Matematksel Modelleme Ve Depo Problemi

Gaziantep Üniversitesi
Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Tezi

Danışman
Prof.Dr. Fahir Talay AKYILDIZ

Musa BOZTEKE
Eylül 2015

© 2015 [Musa BOZTEKE]

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: Matematiksel Modelleme ve Depo Problemi

Öğrencinin, Adı Soyadı: Musa BOZTEKE

Tez Savunma Tarihi: 10.09.2015

Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Prof. Dr. Metin BEDİR

FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Adil KILIÇ

Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Fahir Talay AKYILDIZ

Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri: imzası

1. Prof. Dr. Fahir Talay AKYILDIZ .....
2. Doç. Dr. Muhammet Fatih HASOĞLU .....
3. Doç. Dr. Abdullah KABLAN .....

İlgili tezin akademik ve etik kurallarına uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans göstererek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

Musa BOZTEKE

ÖZET

MATEMATİKSEL MODELLEME VE DEPO PROBLEMİ

BOZTEKE, Musa

Yüksek Lisans tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Prof.Dr. Fahir Talay AKYILDIZ

Eylül 2015, 47 sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde önemli tanım ve teoremler, matematiksel modelleme, matematiksel modelin kurulumu, matematiksel modellerin sınıflandırılması, ortogonal polinomlar ve fourier serileri beş ana başlık altında incelenmiştir.

İkinci bölümde, enerjinin depolanması problemi tanımlanmış ve çözümü yapılmıştır.

Üçüncü bölümde, matematiksel modellerin orta öğretimde kullanımı ve yeni orta öğretim müfredatında fonksiyonlar konusu incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, bazı trigonometrik oranların parmak hesabı ile bulunması incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Matematiksel Modelleme, depo problemi, parmak hesabı

ABSTRACT

MATHEMATICAL MODELING AND A TANK PROBLEM

BOZTEKE, Musa

M.Sc.Thesis, Math. Department

Adviser: Professor Doctor Fahir Talay AKYILDIZ

September 2015, 47 pages

This thesis is consist of four sections. In the first section, important definitions and theorems, the mathematical modeling, the mathematical modeling setup, the mathematical modeling classification, ortogonal polynomials and Fourier series are given.

In the second section, energy storage problem in a tank is introduced and this problem solved by using Laplace transform method..

In the third section, we used mathematical models at secondary education and the functions at new middle education curriculum are invastigated.

In the fourth section, some trigonometric values are investigated in terms of finger calculation.

Key Words: Mathematical Modeling, Energy Storage problem, Finger Calculation

TEŞEKKÜRLER

Tezin oluşumun da emeği geçen deneyimlerini ve bilgilerini benimle paylaşıp bana yol gösteren danışmanım Prof. Dr. Fahir Talay AKYILDIZ hocama, tezin oluşumunda manevi desteği ile hep yanımda olan eşim Neslihan BOZTEKE'ye ve çocuklarıma, ve daha isimlerini yazamadığım güzel insanlara en içten duygularımla sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET……...…...iv

ABSTRACT……..……v

TABLOLAR LİSTESİ...…….….ix

ŞEKİLLER LİSTESİ…….…….…..x

SEMBOLLER LİSTESİ…….….xi

BÖLÜM 1: TEMEL TANIM VE TEOREMLER …….……..1

1.1. Matematiksel Modelleme…….……..……..…..2

1.2. Matematiksel Modelin Kurulumu……..…..…….……3

1.3. Matematiksel Modellerin Sınıflandırılması…...……...……....4

1.4. Ortogonal Polinomlar…….…….…….…….....6

1.5. Fourier Serileri…….…….……..10

BÖLÜM 2 DEPO PROBLEMİ…….……..…..….19

2.1. Depo Probleminin Tanımı …….…….....……...……19

BÖLÜM 3 ORTA ÖĞRETİMDE MODELLEME UYGULAMALARI……..23

3.1. Matematiksel Modellerin Orta Öğretimde Kullanımı……..23

3.2.Yeni Orta Öğretim Müfredatında Fonksiyonlar Konusu….……..24

3.3. Değerlendirme…….……..……....30

BÖLÜM 4 TRİGONOMETRİDE MODELLEME……..33

4.1. Bazı Trigonometrik Oranların Parmak Hesabı ile Bulunması…...……..33

BÖLÜM 5

SONUÇ……..….43

KAYNAKLAR……...44

TABLOLAR LİSTESİ

Tablo 3.1: 2013 öncesi ve sonrası 9.sınıf fonksiyonlar konusu ……..……...…24

Tablo 3.2: 2013 sonrası 10. Sınıf fonksiyonlar konusu ……...…..25

Tablo 4.1: 1.Grup öğrenci sonuçları …..……..37

Tablo 4.2: 2. Grup öğrenci sonuçları ……38

Tablo 4.3: 1.Grup öğrencilerin değerlendirilmesi ……39

Tablo 4.4: 2. Grup öğrencilerin değerlendirilmesi ……39

Tablo 4.5: 1. Grup ortak öğrencilerin değerlendirilmesi …..…….……40

Tablo 4.4: 2. Grup ortak öğrencilerin değerlendirilmesi ……..……..…40

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1. Darcy'nin deney düzeneğinin temsili görünümü……9

Şekil 1.2. Peryodik genişleme……..……..……..….....11

Şekil 1.3. Fourier serileri……..….....15

Şekil 1.4. Ters laplace dönüşümü…….....18

Şekil 2.1. Yeraltında termal enerji su tankının şematik temsili……...……19

Şekil 3.1. Fonksiyon tanımı……..……..…….…….....26

Şeki 3.2. Fonksiyon tanımı…….……...……...…….....27

Şekil 3.3. Fonksiyon tanımı…….....32

Şekil 4.1. Parmak hesabı…….34

SEMBOLLER LİSTESİ

L^2	Fonksiyonel uzay
$\mathcal{L}\{f(t)\}$	Laplace dönüşümü
$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	Ters Laplace dönüşümü
$\|\|\,.\,\|\|$	L^2 normu
$\|\|\,.\,\|\|_X$	f ile f' in dual uzayın normu
$T[f(t)]$	İntegral dönüşümü
$T^{-1}[F(s)]$	Ters İntegral dönüşümü

BÖLÜM 1

TANIMLAR VE TEOREMLER

Günlük hayatımızda karşılaştığımız kolay veya zor bir çok problem vardır. Bu problemlerin çözümünde insanoğlu bazen pratik çözümler üretir. Bazen belirli bir sürede çözüm yapar. Bazen de çözümü çıkılmaz hale getirebilir. Günümüzde bilim adamları çevremizdeki problemleri daha iyi anlayabilmek ve sorunları çözmek için yöntemler aramışlardır.

Matematik problemleri sembolleştirerek çözme sanatı olduğundan birçok problemin çözümünde matematikten yararlanılır. Matematik, genellikle sadece okullarda hapsedilmiş bilim olarak görülür. Halbuki matematik; gerçek dünya problemlerine, olaylarına modelleme yoluyla belirli kurallara göre çözüm üreten bir düşünme yoludur. Bütün matematiksel kavramların kökleri gerçek dünya içindedir. Bir problemi sembolleştirerek çözmenin bazı yararları vardır. Birincisi problemle ilgili elimizde ne olduğunu anlarız. Problemi tanımamıza yardımcı olur. Sonrasında problemi çözmemiz için gerekli olan çözüm için neyin önemli olduğunu neyin önemsiz olduğunu bize gösterir. Sonrasındaki uygulamalar da çözümümüzü kolaylaştırır.

Ünlü bir filozof: ‘ Bana bir problemin çözümü için bir saat verildiğinde elli beş dakikasını problemi anlama ve çözüm yolunu bulmayla uğraşır, son beş dakikasını çözüme ayırırım.’ demiştir. Burada anlayacağımız gibi problemi sembolleştirerek çözmek bize çözümün daha sağlıklı olacağını ve formülize ederek çözmemizin daha kolay olacağını gösterir. Matematiğin en önemli yararlarından biri de mantıksal sonuçlara varabilmek için elimizdeki varsayımları formülize edip sonuçlara ulaşacak ipucu elde etmektir. Böylece matematik, analiz yapabilmemiz için sağlam bir temel sağlayıp ve bize bu yolda yardım edecek araç temin eder.

1.1 Matematiksel Modelleme

Karmaşık olan bir problemin gerçek dünya durumlarını gözeterek karmaşık bir problemi günlük hayattaki bazı durumları da kullanarak basit bir düzeye sembolleştirip formülize ederek çözen modele matematiksel model diyebiliriz. Matematiksel modellemede kişilerin günlük hayattaki durumlarını kullanarak çözüme daha kolay ulaşır ve problemin çözümünü anlamamıza daha yardımcı olacağını görebiliriz. Çünkü problemi günlük hayatla özdeşleştirerek analiz etmek ve çözüm yolu bulmak daha kolaydır. Matematiksel modelleme , modellemeyi öğretme, öğrenme, matematiksel düşünme ve öğrenmenin yönlerini içerir. Problem durumunu formüle etmeyi içeren zorlayıcı bir yapıya rağmen uygun değişkenleri seçme bu değişkenler arasındaki bağlantıyı ortaya çıkarma bu değişken ve bağıntılara bağlı olarak matematiksel bir model ortaya koyma, bu modelin ve uygulamalarının test edilmesi sürecidir ve bir sanattır [1].

Matematiksel modelleme bir gerçek yaşam durumunun fiziksel sembolik ya da soyut maddelerini oluşturma sürecidir [2-4].

Değişen dünyada matematik bilgisinin ve matematiksel becerilerin günlük hayatta kullanabilen ve matematiği anlayabilen bireylere ihtiyaç giderek artmaktadır. Bu vasıflara sahip bireylerin dünyamızın geleceğini şekillendirmede daha etkin rol oynayacağı kaçınılmazdır [5].

Bazı araştırmacılar öğrencilerin okul dışındaki ve gelecekteki yaşamlarında problem çözme becerisi gelişmiş bireyler olarak yetişmelerini sağlamak için gerçek yaşam durumlarına çözüm üretmeyi içeren matematiksel modelleme üzerine önemli araştırma yapmaktadır [6-9,2,10-11].

Bu çalışmada matematik öğretiminde önemli yeri olan matematiksel modelleme bireylere farklı bakış açısı sağlamaktadır. Bireylerin bu sayede matematiksel becerilerini geliştirmelerini veya ortaya çıkarmalarını sağlayacaktır. Bu doğrultuda çalışmada literatürdeki önemli çalışmaların modelleme sürecine yönelik yaklaşımlarına ve sürecin yapısını açıklayan diğer bazı çalışmalara yer verilmiştir [12,6,13-23].

Son olarak, teknoloji destekli ortamdaki matematiksel modelleme sürecinin bilişsel yapısına ilişkin ayrıntılı bir açıklama sunan kuram [24] açıklanmıştır.

1.2 Matematiksel Modelin Kurulumu

1.2.1 Problemin Belirlenmesi

Bir problemin çözümünü modelleyebilmek için önce problemin güzelce tanımlanmış olması gerekiyor. Verilenlerin açık bir şekilde belirtilmesi ve sınırlarının çizilmesi gerekmektedir. Eğer modellenmek istenen model çok karmaşık ise ortaya çıkabilecek modelleme hatalarını ve sıkıntılarını azaltmak için basit modellere ayırıp tanımlamakta fayda var. Problem iyi anlaşılırsa modellemeyi kurmak da basitleşir.

1.2.2 Problemin Analizi

Bu safhada modelleyiciler problemin ne olduğu, arka planı ve sonuçlarının nasıl olacağını araştırır. Birey mevcut bütün bilgiyi ve herhangi bir veriyi parametreyi tüm bilgiyi araştırmalı ve keşfetmelidir. Tüm bu verileri problemi analiz ederek çözümü için bunları anlamak, araştırmak, anket yapmak ve problemle ilgili makaleleri eleyerek gerekli araştırmaları ortaya koymaktadır. Birey, problemi iyi analiz ederse probleme uygun modeli daha rahat kurabilir.

