İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

UZAY-ZAMAN KAFES KODLARININ GÖLGELEMELİ KANALLARDAKİ HATA BAŞARIM ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Müh. Barlas BAŞARAN
504031302

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 1 Mayıs 2006
Tezin Savunulduğu Tarih : 15 Haziran 2006

Tez Danışmanı : Doç.Dr. İbrahim ALTUNBAŞ

Diğer Jüri Üyeleri Prof.Dr. Ümit AYGÖLÜ (İ.T.Ü.)

Yrd.Doç.Dr. Oğuz KUCUR (G.Y.T.E.)

HAZİRAN 2006

ÖNSÖZ

Bu çalışma konusunun seçiminde ve çalışmalarım boyunca her konuda yardımcı olan tez danışmanım Sayın Doç. Dr. İbrahim Altunbaş'a saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca derslerde yardımlarını esirgemeyen Sayın Prof. Dr. Ümit Aygölü'ne ve tez danışmanıma teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmanın başlangıcından itibaren her safhasında gösterdikleri anlayış ve destekten dolayı aileme teşekkür ederim.

Mayıs 2006 Barlas BAŞARAN

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR **v**
TABLO LİSTESİ **vi**
ŞEKİL LİSTESİ **vii**
SEMBOL LİSTESİ **viii**
ÖZET **x**
SUMMARY **xii**

1. GİRİŞ **1**

2. UZAY-ZAMAN KODLARI **5**
2.1. Sönümlemeli Kanallar 5
2.1.1. Rayleigh Sönümlemeli Kanal 5
2.1.2. Rician Sönümlemeli Kanal 7
2.2. Uzay-Zaman Blok Kodları 9
2.3. Uzay-Zaman Kafes Kodları 14
2.3.1. Duruğumsu Sönümlemeli Kanallar 18
2.3.1.1. rn_R Değerinin Büyük Olduğu Durumda Koşulsuz Hata Olasılığı 22
2.3.1.2. rn_R Değerinin Küçük Olduğu Durumda Koşulsuz Hata Olasılığı 24
2.3.2. Hızlı Sönümlemeli Kanallar 26
2.3.2.1. $\delta_H n_R$ Değerinin Büyük Olduğu Durumda Koşulsuz Hata Olasılığı 28
2.3.2.2. $\delta_H n_R$ Değerinin Küçük Olduğu Durumda Koşulsuz Hata Olasılığı 30
2.3.3. Uzay-Zaman Kafes Kodların Tasarım Ölçütleri 31
2.3.3.1. Duruğumsu Sönümlemeli Kanal için Tasarım Ölçütleri 31
2.3.3.2. Hızlı Sönümlemeli Kanal için Tasarım Ölçütleri 34
2.3.3.3. Düşük ve Orta İşaret Gürültü Oranlarında Kod Performansı 36
2.3.4. Uzay-Zaman Kafes Kod Örnekleri 37

3. UZAY-ZAMAN KODLARDA GÖLGELEMENİN ETKİSİ **42**
3.1. Gölgelemeli Kanallar 42
3.1.1. Rician-lognormal Sönümlemeli Kanal 43
3.1.2. Rician-Nakagami Sönümlemeli Kanal 44
3.2. Uzay-Zaman Kafes Kodların Gölgeleme Etkisi Altındaki Performansı 46
3.2.1. Rician-Lognormal Dağılımlı Kanalda Uzay-Zaman Kafes Kodların Performansı 46

3.2.1.1. Duruğumsu Sönümlemeli Kanal 47
3.2.1.2. Hızlı Sönümlemeli Kanal 53
3.2.2. Rician-Nakagami Dağılımlı Kanalda Uzay-Zaman Kafes Kodların Performansı 55

4. UZAY-ZAMAN KAFES KODLARINDA ÇEŞİTLEME DERECESİNE BAĞLI OLARAK GÖLGELEMENİN ETKİSİ 59
4.1. Büyük Çeşitleme Derecesi için Rician-lognormal Kanalda Hata Olasılığı 59
4.1.1. Duruğumsu Sönümlemeli Kanal 60
4.1.2. Hızlı Sönümlemeli Kanal 69
4.2. Küçük Çeşitleme Derecesi için Rician-Nakagami Kanalda Hata Olasılığı 74
4.3. Büyük Çeşitleme Derecesi için Rician-Nakagami Kanalda Hata Olasılığı 77
4.3.1. Duruğumsu Sönümlemeli Kanal 77
4.3.2. Hızlı Sönümlemeli Kanal 84

5. SONUÇLAR 88

KAYNAKLAR 90

ÖZGEÇMİŞ 93

KISALTMALAR

MRC	: Maximum Ratio Combining (En Büyük Oran Birleştirmesi)
PSK	: Phase Shift Keying (Faz Kaydırmalı Anahtarlama)
SNR	: Signal to Noise Ratio (İşaret Gürültü Oranı)
BER	: Bit Error Rate (Bit Hata Oranı)
FER	: Frame Error Rate (Çerçeve Hata Oranı)
STTC	: Space-Time Trellis Codes (Uzay-Zaman Kafes Kodları)
MIMO	: Multiple-Input Multiple-Output (Çok-Girişli Çok-Çıkışlı)
TSC	: Tarokh, Seshadri ve Calderbank
AWGN	: Additive White Gaussian Noise (Toplamsal Beyaz Gauss Gürültüsü)
BBH	: Baro, Bauch ve Hansmann
CVYL	: Chen, Vucetic, Yuan ve Lo
CVY	: Chen, Vucetic ve Yuan
RD	: Rank ve Determinant
MGF	: Moment Generating Function (Moment Üreteç İşlevi)

TABLO LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 4.1. Farklı gölgeleme türleri için Rician-lognormal kanal parametreleri..... 66
Tablo 4.2. Farklı gölgeleme türleri için Rician-Nakagami kanal parametreleri..... 81

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 1.1 : Sayısal bir haberleşme sisteminin blok şeması..... 1
Şekil 2.1 : Rayleigh sönümlemeli kanal 6
Şekil 2.2 : Rayleigh dağılımının olasılık yoğunluk işlevi 7
Şekil 2.3 : Rician sönümlemeli kanal..... 8
Şekil 2.4 : Rician dağılımının olasılık yoğunluk işlevi..... 9
Şekil 2.5 : Alıcı anten çeşitlemesine sahip haberleşme sistemi..... 10
Şekil 2.6 : Verici anten çeşitlemesine sahip haberleşme sistemi..... 12
Şekil 2.7 : Alıcı ve verici anten çeşitlemesi uygulanan sistemlerin performans karşılaştırılması..... 14
Şekil 2.8 : 2 antenli uzay-zaman kafes kodu vericisi..... 15
Şekil 2.9 : Çok girişli çok çıkışlı haberleşme sistemi..... 16
Şekil 2.10 : 4PSK modülasyonu için işaret kümesi..... 37
Şekil 2.11 : TSC uzay-zaman kodu kafes diyagramı..... 38
Şekil 2.12 : BBH uzay-zaman kodu kafes diyagramı..... 38
Şekil 2.13 : CVYL uzay-zaman kodu kafes diyagramı..... 39
Şekil 2.14 : CVY uzay-zaman kodu kafes diyagramı..... 39
Şekil 2.15 : 2 verici ve 1 alıcı anten durumunda uzay-zaman kafes kodlarının performansları..... 40
Şekil 2.16 : 2 verici ve 2 alıcı anten durumunda uzay-zaman kafes kodlarının performansları..... 41
Şekil 3.1 : Gölgelemeli kanal modeli..... 42
Şekil 4.1 : TSC kodun Rician-lognormal kanaldaki performansı..... 67
Şekil 4.2 : TSC ve CVY kodlarının hafif gölgelemeli Rician-lognormal kanaldaki performanslarının karşılaştırılması..... 68
Şekil 4.3 : TSC ve CVY kodlarının ortalama gölgelemeli Rician-lognormal kanaldaki performanslarının karşılaştırılması..... 68
Şekil 4.4 : TSC ve CVY kodlarının yoğun gölgelemeli Rician-lognormal kanaldaki performanslarının karşılaştırılması..... 69
Şekil 4.5 : TSC kodun Rician-Nakagami kanaldaki performansı..... 82
Şekil 4.6 : TSC ve CVY kodlarının hafif gölgelemeli Rician-Nakagami kanaldaki performanslarının karşılaştırılması..... 83
Şekil 4.7 : TSC ve CVY kodlarının ortalama gölgelemeli Rician-Nakagami kanaldaki performanslarının karşılaştırılması..... 83
Şekil 4.8 : TSC ve CVY kodlarının yoğun gölgelemeli Rician-Nakagami kanaldaki performanslarının karşılaştırılması..... 84

SEMBOL LİSTESİ

A	: Baskın bileşenin tepe genlik değeri
$\mathbf{A(X,\hat{X})}$	: Kodsözcüğü uzaklık matrisi
a	: Nakagami rastlantı değişkeninin ortalaması
$\mathbf{B(X,\hat{X})}$	: Kodsözcüğü fark matrisi
$\mathbf{C(X_t,\hat{X}_t)}$	: Uzay-zaman simge uzaklık matrisi
$\mathbf{c}$, $\mathbf{c_t}$	: Mesaj dizileri
D	: Gauss rastlantı değişkeni
d_E^2	: İki uzay-zaman simge dizisi arasındaki karesel Öklid uzaklığı
$d_h^2(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})$	: İki simge dizisi arasındaki Öklid uzaklığı
d_p^2	: İki uzay-zaman simge dizisi arasındaki karesel Öklid uzaklıklarının çarpımı
E_s	: Ortalama simge enerjisi
$\mathbf{F(X_t,\hat{X}_t)}$	: Uzay-zaman simge fark vektörü
$g_I(t)$, $g_Q(t)$	: Gauss rastlantı süreçleri
ρ	: Sönümleme değişkeninin zarfı
$\mathbf{H}$	: Kanal matrisi
h_0, h_1, $h_{j,i}$, $h^t_{j,i}$	: Kanal sönümleme katsayıları
$\mathbf{I}$	: Birim matris
$I_0(.)$	: Sıfırıncı dereceden değiştirilmiş birinci tür Bessel işlevi
K, $K^{j,i}$, $K_t^{j,1}$	: Rician parametreleri
L	: Çerçeve uzunluğu
M	: Modülasyon kümesindeki simge sayısı
m	: Nakagami parametresi
μ, $\mu^{j,i}$, $\mu^t_{j,1}$	: Rician dağılımındaki baskın bileşen
μ_D	: D rastlantı değişkeninin ortalaması
μ_Z	: Z rastlantı değişkeninin ortalaması
$N_0/2$	: Toplamsal beyaz Gauss gürültüsü çift yönlü güç spektral yoğunluğu
n_0, n_1, n_t^j	: Kompleks gürültü bileşenleri
n_R, n_T	: Alıcı ve verici anten sayısı
$Q(.)$	: Q işlevi
R	: Saniyede iletilen bit sayısı
r	: $\mathbf{A(X,\hat{X})}$ matrisinin rankı
r_0, r_1, r_t^j	: Alınan işaretler
S	: Merkeziyetsizlik parametresi
s_0, s_1	: İletilen işaretler
T	: Simge süresi
$\mathbf{V}$, $\mathbf{V_t}$	: Tekil matrisler
$\mathbf{v_i}$, $\mathbf{v_t^i}$	: $\mathbf{A(X,\hat{X})}$ ve $\mathbf{C(X_t,\hat{X}_t)}$ matrislerinin özvektörleri

W	: Kanalın bandgenişliği
$\mathbf{X}$	: Verici antenden iletilen kodsözcüğü matrisi
$\hat{\mathbf{X}}$	: Alıcı tarafta çözülmüş kodsözcüğü matrisi
$\mathbf{X_L}$	: Sol özvektör matrisi
$\mathbf{X_R}$	: Sağ özvektör matrisi
x_t^i	: İletilen işaret
Z	: Gauss rastlantı değişkeni
$\mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{\Lambda_t}$	: Köşegen matrisler
Ω	: Ortalama güç
Γ	: İkinci dereceden kompleks Gauss rastlantı değişkeni
$\Gamma(.)$	: Gamma işlevi
γ	: İşaret gürültü oranı
δ_H	: Uzay-zaman dizileri arasındaki Hamming uzaklığı
λ_i, λ_t^i	: $\mathbf{A(X,\hat{X})}$ ve $\mathbf{C(X_t,\hat{X}_t)}$ matrislerinin özdeğerleri
σ_h^2	: $h_{j,i}$ kanal sönümleme katsayılarının varyansı
σ_D^2	: D rastlantı değişkeninin varyansı
σ_Z^2	: Z rastlantı değişkeninin varyansı
$\Psi(.)$	: Psi işlevi

UZAY-ZAMAN KAFES KODLARININ GÖLGELEMELİ KANALLARDAKİ HATA BAŞARIM ANALİZİ

ÖZET

Gezgin telsiz iletişim kanallarında, iletilen işaretin kalitesini etkileyen çeşitli bozucu etkenler bulunmaktadır. Bu bozucu etkenler, çok-yollu iletimden kaynaklanan sönümleme, girişim ve toplamsal beyaz Gauss gürültüsüdür. Sönümlemenin işaretler üzerindeki bozucu etkisini azaltmak için çeşitleme teknikleri kullanılmaktadır. Çeşitleme zamanda, frekansta ve uzayda yapılabilmektedir. Uzay çeşitlemesi verici ve/veya alıcı tarafta birden fazla anten kullanılması ile elde edilmektedir.

Alıcı anten çeşitlemesi uzun yıllardır bilinen bir yöntemdir. Ancak verici anten çeşitlemesi daha yeni bir yöntemdir. Uzay-zaman kodlaması, verici anten çeşitlemesi kullanılması için tasarlanmış bir kanal kodlama tekniğidir. Uzay-zaman kodlaması tekniği sayesinde yüksek hata başarımına ve yüksek hızlara sahip kodlar tasarlanabilmektedir.

Uzay-zaman kafes kodlarının Rayleigh ve Rician kanaldaki hata başarımını etkileyen unsurlar, kodun rank değeri ile alıcı anten sayısının çarpımı olan çeşitleme derecesine göre farklılık göstermektedir. Kodun hata başarımını, küçük çeşitleme derecesi durumunda koda ilişkin rank ve determinant değeri; büyük çeşitleme derecesi durumunda ise koda ilişkin iz değeri belirlemektedir.

Bu çalışmada, uzay-zaman kafes kodlarının gölgeleme etkisi altındaki hata başarımı, sistemin çeşitleme derecesine bağlı olarak incelenmiştir. Uzay-zaman kafes kodlarının Rician-lognormal ve Rician-Nakagami sönümlemeli kanaldaki hata başarımının, çeşitleme derecesine bağlı olduğu gösterilmiştir. Literatürde, Rician-lognormal ve Rician-Nakagami sönümlemeli kanal için çiftsel hata olasılıklarının tam değeri elde edilmiş ve rank-determinant ölçütünün geçerli olduğu gösterilmiştir. Bu tezde, rank-determinant ölçütünün sadece küçük çeşitleme derecesi durumunda

geçerli olduğu gösterilmiştir. Büyük çeşitleme derecesi durumunda ise, her iki kanal modeli için de hata olasılığı üst sınırı elde edilmiş ve hata başarımının kodun iz değerine bağlı olduğu ortaya konulmuştur. Ayrıca küçük çeşitleme derecesi durumunda, uzay-zaman kafes kodlarının hızlı Rician-Nakagami kanaldaki çiftsel hata olasılığının tam değeri elde edilmiş ve hata başarımının uzaklık-çarpım ölçütüne bağlı olduğu gösterilmiştir. Sonuç olarak, Rayleigh ve Rician kanallar için kullanılan tasarım ölçütleri ile bu kanallar için tasarlanmış olan kodların, Rician-lognormal ve Rician-Nakagami kanallarda da kullanılabileceği ortaya konmuştur.

PERFORMANCE ANALYSIS OF SPACE-TIME TRELLIS CODES OVER SHADOWING CHANNELS

SUMMARY

In mobile wireless communication channels, there are many corruptive factors which affect the quality of the transmitted signal. Some of these factors are the interchannel interference, the additive white Gaussian noise and the fading resulting from multipath propagation. Diversity techniques are used to reduce the effect of the fading. Diversity can be achieved in time, frequency and space. Space diversity is achieved by using multiple antennas at the receiver and/or the transmitter part.

Receive diversity techniques have been known for a long time. However, the transmit diversity is a new method. Space-time coding is a channel coding technique that is designed to use transmit diversity. By means of the space-time coding technique, codes with high error performance and high rates can be designed.

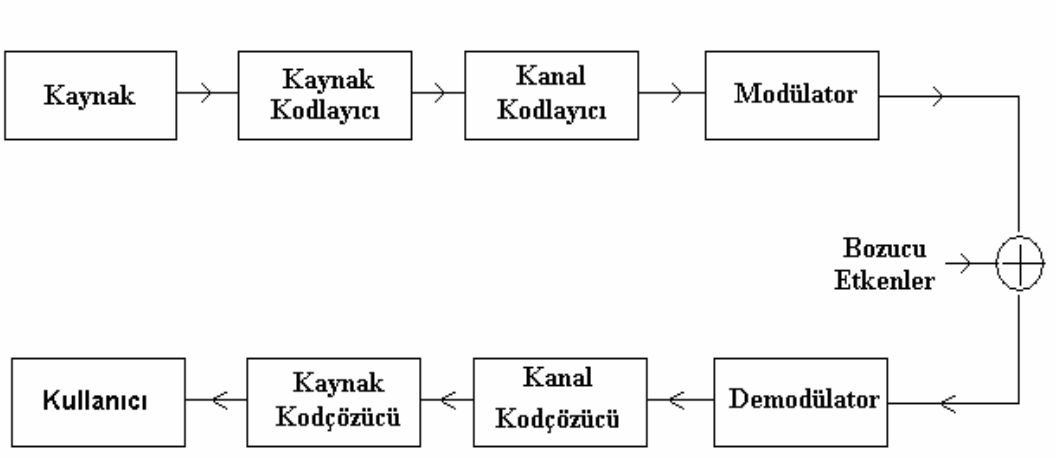
The parameters affecting the error performance of the space-time trellis codes over the Rayleigh and Rician fading channels differentiate according to the diversity order which is multiplication of the rank of the code and the number of the receive antennas. The error performance of the code is determined by the rank and the determinant of the code for the small values of diversity order whereas it is determined by the trace of the code for the large values of diversity order.

In this work, effect of shadowing on the performance of space-time trellis codes is analyzed according to the diversity order of the system. It is shown that the error performance of the space-time time trellis codes over the Rician-lognormal and the Rician-Nakagami fading channels depends on the diversity order of the system. In literature, the exact value of the pairwise error probability of the space-time trellis codes over the Rician-lognormal and the Rician-Nakagami fading channels were derived and it was presented that the rank-determinant criterion is valid for these

channel models. In this thesis, it is shown that the rank-determinant criterion is only valid for the small values of diversity order. Upper bounds of error probability is obtained for both the Rician-lognormal and the Rician-Nakagami fading channels in the case of large values of diversity order and it is shown that the error performance depends on the trace value of the code. Additionally, for the small values of diversity order, the exact value of the pairwise error probability of the space-time trellis codes over the fast Rician-Nakagami fading channels is obtained and it is shown that the error performance depends on the distance-product criterion. As a result, it is presented that the design criteria used for the Rayleigh and the Rician channels, and the codes designed for these channels can also be used for the Rician-lognormal and the Rician-Nakagami channels.

1. GİRİŞ

1948 yılında Shannon'un [1] sayısal haberleşme sistemlerindeki iletim hızının sınırlarını belirlemesi ile bu sınıra yaklaşmak için bir çok kodlama teknikleri geliştirilmiştir. Bu kodlama tekniklerinin daha iyi anlaşılabilmesi için genel bir haberleşme sisteminin modeli Şekil 1.1'de verilmiştir.



Şekil 1.1 Sayısal bir haberleşme sisteminin blok şeması

Kaynak tarafından verilen bilgi öncelikle kaynak kodlayıcı tarafından sıkıştırılır ve daha küçük bir boyutta kanal kodlayıcıya verilir. Kanal kodlayıcı ise daha az hatalı bir iletimi sağlamak için kodlama yapmaktadır. Modülator, bilginin kanaldan iletilebilmesi için yüksek frekanstaki analog dalga işaretlerine dönüşmesini sağlamaktadır. İletilen işaret, kanalda girişim, sönümleme ve gürültü gibi bozucu etkiler altında kalmaktadır. Alıcı tarafta ise, verici kısımda yapılan işlemlerin tam tersi olan demodülasyon, kanal kodçözme ve kaynak kodçözme işlemleri sırasıyla yapılmaktadır.

İnternetin ve çoklu-ortam uygulamalarının telsiz haberleşme sistemleriyle bütünleşmesi ile geniş bantlı, yüksek veri hızlarına sahip haberleşme hizmetlerine olan talep hızla artış göstermiştir. Frekans spektrumu sınırlı olduğundan daha yüksek veri hızları ancak daha verimli işaretleşme teknikleri kullanılarak elde edilebilmektedir [2]. Bilgi kuramı alanında yapılan çalışmalar göstermiştir ki telsiz

haberleşmesinde çok girişli-çok çıkışlı sistemler kullanılarak kanal sığası artırılabilmektedir [2-4]. Çok girişli çok çıkışlı sistemler, alıcı ve verici tarafında çoklu anten kullanılarak elde edilmektedir. Hem alıcı hem de verici anten çeşitlemesi, daha az hatalı bir iletim sağlamakta ve telsiz iletişimde daha yüksek hızlara çıkılmasına olanak sağlamaktadır. Alıcı anten çeşitlemesi uzun yıllardır kullanılan bir yöntemdir. Ancak verici anten çeşitlemesi ise daha yeni bir yöntemdir.

Uzay-zaman kodlaması, verici tarafta çoklu anten kullanılması için tasarlanmış bir kanal kodlama tekniğidir [5]. Uzay-zaman kodları, Tarokh vd. tarafından ortaya atılan uzay-zaman kafes kodları [5] ve Alamouti tarafından ortaya atılan uzay-zaman blok kodları [6] olarak ikiye ayrılmaktadır.

Son yıllarda, farklı performans analizleri sonucunda uzay-zaman kafes kodları için farklı tasarım ölçütleri önerilmiştir. İlk olarak Tarokh vd. [5] tarafından duruğumsu (quasi-static) sönümlemeli kanallar için rank ve determinant ölçütü ortaya atılmıştır. Bu ölçüt, uzay-zaman kafes koduna ait iletilen ve karar verilen diziler yardımıyla oluşturulan bir matrisin rank ve determinant değerlerinin olabildiğince büyük olmasını önermektedir. Bu ölçüt kullanılarak, farklı rank ve determinant değerlerine sahip bir çok 4-PSK ve 8-PSK uzay-zaman kafes kodu tasarlanmıştır [5-11].

Vucetic vd. [12-14]'de uzay-zaman kafes kodlarının duruğumsu sönümlemeli kanallardaki tasarım ölçütlerinin çeşitleme derecesine göre değiştiğini ifade etmişlerdir. Küçük çeşitleme derecesi için rank ve determinant ölçütünün geçerli olduğunu; büyük çeşitleme derecesi için iz ölçütünün geçerli olduğunu göstermişlerdir. İz ölçütü, kodsözcükleri arasındaki en küçük Öklid uzaklığının olabildiğince büyük yapılmasını önermektedir. Bu tasarım ölçütüne dayalı farklı verici anten sayısına sahip bir çok 4-PSK ve 8-PSK uzay-zaman kafes kodu tasarlanmıştır [8-10,12-13].

Hızlı sönümlemeli kanallar için ise Tarokh vd. uzaklık ölçütü ile çarpım ölçütünü ortaya atmıştır [5]. Uzaklık ölçütü, uzay-zaman simgeleri arasındaki Hamming uzaklığının en küçük değerinin olabildiğince büyük yapılmasını; çarpım ölçütü ise, uzay-zaman simgeleri arasındaki Öklid uzaklıklarının çarpımının en küçük değerinin olabildiğince büyük yapılmasını önermektedir. Bu ölçüt kullanılarak, hızlı sönümlemeli kanallar için farklı verici anten sayısına sahip 4-PSK ve 8-PSK uzay-zaman kafes kodları tasarlanmıştır [15]. Vucetic vd. [16]'da uzay-zaman kafes

kodlarının hızlı sönümlemeli kanallardaki tasarım ölçütlerinin de çeşitleme derecesine göre değiştiğini ifade etmişlerdir. Küçük çeşitleme derecesi için uzaklık ve çarpım ölçütünün geçerli olduğunu; büyük çeşitleme derecesi için iz ölçütünün geçerli olduğunu göstermişlerdir. Bu yüzden iz ölçütüne dayalı olarak tasarlanan uzay-zaman kafes kodları [8-10,12-13] bu durumda da kullanılabilmektedir.

Uzay-zaman kafes kodlarıyla ilgili çalışmaların çoğu Rayleigh ve Rician kanallar için yapılmıştır. Uzay-zaman kafes kodlarının gölgeleme etkisi altındaki performansı ise [17-19]'da incelenmiştir. [17-18]'de gölgeleme etkisini modellemek için Rician-lognormal dağılımından, [19]'da ise Rician-Nakagami dağılımından faydalanılmıştır. Her iki modelde de kanal genel olarak Rician dağılımına sahiptir. Ancak baskın bileşen sabit bir değer yerine, lognormal veya Nakagami dağılımlıdır. Uysal ve Georghiades, duruğumsu ve hızlı sönümlemeli Rician-lognormal kanaldaki iki dizinin birbirine karışma olasılığının (çiftsel hata olasılığının) tam değerini elde etmiş ve rank-determinant ölçütü ile uzaklık-çarpım ölçütünün bu kanalda da geçerli olduğunu göstermişlerdir [18]. Ayrıca Uysal, [19]'da duruğumsu sönümlemeli Rician-Nakagami kanaldaki çiftsel hata olasılığının tam değerini elde etmiş ve rank-determinant ölçütünün bu kanalda da geçerli olduğunu göstermiştir.

Bu tezde ise, uzay-zaman kafes kodlarının gölgeleme etkisi altındaki (Rician-lognormal ve Rician-Nakagami kanallardaki) hata olasılıkları ve tasarım ölçütleri çeşitleme derecesine göre incelenmiştir. Büyük çeşitleme derecesi için, Rician-lognormal ve Rician-Nakagami sönümlemeli kanallarda hata olasılığı için üst sınır elde edilmiş ve iz ölçütünün yine geçerli olduğu gösterilmiştir. Ayrıca hızlı sönümlemeli Rician-Nakagami kanalda küçük çeşitleme derecesi için çiftsel hata olasılığının tam ifadesi elde edilmiş ve uzaklık-çarpım ölçütünün geçerli olduğu gösterilmiştir.

Tezdeki 2. bölümde kısaca uzay-zaman blok kodları ve ayrıntılı bir şekilde uzay-zaman kafes kodları anlatılacaktır. Uzay-zaman kafes kodların çeşitleme derecesine bağlı olarak Rayleigh kanaldaki hata olasılıkları ve tasarım ölçütleri gösterilecektir. Bu ölçütlere göre tasarlanmış kodlara örnekler verilecektir. 3. bölümde, tezde ele alınan kanal modelleri ayrıntılı bir şekilde anlatılacaktır. Uzay-zaman kafes kodlarının, duruğumsu ve hızlı sönümlemeli Rician-lognormal kanal ile duruğumsu sönümlemeli Rician-Nakagami kanaldaki performansı incelenecektir. Tezin 4. bölümünde ise, uzay-zaman kafes kodlarının Rician-lognormal ve Rician-Nakagami

sönümlemeli kanallardaki performansının çeşitleme derecesine bağlı olduğu gösterilecektir. Büyük çeşitleme derecesi için, Rician-lognormal ve Rician-Nakagami sönümlemeli kanallardaki; küçük çeşitleme derecesi için ise, hızlı sönümlemeli Rician-Nakagami kanallardaki uzay-zaman kafes kodlarının performansı incelenecektir. Tezdeki 5. bölümde sonuçlara yer verilmektedir.

2. UZAY-ZAMAN KODLARI

Tek alıcı ve tek verici antenin bulunduğu sistemlerde yeterince yüksek hızda veri iletimi yapılamaz. Alıcı ve verici anten çeşitlemesi kullanılan sistemlerde kanalın sığası artmaktadır, dolayısıyla yüksek hızda veri iletimi yapılabilmektedir. Uzay-zaman kodlaması, verici tarafta çoklu anten kullanılması için tasarlanılmış olan bir kanal kodlama tekniğidir [5]. Uzay-zaman kodlarında kodlama, hem uzay hem de zamanda yapılmaktadır. Böylece farklı zamanlarda farklı antenlerden iletilen işaretler istatistiksel ilişkili olmaktadır. Bu istatistiksel ilişki, kanal sönümlemesinin etkisini ve alıcı taraftaki iletim hatalarını azaltmaktadır. Uzay-zaman kodlaması, uzayda kodlanmamış bir sisteme göre bant genişliğinden fedakarlık etmeden, verici çeşitlemesi ve güç kazancı sağlamaktadır. Uzay-zaman kodları, blok kodlar [6] ve kafes kodlar [5] olmak üzere ikiye ayrılabilirler.

Telsiz haberleşme sistemlerinde, verici antenden gönderilen işaret alıcı antene ulaşmadan önce sönümleme etkisinde kalmaktadır. Uzay-zaman kodlarının performansı inceleneceğinden, öncelikle sönümlemeli kanal modellerinin özellikleri ve aralarındaki farklar verilecektir.

2.1. Sönümlemeli Kanallar

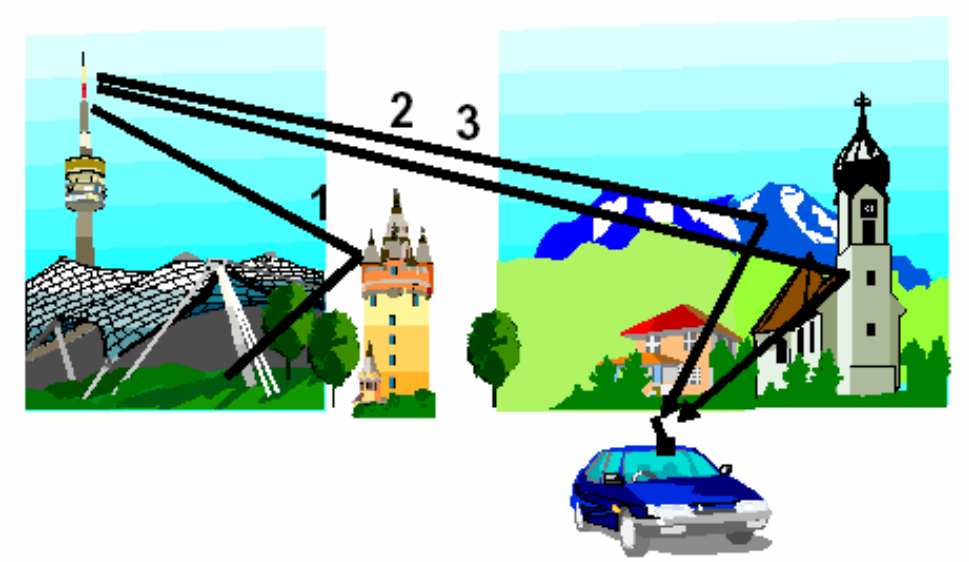
Çevre koşullarına bağlı olarak farklı sönümleme tipleri mevcuttur. Bu farklı tipteki sönümlemeli kanallar, farklı olasılık dağılımları kullanılarak modellenmektedir. Literatürde en çok kullanılan sönümlemeli kanal tipi Rayleigh ve Rician dağılımlı kanallardır.

