ÇANKIRI KARATEKİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KOROVKIN-TİPLİ TEOREMLER VE LİNEER POZİTİF OPERATÖRLER İLE YAKLAŞIM

Mehmet AY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇANKIRI
2022

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Mehmet AY tarafından hazırlanan **"Korovkin-Tipli Teoremler ve Lineer Pozitif Operatörler ile Yaklaşım"** adlı tez çalışması 23/11/2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** Doç. Dr. Gülsüm ULUSOY ADA

Jüri Üyeleri **:**

Başkan **:** Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ
Matematik Anabilim Dalı
Ankara Üniversitesi

Üye **:** Doç. Dr. Gülsüm ULUSOY ADA
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Üye **:** Doç. Dr. Gonca DURMAZ GÜNGÖR
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. İbrahim ÇİFTÇİ
Enstitü Müdürü

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum "**Korovkin-Tipli Teoremler ve Lineer Pozitif Operatörler ile Yaklaşım**" konulu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, tezin Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nden başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve bu çalışmanın Çankırı Karatekin Üniversitesi tarafından kullanılan "Bilimsel İntihal Tespit Programı"yla tarandığını, "intihal içermediğini" beyan ederim. Çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması halinde ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm. Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim (23/11/2022).

Mehmet AY

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KOROVKIN-TİPLİ TEOREMLER VE LİNEER POZİTİF OPERATÖRLER İLE YAKLAŞIM

Mehmet AY

Çankırı Karatekin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Gülsüm ULUSOY ADA

Bu tezde, Korovkin altkümeleri ve Korovkin altuzayları üzerinde lineer pozitif operatör dizileri için Korovkin tip teoremler incelendi. Bu amaçla ilk olarak X bir kompakt metrik uzayı (ve buradan $C_0(X) = C(X)$) olduğu özel durumunda $C(X)$ uzayında tanımlı lineer pozitif operatör dizileri için Korovkin alt uzaylarını karakterize eden Korovkin tip teoremler verildi. $C(X)$ üzerindeki özdeşlik operatörü için Korovkin alt kümeleri karakterize edildi. Ağırlıklı sürekli fonksiyon uzayları ve $L^p(X, \tilde{\mu})$ uzaylarında Korovkin-tipi teoremler incelendi. Sürekli fonksiyonların uzaylarındaki Korovkin-tipi teoremler kullanılarak $L^p(X, \tilde{\mu}) -$ uzayları, $1 \leq p < +\infty$, için bazı sonuçlar elde edildi. Korovkin tipi teoremler ile Stone-Weierstrass teoremleri arasındaki bağlantılar incelendi. Bir lineer pozitif izdüşümler sınıfı için bazı Korovkin tipi teoremler verildi.

2022, 65 sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Korovkin tip teoremler, lineer pozitif operatör dizileri, Korovkin altkümesi, Korovkin altuzayı

ABSTRACT

Master of Science Thesis

KOROVKIN-TYPE THEOREMS AND APPROXIMATION BY POSITIVE LINEAR OPERATORS

Mehmet AY

Çankırı Karatekin University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Gülsüm ULUSOY ADA

In this thesis, Korovkin type theorems for linear positive operator sequences on Korovkin subsets and Korovkin subspaces are investigated. For this purpose, firstly, Korovkin type theorems characterizing Korovkin subspaces are given for linear positive operator sequences defined in $C(X)$ space in the special case where X is a compact metric space (and hence $C_0(X) = C(X)$). For the identity operator on $C(X)$, Korovkin subsets were characterized. Korovkin-Type theorems in weighted continuous function spaces and $L^p(X, \tilde{\mu})$ −spaces are investigated. By using the Korovkin-type theorems on spaces of continuous functions, some results are obtained for $L^p(X, \tilde{\mu})$ −spaces, $1 \leq p < +\infty$. The connections between Korovkin type theorems and Stone-Weierstrass theorems were examined. Some Korovkin type theorems are given for a class of linear positive projections.

2022, 65 pages

Keywords: Korovkin type theorems, sequences of positive linear operators, Korovkin subset, Korovkin subspace.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde konu, kaynak ve yöntem açısından yardımını esirgemeyen, her an yol gösteren, bu zorlu süreçte manevi desteğini daima hissettiğim, kariyerinde yeni başarılara imza atacağına inandığım, değerli bilgilerini ve birikimini benden esirgemeyen kıymetli danışman hocam Doç. Dr. Gülsüm ULUSOY'a teşekkürü bir borç biliyorum ve şükranlarımı sunuyorum.

Mehmet AY

Çankırı, Ekim 2022

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **i**

ABSTRACT ..... **ii**

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR ..... **iii**

İÇİNDEKİLER ..... **iv**

SİMGELER DİZİNİ ..... **v**

1. GİRİŞ **1**

2. TEMEL KAVRAMLAR **3**

2.1 Temel Bilgiler **3**

2.2 Lokal Kompakt Uzaylar Üzerindeki Bazı Sürekli Fonksiyon Uzayları **15**

3. $C(X)$ (X KOMPAKT), ÜZERİNDE ÖZDEŞLİK OPERATÖRÜ İÇİN KOROVKIN-TİPİ TEOREMLER **26**

4. AĞIRLIKLI SÜREKLİ FONKSİYON UZAYLARI VE $L^p(X, \tilde{\mu})$ UZAYLARINDA KOROVKİN-TİPİ TEOREMLER **33**

5. KOROVKIN-TİPİ TEOREMLER VE STONE-WEIERSTRASS TEOREMLERİ **48**

6. POZİTİF İZDÜŞÜMLER İÇİN KOROVKİN-TİPİ TEOREMLER **52**

KAYNAKLAR **62**

ÖZGEÇMİŞ **65**

SİMGELER DİZİNİ

$A(X)$	X üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar uzayı
$B(X)$	X üzerinde tanımlı sınırlı fonksiyonlar uzayı
$C(X)$	X üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı
$C_b(X)$	X üzerinde tanımlı sürekli ve sınırlı fonksiyonlar uzayı
$C_0(X)$	X üzerinde tanımlı sürekli ve sonsuzda sıfır olan fonksiyonlar uzayı
$K(X)$	X üzerinde tanımlı sürekli ve kompakt destekli fonksiyonlar uzayı
K_d	d-boyutlu simpleks
$M_b^+(X)$	Pozitif sınırlı Radon ölçülerinin uzayı
$UC_b(X)$	X üzerinde düzgün sürekli ve sınırlı fonksiyonlar uzayı

1. GİRİŞ

Korovkin tipi teoremler, belirli bir fonksiyon uzayı üzerinde etki eden verilen bir lineer pozitif operatörler dizisinin bir yaklaşım sürecini veya eşdeğer olarak, özdeşlik operatörüne kuvvetle yakınsadığını belirlemek için basit ve kullanışlı araçlar sağlar. Korovkin-tipli yaklaşım teorisinin, sadece klasik yaklaşım teorisinde değil aynı zamanda reel analiz, fonksiyonel analiz, harmonik analiz, ölçü teorisi ve olasılık teorisi, toplanabilirlik teorisi ve kısmi diferensiyel denklemler alanlarında önemli uygulamaları vardır.

1951 yılında Popoviciu, 1952 de Bohman ve 1953 te Korovkin, birbirinden bağımsız olarak, kompakt bir kümede sürekli olan fonksiyonlara polinomlar ile yaklaşımda, lineer pozitif operatör dizilerini kullanarak elde ettikleri teoreme göre; bir lineer pozitif L_n operatör dizisinin $[a,b]$ kompakt aralığında f sürekli fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $e_i(x) = x^i,\ i = 0,1,2$ fonksiyonları için $L_n(e_i)$ dizisinin e_i fonksiyonuna $[a,b]$ üzerinde düzgün yakınsak olmasıdır. Daha sonraki çalışmalarda Korovkin teoremi, fonksiyon uzayları, soyut Banach latisleri, Banach cebirleri ve Banach uzaylarına genişletilmiştir. Bu teorideki temel amaçlar aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

(i) $\{1, e_1, e_2\}$ kümesi için olduğu gibi aynı özelliği sağlayan başka fonksiyon alt kümeleri bulmak,

(ii) başka fonksiyon uzaylarında veya soyut Banach uzaylarında Korovkin teoremindeki benzer sonuçları elde etmek,

(iii) başka lineer operatör sınıflarında Korovkin teoremindeki benzer sonuçları elde etmek.

Bu tezin hazırlanmasında ağırlıklı olarak Altomare (2010) adlı çalışmadan yararlanılmıştır. Tezde $C(X)$ (X kompakt uzay), $L_p(X,\tilde{\mu}), 1 \leq p < \infty$ ve ağırlıklı sürekli fonksiyon uzaylarında tanımlanan lineer pozitif operatör dizileri için Korovkin alt

uzaylarını karakterize eden Korovkin tipli teoremler verildi. Bu uzaylar teoride merkezi bir rol oynar ve uygulamalarda en faydalı olanlardır.

Bu amaçla ilk olarak Bölüm 3'de X bir kompakt metrik uzayı (ve buradan $C_0(X) = C(X)$) olduğu özel durumunda $C(X)$ de tanımlanan lineer pozitif operatör dizileri için Korovkin alt uzaylarını karakterize eden Korovkin tipli teoremler gösterildi. $C(X)$ üzerindeki özdeşlik operatörü için Korovkin alt kümeleri karakterize edildi ve özdeşlik operatörü için Korovkin kümeleriyle ilgili çeşitli sonuçlar ve uygulamalar verildi. Bölüm 4'de ağırlıklı sürekli fonksiyon uzayları ve $L^p(X, \tilde{\mu})$ uzaylarında Korovkin-tipi teoremler incelendi. Sürekli fonksiyonların uzaylarındaki Korovkin-tipi teoremleri kullanarak $L^p(X, \tilde{\mu}) -$ uzayları, $1 \leq p < +\infty$, için sonuçlar elde edildi. Bölüm 5'de Korovkin tipi teoremler ile Stone-Weierstrass teoremleri arasındaki bağlantılar incelendi. Bölüm 6'da X kompakt bir uzay olmak üzere $C(X)$ üzerindeki pozitif izdüşümler sınıfı için bazı Korovkin tipi teoremler ispatlandı ve bunların Dirichlet problemlerinin ve diğer benzer problemlerin çözümlerinin yaklaşımına yönelik uygulamaları ile ilgili sonuçlar verildi.

Bölüm 3 ve 6'nın sonunda, bir lineer pozitif operatöre ve özel olarak bir pozitif izdüşüme karşılık gelen Bernstein-Schnabl operatörleri ile ilgili çeşitli uygulamalar sunduk. Bu operatörler, sadece sürekli fonksiyonların yaklaşımı için değil, aynı zamanda pozitif yarı grupların ve dolayısıyla başlangıç-sınır değer değişimi problemlerinin çözümleri için de faydalıdır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Temel Bilgiler

Tanım 2.1.1 Bir (X,d) metrik uzayı verilsin, her bir $x_0 \in X$ ve $r>0$ için, x_0 merkezli ve r yarıçaplı $B(x_0,r)$ ve $B'(x_0,r)$ sırasıyla, açık yuvar ve kapalı yuvarı aşağıda,

$$B(x_0,r) := \{x \in X \mid d(x_0,x) < r\}$$

ve

$$B'(x_0,r) := \{x \in X \mid d(x_0,x) \leq r\}$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.1.2 X üzerinde tanımlı tüm reel değerli fonksiyonların lineer uzayını $A(X)$ ile gösterelim. Eğer M, $A(X)$'in bir alt kümesi ise bu durumda $\mathcal{L}(M)$, M tarafından üretilen lineer alt uzayı belirtir.

$B(X)$ sembolü ile tüm $f : X \to \mathrm{R}$ sınırlı ve

$$\| f \|_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)| \quad (f \in B(X)) \tag{2.1}$$

ile tanımlanan düzgün yakınsaklık normu ile donatılmış ve bu norma göre bir Banach uzayı olan fonksiyonların lineer alt uzayını gösteririz.

$C(X)$ ve $C_b(X)$ sembolleri $A(X)$ de bulunan fonksiyonların bütün sürekli (ve sırasıyla sürekli ve sınırlı) lineer alt uzaylarını göstereceğiz.

Son olarak, $UC_b(X)$ ile $A(X)$'deki tüm düzgün sürekli ve sınırlı fonksiyonların lineer alt uzayını göstereceğiz. $C_b(X)$ ve $UC_b(X)$, $B(X)$'de kapalıdır ve dolayısıyla bunlar (2.1) denkleminde verilen norm ile donatılmış Banach uzaylarıdır.

Tanım 2.1.3 G, $A(X)$'in lineer alt uzayı olsun. Eğer G deki her f için

$$|f| \in G \tag{2.2}$$

oluyorsa G ye $A(X)$'in bir **latis alt uzayı**dır denir. Örneğin $B(X)$, $C(X)$, $C_b(X)$ ve $UC_b(X)$ uzayları latis alt uzaylardır.

(2.2) özelliğini dikkate alırsak, her bir $f, g \in G$ için

$$\sup(f,g)(x) := \sup\big(f(x), g(x)\big) \qquad (x \in X)$$

ve

$$inf(f,g)(x) := inf(f(x), g(x)) \qquad (x \in X)$$

olmak üzere $\sup(f,g) \in G$ ve $\inf(f,g) \in G$ olduğu görülür. Bu

$$\sup(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2} \text{ ve } \inf(f,g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}$$

temel özdeşliklerinden kolayca elde edilir. Daha genel bir ifadeyle, eğer $f_1,\ldots, f_n \in G, n \geq 3$ ise o halde $\sup_{1\leq i\leq n} f_i, \inf_{1\leq i\leq n} f_i \in G$ dir.

Tanım 2.1.4 Eğer her bir $f, g \in G$ için

$$f.g \in G$$

oluyorsa veya eşdeğer olarak her bir $f \in G$ için $f^2 \in G$ ise bu durumda $A(X)$'in G lineer alt uzayına bir **alt cebir**dir denir. Bu durumda, eğer $f \in G$ ve $n \geq 1$ ise o halde $f^n \in G$ olur ve dolayısıyla 0'da sıfıra eşit olan her bir

$$Q(f) := \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n \quad (x \in \square)$$

reel polinomu için,

$$Q(f) := \alpha_1 f + \alpha_2 f^2 + \cdots + \alpha_n f^n$$

fonksiyonu da G'ye de aittir. Eğer G sabit fonksiyonları içeriyorsa o halde her reel P polinomu için $P(f) \in G$ olur.

Bir alt cebir bir latis alt uzayı olmayabilir (örneğin , $C^1([a,b])$ böyledir). Fakat $C_b(X)$ in kapalı alt cebirleri latis alt uzayı olurlar.

Tanım 2.1.5 $A(X)$'in lineer bir G alt uzayı ve bir $\mu : G \to \square$ lineer fonksiyoneli verilsin. Eğer her bir

$$f \in G \text{ ve } f \geq 0 \text{ için } \mu(f) \geq 0$$

oluyorsa μ nün pozitif olduğunu söyleriz.

Bir lineer pozitif fonksiyonelin en basit örneği

$$\delta_a(f) := f(a) \quad (f \in G)$$

ile tanımlı $a \in X$ noktasında değerleme fonksiyonelidir.

Eğer (Y, d') başka bir metrik uzay iken $T : G \to A(Y)$ lineer operatörü için her bir

$$f \in G \text{ ve } f \geq 0 \text{ için } T(f) \geq 0$$

İse bu durumda T nin pozitif olduğunu söyleriz.

Her pozitif $T : G \to A(Y)$ operatörü G üzerinde

$$\mu_y(f) := T(f)(y) \quad (f \in G)$$

ile tanımlı lineer pozitif fonksiyonellerin $(\mu_y)_{y \in Y}$ ailesini doğurur.

Aşağıda hem lineer pozitif fonksiyonellerin hem de lineer pozitif operatörlerin bazı temel özelliklerini ifade edeceğiz. F sembolü ile ya $\mathbb{R}$ cismi ya da bir $A(Y)$ uzayını göstereceğiz, burada Y keyfi bir metrik uzaydır.

$A(X)$'in bir G lineer alt uzayını ve bir $T : G \to \mathrm{F}$ lineer pozitif operatörünü göz önüne alalım. Bu durumda

(i) Her bir $f, g \in G, \mathrm{f} \leq \mathrm{g}$ için,

$$T(f) \leq T(g)$$

dir.

(ii) G bir latis alt uzay iken her bir $f \in G$ için

$$|T(f)| \leq T(|f|)$$

dir.

(iii) (Cauchy-Schwarz eşitsizliği) G bir latis alt uzay iken aynı zamanda bir alt cebir ise o halde

$$T(|f.g|) \le \sqrt{T(f^2)T(g^2)} \qquad (f,g \in G) \tag{2.3}$$

dir. Özel olarak, $1 \in G$ ise, o halde

$$T(|f|)^2 \le T(1)T(f^2) \qquad (f \in G)$$

dir.