1.2.3 Model Analizi

Endüstriyel ve ticari modelleme genellikle karmaşıktır. Çözümü fazla zaman almaktadır. Problemi çözmeden önce modellemeyi iyi kurmak, modellemeyle ilgili denklemleri doğru kurmak ve modellemenin kesin olması sağlanmalıdır. Burada modeller için kesin testler olmalıdır. Bu testlerin geçerliliği zor ve imkansız olabilir. Genelde sonuçları karşılaştıracak gerçekler yoktur. Model, iyi analiz edilirse çözüme ulaşmak kolaylaşır.

1.2.4 Modelsel Becerilerin Geliştirilmesi

Modelleme sürecini tanımlayabilmek için dikey ve yatay olmak üzere iki farklı düşünme yöntemi vardır. Dikey düşünme, her adım bir öncekinin matematiksel olarak devamı olan doğrusal bir tarzdır. Yatay düşünmeyi ana yolda işleyen trafiğe benzetirsek yan yolları kullanarak da hedefe ulaşmak daha kolaydır. Problem çözümünde çözüm yolu ne kadar açık ve kolay ise algılama o kadar rahat olur. Yanlış algılamalar da ekstra çalışmalar gerektirebilir.

1.2.5 Matematiksel Modelleme Becerileri

Bu safhada problemin amaçları ve konuları matematiksel forma dönüştürülür. Probleme uygun genel denklemler oluşturulur. Hangi terimlerin kullanılacağı veya kullanılmayacağı kararlaştırılır. Bu matematikçinin sezgisel becerisini ortaya çıkartır. Modellemedeki beceriler matematikçiye ayırt edici özellikler sağlar.

1.2.6 Değişkenlerin Tanımlanması

Değişkenlerin tanımlanması, problemin çözümünde denklemdeki önemli olan terimlere karşılık gelir, problemi etkileyen faktörler liste halinde yazılır. Her faktör belirlenir ve onunla ilgili varsayımlar oluşturulur. Bu varsayımlar bu faktörleri ya ihmal eder ya da o faktör bazı önemli özelliklere sahip olur. Bu metotta hangi faktörün ihmal edileceği veya hangisinin alınacağına karar verilmesi önemlidir. Model ne kadar basit tutulursa sadece gerekli terimler alındığı görülür. Modelin başının basit bir şekilde ifade edilmesi bir tavsiyedir. Çıktılar girdilerin bir fonksiyonudur. Bu model için kullanışlı bir modelleme birçok yolla geliştirilebilir.

1.3 Matematiksel Modellerin Sınıflandırılması

1.3.1 Statik ve Dinamik Modeller

Modeli tanımlayan matematiksel eşitliklerde kullanılan bağımlı değişkenler yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonları ise, böyle modellere "Statik Model" adı verilmektedir. Örnek olarak soğuk hava depolarında soğutma yükünün hesaplanması için izlenen yol gösterilebilir. Burada belirli bir yapı tasarımı ve dış hava sıcaklığı, ürün giriş sıcaklığı ve yükü kabul edilerek, bir gün içinde olabilecek maksimum ısı kazancı temel ısı transferi bilgileri kullanılarak bulunmaktadır. Bunun sonunda hesaplanacak kompresör gücü, buharlaştırıcı ve yoğunlaştırıcı kapasitesi gibi bağımlı değişkenler; sıcaklık, duvar kalınlıkları, depoya gelen günlük ürün miktarı gibi bağımsız değişkenlerin fonksiyonu olarak değişmektedir [25].

Dinamik modelde ise statik modelde tanımlanan bağımlı ve bağımsız değişkenlere ek olarak, zaman da hesaplamalar sırasında dikkate alınmaktadır. Statik modele örnek gösterilen soğuk hava deposu, dinamik modele örnek olarak da gösterilebilir. Eğer bir sezon boyunca enerji tüketimi incelenecek ise tanımlanan modelin ekonomik

yapıda olması gerekmektedir. Dış hava sıcaklığı ve ürün giriş çıkışı günden güne hatta saatten saate değişebileceği için, modeldeki değişkenler zamana bağlı olarak hesaplanmalıdır [26-28].

1.3.2 Teorik ve Deneysel Modeller

Bu tip sınıflandırmada modeli tanımlayan matematiksel eşitliğin türetilme yöntemi önem kazanmaktadır. Eğer eşitlikler türetilirken yalnızca ısı transferi, termodinamik vb. teorik bilgiler kullanılmışsa, bu tip modeller "Teorik Model" olarak adlandırılmaktadır. Eğer model yalnızca deneyler sonucunda elde edilen verileri, regresyon analizi gibi sayısal bir yöntem kullanılarak bulunan eşitlikleri ile tanımlanıyorsa, bu modellere "Deneysel Model" adı verilmektedir. Bazı çalışmalarda hem teorik hem de deneysel sonuçların bir arada değerlendirildiği yarı teorik yaklaşımlarda bulunmaktadır [29].

Teorik ve deneysel modellere örnek olarak gıdalarda donma/çözünme işlemleri gösterilebilir [30]. Evre değişiminin de göz önüne alındığı boyut ve zamana bağlı (dolayısı ile dinamik model) ısı transfer denkleminin, sınır ve başlangıç koşullarına bağlı olarak analitik veya sayısal çözümü teorik modelin sonucunu vermektedir. Deneysel modellerde ise örnek olarak çeşitli büyüklüklerdeki çok sayıda karkasla yapılan donma/çözünme deneyleri sonucunda elde edilen sıcaklık dağılımları donma/çözünme süresi gibi bağımlı değişkenlerin hava hızı, donma/çözünme ortamı sıcaklığı, karkas boyutları vb. bağımsız değişkenlere göre, bire bir ya da çoklu ilişkileri sonucunda bulunan eşitlikler ile sistem tanımlanmaktadır.

1.3.3 Uygulama Alanlarına Göre Modeller

Matematiksel modelleme bütün mühendislik uygulamalarında kullanılır. Birçok sanayide büyük bir işlem potansiyeline sahiptir. Genel olarak tesis yerleşimi, tesis sahasının verimli kullanımı, para akışı ve kapasitenin planlanması, üretim akışı, doğrudan ve doğrudan olmayan işçilik maliyet analizleri vb. konularda modelleme yapılabilmektedir [31].

1.4 Ortogonal Polinomlar

Ortogonal vektörler tanımı, ağırlıklı L^2-uzayı kullanılarak genişletilebilir. Kabul edelim ki $\omega(x)$, $[a,b]$ aralığında hemen hemen her yerde pozitif fonksiyon olmak üzere, ağırlıklı fonksiyon uzayını

$$L^2_\omega(-1,1) = \left\{ v\,, [a,b] \text{ aralığında ölçülebilir} | \int_a^b |v(x)|^2 \omega(x) dx < \infty \right\} \quad (1.1)$$

şeklinde tanımlayalım, bu uzay iç çarpımlı Hilbert uzayıdır, buradaki iç çarpım:

$$(u,v)_{0,\omega} = \int_{-1}^{1} u(x)v(x)\omega(x)dx \quad (1.2)$$

ve norm

$$\|v\|_{0,\omega} = \sqrt{(u,v)_{0,\omega}} \quad (1.3)$$

şeklinde tanımlanır.

1.4.1 Ortogonal Polinomların Genel Teorisi:

Ortogonal polinom ailesi ile bir üçlü bağıntı ile ilgili polinom ailesi kastedilir. Ortogonal bir sistem, bir ağırlık fonksiyonuyla birlikte verilir. Ortogonal polinomları kullanmak kolaydır, çünkü iyi yakınsama özellikleri ve bir fonksiyonun ağırlık dağılımını kesin bir ağ üzerinde, iyi bir şekilde temsil ederler. Ortogonal polinom teorisi, birçok problemin numerik metodun arka planında ortaya çıkar. (Örneğin, numerik integrasyon, cebrik özdeğer problemi vb.) [32].

Teorem 1.4.1. Her ağırlık dağılımı için, birleştirilmiş ortogonal sistemde Ψ_0, Ψ_1, Ψ_2,.... vardır. Bu polinomların üçgen ailesidir.Bu ailede teklik gerçeğinden başka, A_0, A_1, A_2,..... katsayıları sıfırdan farklı keyfi değerler verilir. Bir ağ üzerindeki $m+1$ noktası ile ağırlık dağılımı için, aile $\Psi_m(x)$ ile biter. ($\Psi_{m+1}(x)$ her bir ağ noktasında sıfır olur.) Süreklilik durumunda ailede sonsuz sayıda eleman vardır.

$n \geq 0$ için ortogonal polinomlar üç terimde tekrarlama bağıntısını sağlar, yani

$$\Psi_{n+1}(x) = \alpha_n(x - \beta_n)\Psi_n(x) - \gamma_n\Psi_{n-1}(x) \quad (1.4)$$

burada

$\Psi_{-1}(x) = 0 \qquad \Psi_0(x) = A_0$

Not 1.4.1: Eğer ağırlık dağılımı simetrikse; bütün n değerleri için $x = \beta$, sonra $\beta_n = \beta$ dir.

Teorem 1.4.2: Kabul edelim ki $\{\psi_n(x)|n \geq 0\}$, (a, b) açık aralığında $\omega(x) \geq 0$ ağırlık fonksiyonuna göre polinomların Ortogonal bir ailesi olsun. Bu takdirde , bu aralıkta $\psi_n(x)$, n tane reel farklı kökü vardır.

Teorem 1.4.3 (Gram-Schmidt teoremi)

$\{\varphi_n(x): n \geq 0\}$ $der(\varphi_n) = n$ $\forall n$ için ve

$$\forall\, n \neq m, n, m \geq 0 \; için \; (\varphi_n, \varphi_m) = 0$$

olacak şekilde polinomların bir dizisi vardır, üstelik bu diziyi

(1) $\forall n \; için \; (\varphi_n, \varphi_n) = 1,$

(2) $\varphi_n(x)$ polinomunda x^n nin katsayısı pozitif.

olacak şekilde oluşturabiliriz.

ispat: Önce

$$\varphi_0(x) = c$$

olsun, buradaki c sabit olup belirlenecektir . Eğer $\|\varphi_0\|_2 = 1$ ve $c > 0$ olarak seçilir ise

$$(\varphi_0, \varphi_0) = c^2 \int_a^b w(x)dx = 1$$

$$c = \left[\int_a^b w(x)\, dx\right]^{-1/2}$$

elde ederiz . $\varphi_1(x)$ için,

$$\psi_1(x) = x + a_{1,0}\varphi_0(x) \text{ olsun.}$$

Bu takdirde;

$$(\psi_1, \varphi_0) = 0$$

olması

$$0 = (x, \varphi_0) + a_{1,0}(\varphi_0, \varphi_0)$$

olmasını gerektirir. Bu taktirde

$$a_{1,0} = -(x, \varphi_0) = \frac{-\int_a^b xw(x)dx}{\left[\int_a^b w(x)dx\right]^{1/2}}$$

dır. Diğer yandan

$$\varphi_1(x) = \frac{\psi_{1(x)}}{\|\psi_1\|_2}$$

ve

$$\|\psi_1\|_2 = 1 \qquad (\varphi_1, \varphi_0) = 0$$

ve *x* in katsayıları pozitiftir. $\varphi_n(x)$ in inşası için

$$\psi_n(x) = x^n + a_{n,n-1}\varphi_{n-1}(x) + \cdots + a_{n,0}\varphi_0(x)$$

tanımlayalım. ψ_n nin $\varphi_j, j = 0,1,..,n-1$ ortogonal yapılarak , sabitler belirlenir; yani

$$(\psi_n, \varphi_j) = 0 \; olması \; a_{n,j} = -(x^n, \varphi_j), j = 0,1,..,n-1$$

eşitliğini gerektirir. $\varphi_n(x)$ elemanı ise

$$\varphi_n(x) = \frac{\psi_n(x)}{\|\psi_n\|_2}$$

şeklindedir. Bu şekilde devam edilerek istenilen eleman elde edilir. Bu metoda Gram-Schmidt işlemi adı verilir.

