFA, YEM ve Doğrusal olmayan YEM tahminleri için Bayes yöntemi kullanılmıştır.

Çizelge 6.5. Uygulamaya Alınan Fertlerin Yaşam Memnuniyeti Soruları İçin Tanımlayıcı İstatistikler ve Tek Değişkenli Normallik Testi

Gösterge	$\bar{x}$	Standart Sapma	Çarpıklık	Basıklık	Kolmogorov-Smirnov P-Değeri	Shapiro-Wilk P-Değeri
İM1	2.2533	0.78544	1.641	2.691	0.000	0.000
İM2	2.1766	0.70487	1.845	4.186	0.000	0.000
ÇHKM1	2.2740	0.78628	1.443	2.046	0.000	0.000
ÇHKM2	2.8870	1.04015	0.418	-1.026	0.000	0.000
ÇHKM3	2.8766	1.00720	0.420	-1.048	0.000	0.000
ÇHKM4	2.4656	0.90648	1.128	0.469	0.000	0.000
ÇHKM5	2.8272	1.00577	0.482	-0.950	0.000	0.000
ÇHKM6	2.7938	0.98497	0.508	-0.976	0.000	0.000
KİM1	2.1394	0.64847	1.589	4.029	0.000	0.000
KİM2	2.0104	0.51532	1.359	6.851	0.000	0.000
KİM3	2.0965	0.63097	1.611	4.667	0.000	0.000
KİM4	2.0504	0.52161	1.540	7.109	0.000	0.000
KHM1	2.3823	0.90416	1.174	0.747	0.000	0.000
KHM2	2.2839	0.78846	1.512	2.102	0.000	0.000
KHM3	2.5075	0.78038	1.008	1.050	0.000	0.000
KHM4	2.5019	0.91540	1.086	0.273	0.000	0.000
KHM5	2.3512	0.77344	1.412	1.897	0.000	0.000
KHM6	2.3606	0.84441	1.490	1.701	0.000	0.000

Çizelge 6.6. Uygulamaya Alınan Fertlerin Yaşam Memnuniyeti Soruları İçin Mardia'nın Çarpıklık, Basıklık Katsayıları ve Çok Değişkenli Normallik Testi

Çarpıklık			Basıklık			Çarpıklık ve Basıklık	
Katsayı	Z değeri	P-Değeri	Katsayı	Z değeri	P-Değeri	Ki-Kare	P-Değeri
19076.74	53.9145	0.000	194.6503	586.713	0.000	19106.53	0.000

Gizil değişkenli YEM'de biri ölçme modeli diğeri yapısal model olarak adlandırılabilen iki modelin eş anlı olarak tahmini yapılmakta ve genel modelin veriye uyumu değerlendirilmektedir. Fakat yapısal modelin geçerliliği doğrudan ölçme modelinin doğruluğuna bağlı olmaktadır. Bu bağlamda hem ölçme modelinin hem de yapısal modelin ayrı ayrı değerlendirilmesinde fayda bulunmaktadır.

6.3. Gizil Değişkenler için Ölçüm Modeli

Çizelge 6.4'te verilen gizil değişkenlerin ilgili göstergeler ile ölçülüp ölçülmediğinin araştırılması için Doğrulayıcı Faktör Modeli kurulmuş ve gizil değişkenlerin varyansları 1'e sabitlenerek ölçek belirsizliği ortadan kaldırılmıştır.
Gizil değişkenler için ölçüm modelinin matris gösterimi:

$$\begin{bmatrix} İM1 \\ İM2 \\ ÇHKM1 \\ ÇHKM2 \\ ÇHKM3 \\ ÇHKM4 \\ ÇHKM5 \\ ÇHKM6 \\ KİM1 \\ KİM2 \\ KİM3 \\ KİM4 \\ KHM1 \\ KHM2 \\ KHM3 \\ KHM4 \\ KHM5 \\ KHM6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \\ \mu_6 \\ \mu_7 \\ \mu_8 \\ \mu_9 \\ \mu_{10} \\ \mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \mu_{13} \\ \mu_{14} \\ \mu_{15} \\ \mu_{16} \\ \mu_{17} \\ \mu_{18} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{32} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{42} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{52} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{62} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{72} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{82} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{93} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{10,3} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{11,3} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{12,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{13,4} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{14,4} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{15,4} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{16,4} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{17,4} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{18,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} İM \\ ÇHKM \\ KİM \\ KHM \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ \varepsilon_7 \\ \varepsilon_8 \\ \varepsilon_9 \\ \varepsilon_{10} \\ \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{14} \\ \varepsilon_{15} \\ \varepsilon_{16} \\ \varepsilon_{17} \\ \varepsilon_{18} \end{bmatrix} \tag{6.1}$$

biçimindedir. Gizil değişkenlere ilişkin kovaryans matrisi,

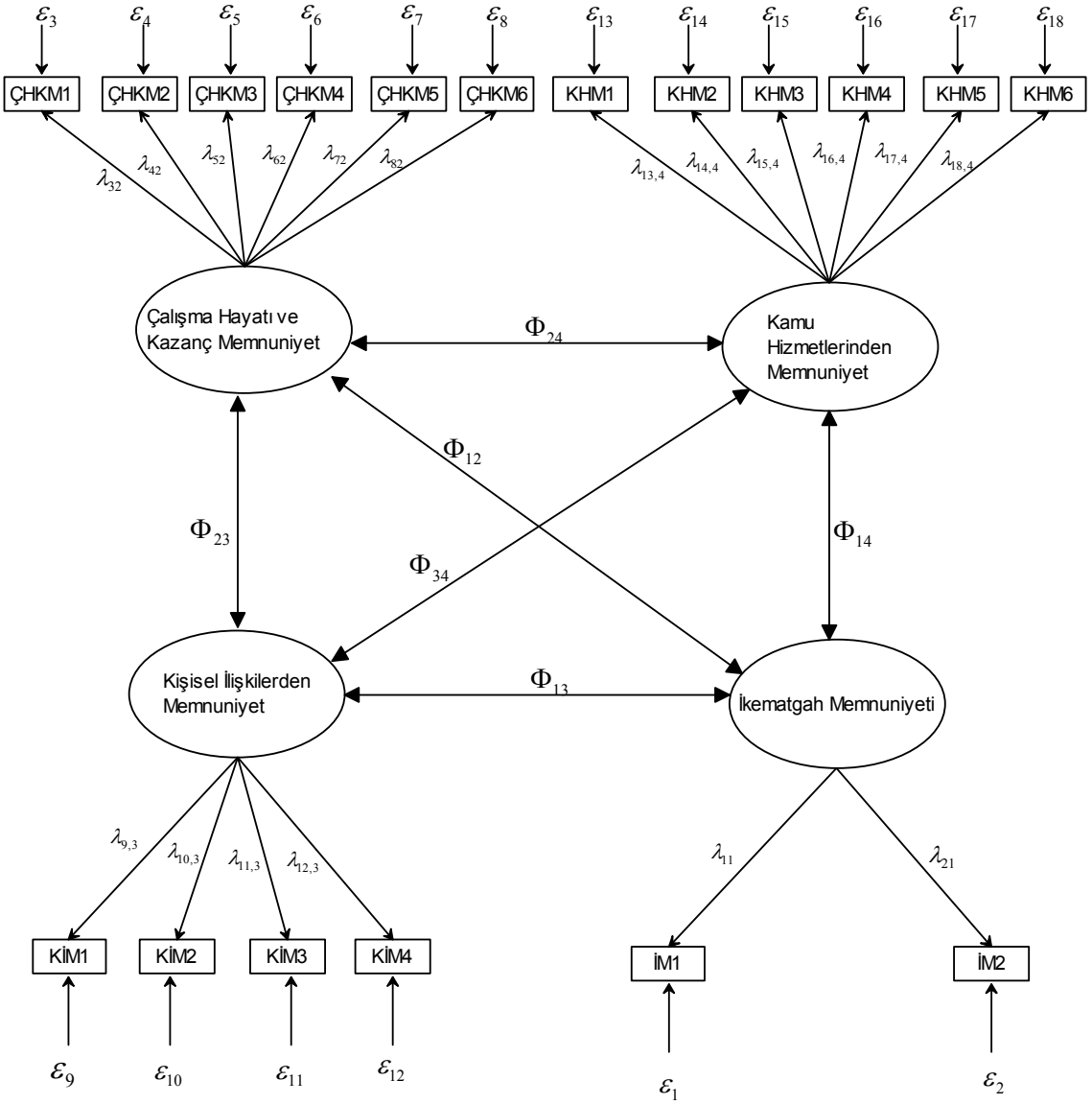
$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & \Phi_{14} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \Phi_{23} & \Phi_{24} \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} & \Phi_{34} \\ \Phi_{41} & \Phi_{42} & \Phi_{43} & \Phi_{44} \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

şeklindedir. Ψ hatalara ilişkin kovaryans matrisi ise

$$\Psi_{\varepsilon} = \left[\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \Psi_5, \Psi_6, \Psi_7, \Psi_8, \Psi_9, \Psi_{10}, \Psi_{11}, \Psi_{12}, \Psi_{13}, \Psi_{14}, \Psi_{15}, \Psi_{16}, \Psi_{17}, \Psi_{18}\right],$$

biçiminde köşegen matristir.

Test edilen ölçüm modeline ait path diyagramı Şekil 6.1'de görülmektedir. Ölçüm modelinin testi için Bayes yöntemi için uyum iyiliği testinde kullanılan *ppp* değerinden yararlanılmıştır. Ayrıca tek değişkenin anlamlılığı için yapılan test sonucunda gösterge değişkenler anlamlı bulunmuştur. Ölçüm modeline ilişkin path katsayıları, hata varyansları ve belirlilik katsayıları Çizelge 6.7'de verilmiştir.



Şekil 6.1. Test edilen ölçüm modeli path diyagramı gösterimi

Çizelge 6.7. Ölçüm Modeli için Gösterge ve Belirlilik Katsayıları

Parametre	Tahmin Değeri	Standart Sapma	P-Değeri	% 95 Güven Aralığı		Parametre	Tahmin Değeri	Standart Sapma	P-Değeri	% 95 Güven Aralığı	
				Alt Sınır	Üst Sınır					Alt Sınır	Üst Sınır
μ_1	2.866	0.053	0.000	2.755	2.968	$\lambda_{10,3}$	0.766	0.014	0.000	0.740	0.793
μ_2	3.081	0.057	0.000	2.965	3.192	$\lambda_{11,3}$	0.755	0.014	0.000	0.728	0.783
μ_3	2.902	0.047	0.000	2.810	2.995	$\lambda_{12,3}$	0.460	0.019	0.000	0.425	0.499
μ_4	2.768	0.048	0.000	2.672	2.852	$\lambda_{13,4}$	0.607	0.018	0.000	0.567	0.640
μ_5	2.848	0.047	0.000	2.753	2.944	$\lambda_{14,4}$	0.655	0.017	0.000	0.624	0.686
μ_6	2.721	0.049	0.000	2.615	2.810	$\lambda_{15,4}$	0.569	0.017	0.000	0.532	0.597
μ_7	2.807	0.047	0.000	2.710	2.896	$\lambda_{16,4}$	0.654	0.016	0.000	0.619	0.682
μ_8	2.837	0.047	0.000	2.739	2.934	$\lambda_{17,4}$	0.660	0.015	0.000	0.629	0.686
μ_9	3.288	0.058	0.000	3.167	3.398	$\lambda_{18,4}$	0.538	0.018	0.000	0.501	0.570
μ_{10}	3.900	0.060	0.000	3.764	4.013	$\Psi_{\varepsilon 1}$	0.573	0.032	0.000	0.517	0.639
μ_{11}	3.321	0.056	0.000	3.210	3.424	$\Psi_{\varepsilon 2}$	0.555	0.025	0.000	0.509	0.605
μ_{12}	3.929	0.067	0.000	3.777	4.048	$\Psi_{\varepsilon 3}$	0.741	0.018	0.000	0.706	0.772
μ_{13}	2.633	0.048	0.000	2.539	2.724	$\Psi_{\varepsilon 4}$	0.224	0.014	0.000	0.197	0.252
μ_{14}	2.893	0.048	0.000	2.797	2.984	$\Psi_{\varepsilon 5}$	0.240	0.014	0.000	0.217	0.267
μ_{15}	3.202	0.055	0.000	3.113	3.324	$\Psi_{\varepsilon 6}$	0.861	0.016	0.000	0.826	0.885
μ_{16}	2.727	0.049	0.000	2.640	2.831	$\Psi_{\varepsilon 7}$	0.726	0.019	0.000	0.689	0.767
μ_{17}	3.034	0.052	0.000	2.937	3.147	$\Psi_{\varepsilon 8}$	0.798	0.017	0.000	0.768	0.831
μ_{18}	2.795	0.052	0.000	2.688	2.893	$\Psi_{\varepsilon 9}$	0.525	0.022	0.000	0.487	0.574
λ_{11}	0.654	0.024	0.000	0.599	0.694	$\Psi_{\varepsilon 10}$	0.413	0.021	0.000	0.371	0.452
λ_{21}	0.667	0.018	0.000	0.627	0.701	$\Psi_{\varepsilon 11}$	0.429	0.021	0.000	0.387	0.469
λ_{32}	0.509	0.018	0.000	0.477	0.542	$\Psi_{\varepsilon 12}$	0.789	0.018	0.000	0.750	0.819
λ_{42}	0.881	0.008	0.000	0.864	0.896	$\Psi_{\varepsilon 13}$	0.632	0.022	0.000	0.589	0.678
λ_{52}	0.872	0.008	0.000	0.856	0.885	$\Psi_{\varepsilon 14}$	0.571	0.022	0.000	0.527	0.609
λ_{62}	0.373	0.021	0.000	0.338	0.416	$\Psi_{\varepsilon 15}$	0.676	0.020	0.000	0.643	0.716
λ_{72}	0.523	0.018	0.000	0.481	0.557	$\Psi_{\varepsilon 16}$	0.572	0.021	0.000	0.534	0.616
λ_{82}	0.449	0.019	0.000	0.411	0.481	$\Psi_{\varepsilon 17}$	0.565	0.020	0.000	0.527	0.603
$\lambda_{9,3}$	0.689	0.016	0.000	0.652	0.716	$\Psi_{\varepsilon 18}$	0.711	0.019	0.000	0.674	0.749