(iv) Eğer X kompakt, $1 \in G$ ve F ya $\square$ ya da $B(Y)$ ise o halde T süreklidir ve

$$\|T\| = \|T(1)\|$$

dir. Bu yüzden, eğer $\mu : G \to \square$ pozitif bir lineer fonksiyonel ise o halde μ süreklidir ve $\|\mu\| = \mu(1)$ dir.

Korovkin Teoremi

Korovkin teoremi $C([0,1])$ de lineer pozitif operatörlerin bir $(L_n)_{n\ge1}$ dizisinin verilmesi durumunda oldukça kullanışlı ve basit bir kriter sağlayan bir yaklaşım sürecidir, yani her bir $f \in C([0,1])$ için $[0,1]$ de düzgün olarak $L_n(f) \to f$ olmasıdır. Bunu ifade etmek için, $m \ge 1$ olmak üzere

$$e_m(t) := t^m \qquad (0 \le t \le 1)$$

fonksiyonlarına ihtiyacımız vardır.

Teorem 2.1.6 $(L_n)_{n\ge1}$, $C([0,1])$'den $A([0,1])$ içine bir lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun öyle ki her bir $g \in \{1, e_1, e_2\}$ için $[0,1]$ de düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} L_n(g) = g$$

dir. O halde her bir $f \in C([0,1])$ için $[0,1]$ de düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f) = f$$

dir (Korovkin 1953).

Tanım 2.1.7 Korovkin teoreminin (ilk teorem) $C([0,1])$ deki pozitif yaklaşım süreçleri çalışmasında pek çok kayda değer uygulamaları vardır. Bunlardan bir tanesi $C([0,1])$ üzerinde

$$B_n(f)(x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \qquad (2.4)$$

$(n \ge 1,\ f \in C([0,1]), 0 \le x \le 1)$ ile tanımlı **Bernstein operatörleri** ile ilgilidir. Her bir $B_n(f)$, derecesi n'den küçük veya eşit olan bir polinomu gösterir. Bernstein operatörleri Weierstrass (1885) deki yaklaşım teoremlerine (cebirsel version) yapıcı bir ispat oluşturmak için Bernstein (1913) tarafından tanıtıldı.

Teorem 2.1.8 Her bir $f \in C([0,1])$ ve $[0,1]$ aralığında

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f) = f$$

düzgün yakınsaktır.

İspat. Her bir B_n, $C([0,1])$ üzerinde bir lineer pozitif operatördür. Buna ek olarak, her $n \geq 1$ için

$$B_n(1) = 1, B_n(e_1) = e_1 \text{ ve } B_n(e_2) = \frac{n-1}{n} e_2 + \frac{1}{n} e_1$$

olduğunu göstermek kolaydır. Dolayısıyla sonuç Teorem 3.1'den görülür.

Tanım 2.1.9 L.V. Kantorovich'in tanıttığı **Kantorovich polinomları** her bir $f \in L^p([0,1])$, $n \geq 1$, $0 \leq x \leq 1$ için

$$K_n(f)(x) := \sum_{k=0}^{n} \left[(n+1) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)\mathrm{d}t \right] \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

ile tanımlanır. Her bir $K_n(f)$ n'den büyük olmayan dereceden bir polinomdur ve her $K_n(f)$, $L^p([0,1])$ den (özellikle $C([0,1])$ den kendi içine) bir lineer pozitif operatördür (Kantorovich and Bernstein 1930).

Tanım 2.1.10 $L^p([0,1])$, $1 \leq p < +\infty$, üzerindeki pozitif yaklaşım operatörlerinin bir diğeri Bernstein-Durrmeyer operatörleridir ve $f \in L^p([0,1]), 0 \leq x \leq 1$ için

$$D_n(f)(x) := \sum_{k=0}^{n} \left(\int_0^1 (n+1) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} f(t)\mathrm{d}t \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

ile tanımlanır (Derrienic 1981).

Tanım 2.1.11 $1 \leq p < \infty$ için $[-\pi, \pi]$ üzerinde p. kuvveti Lebesgue integrallenebilen ve hemen her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x + 2\pi) = f(x)$ i sağlayan tüm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının (eşdeğerlik sınıflarının) Banach uzayını $L^p_{2\pi}(\mathbb{R})$ ile gösteririz. $L^p_{2\pi}(\mathbb{R})$ uzayı, $f \in L^p_{2\pi}(\mathbb{R})$ için

$$\|f\|_p := \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

normu ile donatılmıştır.

Tanım 2.1.12 $L^p_{2\pi}(\mathbb{R})$ deki bir $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ ailesi için eğer her bir φ_n pozitif, yani $\mathbb{R}$ üzerinde $\varphi_n \geq 0$ ve

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_n(t)dt = 1$$

ise $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ ye bir pozitif periyodik çekirdek adı verilir.

Tanım 2.1.13 $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ bir pozitif çekirdek verilsin. Tüm $\delta \in]0, \pi[$ sayıları için

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{-\delta}\varphi_n(t)\mathrm{d}t + \int_{\delta}^{\pi}\varphi_n(t)\mathrm{d}t = 0$$

oluyorsa bu durumda $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ pozitif çekirdeğine bir **yaklaşım özdeşliği** adı verilir.

Tanım 2.1.14 *d*-boyutlu;

$$K_d := \left\{ x = (x_i)_{1\le i\le d} \in \mathrm{R}^d \mid x_i \ge 0, 1 \le i \le d, \text{ ve } \sum_{i=1}^{d} x_i \le 1 \right\} \tag{2.5}$$

simpleksini göz önüne alalım ve her bir $n \ge 1, f \in C(K_d)$ ve $x = (x_i)_{1\le i\le d} \in K_d$ için

$$B_n(f)(x) := \sum_{\substack{h_1,\ldots,h_d=0,\ldots,n \\ h_1+\cdots+h_d\le n}} f\left(\frac{h_1}{n},\ldots,\frac{h_d}{n}\right) \frac{n!}{h_1!\cdots h_d!(n-h_1-\cdots-h_d)!} x_1^{h_1}\cdots x_d^{h_d}\left(1-x_1-\cdots-x_d\right)^{n-h_1-\cdots-h_d}$$

diyelim. $B_n(f)$ bir polinomdur ve buna genel olarak *d*-boyutlu simpleks üzerinde f ye karşılık gelen *n.* **Bernstein polinomu** denir. Bu polinomlar ilk olarak Dinghas tarafından çalışılmıştır (Dinghas 1951).

Her bir $f \in C(K_d)$ için K_d üzerinde düzgün olarak $\lim_{n\to\infty} B_n(f) = f$ sağlanır.

Lokal kompakt bir Hausdorff X uzayı verilsin. X üzerindeki tüm reel değerli sürekli ve kompakt destekli tüm fonksiyonların lineer alt uzayını $K(X)$ ile göstereceğiz. O halde $K(X) \subset C_b(X)$ dir. $\|.\|_\infty$ supremum normuna göre $K(X)$'in kapanışını $C_0(X)$ ile göstereceğiz.

Böylece, $C_0(X)$, $C_b(X)$'in bir kapalı alt uzayıdır ve buradan $\|.\|_\infty$ normu ile donatılmış bir Banach uzayıdır.

Eğer X kompakt ise o halde $C_0(X) = C(X)$ dir. Eğer X kompakt değil ise o halde $f \in C(X)$ fonksiyonu $C_0(X)$'e aittir ancak ve ancak her $\varepsilon > 0$ için X'in bir kompakt K alt kümesi vardır öyle ki her $x \in X \setminus K$ için $|f(x)| \le \varepsilon$ sağlanır.

$C_0(X)$ ve $C(X)$ uzayları, (X kompakt), supremum normu ile donatılmış Banach latisleri olurlar. Benzer şekilde $L^p(X,\tilde{\mu})$ doğal $\|\cdot\|_p$ normu ve

$$\tilde{\mu}\text{-a.e. } x\in X \text{ için eğer } f(x)\le g(x) \text{ ise } f\le g$$

sıralaması ile donatılmış bir Banach latisdir.

Tanım 2.1.15 Bir G Banach latisi bir $\|.\|$ normu ve G üzerinde $\le$ sıralaması ile donatılmış bir vektör uzayıdır öyle ki

(i) $(G,\|.\|)$ bir Banach uzayıdır;

(ii) $(G,\le)$ bir vektör latisidir;

(iii) Eğer $f_1, f_2 \in G$ ve $|f_1|\le|f_2|$ ise o halde $\|f_1\|\le\|f_2\|$ dir,
(burada her $f\in G$ için $|f|:=\sup(f,-f)$ dir).

Eğer G_1 ve G_2 Banach latisleri ve $S:G_1\to G_2$ bir lineer operatör olmak üzere, eğer

$$\text{her } f\in G_1,\ f\ge 0 \text{ için } S(f)\ge 0$$

oluyorsa S pozitiftir. Her $S:G_1\to G_2$ lineer pozitif operatörü süreklidir. Üstelik, eğer $G_1=C(X)$, X kompakt ise o halde $\|S\|=\|S(1)\|$ dir (Aliprantis and Burkinshaw 1985).

Tanım 2.1.16 Bir $S:G_1 \to G_2$ latis homomorfizmi her $f \in G_1$ için $|S(f)| = S(|f|)$ özelliğini sağlayan bir lineer operatördür. Eşdeğer olarak bu S nin sonlu latis işlemini koruması demektir, yani her $f_1,\ldots, f_n \in G_1,\ n \geq 2$ için

$$S\left(\inf_{1\leq i\leq n} f_i\right) = \inf_{1\leq i\leq n} S(f_i) \quad \text{ve} \quad S\left(\sup_{1\leq i\leq n} f_i\right) = \sup_{1\leq i\leq n} S(f_i)$$

olur.

Örneğin, eğer X bir lokal kompakt Hausdorff uzayı, $\tilde{\mu}$, X üzerinde bir regüler sonlu Borel ölçüsü ve $1 \leq p \leq +\infty$ ise o halde $J_p(f) := f \ \left(f \in C_0(X)\right)$ ile tanımlanan bir $J_p : C_0(X) \to L^p(X, \tilde{\mu})$ ifadesi bir latis homomorfizmidir.

Benzer şekilde, eğer X ve Y kompakt uzaylar ve $\varphi : Y \to X$ bir sürekli dönüşüm ise o halde $T_\varphi(f) := f \circ \varphi, \left(f \in C(X)\right)$ bileşke operatörü $C(X)$'den $C(Y)$'ye bir latis homomorfizmidir. Her latis homomorfizmi pozitif ve dolayısıyla süreklidir. Bir $S:G_1 \to G_2$ bijeksiyonunun bir latis homomorfizmi olması için gerek ve yeter koşul S ve onun tersi S^{-1} in her ikisinin de pozitif olmasıdır. Bu durumda S ye latis izomorfizmi denir. G_1 ve G_2 arasında bir latis izomorfizmi varsa o halde G_1 ve G_2 ye latis izomorfiktir denir.

Aşağıdaki tanım teorinin en önemlilerinden birisidir ve ilk olarak Baskakov (1961) tarafından formüle edilmiştir.

Tanım 2.1.17 Bir G Banach latisinin bir M alt kümesine G 'nin **Korovkin alt kümesi** denir eğer G 'den G içine lineer pozitif operatörlerin her $(L_n)_{n\geq 1}$ dizisi için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa:

(i) $\sup_{n\geq 1}\|L_n\| < +\infty$

ve

(ii) her $g \in M$ için $\lim_{n\to\infty} L_n(g) = g$ dir,

buradan tüm $f \in G$ için $\lim_{n\to\infty} L_n(f) = f$ dir.

Eğer $G = C(X)$, X kompakt uzay ve **1** sabit fonksiyonu M tarafından üretilen $\mathcal{L}(M)$ lineer alt uzayına ait ise o halde (i) koşulu gereksizdir çünkü (ii)'nin bir sonucudur. Bu tanıma göre, Korovkin teoremini $\{1, e_1, e_2\}$ 'nin $C([0,1])$'de bir Korovkin kümesi olduğunu söyleyerek yeniden ifade edebiliriz.

Bir M alt kümesi G'nin bir Korovkin alt kümesidir ancak ve ancak M tarafından üretilen $\mathcal{L}(M)$ lineer alt uzayının bir Korovkin alt kümesi olmasıdır. Korovkin alt kümesi olan bir lineer alt uzayı G'nin Korovkin alt uzayı olarak tanımlayacağız. Eğer G_1 ve G_2 latis izomorfik ve $S: G_1 \to G_2$ bir latis izomorfizmi ise o halde G_1'in bir M alt kümesinin G_1'de bir Korovkin alt kümesi olması için gerek ve yeter koşul $S(M)$ nin G_2 'de bir Korovkin alt kümesi olmasıdır.

Tanım 2.1.18 G_1 ve G_2 Banach uzayları olsun ve bir lineer pozitif $T: G_1 \to G_2$ operatörünü göz önünde bulunduralım. Eğer G_1'den G_2 içine lineer pozitif operatörlerin her $(L_n)_{n\geq 1}$ dizisi için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa G_1'nin bir M altkümesine T için G_1'in bir Korovkin alt kümesi denir:

(i) $\sup_{n\geq 1}\|L_n\| < +\infty$

ve

(ii) Her $g \in M$ için $\lim_{n\geq 1} L_n(g) = T(g)$

dir. Bu ise her $f \in G_1$ için $\lim_{n\to\infty} L_n(f) = T(f)$ olması demektir.

Bu nedenle, bu tür alt kümeler, lineer pozitif operatörlerin eş sınırlı dizilerinin verilen belirli bir $T : G_1 \to G_2$ lineer pozitif operatörüne yakınsamasını araştırmak veya (genel olarak, daha basit) L_n, $n \geq 1$ lineer operatörleri anlamında T 'ye zayıf olarak yaklaşmak için kullanılabilir.

2.2 Lokal Kompakt Uzaylar Üzerindeki Bazı Sürekli Fonksiyon Uzayları

Tanım 2.2.1 X bir topolojik uzay olsun. Eğer X in her açık örtüsü sonlu bir alt örtüye sahip ise X e kompakttır denir. Bir topolojik uzayın bir alt kümesi, bağlantılı uzaylarda kompakt ise, onun kompakt olduğu söylenir. Bir topolojik uzayın, noktalarının her birinin kompakt bir komşuluğu varsa bu uzaya lokal kompakttır denir.

Aslında, X lokal kompakt ve Hausdorff ise (yani, $x_1, x_2 \in X$ farklı noktalarının her çifti için, sırasıyla x_1 ve x_2 nin U_1 ve U_2 komşulukları vardır, öyle ki $U_1 \cap U_2 = \emptyset$) o zaman X 'in her noktası bir temel kompakt komşuluk sistemine sahiptir.

Her kompakt uzay lokal kompakttır. $\mathbb{R}^d, \mathrm{d} \geq 1$, uzayları (kompakt olmayan) lokal kompakt uzayların temel örnekleridir. Ayrıca, eğer X lokal kompakt ise, o zaman bağlantılı uzaylarda X in her açık alt kümesi ve X in her kapalı alt kümesi lokal kompakttır.

Daha genel olarak, bağlantılı uzaylarda lokal kompakt bir Hausdorff uzayının bir alt kümesi, ancak ve ancak X in açık bir alt kümesinin X in kapalı bir alt kümesi ile kesişimi ise lokal kompakttır. Bu nedenle, her reel aralık lokal kompakttır (Engelking 1989).

Tanım 2.2.2 Bir X topolojik uzayının topolojisi X üzerindeki bir metrikten elde edilebiliyorsa, bu durumda X e metriklenebilirdir denir. Bu halde, eğer böyle bir metrik tam ise X in tam olduğunu söyleriz. Her kompakt metriklenebilir uzayın tam ve ayrılabilir olduğuna, yani, sayılabilir yoğun bir alt küme içerdiğine içerdiğini biliyoruz.

Ölçü teorisinde ve Korovkin-tipi yaklaşım teorisinde sayılabilir bir tabana (veya tabanlara) sahip, yani, her açık alt kümenin onun bir alt ailesinin birleşimi olduğu sayılabilir bir açık alt küme ailesi ile lokal kompakt Hausdorff uzayları önemli rol oynar. Bu tür uzaylar metriklenebilir, tam ve ayrılabilirdir. Aslında, metriklenebilir bir uzayın sayılabilir bir tabanının bulunması için gerek ve yeter koşul bu uzayın ayrılabilir olmasıdır.

$\mathbb{R}^d$, d ≥ 1, uzayları ve bunların her bir açık veya kapalı alt kümesi sayılabilir bir tabanı olan lokal kompakt Hausdorff uzaylarıdır.

Tanım 2.2.3 X lokal kompakt Hausdorff uzayı ve $f: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f nin (kapalı) desteği

$$supp(f) = \overline{\{x \in X | f(x) \neq 0\}}$$

ile tanımlanır. Desteği kompakt olan tüm $f: X \to \mathbb{R}$ reel değerli sürekli fonksiyonlarının lineer uzayını $K(X)$ ile gösteririz. $K(X)$, $C_b(X)$ uzayının bir latis alt uzayıdır ve eğer X kompakt ise $C(X)$ ile çakışır.