2.1.1. Rayleigh Sönümlemeli Kanal

Gezgin haberleşme sistemlerinde Rayleigh dağılımı, sönümleme değişkeninin zarfını tanımlamak için sıkça kullanılmaktadır. Çok-yollu bir kanalda sönümleme değişkeni,

$$g(t) = g_I(t) + jg_Q(t) \tag{2.1}$$

biçiminde tanımlanmaktadır [20]. Burada $g_I(t)$ ve $g_Q(t)$ sıfır ortalamalı ve σ^2 varyanslı Gauss dağılımına sahip süreçler olduğunda, $g(t)$ işaretinin zarfı Rayleigh ve fazı da [0, 2π] aralığında düzgün dağılımlı olmaktadır. Bu durum, gerçekte çok-yollu kanalda hiçbir yol diğerlerine göre baskın değilse geçerlidir. Şekil 2.1'den de anlaşılacağı gibi alıcının vericiyi doğrudan gördüğü bir yol bulunmamaktadır.



Şekil 2.1 Rayleigh sönümlemeli kanal

Rayleigh dağılımlı zarfın olasılık yoğunluk işlevi,

$$p(\rho)=\begin{cases}\dfrac{\rho}{\sigma^2}\exp\left(-\dfrac{\rho^2}{2\sigma^2}\right) & (0\le\rho\le\infty)\\ 0 & (\rho<0)\end{cases} \tag{2.2}$$

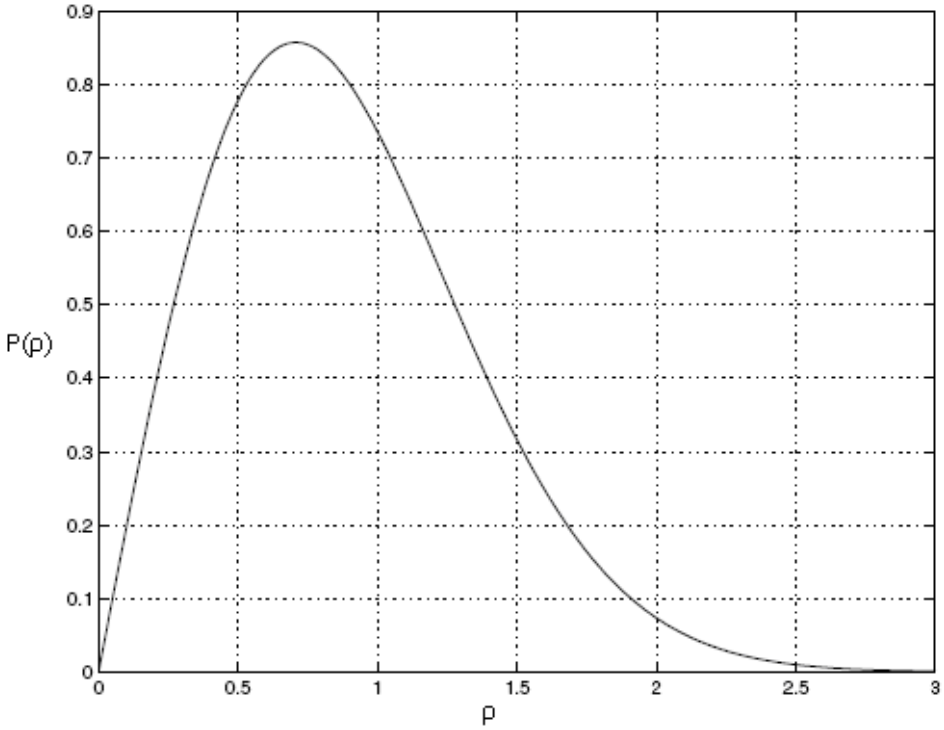
ifadesi ile verilmektedir. Bu dağılımın değişimi Şekil 2.2'de gösterilmektedir. Şekil 2.2'de işaretin ortalama gücü $E[\rho^2] = 2\sigma^2 = 1$ seçilmiştir. Dağılım en yüksek değerini $\rho = \sigma$ değerinde almaktadır. Zarfın belli bir G değerini aşmama olasılığı olan olasılık dağılım işlevi,

$$P(G)=P(\rho\le G)=\int_0^G p(\rho)\,d\rho=1-\exp\left(-\frac{G^2}{2\sigma^2}\right) \tag{2.3}$$

ifadesi ile verilmektedir. Zarfın ortalama değeri μ_ρ,

$$\mu_\rho = E[\rho] = \int_0^\infty \rho p(\rho) d\rho = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1.2533\sigma \tag{2.4}$$

olarak elde edilir [21].



Şekil 2.2 Rayleigh dağılımının olasılık yoğunluk işlevi

Zarfın varyansı σ_ρ^2 (alternatif akım gücü), ortalama gücün doğru akım gücünden çıkarılması ile bulunmaktadır:

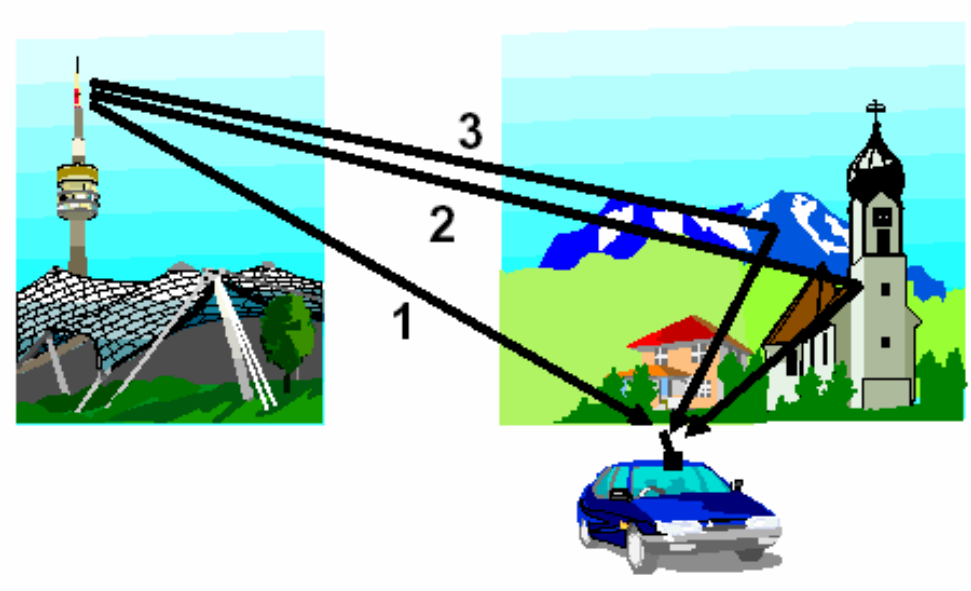
$$\sigma_\rho^2 = E\left[\rho^2\right] - E^2[\rho] = \sigma^2\left(2 - \frac{\pi}{2}\right) = 0.4292\sigma^2 . \tag{2.5}$$

2.1.2. Rician Sönümlemeli Kanal

Alıcıya gelen işarette, alıcının vericiyi tam görmesi gibi baskın bir bileşen bulunuyorsa, kanal Rician dağılımlıdır. Şekil 2.3'ten de anlaşılacağı gibi alıcının vericiyi doğrudan gördüğü bir yol bulunmaktadır. Bu durumda $g_I(t)$ ve $g_Q(t)$ bileşenleri sıfırdan farklı bir ortalamaya sahip olurlar. Rician dağılımının olasılık yoğunluk işlevi,

$$p(\rho)=\begin{cases}\dfrac{\rho}{\sigma^2}\exp\left(-\dfrac{(\rho^2+A^2)}{2\sigma^2}\right)I_0\left(\dfrac{A\rho}{\sigma^2}\right) & (A\geq 0,\ \rho\geq 0)\\ 0 & (\rho<0)\end{cases} \tag{2.6}$$

ifadesi ile verilmektedir. A, baskın bileşenin tepe genlik değerini ve $I_0(.)$ ise sıfırıncı dereceden değiştirilmiş birinci tür Bessel işlevini ifade etmektedir.



Şekil 2.3 Rician sönümlemeli kanal

Rician dağılımı, genellikle K parametresi cinsinden ifade edilmektedir. K parametresi, baskın işaretin gücünün diğer çok-yollu işaret bileşenlerinin gücüne oranı olarak tanımlanmaktadır:

$$K=\frac{A^2}{2\sigma^2}. \tag{2.7}$$

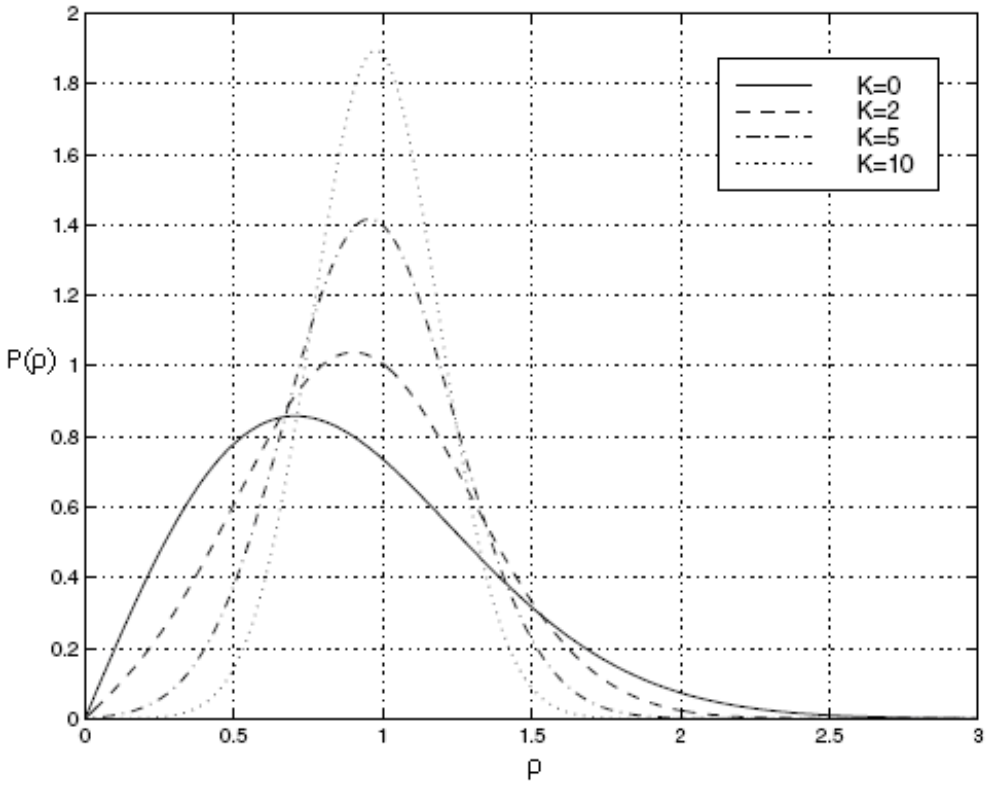
Bu oran genellikle dB cinsinden, $K=10\log\dfrac{A^2}{2\sigma^2}$ (dB) ile verilir. Rician dağılımın taşıdığı ortalama güç Ω,

$$E\left[\rho^2\right]=\Omega=A^2+2\sigma^2=2\sigma^2(1+K) \tag{2.8}$$

ifadesi ile hesaplanabilir. Rician dağılımın olasılık yoğunluk işlevi, K ve Ω cinsinden tekrar yazılırsa,

$$p(\rho) = \frac{2\rho(K+1)}{\Omega} \exp\left(-K - \frac{\rho^2(K+1)}{\Omega}\right) I_0\left(2\rho\sqrt{\frac{K(K+1)}{\Omega}}\right) \tag{2.9}$$

elde edilir. Rician dağılımının değişimi farklı K değerleri için Şekil 2.4'te verilmiştir. K = 0 durumunda, baskın bir bileşen olmayacağından dağılım Rayleigh dağılımı olmaktadır. (2.9)'da K = 0 yazılırsa Rayleigh dağılımının olasılık yoğunluk işlevinin elde edildiği açıkça görülmektedir. K parametresinin büyük değerleri için kanaldaki sönümlemenin etkisi azalmaktadır. K = ∞ durumunda kanalda sönümleme olmamaktadır ve kanal sadece toplamsal beyaz Gauss gürültülü kanala dönüşmektedir.



Şekil 2.4 Rician dağılımının olasılık yoğunluk işlevi

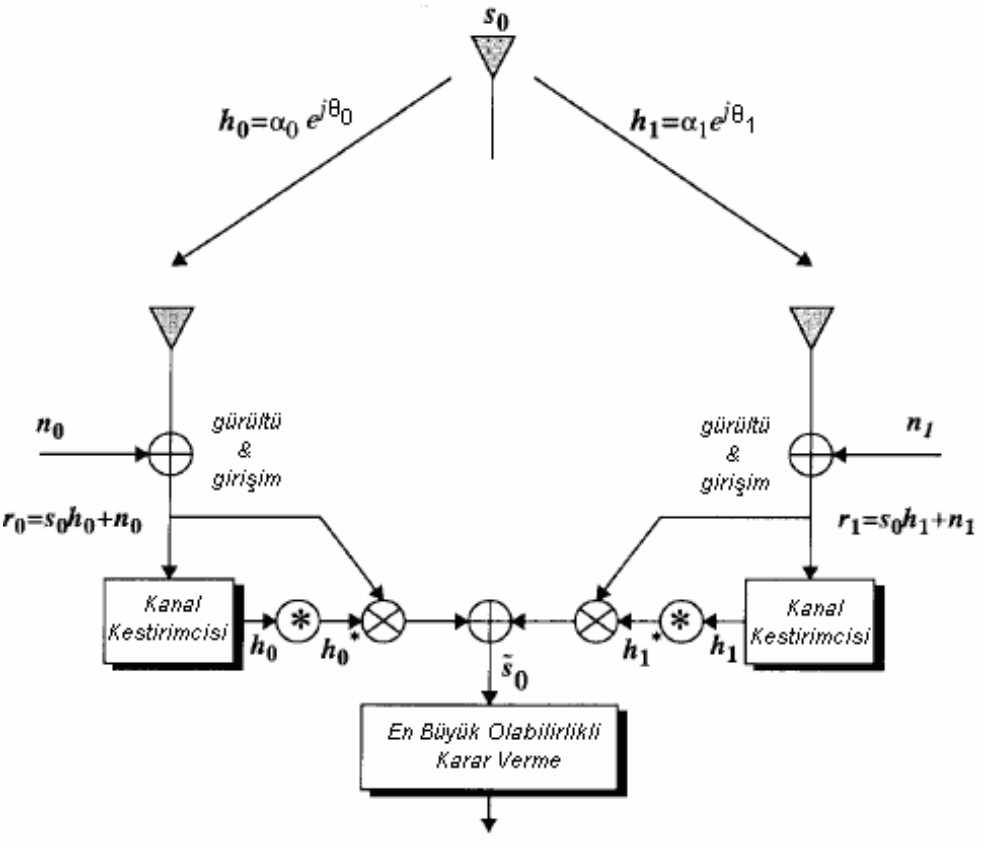
2.2. Uzay-Zaman Blok Kodları

Telsiz haberleşme sistemlerinden yüksek hızlı veri hizmetleri sağlaması beklenmektedir. Aynı zamanda, gezgin birimlerin boyutlarının da küçük olması talep edilmektedir. Bu yüzden, sistemin karmaşıklığının olabildiğince verici anten kısmına (baz istasyonu) taşınması gerekmektedir. Gezgin birim tarafında kullanılacak olan anten çeşitlemesi, gezgin birimlerin boyutunu ve gezgin birimlerin

sayısı verici antenlere (baz istasyonu) nazaran fazla olduğundan maliyeti arttıracaktır. Bir baz istasyonu yüzlerce gezici birime servis verdiğinden, anten çeşitlemesinin verici kısmında yapılması çok daha ekonomik olacaktır [6]. Bu nedenle, alıcı anten yerine verici anten çeşitlemesi tercih edilebilir.

Verici anten çeşitlemesi, hata başarımını, veri hızını ve telsiz haberleşme sisteminin kapasitesini geliştirmektedir. Sönümlemeye olan duyarlılığın azalması, yüksek hız oranları için gerekli olan daha yüksek seviyeli modülasyon kullanımına olanak sağlamaktadır. Ayrıca, daha küçük tekrar kullanım oranını mümkün kılmakta ve sistemin kapasitesini artırmaktadır.

Alıcı anten çeşitlemesine sahip en büyük oran birleştirmesine dayalı (MRC) bir haberleşme sisteminin alıcısı Şekil 2.5'te verilmiştir. Verici tarafından gönderilen işaret s_0 olarak ifade edilmektedir. Kanalın sönümleme katsayısı, genlik ve faz bileşenlerinden oluşan kompleks bir değişken olarak tanımlanmıştır.



Şekil 2.5 Alıcı anten çeşitlemesine sahip haberleşme sistemi

Verici anten ile birinci alıcı anten arasındaki kanalın sönümleme katsayısı h_0, verici anten ile ikinci alıcı anten arasındaki kanalın sönümleme katsayısı h_1 olsun. Burada h_0 ve h_1,

$$h_0 = \alpha_0 e^{j\theta_0} \tag{2.10a}$$

$$h_1 = \alpha_1 e^{j\theta_1} \tag{2.10b}$$

olarak tanımlanmaktadır. Sönümlemeye uğramış olan işarete kanaldaki gürültü de eklenince, alıcı antenlere gelen işaretler sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilmektedir:

$$r_0 = h_0 s_0 + n_0 \tag{2.11a}$$

$$r_1 = h_1 s_0 + n_1 . \tag{2.11b}$$

Burada n_0 ve n_1, sırasıyla birinci ve ikinci alıcı antene ait olan kompleks gürültülerini ifade etmektedir. Kompleks gürültülerin Gauss dağılımlı olduğu varsayılırsa, alıcı tarafta uygulanan en büyük olabilirlikli karar kuralı,

$$d^2\left(r_0, h_0 s_i\right) + d^2\left(r_1, h_1 s_i\right) \le d^2\left(r_0, h_0 s_k\right) + d^2\left(r_1, h_1 s_k\right) \quad , \quad \forall i \ne k \tag{2.12}$$

koşulu geçerli ise s_i işaretine karar verecektir [6]. Burada $d^2(x,y)$ x ve y arasındaki karesel Öklid uzaklığıdır ve

$$d^2\left(x, y\right) = \left(x - y\right)\left(x^* - y^*\right)$$

kullanılarak hesaplanmaktadır. İşlemleri basitleştirmek için alıcı tarafta,

$$\begin{aligned} \tilde{s}_0 &= h_0^* r_0 + h_1^* r_1 \\ &= h_0^*\left(h_0 s_0 + n_0\right) + h_1^*\left(h_1 s_0 + n_1\right) \\ &= \left(\alpha_0^2 + \alpha_1^2\right) s_0 + h_0^* n_0 + h_1^* n_1 \end{aligned} \tag{2.13}$$

işlemi yapılmaktadır. (2.12)'de verilen karar kuralı ve (2.13)'te bulunan ifade yardımıyla, yeni karar kuralı,

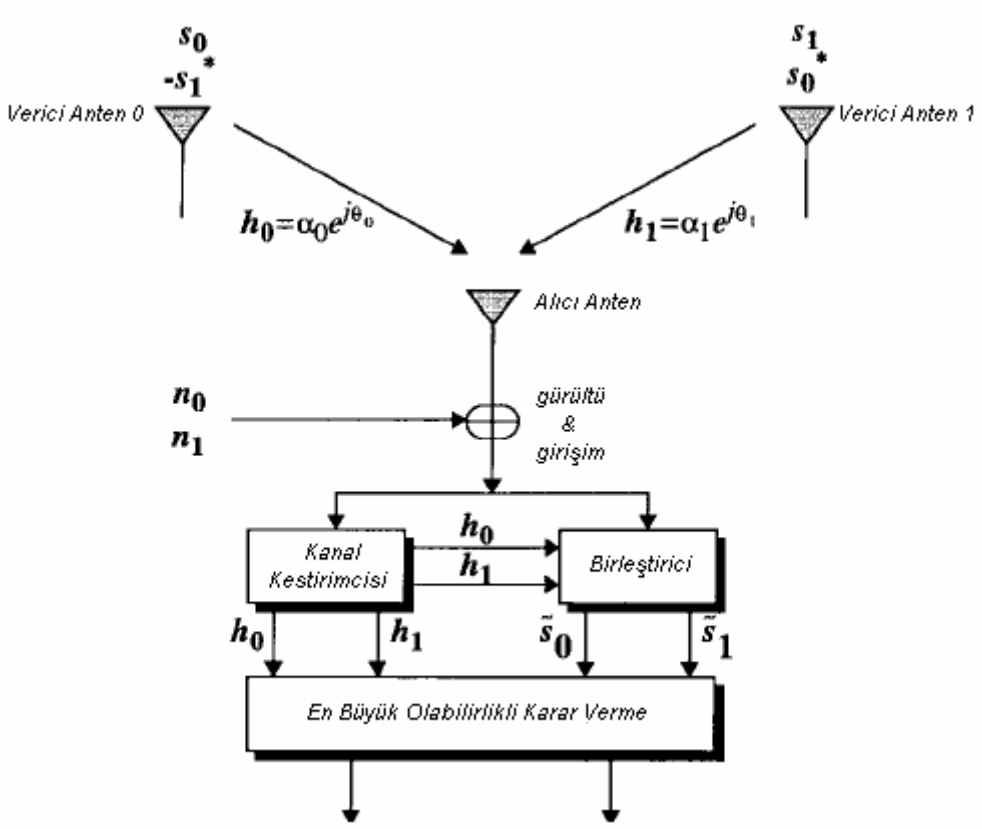
$$\left(\alpha_0^2 + \alpha_1^2 - 1\right)\left|s_i\right|^2 + d^2\left(\tilde{s}_0, s_i\right) \le \left(\alpha_0^2 + \alpha_1^2 - 1\right)\left|s_k\right|^2 + d^2\left(\tilde{s}_0, s_k\right) \quad , \quad \forall i \ne k \tag{2.14}$$

olarak elde edilir. PSK işaretleri için s_i ve s_k eşit enerjili olacağından, $\left|s_i\right|^2 = \left|s_k\right|^2$ olmaktadır. Bu yüzden PSK işaretleri için (2.14)'teki karar kuralı,

$$d^2\left(\tilde{s}_0, s_i\right) \le d^2\left(\tilde{s}_0, s_k\right) \quad , \quad \forall i \ne k \tag{2.15}$$

gibi basit bir ifadeye indirgenmektedir. Böylece en büyük olabilirlikli karar vericinin girişine sadece $\tilde{s}_0$ işaretinin verilmesi yeterli olacaktır.

Verici anten çeşitlemesinin kullanıldığı bir sistem ise Şekil 2.6'da gösterilmektedir. Görüldüğü gibi sistemde, 1 adet alıcı anten ve 2 adet verici anten bulunmaktadır. Belli bir anda, her iki verici antenden de eş-zamanlı iki işaret iletilmektedir. Birinci verici antenden iletilen işaret s_0 ve ikinci verici antenden iletilen işaret s_1 olarak ifade edilmektedir. Bir sonraki simge periyodunda ise, birinci verici antenden $-s_1^*$ ve ikinci verici antenden s_0^* işaretleri iletilmektedir. Görüldüğü gibi kodlama hem uzayda hem de zamanda yapılmaktadır [6].



Şekil 2.6 Verici anten çeşitlemesine sahip haberleşme sistemi

Belli bir t anında, birinci verici antene ait kanalın sönümleme katsayısı $h_0(t)$ ve ikinci verici antene ait kanalın sönümleme katsayısı $h_1(t)$ olarak verilsin. Sönümlemenin ardışık iki simge için sabit olduğu varsayılırsa, sönümleme katsayıları

$$h_0(t) = h_0(t+T) = h_0 = \alpha_0 e^{j\theta_0} \tag{2.16a}$$

$$h_1(t) = h_1(t+T) = h_1 = \alpha_1 e^{j\theta_1} \tag{2.16b}$$

biçiminde yazılabilir. Burada T simge süresini ifade etmektedir. Alıcı tarafa, t ve (t+T) anında gelen işaretler sırasıyla r_0 ve r_1 olarak ifade edilmektedir:

$$r_0 = r(t) = h_0 s_0 + h_1 s_1 + n_0 \tag{2.17a}$$

$$r_1 = r(t+T) = -h_0 s_1^* + h_1 s_0^* + n_1 . \tag{2.17b}$$

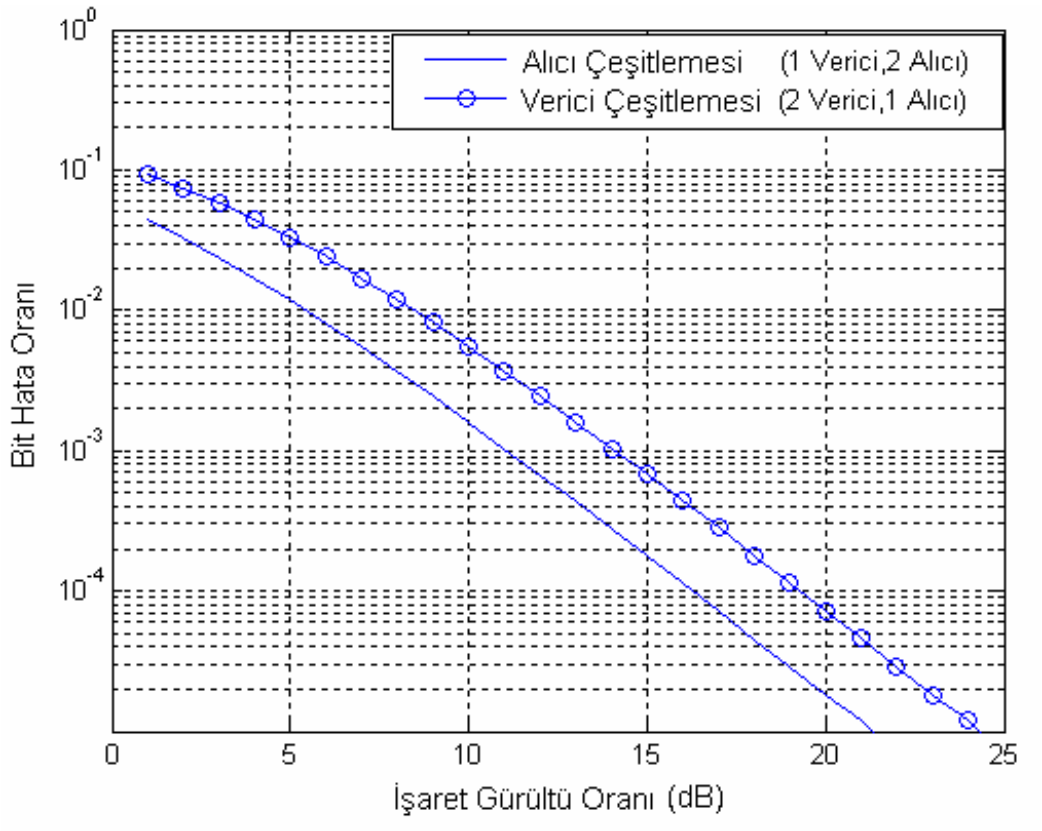
Birleştirici çıkışı,

$$\tilde{s}_0 = h_0^* r_0 + h_1 r_1^* = \left(\alpha_0^2 + \alpha_1^2\right) s_0 + h_0^* n_0 + h_1 n_1^* \tag{2.18a}$$

$$\tilde{s}_1 = h_1^* r_0 - h_0 r_1^* = \left(\alpha_0^2 + \alpha_1^2\right) s_1 - h_0 n_1^* + h_1^* n_0 \tag{2.18b}$$

olarak elde edilir. Bu işaretler en büyük olabilirlikli karar verici girişine uygulanır. En büyük olabilirlikli karar verici, (2.15) denklemindeki karar kuralını $\tilde{s}_0$ ve $\tilde{s}_1$ işaretleri için ayrı ayrı uygular. Görüldüğü gibi (2.18a)'daki işaret ile (2.13)'teki işaret birbirlerinin aynısıdır. Aralarındaki tek fark, gürültü bileşenlerindeki faz farkıdır. Bu fark, işaret gürültü oranında bir değişime sebep olmamaktadır. Bu yüzden, alıcı çeşitlemesinin uygulandığı sistemin çeşitleme derecesi ile verici çeşitlemesinin uygulandığı sistemin çeşitleme derecesi birbirine eşittir [6]. Bu sonucu destekleyen benzetimin sonuçları Şekil 2.7'de verilmiştir.

Benzetimde verici anten çeşitlemesi kullanılan durum için iki antenden iletilen işaretlerin enerjileri toplamı ile alıcı anten çeşitlemesi kullanılan durum için bir antenden iletilen işaretin enerjisi aynı kabul edilmektedir [6]. Alıcı antenler ile verici antenler arasındaki kanalların sönümleme katsayılarının genlikleri birbirleriyle istatistiksel ilişkisiz Rayleigh dağılımlı rastlantı değişkenleridir. Bu kabuller altında, elde edilen eğrilerden de görüldüğü gibi her iki sisteminde çeşitleme derecesi aynıdır (eğrilerin eğimi aynı). Ancak verici çeşitlemesi kullanılan sistemin performansı, alıcı çeşitlemesi kullanılan sistemin performansına göre 3dB daha kötüdür. Bunun sebebi ise verici anten çeşitlemesinin kullanıldığı sistemde verici anten başına düşen enerjinin, alıcı anten çeşitlemesinin kullanıldığı sistemdeki verici anten başına düşen enerjiye nazaran yarı yarıya az olmasıdır. Bit hata oranı (BER) eğrisi, verici anten başına ortalama işaret gürültü oranına (SNR) göre çizilirse, iki sistemin eğrileri üst üste gelecektir [6].



Şekil 2.7 Alıcı ve verici anten çeşitlemesi uygulanan sistemlerin performans karşılaştırılması

2.3. Uzay-Zaman Kafes Kodları

Uzay-zaman blok kodları, kod çözmede kolaylık sağlamaktadır. Ancak bu kodlar kodlama kazancı sağlamamasının yanında bazı uzay-zaman blok kodları gerekli iletim bandının genişlemesine sebep olmaktadır. Bu yüzden bu kodlar band sınırlı sistemler için uygun değildir. Bu tür durumlarda, uzay-zaman kafes kodlarını kullanmak çok daha faydalıdır. Uzay-zaman kafes kodları (STTC), ilk defa Tarokh, Seshadri ve Calderbank tarafından ortaya atılmıştır [5]. Bu kodlar, önemli derecede kodlama kazancı ve spektral verimliliğin yanında düzgün sönümlemeli kanallarda çeşitleme kazancı da sağlamaktadır.