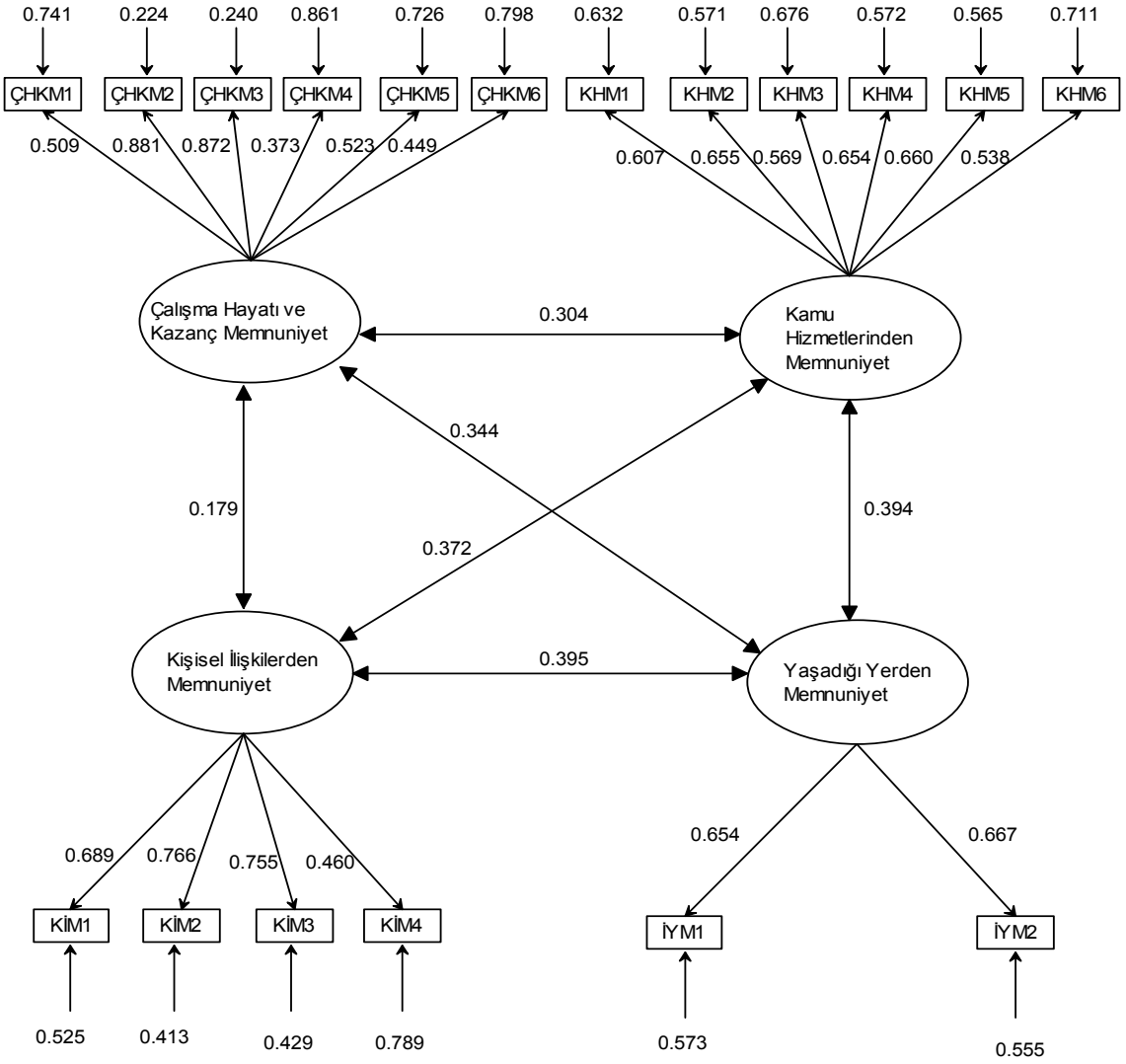
Ölçüm Modeli için *ppp*-değeri = 0.523 olarak bulunmuştur. Bayesci yöntemde *ppp*-değerinin 0.5 yakın olması modelin uyum iyiliğinin bir göstergesidir. Hesaplanan değer 0.5'e yakın olduğu için test edilen ölçüm modelinin iyi bir uyuma sahiptir.

6.3.1. Ölçüm Modeli İçin Ayrımsama Geçerliliği

Ölçme modelinin geçerlilik sınamalarından biri ayrımsama geçerliliğidir. Ayrımsama geçerliliği, ölçülecek kavramın diğer kavramlarla karıştırılmadan ölçülmesi anlamına gelmektedir (Şimşek, 2007). Ayrımsama geçerliliği için farklı yaklaşımlar geliştirilmiştir. Bunlardan ilki gizil değişkenler arasındaki korelasyonlar için güven aralığı oluşturmaktadır. Eğer oluşturulan güvenaralıkları1 değerini içermiyorsa gizil değişkenlerin ayrımsama geçerliliği sağlanmış olmaktadır. Çizelge 6.8'de yer alan gizil değişkenler arasındaki korelasyonların güven aralıklarına bakıldığında hiçbir aralığın 1 değerini içermediği dolayısıyla da ayrımsama geçerliliğinin sağlandığı görülmektedir. Ayrıca Şekil 6.2'de ölçüm modeline ilişkin katsayılar path diyagramı üzerinde gösterimi verilmiştir.

Çizelge 6.8. Gizil Değişkenler Arasındaki Korelasyonlar İçin %95 Güven Aralığı

Gizil Değişkenler	*Korelasyon*	*Standart Sapma*	*P - Değeri*	*% 95 Güven Aralığı*	
				Alt Sınır	*Üst Sınır*
İM ve ÇHKM	0.344	0.027	0.000	0.296	0.397
İM ve KİM	0.395	0.030	0.000	0.340	0.453
İM ve KHM	0.394	0.030	0.000	0.332	0.455
ÇHKM ve KİM	0.179	0.026	0.000	0.129	0.229
ÇHKM ve KHM	0.304	0.024	0.000	0.259	0.345
KHM ve KİM	0.372	0.024	0.000	0.323	0.416



Şekil 6.2. Ölçüm Modeli katsayıları path diyagramı gösterimi

6.4. Yapısal Eşitlik Modelinin Oluşturulması ve Analiz Sonuçları

Ölçüm modeli elde edildikten sonra kuramsal olarak önerilen araştırma modelinin analiz edilmesi sürecine geçilmiştir. Oluşturulan Yapısal Model; İkametgâh memnuniyetini diğer üç gizil değişken tarafından etkilenmesinin test edildiği YEM modelidir.

İkametgâh memnuniyeti; sosyoloji, psikoloji, planlama ve coğrafya gibi disiplinler arasında uzun zamandır başlıca araştırma konularından biri olmayı sürdürmektedir (Özgür, 2009). Bu konunun gözde oluşu iki nedene dayanmaktadır: Bunlardan birincisi, ikametgâh memnuniyetinin bireylerin genel yaşam kalitesinin önemli bir unsuru olarak kabul edilmesi; ikincisi, bireylerin konut ve oturdukları semt hakkındaki kişisel değerlendirmelerinin, onların ikametgâh çevresine verdikleri yanıtın

ve kamu faaliyetlerini şekillendirmenin bir yolunu oluşturmasıdır (Lu, 1999; Özgür, 2009).

İkametgâh memnuniyeti, hane halkının halen oturduğu ve oturmak istediği konut ve semt arasındaki farkların tartılmasına dayanır (Galster, 1987; Galster ve Hesser, 1981; Özgür, 2009). Hane halkı ihtiyaç ve özlemlerine göre ikametgâh koşulları hakkında kararlar vermeyi istemektedir. Bir kişinin ikametgâha ilişkin memnuniyeti, o kişinin halen oturduğu ve oturmak istediği yerler arasındaki yüksek düzeyli bir uyuma, ihtiyaç ve özlemlere göre bu yerden bir şikâyetinin olmayışına işaret etmektedir. Diğer taraftan halen oturulan konut veya semt ile istenilen koşullar arasındaki uyumsuzluk da muhtemelen memnuniyetsizliği doğuracaktır (Lu, 1999).

Konut ve çevresinden memnuniyet, insanların yaşadıkları çevreye verdikleri yanıtlarını yansıtmaktadır. Çevre kelimesi sadece konuttan, konut alanı gelişiminden, komşuluktan meydana gelen fiziksel konut alanı bileşenleriyle değil, onun yanında sosyal ve ekonomik (düzenleme ve kuruluşlar) durumlarla da ilgilidir. Dolayısıyla ikametgâh memnuniyeti, birey veya hane halkının, oturdukları konut ve çevresinden (ikametgâh demeti) bir bütün olarak memnun olma durumudur (Özgür, 2009).

Doğrusal olmayan YEM'in uygulama aşamasında, belirlenen ölçüm modeli için 5 farklı yapısal model Bayes yöntemi ile test edilmiştir. Test edilen modeller aşağıdaki gibidir:

Model 1:

$$KHM = \gamma_1 \times \text{ÇHKM} + \delta_1$$

$$\text{İM} = \gamma_2 \times \text{ÇHKM} + \gamma_3 \times \text{KİM} + \gamma_4 \times KHM + \gamma_5 \times (\text{ÇHKM})^2 + \gamma_6 \times (\text{KİM})^2 + \gamma_7 \times (\text{ÇHKM} \times \text{KİM}) + \delta_2 \quad (6.3)$$

$$Var(\delta_1) = \Psi_{\delta_1}, Var(\delta_2) = \Psi_{\delta_2}$$

$$Cov(\text{ÇHKM}, \text{KİM}) = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix}$$

Model 2:

$$KHM = \gamma_1 \times \text{ÇHKM} + \delta_1$$

$$\text{İM} = \gamma_2 \times \text{ÇHKM} + \gamma_3 \times \text{KİM} + \gamma_4 \times KHM + \gamma_5 \times (\text{ÇHKM} \times \text{KİM}) + \delta_2$$

$$Var(\delta_1) = \Psi_{\delta_1}, Var(\delta_2) = \Psi_{\delta_2} \quad (6.4)$$

$$Cov(\text{ÇHKM}, \text{KİM}) = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix}$$

Model 3:

$$KHM = \gamma_1 \times ÇHKM + \delta_1$$
$$İM = \gamma_2 \times ÇHKM + \gamma_3 \times KİM + \gamma_4 \times KHM + \gamma_5 \times \left(KİM\right)^2 + \delta_2$$
$$Var\left(\delta_1\right) = \Psi_{\delta_1}, Var\left(\delta_2\right) = \Psi_{\delta_2} \qquad (6.5)$$
$$Cov\left(ÇHKM, KİM\right) = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix}$$

Model 4:

$$KHM = \gamma_1 \times ÇHKM + \delta_1$$
$$İM = \gamma_2 \times ÇHKM + \gamma_3 \times KİM + \gamma_4 \times KHM + \gamma_5 \times \left(ÇHKM\right)^2 + \delta_2$$
$$Var\left(\delta_1\right) = \Psi_{\delta_1}, Var\left(\delta_2\right) = \Psi_{\delta_2} \qquad (6.6)$$
$$Cov\left(ÇHKM, KİM\right) = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix}$$

Model 5:

$$KHM = \gamma_1 \times ÇHKM + \delta_1$$
$$İM = \gamma_2 \times ÇHKM + \gamma_3 \times KİM + \gamma_4 \times KHM + \delta_2$$
$$Var\left(\delta_1\right) = \Psi_{\delta_1}, Var\left(\delta_2\right) = \Psi_{\delta_2} \qquad (6.7)$$
$$Cov\left(ÇHKM, KİM\right) = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix}$$

Burada test edilen 5 modelde,

Kamu Hizmetler için; Çalışma Hayatı ve Kazanç gizil değişkeninin,

İkametgâh Memnuniyeti için; Kamu Hizmetleri Memnuniyeti, Çalışma Hayatı Kazanç ve Kişisel İlişki Memnuniyeti gizil değişkenlerinin doğrudan etkilerini test etmektedir. Ayrıca;

Model 1, Çalışma Hayatı Kazanç ve Kişisel İlişki Memnuniyeti gizil değişkenlerinin karesel etkilerinin ve bu iki gizil değişkenin etkileşiminin de İkametgâh Memnuniyeti gizil değişkeni üzerindeki etkisinin test edildiği doğrusal olmayan YEM,

Model 2, Çalışma Hayatı Kazanç ve Kişisel İlişki Memnuniyeti gizil değişkenlerinin etkileşiminin İkametgâh Memnuniyeti gizil değişkeni üzerindeki etkisinin test edildiği doğrusal olmayan YEM,

Model 3, Kişisel İlişki Memnuniyeti gizil değişkeninin karesel etkisinin İkametgâh Memnuniyeti gizil değişkeni üzerindeki etkisinin test edildiği doğrusal olmayan YEM,

Model 4, Çalışma Hayatı ve Kazanç gizil değişkeninin karesel etkisinin İkametgâh Memnuniyeti gizil değişkeni üzerindeki etkisinin test edildiği doğrusal olmayan YEM,

Model 5, karesel ve etkileşim terimlerini içermeyen doğrusal YEM'dir.