Aşağıdaki sonuç, $K(X)$ de yeterince çok fonksiyon olduğunu göstermektedir.

Teorem 2.2.4 (Urysohn lemması) X in her K kompakt alt kümesi ve K yı içeren her açık U alt kümesi için $\varphi \in K(X)$ vardır öyle ki K üzerinde $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi = 1$ ve $supp(\varphi) \subset$ U dır (ve dolayısıyla $K \backslash U$ üzerinde $\varphi = 0$ dır).

Diğer bir temel fonksiyon uzayı, $C_b(X)$ deki sup normuna göre $K(X)$ in

$$C_0(X) \coloneqq \overline{K(X)}$$

kapanışı olarak tanımlanan $C_0(X)$ uzayıdır. Böylece, $C_0(X)$, $C_b(X)$ in kapalı bir lineer alt uzayıdır ve bu nedenle, sup-norm ile donatılmış, bir Banach uzayıdır.

Urysohn lemması anlamında, $C_0(X)$ de yer alan fonksiyonların aşağıdaki karakterizasyonunu ispatlamak zor değildir.

Teorem 2.2.5 X in kompakt olmadığını varsayalım. Bir $f \in C(X)$ fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

(i) $f \in C_0(X)$;

(ii) $\{x \in X | \, |f(x)| \geq \varepsilon\}$ her $\varepsilon > 0$ için kompakttır;

(iii) her $\varepsilon > 0$ için, X in bir K kompakt alt kümesi vardır öyle ki her $x \in X \backslash K$ için $|f(x)| \leq \varepsilon$ dir.

Önceki teorem nedeniyle, $C_0(X)$ de bulunan fonksiyonların sonsuzda sıfır olduğu söylenir. X bir kompakt uzay ise, bu durumda $C_0(X) = C(X)$ olur. Üstelik, $C_0(X)$, $C_b(X)$ in bir latis alt uzayıdır ve sup-norm ile donatılmış, X in sayılabilir bir tabanı olması koşuluyla ayrılabilirdir.

$C_0(X)$ deki fonksiyonların başka bir karakterizasyonu, X in noktalarının sonsuza yakınsayan dizilerini içerir. Daha kesin olarak, X in kompakt olmadığı varsayılırsa, X deki bir $(x_n)_{n\geq 1}$ dizisi, eğer X in her kompakt K alt kümesi için, $\nu \in \mathbb{N}$ varsa öyle ki her $n \geq \nu$ için $x_n \in X \setminus K$ ise X in sonsuz noktasına yakınsaktır denir. Böyle bir dizi ve her $f \in C_0(X)$ için

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \tag{2.6}$$

olur.

Karşıt olarak, X in sonsuz noktasında yakınsayan her $(x_n)_{n\geq 1}$ dizisi için (2.6) denklemini sağlayan bir $f \in C(X)$ fonksiyonu, X in sonsuzda sayılabilir olması koşuluyla zorunlu olarak $C_0(X)$ de bulunur, yani o X in kompakt altkümelerinin bir dizisinin birleşimidir. Yine dikkat edilirse X in sonsuzda sayılabilirdir ancak ve ancak her $x \in X$ için $f_0(x) > 0$ olacak şekilde $f_0 \in C_0(X)$ dir. Üstelik, X sayılabilir bir tabana sahip ise o zaman X sonsuzda sayılabilirdir.

Korovkin-tipi yaklaşım teorisinde önemli bir rol oynayan faydalı bir araç Radon ölçüleri ile verilmektedir. Aslında tanım gereği sadece $C_0(X)$ üzerinde lineer pozitif fonksiyoneller olan **pozitif sınırlı Radon ölçülerini** ele alacağız.

Tanım 2.2.6 Pozitif sınırlı Radon ölçülerinin tamamının kümesini $M_b^+(X)$ ile gösteririz. Her $\mu \in M_b^+(X)$, yani, her $\mu: C_0(X) \to \mathbb{R}$ lineer pozitif fonksiyonel süreklidir (supremum norma göre) ve normu

$$\|\mu\| \coloneqq sup\{|\mu(f)| \mid f \in C_0(X), |f| \leq 1\} \tag{2.7}$$

μ toplam kütlesi olarak da adlandırılır.

Sınırlı pozitif Radon ölçüsünün basit bir örneği, bir $a \in X$ noktasındaki Dirac ölçüsü tarafından sağlanır ve

$$\delta_a(f) \coloneqq f(a) \quad (f \in C_0(X))$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.2.7 Dirac ölçülerinin pozitif bir lineer birleşimine (pozitif) ayrık ölçü denir. Diğer bir deyişle, bir $\mu \in M_b^+(X)$ Radon ölçüsü ayrıktır eğer sonlu sayıda $a_1, \cdots, a_n \in X, n \geq 1$, noktaları ve sonlu sayıda pozitif $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ reel sayıları varsa öyle ki

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{a_i}$$

ise, yani her $f \in C_0(X)$ için

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(a_i) \tag{2.8}$$

dir. Bu halde, $\|\mu\| = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ dir ve μ ye $\{a_1, \cdots, a_n\}$ üzerinde desteklenir denir.

X üzerindeki pozitif sınırlı Radon ölçüleri ile (pozitif) sonlu Borel ölçümleri arasında güçlü bir ilişki vardır. Bunu kısaca açıklamak için, X teki Borel σ-cebrinin tanım gereği X in tüm açık alt kümelerinin sistem tarafından üretilen σ-cebiri olduğunu hatırlayalım. Onu $\mathcal{B}(X)$ ile gösterecek ve elemanları X in Borel alt kümeleri olarak adlandırılacağız. X in açık alt kümeleri, kapalı alt kümeleri ve kompakt alt kümeleri Borel alt kümeleridir.

Tanım 2.2.8 X üzerindeki $\tilde{\mu}$ bir **Borel ölçüsü**, tanım olarak, bir $\tilde{\mu}: \mathcal{B}(X) \to [0, +\infty]$ ölçüsüdür öyle ki, X in her kompakt K alt kümesi için

$$\tilde{\mu}(K) < +\infty$$

olur. $\mathcal{B}(X)$ üzerindeki her sonlu $\tilde{\mu}$ ölçüsü, yani $\tilde{\mu}(X) < +\infty$, bir Borel ölçüsüdür.

Bir $\tilde{\mu}: \mathcal{B}(X) \to [0, +\infty]$ ölçüsü eğer her $B \in \mathcal{B}(X)$ için

$$\tilde{\mu}(B) = sup\{\tilde{\mu}(K) |\, K \subset B, K \text{ kompakt}\}$$

ise iç regülerdir denir eğer her $B \in \mathcal{B}(X)$ için

$$\tilde{\mu}(B) = inf\{\tilde{\mu}(U) |\, B \subset U, U \text{ açık}\}$$

sağlanıyorsa dış regülerdir denir.

Bir $\tilde{\mu}$ ölçüsü hem iç regüler hem de dış regüler ise $\tilde{\mu}$ ölçüsüne regülerdir denir. $\mathbb{R}^d, \mathrm{d} \geq 1$, üzerindeki Lebesgue-Borel ölçüsü regülerdir. Aslında, eğer X in sayılabilir bir tabanı varsa, o zaman X üzerindeki her Borel ölçüsü regülerdir (Bauer 2001).

Eğer $\tilde{\mu}$, $\mathcal{B}(X)$ üzerinde sonlu bir ölçü ise, o zaman her $f \in C_b(X)$ $\tilde{\mu}$-integrallenebilirdir. Dolayısıyla, X üzerinde pozitif sınırlı Radon ölçüsü $I_{\tilde{\mu}}$ yi şu şekilde tanımlayabiliriz:

$$I_{\tilde{\mu}}(f) \coloneqq \int_X f d\tilde{\mu} \quad (f \in C_0(X)). \tag{2.9}$$

O halde $\left\|I_{\tilde{\mu}}\right\| \leq \tilde{\mu}(\mathrm{X})$ dir ve eğer $\tilde{\mu}$ iç regüler ise $\left\|I_{\tilde{\mu}}\right\| = \tilde{\mu}(\mathrm{X})$ olur.

Nitekim, formül (2.9) aşağıdaki temel sonucun gösterdiği gibi, X üzerindeki tüm pozitif sınırlı Radon ölçümlerini tanımlar (Bauer 2001).

Teorem 2.2.9 (Riesz gösterim teoremi) Eğer $\mu \in M_b^+(X)$ ise, bu durumda her $f \in C_0(X)$ için

$$\mu(f) = \int_X f d\tilde{\mu}$$

olacak şekilde X üzerinde birtek sonlu ve regüler Borel ölçüsü vardır. Üstelik, $\left\|I_{\tilde{\mu}}\right\| = \tilde{\mu}(\mathrm{X})$ olur.

Tanım 2.2.10 $\mathcal{B}(X)$ üzerinde bir $\tilde{\mu}$ ölçüsü ve $p \in [1, +\infty[$ yi göz önüne alalım. $\mathcal{L}_p(X, \tilde{\mu})$ ile $\mathcal{B}(X)$-ölçülebilir ve $|f|^p$ $\tilde{\mu}$-integrallenebilir olacak biçimde tüm $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının lineer alt uzayını göstereceğiz. Eğer $f \in \mathcal{L}_p(X, \tilde{\mu})$ ise

$$N_p(f) \coloneqq \left(\int_X f d\tilde{\mu}\right)^{1/p} \tag{2.10}$$

yazarız. $N_p(f): \mathcal{L}_p(X, \tilde{\mu}) \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli bir yarı normdur ve alışılmış p.-ortalama yakınsamaya göre yakınsaktır.

$$\begin{aligned} \aleph &\coloneqq \{f \in \mathcal{L}_p(X, \tilde{\mu}) \mid N_p(f) = 0\} \\ &= \{f \in A(X) | f, \mathcal{B}(X) \text{ölçülebilir ve } f = 0 \ \tilde{\mu}\ a.e.\} \end{aligned}$$

diyelim,

$$L_p(X, \tilde{\mu}) \coloneqq \mathcal{L}_p(X, \tilde{\mu}) / \aleph \tag{2.11}$$

bölüm lineer uzayı

$$\left\|\tilde{f}\right\|_p \coloneqq N_p(f) \quad (\tilde{f} \in L_p(X, \tilde{\mu}))$$

normu ile donatılmış bir Banach uzayıdır. (Burada, $\tilde{f} \coloneqq \left\{g \in \mathcal{L}_p(X, \tilde{\mu}) \middle| f = g, \tilde{\mu}\ a.e.\right\}$ dir.) Eğer $\tilde{\mu}$ bir Borel ölçüsü ise, bu durumda her $p \in [1, +\infty[$ için $K(X) \subset \mathcal{L}_p(X, \tilde{\mu})$ olduğuna dikkat ederiz. Eğer $\tilde{\mu}$ da regüler ise, çok daha fazlasını söyleyebiliriz.

Teorem 2.2.11 Eğer $\tilde{\mu}$, X üzerinde bir regüler Borel ölçüsü ise o zaman her $p \in [1, +\infty[$ için, $K(X)$ uzayı, $p.$-ortalama yakınsamaya göre $\mathcal{L}_p(X, \tilde{\mu})$ de yoğundur (ve dolayısıyla $\|\cdot\|_p$ ye göre $L_p(X, \tilde{\mu})$ de yoğun).

Teorem 2.2.12 $\mu \in M_b^+(X)$ olsun ve X in kapalı bir Y alt kümesini göz önüne alalım öyle ki

$$\text{her } \varphi \in K(X)\text{ , } supp(\varphi) \subset X\backslash Y \text{ için } \mu(\varphi) = 0 \qquad (2.12)$$

dır. O zaman Y üzerinde $f = g$ olacak şekilde her $f, g \in C_0(X)$ için $\mu(f) = \mu(g)$ dir.

İspat. Eğer $f \in C_0(X)$ ve Y üzerinde $f = 0$ ise, o zaman $\mu(f) = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bir $f \in C_0(X)$ fonksiyonunu göz önüne alalım ve $\varepsilon > 0$ verildiğinde $U := \{ x \in X | \, |f(x)| < \varepsilon\}$ diyelim. Buradan, Teorem 2.2.5'den dolayı $X\backslash U$ kompakttır ve $X\backslash U \subset X\backslash Y$ dir.

Urysohn lemmasından (Teorem 2.2.4) dolayı, $\varphi \in K(X)$, $0 \leq \varphi \leq 1$ vardır öyle ki $X\backslash U$ üzerinde $\varphi = 1$ ve $supp(\varphi) \subset X\backslash Y$ dir. Özel olarak, $supp(f\varphi) \subset supp(\varphi) \subset X\backslash Y$ ve buradan $\mu(f\varphi) = 0$ dır. Dolayısıyla

$$|\mu(f)| = |\mu(f) - \mu(f\varphi)| \leq \|\mu\|\|f(1-\varphi)\| \leq \|\mu\|\varepsilon$$

dir çünkü şimdi onayladığımız gibi $\|f(1 - \varphi)\| \leq \varepsilon$ dir. Her $x \in X$ için, gerçekten de $x \notin U$ ise$|f(x)(1 - \varphi(x))| = 0$ dır ve eğer $x \in U$ ise $\big|f(x)\big(1 - \varphi(x)\big)\big| \leq |f(x)| \leq \varepsilon$ dir. $\varepsilon > 0$ keyfi olarak seçildiğinden $\mu(f) = 0$ olduğu sonucuna varırız.

X in (2.12) özelliğini sağlayan bir kapalı Y alt kümesinin her zaman var olduğuna dikkat ederiz. Bunların en küçüğüne μ ölçüsünün desteği denir.

Sonuç 2.2.13 $\mu \in M_b^+(X)$ olsun ve her $i \in I$ için $\mu(f_i) = 0$ olacak şekilde $C_0(X)$ de pozitif fonksiyonların keyfi bir $(f_i)_{i\in I}$ ailesini düşünelim. Bu durumda

$$Y := \{x \in X | \text{ her } i \text{ için } f_i(x) = 0 \in I\}$$

alt kümesi (2.12) özelliğini sağlar.

Dolayısıyla, eğer $f, g \in C_0(X)$ ve eğer her $x \in Y$ için $f(x) = g(x)$ ise, o zaman $\mu(f) = \mu(g)$ dir.

İspat. $supp(\varphi) \subset X\backslash Y = \{x \in X \,|f_i(x) > 0$ olacak şekilde $i \in I$ vardır$\}$ olacak şekilde $\varphi \in K(X)$ i göz önüne alalım. Bir kompaktlık argümanı kullanarak,

$$supp(\varphi) \subset \bigcup_{i\in J} \{x \in X \,|f_i(x) > 0\}$$

olacak şekilde I nin sonlu bir J alt kümesini buluruz. Eğer $\alpha := \min\{\sum_{i\in J} f_i(x) | x \in supp(\varphi)\} > 0$ alırsak bu durumda

$$|\varphi| \leq \frac{\|\varphi\|}{\alpha} \sum_{i\in J} f_i$$

ve buradan $\mu(f) = 0$ dır.

Bir önceki sonuç sayesinde, ayrık Radon ölçülerinin bahsedilen karakterizasyonuna ulaşmak kolaydır.

Teorem 2.2.14 $\mu \in M_b^+(X)$ ve $a_1, \ldots, a_n \in X, n \geq 1$, farklı noktaları verilsin, aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

(i) $\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{a_i}$ olacak biçimde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, +\infty[$ vardır ((2.8) denklemine bakınız);

(ii) eğer $\varphi \in K(X)$ ve $supp(\varphi) \cap \{a_1, \ldots, a_n\} = \emptyset$ ise bu durumda $\mu(\varphi) = 0$ dır;

(iii) her $x \in X \backslash \{a_1, \ldots, a_n\}$ için $f \in C_0(X)$, $f \geq 0$, vardır öyle ki $f > 0$, her bir $i = 1, \cdots, n$ için

$$f(a_i) = 0 \text{ ve } \mu(\varphi) = 0 \text{ dır.}$$

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$. Aşikardır.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Eğer $x \in X \backslash \{a_1, \ldots, a_n\}$ ise Urysohn lemmasından $\varphi \in K(X)$, $0 \leq \varphi \leq 1$, seçebiliriz, öyle ki $\varphi(x) = 1$ ve $supp(\varphi) \subset X \backslash \{a_1, \ldots, a_n\}$ ve böylece $\mu(f) = 0$ olur.

$(iii) \Rightarrow (ii)$. $supp(\varphi) \cap \{a_1, \ldots, a_n\} = \emptyset$ olacak biçimde $\varphi \in K(X)$ i göz önüne alalım. Hipoteze göre, her $x \in supp(\varphi)$ için $f_x \in C_0(X)$, $f_x \geq 0$, vardır öyle ki $f > 0$, her bir $i = 1, \cdots, n$ için $f_x(a_i) = 0$ ve $\mu_x(\varphi) = 0$ dır.