Örnek 1.4.1: Eğer özel olarak $\omega(x) = 1, [a, b] = [-1,1]$ alınır ise

$\varphi_0(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}$ $\varphi_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x$ $\varphi_2(x) = \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2\text{-}1)$

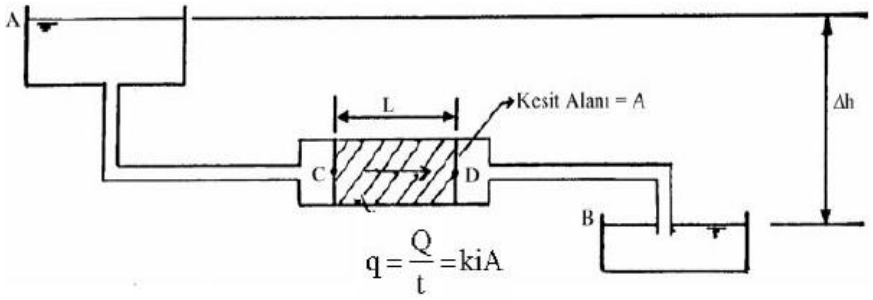
kolayca elde ederiz. Yüksek mertebeli polinomlar benzer şekilde elde edilir.

1.4.2 Darcy Yasası

Darcy yasası gözenekli ortamda akışı modelleyen en eski yasa Henry Darcy tarafından 1856 yılında yapılan deneysel çalışma sonucu ortaya çıkmıştır, çalışmanın temsili düzeneği şekil 1.1'de gösterilmiştir. Darcy'nin deney düzeneği, içinde kum bulunan A kesitli silindirik bir borudan ibarettir. Akış çok yavaştır ve silindirin üst kısmından giren su aşağı doğru kum taneleri arasından süzülerek iner. Akış daimi, gözenekli ortam özdeş ve akış tek yönlüdür. Darcy, deney sırasında akışkanın kum

ile dolu kısmına girdiği sütunun üst ve çıktığı alt seviyelerindeki basınç farkı ile akışkan akışı arasında doğrusal bir ilişki olduğunu bulmuştur. Bugünkü düzenlenmiş hali ile Darcy yasası aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\langle v \rangle = -\frac{K}{\mu}(\nabla \langle P \rangle_a + \rho g) \tag{1.5}$$



Şekil 1.1 Darcy'nin deney düzeneğinin temsili görünümü

$$\langle v \rangle = \frac{Q}{A} \cong \frac{\Delta p}{L}$$

Bağıntı (1.5)'de υ Darcy hızı olarak bilinir veya bütün akış kesiti içindeki akışkanın ortalama hızı olarak tanımlanır. $a \ \nabla P$ ise akışkan kısmı içinde basınç değişim vektörüdür. K yöne göre özellikleri değişmeyen gözenekli ortamın geçirgenliğidir ve yöne göre özellikleri değişken olan bir gözenekli ortam için geçirgenlik ikinci derece tensördür. Son olarak μ ise akışkanın dinamik viskozitesini verir. Darcy yasasına göre yazılan Bağıntı (1.5) nin daha önce de belirtildiği gibi bazı kısıtlamaları vardır. Darcy yasası sıkıştırılamaz ve Newtonian bir akışkan içindir. Ayrıca hız çok yavaştır, Reynold sayısının büyüklük derecesi birden küçüktür ve akış tek yönlüdür. Bağıntı (1.5) ampirik bir bağıntıdır ve yüksek akış hızlarında yani Reynold sayısının büyüklük derecesinin biri geçtiği durumlarda artık akışı modelleyemez. Çünkü Bağıntı (1.5) doğrusal bir denklemdir yani akışın doğrusal olmayan etkisini modelleyemez, denklemde viskoz etkiler de yer almaz ve en önemlisi katı sınırlar göz önüne alındığında sınırın sürtünme etkisini görmez

1.4.2.1 Doğal Konveksiyon

Doğal konveksiyon ısınan veya ısıtılan havadaki moleküllerin harici bir etki olmaksızın soğuk havadaki moleküller ile yer değiştirerek yükselmesi durumudur bu doğanın kendisinde bulunan bir fizik kuralına bağlıdır (Isınan hava yükselir!). Havada olduğu gibi benzer bir şekilde, iki farklı bir renkte biri soğuk diğeri sıcak olan sıvı birbirine karıştırıldığında doğal konveksiyonun tepkimesi en basit şekilde sıcak olan suyun yukarıya hareketlenmesi şeklinde gözlenmektedir. Konveksiyon ve okyanus akıntıları oluşturmada da önemli rol oynamaktadır küresel sıcaklık farklılıkları bu doğa olaylarında belirleyici bir konveksiyon hareketini tetiklemektedir.

1.4.2.2 Porous Medium (Gözenekli Ortam)

Bir gözenekli ortamı (ya da gözenekli bir malzeme) gözenekleri ihtiva eden bir malzemedir. Malzemenin iskelet kısmı genellikle "matris" ya da "çerçeve" denir. Gözenekler, tipik olarak bir akışkan (sıvı veya gaz) ile doldurulur. İskelet malzeme,

genellikle bir katı madde olmakla birlikte, köpükler gibi yapılar genellikle de uygun gözenekli ortam kavramı kullanılarak analiz edilir.

1.5 Fourier Serileri

Tanım 1.5.1.(Periyodik Fonksiyonlar)

f , A kümesinden B kümesine tanımlı bir fonksiyon olsun.

$$f: A \to B$$

Her $x \in A$ için $f(x+T) = f(x)$ olacak şekilde sıfırdan farklı en az bir T reel sayısı varsa; f fonksiyonuna periyodik fonksiyon, $T \neq 0$ reel sayısına f nin periyodu denir.

$f(t)$ fonksiyonu bir T peryoduna sahip olsun.

her t için $f(t+T) = f(t)$ de T 'nin pozitif sabit değer olduğu periyot T ile periyodik olacağı söylenir. $T > 0$ 'ın en az değeri esas periyot yahut temel periyot yahut sadece $f(t)$ 'nin periyodu olarak adlandırılır.

Örnek 1.5.1 : $sin(x+2\pi), sin(x+4\pi), sin(x+6\pi), \ldots$ nin tümü $sin\, x$ 'e eşit olduğundan; $sin\, x$ fonksiyonu $2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$ peryotlarına sahiptir.

Örnek 1.5.2 : $a \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $f(x)$ 2π peryoduna sahip ise

Öylese;

$F(t) = f(\omega t) = f(\frac{2\pi}{T}t)$ peryot T $\quad (\frac{2\pi}{T}t = x, \quad \omega = \frac{2\pi}{T})$

Örnek 1.5.3:Şayet f T peryoduna sahip ise;

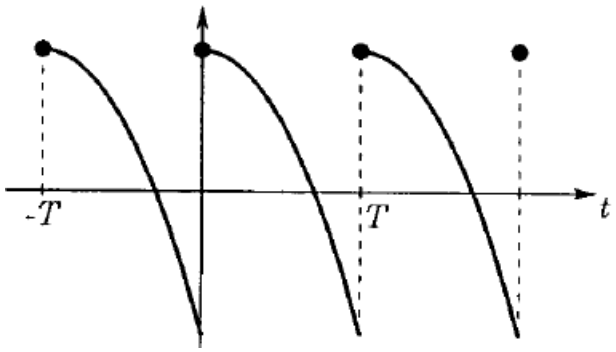
$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Tanım 1.5.2:(Peryodik açılım)

f fonksiyonu $[0,T)$ aralığında olsun. f 'nin $\tilde{f}$ periyodik açılımı aşağıda verilen formülle tanımlanır.

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & 0 \le t < T \\ \tilde{f}(t-T) & \forall t \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad (1.6)$$

Bakınız şekil 1.2



Şekil.1.2 Periyodik Genişleme

Tanım 1.5.3:(Parçalı Sürekli Fonksiyonlar)

$I = [a,b]$ aralığında tanımlanan bir f fonksiyonu parçalı sürekli I olması için gerek ve yeter koşul

(i) $a = x_0 < x_1 < x_2, \dots, < x_n = b$ parçalanması bir alt bölüm mevcuttur. Öyle ki

$I_k = \{x: x_{k-1} < x < x_k\}$ 'nın her alt aralığında f süreklidir. ve

(ii) $x_0, x_1, \dots, x_n$ 'alt bölüm noktalarının her birinde f 'nin her iki taraflı limitleri vardır.

Teorem 1.5.1:

f $I = [-\pi, \pi]$ de sürekli olsun.varsayalım ki

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1.7}$$

serisi $x \in I$ için f 'ye eşit oranda yakınsasın. Öyleyse ;

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ntdt \qquad n = 0,1,2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ntdt \qquad n = 1,2, \ldots \tag{1.8}$$

İspat:

s_k kısmi toplamları

$$s_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{k} (a_m \cos mx + b_m \sin mx)$$

şeklinde tanımlanır.

$s_k(x)$ serisi $f(x)$ e eşit yakınsadığından, her sabit n için $k \to \infty$ olarak $s_k(x) \cos nx$ eşit oranda $f(x) \cos nx$ 'e yakınsanır.

$(|s_k(x) \cos nx - f(x) \cos nx| \leq |s_k(x) - f(x)|)$ olur.

Bu yüzden her sabit n için

$$f(x) \cos nx = \frac{a_0}{2} \cos nx + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx \cos nx + b_m \sin mx \cos nx)$$

Eşit oranda yakınsanan seriler terim terim entegre edilebilir.

$$\int_{\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx = \pi a_n \qquad n = 0,1,2, \ldots$$

Bu ispat $f(x) \sin nx$ için benzer şekilde devam eder.

Tanım 1.5.4:(Fourier Katsayıları, Fourier Serileri)

a_n ve b_n sayıları f nin Fourier katsayıları olarak adlandırılır. a_n ve b_n (1.8) tarafından (1.7) trigonometrik serisi f fonksiyonunun Fourier serisi olarak adlandırılır.

Uyarı 1.5.1:Şayet f türevlenebilir bir fonksiyonsa bu durumda a_n ve b_n katsayıları hesaplanabilecektir. Şayet f gelişi güzel türevlenebilir bir fonksiyon ise Fourier serisinin f e yakınsayacağına garanti değildir. Sağ tarafta bulunan serinin bazı noktalardan f ile çakışıp çakışmayacağını göstermek için genel olarak şunu yazarız.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1.9}$$

Uyarı 1.5.2:(Fourier Serisi için Karmaşık Gösterim)

Euler özdeşiklerini kullanarak

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$$

i 'nin sanal bir birim olduğu formülde öyle ki $i^2 = -1$; $f(x)$ 'in Fourier serisi aşağıda belirtilen formülde karmaşık şekilde yazabiliriz.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{inx} \tag{1.10}$$

buradan

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx \tag{1.11}$$

ve

$c_0 = \frac{1}{2} a_0$, $c_n = \frac{1}{2}(a_n - i b_n)$, $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + i b_n)$ $\quad n = 1,2, \ldots$

$a_0 = 2c_0$, $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$, $\quad n = 1,2, \ldots$

Örnek 1.5.4: $f(x)$; $[0,T]$ aralığında tanımlansın. f nin periyodik genişletilmiş tanımlansın. Kabul edelim ki $f(x)$, T peryotlu periyodik bir fonksiyon olsun. Bu takdirde,

$f(x)$ $(\omega = \frac{2\pi}{T})$ 'ye karşılık gelen Fourier serisi

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x) \qquad (1.12)$$

Fourier katsayıları a_n ve b_n

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x) \cos n\omega x dx \qquad n = 0,1,2, \ldots. \qquad (1.13)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x) \sin n\omega x dx \qquad n = 1,2, \ldots. \qquad (1.14)$$

şeklindedir.