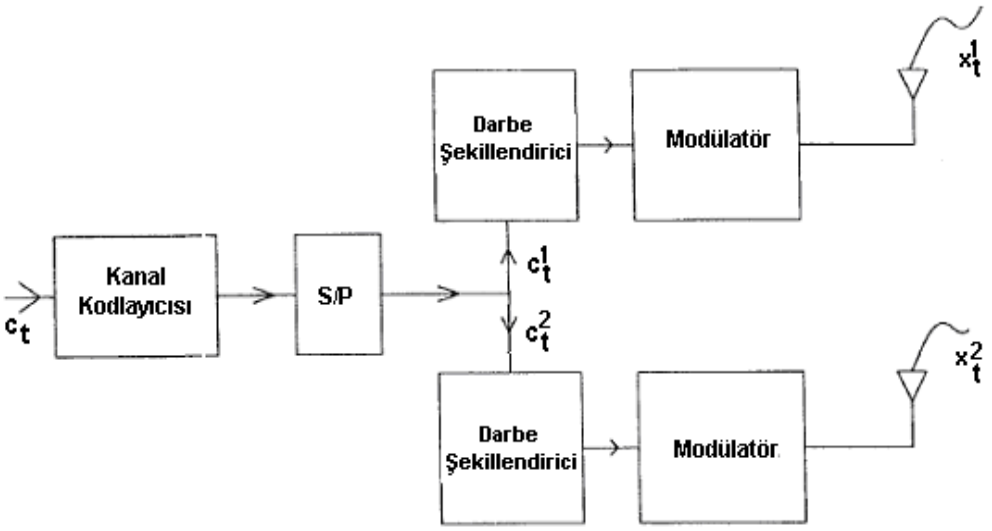
Uzay-zaman kafes kodlayıcısı, ikili veriyi kafes yapısı kullanarak (trellis diagram) modülasyon simgelerine dönüştürmektedir. İletim anteni sayısı n_T olan, uzay-zaman kafes kodlanmış M-PSK modülasyonlu bir kodlayıcı ele alalım. **c** ile gösterilen giriş mesajı,

$$\mathbf{c} = (\mathbf{c_0}, \mathbf{c_1}, \ldots\ldots\ldots, \mathbf{c_t}, \ldots\ldots\ldots) \qquad (2.19)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Buradaki $\mathbf{c_t}$, t zamanında m = $\log_2$ M bitten oluşmakta ve aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\mathbf{c_t} = (c_t^1, c_t^2, \ldots\ldots\ldots\ldots, c_t^m). \tag{2.20}$$

(2.20) ifadesi kullanılarak, t zamanında iletilen uzay-zaman simgesi olan $\mathbf{x_t} = (x_t^1, x_t^2, \ldots, x_t^{n_T})^T$ oluşturulmaktadır. $x_t^1, x_t^2, \ldots, x_t^{n_T}$ çıkışları t zamanında, 1, 2,……, n_T numaralı antenlerden aynı anda iletilmektedir.



Şekil 2.8 2 antenli uzay-zaman kafes kodu vericisi

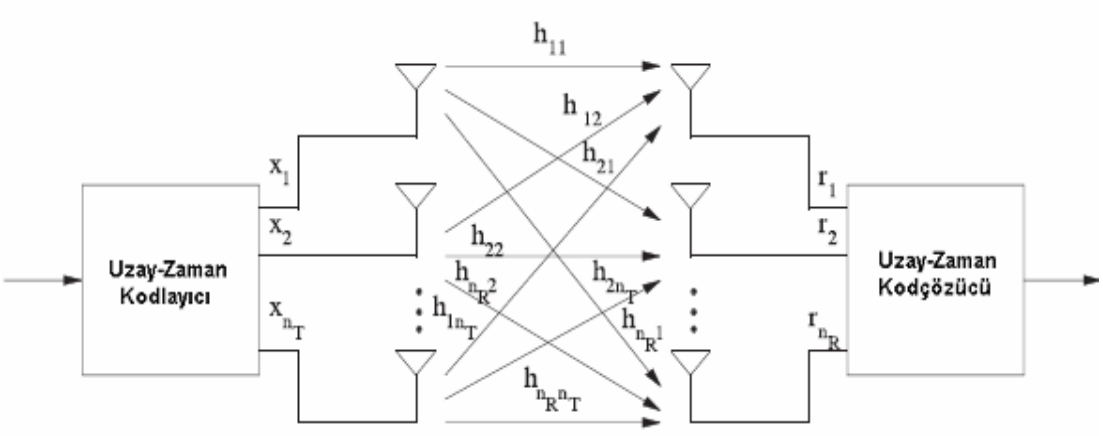
Uzay-zaman kafes kodlanmış M-PSK'nın band verimliliği, W = $\frac{1}{T}$ ve R = $\frac{m}{T}$ alınarak,

$$\frac{R}{W} = m = \log_2 M \quad \text{bit/sn/Hz} \tag{2.21}$$

biçiminde yazılabilir. Alıcı ve vericide bulunan birçok anten, çok girişli çok çıkışlı (MIMO) kanal oluşturmaktadır. Telsiz haberleşmede kanalın belleksiz olduğu varsayılırsa, alıcı ile verici anten arasındaki kanal düzgün sönümleme ile modellenebilmektedir. Şekil 2.9'daki gibi n_T verici anten ve n_R alıcı antenden oluşan bir MIMO kanal, **H** matrisi (n_R x n_T) ile ifade edilmektedir. t zamanındaki bu matris,

$$\mathbf{H_t} = \begin{bmatrix} h^t_{1,1} h^t_{1,2} \ldots\ldots\ldots h^t_{1,n_T} \\ h^t_{2,1} h^t_{2,2} \ldots\ldots\ldots h^t_{2,n_T} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h^t_{n_R,1} h^t_{n_R,2} \ldots\ldots h^t_{n_R,n_T} \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada j,i'inci eleman ($h^t_{j,i}$), i. iletim anteni ile j. alıcı anten arasındaki yolun zayıflama katsayısıdır. Bu katsayıların değişim hızına göre kanallar hızlı veya duruğumsu sönümlemeli olarak tanımlanmaktadır. Sönümleme katsayıları, bir çerçeve boyunca sabit ve yalnızca çerçeveden çerçeveye değişiyorsa, bu kanal duruğumsu sönümlemeli olarak adlandırılır. Sönümleme katsayıları, bir simge boyunca sabit ve simgeden simgeye değişiyorsa, bu kanal hızlı sönümlemeli olarak adlandırılır.



Şekil 2.9 Çok girişli çok çıkışlı haberleşme sistemi

Alıcıdaki antenlere gelen işaretler, kanalın sönümlemesi etkisi altında kalan n_T adet işaret ile gürültünün toplamına eşittir. j anteni tarafından t anında alınan işaret,

$$r_t^j = \sqrt{E_S} \sum_{i=1}^{n_T} h^t_{j,i} x^i_t + n^j_t \tag{2.23}$$

olarak ifade edilmektedir. Burada E_S, simge başına ortalama enerji ve n_t^j ise t zamanında j antenine gelen gürültü parametresidir. Bu parametre, tek taraflı güç spektral yoğunluğu N_0 olan, sıfır ortalamalı, istatistiksel bağımsız kompleks Gauss rastlantı değişkenidir. Bu durumda n_R tane anten tarafından alınan işaretler ile gürültü işaretleri,

$$\mathbf{r_t} = (\ r_t^1\ ,\ r_t^2\ ,....,\ r_t^{n_R}\ )^T \tag{2.24a}$$

$$\mathbf{n_t} = (\ n_t^1,\ n_t^2\ ,....,\ n_t^{n_R}\ )^T \tag{2.24b}$$

biçiminde ifade edilmektedir. Bu vektörler yardımıyla alınan işaret şu şekilde tanımlanabilir :

$$\mathbf{r_t} = \mathbf{H_t}\,\mathbf{x_t} + \mathbf{n_t}\ . \tag{2.25}$$

Her antenden iletilen veri çerçevesinin, L uzunluklu olduğu varsayılırsa n_T x L boyutlu uzay-zaman kodsözcüğü matrisi,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1^1 x_2^1 .....x_L^1 \\ x_1^2 x_2^2 .....x_L^2 \\ ..... \\ x_1^{n_T} x_2^{n_T} .....x_L^{n_T} \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada, i. satır $\mathbf{x^i} = [\ x_1^i x_2^i .....x_L^i\ ]$, i. antenden iletilen veri dizisini; t. sütun $\mathbf{x_t} = [\ x_t^1 x_t^2 .....x_t^{n_T}\ ]^T$ ise t zamanındaki uzay-zaman simgesini ifade etmektedir.

İletilen dizinin $\mathbf{X} = (\mathbf{x_1},\ \mathbf{x_2},\ldots\ldots..,\ \mathbf{x_L})$ olduğu, karar verilen dizinin de $\hat{\mathbf{X}} = (\ \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{1}, \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{2},....,\ \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{L}\ )$ olduğu durumda çiftsel hata olasılığı $P(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})$ ile gösterilmektedir. En büyük olabilirlikli karar kuralına göre hata,

$$\sum_{t=1}^{L}\sum_{j=1}^{n_R}\left| r_t^j - \sum_{i=1}^{n_T} h_{j,i}^t\ x_t^i \right|^2 \geq \sum_{t=1}^{L}\sum_{j=1}^{n_R}\left| r_t^j - \sum_{i=1}^{n_T} h_{j,i}^t\ \hat{x}_t^i \right|^2 \tag{2.27}$$

olduğu durumda meydana gelmektedir. $\mathbf{X}$ ve $\hat{\mathbf{X}}$ kodsözcükleri arasındaki Öklid uzaklığı,

$$d_h^2(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}) = \|\ \mathbf{H}\ .\ (\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}})\ \|^2 = \sum_{t=1}^{L}\sum_{j=1}^{n_R}\left| \sum_{i=1}^{n_T} h_{j,i}^t (x_t^i - \hat{x}_t^i) \right|^2 \tag{2.28}$$

biçiminde tanımlanırsa, **H** matrisi bilindiğine göre koşullu çiftsel hata olasılığı, Öklid uzaklığı cinsinden

$$P(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}|\mathbf{H}) = Q\left(\sqrt{\frac{E_S}{2N_0} d_h^2 (\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}})}\right) \quad (2.29)$$

şeklinde bulunur [16].

$$Q(x) \leq \frac{1}{2} e^{-x^2/2} \quad , \; x \geq 0 \quad (2.30)$$

ifadesi yardımıyla bu olasılığın üst sınırı,

$$P(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}|\mathbf{H}) \leq \frac{1}{2} \exp\left(-d_h^2 (\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}) \frac{E_S}{4 N_0}\right) \quad (2.31)$$

şeklinde bulunur. Hata olasılığı, kanalın duruğumsu veya hızlı sönümlemeli olmasına göre farklılık göstermektedir. Bu yüzden her iki durum için ayrı ayrı analiz yapılması gerekmektedir.

2.3.1. Duruğumsu Sönümlemeli Kanallar

Duruğumsu sönümlemeli kanallarda, sönümleme katsayıları her veri çerçevesi boyunca sabit olduğundan,

$$h_{j,i}^1 = h_{j,i}^2 = \ldots = h_{j,i}^L = h_{j,i} \quad , \; i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, n_T \; ; \; j = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, n_R \quad (2.32)$$

şeklinde yazılabilir. $\mathbf{B}(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})$ kodsözcüğü fark matrisi,

$$\mathbf{B}(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}) = \mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1^1 - \hat{x}_1^1 & x_2^1 - \hat{x}_2^1 & \cdots & x_L^1 - \hat{x}_L^1 \\ x_1^2 - \hat{x}_1^2 & x_2^2 - \hat{x}_2^2 & \cdots & x_L^2 - \hat{x}_L^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n_T} - \hat{x}_1^{n_T} & x_2^{n_T} - \hat{x}_2^{n_T} & \cdots & x_L^{n_T} - \hat{x}_L^{n_T} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

biçiminde tanımlanırsa, bu matris yardımıyla kodsözcüğü uzaklık matrisi $\mathbf{A}(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})$ $(n_T \times n_T)$ aşağıdaki gibi elde edilmektedir:

$$\mathbf{A}(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}) = \mathbf{B}(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}) \, \mathbf{B}^H(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}) \, . \quad (2.34)$$

Burada H, matrisin hermityenini (eşleniğinin evriğini) ifade etmektedir. İki kodsözcüğünün uzaklığı negatif olamayacağından, **A** matrisi negatif olmayan belirli bir matristir ($\mathbf{A}(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}) = \mathbf{A}^{H}(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})$) ve **A** matrisinin özdeğerleri de negatif olmayan gerçel sayılardır [2, 22]. **A** matrisi hermityen bir matris olduğundan, **A** matrisinin özdeğer matrisi **Λ** olmak üzere,

$$\mathbf{A}\mathbf{X}_{R} = \mathbf{X}_{R}\mathbf{\Lambda} \tag{2.35a}$$

$$\mathbf{X}_{L}\mathbf{A} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{X}_{L} \tag{2.35b}$$

eşitliklerini sağlayacak şekilde tanımlanan sağ ($\mathbf{X}_R$) ve sol ($\mathbf{X}_L$) özvektör matrisleri de birbirlerinin hermityenleridir ($\mathbf{X}_R = \mathbf{X}_L^H$). **A**'nın özvektör matrisi **V** ile ifade edilirse, yukarıdaki koşullar göz önüne alındığında,

$$\mathbf{X}_{L} = \mathbf{V}, \mathbf{X}_{R} = \mathbf{V}^{H} \tag{2.36a}$$

$$\mathbf{X}_{L}\mathbf{A}\mathbf{X}_{R} = \mathbf{V}\mathbf{A}\mathbf{V}^{H} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{V}\mathbf{V}^{H} \tag{2.36b}$$

elde edilmektedir. Ayrıca **A** matrisi hermityen olduğundan, özvektör matrisi **V** tekil matris olacaktır ($\mathbf{V}^{H} = \mathbf{V}^{-1}$). (2.36b)'nin sağ tarafında $\mathbf{V}^{H}$ değeri yerine yazılırsa,

$$\mathbf{V}\ \mathbf{A}(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})\ \mathbf{V}^{H} = \mathbf{\Lambda} \tag{2.37}$$

elde edilmektedir. Burada **V**'nin satırları $(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_{n_T}})$, $\mathbf{A}(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})$'in öz vektörlerinden, **Λ**'nın köşegeni de $\mathbf{A}(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})$'in öz değerlerinden oluşmaktadır ($\lambda_i \geq 0$, $i=1,2,.....,n_T$). Köşegen matris **Λ**,

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n_T} \end{bmatrix} \tag{2.38}$$

olarak tanımlanmaktadır. Aşağıda verilen duruğumsu sönümlemeli kanallar için kodsözcükleri arasındaki karesel Öklid uzaklığı $d_h^2(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}})$, $\mathbf{Z}(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})$ gibi bir vektörün kendisi ve hermityeninin çarpımı şeklinde yazılabilmektedir:

$$\sum_{j=1}^{n_R}\sum_{t=1}^{L}\left|\sum_{i=1}^{n_T} h_{j,i}\left(x_t^i - \hat{x}_t^i\right)\right|^2 = \sum_{j=1}^{n_R}\mathbf{Z}(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})\mathbf{Z}^H(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}) . \tag{2.39}$$

Burada $\mathbf{Z}(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})$ vektörü,

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}) &= \left[\left(\sum_{i=1}^{n_T} h_{j,i}\left(x_1^i - \hat{x}_1^i\right)\right) \quad ,..... \quad \left(\sum_{i=1}^{n_T} h_{j,i}\left(x_L^i - \hat{x}_L^i\right)\right)\right] \\ &= \left[h_{j,1}, h_{j,2}, ..., h_{j,n_T}\right].\begin{bmatrix} x_1^1 - \hat{x}_1^1 & \cdots & x_L^1 - \hat{x}_L^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n_T} - \hat{x}_1^{n_T} & \cdots & x_L^{n_T} - \hat{x}_L^{n_T} \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{2.40}$$

şeklinde ifade edilmektedir. $\mathbf{h_j} = \left[h_{j,1}, h_{j,2}, ..., h_{j,n_T}\right]$ olarak tanımlanırsa,

$$\mathbf{Z}(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}) = \mathbf{h_j}(\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}) \tag{2.41}$$

olarak elde edilir. (2.41) ifadesi (2.39)'da yerine konursa,

$$\begin{aligned} d_h^2(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}) &= \sum_{j=1}^{n_R}\mathbf{h_j}\left(\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}\right)\left(\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}\right)^H\mathbf{h_j}^H \\ &= \sum_{j=1}^{n_R}\mathbf{h_j}\mathbf{A}\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right)\mathbf{h_j}^H \end{aligned} \tag{2.42}$$

olmaktadır. (2.37) ifadesi kullanılarak, $\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{A}\mathbf{V}^H\mathbf{V} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}$ yazılabilir ve buradan $\mathbf{A}$ matrisi,

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}^H\mathbf{\Lambda}\mathbf{V} \tag{2.43}$$

biçiminde elde edilebilir. (2.43) ifadesi (2.42)'de yerine yazılırsa, toplam sembolünün içindeki kısım,

$$\mathbf{h_j V^H \Lambda V h_j^H}$$

$$= \left[h_{j,1}, h_{j,2}, .., h_{j,n_T} \right]_{1 x n_T} \begin{bmatrix} v^*_{1,1} & \cdots & v^*_{n_T,1} \\ v^*_{1,2} & \cdots & v^*_{n_T,2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v^*_{1,n_T} & \cdots & v^*_{n_T,n_T} \end{bmatrix}_{n_T \times n_T} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n_T} \end{bmatrix}_{n_T \times n_T}$$

$$\begin{bmatrix} v_{1,1} & \cdots & v_{1,n_T} \\ v_{2,1} & \cdots & v_{2,n_T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n_T,1} & \cdots & v_{n_T,n_T} \end{bmatrix}_{n_T \times n_T} \begin{bmatrix} h^*_{j,1} \\ h^*_{j,2} \\ \vdots \\ h^*_{j,n_T} \end{bmatrix}_{n_T x 1}$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n_T} h_{j,i} v^*_{1,i}, ..., \sum_{i=1}^{n_T} h_{j,i} v^*_{n_T,i} \right]_{1 x n_T} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n_T} \end{bmatrix}_{n_T \times n_T} \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^{n_T} v_{1,l} h^*_{j,l} \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^{n_T} v_{n_T,l} h^*_{j,l} \end{bmatrix}_{n_T \times 1}$$

$$= \left[\lambda_1 \sum_{i=1}^{n_T} h_{j,i} v^*_{1,i}, \lambda_2 \sum_{i=1}^{n_T} h_{j,i} v^*_{2,i}, ..., \lambda_{n_T} \sum_{i=1}^{n_T} h_{j,i} v^*_{n_T,i} \right]_{1 x n_T} \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^{n_T} v_{1,l} h^*_{j,l} \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^{n_T} v_{n_T,l} h^*_{j,l} \end{bmatrix}_{n_T \times 1}$$

$$= \lambda_1 \sum_{i=1}^{n_T} h_{j,i} v^*_{1,i} \sum_{l=1}^{n_T} v_{1,l} h^*_{j,l} + ... + \lambda_{n_T} \sum_{i=1}^{n_T} h_{j,i} v^*_{n_T,i} \sum_{l=1}^{n_T} v_{n_T,l} h^*_{j,l}$$

$$= \sum_{i=1}^{n_T} \lambda_i \left| \beta_{j,i} \right|^2 \qquad (2.44)$$

olarak ifade edilebilir. Burada $\beta_{j,i}$ aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\beta_{j,i} = \sum_{l=1}^{n_T} h_{j,l} v^*_{i,l} \, . \qquad (2.45)$$

(2.44) ifadesi yardımıyla, (2.31)'de elde edilen çiftsel hata olasılığının üst sınırı,

$$P\left(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}} \middle| \mathbf{H} \right) \le \frac{1}{2} \exp\left(-\sum_{j=1}^{n_R} \sum_{i=1}^{n_T} \lambda_i \left| \beta_{j,i} \right|^2 \frac{E_S}{4N_0} \right) \qquad (2.46)$$

biçiminde ifade edilmektedir. Üst sınır görüldüğü gibi koşullu hata olasılığına aittir. Koşulsuz hata olasılığının üst sınırını bulmak için (2.46) ifadesinin $|\beta_{j,i}|$'ye göre beklenen değerinin alınması gerekmektedir. Bu yüzden öncelikle $\beta_{j,i}$'nin dağılımı bulunmalıdır. $h_{j,i}$, ortalaması $\mu_h^{j,i}$ ve varyansı $\sigma_h^2 = 1/2$ olan kompleks Gauss rastlantı değişkenidir. **V**'nin satırları $(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_{n_T}})$ ise ortonormal vektör uzayının bazlarıdır. Bu durumda $\beta_{j,i}$ de kompleks Gauss dağılımlıdır. $\beta_{j,i}$'nin ortalaması ve varyansı,

$$\mu_{j,i} = E\left[\beta_{j,i}\right] = E\left[\sum_{l=1}^{n_T} h_{j,l} v_{i,l}^*\right] = \sum_{l=1}^{n_T} E\left[h_{j,l}\right] v_{i,l}^*$$

$$= \left[\mu_h^{j,1}, \mu_h^{j,2}, ..., \mu_h^{j,n_T}\right].\mathbf{v_i} \qquad (2.47)$$

$$\sigma^2 = \mathrm{var}\left[\beta_{j,i}\right] = \sum_{l=1}^{n_T} \mathrm{var}\left[h_{j,l} v_{i,l}^*\right] = \mathrm{var}\left[h_{j,i}\right] \sum_{l=1}^{n_T} \left|v_{i,l}^*\right|^2$$

$$= \sigma_h^2 \qquad (2.48)$$

olarak elde edilmektedir. $\beta_{j,i}$ kompleks Gauss dağılımlı olduğuna göre $|\beta_{j,i}|$ rastlantı değişkeni de Rician dağılımlıdır ve olasılık yoğunluk işlevi,

$$p\left(\left|\beta_{j,i}\right|\right) = 2\left|\beta_{j,i}\right| \exp\left(-\left|\beta_{j,i}\right|^2 - K^{j,i}\right) I_0\left(2\left|\beta_{j,i}\right|\sqrt{K^{j,i}}\right) \qquad (2.49)$$

şeklinde verilmektedir [5]. Burada $I_0(.)$ sıfırıncı dereceden değiştirilmiş birinci tür Bessel işlevidir ve $K^{j,i} = \left|\mu_{j,i}\right|^2$ olarak tanımlanmaktadır. Daha önceden de belirtildiği gibi koşulsuz hata olasılığı için (2.46) ifadesinin $|\beta_{j,i}|$'ye göre beklenen değerinin alınması gerekmektedir. Bu işlem için r, **A** matrisinin rankı olmak üzere, rn_R değerine bağlı olarak iki farklı yöntem uygulanmaktadır.

2.3.1.1. rn_R Değerinin Büyük Olduğu Durumda Koşulsuz Hata Olasılığı

$|\beta_{j,i}|$ Rician dağılımlı olduğuna göre $|\beta_{j,i}|^2$ ifadesi, serbestlik derecesi 2 ve merkeziyetsizlik parametresi $S = \left|\mu_{j,i}\right|^2 = K^{j,i}$ olan merkezi olmayan chi-square dağılımına sahiptir [23]. $|\beta_{j,i}|^2$ rastlantı değişkeninin ortalaması ve varyansı,

$$\mu_{|\beta_{j,i}|^2} = 1 + K^{j,i} \qquad (2.50)$$

$$\sigma^2_{\left|\beta_{j,i}\right|^2} = 1 + 2K^{j,i} \tag{2.51}$$

biçiminde verilmektedir. (2.46) ifadesindeki eşitsizliğin sağ tarafında rn_R adet istatistiksel bağımsız chi-square dağılımlı rastlantı değişkeni bulunmaktadır. rn_R değerinin büyük olduğu durumlarda ($rn_R \geq 4$), merkezi limit kuralına göre [24],

$$D = \sum_{j=1}^{n_R} \sum_{i=1}^{n_T} \lambda_i \left|\beta_{j,i}\right|^2 \tag{2.52}$$

biçiminde tanımlanan D rastlantı değişkeni, ortalama ve varyansı

$$\mu_D = \sum_{j=1}^{n_R} \sum_{i=1}^{n_T} \lambda_i \left(1 + K^{j,i}\right) \tag{2.53}$$

$$\sigma_D^2 = \sum_{j=1}^{n_R} \sum_{i=1}^{n_T} \lambda_i^2 \left(1 + 2K^{j,i}\right) \tag{2.54}$$

olan Gauss dağılımlı bir rastlantı değişkenine yaklaşmaktadır [13]. (2.46) ifadesinin D Gauss rastlantı değişkenine göre beklenen değeri alınırsa, koşulsuz hata olasılığı elde edilir:

$$P\left(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}\right) \leq \int_{D=0}^{+\infty} \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_S}{4N_0} D\right) p(D)\, dD. \tag{2.55}$$

Burada p(D), D Gauss rastlantı değişkeninin olasılık yoğunluk işlevidir. Aşağıdaki ifade kullanılarak,

$$\int_{D=0}^{+\infty} \exp(-\gamma D)\, p(D)\, dD = \exp\left(\frac{1}{2}\gamma^2 \sigma_D^2 - \gamma \mu_D\right) Q\left(\frac{\gamma \sigma_D^2 - \mu_D}{\sigma_D}\right), \gamma > 0 \tag{2.56}$$

hata olasılığının üst sınırı,

$$P\left(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}\right) \leq \frac{1}{2} \exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{E_S}{4N_0}\right)^2 \sigma_D^2 - \frac{E_S}{4N_0} \mu_D\right) Q\left(\frac{E_S}{4N_0} \sigma_D - \frac{\mu_D}{\sigma_D}\right) \tag{2.57}$$

biçiminde elde edilmektedir [16]. D Gauss rastlantı değişkenin ortalaması ve varyansı (2.57)'de yerine konursa, Rician sönümlemeli kanal için hata olasılığı üst

sınırı elde edilmektedir. Rayleigh sönümlemeli kanal için ise $\mu_h^{j,i} = 0$ olduğundan, $K^{j,i} = 0$ olmaktadır. **A** matrisinin boyutu n_T x n_T olduğundan ve rank değeri r ile gösterildiğinden, **A** matrisinin (n_T-r) adet özdeğeri sıfıra eşittir. Dolayısıyla **A** matrisinin r adet özdeğeri de sıfırdan farklıdır. Sıfırdan farklı olan özdeğerlerin $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ olarak gösterildiği varsayılırsa, D Gauss rastlantı değişkeninin ortalaması ve varyansı,

$$\mu_D = n_R \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \tag{2.58}$$

$$\sigma_D^2 = n_R \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2 \tag{2.59}$$

biçiminde ifade edilmektedir. Bu ortalama ve varyans ifadeleri, (2.57) denkleminde yerine konduğunda Rayleigh sönümlemeli kanal için çiftsel hata olasılığının üst sınırı elde edilmektedir [16]:

$$P\left(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}\right) \le \frac{1}{2} \exp\left(\frac{1}{2} \left(\frac{E_S}{4N_0} \right)^2 n_R \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2 - \frac{E_S}{4N_0} n_R \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \right)$$

$$\cdot Q\left(\frac{E_S}{4N_0} \sqrt{n_R \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2} - \frac{\sqrt{n_R} \sum_{i=1}^{r} \lambda_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2}} \right) . \tag{2.60}$$

2.3.1.2. rn_R Değerinin Küçük Olduğu Durumda Koşulsuz Hata Olasılığı

Küçük rn_R değerleri için, $rn_R \ge 4$ olduğu durumdaki D'nin Gauss dağılımlı olduğu varsayımı geçerli olmamaktadır ve çiftsel hata olasılığı üst sınırı,

$$P\left(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}\right) \le \int \cdots \int_{|\beta_{j,i}|=0}^{\infty} P\left(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}} | \mathbf{H}\right) p\left(|\beta_{1,1}|\right) p\left(|\beta_{1,2}|\right) \cdots p\left(|\beta_{n_R, n_T}|\right)$$

$$\cdot \, d|\beta_{1,1}| \, d|\beta_{1,2}| \cdots d|\beta_{n_R, n_T}| \tag{2.61}$$

ile verilen integralin adım adım çözülmesi ile elde edilmektedir. Burada $|\beta_{j,i}|$'ler Rician dağılımlı rastlantı değişkenleri olduğundan, (2.49)'da verilen olasılık yoğunluk işlevi (2.61)'de yerine konursa, çiftsel hata olasılığının üst sınırı,

$$P\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right)\le\prod_{j=1}^{n_R}\left(\prod_{i=1}^{n_T}\frac{1}{1+\frac{E_S}{4N_0}\lambda_i}\exp\left(-\frac{K^{j,i}\frac{E_S}{4N_0}\lambda_i}{1+\frac{E_S}{4N_0}\lambda_i}\right)\right) \tag{2.62}$$

biçiminde bulunur [5]. Kanalın Rayleigh sönümlemeli olduğu durumda tüm j ve i'ler için $K^{j,i}=0$ olacağından (2.62)'deki eşitsizlik,

$$P\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right)\le\left(\frac{1}{\prod_{i=1}^{n_T}\left(1+\frac{E_S}{4N_0}\lambda_i\right)}\right)^{n_R} \tag{2.63}$$

olarak elde edilmektedir. **A** matrisinin boyutu n_T x n_T olduğundan ve rank değeri r ile gösterildiğinden, **A** matrisinin (n_T-r) adet özdeğeri sıfıra eşittir. Dolayısıyla **A** matrisinin r adet özdeğeri de sıfırdan farklıdır. Sıfırdan farklı olan özdeğerler $\lambda_1,\lambda_2,.....,\lambda_r$ olarak gösterilirse ve yüksek işaret gürültü oranları için

$$1+\frac{E_S}{4N_0}\lambda_i\approx\frac{E_S}{4N_0}\lambda_i \tag{2.64}$$

varsayımı yapılırsa çiftsel hata olasılığının üst sınırı daha basit bir şekilde ifade edilmektedir:

$$P\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right)\le\left(\prod_{i=1}^{r}\lambda_i\right)^{-n_R}\left(\frac{E_S}{4N_0}\right)^{-rn_R}. \tag{2.65}$$

İşaret gürültü oranının derecesi, çeşitleme kazancını ifade ettiğinden dolayı rn_R çeşitleme kazancının sağlandığı açıkça görülmektedir. Kodlama kazancı ise aynı çeşitleme kazancına sahip kodlanmamış bir sisteme nazaran elde edilen kazancı ifade etmektedir. Bu durumda, görüldüğü gibi $\left(\lambda_1\lambda_2.....\lambda_r\right)^{1/r}$ kodlama kazancıdır [5]. Çeşitleme kazancı, işaret gürültü oranına bağlı olarak çizilen hata oranı eğrisinin eğimini belirlerken, kodlama kazancı ise uzay-zaman kodlanmış bir sistemdeki hata oranı eğrisinin, aynı çeşitleme kazancına sahip kodlanmamış bir sistemdeki hata oranı eğrisine nazaran yatay ötelenme miktarını belirtmektedir.

Genel olarak, hata olasılığını asgariye indirmek için hem çeşitleme hem de kodlama kazancının olabildiğince büyük yapılması gerekmektedir. Görüldüğü gibi rn_R değeri üstel olarak etki yaptığından, çeşitleme kazancının büyük olması kodlama kazancının büyük olmasından daha büyük önem kazanmaktadır.