$supp(\varphi)$ kompakt olduğundan, $x_1, \ldots, x_p \in supp(\varphi)$ vardır öyle ki

$$supp(\varphi) \bigcup_{k=1}^{p} \{x \in X | \, f_{x_k}(x) > 0\}$$

dır. Dolayısıyla, $f := \sum_{k=1}^{p} f_{x_k} \in C_0(X)$ fonksiyonu pozitiftir, $supp(\varphi)$ nin herhangi bir noktasında sıfır olmaz ve $\mu(f) = 0$ dır.

Eğer $m := min\{f(x) | \, x \in supp(\varphi)\} > 0$ dersek , $m|\varphi| \leq \|\varphi\| f$ ve dolayısıyla $\mu(f) = 0$ olduğu hemen gerçeklenir.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Her j= $1, \cdots, n$ için $0 \leq \varphi_j \leq 1$, $\varphi_j(a_j) = 1$ ve her $i = 1, \cdots, n,\ i \neq j$, için $\varphi_j(a_i) = 0$ olacak biçimde $\varphi_j \in K(X)$ i göz önüne alalım.

Eğer $f \in C_0(X)$, o zaman $\{a_1, \ldots, a_n\}$ üzerinde

$$f := \sum_{i=1}^{n} f(a_i)\varphi_i$$

dir. Öte yandan, $\{a_1, \ldots, a_n\}$ alt kümesi (2.12) özelliğini sağlar ve buradan Teorem 2.2.12'den dolayı

$\mu(f) := \sum_{i=1}^{n} f(a_i)\mu(\varphi_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(a_i)$ olur, burada $\lambda_i := \mu(\varphi_i)\ \ (i = 1, \cdots, n)$ dir ve bu ispatı tamamlar.

Tanım 2.2.15 $M_b^+(X)$ de bir $(\mu_n)_{n\geq 1}$ dizisi verilsin eğer her $f \in C_0(X)$ için

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(f) = \mu(f) \qquad (2.13)$$

oluyorsa bu durumda dizi belirsiz bir şekilde μ ∈ $M_b^+(X)$ ya yakınsıyor denir. Böylece (2.13) denklemi basit olarak $C_0(X)$ in dual uzayında zayıf olarak $\mu_n \to$ μ olduğu anlamına gelir.

Eğer buna ek olarak, X in sayılabilir bir tabanı varsa, o zaman $C_0(X)$ ayrılabilirdir ve bu nedenle Banach teoremine göre, $C_0(X)$ in dual uzayının birim yuvarı zayıf dizisel kompakttır.

Teorem 2.2.16 X in sayılabilir bir tabanı varsa, o zaman $M_b^+(X)$ deki (2.7) denklemi ile verilen norma göre sınırlı olan her dizi, belirsiz olarak bir $\mu \in M_b^+(X)$ değerine yakınsayan bir alt diziye sahiptir.

3. $C(X)$ (X KOMPAKT), ÜZERİNDE ÖZDEŞLİK OPERATÖRÜ İÇİN KOROVKIN-TİPİ TEOREMLER

Bu bölümde X bir kompakt metrik uzayı (ve buradan $C_0(X) = C(X)$) olduğu özel durumunda $C(X)$ üzerinde özdeşlik operatörü için korovkin-tipi teoremleri inceleyeceğiz.

Teorem 3.1 Eğer M, $C(X)$ in X in noktalarını ayıran bir alt kümesi ise bu durumda $\{1\} \cup M \cup M^2$ $C(X)$ in bir Korovkin alt kümesidir.

Üstelik, eğer $M = \{f_1, \cdots, f_n\}, n \geq 1$ sonlu ise bu durumda $\left\{1, f_1, \cdots, f_n, \sum_{n=1}^{\infty} f_i^2\right\}$, $C(X)$ in bir Korovkin alt kümesidir.

Özel olarak, eğer $f \in C(X)$ injektif (içine) ise bu durumda $\{1, f, f^2\}$ $C(X)$ in bir Korovkin alt kümesidir.

Önerme 3.2 *(1)* Eğer $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ ise bu durumda $\left\{1, e_{\lambda_1}, e_{\lambda_2}\right\}$ $C([0,1])$ in bir Korovkin alt kümesidir, burada her bir $x \in [0,1]$ ve $k = 1,2$ için $e_{\lambda_k}(x) \coloneqq x^{\lambda_k}$ dır.

(2) Eğer $u \in C([0,1])$ kesin olarak konveks ise bu durumda $\{1, e_1, u\}$ $C([0,1])$ in bir Korovkin alt kümesidir.

Daha sonra, bir lokal konveks E uzayının bir K konveks kompakt alt kümesini göz önüne alarak Teorem 3.1'in bazı uygulamalarını tartışacağız. K üzerindeki tüm reel-değerli sürekli afin fonksiyonların alt uzayını $A(K)$ ile göstereceğiz. Eğer her bir $x, y \in K$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$u(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda u(x) + (1-\lambda)u(y) \qquad (3.1)$$

ise veya eşdeğer olarak eğer her bir $n \geq 2, x_1, \cdots, x_n \in K$ ve $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ olacak biçimde $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \geq 0$ için

$$\mathrm{u}(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, x_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(x_i)$$

oluyorsa $u: K \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun afin olduğu söyleriz.

$A(K)$, sabit fonksiyonların yanı sıra E üzerindeki her sürekli lineer fonksiyonelin K ya kısıtlamalarını da içerir. Hahn-Banach teoreminden dolayı $A(K)$, K nın noktalarını ayırır. Dolayısıyla, Teorem 3.1'den, hemen aşağıdaki sonucu elde ederiz:

Sonuç 3.3 $A(K) \cup A(K)^2 \; C(K)$ nın bir Korovkin alt kümesidir.

Şimdi K üzerinde Borel olasılık ölçüsünün sürekli bir $(\tilde{\mu}_x)_{x \in K}$ olasılık seçimini gözönüne alalım, yani, her bir $f \in C(K)$ için $x \to \int_K \; f d\tilde{\mu}_x$ fonksiyonu K üzerinde süreklidir. Böyle bir fonksiyon $T(f)$ ile gösterilecektir, yani

$$T(f) \coloneqq \int_K \; f d\tilde{\mu}_x \quad (x \in K) \tag{3.2}$$

dir. Hatırlatalım ki T ye $C(K)$ dan $C(K)$ içine bir lineer pozitif operatör ve $T(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ olarak bakılabilir.

Karşıt olarak Riesz gösterim teoreminden her bir $T: C(K) \to C(K)$ lineer pozitif operatörü (3.2) denklemini sağlayan K üzerinde Borel olasılık ölçüsünün bir sürekli seçimini üretir. Böyle bir seçime ***T* ye karşılık gelen kanonik sürekli seçim** olarak anılacaktır.

Bundan sonra her $u \in A(K)$ için

$$\int_K \; u d\tilde{\mu}_x = u(x), \tag{3.3}$$

başka bir deyişle, her $u \in A(K)$ için

$$T(u) = u$$

eşitliğini sağlayan K üzerindeki Borel olasılık ölçüsünün sürekli bir $(\tilde{\mu}_x)_{x\in K}$ seçimini sabit tutacağız.

(3.3) denklemindeki özellik her bir $x \in K$ nın $\tilde{\mu}_x$ in ağırlık merkezi veya bileşkesi (veya sonucu) olması demektir.

Her bir $n \geq 1$ ve $x \in K$ için $\tilde{\mu}_x^{(n)}$ ile K^n üzerinde $\tilde{\mu}_x$ in kendisiyle n defa çarpımından elde edilen çarpım ölçüsünü gösterelim ve her $f \in C(K)$ için

$$B_n(f)(x) = \int_{K^n} f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) d\tilde{\mu}_x^{(n)}(x_1 + \cdots + x_n) \qquad (3.4)$$

diyelim (Bauer 2001). Fubini teoreminden

$$B_n(f)(x) = \int_K \cdots \int_K f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) d\tilde{\mu}_x(x_1) \cdots d\tilde{\mu}_x(x_n)$$

olarak yazabiliriz. Çarpım ölçüsünün süreklilik özelliğinden ve seçimin sürekliliğinden $B_n(f) \in C(K)$ olduğu görülür (Choquet 1969, Bauer 2001).

$B_n(f): C(K) \to C(K)$ lineer pozitif operatörü verilen $(\tilde{\mu}_x)_{x\in K}$ seçimine (veya verilen lineer pozitif $T: C(K) \to C(K)$ operatörüne) karşılık gelen n. Bernstein-Schnabl operatörü olarak anılır.

Bernstein-Schnabl operatörleri ilk olarak 1968 yılında Schnabl (1968 ve 1969) tarafından kompakt bir Hausdorff uzayı üzerindeki tüm Radon olasılık ölçülerinin kümesi bağlamında tanıtıldı ve daha sonra göreceğimiz gibi, (2.4) eşitliği ile verilen klasik Bernstein operatörlerini genelleştirdiler. Daha sonra, Grossman (1974), genel tanımı (3.4) denklemi ile vermiştir. Bauer basitleri (simplices) özel durumunda bu operatörler Altomera and Campiti (1994), Freud (1964) ve Nishishiraho (1974 ve1983) tarafından

kapsamlı bir şekilde çalışılmıştır. Yapıları esasen pozitif projeksiyonlar içerir ve bu durumda, evrim (gelişim) problemlerinin incelenmesinde faydalı olan birçok ek özelliği sağlarlar. Bu operatörlerin bazı şekil koruma özellikleri Raşa (1988 ve 1993) tarafından da çalışılmıştır.

Bu operatörler hakkında kapsamlı bir araştırma için Altomera and Campiti (1994) çalışmasının, Bölüm 6'da ve ilgili notlarda yer alan referanslara başvururuz. Daha yeni sonuçlar Altomare (2009), Altomare *et al.* (2009), Altomare *et al.* (2008) ve Altomare *et al.* (2008) çalışmalarında da bulunabilir.

Aşağıda bazı örnekleri tartışacağız.

Örnekler 3.4

1. $K = [0,1]$ i göz önüne alalım ve her $x \in [0,1]$ için $\tilde{\mu}_x = x\delta_1 + (1-x)\delta_0$ diyelim. Bu durumda $(\tilde{\mu}_x)_{0\leq x\leq 1}$ bir sürekli seçimdir ve karşılık gelen Bernstein-Schnabl operatörleri Bernstein operatörlerine dönüşür.

2. $\alpha, \beta, \gamma \in C([0,1])$ olsun ve $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq \beta \leq 1$, $0 \leq \gamma \leq 1$, $\alpha + \beta + \gamma = \mathbf{1}$ ve her bir $x \in [0,1]$ için $\beta(x)/2 + \gamma(x) = x$ olduğunu kabul edelim. $\tilde{\mu}_x = \alpha(x)\delta_0 + \beta(x)\delta_{1/2} + \gamma(x)\delta_1$ diyelim. Bu durumda $[0,1]$ üzerinde $(\tilde{\mu}_x)_{0\leq x\leq 1}$ e karşılık gelen Bernstein-Schnabl operatörleri

$$B_n(f)(x) = \sum_{h=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n-h}{k}\alpha(x)^{n-h-k}\beta(x)^h\gamma(x)^k f\left(\frac{h+2k}{2n}\right)$$

ile verilir $(f \in C([0,1],)\ 0 \leq x \leq 1)$.

3. $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_p = b,\ p \geq 1$, kompakt reel $[a,b]$ aralığının bir alt bölmesi (parçalanışı) olsun. Her bir $x \in [a,b]$ için $x \in [a_k, a_{k+1}], 0 \leq k \leq p-1$ olduğunda

$$\tilde{\mu}_x = \frac{x-a_k}{a_{k+1}-a_k}\delta_{a_{k+1}} + \frac{a_{k+1}-x}{a_{k+1}-a_k}\delta_{a_k}$$

diyelim. Bu durumda Bernstein-Schnabl operatörleri $x \in [a_k, a_{k+1}], 0 \leq k \leq p-1$ $(f \in C([a,b],)\ n \geq 1)$ olduğunda

$$B_n(f)(x) = \frac{1}{(a_{k+1}-a_k)^n}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(x-a_k)^r(a_{k+1}-x)^{n-r} f\left(\frac{r}{n}a_{k+1} + \frac{n-r}{n}a_k\right)$$

ile verilir.

4. $\mathbb{R}^d$ nin (2.5) eşitliği ile tanımlı d-boyutlu K_d simpleksini gözönüne alalım ve her bir $x = (x_1, \cdots, x_d) \in K_d$ için

$$\tilde{\mu}_x = \left(1 - \sum_{i=1}^{d} x_i\right)\delta_0 + \sum_{i=1}^{d} x_i\delta_{a_i}$$

diyelim, burada δ_{ij} Kronecker sembolü olmak üzere her bir $i = 1, \cdots, d$ için $a_i = \left(\delta_{ij}\right)_{1\leq j\leq d}$ dir. Bu durumda $(\tilde{\mu}_x)_{x\in K_d}$ ye karşılık gelen Bernstein-Schnabl operatörleri (2.5) eşitliği ile tanımlı K_d simpleksi üzerindeki Bernstein operatörleri olur.

5. $\mathbb{R}^d$ nin $Q_d \coloneqq [0,1]^d$ hiperkübünü göz önüne alalım ve her bir $x = (x_1, \cdots, x_d) \in Q_d$ için

$$\tilde{\mu}_x = \sum_{h_1,\cdots,h_d=0}^{1} x_1^{h_1}(1-x_1)^{1-h_1}\cdots x_d^{h_d}(1-x_d)^{1-h_d}\delta_{b_{h_1,\cdots,h_d}}$$

diyelim, burada $b_{h_1,\cdots,h_d} = \left(\delta_{h_1 1}, \cdots, \delta_{h_d 1}\right)$, $(h_1, \cdots, h_d \in \{0,1\})$ dir. Bu durumda Bernstein-Schnabl operatörleri Q_d üzerinde Bernstein operatörleri olur.

Diğer birçok önemli örnek, diğer sonlu boyutlu alt kümeler çerçevesinde verilebilir. Daha genel olarak $\mathbb{R}^d$ nin elipsoidleri gibi veya sonsuz boyutlu Bauer simpleksleri anlamında tanımlanabilir (Altomera and Campiti 1994, Altomare and Raşa 1998, Romito 1998).

Bernstein-Schnabl operatörlerinin yaklaşım özelliklerini tartışmak için, hatırlatalım ki her $n \geq 1$ için

$$B_n(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$$

dir. Üstelik, eğer $u \in A(K)$ ise bu durumda her bir $x_1, \cdots, x_n \in K$ için

$$u = \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) = \frac{u(x_1) + \cdots u(x_n)}{n}$$

ve

$$u^2\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n} u^2\,(x_i) + 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} u(x_i)u(x_j)\right]$$

dir. Dolayısıyla (3.3) denkleminden dolayı, her bir $x \in K$ için,

$$B_n(u)(x) = u(x)$$

ve

$$B_n(u^2)(x) = \frac{1}{n}T(u^2)(x) + \frac{n-1}{n}u^2(x)$$

olur. Başka bir deyişle, her bir $h \in A(K) \cup A(K)^2$ için K üzerinde düzgün olarak $B_n(h) \to h$ dır.

Teorem 3.5 Her bir $f \in C(K)$ için K üzerinde düzgün olarak $\lim_{n\to\infty} B_n(f) = f$ dir.

Yakınsama oranı tahminleri, asimptotik formüller, şekil koruma özellikleri ve özellikle bunların pozitif yarı grupların yaklaşımları ile ilgileri ve ayrıca evrim denklemlerinin çözümleri dahil olmak üzere Bernstein-Schnabl operatörlerinin ek özellikleri için, Örnek 3.4'den önce verdiğimiz referanslara bakılabilir.

4. AĞIRLIKLI SÜREKLİ FONKSİYON UZAYLARI VE $L^p(X,\tilde{\mu})$ UZAYLARINDA KOROVKİN-TİPİ TEOREMLER

Sürekli fonksiyon uzaylarındaki Korovkin-tipli teoremleri kullanarak $L^p(X,\tilde{\mu})$- uzayları, $1 \leq p < +\infty$, için bazı sonuçlar elde etmek de mümkündür. Bu bağlamda $C_0(X)$ uzayı dışında ağırlıklı sürekli fonksiyon uzayları da etkili bir şekilde kullanılabilir. Bu bölümde, ağırlıklı sürekli fonksiyon uzaylarında bazı ek Korovkin tipi sonuçları da gösterecek ve ardından $L^p(X,\tilde{\mu})$-uzayları cinsinden karşılık gelenleri yeniden sunarak bu metodu geliştireceğiz.

Lineer pozitif operatörler için Korovkin altuzaylarının karşılığı Altomare and Campiti (1994)'de elde edilmiştir. Altomare and Cappelletti Montano (2005) da lokal konveks fonksiyon uzaylarının bir genişlemesi elde edilmiştir. Kısa olması için, ispatını vermeyeceğiz.