Test edilen modellere ilişkin tahmin sonuçları Çizelge 6.9-6.13'te görülmektedir. Çizelgelere bakıldığında tüm modellerin 0.5 değerine yakın bayesci *ppp* değerine sahip oldukları görülmektedir. Bayesci yöntemde *ppp*-değerinin 0.5 yakın olması modelin uyum iyiliğinin bir göstergesidir. Hesaplanan değerler 0.5'e yakın olduğu için test edilen modellerin modelin yapısal modelinin iyi bir uyuma sahip oldukları söylenebilir.

En iyi modeli belirlemek için model karşılaştırma model karşılaştırma istatistiklerinden AIC, BIC ve DIC istatistikleri 5 model için ayrı ayrı hesaplanmıştır. Hesaplanan bu değerler Çizelge 6.14'te görülmektedir.

Çizelge 6.9. Model 1 için Gösterge ve Belirlilik Katsayıları

Parametre	Tahmin Değeri	Standart Sapma	MC Hata	% 95 Güven Aralığı		Parametre	Tahmin Değeri	Standart Sapma	MC Hata	% 95 Güven Aralığı	
				Alt Sınır	Üst Sınır					Alt Sınır	Üst Sınır
μ_1	2.295	0.023	0.0025	2.25	2.34	$\lambda_{18,4}$	0.819	0.044	0.0045	0.730	0.9051
μ_2	2.219	0.022	0.0026	2.174	2.26	γ_1	0.411	0.036	0.0025	0.343	0.4847
μ_3	2.273	0.016	0.0013	2.24	2.307	γ_2	0.269	0.035	0.0025	0.204	0.3451
μ_4	2.884	0.021	0.0025	2.841	2.922	γ_3	0.352	0.036	0.0029	0.282	0.4333
μ_5	2.874	0.020	0.0024	2.832	2.911	γ_4	0.195	0.028	0.0020	0.137	0.2505
μ_6	2.463	0.019	0.0011	2.423	2.5	γ_5	-0.104	0.089	0.0110	-0.286	0.0533
μ_7	2.825	0.021	0.0016	2.782	2.865	γ_6	-0.156	0.037	0.0034	-0.233	-0.082
μ_8	2.792	0.021	0.0013	2.749	2.833	γ_7	0.181	0.084	0.0070	0.015	0.3463
μ_9	2.14	0.012	0.0010	2.116	2.166	$\Psi_{\varepsilon 1}$	0.365	0.020	0.0021	0.327	0.4063
μ_{10}	2.011	0.010	0.0010	1.991	2.032	$\Psi_{\varepsilon 2}$	0.263	0.016	0.0017	0.232	0.2978
μ_{11}	2.097	0.012	0.0011	2.07	2.12	$\Psi_{\varepsilon 3}$	0.448	0.014	0.0007	0.419	0.4775
μ_{12}	2.051	0.010	0.0005	2.03	2.074	$\Psi_{\varepsilon 4}$	0.257	0.014	0.0018	0.229	0.2874
μ_{13}	2.382	0.019	0.0011	2.345	2.42	$\Psi_{\varepsilon 5}$	0.255	0.012	0.0010	0.230	0.2801
μ_{14}	2.284	0.016	0.0009	2.25	2.316	$\Psi_{\varepsilon 6}$	0.700	0.021	0.0009	0.661	0.7459
μ_{15}	2.508	0.016	0.0009	2.476	2.54	$\Psi_{\varepsilon 7}$	0.728	0.024	0.0012	0.682	0.7786
μ_{16}	2.502	0.020	0.0011	2.463	2.54	$\Psi_{\varepsilon 8}$	0.766	0.024	0.0010	0.717	0.8163
μ_{17}	2.351	0.016	0.0010	2.319	2.381	$\Psi_{\varepsilon 9}$	0.224	0.009	0.007	0.206	0.2438
μ_{18}	2.361	0.018	0.0010	2.327	2.399	$\Psi_{\varepsilon 10}$	0.111	0.005	0.0005	0.100	0.1227
λ_{21}	1.012	0.063	0.0077	0.899	1.144	$\Psi_{\varepsilon 11}$	0.178	0.007	0.0005	0.163	0.1939
λ_{42}	2.133	0.068	0.0104	1.991	2.259	$\Psi_{\varepsilon 12}$	0.217	0.007	0.0003	0.203	0.232
λ_{52}	2.047	0.060	0.0090	1.916	2.157	$\Psi_{\varepsilon 13}$	0.512	0.018	0.0011	0.478	0.5493
λ_{62}	0.814	0.051	0.0040	0.707	0.9117	$\Psi_{\varepsilon 14}$	0.359	0.013	0.0005	0.333	0.3867
λ_{72}	1.248	0.058	0.0060	1.137	1.36	$\Psi_{\varepsilon 15}$	0.409	0.013	0.0006	0.382	0.439
λ_{82}	1.052	0.058	0.0053	0.943	1.176	$\Psi_{\varepsilon 16}$	0.482	0.019	0.0009	0.447	0.5195
$\lambda_{10,3}$	0.892	0.029	0.0032	0.839	0.949	$\Psi_{\varepsilon 17}$	0.341	0.012	0.0005	0.318	0.367
$\lambda_{11,3}$	1.06	0.035	0.0039	0.989	1.13	$\Psi_{\varepsilon 18}$	0.506	0.016	0.0007	0.474	0.5428
$\lambda_{12,3}$	0.536	0.027	0.0017	0.482	0.5908	ψ_{δ_1}	0.279	0.020	0.0025	0.242	0.3243
$\lambda_{14,4}$	0.925	0.042	0.0046	0.845	1.008	ψ_{δ_2}	0.179	0.013	0.0014	0.153	0.2074
$\lambda_{15,4}$	0.808	0.040	0.0043	0.728	0.8837	Φ_{11}	0.182	0.011	0.0016	0.162	0.1821
$\lambda_{16,4}$	1.075	0.050	0.0056	0.977	1.174	Φ_{12}	0.036	0.005	0.0003	0.026	0.0364
$\lambda_{17,4}$	0.915	0.042	0.0044	0.838	1.002	Φ_{22}	0.198	0.010	0.0011	0.178	0.198

Çizelge 6.9 incelendiğinde, Model 1'e ilişkin Yapısal Eşitlikler:

$$KHM = 0.411 \times ÇHKM$$

$$İM = 0.269 \times ÇHKM + 0.352 \times KİM + 0.195 \times KHM - 0.104 \times (ÇHKM)^2 - 0.156 \times (KİM)^2 + 0.181 \times (ÇHKM \times KİM)$$

olduğu görülmektedir ayrıca Model 1'e ilişkin $ppp - değeri = 0.4555$ olarak hesaplanmıştır. Model 1 sonuçlarına bakıldığında;

- ✓ Çalışma Hayatı ve Kazanç Memnuniyetinin Kamu Hizmetleri Memnuniyeti üzerinde pozitif yönde doğrudan etkisinin olduğu,
- ✓ Çalışma Hayatı ve Kazanç Memnuniyetinin İkametgâh Memnuniyeti üzerinde pozitif yönde doğrudan etkisinin ve negatif yönde karesel etkisinin olduğu,
- ✓ Kişisel İlişki Memnuniyetinin İkametgâh Memnuniyeti üzerinde pozitif yönde doğrudan etkisinin ve negatif yönde karesel etkisinin olduğu,
- ✓ Kamu Hizmetleri Memnuniyetinin İkametgâh Memnuniyeti üzerinde pozitif yönde doğrudan etkisinin olduğu,
- ✓ Çalışma Hayatı ve Kazanç Memnuniyeti ve Kişisel İlişki Memnuniyetinin birlikte etkileşimlerinin İkametgâh Memnuniyeti üzerinde pozitif yönde etkisinin olduğu

tespit edilmiştir.

Çizelge 6.10. Model 2 için Gösterge ve Belirlilik Katsayıları

Parametre	Tahmin Değeri	Standart Sapma	MC Hata	% 95 Güven Aralığı		Parametre	Tahmin Değeri	Standart Sapma	MC Hata	% 95 Güven Aralığı	
				Alt Sınır	Üst Sınır					Alt Sınır	Üst Sınır
μ_1	2.253	0.0169	0.0005	2.22	2.287	$\lambda_{17,4}$	0.9168	0.0400	0.0021	0.8407	0.9969
μ_2	2.176	0.0153	0.0005	2.145	2.205	$\lambda_{18,4}$	0.8183	0.0420	0.0019	0.7397	0.9052
μ_3	2.272	0.0175	0.0008	2.237	2.307	γ_1	0.4208	0.0380	0.0017	0.3484	0.4978
μ_4	2.884	0.0230	0.0018	2.834	2.928	γ_2	0.2525	0.0367	0.0013	0.1796	0.323
μ_5	2.874	0.0226	0.0017	2.826	2.915	γ_3	0.3134	0.0375	0.0019	0.2422	0.3883
μ_6	2.464	0.0201	0.0007	2.424	2.503	γ_4	0.2044	0.0304	0.0012	0.1458	0.2646
μ_7	2.824	0.0221	0.0010	2.781	2.867	γ_5	0.0084	0.0688	0.0022	-0.126	0.1401
μ_8	2.792	0.0217	0.0009	2.748	2.833	$\Psi_{\varepsilon 1}$	0.3653	0.0207	0.0011	0.3253	0.4051
μ_9	2.139	0.0138	0.0006	2.112	2.166	$\Psi_{\varepsilon 2}$	0.2655	0.0171	0.0011	0.2315	0.2999
μ_{10}	2.01	0.0107	0.0005	1.989	2.032	$\Psi_{\varepsilon 3}$	0.4504	0.0144	0.0002	0.423	0.4802
μ_{11}	2.096	0.0132	0.0006	2.069	2.122	$\Psi_{\varepsilon 4}$	0.2567	0.0132	0.0006	0.2317	0.2842
μ_{12}	2.05	0.0112	0.0003	2.028	2.073	$\Psi_{\varepsilon 5}$	0.2544	0.0126	0.0005	0.23	0.2798
μ_{13}	2.381	0.0193	0.0006	2.344	2.419	$\Psi_{\varepsilon 6}$	0.7	0.0222	0.0003	0.6572	0.7442
μ_{14}	2.283	0.0169	0.0005	2.25	2.316	$\Psi_{\varepsilon 7}$	0.7265	0.0237	0.0005	0.682	0.7751
μ_{15}	2.506	0.0170	0.0005	2.473	2.539	$\Psi_{\varepsilon 8}$	0.7665	0.0248	0.0005	0.7197	0.8157
μ_{16}	2.501	0.0195	0.0006	2.462	2.54	$\Psi_{\varepsilon 9}$	0.2238	0.0090	0.0004	0.2067	0.2419
μ_{17}	2.35	0.0168	0.0005	2.317	2.384	$\Psi_{\varepsilon 10}$	0.1123	0.0053	0.0002	0.1021	0.1235
μ_{18}	2.359	0.0180	0.0005	2.323	2.394	$\Psi_{\varepsilon 11}$	0.178	0.0082	0.0003	0.1616	0.1942
λ_{21}	1.024	0.0706	0.0052	0.8955	1.172	$\Psi_{\varepsilon 12}$	0.217	0.0071	0.0001	0.2034	0.2315
λ_{42}	2.18	0.0741	0.0070	2.039	2.325	$\Psi_{\varepsilon 13}$	0.5113	0.0183	0.0004	0.4765	0.548
λ_{52}	2.091	0.0716	0.0067	1.956	2.23	$\Psi_{\varepsilon 14}$	0.3587	0.0137	0.0003	0.3318	0.3868
λ_{62}	0.8302	0.0538	0.0029	0.7275	0.9359	$\Psi_{\varepsilon 15}$	0.4095	0.0145	0.0003	0.3816	0.4386
λ_{72}	1.277	0.0642	0.0044	1.154	1.406	$\Psi_{\varepsilon 16}$	0.4831	0.0185	0.0004	0.4478	0.5201
λ_{82}	1.076	0.0614	0.0038	0.9614	1.199	$\Psi_{\varepsilon 17}$	0.3411	0.0129	0.0002	0.3164	0.3673
$\lambda_{10,3}$	0.8841	0.0314	0.0023	0.8249	0.949	$\Psi_{\varepsilon 18}$	0.5071	0.0176	0.0003	0.4736	0.5423
$\lambda_{11,3}$	1.055	0.0398	0.0028	0.9829	1.136	ψ_{δ_1}	0.2794	0.0197	0.0012	0.2417	0.3203
$\lambda_{12,3}$	0.536	0.0302	0.0016	0.4775	0.5975	ψ_{δ_2}	0.1801	0.0152	0.0010	0.1505	0.2108
$\lambda_{14,4}$	0.9264	0.041	0.0022	0.8467	1.01	Φ_{11}	0.1748	0.0123	0.0011	0.1526	0.2002
$\lambda_{15,4}$	0.807	0.0398	0.0020	0.7316	0.8874	Φ_{12}	0.0355	0.0051	0.0002	0.0260	0.0461
$\lambda_{16,4}$	1.075	0.0462	0.0025	0.9853	1.168	Φ_{22}	0.2007	0.0125	0.0009	0.1759	0.2253