2.3.2. Hızlı Sönümlemeli Kanallar

Hızlı sönümlemeli kanallarda, sönümleme katsayıları sadece simge süresi boyunca sabittir. Duruğumsu sönümlemeli kanallar için yapılan incelemelerin benzeri, hızlı sönümlemeli kanallar için de uygulanabilir. Her t anındaki uzay-zaman simge fark vektörü,

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{x_t},\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right)=\left[\mathrm{x}_\mathrm{t}^1-\hat{\mathrm{x}}_\mathrm{t}^1,\mathrm{x}_\mathrm{t}^2-\hat{\mathrm{x}}_\mathrm{t}^2,....,\mathrm{x}_\mathrm{t}^{n_T}-\hat{\mathrm{x}}_\mathrm{t}^{n_T}\right]^T \tag{2.66}$$

olarak ifade edilmektedir. Bu durumda duruğumsu sönümlemeli kanaldaki **A** matrisinin hızlı sönümlemeli kanaldaki karşılığı,

$$\mathbf{C}\left(\mathbf{x_t},\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right)=\mathbf{F}\left(\mathbf{x_t},\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right).\mathbf{F}^H\left(\mathbf{x_t},\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right) \tag{2.67}$$

olarak elde edilir. Görüldüğü gibi $\mathbf{C}\left(\mathbf{x_t},\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right)$ matrisi hermityen bir matristir. Dolayısıyla, öyle bir tekil $\mathbf{V_t}$ matrisi ve $\mathbf{\Lambda_t}$ gerçel köşegen matrisi vardır ki,

$$\mathbf{V_t}.\mathbf{C}\left(\mathbf{x_t},\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right).\mathbf{V}_\mathrm{t}^H=\mathbf{\Lambda_t} \tag{2.68}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadenin çıkarılışı, önceki bölümde duruğumsu sönümlemeli kanallar için yapılmıştır. Burada $\mathbf{V_t}$'nin satırları $(\mathbf{v_t^1}, \mathbf{v_t^2}, ...,\mathbf{v_t^{n_T}})$, $\mathbf{C}\left(\mathbf{x_t},\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right)$'nin özvektörlerinden, $\mathbf{\Lambda_t}$'nin köşegeni de $\mathbf{C}\left(\mathbf{x_t},\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right)$'nin özdeğerlerinden oluşmaktadır ($\lambda_t^i \geq 0$, i=1,2,.....,n_T). Köşegen matris $\mathbf{\Lambda_t}$,

$$\mathbf{\Lambda_t}=\begin{bmatrix}\lambda_t^1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_t^2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_t^{n_T}\end{bmatrix} \tag{2.69}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Eğer $\mathbf{x_t} = \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}$ olursa, $\mathbf{C}\left(\mathbf{x_t}, \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right)$ tüm sıfır matrisi ve tüm özdeğerleri de λ_t^i (i=1,2,.....,n_T) sıfır olmaktadır. Diğer yandan, eğer $\mathbf{x_t} \neq \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}$ olursa $\mathbf{C}\left(\mathbf{x_t}, \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right)$ matrisinin (n_T-1) adet özdeğeri sıfır, bir özdeğeri ise sıfırdan farklı olmaktadır [16]. Sıfırdan farklı olan özdeğer λ_t^1 (i=1) olarak tanımlansın. Uzay-zaman simgeleri $\mathbf{x_t}$ ve $\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}$ arasındaki karesel Öklid uzaklığına eşit olan λ_t^1,

$$\lambda_t^1 = \left|\mathbf{x_t} - \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right|^2 = \sum_{i=1}^{n_T} \left|x_t^i - \hat{x}_t^i\right|^2 \tag{2.70}$$

ile verilebilir [2]. Belli bir t anında belli bir alıcı antene ait kanalın sönümleme katsayıları vektörü $\mathbf{h_t^j}$ olarak tanımlanmaktadır:

$$\mathbf{h_t^j} = \left(h_{j,1}^t, h_{j,2}^t, ..., h_{j,n_T}^t\right). \tag{2.71}$$

(2.28)'deki karesel Öklid ifadesi $\mathbf{C}\left(\mathbf{x_t}, \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right)$ matrisi yardımıyla,

$$\begin{aligned} d_h^2\left(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}\right) &= \sum_{t=1}^{L}\sum_{j=1}^{n_R} \mathbf{h_t^j} \mathbf{C}\left(\mathbf{x_t}, \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right)\left(\mathbf{h_t^j}\right)^H \\ &= \sum_{t=1}^{L}\sum_{j=1}^{n_R}\sum_{i=1}^{n_T} \left|\beta_{j,i}^t\right|^2 \lambda_t^i \end{aligned} \tag{2.72}$$

olarak ifade edilmektedir [5]. Burada $\beta_{j,i}^t = \mathbf{h_t^j}.\mathbf{v_t^i}$ olarak tanımlanmaktadır. Her t anı için, sıfırdan farklı özdeğer sayısı en fazla bir tane olabileceğinden (2.72)'de λ_t^i gördüğümüz yere sıfırdan farklı olan özdeğerin kendisini (λ_t^1) yazabiliriz. Böylece i (i=1,2,.....,n_T) üzerinden yapılan toplam işlemi de karesel Öklid ifadesinden düşmektedir:

$$\begin{aligned} d_h^2\left(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}\right) &= \sum_{t\in\rho\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right)}\sum_{j=1}^{n_R} \left|\beta_{j,1}^t\right|^2 \lambda_t^1 \\ &= \sum_{t\in\rho\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right)}\sum_{j=1}^{n_R} \left|\beta_{j,1}^t\right|^2 \left|\mathbf{x_t} - \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right|^2. \end{aligned} \tag{2.73}$$

Burada $\rho\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right)$, $\left|\mathbf{x_t}-\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right|\neq 0$ (t = 1,2,.....,L) olduğu anları belirtmektedir. Ayrıca $\beta_{j,1}^{t}=\mathbf{h_t^j}.\mathbf{v_t^1}$ olarak tanımlanmakta ve $\mathbf{v_t^1}$ sıfırdan farklı olan özdeğere (λ_t^1) karşı düşen özvektörü ifade etmektedir. Karesel Öklid ifadesi (2.31)'de yerine konursa koşullu hata olasılığı,

$$P\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\middle|\mathbf{H}\right)\leq\frac{1}{2}\exp\left(-\sum_{t\in\rho\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right)}\sum_{j=1}^{n_R}\left|\beta_{j,1}^{t}\right|^2\left|\mathbf{x_t}-\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right|^2\frac{E_S}{4N_0}\right) \tag{2.74}$$

olarak elde edilmektedir [2]. Burada $\beta_{j,1}^{t}$'ler istatistiksel bağımsız kompleks Gauss rastlantı değişkenleridir. Bu yüzden, $\left|\beta_{j,1}^{t}\right|$'ler de Rician dağılımlıdır ve olasılık yoğunluk işlevi,

$$p\left(\left|\beta_{j,1}^{t}\right|\right)=2\left|\beta_{j,1}^{t}\right|\exp\left(-\left|\beta_{j,1}^{t}\right|^2-K_t^{j,1}\right)I_0\left(2\left|\beta_{j,1}^{t}\right|\sqrt{K_t^{j,1}}\right) \tag{2.75}$$

şeklinde verilmektedir. Burada

$$K_t^{j,1}=\left|\left[\mu_{h_t}^{j,1},\mu_{h_t}^{j,2},.....,\mu_{h_t}^{j,n_T}\right].\mathbf{v_t^1}\right|^2 \tag{2.76}$$

olarak tanımlanmaktadır. Koşullu hata olasılığı üst sınırının, istatistiksel bağımsız Rician rastlantı değişkeni $\left|\beta_{j,1}^{t}\right|$'ye göre beklenen değeri alınmalıdır. Eğer $\mathbf{X}$ ve $\hat{\mathbf{X}}$ kodsözcüğü dizilerindeki farklı uzay-zaman simgelerinin sayısı δ_H ile gösterilirse, (2.74) ifadesindeki eşitsizliğin sağ tarafında $\delta_H n_R$ istatistiksel bağımsız rastlantı değişkeni bulunduğu açıkça görülmektedir. Duruğumsu sönümlemeli kanallardakine benzer şekilde, hızlı sönümlemeli kanallarda da koşulsuz hata olasılığının hesaplanması için $\delta_H n_R$ değerine bağlı olarak iki farklı yöntem uygulanmaktadır.

2.3.2.1. $\delta_H n_R$ Değerinin Büyük Olduğu Durumda Koşulsuz Hata Olasılığı

Verilen koda göre $\delta_H n_R$ değerinin büyük olduğu ($\delta_H n_R \geq 4$) durumlarda merkezi limit kuralına göre, (2.73)'teki karesel Öklid uzaklığı Gauss dağılımlı bir rastlantı değişkenine (Z) yaklaşmaktadır. Bu rastlantı değişkeninin ortalama ve varyansı sırasıyla,

$$\mu_z = \sum_{t\in\rho\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right)} \sum_{j=1}^{n_R} \left|\mathbf{x_t} - \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right|^2 \left(1 + K_t^{j,1}\right) \tag{2.77}$$

$$\sigma_z^2 = \sum_{t\in\rho\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right)} \sum_{j=1}^{n_R} \left|\mathbf{x_t} - \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right|^4 \left(1 + 2K_t^{j,1}\right) \tag{2.78}$$

biçiminde verilebilir [16]. (2.74)'te elde edilen koşullu hata olasılığının Z Gauss rastlantı değişkenine göre beklenen değeri alınırsa, (2.56)'daki ifade yardımıyla koşulsuz hata olasılığının üst sınırı,

$$P\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right) \le \frac{1}{2}\exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{E_S}{4N_0}\right)^2 \sigma_z^2 - \frac{E_S}{4N_0}\mu_z\right) Q\left(\frac{E_S}{4N_0}\sigma_z - \frac{\mu_z}{\sigma_z}\right) \tag{2.79}$$

şeklinde elde edilmektedir. Z Gauss rastlantı değişkenin ortalaması ve varyansı (2.79)'da yerine konursa, Rician sönümlemeli kanal için hata olasılığının üst sınırı elde edilmektedir. Rayleigh sönümlemeli kanal için ise $\mu_{h_t}^{j,i} = 0$ olduğundan, $K_t^{j,1} = 0$ olmaktadır. Bu durumda Z rastlantı değişkeninin ortalama ve varyansı,

$$\mu_z = n_R \sum_{t\in\rho\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right)} \left|\mathbf{x_t} - \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right|^2 \tag{2.80}$$

$$\sigma_z^2 = n_R \sum_{t\in\rho\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right)} \left|\mathbf{x_t} - \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right|^4 \tag{2.81}$$

biçiminde verilebilir. Bu ortalama ve varyans ifadeleri, (2.79) denkleminde yerine konduğunda Rayleigh sönümlemeli kanal için çiftsel hata olasılığının üst sınırı elde edilmektedir [16]:

$$P\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right) \le \frac{1}{2}\exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{E_S}{4N_0}\right)^2 n_R D^4 - \frac{E_S}{4N_0} n_R d_E^2\right) Q\left(\frac{E_S}{4N_0}\sqrt{n_R D^4} - \frac{\sqrt{n_R}\, d_E^2}{\sqrt{D^4}}\right). \tag{2.82}$$

Burada d_E^2, iki uzay-zaman simge dizisi arasındaki karesel Öklid uzaklığına eşittir ve

$$d_E^2 = \sum_{t\in\rho\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right)} \left|\mathbf{x_t} - \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right|^2 \tag{2.83}$$

biçiminde verilir. D^4 ise aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$D^4 = \sum_{t\in\rho(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})} \left|\mathbf{x_t} - \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right|^4 . \tag{2.84}$$

2.3.2.2. $\delta_H n_R$ Değerinin Küçük Olduğu Durumda Koşulsuz Hata Olasılığı

Küçük $\delta_H n_R$ değerleri için, $\delta_H n_R \geq 4$ olduğu durumdaki Z'nin Gauss dağılımlı olduğu varsayımı geçerli olmamaktadır ve çiftsel hata olasılığı üst sınırı,

$$P\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right) \leq \int\cdots\int_{\left|\beta_{j,l}^t\right|=0}^{\infty} P\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\middle|\mathbf{H}\right) p\left(\left|\beta_{1,1}^1\right|\right) p\left(\left|\beta_{2,1}^1\right|\right)\cdots p\left(\left|\beta_{n_R,1}^L\right|\right)$$
$$d\left|\beta_{1,1}^1\right| d\left|\beta_{2,1}^1\right|\cdots d\left|\beta_{n_R,1}^L\right| \tag{2.85}$$

ile verilen integralin adım adım çözülmesi ile elde edilmektedir. Burada $\left|\beta_{j,l}^t\right|$'ler (t = 1, 2, ..., L ve j = 1, 2, ..., n_R) Rician dağılımlı rastlantı değişkenleri olduğundan, (2.75)'te verilen olasılık yoğunluk işlevi (2.85)'te yerine konursa, çiftsel hata olasılığının üst sınırı bulunmaktadır [5]:

$$P\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right) \leq \prod_{t\in\rho(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})} \prod_{j=1}^{n_R} \frac{1}{1+\frac{E_S}{4N_0}\left|\mathbf{x_t}-\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right|^2} \exp\left(-\frac{K_t^{j,1}\frac{E_S}{4N_0}\left|\mathbf{x_t}-\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right|^2}{1+\frac{E_S}{4N_0}\left|\mathbf{x_t}-\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right|^2}\right). \tag{2.86}$$

Kanalın Rayleigh sönümlemeli olduğu durumda tüm j ve t'ler için $K_t^{j,1} = 0$ olacağından (2.86)'daki eşitsizlik,

$$P\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right) \leq \left(\prod_{t\in\rho(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})} \frac{1}{\left(1+\left|\mathbf{x_t}-\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right|^2\frac{E_S}{4N_0}\right)}\right)^{n_R} \tag{2.87}$$

olarak elde edilmektedir. Yüksek işaret gürültü oranları için

$$1+\frac{E_S}{4N_0}\left|\mathbf{x_t}-\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right|^2 \approx \frac{E_S}{4N_0}\left|\mathbf{x_t}-\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right|^2 \tag{2.88}$$

varsayımı yapılırsa çiftsel hata olasılığının üst sınırı daha basit bir şekilde ifade edilmektedir:

$$P\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right) \le \left(d_p^2\right)^{-n_R} \left(\frac{E_S}{4N_0}\right)^{-\delta_H n_R} . \tag{2.89}$$

Burada d_p^2, iki uzay-zaman simge dizisi arasındaki karesel Öklid uzaklıklarının çarpımından oluşmaktadır:

$$d_p^2 = \prod_{t\in\rho\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right)} \left|\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t\right|^2 . \tag{2.90}$$

İşaret gürültü oranının derecesi, çeşitleme kazancını ifade ettiğinden dolayı $\delta_H n_R$ çeşitleme kazancının sağlandığı açıkça görülmektedir. Kodlama kazancı ise aynı çeşitleme kazancına sahip kodlanmamış bir sisteme nazaran elde edilen kazancı ifade etmektedir. Bu durumda, görüldüğü gibi $\left(d_p^2\right)^{1/\delta_H}$ kodlama kazancı sağlanmaktadır.

2.3.3. Uzay-Zaman Kafes Kodların Tasarım Ölçütleri

Bu bölümde, önceden bulunan çiftsel hata olasılıklarının üst sınırları kullanılarak hem duruğumsu sönümlemeli kanal hem de hızlı sönümlemeli kanal için farklı tasarım ölçütleri gösterilecektir.

2.3.3.1. Duruğumsu Sönümlemeli Kanal İçin Tasarım Ölçütleri

Bölüm 2.3.1'de elde edilen (2.60) ve (2.65) ifadelerindeki üst sınırlardan da anlaşılacağı gibi duruğumsu sönümlemeli Rayleigh kanal için tasarım ölçütleri rn_R değerine bağlıdır. Bu ifadenin alabileceği olası en büyük değer $n_T n_R$'e eşittir (**B** matrisi tam rank bir matris olduğunda elde edilmektedir). Küçük $n_T n_R$ değerleri için, yüksek işaret gürültü oranlarındaki çiftsel hata olasılığının değerini belirleyen baskın ifade **A** matrisinin rank'ıdır. Hata olasılığının değerini belirleyen diğer ifade ise (2.65)'ten görüldüğü gibi **A** matrisinin sıfırdan farklı özdeğerlerinin çarpımıdır. Kısacası, duruğumsu sönümlemeli Rayleigh kanalda, rn_R değerinin küçük olduğu durum için kod tasarım ölçütleri aşağıdaki gibi özetlenebilir :

I) **A** matrisinin rank'ının (r) en küçük değerinin, alabileceği en büyük değere sahip olması sağlanmalıdır. Böylece rn_R çeşitleme kazancı da en büyük değerini almaktadır. **A** matrisinin rank'ının en büyük değeri $r = n_T$ sağlandığı zaman elde edilmektedir. Bunun için **B** matrisinin tam rank bir

matris olması gerekmektedir ve bu koşul kodların yapısı gereği her zaman elde edilememektedir. Bu ölçüt, rank ölçütü olarak adlandırılmaktadır [5].

II) **A** matrisinin sıfırdan farklı özdeğerlerinin çarpımının $\prod_{i=1}^{r}\lambda_i$ en küçük değerinin, alabileceği en büyük değere sahip olması sağlanmalıdır. Bu ifade ayrıca **A** matrisinin r. dereceden köklerinin determinantlarının toplamına da eşittir. Bu ölçüt, determinant ölçütü olarak adlandırılmaktadır [5].

Yukarıda belirtilen iki ölçüte kısaca rank ve determinant ölçütü denilmektedir.

Büyük $n_T n_R$ değerleri için, hata olasılığının üst sınırı (2.60)'da verilmiştir. Kod tasarım ölçütünü belirleme işini kolaylaştırmak için (2.30)'daki eşitsizlik kullanılır ve

$$\frac{E_S}{4N_0} \geq \frac{\sum_{i=1}^{r}\lambda_i}{\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^2} \tag{2.91}$$

koşulunu sağlayacak kadar yüksek işaret gürültü oranlarında çalışıldığı varsayımı yapılırsa, (2.60)'daki ifade daha basit bir yapıya dönüşmektedir [16]:

$$P\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right) \leq \frac{1}{4}\exp\left(-n_R \frac{E_S}{4N_0}\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\right). \tag{2.92}$$

Görüldüğü gibi çiftsel hata olasılığı değerinde, **A** matrisinin özdeğerlerinin toplamı etkindir. Hata başarımını iyileştirmek için **A** matrisinin özdeğerlerinin toplamının en küçük değerinin, mümkün oldukça büyük olması sağlanmalıdır. Kare bir matrisin özdeğerlerinin toplamı, aynı zamanda matrisin köşegeni üzerindeki elemanlarının toplamına (matrisin izine) eşittir:

$$\text{İz}\left(\mathbf{A}\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right)\right) = \sum_{i=1}^{r}\lambda_i = \sum_{i=1}^{n_T}A_{i,i}\ . \tag{2.93}$$

Burada $A_{i,i}$, **A** matrisinin köşegeni üzerindeki elemanları ifade etmektedir ve (2.34) denklemi yardımıyla,

$$A_{i,j} = \sum_{t=1}^{L} \left(x_t^i - \hat{x}_t^i \right) \left(x_t^j - \hat{x}_t^j \right)^* \tag{2.94}$$

biçiminde elde edilmektedir. (2.94) ifadesi (2.93)'te yerine konursa, **A** matrisinin izi bulunmaktadır:

$$\text{İz}\left(\mathbf{A}\left(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}} \right) \right) = \sum_{i=1}^{n_T} \sum_{t=1}^{L} \left| x_t^i - \hat{x}_t^i \right|^2 . \tag{2.95}$$

Bu ifade, **A** matrisinin izinin **X** ve $\hat{\mathbf{X}}$ kodsözcükleri arasındaki karesel Öklid uzaklığına eşit olduğunu göstermektedir. Bu yüzden, **A** matrisinin özdeğerleri toplamının en küçük değerinin veya **A** matrisinin izinin en küçük değerinin alabileceği en büyük değeri alması ile tüm kodsözcükleri arasındaki karesel Öklid uzaklığının en küçük değerinin alabileceği en büyük değeri alması aynı anlama gelmektedir. Bu ölçüt iz ölçütü olarak adlandırılmaktadır ve kısaca aşağıdaki gibi özetlenebilir [16] :

I) Kullanılan uzay-zaman kafes koduna ait **A** matrisinin rank'ının en küçük değeri (r), $rn_R \geq 4$ koşulunu sağlamalıdır.

II) **A** matrisinin izinin en küçük değerinin alabileceği en büyük değeri alması sağlanmalıdır.

Çeşitleme derecesinin artması, sönümlemenin etkisini azaltmakta ve sönümlemeli kanalı toplamsal beyaz Gauss gürültülü kanal (AWGN) modeline yaklaştırmaktadır [16, 25]. Bu yüzden toplamsal beyaz Gauss gürültülü kanal için geçerli olan karesel Öklid uzaklığının en küçük değerinin olabildiğince büyük yapılması ölçütü, çeşitleme derecesi büyük olan sönümlemeli kanallar için de uygulanabilir. Uzay-zaman kafes kod tasarımında, rn_R değerinin büyük olduğu durumlarda kanal toplamsal beyaz Gauss gürültülü kanala yakınsamaktadır. Bu nedenle, kod tasarımı da toplamsal beyaz Gauss gürültülü kanal için olan tasarım ile aynıdır [16].

Duruğumsu sönümlemeli kanallar için tasarım ölçütlerini özetleyecek olursak, rn_R değerine bağlı olarak rank ve determinant ölçütü ile iz ölçütü olmak üzere iki farklı ölçüt bulunmaktadır. Rank ve determinant ölçütü $rn_R < 4$ durumunda, iz ölçütü ise $rn_R \geq 4$ durumunda uygulanmalıdır.

2.3.3.2. Hızlı Sönümlemeli Kanal İçin Tasarım Ölçütleri

Bölüm 2.3.2'de elde edilen (2.82) ve (2.89) denklemlerindeki üst sınırlardan da anlaşılacağı gibi hızlı sönümlemeli Rayleigh kanal için tasarım ölçütleri $\delta_H n_R$ değerine bağlıdır. Küçük $\delta_H n_R$ değerleri için, yüksek işaret gürültü oranlarındaki hata olasılığının değerini belirleyen baskın ifade, uzay-zaman simgeleri arasındaki Hamming uzaklığı olan δ_H'dır. Hata olasılığının değerini belirleyen diğer ifade ise (2.89)'dan görüldüğü gibi, iki uzay-zaman simge dizisi arasındaki karesel Öklid uzaklıklarının çarpımı olan d_p^2'dir. Kısacası, hızlı sönümlemeli Rayleigh kanalda, $\delta_H n_R$ değerinin küçük olduğu durum için kod tasarım ölçütleri aşağıdaki gibi özetlenebilir :

I) Uzay-zaman simgeleri arasındaki Hamming uzaklığının (δ_H) en küçük değerinin olabildiğince büyük olması sağlanmalıdır. Bu ölçüt, uzaklık ölçütü olarak adlandırılmaktadır [5].

II) Uzay-zaman simge dizileri arasındaki karesel Öklid uzaklıklarının çarpımının (d_p^2) en küçük değerinin, en küçük δ_H değerine sahip yol boyunca, olabildiğince büyük olması sağlanmalıdır. Bu ölçüt, çarpım ölçütü olarak adlandırılmaktadır [5].

Büyük $\delta_H n_R$ değerleri için, hata olasılığının üst sınırı (2.82)'de verilmiştir. Kod tasarım ölçütünü belirleme işini kolaylaştırmak için (2.30)'daki eşitsizlik kullanılır ve

$$\frac{E_S}{4N_0} \geq \frac{d_E^2}{D^4} \tag{2.96}$$

koşulunu sağlayacak kadar yüksek işaret gürültü oranlarında çalışıldığı varsayımı yapılırsa, (2.82)'deki ifade daha basit bir yapıya dönüşmektedir [16]:

$$P\left(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}\right) \leq \exp\left(-\frac{E_S}{4N_0} n_R \sum_{t=1}^{L} \sum_{i=1}^{n_T} \left| x_t^i - \hat{x}_t^i \right|^2 \right)$$

$$\leq \exp\left(-\frac{E_S}{4N_0} n_R d_E^2 \right). \tag{2.97}$$

Görüldüğü gibi yüksek işaret gürültü oranlarındaki hata olasılığı değerinde, karesel Öklid uzaklığı d_E^2 baskındır. Büyük $\delta_H n_R$ değerleri için tasarım ölçütü kısaca aşağıdaki gibi özetlenebilir [16] :

I) Uzay-zaman dizileri arasındaki Hamming uzaklığının en küçük değeri $(\delta_H), \delta_H n_R \geq 4$ koşulunu sağlamalıdır.

II) Karesel Öklid uzaklığının en küçük değerinin d_E^2 olabildiğince büyük yapılması gerekmektedir.

Bu tasarım ölçütü, rn_R değerinin büyük olduğu durumdaki duruğumsu sönümlemeli kanallar için geçerli olan iz ölçütü ile aynıdır. Her ikisi de karesel Öklid uzaklığının en küçük değerinin olabildiğince büyük olmasını önermektedir.

Sonuç olarak, sönümlemeli kanallar için uzay-zaman kafes kod tasarımı, sistemin çeşitleme derecesine bağlıdır. Duruğumsu sönümlemeli kanallardaki çeşitleme derecesi, alıcı anten sayısı (n_R) ile kodun yapısının belirlediği verici çeşitlemesinin (r) çarpımına eşittir. Hızlı sönümlemeli kanallardaki çeşitleme derecesi ise, alıcı anten sayısı (n_R) ile kodun yapısının belirlediği zaman çeşitlemesinin (δ_H) çarpımına eşittir. Çeşitleme derecesi küçük ise, duruğumsu sönümlemeli kanallarda çeşitleme ve kodlama kazancını artırmak için sırasıyla rank ve determinantı olabildiğince büyük olan bir kod seçilmelidir; hızlı sönümlemeli kanallarda ise simge Hamming uzaklığının en küçük değeri ve çarpım uzaklığı olabildiğince büyük olan bir kod seçilmelidir [16]. Bu durumda, çeşitleme kazancı kodun performansında baskın ve kodlama kazancına nazaran daha etkili olmaktadır. Ancak çeşitleme büyüdükçe, çeşitleme derecesini daha da artırmak performansda önemli bir gelişme sağlamamaktadır. Bu durumda kodlama kazancı önem kazanmaktadır. Yüksek çeşitleme derecesinde, sönümlemeli kanal toplamsal beyaz Gauss gürültülü kanala yakınsamakta olduğundan, hata olasılığını baskın olarak Öklid uzaklığının en küçük değeri belirlemektedir. Bu nedenle, toplamsal beyaz Gauss gürültülü kanal için tasarım ölçütü olan, Öklid uzaklığının en küçük değerinin olabildiğince büyük yapılması, çeşitleme derecesinin büyük olduğu durumda hem duruğumsu hem de hızlı sönümlemeli kanallar için geçerli olmaktadır.

2.3.3.3. Düşük ve Orta İşaret Gürültü Oranlarında Kod Performansı

Yüksek işaret gürültü oranları için kod tasarım ölçütleri Bölüm 2.3.3.1 ve 2.3.3.2'de elde edilmiştir. Ancak kodun düşük ve orta işaret gürültü oranlarında da çalışması gerekebilir. $E_S/4N_0$ ifadesi γ olarak tanımlanırsa, $\gamma >> 1$ aralığı yüksek işaret gürültü oranını, $\gamma << 1$ aralığı düşük işaret gürültü oranını ve $\gamma \approx 1$ aralığı ise orta işaret gürültü oranını belirtmektedir. (2.63)'teki hata olasılığı üst sınırında $E_S/4N_0$ değişimi yapılırsa,

$$P\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right) \le \left(\prod_{i=1}^{n_T} \frac{1}{1+\gamma\lambda_i}\right)^{n_R} \tag{2.98}$$

elde edilir. Düşük işaret gürültü oranı durumunda, (2.98)'de eşitsizliğin sağ tarafındaki paydada bulunan çarpım işlemi yapıldığında, γ'nin yüksek dereceden ifadeleri $\gamma << 1$ olduğu için ihmal edilebilir. Böylece, hata olasılığı üst sınırı,

$$P\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right) \le \left(1+\gamma\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\right)^{-n_R} \tag{2.99}$$

biçiminde elde edilir [26]. Görüldüğü gibi hata olasılığı, **A** matrisinin izine bağlıdır. Büyük rn_R değerleri için geçerli olan iz ölçütü, düşük işaret gürültü oranı aralığı için de geçerlidir.

Yüksek işaret gürültü oranı ($\gamma >> 1$) için hata olasılığının üst sınırı (2.65)'te verilmişti. Bu durumda rank ve determinant ölçütü geçerlidir:

$$P\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right) \le \left(\prod_{i=1}^{r}\lambda_i\right)^{-n_R} \gamma^{-rn_R}. \tag{2.100}$$

$\gamma \approx 1$ aralığındaki işaret gürültü oranları için hata olasılığı,

$$P\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right) \le \left(\prod_{i=1}^{n_T} \frac{1}{1+\lambda_i}\right)^{n_R} \tag{2.101}$$

olmaktadır. Bu durumdaki tasarım ölçütü, $\mathbf{I}+\mathbf{A}\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right)$ matrisine ait determinantın en küçük değerinin olabildiğince büyük yapılmasıdır (**I**, $n_T x n_T$ boyutlu birim matristir) [2]. Bu ölçüt, dar bir işaret gürültü oranı aralığı için geçerlidir. Uzay-zaman

kodlarının daha geniş bir işaret gürültü oranı aralığında çalışmasının gerektiği durumlarda bu ölçüt kullanışlı olmamaktadır.

2.3.4. Uzay-Zaman Kafes Kod Örnekleri

Bu bölümde, rank-determinant ve iz tasarım ölçütleri kullanılarak elde edilen uzay-zaman kafes kodlarına örnekler verilecektir. Literatürde çok fazla sayıda kod olmasına rağmen burada kolaylık olması açısından sadece 4PSK ve 2 bellek elemanı içeren uzay-zaman kafes kodları gösterilecektir. 4PSK modülasyonu için işaret kümesi Şekil 2.10'da verilmiştir. Bu işaret kümesindeki 0, 1, 2 ve 3 simgelerinin zaman domeni ifadeleri sırasıyla,

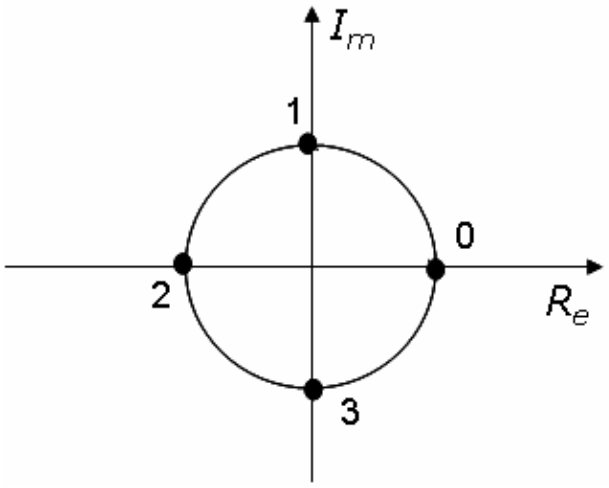
$$\cos(w_c t) = \mathrm{Re}\{e^{jw_c t}\} \tag{2.102a}$$

$$\cos(w_c t + \pi/2) = \mathrm{Re}\{e^{jw_c t} e^{j\pi/2}\} \tag{2.102b}$$

$$\cos(w_c t + \pi) = \mathrm{Re}\{e^{jw_c t} e^{j\pi}\} \tag{2.102c}$$

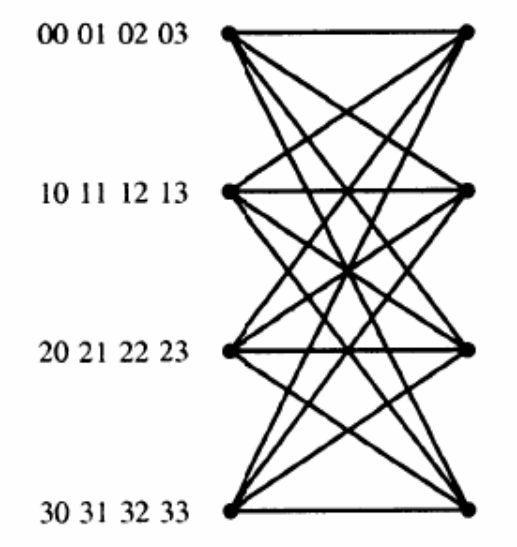
$$\cos(w_c t + 3\pi/2) = \mathrm{Re}\{e^{jw_c t} e^{j3\pi/2}\} \tag{2.102d}$$

şeklinde verilir. Bu ifadelerin karmaşık alçak geçiren eşdeğerleri sırasıyla e^{j0}, $e^{j\pi/2}$, $e^{j\pi}$ ve $e^{j3\pi/2}$'dir.