Önceki bölümde olduğu gibi, X, sayılabilir bir tabanı olan, lokal kompakt sabit bir Hausdorff uzayını gösterir.

Teorem 4.1 $C_0(X)$ in bir H lineer altuzayı verilsin, aşağıdaki ifadeler denktir:

(*i*) H $C_0(X)$ uzayının bir Korovkin altuzayıdır;

(*ii*) Her bir $f \in C_0(X)$ ve her bir $\varepsilon > 0$ için sonlu çoklukta $h_0, \cdots, h_n \in H$, $k_0, \cdots, k_n \in H$ fonksiyonları ve $u, v \in C_0(X), u, v \geq 0$ vardır öyle ki $\|u\| \leq \varepsilon, \|v\| \leq \varepsilon$ ve

$$\left\| \inf_{0\leq j\leq n} k_j - \sup_{0\leq i\leq n} h_i \right\| \leq \varepsilon \text{ ve } \sup_{0\leq i\leq n} h_i - u \leq f \leq \inf_{0\leq j\leq n} k_j + v$$

dir (Bauer ve Donner 1978).

Uyarı 4.2 Eğer X kompakt ve $\mathbf{1} \in H$ ise bu durumda Teorem 4.1 daha basit bir şekilde ifade edilebilir (Altomare and Campiti 1994).

Şimdi Teorem 4.1'in iki önemli sonucundan bahsedelim.

Teorem 4.3 H $C_0(X)$ uzayının bir Korovkin altuzayı olsun. Eğer E bir Banach latisi ve eğer $S: C_0(X) \to E$ bir latis homomorfizmi ise bu durumda H S için $C_0(X)$ in bir Korovkin altuzayıdır (Bauer and Donner 1978).

İspat. $C_0(X)$ den E içine lineer pozitif operatörlerin bir $(L_n)_{n\geq 1}$ dizisini göz önüne alalım öyle ki $M := \sup_{n\geq 1}\|L_n\| < +\infty$ ve her bir $h \in H$ için $\lim_{n\to\infty} L_n(h) = S(h)$ olsun. $f \in C_0(X)$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin, $\delta \in]0, \varepsilon[$ seçelim öyle ki her bir $g \in C_0(X), \|g\| \leq \delta$ için $\|S(g)\| \leq \varepsilon$ sağlansın. Teorem 4.1'den dolayı $h_0, \cdots, h_p, k_0, \cdots, k_p \in H$ ve $u, v \in C_0(X), u, v \geq 0$ vardır öyle ki $\|u\| \leq \delta, \|v\| \leq \delta$ ve $\|v\| \leq \varepsilon$ ile

$$\left\| \inf_{0\leq j\leq n} S(k_j) - \sup_{0\leq i\leq n} S(h_i) \right\| \leq \delta \text{ ve } \sup_{0\leq i\leq p} h_i - u \leq f \leq \inf_{0\leq j\leq p} k_j + v$$

sağlanır. Dolayısıyla

$$\left\| \inf_{0\leq j\leq p} S(k_j) - \sup_{0\leq i\leq p} S(h_i) \right\| \leq \varepsilon$$

dir. Üstelik her $n \geq 1$ için

$$\sup_{0\leq i\leq p} L_n(h_i) - L_n(u) \leq L_n(f) \leq \inf_{0\leq j\leq p} L_n(k_j) + L_n(v)$$

ve

$$\sup_{0\leq i\leq p} S(h_i) - S(u) \leq S(f) \leq \inf_{0\leq j\leq p} S(k_j) + S(v)$$

dir. Buna göre

$$L_n(f) - S(f) \leq \sum_{j=0}^{p} \left| L_n(k_j) - S(k_j) \right| + \left| \inf_{0 \leq j \leq p} S(k_j) - \sup_{0 \leq i \leq p} S(h_i) \right| + L_n(v) - S(u)$$

ve

$$S(f) - L_n(f) \leq \sum_{i=0}^{p} |L_n(h_i) - S(h_i)| + \left| \inf_{0 \leq j \leq p} S(k_j) - \sup_{0 \leq i \leq p} S(h_i) \right| + L_n(u) - S(v)$$

ve böylece

$$\begin{aligned} |S(f) - L_n(f)| &\leq \sum_{i=0}^{p} |L_n(h_i) - S(h_i)| + \sum_{j=0}^{p} \left| L_n(k_j) - S(k_j) \right| \\ &\quad + \left| \inf_{0 \leq j \leq p} S(k_j) - \sup_{0 \leq i \leq p} S(h_i) \right| + L_n(u) + L_n(v) + S(u) + S(v) \\ &\leq \sum_{i=0}^{p} |L_n(h_i) - S(h_i)| + \sum_{j=0}^{p} \left| L_n(k_j) - S(k_j) \right| + 2M\varepsilon + 2\varepsilon \end{aligned}$$

olur. Şimdi kolayca görülür ki $n \to \infty$ iken $L_n(f) \to S(f)$ dir çünkü her bir $i, j = 0, \cdots, p$ için $n \to \infty$ iken $L_n(h_i) \to S(h_i)$ ve $n \to \infty$ iken $L_n(k_j) \to S(k_j)$ dir.

Uyarı 4.4. Teorem 4.3'den görülür ki eğer M $C_0(X)$ in bir Korovkin alt kümesi ise bu durumda M, $C_0(X)$ den $C_0(X)$'i içeren $B(X)$'in bir keyfi E kapalı latis alt uzayı Korovkin altkümedir.

Teorem 4.3'ün diğer bir sonucu aşağıda belirtilmiştir.

Önerme 4.5 E bir Banach latisi olsun ve $S(C_0(X))$, E'de yoğun olacak şekilde bir $S: C_0(X) \to E$ latis homomorfizmini gözönüne alalım. Eğer M, $C_0(X)$'in bir Korovkin altuzayı ise $S(M)$, E'nin bir Korovkin altuzayıdır (Altomare and Mangino 1999).

İspat. E üzerinde lineer pozitif operatörlerin eşsınırlı bir $(L_n)_{n\geq 1}$ dizisini göz önüne alalım ve her bir $k \in S(M)$ için $n \to \infty$ iken $L_n(k) \to k$ olduğunu kabul edelim. Bu demektir ki her bir $h \in M$ için $n \to \infty$ iken $L_n(S(h)) \to S(h)$ dir ve buradan her bir $h \in H \coloneqq \mathcal{L}(M)$ dir. Böylece Teorem 4.3'den dolayı her bir $f \in C_0(X)$ için $L_n(S(f)) \to S(f)$ dir. Şimdi $S(C_0(X))$ in E de yoğun olması $(L_n)_{n\geq 1}$ dizisinin eşsınırlı olması kabulünden sonuç görülür.

Uyarı 4.6 Önerme 4.5'in uygulanabileceği tipik bir durum, E nin yoğun bir alt latis olarak $C_0(X)$ i içeren bir Banach latisi olduğu ve S nin $C_0(X)$ ten E ye doğal gömülme olduğu durumla ilgilidir. Dolayısıyla, bu durumda,

$C_0(X)$ in her Korovkin alt uzayı E nin bir Korovkin alt uzayıdır.

Bu ön hazırlıklardan sonra, şimdi $L^p(X, \tilde{\mu})$ uzayları için bazı Korovkin-tipi sonuçları tartışmaya geçebiliriz.

X üzerinde bir $\tilde{\mu}$ Borel ölçüsünü göz önüne alalım ve p ∈ [1,+∞[verilsin, $\|\cdot\|_p$ doğal normu ile donatılmış $L^p(X, \tilde{\mu})$ uzayını göz önüne alalım (daha fazla detay için (2.10) ve (2.11) formüllerine atıfta bulunuruz). $\tilde{\mu}$ regüler olduğundan $K(X)$ $p - yinci$ ortalamadaki yakınsaklığa göre $L^p(X, \tilde{\mu})$ de yoğundur. Dolayısıyla aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

Sonuç 4.7 M, $C_0(X)$ in Korovkin alt kümesi olsun. Ayrıca, Y, sayılabilir bir tabanı olan lokal kompakt bir Hausdorff uzayı olsun ve Y üzerinde bir $\tilde{\mu}$ Borel ölçüsünü ve $p \in [1, +\infty[$ yi göz önüne alalım. $S: C_0(X) \to L^p(Y, \tilde{\mu})$ bir latis homomorfizmi öyle ki $K(Y) \subset S(C_0(X))$ olsun. Bu durumda $S(M)$, $L^p(Y, \tilde{\mu})$ nın bir Korovkin alt kümesidir.
Özel olarak, eğer $\tilde{\mu}$ X üzerinde sonlu bir Borel ölçüsü ise, o zaman M, $L^p(X, \tilde{\mu})$ nın da bir Korovkin alt kümesidir.

Sonuç 4.8 X, $\mathbb{R}^d, d \geq 1$, nin bir kompakt alt kümesi olsun ve X üzerinde sonlu bir $\tilde{\mu}$ Borel ölçüsünü göz önüne alalım. Bu durumda her $p \in [1, +\infty[$ için $\{\mathbf{1}, pr_1, \cdots, pr_d, \sum_{i=1}^{d} pr_i^2\}$ $L^p(X, \tilde{\mu})$ nın bir Korovkin alt kümesidir.

Eğer ek olarak, X, $\mathbb{R}^d$ nin bir küresinde yer alıyorsa, o zaman $\{\mathbf{1}, pr_1, \cdots, pr_d\}$, $L^p(X, \tilde{\mu})$ nın bir Korovkin alt kümesidir.

Sonuç 4.9 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ ve $p \in [1, +\infty[$ yi göz önüne alalım. Bu durumda

(1) $\{f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2}, f_{\lambda_3}\}$, $L^p([0, +\infty[)$ nin bir Korovkin alt kümesidir, burada her $x \in [0, +\infty[$ için $f_{\lambda_k}(x) = \exp(-\lambda_k x)$ ve k $= 1, 2, 3$ dür.

(2) Eğer $u: \mathbb{R} \to]0,1[$ kesin olarak artan bir sürekli fonksiyon öyle ki $\lim_{x \to +\infty} u(x) = 0$ ve $\lim_{x \to -\infty} u(x) = 1$ ise bu durumda

$$\{\Phi, \Phi u^{\lambda_1}, \Phi u^{\lambda_2}\}$$

$L^p(\mathbb{R})$ nin bir Korovkin alt kümesidir, burada $\Phi(x) = \exp(-x^2)$ $(x \in \mathbb{R})$ dir.

İspat. $S(f)(x) \coloneqq \exp(-\lambda_1 x)\, f(\exp(-x))$ $(f \in C([0,1]), x \geq 0$ ile tanımlı $S: C([0,1]) \to L^p([0, +\infty[)$ latis homomorfizmini göz önüne alalım. Bu durumda S, $M \coloneqq \{\mathbf{1}, e_{\lambda_2 - \lambda_1}, e_{\lambda_3 - \lambda_1},\}$ alt kümesini $\{f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2}, f_{\lambda_3}\}$ içine dönüştürür. Buradan Sonuç 4.7 ve Önerme 3.2, (1)'den sonuç görülür.

$$S(f)(x) \coloneqq \exp(-x^2)\, f(\mathrm{u}(x)) \ \ (f \in C([0,1]), x \in \mathbb{R})$$

ile tanımlanan $S: C([0,1]) \to L^p(\mathbb{R})$ latis homomorfizmi dikkate alınırsa sonuç elde edilir.

Şimdi daha genel ağırlıklı fonksiyon uzayları için Sonuç 4.7'ye benzer bir sonuç verelim. X üzerinde sürekli bir w ağırlığını ve $C_0^w(X)$ ağırlıklı uzayını göz önüne alalım. Eğer $\tilde{\mu}$, X üzerinde bir Borel ölçüsü ise ve eğer bir $p \in [0, +\infty[$ için

$$w^{-1} \in L^p(X, \tilde{\mu}) \tag{4.1}$$

ise bu durumda $C_0^w(X) \subset L^p(X, \tilde{\mu})$ olur ve $p.-$ortalama yakınsaklığa göre yoğundur.

Sonuç 4.10 $C_0^w(X)$ in bir M Korovkin alt kümesini göz önüne alalım, yani, wM, $C_0(X)$ in bir Korovkin alt kümesidir ve $\tilde{\mu}$ X üzerinde bir Borel ölçüsüdür. Eğer (4.1) sağlanırsa, bu durumda X $L^p(X, \tilde{\mu})$ nın Korovkin alt kümesidir.

İspat. $S(f) \coloneqq w^{-1}f$ $(f \in C_0(X)$ ile tanımlı $S: C_0(X) \to L^p(X, \tilde{\mu})$ latis homomorfizmini göz önüne alalım. Bu durumda $M = S(wM)$ ve $S\big(C_0(X)\big) = C_0^w(X)$ dir. Dolayısıyla, Sonuç 4.7'den sonuç görülür.

Bu sonuçlar $L^p(X, \tilde{\mu})$ uzaylarında Korovkin altkümelerini oluşturmak için basit ama kullanışlı bir yöntem sunar. Benzer yöntemler kullanarak, önceki sonuçların bazılarını uygulamalarda sıklıkla ortaya çıkan daha genel ağırlıklı fonksiyon uzaylarına genişletebiliriz.

Aşağıda, X in kompakt olmadığını kabul edeceğiz ve X in Alexandrov tek nokta kompaktlaştırmasını

$$X_\infty \coloneqq X \cup \{\infty\}$$

ile göstereceğiz. Bir $f \in C(X)$ fonksiyonuna sonsuzda yakınsaktır denir eğer bir (bir tek) $l \in \mathbb{R}$ varsa öyle ki herhangi bir $\varepsilon > 0$ için X in bir K kompakt alt kümesi vardır öyle ki her bir $x \in X\backslash K$ için $|f(x) - l| \leq \varepsilon$ sağlanır. Böyle bir durumda $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ yazarız. Benzer şekilde $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ yazdığımızda bu demektir ki her $M \geq 0$ için X in bir K kompakt alt kümesi vardır öyle ki her bir $x \in X\backslash K$ için $f(x) \geq M$ sağlanır.

Bir $w \in C(X)$ ağırlığı verilsin,

$$C_*^w(X) \coloneqq \{f \in C(X) |\ wf\ sonsuzda\ yakınsaktır\}$$

doğal (noktasal) sıralama ve

$$\|f\|_w \coloneqq \|wf\|_\infty \ \ (f \in C_*^w(X))$$

ağırlıklı normu ile donatılmış Banach latisini göz önüne alalım. Her bir $f \in C_*^w(X)$ için X_∞ üzerinde $T(f)$ ile

$$T(f)(z) \coloneqq \begin{cases} w(z)f(z) \ \ eğer \ \ z \in X \\ \lim\limits_{x\to\infty} w(x)f(x) \ \ eğer \ \ z = \infty \end{cases}$$

ile tanımlı fonksiyonu gösterelim. Böylece $C_*^w(X)$ in bir M alt kümesinin $C_*^w(X)$ in bir Korovkin alt kümesi olması için gerek ve yeter şart $T(M)$ nin $C(X_\infty)$ un bir Korovkin alt kümesi olmasıdır.

Şimdi X üzerinde bir $\tilde{\mu}$ Borel ölçüsünü göz önüne alalım ve (4.1) özelliğinin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda $C_*^w(X) \subset L^p(X, \tilde{\mu})$ ve $C_*^w(X)$, $L^p(X, \tilde{\mu})$ da yoğundur.

Önerme 4.11 (4.1) kabulü altında $C_*^w(X)$ in her bir Korovkin alt kümesi $L^p(X, \tilde{\mu})$ nin de bir Korovkin alt kümesidir.

İspat. Yukarıdaki S latis izomorfizmi $C(X_\infty)$ dan $L^p(X, \tilde{\mu})$ içine bir latis homomorfizmi olarak göz önüne alınabilir ve onu değer kümesi $L^p(X, \tilde{\mu})$ ve yoğun olan $C_*^w(X)$ dir. $H \coloneqq T(M)$, $C(X_\infty)$ in bir Korovkin alt kümesi olduğundan $M = S(H)$ Sonuç 4.7'den dolayı $L^p(X, \tilde{\mu})$ nin bir Korovkin alt kümesidir.

Aşağıda, Önerme 4.11'in bir sonucunu ifade edeceğiz.

Önerme 4.12 M, $C_*^w(X)$ in bir alt kümesi olsun ve kabul edelim ki

(*i*) her bir $x_0, y_0 \in X$, $x_0 \neq y_0$, için $h \in \mathcal{L}(M)$, $h \geq 0$, öyle ki $h(x_0) = 0$ ve $h(y_0) > 0$;

(*ii*) her bir $x_0 \in X$ için $h, k \in \mathcal{L}(M)$ pozitif fonksiyonları vardır öyle ki

$$h(x_0) = 0, \ \lim_{x\to\infty} w(x)h(x) > 0$$

ve

$$k(x_0) = 0, \ \lim_{x\to\infty} w(x)k(x) = 0$$

dır. Bu durumda M, $C_*^w(X)$ in bir Korovkin alt kümesidir ve buradan X üzerindeki her bir $\tilde{\mu}$ Borel ölçüsü ve (4.1) özelliğini sağlayan her bir $p \in [1, +\infty[$ için $L^p(X, \tilde{\mu})$ nın bir Korovkin alt kümesidir.