Örnek 1.5.5: a_n ve b_n in f in Fourier katsayıları olsun. f nin Fourier serisinin faz açısının oluşumu

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega x + \delta_n)$$

ile

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad n = 1,2, \ldots$$

ve

$$\delta_n = tan^{-1}\left(-\frac{b_n}{a_n}\right), \qquad n = 1,2, \ldots$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 1.5.6: f fonksiyonunun Fourier serisini aşağıda verilen formülle hesaplarız.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < \pi \\ -1, & \pi \le x < 2\pi \end{cases}$$

f tek bir fonksiyon; $f(x)\cos nx$ de tek bir fonksiyon olduğundan ve bu yüzden

$$a_n = 0 \qquad n = 1,2,3, \ldots$$

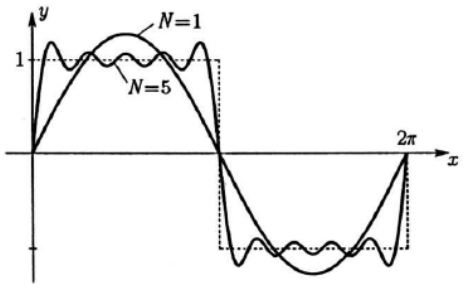
$$a_0 = 0$$

$n \geq 1$ için b_n katsayısı aşağıdaki formülle verilmiştir.

$$b_n = \left(\int_0^{\pi} sin\, nxdx - \int_{\pi}^{2\pi} sin\, nxdx \right) = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & n\ tek \\ 0, & nçift \end{cases}$$

buradan

$$f \sim \frac{4}{\pi}\left(\frac{sin\, x}{1} + \frac{sin\, 3x}{3} + \frac{sin\, 5x}{5} + \cdots\right)$$



Şekil.1.3 Fourier serileri

1.5.1 Dirichlet Koşulları

Bir Fourier serisinin yakınsaklığının belirlenmesi için basit kriterlerlerin geliştirilmesi önemlidir. Bu kısımda $f(x)$ üzerinde öyle koşullar inşa edeceğizki bu koşullar altında verilen fonksiyon Fourier serisine açılabilir.

Tanım 1.5.5:(Parçalı Düzgün Fonksiyonu)

Eğer, aralık üzerindeki f ve f' değerlerinin her ikisi de parçalı sürekli ise bir f fonksiyonu bir aralık üzerinde parçalı düzgündür denir.

Teorem 1.5.2: f in parçalı düzgün ve periyodik olduğunu varsayalım. Böylece, (1.7) serisi (1.8) katsayılarıyla beraber

1. Eğer x sürekliliğin bir noktası ise $f(x)$ ile,

2.Eğer x süreksizliğin bir noktası ise $\frac{1}{2}(f(x+0)f(x-0))$ na eşittir.

Bunun anlamı $-L$ ile L arasındaki her bir x 'te Fourier serisi x 'teki $f(x)$ 'in sol ve sağ limitlerinin aritmetik ortalamasıyla eşittir. Eğer f değeri x 'te sürekli ise bu durumda sol ve sağ limitlerin her ikisi de $f(x)$ 'e eşittir ve Fourier serisi $f(x)$ 'in kendisine eşittir. Eğer f değeri x 'te bir sıçrama süreksizliğine sahip ise; bu durumda Fourier serisi bu noktadaki sağdan ve soldan limitlerin ortalamasına eşittir.

Uyarı 1.5.3: f parçalı sürekliliği olan bir fonksiyon olsun. Eğer, süreksizliğin x_i noktalarındaki değerleri

$$f(x_i) = \frac{1}{2}[f(x_i +) + f(x_i -)]$$

tarafından veriliyor ise f 'in standartlaştırılmış olması yeterlidir ama gerekli değildir.

Uyarı 1.5.4: $f(x)$ üzerine yüklenen koşullar yeterlidir ama gerekli değildir. Örneğin, koşullar sağlandığından kesişim garantidir. Ancak, koşullar sağlanmadıysa seri kesişebilirde kesişmeyebilirde.

1.5.2 Laplace Dönüşümü

Bir $f(t)$ fonksiyonunun integral dönüşümü

$$T[f(t)] = F(s) = \int_a^b k(s,t)f(t)dt \qquad (1.15)$$

biçiminde bir integralle tanımlanır. Verilmiş $k(s,t)$ fonksiyonuna integral dönüşümün çekirdeği denir. $F(s)$ fonksiyonu verildiğinde $f(t)$ ye ters integral dönüşüm denir ve $T^{-1}[F(s)]$ ile gösterilir. Laplace dönüşümü inteğral dönüşümlerin ilk örneklerinden birisidir. Çekirdek ve sınırlar

$$k(s,t) = e^{-st} \ , \quad a = 0 \ , \quad b = \infty$$

olarak tanımlanır.

$f, t > 0$ zaman değişkeninin tek değerli bir fonksiyonu ve s bir (reel veya kompleks olabilir) parametre olsun. $f(t)$ nin Laplace dönüşümü

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{1.16}$$

1.5.3 Ters Laplace Dönüşümü

s kompleks değişkenli, F fonksiyonu sonlu sayıdaki izole edilmiş tekilliklerin dışında sonlu s düzlemi boyunca analitik bir fonksiyon olsun. Bu taktirde L_R, $s = \gamma - iR$ den $s = \gamma + iR$ ye dikey bir parça olsun. Burada γ sabiti pozitif ve yeterince büyüktür. Ayrıca F nin tekilliklerinin tamamı düzlemin solundadır.(şekil 1.4). Yeni bir reel t değişkenli f fonksiyonu $t\ nin$ pozitif değerleri için

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R\to\infty} \int_{L_R} e^{st} F(s)ds \qquad (t > 0), \tag{1.17}$$

denklemi ile tanımlansın. (bu limitin var olma şartı ile) (1.17) denklemi genellikle

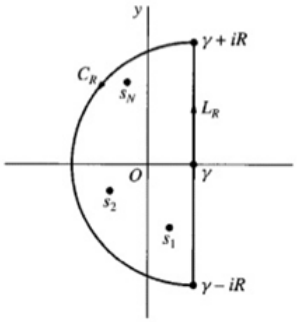
$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} P.V. \int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} e^{st} F(s)ds \qquad (t > 0) \tag{1.18}$$

şeklinde yazılır ve böyle bir integral *Bromwich integrali* olarak adlandırılır.

Gösterebilir ki oldukça genel şartlar fonksiyonlar üzerinde uygulandığında $f(t)$, $F(s)\ nin$ ters Laplace dönüşümüdür. Yani $F(s)$, $f(t)\ nin$ Laplace dönüşümü ise

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{1.19}$$

denklemi ile tanımlanır.



Şekil 1.4 Ters Laplace Dönüşümü

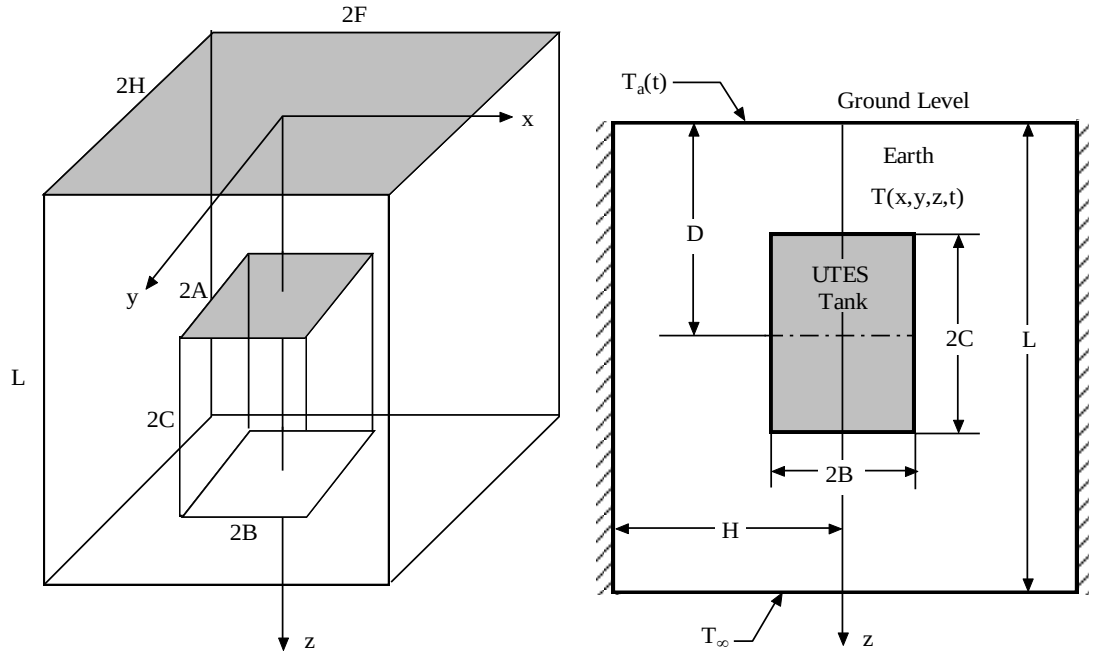
Bu durumda $f(t)$ (1.18) yardımıyla yeniden elde edilebilir. Burada γ pozitif sayısının seçimi F nin tekilliklerinin tamamı L_R nin solunda kaldığı sürece önemsizdir. Laplace dönüşümleri ve onların tersleri hem adi hem de kısmi diferansiyellerin çözümünde önemlidir.

BÖLÜM 2

DEPO PROBLEMİ

2.1 Depo Problemi

Bu bölümde, su deposunun dışındaki geçici ısı iletim probleminin analitik çözümü sunulacaktır. Isı iletim probleminin şematik temsili şekil 2.1'de gösterilmektedir. Enerji su deposunun dikdörtgen, suyla dolu ve ölçülebilir bir derinlikte yerin altında bulunduğu farz edilmektedir. Sürekli termal ve fiziksel özelliklerinin yanı sıra toprağın homojen bir yapıya sahip olduğu farz edilmektedir. Depoyu çevreleyen toprağın ısısı T=(x,y,z,t) sırasıyla ve n ayrıca eş zamanlı olarak dikdörtgen şeklindeki su deposunun merkezinden ve üst noktasından ölçülen x, y ve z 'nin kartezyen koordinatlarının bir fonksiyonudur.



Şekil 2.1: Yeraltında termal enerji su tankının şematik temsili.