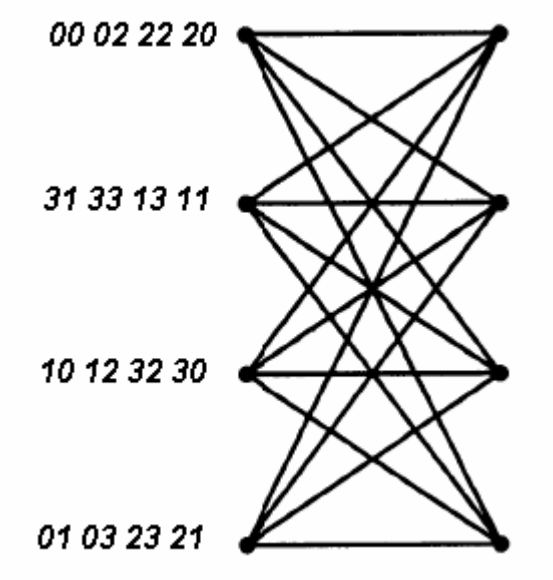
Şekil 2.10 4PSK modülasyonu için işaret kümesi

Tarokh, Seshadri ve Calderbak (TSC) tarafından $n_T = 2$ için tasarlanan kodun [5] kafes diyagramı Şekil 2.11'de verilmiştir. Rank ve determinant ölçütleri kullanılarak tasarlanan bu kodun rank değeri 2, determinant değeri 4 ve iz değeri ise 4'tür.



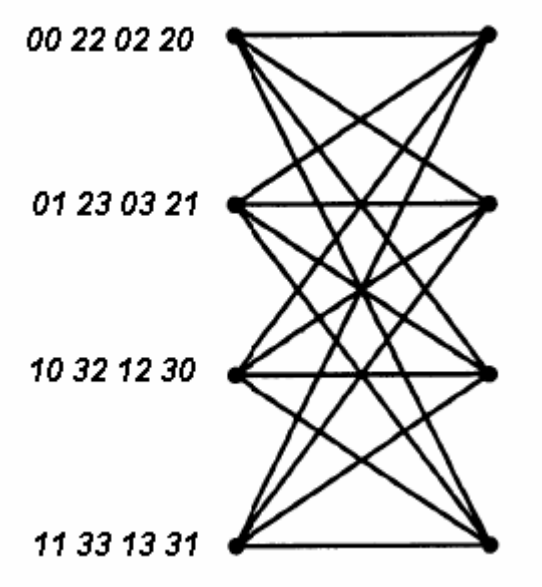
Şekil 2.11 TSC uzay-zaman kodu kafes diyagramı

Baro, Bauch ve Hansmann (BBH) tarafından $n_T = 2$ için tasarlanan kodun [7] kafes diyagramı Şekil 2.12'de verilmiştir. Rank ve determinant ölçütleri kullanılarak tasarlanan bu kodun rank değeri 2, determinant değeri 8 ve iz değeri ise 6'dır.



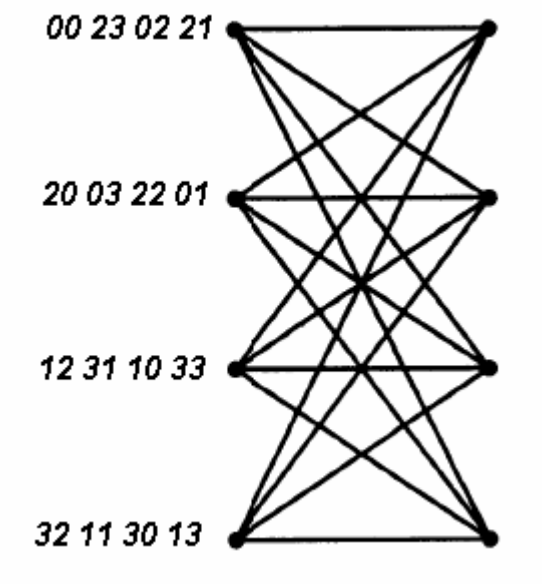
Şekil 2.12 BBH uzay-zaman kodu kafes diyagramı

Chen, Vucetic, Yuan ve Lo (CVYL) tarafından $n_T = 2$ için tasarlanan kodun [10] kafes diyagramı Şekil 2.13'te verilmiştir. Rank ve determinant ölçütleri kullanılarak tasarlanan bu kodun rank değeri 2, determinant değeri 8 ve iz değeri ise 6'dır.



Şekil 2.13 CVYL uzay-zaman kodu kafes diyagramı

Chen, Vucetic ve Yuan (CVY) tarafından $n_T = 2$ için tasarlanan kodun [12] kafes diyagramı Şekil 2.14'te verilmiştir. İz ölçütleri kullanılarak tasarlanan bu kodun rank değeri 2, determinant değeri 4 ve iz değeri ise 10'dur.



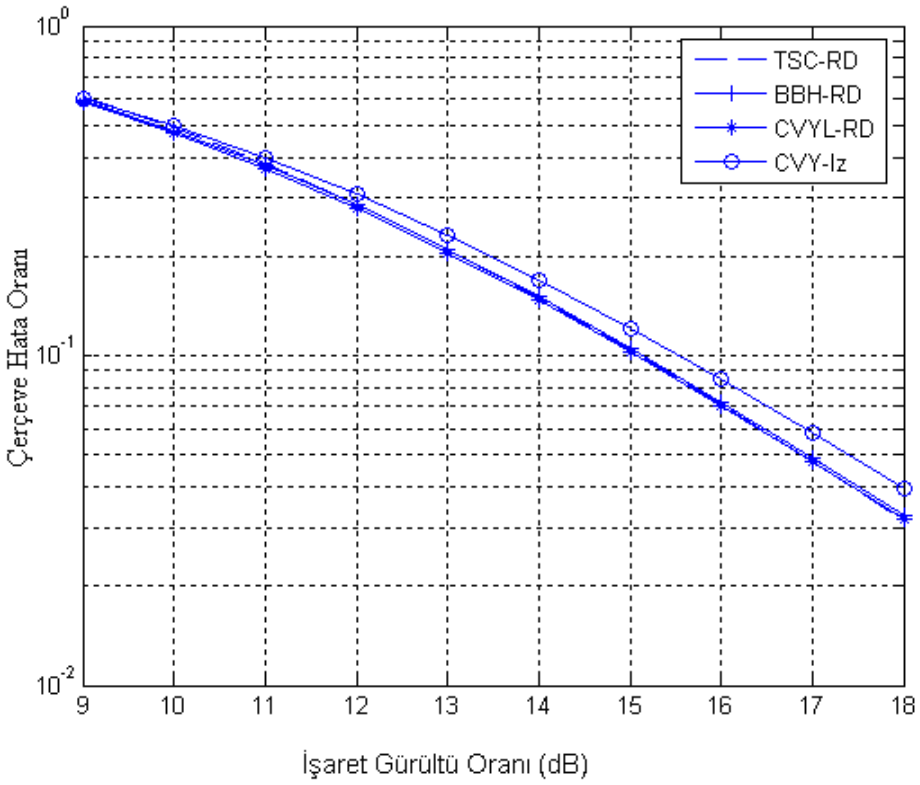
Şekil 2.14 CVY uzay-zaman kodu kafes diyagramı

Kodlar arasındaki farkların anlaşılması için kodların hata başarımının incelenmesi gerekmektedir. Bunun için de bilgisayar benzetimi yapılmıştır. Benzetim yapılırken, karar vericinin kanalın sönümleme katsayılarını bildiği varsayılmıştır. Her bir

çerçeve uzunluğu 130 simge olarak seçilmiştir. Ayrıca, $x_t^1 x_t^2 .....x_t^{n_T}$ ile gösterilen bir geçişe ait dal metriği,

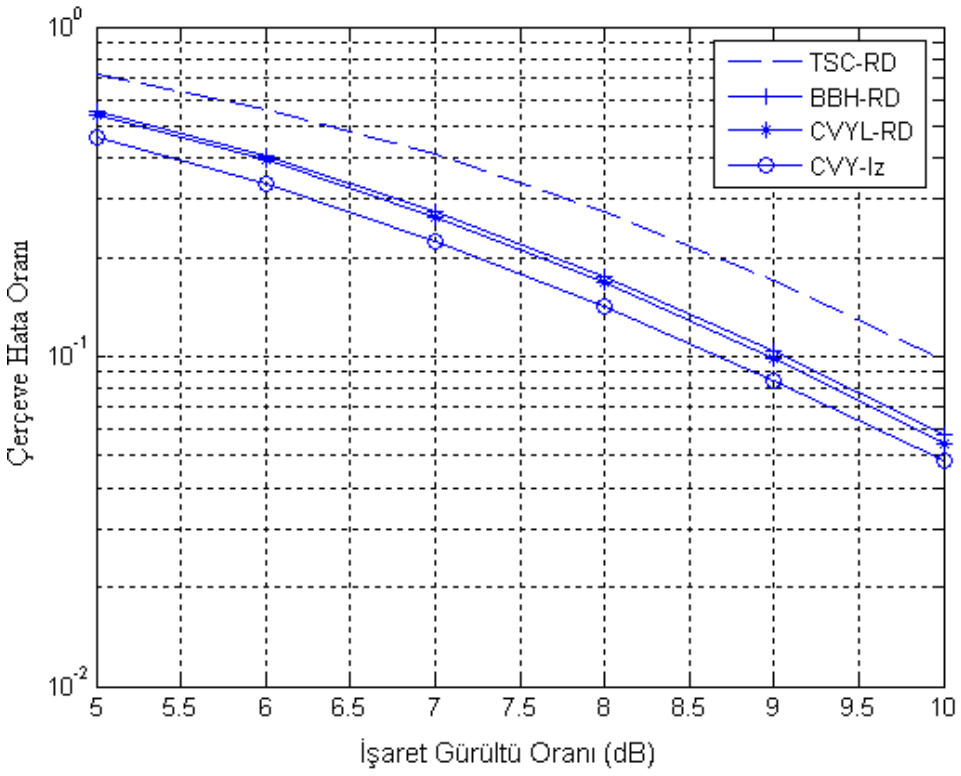
$$\sum_{j=1}^{n_R} \left| r_t^j - \sum_{i=1}^{n_T} h_{j,i} x_t^i \right|^2 \tag{2.103}$$

ifadesi yardımıyla hesaplanmıştır [5]. En küçük metriğe sahip yolun bulunması için Viterbi algoritması kullanılmıştır. Benzetim sonucunda elde edilen çerçeve hata oranının (FER) eğrileri (alıcı anten başına işaret gürültü oranına $\left(n_T E_S / N_0\right)$ göre) Şekil 2.15 ve Şekil 2.16'da gösterilmiştir.



Şekil 2.15 2 verici ve 1 alıcı anten durumunda uzay-zaman kafes kodlarının performansları

TSC, BBH, CVYL ve CVY uzay-zaman kafes kodlarının, tek alıcı anten ve iki verici antenden oluşan bir sistemdeki Rayleigh sönümlemeli kanal için hata başarım eğrileri Şekil 2.15'te verilmiştir. Görüldüğü gibi rank ve determinant ölçütüne göre tasarlanmış kodlar (TSC, BBH, CVYL), iz ölçütüne göre tasarlanmış kodlara (CVY) nazaran daha iyi hata başarımı sağlamaktadır.



Şekil 2.16 2 verici ve 2 alıcı anten durumunda uzay-zaman kafes kodlarının performansları

TSC, BBH, CVYL ve CVY uzay-zaman kafes kodlarının, iki alıcı anten ve iki verici antenden oluşan bir sistemdeki Rayleigh sönümlemeli kanal için hata başarım eğrileri Şekil 2.16'da verilmiştir. Görüldüğü gibi iz ölçütüne göre tasarlanmış kodlar (CVY), rank ve determinant ölçütüne göre tasarlanmış kodlara (TSC, BBH, CVYL) nazaran daha iyi hata başarımı sağlamaktadır. Şekilden de anlaşılacağı gibi en düşük iz değerine sahip TSC kodu, iki alıcı antenli durumda en kötü performansı göstermektedir. İz değeri 6 olan BBH ve CVYL kodları, TSC kodundan daha iyi bir performans sağlamaktadır. İz değeri 10 olan CVY kodu ise en iyi performansı göstermektedir.

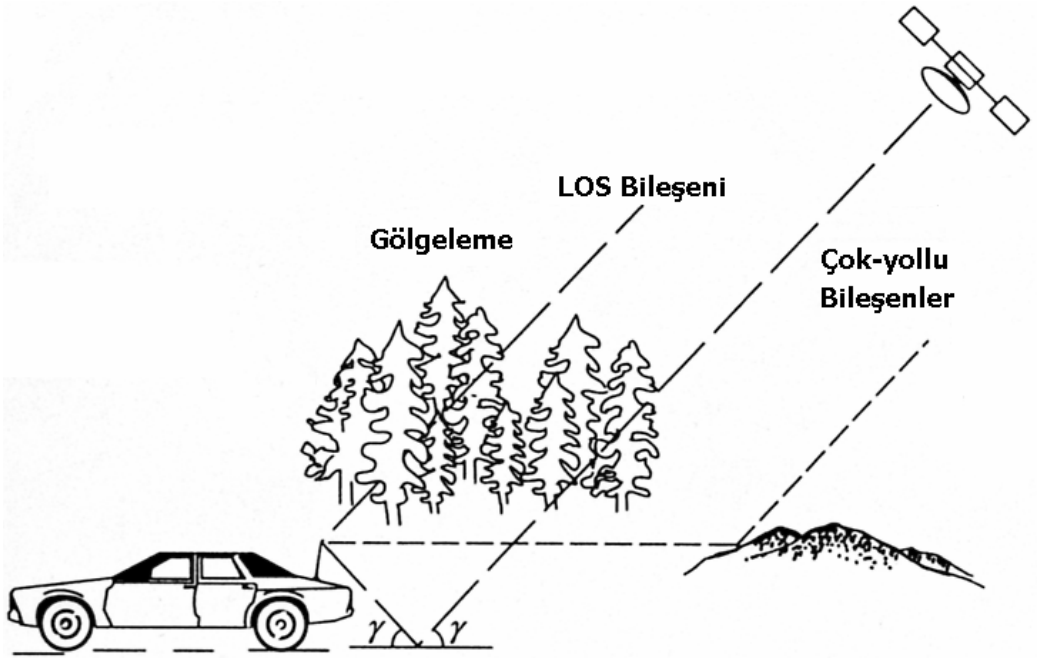
Görüldüğü gibi benzetim sonuçları da anlatılan tasarım ölçütlerini desteklemektedir. Sonuç olarak, küçük rn_R değerleri ($rn_R < 4$) için rank ve determinant ölçütü; büyük rn_R değerleri ($rn_R \geq 4$) için ise iz ölçütü kullanılmalıdır.

3. UZAY-ZAMAN KAFES KODLARDA GÖLGELEMENİN ETKİSİ

Önceki bölümde, uzay-zaman kafes kodlarının tasarım ölçütleri anlatılırken, kanal Rayleigh veya Rician dağılımlı olarak ele alınmıştır. Bu bölümde gölgeleme ile ilgili diğer dağılımlar da ele alınmış ve uzay-zaman kafes kodlarının gölgeleme etkisi altındaki hata başarımı incelenmiştir.

3.1. Gölgelemeli Kanallar

Gölgeleme, doğrudan görüş işaretinin (LOS bileşeninin) kısmen ya da tamamen binalar, ağaçlar, tepeler ve dağlar tarafından bloke edilmesiyle oluşmaktadır. Bu durum genelde ağaçlık ve dağlık bölgelerde meydana gelmektedir. Şekil 3.1'de gölgelemeli kanal modeline örnek verilmiştir. Gölgelemeli kanalı modellemek için genellikle Rician-lognormal ve Rician-Nakagami olmak üzere iki farklı dağılımdan faydalanılmaktadır.



Şekil 3.1 Gölgelemeli kanal modeli

3.1.1. Rician-lognormal Sönümlemeli Kanal

Gezgin haberleşme kanallarında alıcıya gelen işaret, çevre koşullarına bağlı olarak gölgeleme etkisi altında kalmaktadır. Bu gölgeleme etkisi, özellikle ormanlık alanlarda ağaçların yapraklarından dolayı işaretin saçılmasından kaynaklanmaktadır. Gölgeleme, ayrıca işaretlerin uzun–süreli (long-term) sönümleme karakteristiğini belirlemek için de kullanılmaktadır. Literatürde gölgelemeli Rician sönümlemeli kanalı tanımlamak için genellikle C. Loo [27] tarafından ortaya atılan model kullanılmaktadır [18]. Bu modelde, Rician kanalda olduğu gibi alıcıya gelen işaret baskın bileşen ve diğer çok-yollu bileşenlerden oluşmaktadır. Ancak buradaki baskın bileşenin sabit bir değer olmadığı ve lognormal dağılımlı bir rastlantı değişkeni olduğu varsayılmaktadır. Gölgelemeli Rician sönümlemeli bir kanalda sönümleme değişkeni,

$$g(t) = g_I(t) + jg_Q(t) + \mu \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada $g_I(t)$ ve $g_Q(t)$ sıfır ortalamalı ve σ^2 varyanslı Gauss dağılımına sahip süreçler olmakta ve baskın olmayan çok-yollu bileşenleri ifade etmektedir. Lognormal dağılımlı olan μ ise baskın bileşeni ifade etmektedir. Baskın bileşenin sıfır olduğu durumda işaret Rayleigh dağılımlı, baskın bileşenin sabit bir değer olduğu durumda ise işaret Rician dağılımlıdır. Bu durumda, baskın bileşenin değerinin bilindiği varsayılırsa (baskın bileşen sabit sayılırsa), sönümleme değişkeninin zarfı, koşullu Rician dağılımlıdır ve olasılık yoğunluk işlevi,

$$p(\rho|\mu) = \frac{\rho}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{(\rho^2+\mu^2)}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{\mu\rho}{\sigma^2}\right) \tag{3.2}$$

olarak verilmektedir. Baskın bileşen olan doğrudan görüş işaretinin (LOS) olasılık yoğunluk işlevi,

$$p(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\mu \mu}\exp\left(-\frac{(\ln\mu - m_\mu)^2}{2\sigma_\mu^2}\right) \tag{3.3}$$

olarak ifade edilmektedir. Burada, m_μ ve σ_μ^2 sırasıyla lnμ'nin ortalama ve varyansıdır. Sönümleme katsayısına ait olasılık yoğunluk işlevi ise, (3.2)'deki

koşullu olasılık yoğunluk işlevinin, lognormal dağılımlı baskın bileşene göre beklenen değeri alınarak bulunmaktadır:

$$p(\rho) = \int_0^\infty p(\rho|\mu)p(\mu)\,d\mu$$

$$= \frac{\rho}{\sqrt{2\pi}\sigma_\mu\sigma^2}\int_0^\infty \frac{1}{\mu}\exp\left(-\frac{\left(\ln\mu - m_\mu\right)^2}{2\sigma_\mu^2} - \frac{\left(\rho^2+\mu^2\right)}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{\mu\rho}{\sigma^2}\right)d\mu \ . \qquad (3.4)$$

Buradaki σ, σ_μ ve m_μ parametreleri gölgelemenin derecesini belirlemektedir. (3.4)'te verilen olasılık yoğunluk işlevi, ρ'nın küçük ve büyük değerleri için aşağıdaki yaklaşık değerleri almaktadır [27-28]:

$$p(\rho) \approx \begin{cases} \dfrac{\rho}{\sigma^2}\exp\left(-\dfrac{\left(\rho^2\right)}{2\sigma^2}\right) & (\rho << \sigma) \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\mu\rho}\exp\left(-\dfrac{\left(\ln\rho - m_\mu\right)^2}{2\sigma_\mu^2}\right) & (\rho >> \sigma). \end{cases} \qquad (3.5)$$

Küçük ρ değerleri için dağılım Rayleigh dağılımına, büyük ρ değerleri için ise dağılım lognormal dağılıma yakınsamaktadır [28].

3.1.2. Rician-Nakagami Sönümlemeli Kanal

Rician-lognormal istatistiksel modeli, deneyle elde edilen verilere çok iyi yaklaşıklık sağlamaktadır. Ancak hata olasılığı çıkarımlarında bu model kullanılırsa, ifadeler karmaşıklaştığından sonuca ulaşmak zorlaşmaktadır. Bu nedenle, hesaplamalardaki karmaşıklığı azaltan Rician-Nakagami modeli ortaya atılmıştır [29]. Bu modelde, kanal genel olarak Rician dağılımlıdır ancak baskın bileşenin (LOS) Nakagami dağılımlı olduğu varsayılmaktadır. Rician-Nakagami modeli de Rician-lognormal modeli gibi deneysel verilere çok iyi yaklaşıklık sağlamaktadır [29].

Rician-Nakagami sönümlemeli bir kanalın sönümleme değişkeni (3.1) ifadesindeki gibi tanımlanmaktadır. Burada $g_I(t)$ ve $g_Q(t)$ sıfır ortalamalı ve σ^2 varyanslı Gauss dağılımına sahip süreçler olmakta ve baskın olmayan çok-yollu bileşenleri ifade etmektedir. Nakagami dağılımlı olan μ ise baskın bileşeni ifade etmektedir. Baskın bileşenin sıfır olduğu durumda işaret Rayleigh dağılımlı, baskın bileşenin sabit bir

değer olduğu durumda ise işaret Rician dağılımlıdır. Bu durumda, baskın bileşenin değerinin bilindiği varsayılırsa (baskın bileşen sabit sayılırsa), sönümleme değişkeninin zarfı, koşullu Rician dağılımlıdır ve olasılık yoğunluk işlevi (3.2)'deki gibi tanımlanmaktadır. Baskın bileşen olan doğrudan görüş işaretinin (LOS) olasılık yoğunluk işlevi,

$$p(\mu) = \frac{2}{\Gamma(m)}\left(\frac{m}{\Omega}\right)^{m} \mu^{2m-1} \exp\left(-\frac{m}{\Omega}\mu^{2}\right) \qquad \mu \geq 0 \tag{3.6}$$

olarak ifade edilmektedir. Burada Gamma işlevi Γ(.), Ω ve m sırasıyla,

$$\Gamma(z) = \int_{0}^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \tag{3.7}$$

$$\Omega = E\left[\mu^{2}\right] \tag{3.8}$$

$$m = \frac{\Omega^{2}}{E\left[\left(\mu^{2} - \Omega\right)^{2}\right]}, \quad m \geq 0 \tag{3.9}$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Bu dağılımda kullanılan m, Nakagami parametresi olarak adlandırılmaktadır. Bu Nakagami dağılımının, bilinen Nakagami dağılımından tek farkı, m Nakagami parametresinin ½'den büyük olması yerine sıfırdan büyük olmasıdır [29]. Kanalın sönümleme katsayısına ait olasılık yoğunluk işlevi ise, (3.2)'deki koşullu olasılık yoğunluk işlevinin, Nakagami dağılımlı baskın bileşene göre beklenen değeri alınarak bulunmaktadır:

$$p(\rho) = \int_{0}^{\infty} p(\rho|\mu) p(\mu) d\mu$$

$$= \frac{2\rho}{\Gamma(m)\sigma^{2}}\left(\frac{m}{\Omega}\right)^{m} \int_{0}^{\infty} \mu^{2m-1} \exp\left(-\frac{m}{\Omega}\mu^{2} - \frac{\left(\rho^{2}+\mu^{2}\right)}{2\sigma^{2}}\right) I_{0}\left(\frac{\mu\rho}{\sigma^{2}}\right) d\mu \ . \tag{3.10}$$

Buradaki σ, m ve Ω parametreleri gölgelemenin derecesini belirlemektedir. Rician-Nakagami dağılımı ile Rician-lognormal dağılımı arasındaki ilişki,

$$m_{\mu} = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{\Omega}{m}\right) + \Psi(m)\right] \tag{3.11}$$

$$\sigma_{\mu}^{2} = \frac{\Psi'(m)}{4} \tag{3.12}$$

ifadeleri ile verilmektedir [29]. Burada $\Psi(.)$ ve $\Psi'(.)$ sırasıyla Psi işlevi ve türevidir:

$$\Psi(z) = \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}. \tag{3.13}$$

(3.11) ve (3.12) ifadeleri sayesinde Rician-Nakagami için yapılan tüm çıkarımlar, Rician-lognormal için de basit bir dönüşüm ile elde edilebilmektedir.

3.2. Uzay-Zaman Kafes Kodların Gölgeleme Etkisi Altındaki Performansı

Uzay-zaman kafes kodlarının gölgeleme etkisi altındaki performansını incelemek için genellikle iki tip model kullanılmaktadır. Bu modeller Rician-lognormal ve Rician-Nakagami dağılımlı kanallardır.

3.2.1. Rician-Lognormal Dağılımlı Kanalda Uzay-Zaman Kafes Kodların Performansı

Haberleşme sistemi olarak, vericinin (baz istasyonu) n_T antenli ve alıcının (gezgin cihaz) n_R antenli olduğu durum ele alınmıştır. Alıcıda en-büyük olabilirlikli Viterbi kodçözücü kullanıldığı ve alıcının kanalı bildiği varsayılmıştır. Bu varsayımlar altında, j anteni tarafından t anında alınan işaret,

$$r_t^j = \sqrt{E_S}\sum_{i=1}^{n_T} h_{j,i}^t x_t^i + n_t^j \tag{3.14}$$

olarak ifade edilmektedir. Sönümleme katsayıları $h_{j,i}^t$ ise t anında, i nolu verici anten ile j nolu alıcı anten arasındaki kanal kazancını ifade etmektedir. Sönümleme katsayıları $h_{j,i}^t$, Rician-lognormal sönümleme modeline uygun olarak seçilmiştir. Rician ve Rayleigh modeller ise bu durumun özel halidir. $h_{j,i}^t$ değerleri, ortalaması $E[h_{j,i}^t]$ ve varyansı $var(h_{j,i}^t) = \sigma_h^2$ olan, bağımsız ve iid kompleks Gauss rastlantı değişkenleri olarak modellenmektedir. Bu varsayımlar altında, uzay-zaman kafes kodlarının Rician-lognormal dağılımlı kanaldaki çiftsel hata olasılığı, duruğumsu ve hızlı sönümlemeli durum için ayrı ayrı incelenmiştir.