Sonuç 4.13 $C(X)$ in X in noktalarını ayıran bir M alt kümesini ve bir kesin olarak pozitif $f_0 \in C_0^w(X)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Ayrıca, kabul edelim ki

(*1*) $f_0 M \cup f_0 M^2 \subset C_*^w(X)$,

(*2*) $g \in M$ vardır öyle ki

$$\lim_{x\to\infty} w(x)f_0(x)g(x) = 0 \text{ ve } \lim_{x\to\infty} w(x)f_0(x)g^2(x) > 0$$

sağlanır. Bu durumda $\{f_0\} \cup f_0 M \cup f_0 M^2$, $C_*^w(X)$ in bir Korovkin alt kümesidir ve buradan X üzerindeki her bir $\tilde{\mu}$ Borel ölçüsü ve (4.1) özelliğini sağlayan her bir $p \in [1, +\infty[$ için $L^p(X, \tilde{\mu})$ nın bir Korovkin alt kümesidir.

İspat. Önerme 4.12 nin (*i*) ve (*ii*) koşullarını doğrulayacağız. $x_0, y_0 \in X$, $x_0 \neq y_0$, verildiğinde, $f(x_0) = f(y_0)$ olacak şekilde f ∈ M vardır.

Dolayısıyla, $h \coloneqq f_0(f - f(x_0))^2 \in \mathcal{L}(\{f_0\} \cup f_0M \cup f_0M^2)$ fonksiyonu $h(x_0) = 0$ ve $h(y_0) > 0$ ı sağlar ve dolayısıyla (i) özelliği görülür.

Önerme 4.12'nin (ii) koşuluyla ilgili olarak, bir $g \in M$ fonksiyonunun (2) varsayımını sağladığı düşünüldüğünde, o zaman her $x_0 \in X$ için $h \coloneqq f_0(g - g(x_0))^2$ ve $k \coloneqq f_0$ fonksiyonları Önerme 4.12'nin (ii) koşulunu sağlar.

Sonuç 4.14 X in noktalarını ayıran $f_1, \cdots, f_n \in C_0^w(X)$, $n \geq 1$, i ve kesin olarak pozitif $f_0 \in C_0^w(X)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Ayrıca, kabul edelim ki

(*1*) her $i = 1, \cdots, n$ için $f_0 f_i \subset C_0^w(X)$ ve $f_0 \sum_{i=1}^n f_i^2 \in C_*^w(X)$ dir.

(*2*) $\lim_{x\to\infty} w(x) f_0(x) \sum_{i=1}^n f_i^2(x) > 0$

sağlanır. Bu durumda $\{f_0, f_0f_1, \cdots, f_0f_n, f_0 \sum_{i=1}^n f_i^2\}$, $C_*^w(X)$ in bir Korovkin alt kümesidir ve buradan X üzerindeki her bir $\tilde{\mu}$ Borel ölçüsü ve (4.1) özelliğini sağlayan her bir $p \in [1, +\infty[$ için $L^p(X, \tilde{\mu})$ nın bir Korovkin alt kümesidir.

İspat. İspat, durumda h fonksiyonunun $h \coloneqq f_0 \sum_{i=1}^n (f_i - f_i(x_0))^2$ olarak seçilmesi durumu dışında, Sonuç 4.13'dekine benzerdir.

Sonuç 4.15 X in noktalarını ayıran $f_1, \cdots, f_n \in C(X)$, $n \geq 1$, i ve bir $w \in C_0(X)$ ağırlık fonksiyonunu göz önüne alalım öyle ki

(*1*) her $i = 1, \cdots, n$ için $f_i \subset C_0^w(X)$ ve $\sum_{i=1}^n f_i^2 \in C_*^w(X)$ dir.

(*2*) $\lim_{x\to\infty} w(x) \sum_{i=1}^n f_i^2(x) > 0$

sağlanır. Bu durumda $\{\mathbf{1}, f_1, \cdots, f_n \sum_{i=1}^{n} f_i^2\}$, $C_*^w(X)$ in bir Korovkin alt kümesidir ve buradan X üzerindeki her bir $\tilde{\mu}$ Borel ölçüsü ve (4.1) özelliğini sağlayan her bir $p \in [1, +\infty[$ için $L^p(X, \tilde{\mu})$ nın bir Korovkin alt kümesidir.

Sonuç 4.14 ve Sonuç 4.15'deki kabullerin sağlandığı bir basit durum aşağıda belirtilmiştir.

Sonuç 4.16 X in noktalarını ayıran $f_1, \cdots, f_n \in C(X)$, $n \geq 1$, leri göz önüne alalım ve kabul edelim ki $\lim_{x\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f_i^2(x) = +\infty$ dir. Aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(*1*) Eğer $f_0 \in C(X)$ kesin olarak pozitif bir fonksiyon ise bu durumda $\{f_0, f_0 f_1, \cdots, f_0 f_n, f_0 \sum_{i=1}^{n} f_i^2\}$, $C_*^w(X)$ in bir Korovkin alt kümesidir, burada

$$w := \frac{1}{f_0(1+\sum_{i=1}^{n} f_i^2)}$$

dir. Dolayısıyla, eğer $\tilde{\mu}$ X üzerinde bir Borel ölçüsü, $1 \leq p < +\infty$ ve eğer $f_0 \in L^p(X, \tilde{\mu})$ ve her $i = 1, \cdots, n$ için $f_0 f_i^2 \in L^p(X, \tilde{\mu})$ ise bu durumda $\{f_0, f_0 f_1, \cdots, f_0 f_n, f_0 \sum_{i=1}^{n} f_i^2\}$, $L^p(X, \tilde{\mu})$ nın bir Korovkin alt kümesidir.

(*2*) Özel olarak, $\{\mathbf{1}, f_1, \cdots, f_n, \sum_{i=1}^{n} f_i^2\}$, $C_*^w(X)$ in bir Korovkin alt kümesidir. Burada

$$w := \frac{1}{1+\sum_{i=1}^{n} f_i^2}$$

dir. Dolayısıyla, eğer $\tilde{\mu}$ X üzerinde bir sonlu Borel ölçüsü, $1 \leq p < +\infty$ ve eğer her $i = 1, \cdots, n$ için $f_i^2 \in L^p(X, \tilde{\mu})$ ise bu durumda $\{\mathbf{1}, f_1, \cdots, f_n, \sum_{i=1}^{n} f_i^2\}$, $L^p(X, \tilde{\mu})$ nin bir Korovkin alt kümesidir.

Sonuç 4.16'nın aşağıdaki özel durumunu daha sonra kullanacağız.

Sonuç 4.17 X $\mathbb{R}^d, d \geq 1$, nin bir sınırsız kapalı alt kümesi olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(*1*) Eğer $f_0 \in C(X)$ kesin olarak pozitif bir fonksiyon ise bu durumda $\{f_0, f_0 pr_1, \cdots, f_0 pr_d, f_0\|\cdot\|^2\}$, $C_*^w(X)$ in bir Korovkin alt kümesidir, burada

$$w := \frac{1}{f_0(1+\|\cdot\|^2)}$$

dir. Dolayısıyla, eğer $\tilde{\mu}$ X üzerinde bir Borel ölçüsü, $1 \leq p < +\infty$ ve eğer $f_0 \in L^p(X, \tilde{\mu})$ ve $\|\cdot\|^2 f_0 \in L^p(X, \tilde{\mu})$ ise bu durumda $\{f_0, f_0 pr_1, \cdots, f_0 pr_d, f_0\|\cdot\|^2\}$, $L^p(X, \tilde{\mu})$ nın bir Korovkin alt kümesidir.

(*2*) Özel olarak, $\{\mathbf{1}, pr_1, \cdots, pr_d, \|\cdot\|^2\}$, $C_*^w(X)$ in bir Korovkin alt kümesidir, burada

$$w := \frac{1}{1+\|\cdot\|^2}$$

dir. Dolayısıyla, eğer $\tilde{\mu}$ X üzerinde bir sonlu Borel ölçüsü, $1 \leq p < +\infty$ ve eğer $\|\cdot\|^2 \in L^p(X, \tilde{\mu})$ ise bu durumda $\{\mathbf{1}, pr_1, \cdots, pr_d, \|\cdot\|^2\}$, $L^p(X, \tilde{\mu})$ nın bir Korovkin alt kümesidir.

İspat. $f_i = pr_i, 1 \leq i \leq d$ alıp Sonuç 4.16'yı uygulamak yeterlidir.
Ek olarak aşağıda bazı örnekler sıralanmıştır.

Örnekler 4.18 ***1)*** I kompakt olmayan bir reel aralık olsun ve $r_1 := infI \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ve $r_2 := supI \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ diyelim. Kesin olarak pozitif bir $f_0 \in C(I)$ içine fonksiyonunu göz önüne alalım.

Kabul edelim ki kesin olarak pozitif bir $w \in C(I)$ fonksiyonu için aşağıdaki özellikler sağlanır:

(*i*) $r_i \notin I$ olacak biçimde her $i = 1,2$ için $\lim_{x \to r_i} w(x)\, f_0(x) = \lim_{x \to r_i} w(x)\, {f_0}^2(x) =$ 0 dır;

(*ii*) $r_i \notin I$ olacak biçimde her $i = 1,2$ için $l > 0$ vardır öyle ki $\lim_{x \to r_i} w(x)\, {f_0}^3(x) =$ l dir. Bu durumda $\{f_0, {f_0}^2, {f_0}^3\}$, $C_*^w(I)$ nın bir Korovkin alt kümesidir ve buradan $1/w \in L^p(I, \tilde{\mu})$ olacak biçimde I üzerindeki her bir $\tilde{\mu}$ Borel ölçüsü ve $p \in [1, +\infty[$ için $L^p(I, \tilde{\mu})$ nın da bir Korovkin alt kümesidir.

Bu, $n = 1\ ve\ f_0 = f_1$ olmak üzere Sonuç 4.14'ün bir direkt bir sonucudur.

2) I kapalı sınırsız bir reel aralık olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(*1*) Eğer $f_0 \in C(I)$ kesin olarak pozitif bir fonksiyon ise bu durumda $\{f_0, f_0 e_1, f_0 e_2\}$ $C_*^w(I)$ in bir Korovkin alt kümesidir, burada

$$w := \frac{1}{f_0(1+e_2)}$$

dir. Dolayısıyla, eğer $\tilde{\mu}$ I üzerinde bir Borel ölçüsü, $1 \leq p < +\infty$ ve eğer $f_0 \in L^p(I, \tilde{\mu})$ ve $f_0 e_2 \in L^p(X, \tilde{\mu})$ ise bu durumda $\{f_0, f_0 e_1, f_0 e_2\}$, $L^p(X, \tilde{\mu})$ nın bir Korovkin alt kümesidir.

(*2*) Özel olarak $\{\mathbf{1}, e_1, e_2\}$, $C_*^w(I)$ in bir Korovkin alt kümesidir, burada

$$w := \frac{1}{1+e_2}$$

dir. Dolayısıyla, eğer $\tilde{\mu}$ I üzerinde bir Borel ölçüsü, $1 \leq p < +\infty$ ve eğer $e_2 \in L^p(X, \tilde{\mu})$ ve $f_0 e_2 \in L^p(X, \tilde{\mu})$ ise bu durumda $\{\mathbf{1}, e_1, e_2\}$, $L^p(X, \tilde{\mu})$ nın bir Korovkin alt kümesidir.

Daha sonra, yukarıdaki sonuçların

$$G_n(f)(x) \coloneqq \binom{n}{4}^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\exp(-\tfrac{n}{4}\|t-x\|^2)dt \;\; (x \in \mathbb{R}^d) \qquad (4.2)$$

şeklinde tanımlanan $G_n, n \geq 1,$ operatörleriyle ilgili basit bir uygulamasını vereceğiz. Burada her bir $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, d \geq 1$, Borel ölçülebilir fonksiyonu için (4.2) denklemindeki integral mutlak yakınsaktır.

$\varphi: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ bir Borel ölçülebilir kesin olarak pozitif fonksiyon olsun ve onun d-boyutlu λ_d Lebesgue ölçüsüne göre integrallenebilir olduğunu kabul edelim. $\tilde{\mu}_\varphi \coloneqq \varphi\lambda_d$ ile $\mathbb{R}^d$ üzerinde λ_d ye göre φ yoğunluğuna sahip sonlu Borel ölçüsünü gösterelim, yani $\mathbb{R}^d$ nin her bir B Borel alt kümesi için

$$\tilde{\mu}_\varphi(B) = \int_B \varphi(x)dx$$

dir. Eğer $p \in [1, +\infty[$ ve $f \in L^p(\mathbb{R}^d, \tilde{\mu}_\varphi)$ ise

$$\|f\|_{\varphi,p} \coloneqq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p \, \varphi(x)dx\right)^{1/p}$$

alacağız.

Teorem 4.19 Kabul edelim ki

$$C_\varphi \coloneqq \sup_{n\geq 1, t\in\mathbb{R}^d} \left\{\frac{1}{\varphi(t)}\binom{n}{4\pi}^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\exp(-\tfrac{n}{4}\|t-x\|^2)dx\right\} < +\infty \qquad (4.3)$$

dir. Bu durumda her bir $p \in [1, +\infty[$ ve $n \geq 1$ ve her bir $f \in L^p(\mathbb{R}^d, \tilde{\mu}_\varphi)$ için (4.2) denklemindeki integrali a.e. $x \in \mathbb{R}^d$ için mutlak yakınsaktır.

Üstelik $G_n(f) \in L^p(\mathbb{R}^d, \tilde{\mu}_\varphi)$ ve

$$\|G_n(f)\|_{\varphi,p} \leq max\{1, C_\varphi\}\|f\|_{\varphi,p} \tag{4.4}$$

dir. Son olarak eğer her bir $i = 1, \cdots, d$ için $pr_i^2 \in L^p(\mathbb{R}^d, \tilde{\mu}_\varphi)$ ise bu durumda $\|\varphi\|_{\varphi,p}$ ye göre

$$\lim_{n\to\infty} G_n(f) = f$$

dir.

İspat. Her bir $n \geq 1$ için

$$K_n(x,t) \coloneqq \frac{1}{\varphi(t)}\left(\frac{n}{4\pi}\right)^{d/2} \exp\left(-\frac{n}{4}\|t-x\|^2\right), (t, x \in \mathbb{R}^d),$$

konulduğunda

$$G_n(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} K_n(t,x) f(t) d\tilde{\mu}_\varphi(t) \quad (x \in \mathbb{R}^d)$$

elde ederiz. Üstelik, eğer $x \in \mathbb{R}^d$ sabit ise bu durumda

$$\int_{\mathbb{R}} K_n(t,x) d\tilde{\mu}_\varphi(t) = \left(\frac{n}{4\pi}\right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-\frac{n}{4}\|t-x\|^2) dt = 1$$

ve $t \in \mathbb{R}^d$ sabit için

$$\int_{\mathbb{R}} K_n(t,x) d\tilde{\mu}_\varphi(x) \leq C_\varphi$$

dir. Dolayısıyla, ifadenin ilk kısmı Fubini'nin ve Tonelli'nin teoremlerinden ve Hölder eşitsizliğinden görülür (Folland 1999). Son kısımla ilgili olarak, her pr_i nin de $L^p(\mathbb{R}^d, \tilde{\mu}_\varphi)$ ye ait olduğuna dikkat ederiz çünkü $|pr_i| \leq 1 + pr_i^2,\ (i = 1, \cdots, d)$ dir.

(4.4)'den, $(G_n)_{\mathrm{n}\geq 1}$ dizisinin $L^p(\mathbb{R}^d, \tilde{\mu}_\varphi)$ den kendisi içine eşsınırlı olduğu görülür. Üstelik, her $h \in \left\{\mathbf{1}, pr_1, \cdots, pr_d, \sum_{i=1}^{d} pr_i^2\right\}$ için $L^p(\mathbb{R}^d, \tilde{\mu}_\varphi)$ de $G_n(h) \to h$ olması gerekir ve bu nedenle sonuç, Sonuç 4.17, (2) den görülür.

Uyarı 4.20 Koşul (4.3)'ün, örneğin, $\varphi_m := (1 + \|x\|^m)^{-1}$ veya $\varphi_m(x) := \exp(-m\|x\|)$ $(x \in \mathbb{R}^d)$ fonksiyonları tarafından her $m \geq 1$ için sağlandığını göstermek zor değildir. Daha fazla ayrıntı için, daha genel integral operatörlerin bir dizisi için Teorem 4.19'un bir genişlemesinin oluşturulduğu ve $G_n, n \geq 1$, operatörlerinin ağırlıklı sürekli fonksiyon uzaylarında da incelendiği Altomare and Milella (2008) adlı makaleye bakılabilir.