Kartezyen koordinat sistemini kullanarak, UTES tankının dışarısındaki geçici ısı iletim problemi aşağıda verilen 3 boyutlu kısmi türevsel denklem, ön ve sınır şartları yoluyla ifade edilebilir. Q, tankın enerji geçiş oranıdır.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{Q}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \tag{2.1}$$

Sınır şartları:

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0,y,z,t)=0 \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(F,y,z,t)=0 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}(x,0,z,t)=0 \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}(x,H,z,t)=0 \tag{2.5}$$

$$T(x,y,0,t)=T_a\ (t) \tag{2.6}$$

$$T(x,y,L,t)=\ T_\infty \tag{2.7}$$

$$T(x,y,z,0)=T_\infty \tag{2.8}$$

Çözüm: Verilen problemi önce homojen hale getirelim, bunun için

$$T(x,y,z,t)=-\frac{Q}{2k}.z^2+T_1(x,y,z,t) \tag{2.9}$$

değişken dönüşümü uygularsak (2.1) problemi ve sınır koşulları aşağıdaki forma dönüşür:

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2}=\frac{1}{\alpha}.\frac{\partial T}{\partial t} \tag{2.10}$$

sınır değerleri (2.2)-(2.8) uygulanırsa

yukarıdaki problem $x\ ve\ y$ boyunca Fourier serisine açılabilir yani,

$$T_1(x,y,z,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}T_2\ (z,t)\ cos\left(\frac{r\pi}{F}x\right)cos\left(\frac{m\pi}{H}y\right) \tag{2.11}$$

Bu fonksiyon (2.10) de yerine yazılır ise

$$\frac{1}{\alpha}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\partial T}{\partial t}cos\left(\frac{r\pi}{F}x\right)cos\left(\frac{m\pi}{H}y\right)$$
$$= -\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}T_2\,(z,t)\left(\frac{r^2\pi^2}{F^2}\right)cos\left(\frac{r\pi}{F}x\right)cos\left(\frac{m\pi}{H}y\right)$$
$$-\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}T_2\,(z,t)\left(\frac{m^2\pi^2}{H^2}\right)cos\left(\frac{r\pi}{F}x\right)cos\left(\frac{m\pi}{H}y\right)$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2}cos\left(\frac{r\pi}{F}x\right)cos\left(\frac{m\pi}{H}y\right)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}cos\left(\frac{r\pi}{F}x\right)cos\left(\frac{m\pi}{H}y\right)\left(\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T_2}{\partial T}+\left(\left(\frac{r^2\pi^2}{F^2}\right)+\left(\frac{m^2\pi^2}{H^2}\right)\right)T_2(z,t)\right.$$
$$\left.-\frac{\partial^2 T_2}{\partial z_2}\right)=0$$

elde ederiz, buradan

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T_2}{\partial T}+\left(\left(\frac{r^2\pi^2}{F^2}\right)+\left(\frac{m^2\pi^2}{H^2}\right)\right)T_2(z,t)-\frac{\partial^2 T_2}{\partial z_2}=0$$

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T_2}{\partial T}+\underbrace{\left(\left(\frac{r^2\pi^2}{F^2}\right)+\left(\frac{m^2\pi^2}{H^2}\right)\right)}_{ג^2}T_2(z,t)=\frac{\partial^2 T_2}{\partial z_2}$$

şeklinde yazılabilir

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T_2}{\partial T}+ג^2T_2(z,t)=\frac{\partial^2 T_2}{\partial z_2} \qquad (2.12)$$

Laplace dönüşüm uygulanırsa

$$\int_0^{\infty}e^{-st}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T_2}{\partial T}+ג^2T_2(z,t)-\frac{\partial^2 T_2}{\partial z_2}\right)\partial t=0$$

$$=\frac{s}{\alpha}\hat{T}_2(s,t)+ג^2T_2(z,t)-\frac{\partial^2\hat{T}_2}{\partial {z_2}^2}-\frac{T_\infty}{\alpha}$$

$$\frac{\partial^2\hat{T}_2}{\partial {z_2}^2}-\left(\frac{s}{\alpha}+ג^2\right)\hat{T}_2(z,s)+\frac{T_\infty}{\alpha}=0$$

$$\hat{T}(0,s)=T_a(s)$$

$$\hat{T}(L)=T_\infty/s$$

$$\hat{T}(z) = \frac{1}{2}\left(2s^2 T_a(s)\, sinh\left(\frac{\sqrt{G\alpha + s}\,(-z+L)}{\sqrt{\alpha}}\right) + 2GIs\, sinh\left(\frac{\sqrt{G\alpha + s}\, z}{\sqrt{\alpha}}\right)\right.$$
$$+ 2sT_a(s)G\alpha\, sinh\left(\frac{\sqrt{G\alpha + s}\,(-z+L)}{\sqrt{\alpha}}\right)$$
$$- 2T_\infty s\left(sinh\left(\frac{\sqrt{G\alpha + s}\, z}{\sqrt{\alpha}}\right) + sinh\left(\frac{\sqrt{G\alpha + s}\,(-z+L)}{\sqrt{\alpha}}\right)\right.$$
$$\left.\left. - sinh\left(\frac{\sqrt{G\alpha + s}\, L}{\sqrt{\alpha}}\right)\right) + 2GIG\alpha\, sinh\left(\frac{\sqrt{G\alpha + s}\, z}{\sqrt{\alpha}}\right)\right)$$
$$\left/\left((G\alpha + s)\, sinh\left(\frac{\sqrt{G\alpha + s}\, L}{\sqrt{\alpha}}\right)\right)\right.$$

elde edilir.

Ters Laplace dönüşümü (2.12) ye uygulanır ise

$$T_2(z,t)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha n\pi}{L^2} sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) \int_0^t e^{-\alpha\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + G\right)(t-u)} T_w\,(u)du$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\left(G_1 n^2\pi^2 + T_\infty(-1 + cos\, n\pi)(GL^2 + n^2\pi^2)\right)}{L^2(GL^2 + n^2\pi^2)n\pi\, cos\, n\pi} sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) e^{-\alpha\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + G\right)t}$$

$$G_1 = T_\infty - L^2\frac{Q}{2K}\ , \qquad G = \frac{r^2\pi^2}{F^2} + \frac{m^2\pi^2}{H^2}$$

elde edilir.

Bu ifade (2.11) de yerine yazılırsa T_1 elde edilir ve T_1 de (2.9) da yerine yazılarak T elde edilir. Bu ise verilen problemin çözümüdür.

BÖLÜM 3

ORTA ÖĞRETİMDE MODELLEME UYGULAMALARI

3.1 Matematiksel Modellerin Orta Öğretimde Kullanılması

Matematiksel modelleme, hayatın her alanındaki problemlerin doğasındaki ilişkileri çok daha kolay görebilmemizi, onları keşfedip aralarındaki ilişkileri, matematik terimleriyle ifade edebilmemizi, sınıflandırabilmemizi, genelleyebilmemizi ve sonuç çıkarabilmemizi kolaylaştıran dinamik bir yöntemdir. Diğer bir şekli ile matematiksel modeller, matematiksel düşünme becerileri kazanılmasına ve bu becerilerin geliştirilmesine katkı sağlar.

Matematiksel modellemeler ve uygulamaların öğrenimi ve öğretimi karmaşık ve zor bir alandır. Ancak, gerçek hayat problemlerinin matematiksel modelleri kavramsallaştırıldığı zaman, problemin karmaşıklığının sadeleştiğini ve anlamlandırmanın kolaylaştığını görürüz. Böylece matematiksel modeller, öğrenme sürecinde bilişsel yapıların oluşmasını kolaylaştırıp, öğrencilerin gerekli matematiksel bilgi ve becerilerini gerçek hayat problemlerine uygulanabilme davranışını kazanmalarını hızlandırır. Daha önceden kurulmuş olan öteki modelleri örnek olarak incelemek, modelleme sürecinin nasıl bir şey olduğunu öğrenmek için yararlı olabilir. Milli Eğitim Bakanlığı da artık birçok derste modelleme yöntemini kullanılmasını tavsiye ediyor.

3.2 Yeni Orta Öğretim Müfredatında Fonksiyonlar Konusunun Değerlendirme

3.2.1 2013 Yılından Önce ve Sonrası 9. Sınıf Fonksiyonlar Konusu

2013- Öncesi 9.Sınıf Fonksiyon Konuları	**2013- Sonrası 9.Sınıf Fonksiyon Konuları**
Sıralı ikili	Sıralı ikili
İki kümenin Kartezyen çarpımı	İki kümenin Kartezyen çarpımı
Bağıntı	Fonksiyon kavramı
Bir bağıntının tersi	Birim ,sabit ,doğrusal fonksiyonlar
Bağıntının özelikleri	Fonksiyonların grafiklerini okuma ve yorumlama
Fonksiyonlar	$f(x) = x^n$ biçimindeki fonksiyonların grafikleri
Fonksiyon çeşitleri	Doğrusal fonksiyonlarla ilgili uygulamalar
Doğrusal fonksiyon	$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği
İşlem	Parçalı fonksiyonlar ve grafikleri
İşlemin özelikleri	Bire bir ve örten fonksiyonlar
Fonksiyonların bileşke işlemi	
Bir fonksiyonun bileşke işlemine göre tersi	
Grafiği verilen bir fonksiyonun bazı değerlerini bulma	

Tablo 3.1: 2013 Yılından Önce ve Sonrası 9. Sınıf Fonksiyonlar Konusu

2013 Sonrası 10.Sınıf Fonksiyon Konuları
Fonksiyonlarda işlemler ve uygulamalar
Fonksiyonların simetrileri
Cebirsel özellikleri
İki fonksiyonun bileşkesi
Bir fonksiyonun tersi
Fonksiyonlarla ilgili uygulamalar

Tablo 3.2: 2013 sonrası 10. Sınıf fonksiyon konusu

2013 öncesi 10. Sınıf konularında fonksiyon konusu yoktur.

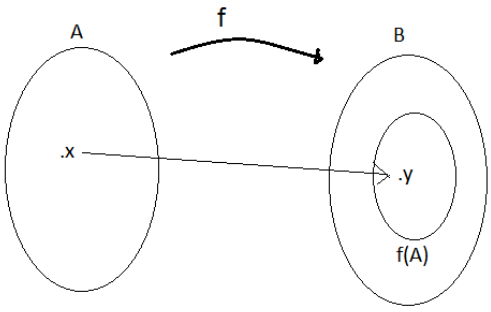
3.2.3 2013 Yılı Öncesi 9. Sınıftaki Fonksiyon Tanımı :

Fonksiyon terimi "bir çokluğun bir başkasına bağlı olarak değişmesi" anlamıyla ilk kez 1673 yılında Leibniz tarafından kullanıldı. Leibniz buna örnek olarak ,

- Dairenin alanının r yarıçapına bağlı olarak r'nin bir fonksiyonu.
- Serbest düşen bir topun hızının yere değinceye kadar geçen t zamanına bağlı olduğunu, hızın zamanının fonksiyonu olduğunu göstermiştir [33].

Dirichlet de fonksiyonu, bir kural içermesi ve bir kümenin her bir elemanını, diğer kümenin sadece bir elemanı ile eşleme olarak tanımladı. 1939 da fonksiyon ile ilgili matematik programlarında kullanılan en iyi tanım Bourbaki'in küme teorisi anlamında düzenlediği bir tanımdır. Bu tanım şöyle idi:

"*A* ile *B* ayrık olan ya da ayrık olmayan ve boş olmayan iki küme olsun. Eğer *A* kümesindeki tüm *x* lerin her birine, f ile verilen bağıntı ile *B* kümesindeki sadece bir tek *y* karşılık geliyorsa verilen bağıntı. *A* nın *x* değişken elemanları ile *B* nin *y* değişken elemanları arasındaki fonksiyon olarak adlandırılır." Bu tanım Dirichlet-Bourbaki tanımı olarak bilinmektedir [33].



Şekil.3.1 Fonksiyon tanımı

$A \neq \emptyset$ ve $B \neq \emptyset$ olmak üzere *A* kümesinin her elemanını *B* kümesinin bir ve yalnız bir elemanına eşleyen f bağıntısına *A* dan *B* ye bir fonksiyondur denir. Yukarıdaki şemada verilen

A dan *B* ye f fonksiyonu $f: A \rightarrow B$, $A \rightarrow B$ veya $f: x \rightarrow y$ biçiminde gösterilir.

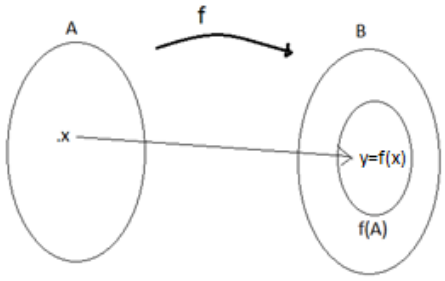
$y = f(x)$ yazılır. $x \in A$ ve $y = f(x) \in B$ dir.

A kümesine fonksiyonunun tanım kümesi, *B* kümesine fonksiyonunun değer kümesi ve *f(A)* kümesine de fonksiyonunun görüntü kümesi denir[33]. Dikey yayıncılık [34] 9. sınıf kitabında fonksiyon tanımı aşağıdaki şekilde yapılmıştır.

A ve *B* boş olmayan herhangi iki küme olmak üzere, *A* 'dan *B* 'ye tanımlanan bir bağıntı *f* olsun. Eğer *f* bağıntısı, aşağıdaki özelliklere sahip ise bu *f* bağıntısına " *A'* dan *B'* ye bir fonksiyondur." deriz.