3.2.1.1. Duruğumsu Sönümlemeli Kanal

Kanalın sönümleme katsayılarının bilindiği varsayılarak koşullu hata olasılığı, (2.42) ifadesinin (2.29)'da yerine konulmasıyla

$$P(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}|\mathbf{H}) = Q\left(\sqrt{\frac{E_S}{2N_0}\sum_{j=1}^{n_R}\mathbf{h_j}\mathbf{A}\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right)\mathbf{h_j}^H}\right) \tag{3.15}$$

şeklinde bulunmaktadır. Rayleigh sönümlemeli kanallar için elde edilen $\beta_{j,i}$ rastlantı değişkeni Rician-lognormal sönümlemeli kanallar için de geçerlidir:

$$\beta_{j,i} = \sum_{l=1}^{n_T} h_{j,l} v_{i,l}^* \,. \tag{3.16}$$

$h_{j,i}$, ortalaması $\mu_h^{j,i}$ ve varyansı σ_h^2 olan kompleks Gauss rastlantı değişkeni olduğundan $\beta_{j,i}$ de kompleks Gauss dağılımlıdır. $\beta_{j,i}$'nin ortalaması ve varyansı,

$$\mu_{j,i} = E\left[\beta_{j,i}\right] = E\left[\sum_{l=1}^{n_T} h_{j,l} v_{i,l}^*\right] = \sum_{l=1}^{n_T} E\left[h_{j,l}\right] v_{i,l}^* \tag{3.17}$$

$$\sigma^2 = \mathrm{var}\left[\beta_{j,i}\right] = \sum_{l=1}^{n_T} \mathrm{var}\left[h_{j,l} v_{i,l}^*\right] = \mathrm{var}\left[h_{j,i}\right]\sum_{l=1}^{n_T}\left|v_{i,l}^*\right|^2$$

$$= \sigma_h^2 \tag{3.18}$$

olarak elde edilmektedir. Görüldüğü gibi $\beta_{j,i}$, $h_{j,i}$ ile aynı varyansa sahip ancak ortalaması farklıdır. $\beta_{j,i}$ kompleks Gauss dağılımlı olduğuna göre $|\beta_{j,i}|$ rastlantı değişkeni de

$$p\left(\left|\beta_{j,i}\right|\left|\mu_{j,i}\right.\right) = \frac{\left|\beta_{j,i}\right|}{\sigma^2}\exp\left(\frac{-\left|\beta_{j,i}\right|^2 - \mu_{j,i}^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{\left|\beta_{j,i}\right|\mu_{j,i}}{\sigma^2}\right) \tag{3.19}$$

olasılık yoğunluk işlevi ile koşullu Rician dağılımlıdır. Burada baskın işaretin enerjisi $\mu_{j,i}^2$ olmaktadır. Rician ve Rayleigh sönümlemeli durumlarda, $\mu_{j,i}$ sabit bir değer olduğundan (Rayleigh de sıfır), bu olasılık yoğunluk işlevi $\mu_{j,i}$'ye göre koşullu olmamaktadır. Rician-lognormal dağılımda ise baskın bileşen olan $\mu_{j,i}$ ($\beta_{j,i}$'nin

ortalaması) lognormal dağılımlıdır ve dolayısıyla $|\beta_{j,i}|$'nin $\mu_{j,i}$'ye göre koşullu olasılık yoğunluk işlevi Rician dağılımlıdır. $\mu_{j,i}$'nin olasılık yoğunluk işlevi,

$$p\left(\mu_{j,i}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\mu}\mu_{j,i}} \exp\left(-\frac{\left(\ln \mu_{j,i} - m_{\mu}\right)^2}{2\sigma_{\mu}^2} \right) \tag{3.20}$$

olarak ifade edilmektedir. Koşulsuz hata olasılığını bulmak için (3.15) ifadesinin $|\beta_{j,i}|$'ye göre beklenen değerinin alınması gerekmektedir. Beklenen değer alma işlemi için moment üreteç işlevi (MGF) metodu kullanılarak [30], çiftsel hata olasılığı için tam bir ifade elde edilecektir. (3.15)'teki Q işlevinin içindeki rastlantı değişkeni,

$$\Gamma = \frac{E_S}{2N_0} \sum_{j=1}^{n_R} \mathbf{h_j} \mathbf{A}\left(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}\right) \mathbf{h_j}^H \tag{3.21}$$

şeklinde tanımlansın. Buarada Γ rastlantı değişkeni ikinci dereceden, kompleks Gauss rastlantı değişkenidir ve moment üreteç işlevi,

$$\Phi_{\Gamma}\left(s\right) = \prod_{j=1}^{n_R} \prod_{i=1}^{n_T} \frac{1}{1 - sX_i} \exp\left(\frac{sX_i \left|d_i\right|^2}{1 - sX_i} \right) \tag{3.22}$$

şeklinde verilmektedir [18, 31-32]. Burada X_i, $(E_s/2N_0)$ $\mathbf{\Sigma}$ $\mathbf{A}$'nın özdeğerleri ve d_i ise $\mathbf{d} = E[\mathbf{h_j}]$ $\mathbf{V}^H$ $\mathbf{\Sigma}^{-1/2}$ vektörünün elemanlarıdır. $\mathbf{\Sigma}$ ise $\mathbf{h_j}$'nin kovaryans matrisidir. Bu durumda bu ifadeler,

$$X_i = (E_s/2N_0)\, 2\sigma^2\, \lambda_i \tag{3.23}$$

$$\left|d_i\right|^2 = \mu_{j,i}^2 / 2\sigma^2 \tag{3.24}$$

olarak bulunmaktadır. Q işlevinin alternatif formu (Graig formülü) [30],

$$Q\left(x\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sin^2\theta} \right) d\theta \tag{3.25}$$

kullanılarak, (3.15) ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilmektedir:

$$P\left(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}} | \mathbf{H}\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{\Gamma}{2\sin^2\theta} \right) d\theta\,. \tag{3.26}$$

Bu ifadedeki koşullu kısımdan kurtulmak için bu ifadenin Γ'ya göre ortalaması alınmalıdır (Γ'daki rastlantısal olan tek ifade $\mathbf{h}_j$'dir, yani $\mathbf{h}_j$'e göre beklenen değerini almış olacağız). Moment üreteç işlevi,

$$\Phi_\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{s\Gamma} P_\Gamma(\Gamma)\, d\Gamma \tag{3.27}$$

biçiminde ifade edildiğinden, koşullu hata olasılığı,

$$P\left(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}} \mid \mu_{j,i}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} E\left[\exp\left(-\frac{\Gamma}{2\sin^2\theta}\right)\right] d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\Gamma}{2\sin^2\theta}\right) P_\Gamma(\Gamma)\, d\Gamma d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \Phi_\Gamma\left(-\frac{1}{2\sin^2\theta}\right) d\theta \tag{3.28}$$

olarak bulunmaktadır. (3.22) ifadesi, (3.28)'de yerine yazılırsa,

$$P\left(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}} \mid \mu_{j,i}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \prod_{j=1}^{n_R}\prod_{i=1}^{n_T} \frac{1}{1+\frac{\Delta_i}{\sin^2\theta}} \exp\left(-\frac{\mu_{j,i}^2}{2\sigma^2}\frac{\frac{\Delta_i}{\sin^2\theta}}{1+\frac{\Delta_i}{\sin^2\theta}}\right) d\theta \tag{3.29}$$

elde edilir [18]. Burada, $\Delta_i = X_i / 2 = (E_s/4N_0)\, 2\sigma^2\, \lambda_i$ olarak tanımlanmaktadır. (3.29)'daki çiftsel hata olasılığını, koşullu ifadeden kurtarmak için bu ifadenin $\mu_{j,i}$'ye göre beklenen değeri alınmalıdır:

$$P\left(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \left[\prod_{i=1}^{n_T} \frac{1}{1+\frac{\Delta_i}{\sin^2\theta}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\mu} \int_0^\infty \frac{1}{\mu_{j,i}} \exp\left(-\frac{\mu_{j,i}^2}{2\sigma^2}\frac{\frac{\Delta_i}{\sin^2\theta}}{1+\frac{\Delta_i}{\sin^2\theta}}\right)\right.$$

$$\left. x\ \exp\left(-\frac{\left(\ln\mu_{j,i} - m_\mu\right)^2}{2\sigma_\mu{}^2}\right) d\mu_{j,i}\right]^{n_R} d\theta\,. \tag{3.30}$$

Burada $u_{j,i} = \left(\ln\mu_{j,i} - m_\mu\right) \Big/ \sqrt{2\sigma_\mu^2}$ değişken dönüşümü yapılırsa [18],

$$\mu_{j,i}^2 = \exp\left(2u_{j,i}\sqrt{2\sigma_\mu^2} + 2m_\mu\right) \tag{3.31}$$

$$du_{j,i} = \frac{d\mu_{j,i}}{\mu_{j,i}\sqrt{2\sigma_\mu^2}} \tag{3.32}$$

ifadeleri yardımıyla

$$P\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left[\prod_{i=1}^{n_T}\frac{1}{1+\frac{\Delta_i}{\sin^2\theta}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-u_{j,i}^2\right)\right.$$

$$\left. x\ \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\frac{\frac{\Delta_i}{\sin^2\theta}}{1+\frac{\Delta_i}{\sin^2\theta}}\exp\left(2\sqrt{2}\sigma_\mu u_{j,i} + 2m_\mu\right)\right)du_{j,i}\right]^{n_R} d\theta \tag{3.33}$$

elde edilir. Görüldüğü gibi iç integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\exp\left(-u^2\right)du$ formatındadır ve sonsuz bir toplam ile ifade edilebilmektedir [18]. Burada f(u) işlevi,

$$f(u) = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\frac{\frac{\Delta_i}{\sin^2\theta}}{1+\frac{\Delta_i}{\sin^2\theta}}\exp\left(2\sqrt{2}\sigma_\mu u_{j,i} + 2m_\mu\right)\right) \tag{3.34}$$

biçiminde verilmektedir. İşlemleri kolaylaştırmak için,

$$a = \frac{1}{2\sigma^2}\frac{\frac{\Delta_i}{\sin^2\theta}}{1+\frac{\Delta_i}{\sin^2\theta}} \tag{3.35}$$

$$b = 2\sqrt{2}\sigma_\mu \tag{3.36}$$

$$c = 2m_\mu \tag{3.37}$$

dönüşümleri yapıldığında, f (u) = exp(-a exp(bu + c)) biçiminde yazılabilmektedir. f(u) işlevini u = 0'da Taylor serisine açtığımızda,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\exp\left(-u^2\right)du = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(0)}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} u^k \exp\left(-u^2\right)du \tag{3.38}$$

ifadesi elde edilmektedir. $f^k(0)$, Taylor serisinin katsayıları olmakta ve aşağıdaki gibi ifade edilmektedir [18]:

$$f^k(0) = \exp\left(-a\exp(c)\right) b^k \sum_{t=1}^{k} g_{k,t} \left(a\exp(c)\right)^t . \tag{3.39}$$

Burada $g_{k,t} = t g_{k-1,t} - g_{k-1,t-1}$ $(g_{k,1} = -1)$, k = 1, 2, ... ve $g_{k,t} = 0$, $t > k$ olarak tanımlanmaktadır. Açıkça görüldüğü gibi, (3.38)'deki ifadenin sağındaki integral k'nın tek değerleri için sıfırdır:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^k \exp\left(-u^2\right)du = \begin{cases} 2\int_{0}^{\infty} u^k \exp\left(-u^2\right)du & , \quad k \text{ çift ise} \\ 0 & , \quad k \text{ tek ise} \end{cases} . \tag{3.40}$$

Aşağıdaki ifadelerin yardımıyla [33],

$$\int_{0}^{\infty} x^m \exp\left(-ax^2\right)dx = \frac{\Gamma\left[(m+1)/2\right]}{2a^{(m+1)/2}} \tag{3.41}$$

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{(n-2)!!\sqrt{\pi}}{2^{(n-1)/2}} \tag{3.42}$$

(3.40)'daki integral hesaplanırsa, (3.38)'deki integral,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\exp\left(-u^2\right)du = \sqrt{\pi} \sum_{\substack{k=0 \\ k\rightarrow\text{çift}}}^{\infty} \frac{f^k(0)}{k!} \frac{(k-1)!!}{2^{k/2}} \tag{3.43}$$

biçiminde ifade edilmektedir. (3.39) ve (3.43) ifadeleri kullanılarak, (3.33)'teki çiftsel hata olasılığı,

$$P\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\left\{\prod_{i=1}^{n_T}\frac{1}{1+\dfrac{\Delta_i}{\sin^2\theta}}\exp\left(-\Phi_i\left(\theta\right)\right)\right.$$

$$\left.\text{x}\quad\left(1+\sum_{\substack{k=2\\ k\rightarrow\text{çift}}}^{\infty}\frac{(k-1)!!}{k!}\left(2\sigma_\mu\right)^k\sum_{t=1}^{k}g_{k,t}\left(\Phi_i\left(\theta\right)\right)^t\right)\right\}^{n_R}\ d\theta \tag{3.44}$$

olarak elde edilmektedir [18]. Burada $\Phi_i\left(\theta\right)$,

$$\Phi_i\left(\theta\right)=\frac{1}{2\sigma^2}\frac{\dfrac{\Delta_i}{\sin^2\theta}}{1+\dfrac{\Delta_i}{\sin^2\theta}}\exp\left(2m_\mu\right) \tag{3.45}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. (3.44)'teki ifade, Rician-lognormal sönümlemeli kanaldaki çiftsel hata olasılığının tam ifadesidir. Gölgelemeli olmayan durumda, baskın bileşen rastlantı değişkeni olmamakta ve sabit bir değer almaktadır ($\mu_{j,i} = \exp(m_\mu)$). Rayleigh sönümlemeli durum için $\sigma_\mu^2=0$, $\sigma^2 = 0.5$ ve $m_\mu \rightarrow -\infty$ (baskın bileşen $\mu_{j,i} = 0$) olacaktır. Bu durumda çiftsel hata olasılığı,

$$P(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\left\{\prod_{i=1}^{n_T}1+\frac{E_s}{4N_0}\frac{\lambda_i}{\sin^2\theta}\right\}^{-n_R}d\theta \tag{3.46}$$

olarak elde edilmektedir [18]. Burada λ_i aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\lambda_i=\sum_{t=1}^{L}\left|x_t^i-\hat{x}_t^i\right|^2. \tag{3.47}$$

Bu sonuç [34]'de elde edilen sonuç ile aynıdır [18]. Rician durumu için ise, $\sigma_\mu^2=0$, $\sigma^2 = 0.5$ ve $m_\mu = c$ gibi sabit bir değer olacaktır (baskın bileşen sabit bir değer). Bu durumda çiftsel hata olasılığı,

$$P(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\left\{\prod_{i=1}^{n_T}\frac{1}{1+\dfrac{E_s}{4N_0}\dfrac{\lambda_i}{\sin^2\theta}}\exp\left(-\frac{K_i\dfrac{E_s}{4N_0}\dfrac{\lambda_i}{\sin^2\theta}}{1+\dfrac{E_s}{4N_0}\dfrac{\lambda_i}{\sin^2\theta}}\right)\right\}^{n_R}d\theta \tag{3.48}$$

olarak elde edilmektedir ($K_i = \mu_{j,i}^2 = \exp(2m_\mu)$). Yüksek işaret gürültü oranları için Rician-lognormal kanaldaki hata olasılığının üst sınırı, (3.44) ifadesinde $\theta = \pi/2$ yazılarak elde edilmektedir [30]:

$$P(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}) \le \left(\prod_{i=1}^{r} \lambda_i \right)^{-n_R} \left(\frac{E_s}{4N_0} \right)^{-rn_R} \left[g\left(\sigma, \sigma_\mu, m_\mu\right) \right]^{rn_R} \quad . \tag{3.49}$$

Burada $g\left(\sigma, \sigma_\mu, m_\mu\right)$,

$$g\left(\sigma, \sigma_\mu, m_\mu\right) =$$

$$\frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(2m_\mu\right) \right) \left(1 + \sum_{\substack{k=2 \\ k \to \text{çift}}}^{\infty} \frac{(k-1)!!}{k!} \left(2\sigma_\mu\right)^k \sum_{t=1}^{k} g_{k,t} \left(\frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(2m_\mu\right) \right)^t \right) \tag{3.50}$$

olarak tanımlanmaktadır. Görüldüğü gibi (3.49) ifadesi, $g\left(\sigma, \sigma_\mu, m_\mu\right)$ kısmı hariç Rayleigh kanal için hata olasılığı üst sınırı olan,

$$P\left(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}\right) \le \left(\prod_{i=1}^{r} \lambda_i \right)^{-n_R} \left(\frac{E_S}{4N_0} \right)^{-rn_R} \tag{3.51}$$

ifadesi ile aynıdır. (3.49) ifadesinden de anlaşılacağı gibi, Rician-lognormal sönümlemeli kanaldaki çeşitleme kazancı, Rayleigh kanal için olanla aynıdır. Kodlama kazancına ise $g\left(\sigma, \sigma_\mu, m_\mu\right)$ ek terimi gelmiştir. Bu terim, gölgelemenin derecesini belirleyen kanal parametrelerinden oluşmaktadır ve kodlama kazancındaki gölgelemeden kaynaklanan değişimleri ifade etmektedir [18]. Uzay–zaman kafes kod tasarımında birinci ölçüt, rank ölçütü olduğundan rank ve determinant ölçütü Rician-lognormal kanalda da geçerlidir [18]. Ancak, rn_R'ın küçük değerleri için rank birinci ölçüttür; rn_R'ın büyük değerleri için ($rn_R \ge 4$) Öklid uzaklığı önemlidir. Çeşitlemenin artmasıyla birlikte kanal toplamsal beyaz Gauss gürültülü kanala yakınsamaktadır. Bu durumda da iz ölçütü geçerlidir.

3.2.1.2. Hızlı Sönümlemeli Kanal

Sönümleme katsayılarının bir simge boyunca sabit olduğu ve sadece simgeden simgeye değiştiği hızlı sönümlemeli kanalda karesel Öklid uzaklığı,

$$d_h^2\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right)=\sum_{t=1}^{L}\sum_{j=1}^{n_R}\mathbf{h}_t^j\mathbf{C}\left(\mathbf{x}_t,\hat{\mathbf{x}}_t\right)\left(\mathbf{h}_t^j\right)^H \tag{3.52}$$

olarak (2.72)'de verilmişti. Bu ifadenin (2.29)'da yerine konulması ile koşullu hata olasılığı bulunmaktadır:

$$P\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}|\mathbf{H}\right)=Q\left(\sqrt{\frac{E_S}{2N_0}\sum_{t=1}^{L}\sum_{j=1}^{n_R}\mathbf{h}_t^j\mathbf{C}\left(\mathbf{x}_t,\hat{\mathbf{x}}_t\right)\left(\mathbf{h}_t^j\right)^H}\right). \tag{3.53}$$

Duruğumsu sönümlemeli kanaldakine benzer analizler yapıldığında, hızlı sönümlemeli kanal için çiftsel hata olasılığı,

$$P(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left\{\prod_{t=1}^{L}\frac{1}{1+\dfrac{\Delta_t}{\sin^2\theta}}\exp\left(-\Phi_t\left(\theta\right)\right)\right.$$
$$\left.x\left(1+\sum_{\substack{k=2\\ k\rightarrow\text{çift}}}^{\infty}\frac{(k-1)!!}{k!}\left(2\sigma_\mu\right)^k\sum_{l=1}^{k}g_{k,l}\left(\Phi_t\left(\theta\right)\right)^l\right)\right\}^{n_R}d\theta \tag{3.54}$$

biçiminde elde edilir [18]. Burada $\Phi_t\left(\theta\right)$ ve Δ_t,

$$\Phi_t\left(\theta\right)=\frac{1}{2\sigma^2}\frac{\dfrac{\Delta_t}{\sin^2\theta}}{1+\dfrac{\Delta_t}{\sin^2\theta}}\exp\left(2m_\mu\right) \tag{3.55}$$

$$\Delta_t=\frac{E_s}{4N_0}2\sigma^2\sum_{i=1}^{n_T}\left|x_t^i-\hat{x}_t^i\right|^2 \tag{3.56}$$

olarak tanımlanmaktadır. (3.54)'te integralin içindeki ifade zamana göre çarpımdan oluşmaktadır. Bu ifade, duruğumsu sönümlemeli kanal için ise iletim anten sayısına göre çarpımdan oluşmaktadır. Bu yüzden, hızlı sönümlemeli kanallarda uzay-zaman kodları uzay çeşitlemesi sağlamaz ancak zaman çeşitlemesi sağlar. (3.54) ifadesinde $\sigma_\mu^2=0$, $\sigma^2=0.5$ ve $m_\mu \rightarrow -\infty$ seçildiğinde Rayleigh kanal için çiftsel hata olasılığı,

$$P(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\prod_{t=1}^{L}\left\{1+\frac{E_s}{4N_0}\frac{1}{\sin^2\theta}\sum_{i=1}^{n_T}\left|x_t^i-\hat{x}_t^i\right|^2\right\}^{-n_R}d\theta \tag{3.57}$$

olarak bulunmaktadır. (3.54) ifadesinde $\sigma_\mu^2 = 0$, $\sigma^2 = 0.5$ ve $m_\mu = c$ gibi sabit bir değer seçildiğinde ise Rician kanal için çiftsel hata olasılığı,

$$P(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\prod_{t=1}^{L}\left\{\frac{1}{1+\frac{E_s}{4N_0}\frac{1}{\sin^2\theta}\sum_{i=1}^{n_T}\left|x_t^i-\hat{x}_t^i\right|^2}\right.$$

$$\left. x\ \exp\left(-\frac{K_t\frac{E_s}{4N_0}\frac{1}{\sin^2\theta}\sum_{i=1}^{n_T}\left|x_t^i-\hat{x}_t^i\right|^2}{1+\frac{E_s}{4N_0}\frac{1}{\sin^2\theta}\sum_{i=1}^{n_T}\left|x_t^i-\hat{x}_t^i\right|^2}\right)\right\}^{n_R} d\theta \qquad (3.58)$$

olarak bulunmaktadır. $\mathbf{x} \neq \hat{\mathbf{x}}$ olduğu zamandaki örneklerin sayısı ($1 \le t \le L$) δ_H ile gösterilmektedir. Bu durumda yüksek işaret gürültü oranları için hızlı sönümlemeli Rician-lognormal kanaldaki hata olasılığı üst sınırı, (3.54) ifadesinde $\theta = \pi/2$ yazarak,

$$P(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}) \le \left(\frac{E_s}{4N_0}\right)^{-\delta_H n_R}\left(\prod_{t=1}^{\delta_H}\sum_{i=1}^{n_T}\left|x_t^i-\hat{x}_t^i\right|^2\right)^{-n_R}\left[g\left(\sigma,\sigma_\mu,m_\mu\right)\right]^{\delta_H n_R} \qquad (3.59)$$

olarak bulunmaktadır. Görüldüğü gibi, (3.59) ifadesi $g\left(\sigma,\sigma_\mu,m_\mu\right)$ kısmı hariç Rayleigh kanal için elde edilen hata olasılığı ile aynıdır. Bu yüzden Rayleigh kanal için geçerli olan uzaklık ve çarpım tasarım ölçütü [5], Rician-lognormal kanal için de geçerlidir [18]. $g\left(\sigma,\sigma_\mu,m_\mu\right)$ ifadesi, kodlama kazancındaki gölgeleme etkisinden kaynaklanan değişimleri ifade etmektedir [18]. Ancak, $\delta_H n_R$ 'ın küçük değerleri için bu ölçüt geçerlidir. $\delta_H n_R$ 'ın büyük değerleri için ($\delta_H n_R \ge 4$) Öklid uzaklığı önemlidir. Çeşitlemenin artmasıyla birlikte kanal toplamsal beyaz Gauss gürültülü kanala benzemektedir. Bu durumda da iz ölçütü geçerlidir.

3.2.2. Rician-Nakagami Dağılımlı Kanalda Uzay-Zaman Kafes Kodların Performansı

Gölgelemenin uzay-zaman kafes kodlarındaki etkisini analiz etmek için yapılan çıkarımlarda Rician-Nakagami modeli kullanılırsa, Rician-lognormal modeline nazaran daha basit hesaplamalarla karşılaşıldığı daha önceden belirtilmişti. Bu

nedenle, bu bölümde gölgelemenin uzay-zaman kafes kodlarındaki etkisi Rician-Nakagami modeli kullanılarak gösterilecektir.

Haberleşme sistemi olarak, vericinin (baz istasyonu) n_T antenli ve alıcının (gezgin cihaz) n_R antenli olduğu durum ele alınmıştır. Alıcıda en büyük olabilirlikli kod-çözücü kullanıldığı ve alıcının kanalı bildiği varsayılmıştır. Bu varsayımlar altında, j anteni tarafından t anında alınan işaret (3.14)'teki gibi elde edilmektedir. Sönümleme katsayıları $h_{j,i}^t$ ise t anında, i nolu verici anten ile j nolu alıcı anten arasındaki kanal kazancını ifade etmektedir. Sönümleme katsayıları $h_{j,i}^t$, Rician-Nakagami sönümleme modeline uygun olarak seçilmiştir. Rician ve Rayleigh modeller ise bu durumun özel halidir. $h_{j,i}^t$ değerleri, ortalaması $E[h_{j,i}^t]$ ve varyansı $var(h_{j,i}^t) = \sigma_h^2$ olan bağımsız ve iid kompleks Gauss rastlantı değişkenleri olarak modellenmektedir. Kanalın sönümleme katsayılarının bilindiği varsayılarak, uzay-zaman kafes kodlarının duruğumsu sönümlemeli kanaldaki koşullu hata olasılığı (3.15)'teki gibi bulunmaktadır.

$h_{j,i}$, ortalaması $\mu_h^{j,i}$ ve varyansı σ_h^2 olan kompleks Gauss rastlantı değişkeni olduğundan $\beta_{j,i}$ de kompleks Gauss dağılımlıdır. $\beta_{j,i}$'nin ortalaması ve varyansı, Rician-lognormal kanaldaki gibi sırasıyla (3.17) ve (3.18) ifadeleri ile ifade edilmektedir. $\beta_{j,i}$, $h_{j,i}$ ile aynı varyansa sahip ancak ortalaması farklıdır. Rician-Nakagami dağılımında, baskın bileşen olan $\mu_{j,i}$ Nakagami dağılımlı ve $|\beta_{j,i}|$'nin $\mu_{j,i}$'ye göre koşullu olasılık yoğunluk işlevi ise Rician dağılımlıdır. $\mu_{j,i}$'nin olasılık yoğunluk işlevi,

$$p\left(\mu_{j,i}\right) = \frac{2}{\Gamma(m)}\left(\frac{m}{\Omega}\right)^m \mu_{j,i}^{2m-1} \exp\left(-\frac{m}{\Omega}\mu_{j,i}^2\right) \tag{3.60}$$

olarak ifade edilmektedir. Q işlevinin alternatif formu ve moment üreteç işlevi (MGF) metodu kullanılarak Rician-lognormal durumunda yapılan işlemlerin benzeri yapılırsa, Rician-Nakagami sönümlemeli kanal için koşullu hata olasılığı,

$$P\left(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}} \mid \mu_{j,i}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \prod_{j=1}^{n_R}\prod_{i=1}^{n_T} \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta + \Delta_i} \exp\left(-\frac{\mu_{j,i}^2}{2\sigma^2}\frac{\Delta_i}{\sin^2\theta + \Delta_i}\right) d\theta \tag{3.61}$$

olarak elde edilir [19]. Burada, $\Delta_i = X_i / 2 = (E_s/4N_0)\, 2\sigma^2\, \lambda_i$ olarak tanımlanmaktadır. (3.61)'deki hata olasılığını, koşullu ifadeden kurtarmak için bu ifadenin $\mu_{j,i}$'ye göre beklenen değeri alınmalıdır:

$$P\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\prod_{j=1}^{n_R}\prod_{i=1}^{n_T}\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta+\Delta_i}\frac{2}{\Gamma(m)}\left(\frac{m}{\Omega}\right)^m$$

$$x\int_0^{\infty}\mu_{j,i}^{2m-1}\exp\left(-\mu_{j,i}^2\left(\frac{m}{\Omega}+\frac{1}{2\sigma^2}\frac{\Delta_i}{\sin^2\theta+\Delta_i}\right)\right)d\mu_{j,i}d\theta\ . \qquad (3.62)$$

(3.41) ifadesi yardımıyla, (3.62) ifadesindeki iç integral,

$$\frac{\Gamma(m)}{2\left(\frac{m}{\Omega}+\frac{1}{2\sigma^2}\frac{\Delta_i}{\sin^2\theta+\Delta_i}\right)^m} \qquad (3.63)$$

biçiminde ifade edilmektedir. Bu ifade (3.62)'de yerine yazılırsa, Rician-Nakagami sönümlemeli kanal için çiftsel hata olasılığının tam ifadesi elde edilmektedir [19]:

$$P(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}) = \frac{1}{\pi}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\left\{\prod_{i=1}^{n_T}\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta+\Delta_i}\left(\frac{\sin^2\theta+\Delta_i}{\sin^2\theta+\Delta_i+\frac{\Omega}{m}\frac{\Delta_i}{2\sigma^2}}\right)^m\right\}^{n_R}d\theta\,. \qquad (3.64)$$

Rayleigh sönümlemeli durum için $\sigma^2 = 0.5$ ve $m \rightarrow \infty$ (baskın bileşen $\mu_{j,i} = 0$) olacaktır. Bu durumda çiftsel hata olasılığı,

$$P(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left\{\prod_{i=1}^{n_T}1+\frac{E_s}{4N_0}\frac{\lambda_i}{\sin^2\theta}\right\}^{-n_R}d\theta \qquad (3.65)$$

olarak elde edilir. Burada λ_i aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\lambda_i = \sum_{t=1}^{L}\left|x_t^i-\hat{x}_t^i\right|^2\,. \qquad (3.66)$$

Bu sonuç [34]'de elde edilen sonuç ile aynıdır. Yüksek işaret gürültü oranları için Rician-Nakagami kanaldaki hata olasılığının üst sınırı, (3.64) ifadesinde $\theta = \pi/2$ yazılarak elde edilmektedir [30]:

$$P(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}) \le \left(\frac{E_s}{4N_0}\right)^{-rn_R} \left(\prod_{i=1}^{r}\lambda_i\right)^{-n_R} \left(\left(2\sigma^2\right)^{1/m}\left(1+\frac{\Omega}{m2\sigma^2}\right)\right)^{-mrn_R} . \quad (3.67)$$

Görüldüğü gibi (3.67) ifadesi, son terim hariç Rayleigh kanal için elde edilen hata olasılığı ile aynıdır. (3.67) ifadesinden de anlaşılacağı gibi, Rician-Nakagami sönümlemeli kanaldaki çeşitleme kazancı, Rayleigh kanal için olanla aynıdır. Kodlama kazancına ise m, Ω ve σ parametrelerine bağlı ek bir terim gelmiştir. Bu terim, gölgelemenin derecesini belirleyen kanal parametrelerinden oluşmaktadır ve kodlama kazancındaki gölgelemeden kaynaklanan değişimleri ifade etmektedir [19]. Uzay–zaman kafes kod tasarımında birinci ölçüt, rank ölçütü olduğundan rank ve determinant ölçütü Rician-Nakagami kanalda da geçerlidir [19]. Ancak, rn_R'ın küçük değerleri için rank-determinant ölçütü geçerlidir; rn_R'ın büyük değerleri için ($rn_R \ge 4$) Öklid uzaklığı (iz ölçütü) geçerlidir.

4. UZAY-ZAMAN KAFES KODLARINDA ÇEŞİTLEME DERECESİNE BAĞLI OLARAK GÖLGELEMENİN ETKİSİ

İletilen işaret üzerindeki sönümlemenin etkisi, çeşitlemenin derecesine göre değişiklik göstermektedir. Çeşitleme derecesi arttıkça, kanal toplamsal beyaz Gauss gürültülü kanala yakınsamakta ve sönümlemenin etkisi azalmaktadır. Bu nedenle, uzay-zaman kafes kodlarının Rayleigh ve Rician sönümlemeli kanallardaki tasarım ölçütleri çeşitleme derecesine göre değişiklik göstermektedir. Aynı durum, uzay-zaman kafes kodlarının gölgeleme etkisi altındaki performanslarında da geçerlidir. Uzay-zaman kafes kodları, Rician-lognormal ve Rician-Nakagami sönümlemeli kanallarda çeşitleme derecesine göre farklı tasarım ölçütlerine sahiptir. Çeşitleme kazancının küçük olduğu koşullarda, Rician-lognormal kanalda duruğumsu ile hızlı sönümlemeli durumda [18] ve Rician-Nakagami kanalda duruğumsu sönümlemeli durumda [19] geçerli olan tasarım ölçütleri 3. bölümde gösterilmiştir. Bu bölümde ise çeşitleme derecesinin büyük olduğu koşullarda, Rician-lognormal ve Rician-Nakagami kanallarda duruğumsu ile hızlı sönümlemeli durumda geçerli olan tasarım ölçütleri incelenecektir. Ayrıca, çeşitleme derecesinin küçük olduğu koşullarda Rician-Nakagami kanalda hızlı sönümlemeli durumdaki tasarım ölçütüne de değinilecektir.

4.1. Büyük Çeşitleme Derecesi İçin Rician-lognormal Kanalda Hata Olasılığı

Küçük çeşitleme derecesi için Rician-lognormal kanaldaki çiftsel hata olasılığının tam ifadesi [18] Bölüm 3.2.1'de gösterilmiştir. Burada ise, literatürde daha önceden verilmemiş olan büyük çeşitleme derecesi için Rician-lognormal kanalda hata olasılığının üst sınırı elde edilecek ve tasarım ölçütü verilecektir. Bu işlemler, duruğumsu ve hızlı sönümlemeli kanallar için ayrı ayrı yapılacaktır.