Çizelge 6.10 incelendiğinde, Model 2'ye ilişkin Yapısal Eşitlikler:

$$KHM = 0.420 \times \text{ÇHKM}$$
$$\text{İM} = 0.252 \times \text{ÇHKM} + 0.313 \times \text{KİM} + 0.204 \times KHM + 0.008 \times \left(\text{ÇHKM} \times \text{KİM}\right)$$

olduğu görülmektedir ayrıca Model 2'ye ilişkin $ppp - değeri = 0.4546$ olarak hesaplanmıştır. Model 2 sonuçlarına bakıldığında;

- ✓ Çalışma Hayatı ve Kazanç Memnuniyetinin Kamu Hizmetleri Memnuniyeti üzerinde pozitif yönde doğrudan etkisinin olduğu,
- ✓ Çalışma Hayatı ve Kazanç Memnuniyetinin İkametgâh Memnuniyeti üzerinde pozitif yönde doğrudan etkisinin olduğu,
- ✓ Kişisel İlişki Memnuniyetinin İkametgâh Memnuniyeti üzerinde pozitif yönde doğrudan etkisinin olduğu,
- ✓ Kamu Hizmetleri Memnuniyetinin İkametgâh Memnuniyeti üzerinde pozitif yönde doğrudan etkisinin olduğu,
- ✓ Çalışma Hayatı ve Kazanç Memnuniyeti ve Kişisel İlişki Memnuniyetinin birlikte etkileşimlerinin İkametgâh Memnuniyeti üzerinde pozitif yönde etkisinin olduğu

tespit edilmiştir.

Çizelge 6.11. Model 3 için Gösterge ve Belirlilik Katsayıları

Parametre	Tahmin Değeri	Standart Sapma	MC Hata	% 95 Güven Aralığı		Parametre	Tahmin Değeri	Standart Sapma	MC Hata	% 95 Güven Aralığı	
				Alt Sınır	Üst Sınır					Alt Sınır	Üst Sınır
μ_1	2.28	0.0184	0.0006	2.245	2.317	$\lambda_{17,4}$	0.9172	0.0400	0.0021	0.8415	0.997
μ_2	2.202	0.0168	0.0006	2.17	2.235	$\lambda_{18,4}$	0.8183	0.0420	0.0019	0.7399	0.9053
μ_3	2.273	0.0174	0.0008	2.239	2.307	γ_1	0.417	0.0376	0.0017	0.3462	0.4948
μ_4	2.886	0.0226	0.0017	2.841	2.929	γ_2	0.2535	0.0367	0.0014	0.1821	0.3252
μ_5	2.875	0.0223	0.0017	2.831	2.918	γ_3	0.350	0.0394	0.0020	0.2752	0.4288
μ_6	2.465	0.0199	0.0007	2.426	2.503	γ_4	0.1969	0.0302	0.0012	0.1388	0.2558
μ_7	2.825	0.0216	0.0009	2.783	2.868	γ_5	-0.132	0.0339	0.0015	-0.198	-0.0649
μ_8	2.792	0.0217	0.0009	2.749	2.835	$\Psi_{\varepsilon 1}$	0.3617	0.0205	0.0011	0.3226	0.4021
μ_9	2.139	0.0142	0.0006	2.111	2.168	$\Psi_{\varepsilon 2}$	0.268	0.0168	0.0010	0.2348	0.3012
μ_{10}	2.01	0.0112	0.0005	1.989	2.032	$\Psi_{\varepsilon 3}$	0.4499	0.0144	0.0002	0.4228	0.4798
μ_{11}	2.096	0.013	0.0006	2.069	2.123	$\Psi_{\varepsilon 4}$	0.2569	0.0132	0.0006	0.231	0.2837
μ_{12}	2.05	0.0114	0.0003	2.028	2.073	$\Psi_{\varepsilon 5}$	0.2553	0.0127	0.0006	0.2311	0.2811
μ_{13}	2.381	0.0194	0.0006	2.344	2.42	$\Psi_{\varepsilon 6}$	0.701	0.0222	0.0003	0.6571	0.7441
μ_{14}	2.283	0.0169	0.0005	2.25	2.317	$\Psi_{\varepsilon 7}$	0.7262	0.0237	0.0005	0.6813	0.774
μ_{15}	2.507	0.0170	0.0005	2.473	2.54	$\Psi_{\varepsilon 8}$	0.7662	0.0248	0.0005	0.7192	0.8158
μ_{16}	2.501	0.0196	0.0006	2.462	2.541	$\Psi_{\varepsilon 9}$	0.2241	0.0089	0.0003	0.207	0.242
μ_{17}	2.35	0.0168	0.0006	2.317	2.384	$\Psi_{\varepsilon 10}$	0.1109	0.0053	0.0002	0.1007	0.1216
μ_{18}	2.36	0.0181	0.0006	2.323	2.395	$\Psi_{\varepsilon 11}$	0.1787	0.0080	0.0003	0.1635	0.1943
λ_{21}	1.036	0.0699	0.0051	0.9098	1.181	$\Psi_{\varepsilon 12}$	0.2171	0.0071	0.0001	0.2033	0.2313
λ_{42}	2.159	0.0833	0.0082	2.013	2.328	$\Psi_{\varepsilon 13}$	0.5113	0.0183	0.0004	0.4764	0.5479
λ_{52}	2.07	0.0793	0.0079	1.928	2.238	$\Psi_{\varepsilon 14}$	0.3591	0.0138	0.0003	0.3323	0.3873
λ_{62}	0.822	0.0540	0.0030	0.7187	0.9265	$\Psi_{\varepsilon 15}$	0.4093	0.0145	0.0003	0.3814	0.4385
λ_{72}	1.266	0.0649	0.0047	1.144	1.4	$\Psi_{\varepsilon 16}$	0.483	0.0185	0.0004	0.4478	0.5201
λ_{82}	1.066	0.0611	0.0039	0.9507	1.186	$\Psi_{\varepsilon 17}$	0.3409	0.0129	0.0002	0.3161	0.3672
$\lambda_{10,3}$	0.8912	0.0317	0.0023	0.8311	0.9538	$\Psi_{\varepsilon 18}$	0.5072	0.0176	0.0003	0.4737	0.5423
$\lambda_{11,3}$	1.057	0.0373	0.0026	0.9877	1.13	ψ_{δ_1}	0.2793	0.0196	0.0012	0.2422	0.3204
$\lambda_{12,3}$	0.5373	0.0301	0.0015	0.4787	0.5971	ψ_{δ_2}	0.1758	0.0147	0.0009	0.1473	0.206
$\lambda_{14,4}$	0.9258	0.0409	0.0022	0.8465	1.01	Φ_{11}	0.1782	0.0136	0.0013	0.1528	0.2049
$\lambda_{15,4}$	0.8075	0.039	0.0020	0.7323	0.8883	Φ_{12}	0.0356	0.0052	0.0002	0.0256	0.0463
$\lambda_{16,4}$	1.075	0.0462	0.0025	0.9857	1.168	Φ_{22}	0.1993	0.0121	0.0009	0.1765	0.2235

Çizelge 6.11 incelendiğinde, Model 3'e ilişkin Yapısal Eşitlikler:

$$KHM = 0.417 \times \text{ÇHKM}$$

$$\text{İM} = 0.253 \times \text{ÇHKM} + 0.350 \times \text{KİM} + 0.196 \times KHM - 0.132 \times \left(\text{KİM}\right)^2$$

olduğu görülmektedir ayrıca Model 3'e ilişkin $ppp - değeri = 0.4565$ olarak hesaplanmıştır. Model 3 sonuçlarına bakıldığında;

- ✓ Çalışma Hayatı ve Kazanç Memnuniyetinin Kamu Hizmetleri Memnuniyeti üzerinde pozitif yönde doğrudan etkisinin olduğu,
- ✓ Çalışma Hayatı ve Kazanç Memnuniyetinin İkametgâh Memnuniyeti üzerinde pozitif yönde doğrudan etkisinin olduğu,
- ✓ Kişisel İlişki Memnuniyetinin İkametgâh Memnuniyeti üzerinde pozitif yönde doğrudan etkisinin ve negatif yönde karesel etkisinin olduğu,
- ✓ Kamu Hizmetleri Memnuniyetinin İkametgâh Memnuniyeti üzerinde pozitif yönde doğrudan etkisinin olduğu,

tespit edilmiştir.

Çizelge 6.12. Model 4 için Gösterge ve Belirlilik Katsayıları

Parametre	Tahmin Değeri	Standart Sapma	MC Hata	% 95 Güven Aralığı		Parametre	Tahmin Değeri	Standart Sapma	MC Hata	% 95 Güven Aralığı	
				Alt Sınır	Üst Sınır					Alt Sınır	Üst Sınır
μ_1	2.271	0.0221	0.0010	2.227	2.315	$\lambda_{17,4}$	0.9169	0.04	0.0021	0.8409	0.9966
μ_2	2.194	0.0211	0.0010	2.153	2.236	$\lambda_{18,4}$	0.8185	0.0420	0.0019	0.7399	0.9058
μ_3	2.272	0.0174	0.0009	2.237	2.306	γ_1	0.4175	0.0379	0.0019	0.3447	0.4949
μ_4	2.883	0.0231	0.0018	2.835	2.925	γ_2	0.2615	0.0381	0.0013	0.1876	0.3354
μ_5	2.873	0.022	0.0018	2.824	2.914	γ_3	0.3141	0.0379	0.0018	0.2415	0.3906
μ_6	2.463	0.0201	0.0007	2.424	2.503	γ_4	0.2043	0.0304	0.0012	0.1457	0.2647
μ_7	2.824	0.0220	0.0011	2.78	2.866	γ_5	-0.101	0.0799	0.0042	-0.263	0.0487
μ_8	2.791	0.021	0.0009	2.747	2.833	$\Psi_{\varepsilon 1}$	0.368	0.0206	0.0011	0.3286	0.4072
μ_9	2.139	0.0139	0.0006	2.111	2.166	$\Psi_{\varepsilon 2}$	0.2629	0.0172	0.0011	0.229	0.2966
μ_{10}	2.01	0.0109	0.0006	1.989	2.031	$\Psi_{\varepsilon 3}$	0.4502	0.0144	0.0002	0.4229	0.4795
μ_{11}	2.096	0.0133	0.0007	2.07	2.122	$\Psi_{\varepsilon 4}$	0.2567	0.0133	0.0006	0.2311	0.283
μ_{12}	2.05	0.0112	0.0003	2.028	2.073	$\Psi_{\varepsilon 5}$	0.2544	0.0128	0.0006	0.2292	0.2794
μ_{13}	2.38	0.0195	0.0006	2.343	2.419	$\Psi_{\varepsilon 6}$	0.7002	0.0222	0.0003	0.6571	0.7439
μ_{14}	2.283	0.0170	0.0005	2.249	2.316	$\Psi_{\varepsilon 7}$	0.7268	0.0238	0.0005	0.6815	0.7748
μ_{15}	2.506	0.0171	0.0005	2.473	2.539	$\Psi_{\varepsilon 8}$	0.7666	0.0248	0.0004	0.7196	0.8173
μ_{16}	2.5	0.0196	0.0006	2.462	2.54	$\Psi_{\varepsilon 9}$	0.224	0.0090	0.0004	0.2068	0.2421
μ_{17}	2.35	0.0169	0.0006	2.317	2.384	$\Psi_{\varepsilon 10}$	0.1122	0.0053	0.0002	0.1018	0.123
μ_{18}	2.359	0.0181	0.0005	2.323	2.394	$\Psi_{\varepsilon 11}$	0.1779	0.0079	0.0003	0.1624	0.1933
λ_{21}	1.013	0.0696	0.0050	0.8858	1.156	$\Psi_{\varepsilon 12}$	0.2169	0.0071	0.0001	0.2034	0.2311
λ_{42}	2.16	0.082	0.0081	1.99	2.321	$\Psi_{\varepsilon 13}$	0.5113	0.0183	0.0004	0.4765	0.5481
λ_{52}	2.072	0.0791	0.0079	1.903	2.229	$\Psi_{\varepsilon 14}$	0.3588	0.0138	0.0003	0.3319	0.3869
λ_{62}	0.8221	0.0547	0.0033	0.7147	0.9266	$\Psi_{\varepsilon 15}$	0.4095	0.0145	0.0003	0.3815	0.4387
λ_{72}	1.265	0.0660	0.0049	1.136	1.396	$\Psi_{\varepsilon 16}$	0.4831	0.0185	0.0004	0.4478	0.5202
λ_{82}	1.066	0.0622	0.0042	0.9434	1.187	$\Psi_{\varepsilon 17}$	0.3411	0.0129	0.0002	0.3163	0.3672
$\lambda_{10,3}$	0.8866	0.0340	0.0027	0.8182	0.951	$\Psi_{\varepsilon 18}$	0.507	0.0176	0.0003	0.4736	0.5421
$\lambda_{11,3}$	1.058	0.0410	0.0031	0.9816	1.141	ψ_{δ_1}	0.2793	0.0197	0.0012	0.2416	0.3204
$\lambda_{12,3}$	0.538	0.0314	0.0018	0.4769	0.6017	ψ_{δ_2}	0.182	0.0153	0.0010	0.1525	0.2133
$\lambda_{14,4}$	0.9263	0.0409	0.0022	0.8466	1.01	Φ_{11}	0.1781	0.0138	0.0013	0.1533	0.2097
$\lambda_{15,4}$	0.8069	0.0398	0.0020	0.732	0.887	Φ_{12}	0.0359	0.0052	0.0002	0.0260	0.0467
$\lambda_{16,4}$	1.075	0.0462	0.0025	0.9852	1.168	Φ_{22}	0.1998	0.0133	0.0010	0.1746	0.2278