5. KOROVKİN-TİPİ TEOREMLER VE STONE-WEIERSTRASS TEOREMLERİ

Bu bölümde, Korovkin tipi teoremler ile Stone-Weierstrass teoremleri arasındaki bağlantıları vereceğiz.

Weierstrass teoreminin bir genelleştirmesinin yeni bir ispatını vererek başlıyoruz. İlk olarak aşağıdaki sonuca ihtiyacımız vardır.

Lemma 5.1 $C_b(X)$ in her bir kapalı A altcebiri bir latis alt uzayıdır (yani, her bir $f \in A$ için $\|f\| \in A$ dır).

İspat. $t \in [0,2]$'ye göre düzgün olarak

$$t^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (t-1)^n = \lim_{n\to\infty} p_n(t)$$

olduğu bilinmektedir. Burada

$$p_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{1/2}{k} (t-1)^k \quad (n \geq 1, t \in [0,2])$$

dir. $\lim_{n\to\infty} p_n(t) = 0$ olduğundan $t \in [0,2]$ ye göre düzgün olarak $t^{1/2} = \lim_{n\to\infty} q_n(t)$'yi de elde ederiz, burada $q_n := p_n - p_n(0)$, $n \geq 1$ dir. Dolayısıyla, herhangi $f \in A, f \neq 0$ için

$$|f| = \|f\| \left(\frac{f^2}{\|f\|^2}\right)^{1/2} = \|f\| \lim_{n\to\infty} q_n\left(\frac{f^2}{\|f\|^2}\right) \in \bar{A} = A$$

olur.

Stone yaklaşım teoremini belirtmeden önce, $C_0(X)$ in bir M alt kümesinin, X in noktalarını ayırıyorsa ve her $x \in X$ için $f(x) \neq 0$ olacak şekilde $f \in M$ var ise, X in noktalarını güçlü bir şekilde ayırdığının söylendiğini hatırlayalım.

Teorem 5.2. X, sayılabilir bir tabanı olan lokal kompakt bir Hausdorff uzayı olsun ve A, X in noktalarını güçlü bir şekilde ayıran $C_0(X)$ in kapalı bir alt cebiri olsun. Bu durumda $A = C_0(X)$ dir.

İspat. İlk önce, A da kesin olarak pozitif bir f_0 fonksiyonunun var olduğunu ispatlayacağız. Bunun için, A nın ayrılabilir olduğuna dikkat ederiz çünkü $C_0(X)$ öyledir. $\{h_n | \, n \geq 1\}$ ile A nın bir yoğun alt kümesini gösterirsek, bu durumda her $x \in X$ için $n \geq 1$ vardır, öyle ki $h_n(x) \neq 0$ olur. Buradan $f_0 := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{2^n \|h_n\|}$ fonksiyonu Lemma 5.1'den dolayı A da bulunur ve X üzerinde kesin olarak pozitiftir.

Böyle bir $f_0 \in A$ fonksiyonu verildiğinde, o zaman $\{f_0\} \cup f_0 A \cup f_0 A^2 \subset A$ olur ve buradan A, $C_0(X)$ in bir Korovkin alt uzayıdır.

f $\in C_0(X)$ ve $\varepsilon > 0$ dikkate alındığında, Teorem 4.1'den dolayı $h_0, \ldots, h_n \in A$, $k_0, \ldots, k_n \in A$ ve ayrıca $u, v \in C_0(X)$, $u \geq 0, v \geq 0$, vardır öyle ki $\|u\| \leq \varepsilon$, $\|v\| \leq \varepsilon$ sağlanır ve son olarak,

$$\left\| \inf_{0 \leq j \leq n} k_j - \sup_{0 \leq i \leq n} h_i \right\| \leq \varepsilon \text{ ve } \sup_{0 \leq i \leq n} h_i - u \leq f \leq \inf_{0 \leq j \leq n} k_j + v$$

dir. Bu durumda $f - \inf_{0 \leq j \leq n} k_j \leq v$ ve

$$\inf_{0 \leq j \leq n} k_j - f \leq \left| \inf_{0 \leq j \leq n} k_j - \sup_{0 \leq i \leq n} h_i \right| + u$$

dir. Dolayısıyla

$$\left| f - \inf_{0\le j\le n} k_j \right| \le \left| \sup_{0\le i\le n} h_i - \inf_{0\le j\le n} k_j \right| + u + v$$

ve buradan

$$\left\| f - \inf_{0\le j\le n} k_j \right\| \le 3\varepsilon$$

olur ki bu $f \in \bar{A} = A$ olduğunu gösterir ($\inf_{0\le j\le n} k_j \in A$ dır) ve bu da ispatı tamamlar.

Teorem 5.3 X lokal kompakt bir Hausdorff uzayı olsun ve $C_0(X)$ in bir M alt kümesini düşünelim, öyle ki onun tarafından üretilen lineer alt uzay kesinlikle pozitif bir $f_0 \in C_0(X)$ fonksiyonu içerir. $x_0 \in X$ verilsin, her bir $g \in \{f_0\} \cup f_0M \cup f_0\, M^2$ için $\mu(g) = g$ yi sağlayan her $\mu \in M_b^+(X)$ için $\mu(f) = f(x_0)$ olacak şekilde tüm $f \in C_0(X)$ fonksiyonlarının alt uzayını $A(M, x_0)$ ile gösterelim. Bu durumda $A(M, x_0)$, $C_0(X)$'in M yi içeren kapalı bir alt cebiridir.

İspat. $A(M, x_0)$, $C_0(X)$ in kapalı bir alt uzayıdır.

$$\begin{aligned} M(x_0) &:= \{x \in X |\ g(x) = g(x_0),\ \forall g \in M\} \\ &= \left\{x \in X |\ f_0\big(g(x) - g(x_0)\big)^2 = 0,\ \forall g \in M\right\} \end{aligned}$$

diyelim ve $f \in A(M, x_0)$ ı sabitleyelim ve her bir $g \in \{f_0\} \cup f_0M \cup f_0M^2$ için $\mu(g) = g(x_0)$ olacak biçimde $\mu \in M_b^+(X)$ alalım. Özel olarak, her bir $g \in M$ için $\mu\left(f_0\big(g - g(x_0)\big)^2\right) = 0$

dır. Diğer taraftan, eğer $x \in M(x_0)$ ise bu durumda her bir $g \in \{f_0\} \cup f_0M \cup f_0\, M^2$ için $\delta_x(g) = g(x_0)$ dir böylece $f(x) = f(x_0)$ ve buradan $M(x_0)$ üzerinde $f_0(x_0)f^2 = f^2(x_0)f_0$ dir.

Dolayısıyla, Sonuç 2.2.13'den, $\mu(f_0(x_0)f^2) = f^2(x_0)\mu(f_0) = f^2(x_0)f_0(x_0)$ ve buradan $\mu(f^2) = f^2(x_0)$ elde ederiz. Dolayısıyla, $f^2 \in A(M, x_0)$ ve buradan $A(M, x_0)$, $C_0(X)$'in bir alt cebiridir.

Son olarak, eğer $h \in M$ ise bu durumda $M(x_0)$ üzerinde $f_0(x_0)h = h(x_0)f_0$ olduğuna dikkat ederiz. Dolayısıyla, eğer her bir $g \in \{f_0\} \cup f_0M \cup f_0\, M^2$ için her bir $\mu \in M_b^+(X)$ i $\mu(g) = g(x_0)$ şeklinde tekrar sabitlersek, Sonuç 2.2.13'ü uygulayarak hemen $f_0(x_0)\mu(h) = h(x_0)\mu(f_0) = h(x_0)f_0(x_0)$ ı elde ederiz, böylece $\mu(h) = h(x_0)$ ve dolayısıyla $h \in A(M, x_0)$ dır.

Teorem 5.4. Bir $f_0 \in C_0(X)$ kesin olarak pozitif fonksiyonunu ve $C_0(X)$'in X'in noktalarını ayıran bir M alt kümesini göz önüne alalım. Bu durumda $\{f_0\} \cup f_0M \cup f_0\, M^2$ $C_0(X)$'in bir Korovkin alt kümesidir.

Teorem 5.5 Korovkin tipi Teorem 5.4 ve Stone-Weierstrass Teoremi 5.2 eşdeğerdir.

İspat. Teorem 5.2'nin ispatı ışığında, sadece Teorem 5.2'nin Teorem 5.4'ü gerektirdiğini göstermeliyiz. Dolayısıyla, X in noktalarını ayıran ve onun tarafından üretilen lineer altuzay kesinlikle pozitif bir $f_0 \in C_0(X)$ fonksiyonu içerecek şekilde $C_0(X)$ in bir M alt kümesini göz önüne alalım.

$x_0 \in X$ verilsin, önceki teoremde tanımlanan $A(M, x_0)$ alt uzayını göz önüne alalım. Teorem 5.2 ve 5.3'den, $A(M, x_0)$ = $C_0(X)$ olduğu sonucunu çıkarıyoruz. Başka bir deyişle, göstermiş olduk ki her $x_0 \in$ X için ve her $g \in \{f_0\} \cup f_0M \cup f_0\, M^2$ için $\mu(g) = g(x_0)$ ı sağlayan her bir $\mu \in M_b^+(X)$ için, ayrıca her $f \in C_0(X)$ için $\mu(f) = f(x_0)$ dır ve bu, $\{f_0\} \cup f_0M \cup f_0M^2$ nin $C_0(X)$ in bir Korovkin alt kümesi olduğu anlamına gelir.

Korovkin tipi teoremler ile Stone-Weierstrass teoremleri arasındaki ilişkinin daha da derinleştirilmesi için Altomare and Campiti (1994) ve Altomare and Cappelleti Montano (2008)'ya bakılabilir.

6. POZİTİF İZDÜŞÜMLER İÇİN KOROVKİN-TİPİ TEOREMLER

Bu son bölümde, Bölüm 5'te ispatlanan genel teoremin aşikar olmayan bir uygulamasını göstererek, bir lineer pozitif izdüşümler sınıfı için bazı Korovkin tipi teoremleri tartışacağız.

Bir X kompakt metrik uzayını ve bir $T: C(X) \to C(X)$ **lineer pozitif izdüşüm**ünü göz önüne alalım yani, T bir lineer pozitif operatördür öyle ki her $f \in C(X)$ için $T(T(f)) = T(f)$ dir. T nin görüntü kümesini H_T ile göstereceğiz, yani,

$$H_T := T(C(X)) = \{h \in C(X) | \, T(h) = h\}.$$

Ayrıca $\mathbf{1} \in H_T$ (dolayısıyla $T(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$) olduğunu ve H_T nin X in noktalarını ayırdığını varsayacağız. Devamında, bu tür izdüşümlerin bazı örneklerini vereceğiz.

Her $x \in X$ için $\mu_x \in M^+(X)$ ile aşağıdaki şekilde tanımlanan Radon ölçüsünü gösterelim:

$$\mu_x(f) := T(f)(x) \quad (f \in C(X))$$

ve $\tilde{\mu}_x$ ile X üzerinde Riesz gösterim teoremi aracılığıyla μ_x e karşılık gelen birtek Borel olasılık ölçüsünü yani,

$$T(f)(x) = \mu_x(f) = \int_X f d\tilde{\mu}_x \quad (f \in C(X)) \tag{6.1}$$

gösterelim. Böylece, $(\tilde{\mu}_x)_{x \in X}$, T ye karşılık gelen kanonik sürekli seçimdir.

(2.3) eşitsizliği ile verilen Cauchy-Schwarz eşitsizliğine göre, her $h \in H_T$ için

$$|h| = |T(h)| \leq \sqrt{T(\mathbf{1})T(h^2)} = \sqrt{T(h^2)} \text{ dir.}$$

Böylece

$$h^2 \leq T(h^2) \tag{6.2}$$

elde ederiz.

$$Y_T = \{x \in X | \, T(f)(x) = f(x) \; \forall f \in C(X)\} \tag{6.3}$$

diyelim. Y_T kapalıdır ve aslında H_T nin Choquet sınırına eşittir ve buradan boştan farklıdır (Altomare and Campiti 1994).

Önerme 6.1 Eğer M, H_T nin X in noktalarını ayıran bir alt kümesi ise bu durumda

$$Y_T = \{x \in X | \, T(h^2)(x) = h^2(x) \; \forall h \in M\} \tag{6.4}$$

dır. Üstelik, eğer $(h_n)_{n\geq 1}$, H_T nin X in noktalarını ayıran sonlu veya sayılabilir bir ailesi ve eğer $u := \sum_{n=1}^{\infty} h_n^2$ serisi X üzerinde düzgün yakınsak ise bu durumda $u \leq T(u)$ ve

$$Y_T = \{x \in X | \, Tu(x) = u(x)\} \tag{6.5}$$

dir.

İspat. $T(h^2)(x) = h^2(x)$ olacak şekilde $x \in X$ i göz önüne alalım, yani, her bir $h \in M$ için $\mu_x(h^2) = h^2(x)$ dir. $M \subset H_T$ olduğundan $\mu_x(h) = h(x)$ $(h \in M)$ dir ve $\{\mathbf{1}\} \cup M \cup M^2$ Teorem 3.1 den dolayı $C(X)$ in bir Korovkin alt kümesidir. Buradan her bir $f \in C(X)$ için $f(x) = \mu_x(f) = T(f)(x)$ bulunur.

İfadenin ikinci kısmı ile ilgili olarak, $T(u) = \sum_{n=1}^{\infty} T(h_n^2)$ ve buradan (6.2) eşitsizliğindenden dolayı $u \leq T(u)$ olduğuna dikkat ederiz. Üstelik eğer $x \in X$ ve $T(u)(x) = u(x)$ ise bu durumda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(T(h_n^2)(x) - h_n^2(x)\right) = 0$$

dır. Buradan (6.2) eşitsizliğinin hesaba katılmasıyla her bir $n \geq 1$ için $T(h_n^2)(x) - h_n^2(x)$ dir ve böylece (6.4) eşitliğinden dolayı $x \in Y_T$ dir.

Uyarı 6.2. X in noktalarını ayıran ve $\sum_{n=1}^{\infty} h_n^2$ serisinin X üzerinde düzgün yakınsak olacak şekilde H_T nin sayılabilir bir $(h_n)_{n\geq 1}$ ailesi her zaman var olduğuna dikkat ederiz. Aslında, $C(X)$ ayrılabilir olduğundan, H_T de ayrılabilirdir, öyle ki H_T nin bir sayılabilir yoğun $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ ailesi göz önüne alındığında, $h_n \coloneqq \frac{\varphi_n}{2^n(1+\|\varphi_n\|)}$ $(n \geq 1)$ koymak yeterlidir.

Teorem 6.3. Eğer M, X in noktalarını ayıran H_T nin bir alt kümesiyse bu durumda $H_T \cup \mathrm{M}^2$ T için bir Korovkin alt kümesidir. Üstelik, eğer $u \in C(X),\ u \leq T(u)$ yu sağlıyorsa ve (6.5) eşitliği geçerliyse, bu durumda $H_T \cup \{\mathrm{u}\}$, T için bir Korovkin alt kümesidir.

Özel olarak, yukarıdaki ifade $u \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} h_n^2$ için geçerlidir, burada $(h_n)_{n\geq 1}$, H_T de X in noktalarını ayıran ve $\sum_{n=1}^{\infty} h_n^2$ serisi X üzerinde düzgün yakınsak olacak şekilde keyfi bir dizidir.

İspat. $\mu \in M^+(X)$ ve $x \in X$ i, her $h \in H_T \cup M^2$ için $\mu(h) = T(h)(x) = (\mu_x(h))$ olacak şekilde göz önüne alalım. Buna göre eğer $h \in M$ ise

$$\mu(T(h^2) - h^2) = T(h^2)(x) - \mu_x(h^2) = 0$$

ve $T(h^2) - h^2 \geq 0$ dır. Dolayısıyla (6.4) kullanılarak ve Teorem 2.2.12 ve Sonuç 2.2.13 uygulanırsa, her $f \in C(X)$ için $Tf = f$ olduğundan Y_T üzerinde $\mu(T(f)) = \mu(f)$ olduğunu görürüz. Buradan $\mu(f) = \mu(T(f)) = \mu_x(Tf) = Tf(x)$ dir ve bu ispatı tamamlar.

Benzer yöntemle (6.4) yerine (6.5) kullanılarak ifadenin ikinci bölümünü göstermek için kullanılabilir.