1. *f* bağıntısı , *A* kümesinin her bir elemanını *B* kümesinin yalnız bir elemanına eşliyor.

2. A kümesinde eşlenmeyen eleman kalmıyor.



Şekil 3.2 Fonksiyon tanımı

Burada *A* kümesine *f* fonksiyonunun tanım kümesi, *B* kümesine *f* fonksiyonunun değer kümesi denir. *f(A)* kümesine *f* fonksiyonunun görüntü kümesi denir.

$f : x \rightarrow y$ ya da $y = f(x)$ biçiminde gösteririz. Bu bağıntı cebirsel veya aritmetik bir kural olmak zorunda değildir.

Fonksiyon bir bağıntı olduğundan tanımlı olduğu kartezyen çarpım kümesinin bir alt kümesidir.

2013 öncesi bağıntının tanımı, bir bağıntının tersi, bağıntının özellikleri anlatıldıktan sonra fonksiyonlar konusu anlatılıyordu. Fonksiyon çeşitleri doğrusal fonksiyon, birebir ve örten fonksiyonlar öğretildikten sonra işlem ve işlemin özellikleri anlatılıyordu. Daha sonra fonksiyonların bileşke işlemi, fonksiyonun tersi, grafiği verilen bir fonksiyonun değerlerini bulma konularından bahsediliyordu.

3.2.4 2013 Sonrası 9. Sınıftaki Fonksiyon Tanımı :

2013 MEB [36] kitabında fonksiyon aşağıdaki şeklinde tanımlanmıştır.

A ve *B* boş olmayan iki küme olsun. *A* kümesinin her bir elemanını *B* kümesinin bir ve yalnız bir elemanına eşleyen ilişkiye *A'* dan *B'* ye tanımlı fonksiyon denir. *A'* dan *A'* ya tanımlı bir fonksiyona kısaca *A'* da tanımlı fonksiyon da denir. Fonksiyonlar genellikle *f, g, h, F, G, H* gibi sembollerle gösterilir.

Bir *A* kümesinden *B* kümesine tanımlı *f* fonksiyonu kısaca

$$f : A \to B$$

şeklinde gösterilir.

Burada *A'* ya fonksiyonun tanım kümesi, *B* 'ye ise fonksiyonun değer kümesi denir.

Eğer *f* fonksiyonu *A* kümesinde alınan bir *x* elemanı, *B* kümesindeki bir *y* elemanı ile ilişkilendiriyor ise *y, x* in *f* altındaki görüntüsü veya *f* 'in *x'* teki değeri *y'* dir denir ve bu durum $y = f(x)$ şeklinde ifade edilir. Tanım kümesindeki elemanların fonksiyon altındaki görüntülerinin oluşturduğu kümeye fonksiyonun görüntü kümesi denir ve *f(A)* ile gösterilir. Görüntü kümesi ortak özellik yöntemiyle şu şekilde gösterilir:

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

Yapmış olduğumuz fonksiyon tanımındaki şu iki özelliği vurgulayalım:

1. Tanım kümesindeki her bir eleman değer kümesinden bir elemanla mutlaka ilişkilendirilmiştir.
2. Tanım kümesindeki herhangi bir eleman değer kümesinden en fazla bir elemanla ilişkilendirilmiştir.

$f : A \to B$ olması bu iki şartın aynı anda sağlaması anlamına gelmektedir. Şimdi bu durumu tersinden okuyalım :

Yukarıdaki şartlardan en az biri sağlanmıyorsa $f : A \to B$ bir fonksiyon belirtmez.

Daha net bir ifadeyle,

1. Tanım kümesinde , değer kümesinden bir elemanla ilişkilendirilmeyen en az bir eleman var ise (çıktısı olmayan girdi varsa)

veya

2. Tanım kümesinde, değer kümesinden birden fazla elemanla ilişkilendirilen en az bir eleman var ise (birden fazla çıktısı olan girdi varsa)

f fonksiyon belirtmez.

2013 sonrası iki kümenin kartezyen çarpımı verildikten sonra fonksiyon kavramı bağıntıdan bağımsız olarak anlatılmaktadır. Fonksiyon çeşitleri doğrusal fonksiyonlar ve fonksiyonların grafiklerini okuma ve yorumlama verildikten sonra

$f(x) = x^n$ biçimindeki fonksiyonların grafikleri veriliyor. Parçalı fonksiyonlar ve grafikleri, birebir ve örten fonksiyonlar konusu anlatılıyor.

Fonksiyonun geri kalan konuları olan fonksiyonda işlemler ve uygulamalar, fonksiyonların simetrileri, cebirsel özellikleri, iki fonksiyonun bileşkesi, bir fonksiyonun tersi, fonksiyonlarla ilgili uygulamalar *10*. sınıfta anlatılmaya başlanılacaktır.

3.3 Değerlendirme :

Matematikte öğrendiğimiz birçok şey fonksiyon olarak görülebilir. Örneğin, aritmetikteki toplama ve çarpma işlemleri sayı ikililerini sayılara eşleyen birer fonksiyondur. Benzer şekilde, geometrideki öteleme ve döndürme işlemleri geometrik şekiller arasındaki bir fonksiyondur. Olasılık konusunda olayları, olma olasılıklarıyla eşleme de bir fonksiyon örneğidir. Fonksiyonlar, trigonometri, limit, türev ve integral gibi daha sonraki yıllarda göreceğimiz birçok matematik konusu için de temel bir kavramdır.

Fonksiyonlar konusunu öğrenmekle günlük hayatta karşılaşabileceğimiz birçok problemi kolaylıkla çözebileceğimiz gibi kâinatın işleyişi hakkındaki düşüncelerimiz de derinlik kazanacaktır. Kâinattaki varlıklar hakkındaki bilgilerin ve kâinatta gözlemlenen olayların matematiksel olarak incelenebilmesinde anahtar bir rolü olan fonksiyonların kullanımı sadece matematikle sınırlı değildir. Fizik gibi doğa bilimlerinde fonksiyonların çok etkin ve yaygın bir kullanımı vardır. Günümüzde fonksiyonlar konusu; mühendislikten ekonomiye, eğitim bilimlerinden tıpa kadar birçok alanda başarıyla kullanılmaktadır.

Yukarıdaki açıklama [35] MEB 'in kitabında yayınlanmıştır. Buradaki açıklamaya göre de MEB' in eski tanımı bırakıp yeni eğitim sisteminde öğrenci eksenli çalışmalar yapmak istiyor demektir.

Milli Eğitim kitabının içeriğinde, konular ele alınırken, kavramsal anlamanın yanı sıra işlemsel akıcılığın kazandırılması; öğrenilen bilgilerin matematiksel iletişimde, problemleri modelleme ve çözmede etkin kullanımına önem verilmektedir. Konu ve kavramların öğrenciler tarafından yapılandırılması sürecine eşlik etmek ve öğrencilerin güçlü matematiksel anlamlar geliştirmelerine yardımcı olmak için kitapta aşağıdaki türden deneyim ve ögelere yer verilmiştir.

- Merak, sebep-sonuç sorgulama ve keşfetme,
- Değişkenler arasındaki ilişkileri gözlemleme,
- Özel durumlarla hareketlerle genellemelere ulaşma,
- Matematiksel yapıların ortak özelliklerinden yola çıkarak soyutlama yapma,
- Verileri sınıflandırma, analiz etme ve yorumlama,
- Matematiği, modelleme ve problem çözme sürecinde aktif olarak kullanma,

- Yeni bilgilerin mevcut bilgilerle ve farklı disiplinlerle ilişkilendirme,
- Ulaşılan sonuçların matematiksel dilde ifade etme gerekçelendirme ve paylaşma,
- Bilgi ve iletişim teknolojilerinden aktif olarak yararlanma,

  Bu kitabın içeriği, öğrencilerin aşağıdaki hedeflere ulaşmalarını sağlayacak şekilde yapılandırılmıştır.
- Modelleme / Problem Çözme
- Matematiksel Süreç Becerileri
    - ❖ Akıl Yürütme
    - ❖ Matematiksel İletişim
    - ❖ İlişkilendirme
- Bilgi ve İletişim Teknolojileri kullanma

3.3.1 2013 Yılı Öncesi Fonksiyon Konusunun Değerlendirilmesi :

Öğrenciler Kartezyen çarpımı, bağıntının tanımını, bir bağıntının tersi ve bağıntının özelliklerini iyice öğrendikten sonra fonksiyon kavramını öğreniyorlar. Burada öğrencilerin bağıntı konusundaki zorluklar karşısında bocalıyorlar. Bu sıkıntı üzerine fonksiyon kavramını bağıntı konusu bağlamında öğrendiklerinde zorluklarla karşılaşıyorlar. Öğrenciler fonksiyonlar konusunun da zor olacağını düşünerek konuya ön yargılı yaklaşıyorlar.

Oysa fonksiyonlar konusu tanım çerçevesinde bağıntıya bağlıdır ondan sonraki bölümler kesinlikle bağıntı konusundan bağımsızdır. Yani bağıntıdan söz edilmeden fonksiyon konusu anlatılır.

.

3.3.2 2013 Yılı Sonrası Fonksiyonlar Konusunun Değerlendirilmesi:

2013 yılı sonrası yeni müfredatta 9. sınıf fonksiyonlar konusundaki fonksiyon kavramı bağıntılar konusundan bağımsız olarak tanım kümesindeki her elemanın değer kümesindeki bir elemanla eşleyen ilişki olarak tanımlanmıştır. Tanım kümesindeki her eleman mutlaka değer kümesindeki bir elemanla ilişkilendirilmiştir.

Bir başka tanımda fonksiyon bir makine sistemi gibi düşünülmüştür. Girdilerin ve çıktıların oluşturduğu bir makine fonksiyondur. Burada çıktılar girdilerin bir fonksiyonudur [36].



Şekil 3.3 Fonksiyon tanımı

Bu tanım öğrencilerin öğrenmesi ve düşünce geliştirmesi için çok önemlidir. Bu tanımı günlük yaşamdan örneklendirerek öğretebiliriz. Bu modellemeyle beraber öğrencilerin fonksiyon konusunu kavraması daha kolay bir hal alacaktır. Zihinlerinde somutlaşmış bir fonksiyon kavramı meydana gelecektir.

Fonksiyon konusunun öğrencilere öğretilme aşamasında bu modelden faydalanmak, bağıntıyla anlatılan fonksiyon konusunda meydana gelen karışıklıkları da önlemiş olur. Bu sayede fonksiyon konusunun anlaşılması ve öğretilmesi aşaması daha kolaylaşır.

Öğrencilerin konuları daha iyi kavramasını sağlayan matematiksel modellerden biri olan bu fonksiyon makinesi , öğrenciler için fonksiyonlar konusunu yoruma açık ve zevkli bir hale dönüştürür. Zihinlerinde canlanan bu yeni fonksiyon kavramı ön yargıların gereksiz olduğunu da ortaya koyar ve öğrenciler konunun zorluğundan korkmadan hareket ederler. Her öğrenciye kendi modellerini oluşturmak için imkânlar sağlandığında; konu, öğrenci merkezli anlatılmış olur ve elde edilen başarı daha da artmış olur. Örnek olarak öğrencilere benzin fiyatlarından oluşan bir modelleme yapıldığında konuyu daha iyi kavrayacaklardır. 2013 yılından sonraki fonksiyon kavramının anlatılması öğrenciye daha faydalı ve öğrenci merkezli olduğundan , öğrenci daha iyi anlayacaktır. Diğer bölümler bundan önceki yıllarda anlatıldığı gibi anlatılmıştır.

BÖLÜM 4

TRİGONOMETRİDE MODELLEME

4.1 Bazı Trigonometrik Oranların Parmak Hesabı İle Bulunması

Günümüzde matematiğin karmaşık şekilde oluşu bazen öğrencilerde öğrenme azmini azaltıyor. Bu nedenle öğrencilerin öğrenmesini basitleştirmek için çeşitli matematiksel modeller uygulamak gerekir. Gelişen dünyanın hızına ayak uydurulması için öğrencilerin problemleri çözerken kesinlikle hızlı davranmaları ve çabuk karar vermeleri gerekiyor.