Çizelge 6.12 incelendiğinde, Model 4'e ilişkin Yapısal Eşitlikler:

$$KHM = 0.417 \times \text{ÇHKM}$$
$$\text{İM} = 0.261 \times \text{ÇHKM} + 0.314 \times \text{KİM} + 0.204 \times KHM - 0.101 \times (\text{ÇHKM})^2$$

olduğu görülmektedir ayrıca Model 4'e ilişkin $ppp - değeri = 0.4547$ olarak hesaplanmıştır. Model 4 sonuçlarına bakıldığında;

- ✓ Çalışma Hayatı ve Kazanç Memnuniyetinin Kamu Hizmetleri Memnuniyeti üzerinde pozitif yönde doğrudan etkisinin olduğu,
- ✓ Çalışma Hayatı ve Kazanç Memnuniyetinin İkametgâh Memnuniyeti üzerinde pozitif yönde doğrudan etkisinin ve negatif yönde karesel etkisinin olduğu,
- ✓ Kişisel İlişki Memnuniyetinin İkametgâh Memnuniyeti üzerinde pozitif yönde doğrudan etkisinin olduğu,
- ✓ Kamu Hizmetleri Memnuniyetinin İkametgâh Memnuniyeti üzerinde pozitif yönde doğrudan etkisinin olduğu,

tespit edilmiştir.

Çizelge 6.13. Model 5 için Gösterge ve Belirlilik Katsayıları

Parametre	Tahmin Değeri	Standart Sapma	MC Hata	% 95 Güven Aralığı		Parametre	Tahmin Değeri	Standart Sapma	MC Hata	% 95 Güven Aralığı	
				Alt Sınır	Üst Sınır					Alt Sınır	Üst Sınır
μ_1	2.252	0.016	0.0004	2.219	2.284	$\lambda_{17,4}$	0.913	0.038	0.0016	0.840	0.992
μ_2	2.175	0.015	0.0004	2.145	2.205	$\lambda_{18,4}$	0.817	0.041	0.0016	0.737	0.8987
μ_3	2.272	0.016	0.0005	2.239	2.306	γ_1	0.419	0.037	0.0013	0.348	0.4968
μ_4	2.883	0.022	0.0011	2.84	2.926	γ_2	0.252	0.035	0.0010	0.184	0.3215
μ_5	2.873	0.021	0.0010	2.832	2.915	γ_3	0.314	0.038	0.0016	0.239	0.3895
μ_6	2.463	0.019	0.0004	2.424	2.502	γ_4	0.204	0.030	0.0011	0.147	0.2671
μ_7	2.824	0.021	0.0006	2.781	2.867	$\Psi_{\varepsilon 1}$	0.365	0.020	0.0009	0.326	0.4042
μ_8	2.791	0.021	0.0005	2.75	2.834	$\Psi_{\varepsilon 2}$	0.266	0.016	0.0008	0.234	0.299
μ_9	2.139	0.014	0.0004	2.111	2.167	$\Psi_{\varepsilon 3}$	0.449	0.014	0.0002	0.422	0.4795
μ_{10}	2.01	0.011	0.0004	1.988	2.032	$\Psi_{\varepsilon 4}$	0.257	0.013	0.0003	0.230	0.285
μ_{11}	2.096	0.0138	0.0005	2.068	2.123	$\Psi_{\varepsilon 5}$	0.254	0.013	0.0003	0.229	0.2806
μ_{12}	2.05	0.011	0.0003	2.027	2.073	$\Psi_{\varepsilon 6}$	0.700	0.021	0.0002	0.658	0.7444
μ_{13}	2.38	0.019	0.0005	2.341	2.418	$\Psi_{\varepsilon 7}$	0.727	0.023	0.0003	0.682	0.7746
μ_{14}	2.281	0.017	0.0004	2.248	2.315	$\Psi_{\varepsilon 8}$	0.766	0.024	0.0003	0.72	0.8163
μ_{15}	2.505	0.016	0.0004	2.472	2.539	$\Psi_{\varepsilon 9}$	0.224	0.008	0.0002	0.207	0.2427
μ_{16}	2.499	0.019	0.0006	2.46	2.538	$\Psi_{\varepsilon 10}$	0.112	0.005	0.0001	0.101	0.1226
μ_{17}	2.349	0.0169	0.0005	2.314	2.381	$\Psi_{\varepsilon 11}$	0.177	0.008	0.0002	0.161	0.1941
μ_{18}	2.358	0.018	0.0005	2.323	2.395	$\Psi_{\varepsilon 12}$	0.216	0.007	0.0001	0.203	0.2313
λ_{21}	1.026	0.067	0.0038	0.904	1.164	$\Psi_{\varepsilon 13}$	0.511	0.018	0.0004	0.476	0.5504
λ_{42}	2.164	0.075	0.0050	2.014	2.311	$\Psi_{\varepsilon 14}$	0.358	0.013	0.0002	0.332	0.3862
λ_{52}	2.078	0.072	0.0048	1.937	2.22	$\Psi_{\varepsilon 15}$	0.409	0.014	0.0002	0.381	0.4395
λ_{62}	0.826	0.051	0.0017	0.724	0.928	$\Psi_{\varepsilon 16}$	0.483	0.018	0.0003	0.448	0.5207
λ_{72}	1.265	0.0628	0.0030	1.145	1.394	$\Psi_{\varepsilon 17}$	0.341	0.013	0.0002	0.315	0.368
λ_{82}	1.071	0.059	0.0025	0.954	1.19	$\Psi_{\varepsilon 18}$	0.506	0.017	0.0002	0.473	0.5415
$\lambda_{10,3}$	0.8912	0.032	0.0015	0.828	0.956	ψ_{δ_1}	0.280	0.019	0.0009	0.244	0.3194
$\lambda_{11,3}$	1.063	0.04	0.0019	0.987	1.144	ψ_{δ_2}	0.179	0.014	0.0007	0.151	0.2083
$\lambda_{12,3}$	0.540	0.030	0.0009	0.483	0.602	Φ_{11}	0.177	0.012	0.0008	0.154	0.2037
$\lambda_{14,4}$	0.924	0.039	0.0016	0.848	1.005	Φ_{12}	0.035	0.005	0.0001	0.025	0.0455
$\lambda_{15,4}$	0.804	0.038	0.0015	0.731	0.882	Φ_{22}	0.035	0.005	0.0005	0.025	0.0455
$\lambda_{16,4}$	1.072	0.0467	0.0021	0.982	1.166						

Çizelge 6.13 incelendiğinde, Model 5'e ilişkin Yapısal Eşitlikler:

$$KHM = 0.419 \times ÇHKM$$
$$İM = 0.252 \times ÇHKM + 0.314 \times KİM + 0.204 \times KHM$$

olduğu görülmektedir ayrıca Model 5'e ilişkin $ppp - değeri = 0.4545$ olarak hesaplanmıştır. Model 5 sonuçlarına bakıldığında;

- ✓ Çalışma Hayatı ve Kazanç Memnuniyetinin Kamu Hizmetleri Memnuniyeti üzerinde pozitif yönde doğrudan etkisinin olduğu,
- ✓ Çalışma Hayatı ve Kazanç Memnuniyetinin İkametgâh Memnuniyeti üzerinde pozitif yönde doğrudan etkisinin olduğu,
- ✓ Kişisel İlişki Memnuniyetinin İkametgâh Memnuniyeti üzerinde pozitif yönde doğrudan etkisinin olduğu,
- ✓ Kamu Hizmetleri Memnuniyetinin İkametgâh Memnuniyeti üzerinde pozitif yönde doğrudan etkisinin olduğu,

tespit edilmiştir.

Çizelge 6.14. Test edilen 5 Modele İlişkin BIC, DIC, AIC ve *ppp* Değerleri

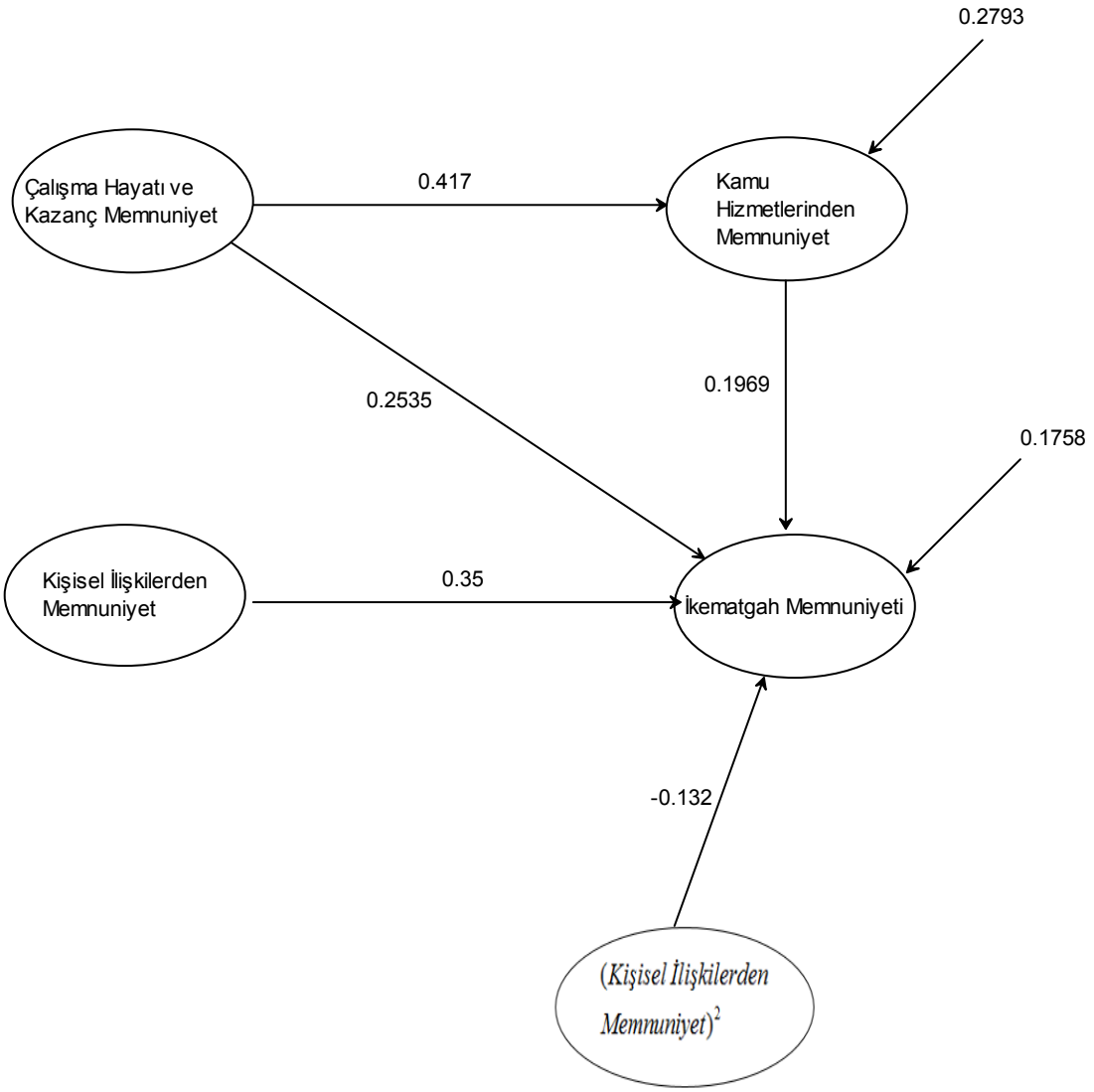
MODEL	DIC	BIC	AIC	*ppp*-Değeri
Model 1	74691.2	62986.670	62161.7	0.4555
Model 2	74715.4	62948.827	62149.5	0.4546
Model 3	74686.8	62941.327	62142.8	0.4565
Model 4	74710.1	62959.827	62160.5	0.4547
Model 5	74722.8	62944.205	62158.2	0.4545

Test edilen 5 Modele ilişkin sonuçlar incelendiğinde tüm modellere ilişkin *ppp* değerleri 0.5 değeri civarında olduğu için tüm modellerin iyi uyum gösterdiği söylenebilir. En düşük DIC, BIC ve AIC değerlerine sahip modelin Model 3 olduğu görülmektedir; bu sonuçlara göre test edilen modellerden en iyi Model 3 olarak belirlenmiştir.