Örnek 6.4. $\mathbb{R}^d, d \geq 1$, in d-boyutlu K_d simpleksini ve

$$T_d(f)(x) = \left(1 - \sum_{i=1}^{d} x_i\right) f(0) + \sum_{i=1}^{d} x_i \, f(a_i) \qquad (6.6)$$

$(f \in C(K_d), x = (x_i)_{1 \leq i \leq d} \in K_d)$ ile tanımlı $T_d : C(K_d) \to C(K_d)$ pozitif izdüşümünü göz önünde bulunduralım, burada her $i = 1, \cdots, d$ için $a_i = (\delta_{ij})_{1 \leq j \leq d}$ dir.

Bu halde H_{T_d}, $M \coloneqq \{\mathbf{1}, pr_1, \cdots, pr_d\}$ tarafından üretilen $A(K_d)$ alt uzayıdır (Bölüm 3, (3.1) denklemindeki formülüne bakınız) ve buradan Teorem 6.3 den dolayı

$\left\{\mathbf{1}, pr_1, \cdots, pr_d, \sum_{i=1}^{d} pr_i^2\right\}$ T_d için bir Korovkin alt kümesidir.

Daha genel olarak, eğer K sonsuz boyutlu bir Bauer simpleksi ise bu durumda $C(K)$ üzerinde değer kümesi $A(K)$ olan bir birtek lineer pozitif T izdüşümü vardır. Bu halde her bir kesin olarak konveks $u \in C(K)$ için $A(K) \cup \{u\}$, T için bir Korovkin alt kümesidir (Altomare and Campiti 1994).

Örnek 6.5. $\mathbb{R}^d, d \geq 1$, in $Q_d = [0,1]^d$ hiperküresini ve

$$S_d(f)(x) = \sum_{h_1, \cdots, h_d = 0}^{1} x_1^{h_1} (1 - x_1)^{1 - h_1} \cdots x_d^{h_d} (1 - x_d)^{1 - h_d} f(b_{h_1, \cdots, h_d}) \qquad (6.7)$$

ile tanımlı $S_d : C(Q_d) \to C(Q_d)$ pozitif izdüşümünü göz önüne alalım, burada $b_{h_1, \cdots, h_d} \coloneqq (\delta_{h_i 1})_{1 \leq i \leq d}$ $(h_1, \cdots, h_d \in \{0,1\})$ dir.

Bu halde H_{S_d}, $C(Q_d)$ nun $\{\mathbf{1}\} \cup \{\prod_{i \in J} pr_i | \, J \subset \{1, \cdots, d\}\}$ tarafından üretilen alt uzayıdır. Dolayısıyla Teorem 6.3'den dolayı

$$\{\mathbf{1}\} \cup \left\{\prod_{i\in J} pr_i \,|\, J \subset \{1,\cdots,d\}\right\} \cup \sum_{i=1}^{d} pr_i^2$$

nin S_d için bir Korovkin alt kümesi olduğunu buluruz.

Yukarıdaki sonucun bir genişlemesi için Altomare and Campiti (1994)'ye bakılabilir.

Örnek 6.6. Potansiyel teori anlamında düzgün olduğunu varsaydığımız $\mathbb{R}^d, d \geq 2$, nin sınırlı bir Ω açık alt kümesini ele alalım (Örneğin, Helms (1969) veya Altomare and Campiti (1994)'ye bakınız). Yine, $\mathbb{R}^d$ nin her bir konveks açık alt kümesi düzgündür). Ω üzerinde harmonik olan tüm $u \in C(\overline{\Omega})$ ların alt uzayını $H(\Omega)$ ile gösterelim.

Ω nın düzgünlüğünden, her $f \in C(\overline{\Omega})$ için bir birtek $u_f \in H(\Omega)$ vardır, öyle ki $u_f|_{\partial\Omega} = f|_{\partial\Omega}$ dir, yani u_f nin

$$\begin{cases} \Delta u = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0, \ \Omega \text{ üzerinde} \\ u_f|_{\partial\Omega} = f|_{\partial\Omega} \end{cases} \quad (u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega))$$

Dirichlet probleminin birtek çözümü olduğu görülür. Bu durumda

$$T(f) \coloneqq u_f \ \ (f \in C(\overline{\Omega}))$$

ile tanımlı $T: C(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega})$ **Poisson operatörü** değer bölgesi $H(\Omega)$ olan bir pozitif izdüşümdür.

Dolayısıyla Teorem 6.3 den

$$H(\Omega) \cup \left\{\sum_{i=1}^{d} pr_i^2\right\}$$

nin T için bir Korovkin alt kümesi olduğunu buluruz.

Şimdi Teorem 6.3 ün bir uygulamasını tartışacağız. Lokal konveks bir uzayın metriklenebilir konveks kompakt bir K alt kümesini gözönüne alalım. Her $f \in C(K)$, $z \in K$ ve $\alpha \in [0,1]$ için, $f_{z,\alpha} \in C(K)$ ile

$$f_{z,\alpha}(x) \coloneqq f(\alpha x + (1 - \alpha)z) \quad (x \in K)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonu gösterelim. $T: C(K) \to C(K)$ özdeşlik operatöründen farklı bir T lineer pozitif izdüşümünü göz önüne alalım ve

$$A(K) \subset H_T \coloneqq T(C(K))) \tag{6.8}$$

olduğunu kabul edelim yani,

$$\text{her } u \in A(K) \text{ için } T(u) = u$$

ve

$$\text{her } h \in H_T,\ z \in K, 0 \leq \alpha \leq 1 \text{ için } h_{z,\alpha} \in H_T \tag{6.9}$$

dir. Burada, bir kez daha, K üzerindeki tüm sürekli afin fonksiyonların alt uzayını belirtmek için $A(K)$ sembolünü kullanıyoruz. Üstelik, 6.4-6.6 örneklerinin hepsinde, (6.8)–(6.9) kabulleri sağlanmaktadır. Üstelik Teorem 6.3'den

$$H_T \cup A(K)^2 \text{ nin } T \text{ için bir Korovkin alt kümesi} \tag{6.10}$$

olduğu da çıkar. T ye karşılık gelen yani, (6.1) denklemi ile tanımlanan $(\tilde{\mu}_x)_{x \in X}$ sürekli seçimine karşılık gelen Bernstein-Schnabl operatörlerinin $(B_n)_{n \geq 1}$ dizisini göz önüne alalım.

Eğer T (6.6) eşitliği ile tanımlanan T_p projeksiyonu (sırasıyla (6.7) ile tanımlanan S_p projeksiyonu) ise bu durumda karşılık gelen Bernstein-Schnabl operatörlerinin Bernstein operatörleridir. Biliyoruz ki

K üzerinde düzgün olarak $\lim_{n\to\infty} B_n(f) = f \quad (f \in C(K))$

dir. Bu özel durumda, B_n operatörlerinin yinelemelerini de inceleyebiliriz.

Her $n, m \geq 1$ için

$$B_n^m := \begin{cases} B_n, & \text{eğer } m = 1 \text{ ise} \\ B_n \circ B_n^{m-1}, & \text{eğer } m \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

diyelim. (6.9) kabülünden, eğer $h \in H_T$ ise, o zaman $B_n(h) = h$ ve buradan

$$B_n^m(h) = h = T(h) \tag{6.11}$$

dir. Öte yandan, eğer $u \in A(K)$ ise, o zaman bir tümevarım yöntemi uygulayarak

$$B_n(u^2) = \left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^m\right) T(u^2) + \left(\frac{n-1}{n}\right)^m u^2 \tag{6.12}$$

elde edilir. Şimdi, bir sonraki sonucu kolayca ispatlayabiliriz.

Teorem 6.7. $f \in C(K)$ olsun. Bu durumda

(1) her $m \geq 1$ için K üzerinde düzgün olarak $\lim_{n\to\infty} B_n^m(f) = f$ dir.

(2) Her $n \geq 1$ için K üzerinde düzgün olarak $\lim_{m\to\infty} B_n^m(f) = T(f)$ dir.

(3) Eğer $(k(n))_{n\geq 1}$ pozitif tamsayıların bir dizisi ise bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} B_n^{k(n)}(f) = \begin{cases} f, \text{eğer } K \text{ üzerinde düzgün olarak } \frac{k(n)}{n} \to 0 \text{ ise} \\ T(f), \text{eğer } K \text{ üzerinde düzgün olarak } \frac{k(n)}{n} \to +\infty \text{ ise} \end{cases}$$

dir.

İspat.

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^m = \exp\left(m \log\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) \quad (n, m \geq 2)$$

temel formülünün yanı sıra (6.11) ve (6.12) dikkate alınarak (6.10) ifadesinin uygulanması yeterlidir.

T üzerindeki bazı ek varsayımlar altında, $\left(B_n^{k(n)}(f)\right)_{n\geq 1}$ $(f \in C(K))$ dizisinin $\frac{k(n)}{n} \to t \in]0, +\infty[$ olduğunda da düzgün yakınsak olduğunu belirtmekte fayda vardır.

Daha kesin olarak, her $t \geq 0$ için bir $T(t): C(K) \to C(K)$ lineer pozitif operatörü vardır öyle ki pozitif tamsayıların $\frac{k(n)}{n} \to t$ yi sağlayan her $(k(n))_{n\geq 1}$ dizisi ve her $f \in C(K)$ için

$$T(t)f = \lim_{n\to\infty} B_n^{k(n)}(f)$$

dir. Üstelik, $(T(t))_{t\geq 0}$ ailesi, $(A, D(A))$ üreteci $(Z, D(Z))$ operatörünün kapanışı olan kuvvetli sürekli bir operatör yarı grubudur, burada

$$D(Z) := \left\{u \in C(K) | \lim_{n\to\infty} n(B_n(u) - u), C(K) \text{ da vardır}\right\}$$

ve, her bir $u \in D(Z) \subset D(A)$ için

$$A(u) = Z(u) = \lim_{n\to\infty} n(B_n(u) - u)$$

olur. $K, \mathbb{R}^d, d \geq 1$, nin içi boş olmayan bir alt kümesi ve eğer T, her $m \geq 1$ için m dereceli tüm polinomların alt uzayını kendi içine dönüştürürse o zaman $C^2(K) \subset D(Z) \subset D(A)$ dır ve her $u \in C^2(K)$ için,

$$Au(x) = Zu(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \alpha_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i x_j} \quad (x = (x_i)_{1\leq i\leq d}) \tag{6.13}$$

dir. Burada her $i, j = 1, \ldots, d$ için

$$\alpha_{i,j}(x) := T(pr_i pr_j)(x) - x_i x_j$$

(6.13) diferensiyel operatörü, (K nın tüm ekstremum noktalarını içeren) (6.3) ile tanımlanan Y_T alt kümesi üzerinde dejenere olan eliptik ikinci dereceden bir diferensiyel operatördür.

Üstelik, her $u_0 \in D(A)$ için

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = A\big(u(\cdot,t)\big)(x), & x \in K, t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in K \\ u(\cdot,t) \in D(A), & t \geq 0 \end{cases} \tag{6.14}$$

(soyut) Cauchy problemi

$$u(x,t) = T(t)(u_0)(x) = \lim_{n\to\infty} B_n^{k(n)}(u_0)(x) \ \ (x \in K, t \geq 0) \tag{6.15}$$

ile tanımlanan bir birtek $u: K \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ çözümüne sahiptir ve limit, $\frac{k(n)}{n} \to t$ olmak üzere $x \in K$ ya göre düzgündür.

Bu sonuçlar Altomare (1989) ve Altomare and Campiti (1994) tarafından verilmiştir ve ana amaçları, ilk olarak, lineer pozitif operatörlerin iterasyonları anlamında ((6.15) gibi) dejenere evrim denklemlerine ((6.14) gibi) karşılık gelen başlangıç sınır diferensiyel probleminin çözümlerinin yaklaşımı ve ikinci olarak, (6.15) formülü anlamında çözümlerin hem sayısal hem de niteliksel analizi olan bir dizi araştırmaya kapı açmıştır.

KAYNAKLAR

Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O. 1985. Positive operators, Springer, 376 pages, Dordrecht.

Altomare, F. 1989. Limit semigroups of Bernstein-Schnabl operators associated with positive projections. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., 16(2): 259–279.

Altomare, F. and Campiti, M. 1994. Korovkin-type approximation theory and its applications, De Gruyter Studies in Mathematics 17, De Gruyter and Co., 638 pages, Berlin.

Altomare, F. and Raşa, I. 1998. Towards a characterization of a class of differential operators associated with positive projection. Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, Suppl., 46: 3–38.

Altomare, F. and Mangino, E. 1999. On a generalization of Baskakov operators. Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 44(6): 683–705.

Altomare, F. and Cappelletti Montano, M. 2005. Korovkin-type theorems in regular locally convex vector lattices of continuous functions I. Studia Math., 171(3): 239–260.

Altomare, F. and Cappelletti Montano, M. 2008. On a class of vector lattices of continuous function spaces and related approximation/density problems. Banach and function spaces II, 25–50, Yokohama Publ., 455 pages, Yokohama.

Altomare, F., Leonessa, V. and Raşa, I. 2008. On Bernstein-Schnabl operators on the unit interval. Z. Anal. Anwend., 27: 353–379.

Altomare, F. and Milella, S. 2008. On a sequence of integral operators on weighted L_p spaces. Analysis Math., 34: 237–259.

Altomare, F. 2009. Asymptotic formulae for Bernstein-Schnabl operators and smoothness. Boll. U.M.I., 9(2): 135–150.

Altomare, F., Leonessa V. and Milella, S. 2009. Bernstein-Schnabl operators on noncompact real intervals. Jaen J. Approx., 1(2): 223–256.

Altomare, F. 2010. Korovkin-type theorems and approximation by positive linear operators. Surv. Approx. Theory, 5: 92–164.

Baskakov, V.A. 1961. On various convergence criteria for linear positive operators. Usp. Mat. Nauk, 16(1): 131–134.

Bauer, H. 2001. Measure and integration theory, de Gruyter Studies in Mathematics, 26, De Gruyter and Co., 246 pages, Berlin.

Bauer, H. and Donner, K. 1978. Korovkin approximation in $C_0(X)$. Math. Ann., 236(3): 225–237.

Bernstein, S.N. 1913. Demostration du theoreme de Weierstrass fondee sur le calcul de probabilites. Comm. Soc. Math. Kharkow, 13(2): 1–2.

Choquet, G. 1969. Lectures on analysis, Vol. I and II, A. Benjamin Inc., 379 pages, New York-Amsterdam.

Derrienic, M.M. 1981. Sur lapproximation de fonctions integrable sur [0,1] par des polynomes de Bernstein modifies. J. Approx. Theory, 31: 325–343.

Dinghas, A. 1951. Über einige identitaten von Bernsteinschem typus. Norske Vid. Selsk. Fohr. Trondheim, 24: 96–97.

Engelking, R.L. 1989. General topology, Sigma Series in Pure Mathematics 6, Heldermann Verlag, 520 pages, Berlin.

Folland, G.B. 1999. Real analysis, modern techniques and their applications, John Wiley and Sons, 364 pages, New York.

Freud, G. 1964. Über positive linear approximations folgen von stetigen reellen funktionen auf kompakten mengen, in: On Approximation Theory (Proc. Conf. Oberwolfach, 1963), 233–238: Birkhauser, Basel.

Grossman, M.W. 1974. Note on a generalized Bohman-Korovkin theorem. J. Math. Anal. Appl., 45: 43–46.

Helms, L.L. 1969. Introduction to potential theory, Wiley-Interscience, 282 pages, New York.

Kantorovich, L.V. 1930. Sur certains developpements suivant les polynomes de la forme de S. Bernstein, I, II. C. R. Acad. URSS, 563–568, 595–600.

Korovkin, P.P. 1953. Convergence of linear positive operators in the spaces of continuous functions. Doklady Akad. Nauk. SSSR (N.S.), 90: 961–964.

Nishishiraho, T. 1974. A generalization of the Bernstein polynomials and limit of its iterations. Sci. Rep. Kanazawa Univ., 19(1). 1–7.

Nishishiraho, T. 1983. Convergence of positive linear approximation processes. Tohoku Math. J., 35(3): 441–458.

Raşa, I. 1988. Generalized Bernstein operators and convex functions. Studia Univ. Babes-Bolyai Math., 33(2): 36–39.

Raşa, I. 1993. Altomare projections and Lototsky-Schnabl operators, Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo, 33: 439–451.

Romito, M. 1998. Lototsky-Schnabl operators associated with a strictly elliptic differential operator and their corresponding Feller semigroups. Mh. Math., 126: 329–352.

Schnabl, R. 1968. Eine Verallgemeinerung der Bernsteinpolynome. Math. Ann., 179: 74–82.

Schnabl, R. 1969. Zur Approximation durch Bernstein polynome auf gewissen Räumen von Wahrscheinlichkeitsmaßen. Math. Ann., 180: 326–330.

Weierstrass, K. 1885. Über die analytische darstellbarkeit sogenannter willkürlicher funktionen einer reellen veranderlichen, Sitzungberichte der Akademie zu Berlin. 633–639, 789–805.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı ve Soyadı : Mehmet AY

Eğitim

Yüksek Lisans	Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı	2020-2022
Lisans	Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü	2012-2019