4.1.1. Duruğumsu Sönümlemeli Kanal

Duruğumsu sönümlemeli kanallarda hata olasılığının üst sınırı,

$$P\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}|\mathbf{H}\right) \le \frac{1}{2}\exp\left(-\sum_{j=1}^{n_R}\sum_{i=1}^{n_T}\lambda_i\left|\beta_{j,i}\right|^2\frac{E_S}{4N_0}\right) \tag{4.1}$$

biçiminde ifade edilmektedir. Burada $\beta_{j,i}$,

$$\beta_{j,i} = \sum_{l=1}^{n_T} h_{j,l} v_{l,i}^* \tag{4.2}$$

olarak tanımlanmaktadır. $v_{l,i}$ 'ler **A** matrisinin özvektör matrisi **V**'nin elemanlarıdır. $h_{j,i}$, ortalaması $\mu_h^{j,i}$ ve varyansı σ_h^2 olan kompleks Gauss rastlantı değişkenidir. **V**'nin satırları $(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_{n_T}})$ ise ortonormal vektör uzayının bazlarıdır. Bu durumda $\beta_{j,i}$ de kompleks Gauss dağılımlıdır. $\beta_{j,i}$'nin ortalaması ve varyansı,

$$\begin{aligned}\mu_{j,i} &= E\left[\beta_{j,i}\right] = E\left[\sum_{l=1}^{n_T} h_{j,l} v_{i,l}^*\right] = \sum_{l=1}^{n_T} E\left[h_{j,l}\right] v_{i,l}^* \\ &= \left[\mu_h^{j,1}, \mu_h^{j,2}, ..., \mu_h^{j,n_T}\right].\mathbf{v_i}\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \mathrm{var}\left[\beta_{j,i}\right] = \sum_{l=1}^{n_T} \mathrm{var}\left[h_{j,l} v_{i,l}^*\right] = \mathrm{var}\left[h_{j,i}\right]\sum_{l=1}^{n_T}\left|v_{i,l}^*\right|^2 \\ &= \sigma_h^2\end{aligned} \tag{4.4}$$

olarak elde edilmektedir. (4.1) ifadesindeki üst sınır görüldüğü gibi koşullu hata olasılığına aittir. Koşulsuz hata olasılığının üst sınırını bulmak için (4.1) ifadesinin $|\beta_{j,i}|$'ye göre beklenen değerinin alınması gerekmektedir. $\beta_{j,i}$ kompleks Gauss dağılımlı olduğuna göre $|\beta_{j,i}|$ rastlantı değişkeni Rician dağılımlıdır ($\mu_{j,i}$'nin bilindiği varsayılıyor). $|\beta_{j,i}|$ Rician dağılımlı olduğuna göre $|\beta_{j,i}|^2$ ifadesi de serbestlik derecesi 2 ve merkeziyetsizlik parametresi $S = \left|\mu_{j,i}\right|^2$ olan merkezi olmayan chi-square dağılımına ($\mu_{j,i}$'nin bilindiği varsayılıyor) sahiptir [23]. Kısacası, $|\beta_{j,i}|^2$ ifadesinin $\mu_{j,i}$'ye göre koşullu dağılımı, merkezi olmayan chi-square dağılımlıdır ve olasılık yoğunluk işlevi,

$$p\left(\left|\beta_{j,i}\right|^2 \left|\mu_{j,i}\right.\right) = \frac{1}{2\sigma^2}\exp\left(\frac{-\left|\beta_{j,i}\right|^2 - \mu_{j,i}^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{\left|\beta_{j,i}\right|\mu_{j,i}}{\sigma^2}\right) \tag{4.5}$$

olarak verilmektedir [23]. Burada baskın işaretin enerjisi $\mu_{j,i}^2$ olmaktadır. Rician ve Rayleigh sönümlemeli durumlarda, $\mu_{j,i}$ sabit bir değer olduğundan (Rayleigh de sıfır), bu olasılık yoğunluk işlevi $\mu_{j,i}$'ye göre koşullu olmamaktadır. Rician-lognormal dağılımda ise baskın bileşen olan $\mu_{j,i}$ ($\beta_{j,i}$'nin ortalaması) lognormal dağılımlı ve $|\beta_{j,i}|^2$'nin $\mu_{j,i}$'ye göre koşullu olasılık yoğunluk işlevi merkezi olmayan chi-square dağılımlıdır. Merkezi olmayan chi-square dağılımlı $|\beta_{j,i}|^2$ ifadesinin ortalama ve varyansı,

$$\mu_{\left|\beta_{j,i}\right|^2} = 2\sigma^2 + \left|\mu_{j,i}\right|^2 \tag{4.6}$$

$$\sigma^2_{\left|\beta_{j,i}\right|^2} = 4\sigma^4 + 4\sigma^2\left|\mu_{j,i}\right|^2 \tag{4.7}$$

biçiminde ifade edilmektedir. (4.1) ifadesindeki eşitsizliğin sağ tarafında rn_R adet (r adet sıfırdan farklı λ_i olduğundan) istatistiksel bağımsız merkezi olmayan chi-square dağılımlı rastlantı değişkeni bulunmaktadır. rn_R değerinin büyük olduğu durumlarda ($rn_R \geq 4$), merkezi limit kuralına göre [24],

$$D = \sum_{j=1}^{n_R}\sum_{i=1}^{n_T}\lambda_i\left|\beta_{j,i}\right|^2$$

biçiminde tanımlanan D rastlantı değişkeni, ortalama ve varyansı

$$\mu_D = \sum_{j=1}^{n_R}\sum_{i=1}^{n_T}\lambda_i\left(2\sigma^2 + \left|\mu_{j,i}\right|^2\right) \tag{4.8}$$

$$\sigma_D^2 = \sum_{j=1}^{n_R}\sum_{i=1}^{n_T}\lambda_i^2\left(4\sigma^4 + 4\sigma^2\left|\mu_{j,i}\right|^2\right) \tag{4.9}$$

olan Gauss dağılımlı bir rastlantı değişkenine yaklaşmaktadır [13]. Koşulsuz hata olasılığının elde edilmesi için (4.1) ifadesinin D Gauss rastlantı değişkenine göre beklenen değerinin alınması gerekmektedir:

$$P\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\middle|\mu_{j,i}\right)\le\int_{D=0}^{+\infty}\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{E_S}{4N_0}D\right)p(D)\,dD\ . \tag{4.10}$$

Burada p(D), D Gauss rastlantı değişkeninin olasılık yoğunluk işlevidir. (4.10) ifadesindeki eşitsizliğin sağ tarafındaki integral,

$$\int_{D=0}^{+\infty}\exp(-\gamma D)p(D)\,dD=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_D^2}}\int_{0}^{+\infty}\exp(-\gamma D)\exp\left(-\frac{(D-\mu_D)^2}{2\sigma_D^2}\right)dD$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_D^2}}\int_{0}^{+\infty}\exp(-\gamma D)\exp\left(-\frac{D^2}{2\sigma_D^2}+\frac{D\mu_D}{\sigma_D^2}-\frac{\mu_D^2}{2\sigma_D^2}\right)dD \tag{4.11}$$

biçiminde yazılabilmektedir. Bu integral,

$$\int_{0}^{\infty}\exp\left(-\left(ax^2+bx+c\right)\right)dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left(\left(b^2-4ac\right)/4a\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right) \tag{4.12a}$$

$$\operatorname{erfc}(x)=2Q\left(\sqrt{2}x\right) \tag{4.12b}$$

$$a=\frac{1}{2\sigma_D^2}\ ,\ b=\frac{\gamma\sigma_D^2-\mu_D}{\sigma_D^2}\ ,\ c=\frac{\mu_D^2}{2\sigma_D^2} \tag{4.12c}$$

ifadeleri yardımıyla çözülerek, çiftsel hata olasılığı üst sınırı

$$P\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\middle|\mu_{j,i}\right)\le\frac{1}{2}\exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{E_S}{4N_0}\right)^2\sigma_D^2-\frac{E_S}{4N_0}\mu_D\right)Q\left(\frac{E_S}{4N_0}\sigma_D-\frac{\mu_D}{\sigma_D}\right)$$

$$\le\frac{1}{4}\exp\left(-\frac{\mu_D^2}{2\sigma_D^2}\right) \tag{4.13}$$

şeklinde bulunmaktadır [16]. D Gauss rastlantı değişkenin ortalaması ve varyansı (4.13)'te yerine konursa,

$$P\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\middle|\mu_{j,i}\right)\le\frac{1}{4}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left[\sum_{j=1}^{n_R}\sum_{i=1}^{n_T}\lambda_i\left(2\sigma^2+\left|\mu_{j,i}\right|^2\right)\right]^2}{\sum_{j=1}^{n_R}\sum_{i=1}^{n_T}\lambda_i^2\left(4\sigma^4+4\sigma^2\left|\mu_{j,i}\right|^2\right)}\right) \tag{4.14}$$

elde edilir. (4.14) ifadesinin lognormal dağılımlı $\mu_{j,i}$'ye göre beklenen değeri alınırsa, koşulsuz hata olasılığının üst sınırı bulunmaktadır:

$$P\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right) \le \frac{1}{4}\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left[\sum_{j=1}^{n_R}\sum_{i=1}^{n_T}\lambda_i\left(2\sigma^2+\left|\mu_{j,i}\right|^2\right)\right]^2}{\sum_{j=1}^{n_R}\sum_{i=1}^{n_T}\lambda_i^2\left(4\sigma^4+4\sigma^2\left|\mu_{j,i}\right|^2\right)}\right)$$

$$x\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\mu\mu_{j,i}}\exp\left(-\frac{\left(\ln\mu_{j,i}-m_\mu\right)^2}{2\sigma_\mu{}^2}\right)d\mu_{j,i}\,. \qquad (4.15)$$

Burada $u_{j,i} = \left(\ln\mu_{j,i} - m_\mu\right)\Big/\sqrt{2\sigma_\mu^2}$ değişken dönüşümü yapılırsa,

$$\mu_{j,i}^2 = \exp\left(2u_{j,i}\sqrt{2\sigma_\mu^2}+2m_\mu\right) \qquad (4.16a)$$

$$du_{j,i} = \frac{d\mu_{j,i}}{\mu_{j,i}\sqrt{2\sigma_\mu^2}} \qquad (4.16b)$$

ifadeleri yardımıyla

$$P\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right) \le \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left[\sum_{j=1}^{n_R}\sum_{i=1}^{n_T}\lambda_i\left(2\sigma^2+\exp\left(2u_{j,i}\sqrt{2\sigma_\mu^2}+2m_\mu\right)\right)\right]^2}{\sum_{j=1}^{n_R}\sum_{i=1}^{n_T}\lambda_i^2\left(4\sigma^4+4\sigma^2\exp\left(2u_{j,i}\sqrt{2\sigma_\mu^2}+2m_\mu\right)\right)}\right)$$

$$x\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-u_{j,i}^2\right)d\mu_{j,i} \qquad (4.17)$$

elde edilir. Görüldüğü gibi integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\exp\left(-u^2\right)du$ formatındadır ve bu ifade sonsuz bir toplam ile ifade edilebilmektedir [18]. Burada f(u) işlevi,

$$f(u)=\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left[\sum_{j=1}^{n_R}\sum_{i=1}^{n_T}\lambda_i\left(2\sigma^2+\exp\left(2u_{j,i}\sqrt{2\sigma_\mu^2+2m_\mu}\right)\right)\right]^2}{\sum_{j=1}^{n_R}\sum_{i=1}^{n_T}\lambda_i^2\left(4\sigma^4+4\sigma^2\exp\left(2u_{j,i}\sqrt{2\sigma_\mu^2+2m_\mu}\right)\right)}\right) \tag{4.18}$$

biçiminde ifade edilmektedir. f(u) işlevini u = 0'da Taylor serisine açtığımızda,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\exp\left(-u^2\right)du=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^k(0)}{k!}\int_{-\infty}^{\infty}u^k\exp\left(-u^2\right)du \tag{4.19}$$

elde edilmektedir. $f^k(0)$, Taylor serisinin katsayılarıdır. Açıkça görüldüğü gibi, (4.19)'daki ifadenin sağındaki integral k'nın tek değerleri için sıfırdır:

$$\int_{-\infty}^{\infty}u^k\exp\left(-u^2\right)du=\begin{cases}2\int_0^{\infty}u^k\exp\left(-u^2\right)du & , \quad k \text{ çift ise}\\ 0 & , \quad k \text{ tek ise}\end{cases}. \tag{4.20}$$

Aşağıdaki ifadelerin yardımıyla [33],

$$\int_0^{\infty}x^m\exp\left(-ax^2\right)dx=\frac{\Gamma\left[(m+1)/2\right]}{2a^{(m+1)/2}} \tag{4.21a}$$

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)=\frac{(n-2)!!\sqrt{\pi}}{2^{(n-1)/2}} \tag{4.21b}$$

$$n!=(n-1)!!n!! \tag{4.21c}$$

(4.20)'deki integral hesaplanırsa (4.19)'daki integral,

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\exp\left(-u^2\right)du=\sqrt{\pi}\sum_{\substack{k=0\\ k\rightarrow\text{çift}}}^{\infty}\frac{f^k(0)}{k!!}\frac{1}{2^{k/2}} \tag{4.22}$$

olarak ifade edilmektedir. (4.22) ifadesi kullanılarak, (4.17)'deki çiftsel hata olasılığı üst sınırı,

$$P\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right)\le\frac{1}{4}\sum_{\substack{k=0\\ k\rightarrow\text{çift}}}^{\infty}\frac{f^k(0)}{k!!}\frac{1}{2^{k/2}} \tag{4.23}$$

biçiminde elde edilmektedir. k değişkeninin artan değerleri için ($k!!\ 2^{k/2}$) ifadesi hızla artacağından dolayı hata olasılığı üst sınırı değeri fazla etkilenmemektedir. (4.23) ifadesinde k'nın sıfırdan büyük değerlerinin ele alınması, üst sınır değerinde belirgin bir değişime sebep olmamaktadır. Dolayısıyla hata olasılığı üst sınırı sadece k = 0 değeri ele alınarak,

$$P\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right) \le \frac{1}{4} f\left(0\right) \tag{4.24}$$

biçiminde yazılabilir. f(0) ifadesi ise,

$$f\left(0\right) = \exp\left(-\frac{1}{2} n_R \frac{\left[\sum_{i=1}^{r} \lambda_i\right]^2}{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2} \frac{\left(2\sigma^2 + \exp\left(2m_\mu\right)\right)^2}{\left(4\sigma^4 + 4\sigma^2 \exp\left(2m_\mu\right)\right)} \right) \tag{4.25}$$

biçiminde elde edilmektedir. Uzay-zaman kafes kodunun,

$$\frac{E_S}{4N_0} \ge \frac{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i}{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2} \tag{4.26}$$

koşulunu sağlayacak kadar yüksek işaret gürültü oranlarında çalıştığı varsayımı yapılırsa [16], f(0) ifadesi aşağıdaki gibi bulunmaktadır:

$$f\left(0\right) = \exp\left(-\frac{1}{2} n_R \frac{\left(2\sigma^2 + \exp\left(2m_\mu\right)\right)^2}{\left(4\sigma^4 + 4\sigma^2 \exp\left(2m_\mu\right)\right)} \frac{E_S}{4N_0} \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \right). \tag{4.27}$$

Bu ifade (4.24)'te yerine konursa, Rician-lognormal sönümlemeli kanal için çiftsel hata olasılığının üst sınırı bulunmaktadır:

$$P\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right) \le \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{1}{2} n_R \frac{\left(2\sigma^2 + \exp\left(2m_\mu\right)\right)^2}{\left(4\sigma^4 + 4\sigma^2 \exp\left(2m_\mu\right)\right)} \frac{E_S}{4N_0} \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \right). \tag{4.28}$$

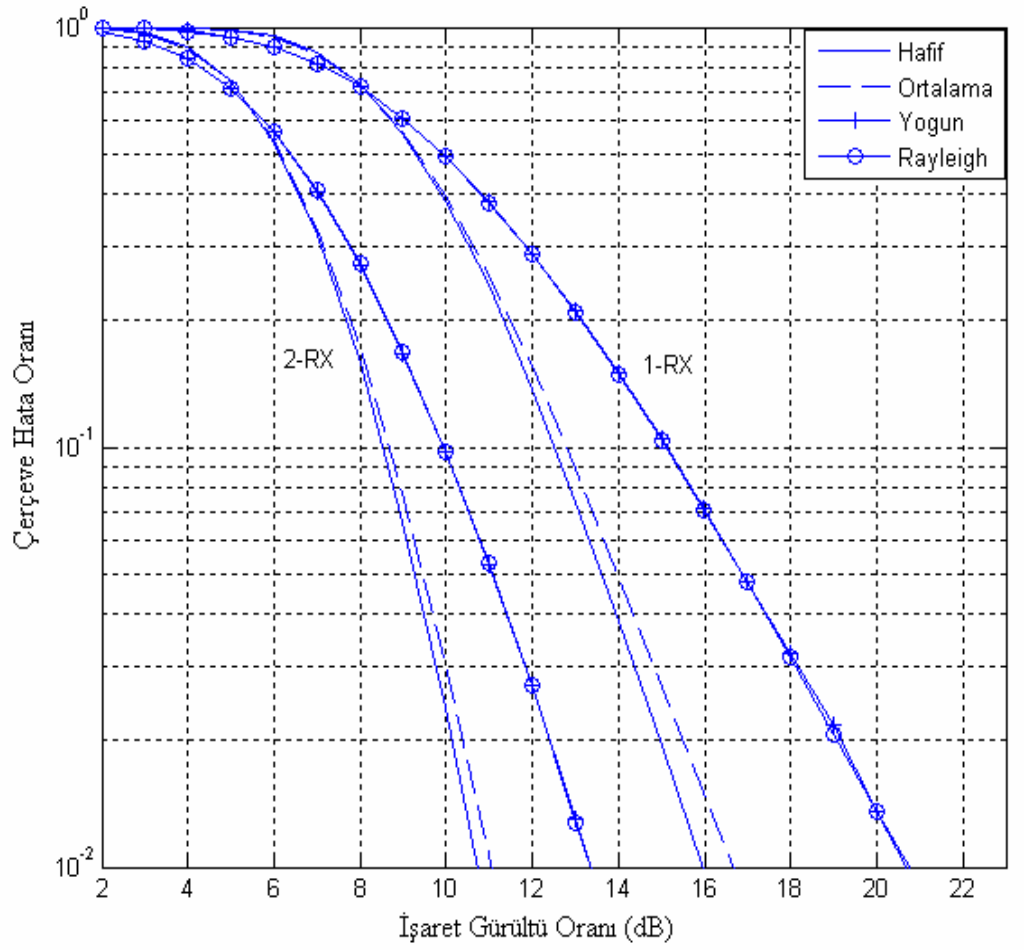
Görüldüğü gibi hata olasılığı değerinde, özdeğerlerin toplamı etkindir. Hata başarımını iyileştirmek için özdeğerlerin toplamının en küçük değerinin, mümkün olduğunca büyük olması sağlanmalıdır. Bu yüzden, tüm kodsözcükleri arasındaki karesel Öklid uzaklığının en küçük değerinin, alabileceği en büyük değeri alması gerekmektedir. Anlaşılacağı gibi, çeşitleme derecesinin büyük olduğu durumda ($rn_R \geq 4$), Rayleigh sönümlemeli kanal için geçerli olan iz ölçütü Rician-lognormal sönümlemeli kanalda da geçerlidir.

Bulunan bu sonuçları desteklemek için bilgisayar benzetimi yapılarak, uzay-zaman kafes kodlarının hata başarım eğrileri çizdirilmiştir. Kod olarak rank ve determinant ölçütüne göre tasarlanmış olan TSC [5] ve iz ölçütüne göre tasarlanmış olan CVY [12] uzay-zaman kafes kodları kullanılmıştır. Kanal olarak ise Rician-lognormal modeline uygun olarak, literatürde parametreleri verilmiş olan Canadian Mobile Satellite kanalı seçilmiştir [28, 35]. Bu kanalda, etkisine göre 3 tip gölgeleme bulunmaktadır: yoğun (heavy), ortalama (average) ve hafif (light) gölgeleme. Farklı gölgeleme türleri için gölgeleme parametrelerinin değerleri (σ^2, m_μ, σ_μ) Tablo 4.1'de verilmiştir.

Tablo 4.1. Farklı gölgeleme türleri için Rician-lognormal kanal parametreleri [28, 35]

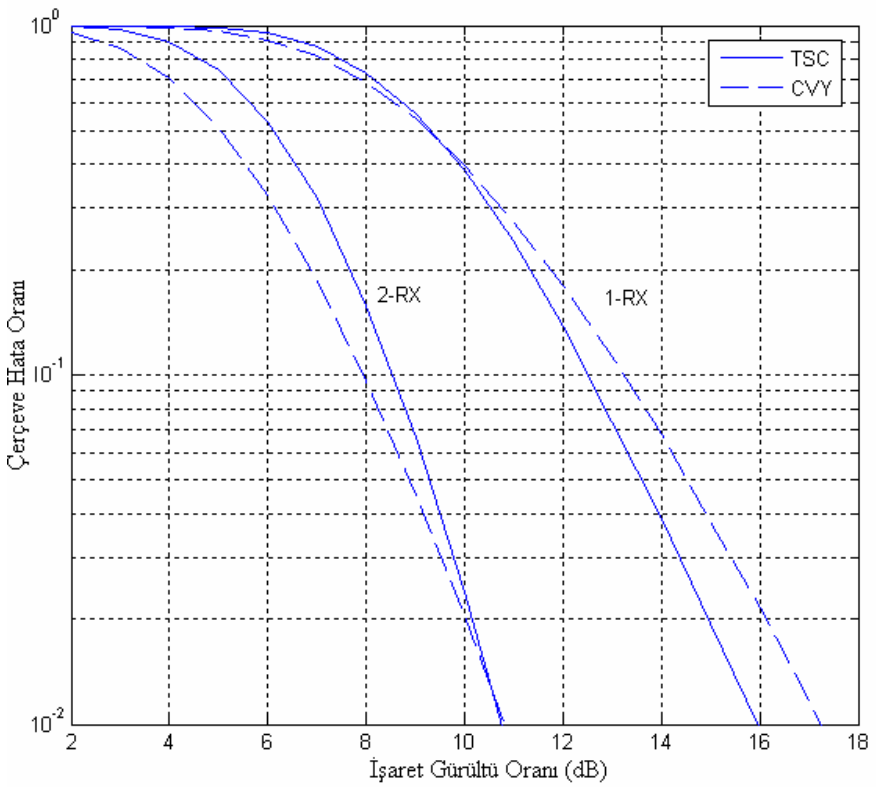
Gölgeleme / Parametreler	Hafif	Ortalama	Yoğun
σ^2	0.158	0.126	0.0631
m_μ	0.115	- 0.115	- 3.91
σ_μ	0.115	0.161	0.806

Şekil 4.1'den görüldüğü gibi, uzay-zaman kafes kodları hafif gölgeleme altında en iyi performansı sağlamaktadır. Ortalama gölgeleme altında hafife yakın bir performans sağlamakta, yoğun gölgeleme altında ise en kötü performansı göstermektedir. Ayrıca yoğun gölgelemedeki performans ile Rayleigh kanaldaki performans çok yakın çıkmaktadır.

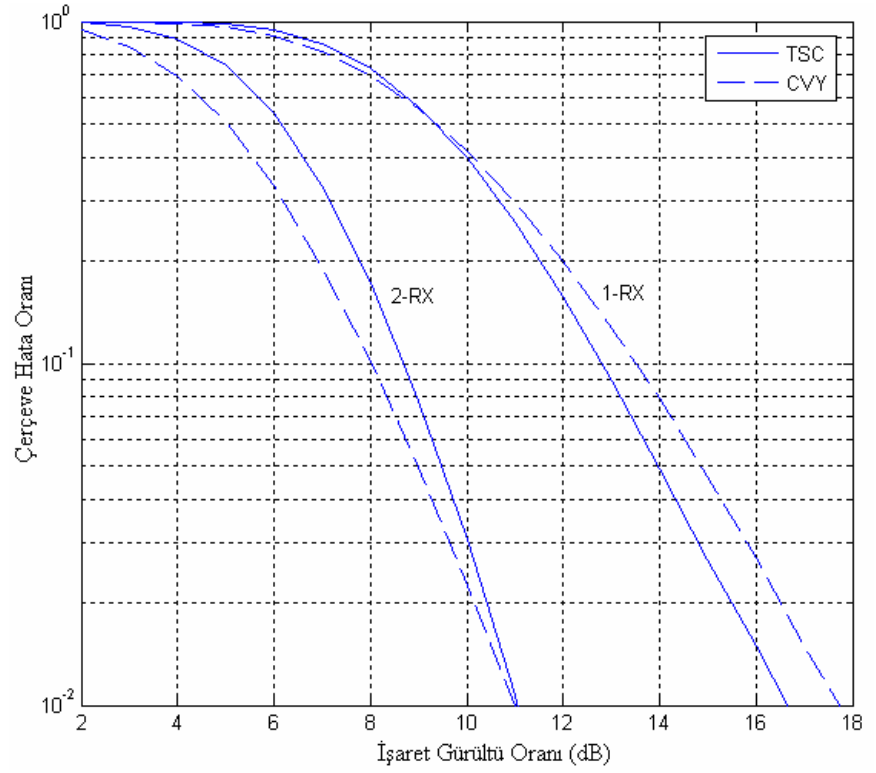


Şekil 4.1 TSC kodun Rician-lognormal kanaldaki performansı

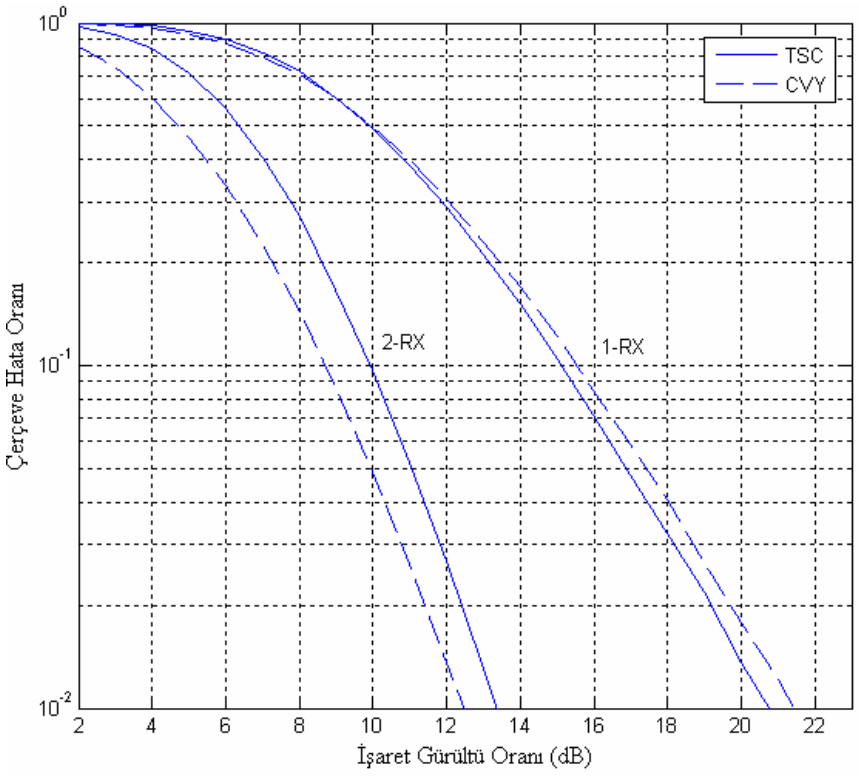
n_T=2 verici, n_R=1 alıcı antenli ve n_T=2 verici, n_R=2 alıcı antenli TSC ile CVY uzay-zaman kafes kodlarının hafif, ortalama ve yoğun gölgelemeli Rician-lognormal kanaldaki performanslarının karşılaştırılması, sırasıyla Şekil 4.2, Şekil 4.3 ve Şekil 4.4'te verilmiştir. Şekil 4.2'den görüldüğü gibi, çeşitleme derecesinin küçük olduğu (2 verici, 1 alıcı antenli) durumda TSC kodu CVY kodundan daha iyi performans göstermektedir. Çeşitleme derecesinin büyük olduğu (2 verici, 2 alıcı antenli) durumda ise CVY kodu TSC kodundan daha iyi bir hata başarımına sahiptir. Bu durum, Şekil 4.3 ile Şekil 4.4'ten açıkça görüldüğü gibi ortalama ve yoğun gölgeleme durumları için de geçerlidir. Bu sonuçlar, çeşitleme derecesinin küçük olduğu durumda rank ve determinant ölçütünün, çeşitleme derecesinin büyük olduğu durumda ise iz ölçütünün geçerli olduğunu göstermektedir.