Çizelge 6.15. Model 3'e ilişkin Yapısal Eşitlikler ve Tahmin Değerleri

Yapısal İlişkiler	Tahmin Değeri	P-Değeri
ÇHKM ➔ *KHM*	0.417	0.000
ÇHKM ➔ *İM*	0.253	0.000
KİM ➔ *İM*	0.350	0.000
KHM ➔ *İM*	0.196	0.000
$(KİM)^2$ ➔ *İM*	-0.132	0.000

Model 3'e ilişkin yapısal eşitlik tahmin değerleri Çizelge 6.15'te, gizil değişkenler arasındaki yapısal modele ilişkin path diyagramı ise Şekil 6.3'te verilmiştir.



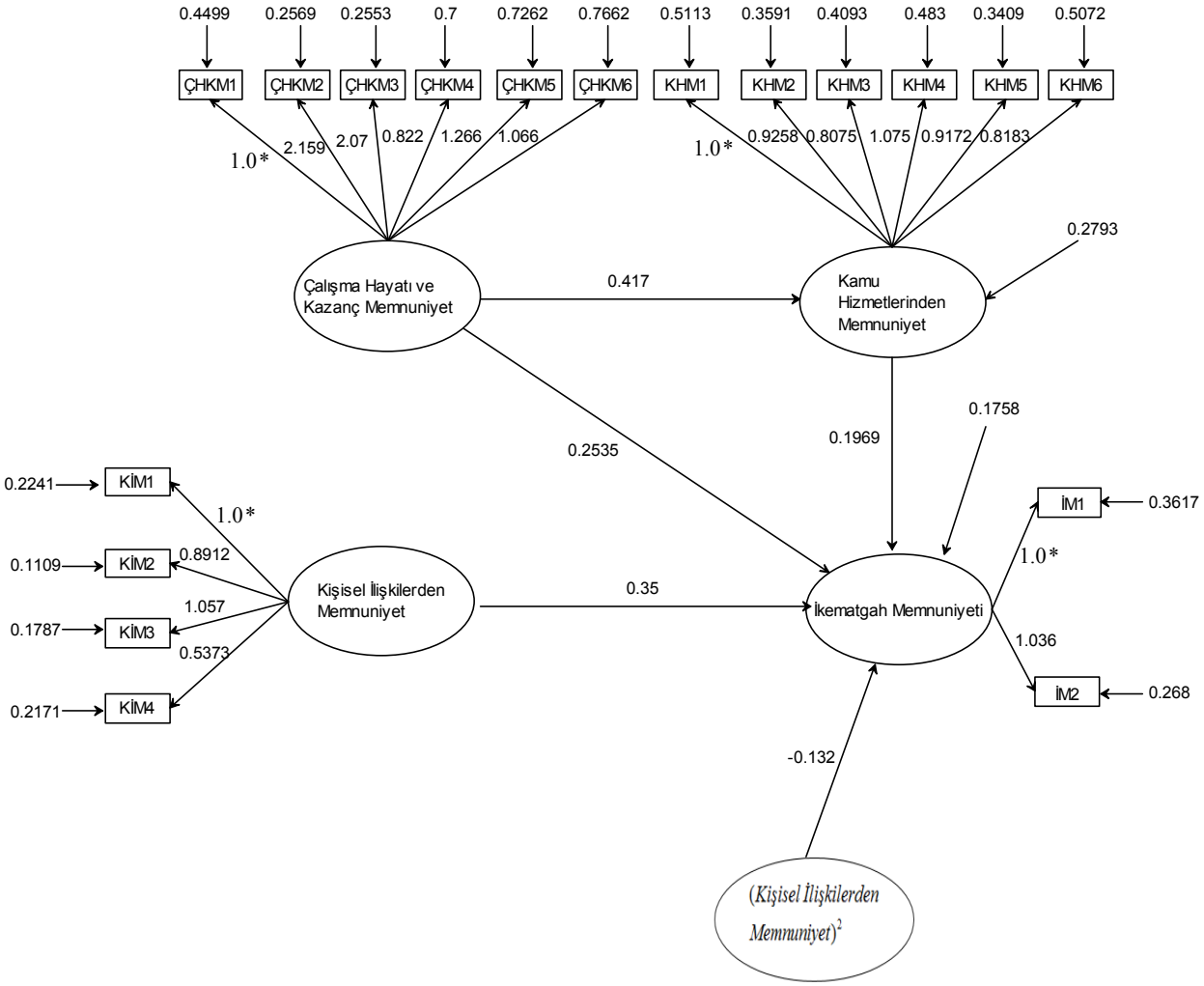
Şekil 6.3. Model 3'e ilişkin gizil değişkenler arasındaki yapısal model

Şekil 6.3 incelendiğinde Çalışma Hayatı ve Kazanç Memnuniyetinin, Kamu Hizmetlerinden Memnuniyet gizil değişkeni üzerinde olumlu yönde doğrusal etkisinin olduğu görülmektedir. Kişilerin Çalışma Hayatı ve Kazanç Memnuniyet düzeylerindeki artış Kamu Hizmetleri Memnuniyet düzeylerinde de artışa neden olmaktadır.

Çalışma Hayatı ve Kazançtan Memnuniyet, Kamu Hizmetlerinden Memnuniyet, Kişisel İlişkilerden Memnuniyet gizil değişkenlerinin İkametgâh Memnuniyeti üzerinde olumlu yönde doğrusal etkisinin olduğu görülmektedir. Benzer şekilde bu gizil değişkenlerin memnuniyet düzeylerindeki artış İkametgâh Memnuniyeti düzeylerinde de artışa neden olmaktadır.

Kişisel İlişkilerden Memnuniyet gizil değişkeninin İkametgâh Memnuniyeti üzerinde karesel etkisinin negatif yönde olduğu görülmektedir.

Model 3'e ilişkin tüm katsayılar ve path diyagramı Şekil 6.4'te verilmiştir.



Şekil 6.4. Model 3'e ilişkin katsayılar ve path diyagramı gösterimi

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

YEM ölçülen ve gizil değişkenler arasındaki "nedensel" ilişkileri sınamada kullanılan kapsamlı bir istatistiksel yaklaşımdır. YEM'in geleneksel yöntemlere olan üstünlükleri nedeniyle, son yıllarda model sınamada ve veri analizlerinde bu yöntemin kullanılmasına olan ilginin arttığı gözlenmektedir.

Yaklaşık 40 yıl önce başta Jöreskog (1973) olmak üzere birçok araştırmacı tarafından sosyal bilim alanına uyarlanan ve Bentler (1980) tarafından psikoloji alanında ayrıntılı olarak betimlenen gizil değişken analizi çok sayıda gözlenen ya da ölçülen değişken tarafından temsil edilen "gizil" yapıları içeren çok değişkenli istatistik analizlerini tanımlamak için kullanılmıştır.

YEM analizinde gözlenen kovaryans matrisi ile önerilen kovaryans yapısının birbiriyle uyumunu dikkate almaktadır. YEM analizinde ve gözlenen veri seti normal dağılıma uygunluk gösterdiğinde ve büyük örneklem hacimlerinde klasik yöntemler ile iyi sonuçlar elde edilir.

Ancak klasik yöntemler birçok karmaşık durumlarda ciddi zorluklarla karşı karşıya kalır. Örneğin kovaryans yapısının hesaplanması zor olduğu durumlarda veya veri yapısının kompleks olduğu durumlarda klasik yöntemler iyi sonuçlar vermeyebilir.
YEM analizinde Bayes yönteminin kullanılması 2000'li yıllarla birlikte, başta sağlık ve sosyo-psikolojik alanlarında olmak üzere birçok araştırma için yararlı olmuştur. Bayes yönteminde ham gözlemlerin yerine örneklemin kovaryans matrisinin kullanılması birtakım avantajlar sağlamaktadır.

Bu avantajlarından dolayı Bayes yöntemi YEM analizi için oldukça yaygın olarak kullanılan bir yöntem haline gelmiştir.

YEM ile klasik yaklaşımların çoğunun önemli bir ortak özelliği hepsinin doğrusal modeller temelli olmasıdır. Bu nedenle YEM kullanıldığında sıklıkla başvurulan varsayım; gözlenen ve gizil değişkenler arasındaki ilişkilerin doğrusal olduğu yönündedir.

Son zamanlarda, gözlenen ve gizil değişkenler arasındaki doğrusal olmayan ilişkiler ve bazı karmaşık durumlar için doğru modeller kurulmasının daha çok önemli olduğu kabul edilmektedir. Böylece YEM'de doğrusal olmayan ilişkilerin modellenmesi gittikçe popülerlik kazanmaktadır.

Bu çalışmada, TÜİK 2013 yılı nüfus Yaşam Memnuniyeti-2013 araştırması verileri temel alınarak uygulama için örneklem seçilmiştir. Türkiye'deki tüm şehirler ayrı

birer tabaka olarak düşünülerek orantılı olarak 81 ilden rasgele 2124 denek seçilmiş ve bu seçilen bu kişiler uygulamanın veri setini oluşturmaktadır. YMA anketindeki sorulardan 4 gizil değişkene (İkametgâh Memnuniyeti, Çalışma Hayatı ve Kazançtan Memnuniyeti, Kişisel İlişkilerden Memnuniyet, Kamu Hizmetlerinden Memnuniyet) arasındaki ilişki Doğrusal Olmayan Bayesci YEM analizi ile modellenmeye çalışılmıştır.

İkametgâh memnuniyeti; coğrafya, sosyoloji, psikoloji ve planlama gibi disiplinler arasında uzun zamandır başlıca araştırma konusu olmuştur. Bu konunun gözde oluşu iki nedene dayanmaktadır: Birincisi, ikametgâh memnuniyetinin bireyin genel yaşam kalitesinin önemli bir unsuru olarak kabul edilmesidir. İkincisi, bireylerin konut ve oturdukları semte ilişkin kişisel değerlendirmelerinin, onların ikametgâh çevresine bir yanıt verme ve kamu faaliyetlerinin ana taleplerini şekillendirme yolu olmasıdır. Göçün davranışsal kavramsallaştırması içinde düşük düzeyli ikametgâh memnuniyeti, konut ve hareketlilik davranışında öncelikli kabul edilmektedir. Bireyler halen oturdukları konut ve semtten memnuniyetsizlik duyuyorlarsa; başka bir yere yerleşme konusunu düşünebilirler ve fiili olarak başka bir yere taşınabilirler. Bu nedenle, ikametgâh memnuniyetine yön veren etmenler hakkındaki bilgi, hane halkının hareketlilik karar sürecini daha iyi kavramak üzere son derece önemlidir. Birinin ikametgâh konumundan memnuniyeti, o kişinin halen oturduğu ve oturmak istediği yerler arasındaki yüksek düzeyli bir uyuma, ihtiyaç ve özlemlere göre bu yerden bir şikâyetin olmayışına işaret eder. Diğer taraftan halen oturulan konut veya semt ile gerekli koşullar arasındaki uyumsuzluk ise, memnuniyetsizliği başlatabilir. Memnuniyetsizlik yaklaşımı literatürü, halen oturulan ikametgâh çevresinin, hane halkının ürettiği baskı veya memnuniyetsizlikle etkileşim halinde olduğu ve bu memnuniyetsizliğin bazı eşiklere ulaştığında hane halkının, ikametgâhla ilgili harekete yol açabilecek bir arama sürecine başladığı üzerinde durmaktadır (Özgür, 2009).