Bu noktada matematiksel modellerin önemi göze çarpar. Matematiksel modellere, matematiğin her alanında her konusunda rastladığımız gibi trigonometride de rastlarız. Trigonometriyi kolaylaştırmak daha önemlisi hesaplamayı kolaylaştırmak ve zaman kaybını en aza indirmek için parmak hesabıyla trigonometri yöntemi kullanılması düşüncesindeyiz. Öğrencilerin korkulu rüyası diye bildikleri matematik konuları matematiksel modellerle beraber belki de daha pratik ve artık daha kolay olduğu için eğlenceli bir hal alabilir.

Günlük yaşamınızda vazgeçilmezimiz olan parmaklarımızı trigonometride kullanacağımızı söylesek inanan olmazdı. Fakat bugünün teknolojisi, yaşam konuları, gelişen şartlar bize bunun mümkün olduğunu gösterdi. Trigonometri, karmaşık ve anlaşılması zor olan bir alan olmasına rağmen çoğu şeyin özellikle geometrinin çözümünde önemli bir rol alır. Parmak hesabıyla trigonometri en çok öğrencilerin işine yarayan ve en çok onlara kolaylık sağlayan bir yöntemdir. Soru çözümü esnasında, deneme sınavlarında, üniversite sınavında, ödev hazırlarken bu yöntemi kullanmak öğrenciye zaman kazandırır.

Bazı trigonometrik oranların parmak hesabı ile bulunması daha hızlı ve akılda kalmasını sağlamak, problemi farklı bir şekilde çözüme ulaştırmaktır.

Bu şu şekilde sağlanacaktır.



Şekil 4.1 Parmak hesabı

$$Sinx = \frac{\sqrt{Geçilen\ \ Parmak\ \ Sayısı}}{2} \qquad Cosx = \frac{\sqrt{Kalan\ \ Parmak\ \ Sayısı}}{2}$$

Hangi açının değeri bulunacaksa o açıya göre şifrelenmiş parmak tutulur. Sinüs için karekök içinde, tutulan parmağa varıncaya kadar geçilen parmak sayısı yazılıp ikiye bölünür. Cosinüs için karekök içinde, tutulan parmaktan sonra kalan parmak sayısı yazılıp ikiye bölünür.

$Sin\ 0^0 = \frac{\sqrt{0}}{2} = 0$

$Sin\ 30^0 = \frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$

$Sin\ 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$Sin\ 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$Sin\ 90^0 = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$

$Cos\ 0^0 = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$

$Cos\ 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$Cos\ 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$Cos\ 60^0 = \frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$

$Cos\ 90^0 = \frac{\sqrt{0}}{2} = 0$

Bu oranları bulmak için iki öğrenci grubundan yararlanıldı. Bu iki gruptaki dokuz öğrencinin ortak alınarak değerlendirmemizin daha da objektif olacağına inanıyoruz.

Birinci gruptaki öğrencilerden 0^0 , 30^0 , 45^0 , 60^0 , 90^0 lik açıların sinüs ve cosinüs değerlerini bildikleri yöntemlerle bulmaları istenmiştir. Buna göre bu gruptaki öğrenciler sekizinci sınıfta öğrendikleri dik üçgen yöntemi ile bulmaya çalıştılar. Bazı öğrenciler dik üçgen yöntemini kullanarak soruların bazılarını doğru cevaplandırmış fakat 0^0 ile 90^0 lik açıların sinüs ve cosinüs değerlerini bazılarını hatalı olarak yanıtlamışlardır.

İkinci gruptaki öğrencilere ise dik üçgen yöntemi değil de parmak hesabı yöntemi ile 0^0 , 30^0 , 45^0 , 60^0 , 90^0 lik açıların sinüs ve cosinüs değerlerinin nasıl bulunacağı öğretilmiştir. Bu gruptaki çoğu öğrencinin bu açıların sinüs ve cosinüs değerlerinin doğru bulduğu tespit edilmiştir.

Birinci gruptaki öğrencilerin sonuçları :

	$Sin0^0$	$Sin30^0$	$Sin45^0$	$Sin60^0$	$Sin90^0$	$Cos0^0$	$Cos30^0$	$Cos45^0$	$Cos60^0$	$Cos90^0$
A.D	1	1/2	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	0	0	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}$	1/2	1
İ.N	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	0	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	1
D.K	1	1/2	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	0	0	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	1/2	1
A.A	0	1/2	1	$\sqrt{3}/2$	1	1	$\sqrt{3}/2$	1	1/2	0
B.K	0	1/2	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	0	0	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	1/2	0
O.Ş	0	1/2	1	$\sqrt{3}/2$	0	1	$\sqrt{3}/2$	1	1/2	1
E.Y	1	1/2	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}$	2	1
E.A	1		$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$		1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$		
S.K		1/2	1	$\sqrt{3}/2$			$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	
E.E.Ç	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
Ö.M	1	1/2	1	$\sqrt{3}/2$	0	0	$\sqrt{3}/2$	1	1/2	1
B.K.T	0	1/2	1/2	$\sqrt{3}/2$	0	0	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	1
B.B	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	0		$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
B.Ö	0	1/2	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	0	0	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	1/2	0
A.B	0	1/2	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	0	0	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	1/2	0
İ.S	0	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	0	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	1/2	$\sqrt{3}/2$
E.Ö	0	1/2	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	0	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	1/2	1
I.D	0	$1/\sqrt{2}$	1/2	1/3	1		1/3	1/2	$\sqrt{2}$	

Tablo 4.1: 1. Grup öğrenci sonuçları

İkinci gruptaki öğrencilerin sonuçları:

	$Sin0^0$	$Sin30^0$	$Sin45^0$	$Sin60^0$	$Sin90^0$	$Cos0^0$	$Cos30^0$	$Cos45^0$	$Cos60^0$	$Cos90^0$
N.D	*0*	*1/2*	*1*	$\sqrt{3}/2$	*1*	*1*	$\sqrt{3}/2$	*1*	*1/2*	*0*
U.E	*0*	*1/2*	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	*1*	*1*	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	*1/2*	*0*
E.K	*0*	*1/2*	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	*1*	*1*	$\sqrt{3}/2$	*1*	*1/2*	*2*
Y.D	*0*	*1/2*	*1*	$\sqrt{3}/2$	*1*	*1*	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	*1/2*	*0*
E.T	*0*	*1/2*	*1*	$\sqrt{3}/2$	*1*	*1*	$\sqrt{3}/2$	*1*	*1/2*	*0*
E.T.E	*0*	*1/2*	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	*1*	*1*	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	*1/2*	*0*
T.M	*0*	*1/2*	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	*1*	*1*	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	*1/2*	*0*
B.N	*0*	*1/2*	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	*1*	*1*	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	*1/2*	*0*
B.G	*0*	*1/2*	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	*1*	*1*	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	*1/2*	*0*
A.B	*0*	*1/2*	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	*1*	*1*	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	*1/2*	*0*
B.Ö	*0*	*1/2*	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	*1*	*1*	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	*1/2*	*0*
E.Ö	*0*	*1/2*	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	*1*	*1*	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	*1/2*	*0*
Ö.M	*0*	*1/2*	*1*	$\sqrt{3}/2$	*1*	*1*	$\sqrt{3}/2$	*1*	*1/2*	*0*
E.E.Ç	*0*	*1/2*	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	*1*	*1*	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	*1/2*	*0*
B.K.T	*0*	*1/2*	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	*1*	*1*	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	*1/2*	*0*
B.B	*0*	*1/2*	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	*1*	*1*	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	*1/2*	*0*
İ.S	*0*	*1/2*	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	*1*	*1*	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	*1/2*	*0*
I.D	*0*	*1/2*	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	*1*	*1*	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	*1/2*	*0*

Tablo 4.2: 2. Grup öğrenci sonuçları

Son dokuz öğrenci iki ayrı grupta da yer almışlardır.

Birinci gruptaki tüm öğrencilerin değerlendirilmesi:

	Doğru	Yanlış	Boş	Yüzdelik
$Sin0^0$	12	5	1	% 66
$Sin30^0$	15	2	1	% 83
$Sin45^0$	9	9	0	% 50
$Sin60^0$	16	2	0	% 88
$Sin90^0$	6	10	2	% 33
$Cos0^0$	9	6	3	% 50
$Cos30^0$	16	2	0	% 88
$Cos45^0$	11	7	0	% 61
$Cos60^0$	15	2	1	% 83
$Cos90^0$	6	9	3	% 33

Tablo 4.3: 1.Grup öğrencilerin değerlendirilmesi

İkinci gruptaki tüm öğrencilerin değerlendirilmesi:

	Doğru	Yanlış	Boş	Yüzdelik
$Sin0^0$	18	0	0	% 100
$Sin30^0$	18	0	0	% 100
$Sin45^0$	14	4	0	% 77
$Sin60^0$	18	0	0	% 100
$Sin90^0$	18	0	0	% 100
$Cos0^0$	18	0	0	% 100
$Cos30^0$	18	0	0	% 100
$Cos45^0$	14	4	0	% 77
$Cos60^0$	18	0	0	% 100
$Cos90^0$	17	1	0	% 95

Tablo 4.4: 2.Grup öğrencilerin değerlendirilmesi

Birinci gruptaki ortak öğrencilerin değerlendirilmesi:

	Doğru	Yanlış	Boş	Yüzdelik
$Sin0^0$	*8*	*1*	*0*	*% 90*
$Sin30^0$	*7*	*2*	*0*	*% 80*
$Sin45^0$	*6*	*3*	*0*	*% 70*
$Sin60^0$	*8*	*1*	*0*	*% 90*
$Sin90^0$	*4*	*5*	*0*	*% 45*
$Cos0^0$	*4*	*3*	*2*	*% 45*
$Cos30^0$	*8*	*1*	*0*	*% 90*
$Cos45^0$	*7*	*2*	*0*	*% 80*
$Cos60^0$	*8*	*1*	*0*	*% 90*
$Cos90^0$	*4*	*4*	*1*	*% 45*

Tablo 4.5: 1.Grup ortak öğrencilerin değerlendirilmesi

İkinci gruptaki ortak öğrencilerin değerlendirilmesi:

	Doğru	Yanlış	Boş	Yüzdelik
$Sin0^0$	*9*	*0*	*0*	*% 100*
$Sin30^0$	*9*	*0*	*0*	*% 100*
$Sin45^0$	*8*	*1*	*0*	*% 90*
$Sin60^0$	*9*	*0*	*0*	*% 100*
$Sin90^0$	*9*	*0*	*0*	*% 100*
$Cos0^0$	*9*	*0*	*0*	*% 100*
$Cos30^0$	*9*	*0*	*0*	*% 100*
$Cos45^0$	*8*	*1*	*0*	*% 90*
$Cos60^0$	*9*	*0*	*0*	*% 100*
$Cos90^0$	*9*	*0*	*0*	*% 100*

Tablo 4.6: 2.Grup ortak öğrencilerin değerlendirilmesi

Birinci grupta yapılan değerlendirmede öğrencilerin en çok $sin30^0$, $sin60^0$, $cos30^0$, $cos60^0$ değerlerini iyi bildikleri gözlendi. Birinci gruptaki bazı öğrencilerin bazı soruları boş bıraktıkları da gözlenmiştir. Bazı öğrencilerin de işlem hatası yaparak yanlış cevap verdikleri gözlenmiştir. Tüm bunları değerlendirmeye aldığımızda birinci gruptaki öğrencilerin hata payı da göz önüne alınırsa başarı oranına yaklaşık olarak % *70* diyebiliriz.