İkametgâh Memnuniyetinin bahsedilen önemliliklerinden dolayı tezin uygulama bölümünde İkametgâh Memnuniyetini etkilen gizil değişkenlerin Bayesci Doğrusal Olmayan Yapısal Eşitlik Modeli analiz yöntemi ile belirlenmesi amaçlanmıştır

Uygulama bölümünde araştırma iki aşamada gerçekleştirilmiştir. Birinci aşamada ikametgâh memnuniyeti ile bunları etkileyebilecek gizil kavramların ölçülmesini sağlayacak olan ölçme modelinin DFA kullanılarak oluşturulmasına çalışılmıştır.

Çalışmanın ikinci aşamasında gizil kavramlar arasındaki ilişkiler belirlenmiş ve YMA 2013 anketine katılan fertlerden seçilen 2124 kişinin ikametgâh memnuniyeti için

Bayesci doğrusal olmayan YEM yöntemiyle modelleme gerçekleştirilmiştir. Model karşılaştırma testleri ile Eşitlik 6.3-6.7'de verilen 5 model kıyaslanmıştır

Test edilen 5 Modele ilişkin sonuçlar incelendiğinde tüm modellere ilişkin *ppp* değerleri 0.5 değeri civarında olduğu için tüm modellerin iyi uyum gösterdiği tespit edilmiştir. En düşük DIC, BIC ve AIC değerlerine sahip modelin Model 3 olduğu görülmektedir; bu sonuçlara göre test edilen modellerden en iyi Model 3 olarak belirlenmiştir. Model 3,

$$\begin{aligned} KHM &= 0.417 \times ÇHKM \\ İM &= 0.2535 \times ÇHKM + 0.350 \times KİM + 0.1969 \times KHM - 0.132 \times \left(KİM\right)^2 \end{aligned} \tag{7.1}$$

olarak hesaplanmıştır.

Analiz sonuçlarına göre; Çalışma Hayatı ve Kazanç Memnuniyeti, Kamu Hizmetlerinden Memnuniyet, Kişisel İlişkilerden Memnuniyet gizil değişkenlerinin ve kişisel ilişkilerden memnuniyet değişkeninin karesel etkisinin İkametgâh Memnuniyeti üzerindeki etkileri anlamlı olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca ikinci içsel gizil değişken olan Kamu Hizmetlerinden Memnuniyet değişkeni üzerinde Çalışma Hayatı ve Kazanç Memnuniyeti dışsal gizil değişkeni etkisinin de anlamlı olduğu tespit edilmiştir.

Çalışma Hayatı ve Kazanç Memnuniyeti, Kamu Hizmetlerinden Memnuniyet, Kişisel İlişkilerden Memnuniyet gizil değişkenleri İkametgâh Memnuniyetini olumlu (pozitif) yönde etkilemektedir. Yani bu dışsal değişkenlerdeki memnuniyet düzeyi İkametgâh düzeyini olumlu yönde etkilemektedir. İkametgâh Memnuniyeti üzerinde en fazla etkiye sahip olan değişken Kişisel İlişkilerden Memnuniyet değişkeni, en az etkiye sahip değişken ise Kamu Hizmetlerinden Memnuniyet değişkenidir. İkametgâh Memnuniyeti üzerinde Kişisel ilişkilerden Memnuniyet değişkeninin karesel etkisinin olumsuz (negatif) yönde olduğu tespit edilmiştir. Elde edilen Modeli dikkate alınarak diğer değişkenlerdeki düzenlemelerle kişilerin İkametgâh Memnuniyet Düzeyi yüksek seviyelere çıkarılabilir.

KAYNAKLAR

Altındağ, İ., Genç, A., 2015, Bayesian Nonlinear Structural Equation Modeling, *Journal of Selçuk University Natural and Applied Science*, Online ISSN:2147-3781, www.josunas.org. , 4(1): 174-192.

Altuntaş, M., 2011, İstatastiksel Model Seçiminde Bayesci Yaklasımlar ve Bayes Faktörü, Yüksek Lisan Tezi, *Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Sinop.

Anderson, T. W., 1984, An Introduction to Multivariate Statistical Analysis. Second Edition.*„John Wiley &Sons*, New York

Arminger, G. and Muthén, B., 1998, A Bayesian approach to nonlinear latent variable models using the Gibbs sampler and the Metropolis-Hastings algorithm, *Psychometrika*, 63(3), 271-300.

Avcı, E., 2012, Bayesci Sağkalım Analizi Ve Meme Kanseri Verileri Üzerine Bir Uygulama, Doktora Tezi, *Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, İstanbul.

Avşar, F., 2007, Doğrulayıcı Faktör Analizi ve Beck Depresyon Envanteri Üzerine Bir Uygulama, Yüksek Lisans Tezi*, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimler Enstitüsü*, İstanbul.

Bentler, P.M., 1980, Multivariate analysis with latent variables: causal modeling, *Annual Review of Psychology*, 31, 419–456.

Bentler, P. M., 1992, Eqs Structural Equation Program Manual. *Los Angeles: BMDP Statistical Software*.

Berger, J. O., and Sellke, T., 1987, Testing a point null hypothesis: irreconcilability of p values and evidence, *Journal of American Statistical Association*, 82, 112–122.

Berger, J., O., and Delampady, M., 1987, Testing a point null hypotheses, Statistical Science, 3, 317–335.

Bielby, W. T. and Hauser, R. M., 1977, Structural Equation Models, *Annual Review of Sociology*. Vol. 3, ss. 137-161.

Bolat, B. A. 2009, Firma Performansını Etkileyen Faktörlerin Yapısal Eşitlik Modeli ile İncelenmesi, Doktora Tezi*, İstanbul Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü*, İstanbul.

Bollen, K. A., 1989, Structural Equations with Latent Variables, Wiley, New York, 514.

Bollen, K. A. and Paxton, E., 1998, Two-stage least squares estimation of interaction effects. In R.E. Schumacker & G.A. Marcoulides (Eds.), Interaction and nonlinear effects in structural equation models Mahwah, *NJ: Lawrence Erlbaum Associates*.. 125-151.

Box, G. E. P. and Tiao, C. G., 1973, Bayesian Inference in Statistical Analysis, *Addison-Wesley*, London.

Brown, T. A., 2006, Confirmatory Factor Analysis for Applied Research, *The Guilford Press*, New York.

Browne, M. W., 1984, Asymptotically Distribution-free Methods in the Analysis of Covariance Structures, *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, C. 37, 1984, s. 62-83.

Busemeyer, J. R. and Jones, L. E., 1983, Analysis of multiplicative combination rules when the causal variables axe measured with error. *Psychological Bulletin*, 93, 549-562.

Bagozzi, R. E., Baumgartner, H. and Yi, Y., 1992. State versus action orientation and the theory of reasoned action: An application to coupon usage, *Journal of Consumer Research*, 18, 505-517.

Cai J. H., Song, X. Y. and Lee, S. Y., 2008, Bayesian analysis of nonlinear structural equation models with mixes continuous, ordered and unordered categorical, and nonignorable missing data, *Statistics and Its Interface*, Vol. 1, 99–114.

Cengiz, M. A., Terzi, E., Şenel, T. ve Murat, N., 2012, Lojistik Regresyonda Parametre Tahmininde Bayesci Bir Yaklaşım, *AKÜ FEBİD*, 12, 011302, 15-22.

Cham H., West S. G., Ma Y. and Aiken L. S, 2012, Estimating latent variable interactions with nonnormal observed data: a comparison of four approaches, *Multivariate Behavioral. Res*earh, 47, 840–876.

Congdon, P., 2003, Applied Bayesian Modelling, *John Wiley & Sons*, England.

Çelik, H. E., 2009, Yapısal Eşitlik Modellemesi ve Bir Uygulama: Genişletilmiş Online Alışveriş Kabul Modeli, Doktora Tezi, *Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Eskişehir.

Demirhan, H., 2004, Logaritmik Doğrusal Modellerde Parametrelerin ve Beklenen Göze Sıklıklarının Bayesci Kestirimi, Yüksek Lisans Tezi, *Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara, 83s.

Doğan, M., 2013, Doğrulayıcı Faktör Analizinde Örneklem Hacmi, Tahmin Yöntemleri ve Normalliğin Uyum Ölçütlerine Etkisi, Yüksek Lisans Tezi, *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Eskişehir, 1-3.

Duncan, O. D., 1975, Introduction to Structural Equation Models. New York, *Academic Pres.*

Dunson, D. B., 2000, Bayesian latent variable models for clustered mixed outcomes, *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, 62, 355-366.

Galster, G., 1987, Identifying the correlates of dwelling satisfaction: An empirical critique, *Environment and Behavior* 19, (5), 539-568.

Galster, G. C., Hesser, G. W., 1981, Residential satisfaction: Compositional and contextual correlates, *Environment and Behavior* 13, (6), 735-758.

Gelman, A., Meng, X. L. and Stern, H., 1996, Posterior predictive assessment of model fitness via realized discrepancies, *Statistica Sinica*, 6, 733–760.

Gelman, A. and Meng, L, 1998, Simulating normalizing constant: from importance sampling to bridge sampling to path sampling. *Statistical Science*, 6, 733–759.

Gelman A., Carlin J. B., Stern H. S. and Rubin D. B., 2004, Bayesian Data Analysis, *Chapman-Hall*, Florida.

Geman, S. and Geman, D., 1984, Stochastic relaxation, Gibbs distribution, and the Bayesian restoration of images, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6, 721–741.

Geyik, S. K., 2014, Yapısal Eşitlik Modellemesi: İnternet Servis Sağlayıcıları Sektöründe Müşteri Sadakati Üzerine Bir Uygulama, Doktora Tezi, *İstanbul Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü*, İstanbul.

Gill, J., 2008, Bayesian Methods: A Social and Behavioral Sciences Approach, Second Edition, *Chapman & Hall*, New York.

Grace. J. B., 2006, Structural Equation Modeling and Natural Systems. *Cambridge University Pres.*

Hair, F. J., Anderson, E. R., Tatham, L. R. and Black, C., W., 1998, Multivariate Data Analysis, *Prentice Hall*, New Jersey, 928 p.

Hastings, W. K., 1970, Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their application. *Biometrika*, 57, 97–109.

Hayduk, L. A., 1987, Structural Equation Modeling with LISREL: Essential and Advances. Baltimore: *Johns Hopkins University Pres*.

Hall, J., Pitt, M. K. and Kohn, R., 2014, Bayesian inference for nonlinear structural time series models, *Journal of Econometrics*, 179, 99-111.

Hoyle, R. H., 1995, Structural equation modeling: Concepts, issues, and applications, Thousand Oaks, *California: Sage Publications*, 312.

Jiang, X., Mahadevan, S. and Urbina, A., 2010, Bayesian nonlinear structural equation modeling for hierarchical validation of dynamical systems, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 24, 957–975.

Jeffreys, H., 1961, Theory of Probability, *Oxford University Press*, Oxford. U.K.

Johnson, R., A. and Wichern, D. W., 2007, Applied Multivariate Statistical Analysis. *Prentice Hall*.

Jonsson, E., 1998, Modeling interaction and non-linear effects: A step by step LISREL example. In R.E. Schumacker & G.A. Maxcoulides (Eds.), Interaction and nonlinear effects in structural equation models, Mahwaja, *NJ: Lawrence Erlbaum Associates*, pp. 17-42.

Jöreskog, K. G., 1969, "A General Approaches to Confirmatory Factor Analysis", *Psychometrika*, Vol. 34, s.184.

Jöreskog, K., 1973, A general method for estimating a linear structural equation system, In: A. Goldberger and O. Duncan (eds.), *Structural equation models in the social sciences*, New York: Saminar Press, s.85-112.

Jöreskog, K. G., 1981, Analysis of covariance structures, *Scand. J. Statistics*, 8, 65-92.

Jöreskog, K. G. and Sörbom, D., 1989, *LISREL 7*: A Guide to The Program and Applications. Michigan: *SPSS Inc.*

Jöreskog, K. G. and Sörbom, D., 1993, LISREL 8: User's guide. *Chicago: Scientific Software,* 378.

Jöreskog, K., G. and Sörbom, D., 1996, LISREL 8: Users Reference Guide. *Scientific Software*, Inc.

Kass, R. E., and Raftery, A. E, 1995, Bayes factors. *Journal of the American Statistical Association*, 90, 773–795.

Kaplan, D., 2000, Structural Equation Modeling: foundations and extensions, *Sage Publication*s, CA, 272.

Keesling, J. W., 1972, Maximum Likelihood Approaches to Causal Analysis. Ph.D. dissertation, *Department of Education: University of Chicago*.