İkinci grupta yapılan değerlendirmede öğrencilerin sadece $sin45^0$ ve $cos45^0$ değerlerinde hata yaptıkları gözlenmiştir. Bir kişi de sadece $cos90^0$ değerini yanlış bulmuştur. Diğer değerlerde, öğrencilerin soruları doğru cevaplandırdığı gözlenmiştir. Tüm bunları değerlendirmeye aldığımızda ikinci gruptaki öğrencilerin başarı oranına yaklaşık olarak *% 95* diyebiliriz.

Her iki gruptaki ortak öğrencileri değerlendirmeye aldığımızda birinci gruptaki öğrencilerin başarı oranına yaklaşık olarak *% 75* diyebiliriz. İkinci gruptaki öğrencilerin başarı oranına yaklaşık olarak *% 98* diyebiliriz.

Bütün bu değerlendirmeleri göz önüne aldığımız zaman yaptığımız bu çalışmada bizim öğrettiğimiz parmak hesabıyla bazı açıların trigonometrik oranlarını bulma yönteminin başarılı olduğunu söyleyebiliriz. Bu yöntemi öğrencilerin problemleri çözerken kullanacağını düşünebiliriz. Burada öğrenciler kesinlikle zaman kaybı yaşamayacaklardır. Tam tersine öğrencilere zamandan tasarruf sağlayacaktır. Bu yöntemin sekizinci sınıftan on ikinci sınıfa kadar okuyan tüm öğrencilere faydası olacaktır.

Zorlu işleri kolaylaştırarak yapmak insan doğasında var olan bir şeydir. Biz de trigonometriyi kolaylaştırarak öğrencilere sunduğumuz zaman , öğrencilerin daha verimli çalıştıklarını ve doğru bilgiler edindiklerini kanıtlamış olduk. Geometrinin, matematiğin kolayını bulmuş bir öğrenci an itibariyle büyük kazanç sağlamış olur.

Yaptığım çalışmalar sonucu gördüm ki; öğrenciler bazı yöntemlerle, formüllerle, kurallarla soruları daha kolay yorumluyorlar. Parmak hesabıyla trigonometri yöntemi de bunlardan biri. Bu yöntemin tek kazancı zaman değil. Bu yöntemi kullanarak bizler kötü bir alışkanlık olan ezber yapma yolunu kullanmayarak beynimizi yormadan problemleri çözüyoruz. Pratik düşünüp hızlı karar vermek insanlara iş hayatlarında çok büyük fayda sağlar. Bu da okulda öğrenilen pratik çözümlerden

geçer. Öğrenci bu yöntemle hem pratik düşünüp hızlı yanıtlar verir, hem zaman kazanır. Bir hayat yarışı olarak bilinen üniversite sınavında rakiplerinizi geçmek pratik zekâya, hızlı düşünmeye bağlıdır. Bu yöntemi kullanmak, rakiplerinize fark atmanın bir başka yoludur. Parmak hesabıyla trigonometrinin kazandırdığı başarılar pratik zekânın bir ürünüdür. Öğrenciler soru çözerken uzun yolları, zaman kaybını sevmezler. Onlar daha kısa zamanda ve daha kolay bir çözüm yöntemi kullanmak isterler. Bu yöntemle öğrenciler amaçlarına daha kolay bir şekilde ulaşacaklar.

Parmak hesabı yöntemi ile trigonometrik tablodaki özel açıların değerlerini bulmak öğrenciler için daha zevkli ve daha kalıcı bir şekle dönüşüyor. Soyutluktan ibaret olan matematiğin trigonometri konusunu somutlaştırarak öğrenmek daha akılda kalıcı bir hale dönüşür.

Bu yöntemin benzerini TÜBİTAK'ın düzenlediği "Bu Benim Eserim" proje yarışmasında, Tunceli ili Özel Öz Munzur İlköğretim Okulundan, öğretmen Mustafa Kamuran ÖZCAN danışmanlığında, Mücahit Furkan YILDIZ isimli bir öğrencinin yaptığını tespit ettim. Bizim yöntemimiz de bazı 8. Sınıf öğrencilerine uygulandığından değerlendirmemiz daha yapıcı olmuştur [37].

5. BÖLÜM

SONUÇ

Bu çalışmada matematiksel modellemelerin problem çözümündeki kolaylıkları ve orta öğretimdeki kolaylıklar görülmüştür. Matematiksel modellemenin bir problemin çözümünde izlenilecek yollarla problem daha kısa sürede çözüleceği görülmüştür. Bu da bize orta öğretimdeki birçok derste problemleri günlük hayattaki olaylarla ilişkilendirip daha kolayca çözülebileceğini göstermiştir.

Bölüm 3’ te orta öğretimdeki fonksiyon konusunun değerlendirilmesi yapılmıştır. Burada Milli Eğitim Bakanlığı’nın yeni müfredatta matematiksel modelleme yöntemini kullandığı görülmüştür.

Bölüm 4' te ise trigonometrik oranları parmak hesabı ile bulunması gösterildi. Buradaki modelleme ile öğrenme daha da kolaylaşmıştır. Buna benzer yöntemlerle dersler daha zevkli işlenecektir. Dersler daha kolay öğrenilecektir. Çünkü günlük hayatla ilişkilendirilen tüm konular kolay anlaşılır ve problemler daha çabuk kavranılır ve daha hızlı çözülür.

KAYNAKLAR

[1] http://kadiri.bilkent.edu.tr/mat.donem.odev/aykutaydin.matematikselmodelleme erişim tarihi 20.04.2014

[2] Lesh, R. ve Doerr, H.M. (2003). (Eds). Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning and Teaching. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

[3] Sriraman, B. (2005). Conseptualizing the Notion of Model Eliciting. Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Sant Feliu de Guixols, Spain.

[4] Lingefjard, T. (2006). Faces of Mathematical Modelling. Zentralblatt für Didaktik der Mathematic-ZDM. 38(2),96-112.

[5] Milli Eğitim Bakanlığı (MEB). (2006). Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Proğramı. Ankara MEB Basımevi.

[6] Berry, J. ve K. Houston (1995). Mathematical Modelling. Bristol: J.W. Arrowsmith Ltd.

[7] Blum, W. ve Niss, M. (1991). Applied Mathmatical Problem Solving, Modelling, Application, and Links to Other Subjects-State, Trends and Issues in Mathematics İnstruction. *Educational Studies in Matematics* . 22(1),37-68.

[8] English, L. D. ve Watters, J. J. (2004). Mathematical Modeling in the Early School Years. *Mathematics Education Research Journal*. 16(3), 59-80.

[9] Kaiser, G. (2005). Introduction to the Working Group "Applications and Modelling". CERME4 Proceedings, p 1611-1622.

[10] Lingefjard, T. (2000). Mathematical Modeling by Prospective Teachers Using Technology. Electronically published doctoral dissertation , University of Georgia. http://ma-serv.did.gu.se/matematik/thomas.htm erişim tarihi 28.04.2014

[11] Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. D. A. Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 334-370). Macmillan: New York.

[12] Abrams, J. P. (2001). Mathematical Modeling: Teaching the Open-Ended Application of Mathematics. The Teaching Mathematical Modeling and the of Representation. 2001 Yearbook, NCTM, (Eds. Cuoco, A. A. and Curcio, F. R.).

[13] Berry, J. ve Davies, A. (1996) Written Reports. in C. R. Haines and S. Dunthorne (eds) Mathematics Learning and assessment: Sharing Innovative Practices. London: Arnold, 3.3-3.11.

[14] Blomhoj, M. ve Jensen T. H. (2006). What's All the Fuss about Competencies? Experiences with Using a Competence Perspective on Mathematics Education to Develop the Teaching of Mathematical Modelling. In W. Blum, P. L. Galbraith and M. Niss: *Modelling and Applications in Mathematics Education*. New York: Springer, 2(2), 45-56.

[15] Blum, W. ve Leib, D. (2007). How Do Students and Teachers Deal With Modelling Problems? İn C. Haines et al. (Eds), *Mathematical Modelling. Education, Engineering and Economics.* Chichester: Horwood. 222-231.

[16] Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and Empirical Differentiations of Phases in the Modelling Process. in Kaiser, G.,Sriraman B. & Blomhoij, M.(Eds) *Zentralblattfür Didaktik der Mathematic*. 38(2),86-95.

[17] Cheng, A. K. (2001). Teaching Mathematical Modelling in Singapore Schools. *The Matematics Educator*. 6(1), 63-75.

[18] Cheng, A. K. (2006). *Differential Equations: Models and Methods*. Mc Graw-Hill, Singapore.

[19] Cheng, A. C. (2010). Teaching and Learning Mathematical Modelling with Technology, Nanyang Techological University. http://atcm.mathandtech.org/ep2010/invited/3052010_18134.pdf erişim tarihi 29.04.2014

[20] Galbraith, P., ve Stillman, G. (2006). A Framework for identifying Student Blockages During Transitions in the modelling Process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematic*-ZDM. 38(2), 143-162.

[21] Müller, G., ve Wittmann, E.(1984). Der Mathematikunterricht in der Primarstufe . Braunschweig: Vieweg.

[22] Mason, J. (1988). Modelling: What Do We Really Want Pupils to Learn? in D. Pimm (Ed.), *Mathematics, Teachers and Children*. (pp. 201-215). London:Hodder & Stoughton.

[23] Schoenfeld, A. H. (1985). Mathematical Problem Solving. San Diego: Academic Press inc.

[24] Hıdıroğlu, Ç. N. (2012). Teknoloji destekli ortamda matematiksel modelleme problemlerinin çözüm süreçlerinin analiz edilmesi: Yaklaşım ve düşünme süreçleri üzerine bir açıklama.Yüksek Lisans Tezi. Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir.

[25] Pala, M., Y. O. Devres (1987). Bilgisayar yardımı ile soğuk hava tesislerinde enerji tasarrufu önlemlerinin belirlenmesi. *Gıda Sanayii Dergisi*, Cilt 1, No 3, Ağustos-Eylül, 14-23, İstanbul.

[26] Pala, M., Y. O. Devres (1988a). Computer simulated model for power consumption and weight loss in a cold store. Col Chain in Economic Perspective, latermational İnstitute of Refrigeration, Section B1 Comission Meeting. 17th-20th May.Wageningen, Holland.

[27] Pala, M., Y. O. Devres (1988b). Bilgisayar benzeşimli model ile bir soğuk hava deposunda ısı kazancı ve ürün nem kaybının incelenmesi, *Gıda Sanayii Dergisi*, Cilt 2, sayı 4, Eylül-Ekim, 19-26.

[28] Pala, M., Y. O. Devres (1990). Soğuk hava tesislerinin tasarım özellikleri ve enerji tasarrufuna yönelik pratik uygulamalar, *Gıda sanayii* 4(1) 36-45.

[29] Anonymous, (1985). Frezind and defrosting time of food. “in ASHRAE Fundamentals Handbook”, Chapter 30,1985.

[30] Devres, Y. O. (1991). Dondurulmuş gıdaların çözündürme işlemlerinin modellenmesi ve çözündürme kayıplarının azaltılması. Doktora Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 184 sayfa, İstanbul.

[31] Robe, K. (1990). CIM- The big Picture, 1980’s: computer integrated manufactuning. 1990’s: *computer integrated management, Food Processing, Putman Publication,* March, 37-48.

[32] kutuphanem.bilgievi.gen.tr internet sitesinden temin edilmiştir.Erişim tarihi 20.04.2015

[33] Milli Eğitim Bakanlığı (MEB).(2012). *Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Proğramı*. Ankara MEB Basımevi.

[34] Dikey Yayıncılık (2012). *MEB tavsiyeli Orta Öğretim Matematik Dersi Öğretim Proğramı*. Ada Matbacılık Ltd. Şti. Ankara.

[35] Milli Eğitim Bakanlığı (MEB). (2013). *Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Proğramı*. Ankara MEB Basımevi.

[36] Thomas, G, B. , Weir M, D., Hass J, R. (2010), *Thomas Calculus Twelfth Edition,* Pearson.

[37] Parmak Hesabıyla Trigonometrik Oranlar. http//www.bilimşenliği.com/ adresinden temin edilmiştir. Erişim tarihi 30.04.2014.