Kelava, A. and Nagengast, B., 2012, A Bayesian Model for the Estimation of Latent Interaction and Quadratic Effects When Latent Variables Are Nonnormally Distributed, *Multivariate Behavioral Research*, 47:717–742.

Kenny, D. A. and Judd, C. M., 1984, Estimating the nonlinear and interactive effects of latent variables, *Psychological Bulletin*, 96, 201-210.

Kline, B. R., 2005, Principles and practice of structural equation modeling, Second Edition, *The Guilford Press*, New York London, 385.

Kline, R. B., 2012, Principles and practice of structural equation modeling, 3rd edition, *The Guilford Press*, New York, London, 427 p.

Klein, A., Moosbrugger, H., Schermelleh-Engel, K. and Frandk, D., 1997, A new approach to the estimation of latent interaction effects in structural equation

models. In W. Bandilla & E Fanlbaum (Eds.), SOFTSTAT '97 Advances in statistical software, Stuttgart, Germany: *Lucius & Lucius*, 479-488.

Klein, A. and Moosbrugger, M., 2000, Maximum likelihood estimation of latent interaction effects with the LMS method, *Psychometrika*, 65, 457–474.

Klein, A., G. and Muthén, B. O., 2007, Quasi maximum likelihood estimation of structural equation models with multiple interaction and quadratic effects. *Multivar. Behav. Res*, 42, 647–673.

Kumru, Ö., 2003, Markov Zinciri Monte Carlo Yöntemi, Yüksek Lisans Tezi, *Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara, 88 s.

Lee, S. Y. and Zhu, H., T., 2002, Maximum likelihood estimation of nonlinear structural equation models. *Psychometrika*, 67, 189–210.

Lee, S. Y. and Song, X. Y., 2003, Estimation and model comparison for a nonlinear latent variable model with fixed covariates, *Psychometrika*, 68, 27–47.

Lee, S. Y., Song, X. Y. and Lee, J. C., K., 2003, Maximum Likelihood Estimation of Nonlinear Structural Equation Models with Ignorable Missing Data, *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, Vol. 28, No. 2, 111–134.

Lee, S. Y., Song, X. Y. and Tang, N. S., 2007, Bayesian Methods for Analyzing Structural Equation Models With Covariates, Interaction, and Quadratic Latent Variables, *Structural Equation Modeling*, 14(3), 404–434.

Lee, S. Y. and Zhu, H. T., 1999, Statistical analysis of nonlinear factor analysis models, *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 52, 225–242.

Lee, S. Y., and Zhu, H. T., 2000, Statistical analysis of nonlinear structural equation model with continuous and polytomous data, *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 53, 209-232.

Lee, S. Y., Lu, B. and Song X. Y., 2004, Assessing local influence for nonlinear structural equation models with ignorable missing data, *Computational Statistics & Data Analysis*, Vol. 50, 1356-1377.

Lee, S. Y. and Tang, N. S., 2006, Bayesian analysis of nonlinear structural equation models with nonignorable missing data. *Psychometrika*, 71, 541–564.

Lee, S. Y., 2007, Structural Equation Modeling A Bayesian Approach, *John Wiley & Sons*, London.

Lee, S. Y., ve Song, X. Y., 2004, Evaluation of the Bayesian and maximum likelihood approaches in analyzing structural equation models with small sample sizes. *Multivariate Behavioral Research*, 39, 653-686.

Loehlin, J. C., 1992, Latent Variable Models: An introduction to factor, path, and structural analysis, Mahwah, NJ, *Lawrence Erlbaum Associates*.

Loehlin, J. C., 2004, Latent Variable Models: An introduction to factor, path, and structural analysis, Mahwah, NJ: *Lawrence Erlbaum Associates*, 317 p.

Long, J. S., 1983, Confirmatory Factor Analysis: A Preface to LISREL, *Sage Publications*, California,

Lu, M., 1999, "Determinants of residential satisfaction: Ordered logit vs. regression model", *Growth and Change,* 30, (2), 264-276.

Marsh, H. W., Wen, Z. L. and Hau K. T., 2004, Structural equation models of latent interactions: Evaluation of alternative estimation strategies and indicator construction, *Psychol. Methods*, 9, 275–300.

Meydan, C., H., Şeşen, H., 2011, Yapısal Eşitlik modellemesi AMOS uygulamaları, *Detay Yayıncılık*, 138 s.

Moosbrugger, H., Schermelleh-Engel, K. and Klein, A. G., 1997, Methodological problems of estimating latent interaction effects*, Meth. Psychol. Res*. Online, 2, 95–111.

Murat, N., 2011, Yapısal Eşitlik Modellerde Parametre Tahminlerinde Klasik Ve Bayesci Bir Yaklaşım , Doktora Tezi, *Ondokuzmayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Samsun.

Muthén, B., 1988, LISCOMP: Analysis of linear structural equations with a comprehensive measurement model. Chicago*: Scientific Software.*

Muthén, L. K. and Muthén, B. O., 1998-2010, Mplus user's guide (6th ed.). Los Angeles, *CA: Author*.

Ntzoufras, I., 2009, Bayesian Modeling Using WinBUGS, *John Wiley & Sons.*

Özçelik, G., 2011, Toplam İş Yükünü Etkileyen Faktörlerin Analizi İçin Yapısal Eşitlik Modelleme Ve Analitik Ağ Süreci İle Bütünleşik Bir Model Önerisi, Yüksek Lisans Tezi, *Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara, 1-11.

Öztürk, F., Akdi, Y., Aydoğdu H. ve Karabulut, İ., 2006, Parametre Tahmini ve Hipotez Testi, Yüksek Lisans Tezi, *Bıçaklar Kitabevi*, Ankara.

Özkoç, H. H., 2011, Yapısal Eşitlik Modelleri: Sağlık Sektöründe Bir Uygulama, Doktora Tezi, *Dokuz Eylül Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü*, İzmir.

Palomo, J., Dunson D., B. and Bollen, K., 2007, Bayesian Structural Equation Modeling, *Handbook of Computing and Statistics with Applications*, Vol. 1, pp. 168-188

Raykov, T. and Marcoulides, G. A., 2006, A first course in structural equation modeling, Mahwah, *NJ: Lawrence Erlbaum Associates*, 238.

Scheines, R., Hoijtink, H. and Boomsma, A., 1999, Bayesian estimation and testing of structural equation models, *Psychometrika*, 64, 37–52.

Schermelleh-Engel, K., Werner, C. S., Klein, A. G. and Moosbrugger, H., 2010, Nonlinear Structural Equation Modeling: Is Partial Least Squares an Alternative? *AStA - Advances in Statistical Analysis*, *94*, 167-184.

Schermelleh-Engel, K., Moosbrugger, H. and Müller, H., 2003, Evaluating the fit of structural equation models: Test of significance and descriptive goodness-of-fit measures, *Methods of Psychological Research* - Online, 8(2), 23-74.

Schumacker, R. E. and Marcoulides, G.,A., 1998, Interaction and nonlinear effects in structural equation models. Mahwah, NJ: *Lawrence Erlbaum Associates*.

Schumacker, R. E. and Lomax, R. G., 2004, A beginner's guide to structural equation modeling second edition, Mahwah, *NJ: Lawrence Erlbaum Associates*, 498.

Sharma, S., 1996, Applied multivariate techniques, *John Wiley and Sons Inc*, 493 p.

Song, X., Y. and Lee, S. Y., 2012a, A tutorial on the Bayesian approach for analyzing structural equation models, *Journal. of Mathematical Psychology*, 56, 135-148.

Song, X., Y. and Lee, S. Y., 2012b,. Basic and Advanced Bayesian Structural Equation Modeling: With Applications in the Medical and Behavioral Sciences*, John Wiley & Sons*, London.

Song, X. Y., Lu, Z. H., Hser, Y. I. and Lee, S., Y., 2011, A Bayesian approach for analyzing longitudinal structural equation models. Structural Equation Modeling*, A Multidisciplinary Journal*, 18, 183-194.

Spiegelhalter, D. J., Best, N. G., Carlin, B. P. ve van der Linde, A., 2002, Bayesian measures of model complexity and fit. *Journal of the Royal Statistical Society,* Series B, 64, 583–639.

Şimşek, G. G., 2007, Latent Değişkenli Yapısal Denklem Modellerine İlişkin Bir Uygulama, Doktora Tezi*, Marmara Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü*, İstanbul.

Şen, R., 2013, Model Belirlemesi, Örneklem Hacmi ve Tahmin Yönteminin Yapısal Eşitlik Modelleri Uyum Ölçütlerine Etkisi, Yüksek Lisans Tezi, *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Eskişehir, 1-3.

Tang N. S., Chen, X. and Fu, Y. Z., 2009, Bayesian analysis of non-linear structural equation models with non-ignorable missing outcomes from reproductive dispersion models, *Journal of Multivariate Analysis*, Vol. 100, 2031-2043.

Tanner, M. A., and Wong, W. H., 1987, The calculation of posterior distributions by data augmentation, *Journal of the American Statistical Association*, 82, 528–550.

Tezcan,C., 2008, Yapısal Eşitlik Modelleri, Yüksek Lisans Tezi, *Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara.

Ucal, M. Ş., 2006, Ekonometrik Model Seçim Kriterleri Üzerine Kısa Bir İnceleme, *Çukurova Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Dergisi*, Cilt 7, Sayı 2,

Yang, M. G. and Dunson, D. B., 2010, Bayesian semiparametric structural equation models with latent variables, *Psychometrika*, 75, 675-693.

Yanuar, F., Kamarulzaman Ibrahim, K, ve Jemain, A., A., 2013, Bayesian structural equation modeling for the health index, *Journal of Applied Statistic,* Vol. 40, No. 6, 1254–1269.

Yanuar, F., 2014, The Estimation Process in Bayesian Structural Equation Modeling Approach, *Journal of Physics*: Conference Series, 495, 012047.

Yılmaz, V. ve H. Eray Çelik, H., E., 2014, LISREL 9.1 ile Yapısal Eşitlik Modellemesi, *Anı Yayıncılık*, İstanbul, 376.

Zellner, A., 1971, An introduction to Bayesian inference in econometrics, *John Wiley & Sons*, Inc, New York.

Wall, M. and Amemiya, Y., 2007, Nonlinear Structural Equation Modeling as a Statistical Method, *Handbook of Computing and Statistics with Applications*, 2007, Vol. 1, 321-343.

Wang, Y. F. ve Fan, T., H., 2010, A Bayesian analysis on time series structural equation models, *J. of Statistical Planning and Inference*, 141, 2071-2078.

West, S. G, Finch, J., F. and Curran, P., J., 1995, Structural equation models with nonnormal variables: Problems and remedies. In R. H. Hoyle (Ed.), Structural equation modeling: Concepts, issues, and applications, Thousand Oaks, *CA: Sage*, pp. 56−75.

Wiley, D., E., 1973, The identification problem for structural equation models with unmeasured variables. In A. S. Goldberger and O., D., Duncan, eds., *Structural Equation Models in the Social Sciences*, New York: Aca. Press, s. 69-83.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	İlkay ALTINDAĞ
Uyruğu	**:**	TC
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	KONYA-24.03.1985
Telefon	**:**	0530 221 95 70
Faks	**:**	
e-mail	**:**	ialtindag@selcuk.edu.tr

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Selçuklu Anadolu Lisesi, Selçuklu, KONYA	2003
Üniversite	:	Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, KONYA	2008
Yüksek Lisans	:	Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, KONYA	2010
Doktora	:	Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, KONYA	2015

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2008	Selçuk Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

UZMANLIK ALANI: İstatistik

YABANCI DİLLER: İngilizce

BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

YAYINLAR

Altındağ, İ., Genç, A., 2015, "Bayesian Nonlinear Structural Equation Modeling", *Journal of Selçuk University Natural and Applied Science*, Online ISSN:2147-3781, www.josunas.org , 4(1), pp. 174-192.

Altındağ, İ., Genç, A., 2012, Structural Equation Modelling For Self-Esteem Scale, *8th International Symposium of Statistics*, Eskişehir, pp. 41-42.

Altındağ, İ., Akdoğan, Y., Çalık, A., Kuş, C., Kınacı, İ., 2013, MLEs based on Censored Data for Some Life time Distributions, *29th European Meeting of Statisticians*, Budapest, Hungary, pp. 30-31.

Altındağ, İ., Genç, A., 2014, Testing for non-linear Relationship in Structural Equation Modeling, *20th Conference of the International Federation of Operational Research Sociates*, IFORS 2014, Barcelona,Spain, pp. 146.

Altındağ, İ., Genç, A., 2014, Testing for Linear Relationship in Structural Equation Modeling, *9th International Statistics Day Symposium*, Antalya, pp. 102.

Altındağ, İ., Genç, A., 2015, Bayesian Nonlinear Structural Equation Modeling, *The Second International Conference on Mathematics and Statistics*, AUS-ICMS'15, Sharjah (Dubai), Birleşik Arap Emirlikleri, April 2- 5,pp. 53.