Şekil 4.2 TSC ve CVY kodlarının hafif gölgelemeli Rician-lognormal kanaldaki performanslarının karşılaştırılması



Şekil 4.3 TSC ve CVY kodlarının ortalama gölgelemeli Rician-lognormal kanaldaki performanslarının karşılaştırılması



Şekil 4.4 TSC ve CVY kodlarının yoğun gölgelemeli Rician-lognormal kanaldaki performanslarının karşılaştırılması

4.1.2. Hızlı Sönümlemeli Kanal

Hızlı sönümlemeli kanallarda çiftsel hata olasılığının üst sınırı aşağıdaki gibidir:

$$P\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\middle|\mathbf{H}\right)\le\frac{1}{2}\exp\left(-\sum_{t\in\rho\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right)}\sum_{j=1}^{n_R}\left|\beta_{j,1}^{t}\right|^2\left|\mathbf{x}_t-\hat{\mathbf{x}}_t\right|^2\frac{E_S}{4N_0}\right). \tag{4.29}$$

Burada $\beta_{j,1}^{t}$ ifadeleri, istatistiksel bağımsız kompleks Gauss rastlantı değişkenleridir. Bu yüzden, $\left|\beta_{j,1}^{t}\right|$ ifadeleri Rician dağılımlıdır. $\left|\beta_{j,1}^{t}\right|^2$ ifadeleri ise, serbestlik derecesi 2 ve merkeziyetsizlik parametresi $S=\left|\mu_{j,1}^{t}\right|^2$ olan merkezi olmayan chi-square dağılımına ($\mu_{j,1}^{t}$'nin bilindiği varsayılıyor) sahiptir. Merkezi olmayan chi-square dağılımlı $\left|\beta_{j,1}^{t}\right|^2$ ifadesinin ortalama ve varyansı,

$$\mu_{\left|\beta_{j,1}^{t}\right|^2}=2\sigma^2+\left|\mu_{j,1}^{t}\right|^2 \tag{4.30}$$

$$\sigma^2_{\left|\beta_{j,1}^{t}\right|^2}=4\sigma^4+4\sigma^2\left|\mu_{j,1}^{t}\right|^2 \tag{4.31}$$

şeklinde verilmektedir. (4.29) ifadesindeki eşitsizliğin sağ tarafında $\delta_H n_R$ adet istatistiksel bağımsız merkezi olmayan chi-square dağılımlı rastlantı değişkeni bulunmaktadır. $\delta_H n_R$ değerinin büyük olduğu durumlarda ($\delta_H n_R \geq 4$), merkezi limit kuralına göre [24],

$$Z = \sum_{t \in \rho(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})} \sum_{j=1}^{n_R} \left|\beta_{j,1}^{t}\right|^2 \left|\mathbf{x_t} - \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right|^2 \tag{4.32}$$

biçiminde tanımlanan Z raslantı değişkeni, ortalama ve varyansı

$$\mu_Z = \sum_{t \in \rho(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})} \sum_{j=1}^{n_R} \left|\mathbf{x_t} - \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right|^2 \left(2\sigma^2 + \left|\mu_{j,1}^{t}\right|^2\right) \tag{4.33}$$

$$\sigma_Z^2 = \sum_{t \in \rho(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})} \sum_{j=1}^{n_R} \left|\mathbf{x_t} - \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right|^4 \left(4\sigma^4 + 4\sigma^2 \left|\mu_{j,1}^{t}\right|^2\right) \tag{4.34}$$

olan Gauss dağılımlı bir rastlantı değişkenine yaklaşmaktadır [16]. Koşulsuz hata olasılığının elde edilmesi için (4.29) ifadesinin Z Gauss rastlantı değişkenine göre beklenen değerinin alınması gerekmektedir:

$$P\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\middle|\mu_{j,1}^{t}\right) \leq \int_{Z=0}^{+\infty} \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_S}{4N_0} Z\right) p(Z)\, dZ . \tag{4.35}$$

Burada p(Z), Z Gauss rastlantı değişkeninin olasılık yoğunluk işlevidir. (4.35) ifadesindeki integral, duruğumsu sönümlemeli kanaldakine benzer şekilde çözülürse, çiftsel hata olasılığının üst sınırı aşağıdaki gibi bulunmaktadır:

$$P\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\middle|\mu_{j,1}^{t}\right) \leq \frac{1}{2} \exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{E_S}{4N_0}\right)^2 \sigma_Z^2 - \frac{E_S}{4N_0}\mu_Z\right) Q\left(\frac{E_S}{4N_0}\sigma_Z - \frac{\mu_Z}{\sigma_Z}\right)$$

$$\leq \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{\mu_Z^2}{2\sigma_Z^2}\right)$$

$$\leq \frac{1}{4}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left[\sum_{t\in\rho(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})}\sum_{j=1}^{n_R}\left|\mathbf{x_t}-\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right|^2\left(2\sigma^2+\left|\mu_{j,1}^t\right|^2\right)\right]^2}{\sum_{t\in\rho(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})}\sum_{j=1}^{n_R}\left|\mathbf{x_t}-\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right|^4\left(4\sigma^4+4\sigma^2\left|\mu_{j,1}^t\right|^2\right)}\right). \tag{4.36}$$

(4.36) ifadesinin lognormal dağılımlı $\mu_{j,1}^t$'ye göre beklenen değeri alınırsa, koşulsuz hata olasılığının üst sınırı bulunmaktadır:

$$P\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right)\leq\frac{1}{4}\int_0^\infty\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left[\sum_{t\in\rho(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})}\sum_{j=1}^{n_R}\left|\mathbf{x_t}-\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right|^2\left(2\sigma^2+\left|\mu_{j,1}^t\right|^2\right)\right]^2}{\sum_{t\in\rho(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})}\sum_{j=1}^{n_R}\left|\mathbf{x_t}-\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right|^4\left(4\sigma^4+4\sigma^2\left|\mu_{j,1}^t\right|^2\right)}\right)$$

$$\text{x}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\mu\mu_{j,1}^t}\exp\left(-\frac{\left(\ln\mu_{j,1}^t-m_\mu\right)^2}{2{\sigma_\mu}^2}\right)d\mu_{j,1}^t. \tag{4.37}$$

Burada $u_{j,1}^t=\left(\ln\mu_{j,1}^t-m_\mu\right)\Big/\sqrt{2\sigma_\mu^2}$ değişken dönüşümü yapılırsa,

$$P\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right)\leq\frac{1}{4}\int_{-\infty}^\infty\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left[\sum_{t\in\rho(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})}\sum_{j=1}^{n_R}\left|\mathbf{x_t}-\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right|^2\left(2\sigma^2+\exp\left(2u_{j,1}^t\sqrt{2\sigma_\mu^2}+2m_\mu\right)\right)\right]^2}{\sum_{t\in\rho(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})}\sum_{j=1}^{n_R}\left|\mathbf{x_t}-\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right|^4\left(4\sigma^4+4\sigma^2\exp\left(2u_{j,1}^t\sqrt{2\sigma_\mu^2}+2m_\mu\right)\right)}\right)$$

$$\text{x}\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\left(u_{j,1}^t\right)^2\right)d\mu_{j,1}^t \tag{4.38}$$

elde edilmektedir. Görüldüğü gibi integral $\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\exp\left(-u^2\right)du$ formatındadır ve bu ifade sonsuz bir toplam ile ifade edilebilmektedir [18]. Burada f(u) işlevi,

$$f(u)=\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left[\sum\limits_{t\in\rho(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})}\sum\limits_{j=1}^{n_R}\left|\mathbf{x_t}-\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right|^2\left(2\sigma^2+\exp\left(2u_{j,1}^{t}\sqrt{2\sigma_\mu^2}+2m_\mu\right)\right)\right]^2}{\sum\limits_{t\in\rho(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})}\sum\limits_{j=1}^{n_R}\left|\mathbf{x_t}-\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right|^4\left(4\sigma^4+4\sigma^2\exp\left(2u_{j,1}^{t}\sqrt{2\sigma_\mu^2}+2m_\mu\right)\right)}\right) \tag{4.39}$$

biçiminde verilmektedir. f(u) işlevini u = 0'da Taylor serisine açtığımızda,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\exp\left(-u^2\right)du=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^k(0)}{k!}\int_{-\infty}^{\infty}u^k\exp\left(-u^2\right)du \tag{4.40}$$

elde edilir. Önceden de belirtildiği gibi, (4.40)'daki ifadenin sağındaki integral k'nın tek değerleri için sıfırdır. Duruğumsu sönümlemeli durumda yapılan çıkarımların benzeri, burada da uygulanırsa çiftsel hata olasılığının üst sınırı,

$$P\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right)\le\frac{1}{4}\sum_{\substack{k=0\\ k\to\text{çift}}}^{\infty}\frac{f^k(0)}{k!!}\frac{1}{2^{k/2}} \tag{4.41}$$

olarak elde edilmektedir. k değişkeninin artan değerleri için ($k!!\ 2^{k/2}$) ifadesi hızla artacağından dolayı hata olasılığı üst sınırı değeri fazla etkilenmemektedir. (4.41) ifadesinde k'nın sıfırdan büyük değerlerinin ele alınması, üst sınır değerinde belirgin bir değişime sebep olmamaktadır. Dolayısıyla hata olasılığı üst sınırı,

$$P\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right)\le\frac{1}{4}f(0) \tag{4.42}$$

biçiminde yazılabilir. f(0) ifadesi ise,

$$f(0)=\exp\left(-\frac{1}{2}n_R\frac{\left[\sum\limits_{t\in\rho(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})}\left|\mathbf{x_t}-\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right|^2\right]^2}{\sum\limits_{t\in\rho(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})}\left|\mathbf{x_t}-\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right|^4}\frac{\left(2\sigma^2+\exp\left(2m_\mu\right)\right)^2}{\left(4\sigma^4+4\sigma^2\exp\left(2m_\mu\right)\right)}\right) \tag{4.43}$$

olarak elde edilmektedir. Uzay-zaman kafes kodunun,

$$\frac{E_S}{4N_0} \geq \frac{\sum_{t\in\rho(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})} \left|\mathbf{x_t} - \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right|^2}{\sum_{t\in\rho(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})} \left|\mathbf{x_t} - \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right|^4} \tag{4.44}$$

koşulunu sağlayacak kadar yüksek işaret gürültü oranlarında çalıştığı varsayımı yapılırsa [16], f(0) ifadesi

$$f(0) = \exp\left(-\frac{1}{2} n_R \frac{\left(2\sigma^2 + \exp\left(2m_\mu\right)\right)^2}{\left(4\sigma^4 + 4\sigma^2 \exp\left(2m_\mu\right)\right)} \frac{E_S}{4N_0} d_E^2 \right) \tag{4.45}$$

olur. Burada d_E^2, aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$d_E^2 = \sum_{t\in\rho(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})} \left|\mathbf{x_t} - \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right|^2 = \sum_{t=1}^{L} \sum_{i=1}^{n_T} \left|x_t^i - \hat{x}_t^i\right|^2 . \tag{4.46}$$

(4.45) ifadesi (4.42)'de yerine konursa, hızlı sönümlemeli Rician-lognormal kanal için çiftsel hata olasılığının üst sınırı,

$$P\left(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}\right) \leq \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{1}{2} n_R \frac{\left(2\sigma^2 + \exp\left(2m_\mu\right)\right)^2}{\left(4\sigma^4 + 4\sigma^2 \exp\left(2m_\mu\right)\right)} \frac{E_S}{4N_0} d_E^2 \right) \tag{4.47}$$

biçiminde bulunmaktadır. Görüldüğü gibi yüksek işaret gürültü oranlarındaki hata olasılığı değerinde, karesel Öklid uzaklığı d_E^2 etkindir. Hata başarımını iyileştirmek için karesel Öklid uzaklığının en küçük değerinin olabildiğince büyük yapılması gerekmektedir. Bu tasarım ölçütü, rn_R değerinin büyük olduğu durumdaki duruğumsu sönümlemeli kanallar için geçerli olan iz ölçütü ile aynıdır. Her ikisi de karesel Öklid uzaklığının en küçük değerinin olabildiğince büyük olmasını önermektedir. Anlaşılacağı gibi, çeşitleme derecesinin büyük olduğu durumda ($\delta_H n_R \geq 4$) hızlı sönümlemeli Rayleigh kanal için geçerli olan tasarım ölçütü (iz ölçütü), hızlı sönümlemeli Rician-lognormal kanalda da geçerlidir.

4.2. Küçük Çeşitleme Derecesi İçin Rician-Nakagami Kanalda Hata Olasılığı

Küçük çeşitleme derecesi için duruğumsu sönümlemeli Rician-Nakagami kanaldaki çiftsel hata olasılığının tam ifadesi [19] Bölüm 3.2.2'de gösterilmiştir. Burada ise, literatürde daha önceden yapılmamış olan küçük çeşitleme derecesi ($\delta_H n_R < 4$) için hızlı sönümlemeli Rician-Nakagami kanalda çiftsel hata olasılığının tam ifadesi elde edilecek ve tasarım ölçütü verilecektir. Hızlı sönümlemeli kanallarda koşullu hata olasılığı,

$$P(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}|\mathbf{H}) = Q\left(\sqrt{\frac{E_S}{2N_0}\sum_{t=1}^{L}\sum_{j=1}^{n_R}\mathbf{h}_t^j\mathbf{C}\left(\mathbf{x}_t, \hat{\mathbf{x}}_t\right)\left(\mathbf{h}_t^j\right)^H}\right) \tag{4.48}$$

şeklinde ifade edilmektedir. Burada toplam sembolü içindeki ifade,

$$\mathbf{h}_t^j\mathbf{C}\left(\mathbf{x}_t, \hat{\mathbf{x}}_t\right)\left(\mathbf{h}_t^j\right)^H = \sum_{i=1}^{n_T}\left|\beta_{j,i}^t\right|^2\lambda_t^i \tag{4.49}$$

olarak tanımlanmaktadır ve $\beta_{j,i}^t = \mathbf{h}_t^j.\mathbf{v}_t^i$ olarak verilmektedir. Her t anı için, sıfırdan farklı özdeğer sayısı en fazla bir tane olabileceğinden (4.49)'da λ_t^i gördüğümüz yere sıfırdan farklı olan özdeğerin kendisini (λ_t^1) yazabiliriz. Bundan dolayı $\beta_{j,1}^t = \mathbf{h}_t^j.\mathbf{v}_t^1$ olmaktadır ve $\mathbf{v}_t^1$ sıfırdan farklı olan özdeğere (λ_t^1) karşı düşen özvektörü ifade etmektedir. Burada $\beta_{j,1}^t$'ler istatistiksel bağımsız kompleks Gauss rastlantı değişkenleridir. Bu yüzden, $\left|\beta_{j,1}^t\right|$'nin $\mu_{j,1}^t$'ye göre koşullu olasılık yoğunluk işlevi, Rician dağılımlıdır:

$$p\left(\left|\beta_{j,1}^t\right|\left|\mu_{j,1}^t\right.\right) = \frac{\left|\beta_{j,1}^t\right|}{\sigma^2}\exp\left(\frac{-\left|\beta_{j,1}^t\right|^2 - \left(\mu_{j,1}^t\right)^2}{2\sigma^2}\right)I_0\left(\frac{\left|\beta_{j,1}^t\right|\mu_{j,1}^t}{\sigma^2}\right). \tag{4.50}$$

Burada baskın işaretin enerjisi $\left(\mu_{j,1}^t\right)^2$ olmaktadır. Rician-Nakagami dağılımında baskın bileşen olan $\mu_{j,1}^t$ ($\beta_{j,1}^t$'nin ortalaması) Nakagami dağılımlıdır. $\mu_{j,1}^t$'nin olasılık yoğunluk işlevi,

$$p\left(\mu_{j,1}^{t}\right)=\frac{2}{\Gamma(m)}\left(\frac{m}{\Omega}\right)^{m}\left(\mu_{j,1}^{t}\right)^{2m-1}\exp\left(-\frac{m}{\Omega}\left(\mu_{j,1}^{t}\right)^{2}\right) \tag{4.51}$$

olarak ifade edilmektedir. Koşulsuz hata olasılığını bulmak için (4.48) ifadesinin $|\beta_{j,1}^{t}|$'ye göre beklenen değerinin alınması gerekmektedir. Beklenen değer alma işlemi için moment üreteç işlevi (MGF) metodu kullanılarak [30], çiftsel hata olasılığının tam ifadesi elde edilecektir. (4.48) ifadesindeki Q işlevinin içindeki rastlantı değişkeni,

$$\Gamma=\sum_{t=1}^{L}\sum_{j=1}^{n_R}\mathbf{h}_{\mathbf{t}}^{\mathbf{j}}\mathbf{C}\left(\mathbf{x}_{\mathbf{t}},\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{t}}\right)\left(\mathbf{h}_{\mathbf{t}}^{\mathbf{j}}\right)^{H} \tag{4.52}$$

şeklinde tanımlansın. Γ rastlantı değişkeni ikinci dereceden, kompleks Gauss rastlantı değişkenidir ve moment üreteç işlevi,

$$\Phi_{\Gamma}\left(s\right)=\prod_{j=1}^{n_R}\prod_{t=1}^{L}\frac{1}{1-sx_t}\exp\left(\frac{sx_t\left|d_t\right|^{2}}{1-sx_t}\right) \tag{4.53}$$

şeklinde verilmektedir. Burada x_t, $(E_s/2N_0)$ $\mathbf{\Sigma}$ $\mathbf{C}$'nin özdeğerleri ve d_t ise $d = E[\mathbf{h}_{\mathbf{t}}^{\mathbf{j}}]$ $\mathbf{V}^{H}$ $\mathbf{\Sigma}^{-1/2}$ vektörünün elemanlarıdır. $\mathbf{\Sigma}$ ise $\mathbf{h}_{\mathbf{t}}^{\mathbf{j}}$'nin kovaryans matrisidir. Bu durumda bu ifadeler,

$$x_t = (E_s/2N_0)\, 2\sigma^2\ \lambda_t^1 \tag{4.54}$$

$$\left|d_t\right|^{2}=\left(\mu_{j,1}^{t}\right)^{2}/2\sigma^{2} \tag{4.55}$$

olarak bulunmaktadır. Q işlevinin alternatif formu kullanılarak, koşullu hata olasılığı ($\mu_{j,1}^{t}$ sabit varsayılıp)

$$P\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\middle|\mu_{j,1}^{t}\right)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\Phi_{\Gamma}\left(-\frac{1}{2\sin^{2}\theta}\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\prod_{j=1}^{n_R}\prod_{t=1}^{L}\frac{1}{1+\dfrac{\Delta_t}{\sin^{2}\theta}}\exp\left(-\frac{\dfrac{\Delta_t}{\sin^{2}\theta}}{1+\dfrac{\Delta_t}{\sin^{2}\theta}}\frac{\left(\mu_{j,1}^{t}\right)^{2}}{2\sigma^{2}}\right)d\theta \tag{4.56}$$

olarak ifade edilebilir. Burada $\Delta_t = (E_S / 4N_0)\, 2\sigma^2\, \lambda_t^1$ olarak tanımlanmaktadır. (4.56)'daki çiftsel hata olasılığını, koşullu ifadeden kurtarmak için bu ifadenin $\mu_{j,l}^t$ 'ye göre beklenen değeri alınmalıdır:

$$P\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left[\prod_{t=1}^{L}\frac{2}{\Gamma(m)}\left(\frac{m}{\Omega}\right)^m\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta+\Delta_t}\int_0^{\infty}\left(\mu_{j,l}^t\right)^{2m-1}\right.$$

$$\left.x\ \exp\left(-\left(\mu_{j,l}^t\right)^2\left(\frac{m}{\Omega}+\frac{1}{2\sigma^2}\frac{\Delta_t}{\sin^2\theta+\Delta_t}\right)\right)d\mu_{j,l}^t\right]^{n_R}d\theta\,. \tag{4.57}$$

(3.41) ifadesi yardımıyla, (4.57) ifadesindeki iç integral,

$$\frac{\Gamma(m)}{2\left(\frac{m}{\Omega}+\frac{1}{2\sigma^2}\frac{\Delta_t}{\sin^2\theta+\Delta_t}\right)^m} \tag{4.58}$$

biçiminde bulunmaktadır. Bu ifade (4.57)'de yerine yazılırsa, hızlı sönümlemeli Rician-Nakagami kanal için çiftsel hata olasılığının tam ifadesi elde edilir:

$$P(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})=\frac{1}{\pi}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\left\{\prod_{t=1}^{L}\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta+\Delta_t}\left(\frac{\sin^2\theta+\Delta_t}{\sin^2\theta+\Delta_t+\frac{\Omega}{m}\frac{\Delta_t}{2\sigma^2}}\right)^m\right\}^{n_R}d\theta\,. \tag{4.59}$$

Rayleigh sönümlemeli durum için $\sigma^2 = 0.5$ ve $m \rightarrow \infty$ (baskın bileşen $\mu_{j,l}^t = 0$) olacaktır. Bu durumda çiftsel hata olasılığı,

$$P(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left\{\prod_{t=1}^{L}1+\frac{E_s}{4N_0}\frac{\lambda_t^1}{\sin^2\theta}\right\}^{-n_R}d\theta \tag{4.60}$$

olmaktadır. Burada λ_t^1 aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\lambda_t^1=\sum_{i=1}^{n_T}\left|x_t^i-\hat{x}_t^i\right|^2\,. \tag{4.61}$$

Bu sonuç [34]'de elde edilen sonuç ile aynıdır. Yüksek işaret gürültü oranları için Rician-Nakagami kanaldaki çiftsel hata olasılığının üst sınırı, (4.59) ifadesinde $\theta = \pi/2$ yazılarak elde edilmektedir:

$$P(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}) \le \frac{1}{2}\left(\frac{E_S}{4N_0}\right)^{-\delta_H n_R}\left(\prod_{t=1}^{\delta_H}\sum_{i=1}^{n_T}\left|x_t^i-\hat{x}_t^i\right|^2\right)^{-n_R}\left(\left(2\sigma^2\right)^{1/m}\left(1+\frac{\Omega}{m2\sigma^2}\right)\right)^{-\delta_H m n_R}. \qquad (4.62)$$

Görüldüğü gibi (4.62) ifadesi, son terim hariç Rayleigh kanal için elde edilen hata olasılığı ile aynıdır. (4.62) ifadesiden de anlaşılacağı gibi, Rician-Nakagami sönümlemeli kanaldaki çeşitleme kazancı, Rayleigh kanal için olanla aynıdır. Kodlama kazancına ise m, Ω ve σ parametrelerine bağlı ek bir terim gelmiştir. Bu terim, gölgelemenin derecesini belirleyen kanal parametrelerinden oluşmaktadır ve kodlama kazancındaki gölgelemeden kaynaklanan değişimleri ifade etmektedir [19]. Küçük çeşitleme derecesi ($\delta_H n_R < 4$) durumunda, hızlı sönümlemeli Rayleigh kanal için geçerli olan tasarım ölçütü (uzaklık-çarpım ölçütü) [5] hızlı sönümlemeli Rician-Nakagami kanal için de geçerlidir.

4.3. Büyük Çeşitleme Derecesi İçin Rician-Nakagami Kanalda Hata Olasılığı

Küçük çeşitleme derecesi için duruğumsu sönümlemeli Rician-Nakagami kanaldaki çiftsel hata olasılığının tam ifadesi [19] Bölüm 3.2.2'de ve hızlı sönümlemeli Rician-Nakagami kanaldaki çiftsel hata olasılığının tam ifadesi ise Bölüm 4.2'de gösterilmiştir. Bu bölümde ise, literatürde daha önceden verilmemiş olan büyük çeşitleme derecesi için Rician-Nakagami kanalda çiftsel hata olasılığının üst sınırı elde edilecek ve tasarım ölçütü verilecektir. Bu işlemler, duruğumsu ve hızlı sönümlemeli kanallar için ayrı ayrı yapılacaktır.

4.3.1. Duruğumsu Sönümlemeli Kanal

Duruğumsu sönümlemeli kanallarda hata olasılığının üst sınırı,

$$P\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\middle|\mathbf{H}\right) \le \frac{1}{2}\exp\left(-\sum_{j=1}^{n_R}\sum_{i=1}^{n_T}\lambda_i\left|\beta_{j,i}\right|^2\frac{E_S}{4N_0}\right) \qquad (4.63)$$

biçiminde ifade edilmektedir. $h_{j,i}$, ortalaması $\mu_h^{j,i}$ ve varyansı σ_h^2 olan kompleks Gauss rastlantı değişkenidir. Bu durumda $\beta_{j,i}$ de kompleks Gauss dağılımlıdır. (4.63)

ifadesindeki üst sınır, görüldüğü gibi koşullu hata olasılığına aittir. Koşulsuz hata olasılığının üst sınırını bulmak için (4.63) ifadesinin $|\beta_{j,i}|$'ye göre beklenen değerinin alınması gerekmektedir. $\beta_{j,i}$ kompleks Gauss dağılımlı olduğuna göre $|\beta_{j,i}|$ rastlantı değişkeni Rician dağılımlıdır ($\mu_{j,i}$'nin bilindiği varsayılıyor). $|\beta_{j,i}|$ Rician dağılımlı olduğuna göre $|\beta_{j,i}|^2$ ifadesi de serbestlik derecesi 2 ve merkeziyetsizlik parametresi $S = \left|\mu_{j,i}\right|^2$ olan merkezi olmayan chi-square dağılımına ($\mu_{j,i}$'nin bilindiği varsayılıyor) sahiptir [23]. Rician-Nakagami dağılımda baskın bileşen olan $\mu_{j,i}$ Nakagami dağılımlıdır.

(4.63) ifadesindeki eşitsizliğin sağ tarafında rn_R adet (r adet sıfırdan farklı λ_i olduğundan) istatistiksel bağımsız merkezi olmayan chi-square dağılımlı rastlantı değişkeni bulunmaktadır. rn_R değerinin büyük olduğu durumlarda ($rn_R \geq 4$), merkezi limit kuralına göre [24], $D = \sum_{j=1}^{n_R}\sum_{i=1}^{n_T}\lambda_i \left|\beta_{j,i}\right|^2$ ifadesi ortalama ve varyansı,

$$\mu_D = \sum_{j=1}^{n_R}\sum_{i=1}^{n_T}\lambda_i\left(2\sigma^2 + \left|\mu_{j,i}\right|^2\right) \tag{4.64}$$

$$\sigma_D^2 = \sum_{j=1}^{n_R}\sum_{i=1}^{n_T}\lambda_i^2\left(4\sigma^4 + 4\sigma^2\left|\mu_{j,i}\right|^2\right) \tag{4.65}$$

olan Gauss dağılımlı bir rastlantı değişkenine yaklaşmaktadır [13]. Koşulsuz hata olasılığının elde edilmesi için (4.63) ifadesinin D Gauss rastlantı değişkenine göre beklenen değerinin alınması gerekmektedir. Rician-lognormal dağılımlı kanal için yapılan hesaplamaların benzeri burada da yapılırsa,

$$P\left(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}\middle|\mu_{j,i}\right) \leq \frac{1}{4}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left[\sum_{j=1}^{n_R}\sum_{i=1}^{n_T}\lambda_i\left(2\sigma^2 + \left|\mu_{j,i}\right|^2\right)\right]^2}{\sum_{j=1}^{n_R}\sum_{i=1}^{n_T}\lambda_i^2\left(4\sigma^4 + 4\sigma^2\left|\mu_{j,i}\right|^2\right)}\right) \tag{4.66}$$

elde edilmektedir. (4.66) ifadesinin Nakagami dağılımlı $\mu_{j,i}$'ye göre beklenen değeri alınırsa, koşulsuz hata olasılığının üst sınırı bulunmaktadır:

$$P\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right)\le\frac{1}{4}\int_{0}^{\infty}f\left(\mu\right)\frac{2}{\Gamma(m)}\left(\frac{m}{\Omega}\right)^{m}\mu_{j,i}^{2m-1}\exp\left(-\frac{m}{\Omega}\mu_{j,i}^{2}\right)d\mu_{j,i}\,. \tag{4.67}$$

Burada,

$$f\left(\mu\right)=\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left[\sum_{j=1}^{n_R}\sum_{i=1}^{n_T}\lambda_i\left(2\sigma^2+\left|\mu_{j,i}\right|^2\right)\right]^2}{\sum_{j=1}^{n_R}\sum_{i=1}^{n_T}\lambda_i^2\left(4\sigma^4+4\sigma^2\left|\mu_{j,i}\right|^2\right)}\right) \tag{4.68}$$

biçiminde tanımlanan f(μ) işlevini μ = a'da Taylor serisine açtığımızda,

$$f\left(\mu\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{k}(a)}{k!}\left(\mu-a\right)^{k} \tag{4.69}$$

elde edilir. Burada a,

$$a=\frac{\Gamma\left(m+0.5\right)}{\Gamma\left(m\right)}\left(\frac{\Omega}{m}\right)^{1/2} \tag{4.70}$$

ile verilen, Nakagami rastlantı değişkeni μ'nün ortalamasıdır [36]. (4.69)'daki $(\mu - a)^k$ ifadesi Binom dağılımı yardımıyla açılırsa,

$$f\left(\mu\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k}\frac{f^{k}(a)}{\left(k-n\right)!n!}\mu^{n}\left(-a\right)^{k-n} \tag{4.71}$$

elde edilmektedir. f(μ) ifadesi, (4.67)'deki hata olasılığı ifadesinde yerine konursa ve (4.21a)'daki ifade kullanılırsa, hata olasılığı üst sınırı,

$$P(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})\le\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k}\frac{f^{k}(a)}{\left(k-n\right)!n!}\left(-1\right)^{k-n}\Gamma\left(m+0.5\right)^{k-n}$$

$$\text{x }\Gamma\left(m\right)^{n-k-1}\left(\frac{\Omega}{m}\right)^{k/2}\Gamma\left(m+\frac{n}{2}\right) \tag{4.72}$$

şeklinde bulunmaktadır. Bu ifade, basitlik olması açısından $f^k(a)$ cinsinden

$$P(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})\le\sum_{k=0}^{\infty}B_k f^{k}(a) \tag{4.73}$$

biçiminde yazılabilir. Burada B_k, $f^k(a)$'nın (4.72)'deki çarpımlarından oluşmaktadır:

$$B_k = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^{k-n}}{(k-n)!n!}\Gamma(m+0.5)^{k-n}\Gamma(m)^{n-k-1}\left(\frac{\Omega}{m}\right)^{k/2}\Gamma\left(m+\frac{n}{2}\right). \tag{4.74}$$

k değişkeninin artan değerleri için B_k ifadesi hızla azalacağından dolayı hata olasılığı üst sınırı değeri fazla etkilenmemektedir. (4.73) ifadesinde k'nın sıfırdan büyük değerlerinin ele alınması, üst sınır değerinde belirgin bir değişime sebep olmamaktadır. Dolayısıyla hata olasılığı üst sınırı sadece k = 0 değeri ele alınarak,

$$P(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}) \le \frac{1}{4}f(a) \tag{4.75}$$

biçiminde yazılabilir. f(a) ifadesi ise,

$$f(a) = \exp\left(-\frac{1}{2}n_R\frac{\left[\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\right]^2}{\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^2}\frac{\left(2\sigma^2+a^2\right)^2}{\left(4\sigma^4+4\sigma^2a^2\right)}\right) \tag{4.76}$$

şeklinde elde edilmektedir. Uzay-zaman kafes kodunun,

$$\frac{E_S}{4N_0} \ge \frac{\sum_{i=1}^{r}\lambda_i}{\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^2} \tag{4.77}$$

koşulunu sağlayacak kadar yüksek işaret gürültü oranlarında çalıştığı varsayımı yapılırsa [16], f(a) ifadesi

$$f(a) = \exp\left(-\frac{1}{2}n_R\frac{\left(2\sigma^2+a^2\right)^2}{4\sigma^2\left(\sigma^2+a^2\right)}\frac{E_S}{4N_0}\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\right) \tag{4.78}$$

biçiminde yazılabilir. Bu ifade (4.75)'te yerine konursa, Rician-Nakagami sönümlemeli kanal için çiftsel hata olasılığının üst sınırı bulunmaktadır:

$$P(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}) \le \frac{1}{4}\exp\left(-\frac{1}{2} n_R \frac{\left(2\sigma^2 + a^2\right)^2}{4\sigma^2\left(\sigma^2 + a^2\right)} \frac{E_S}{4N_0} \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \right). \quad (4.79)$$

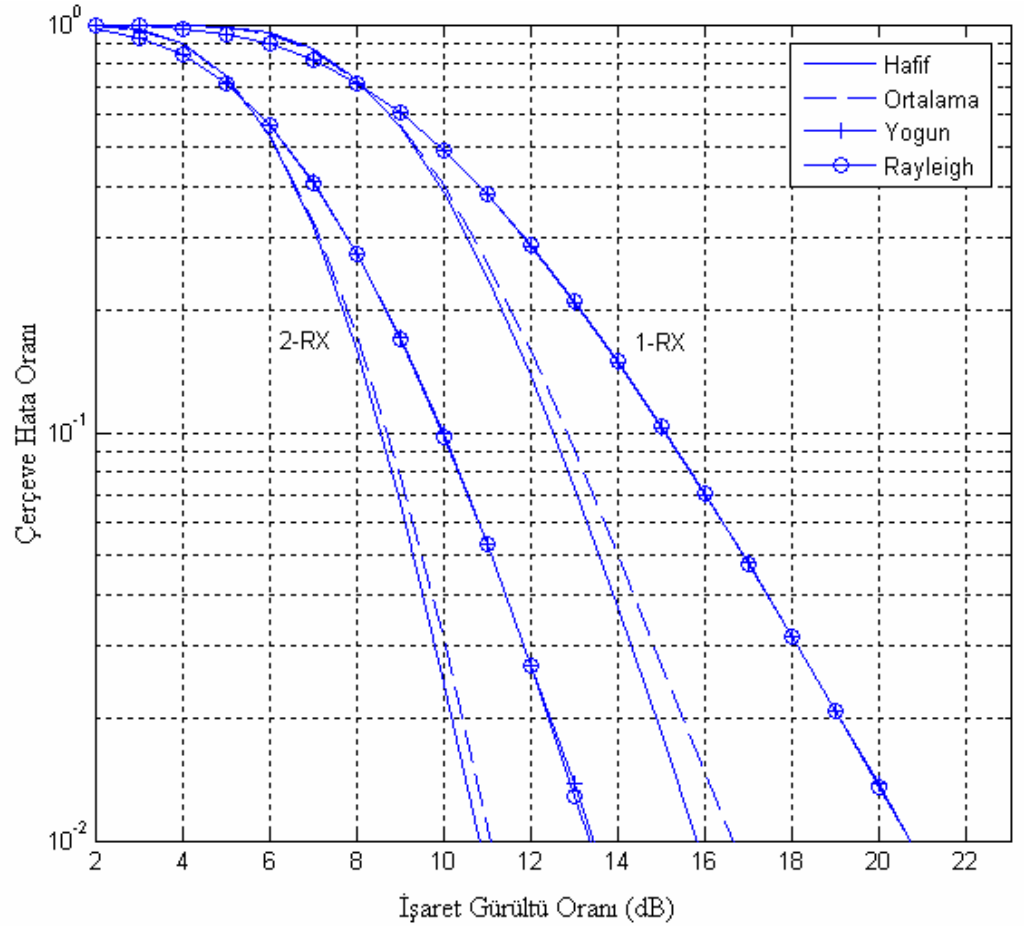
Görüldüğü gibi çiftsel hata olasılığı üst sınırı değerinde, özdeğerlerin toplamı etkindir. Hata başarımını iyileştirmek için özdeğerlerin toplamının en küçük değerinin, mümkün oldukça büyük olması sağlanmalıdır. Bu yüzden, tüm kodsözcükleri arasındaki karesel Öklid uzaklığının en küçük değerinin alabileceği en büyük değeri alması gerekmektedir. Anlaşılacağı gibi, çeşitleme derecesinin büyük olduğu durumda ($rn_R \geq 4$) Rayleigh sönümlemeli kanal için geçerli olan iz ölçütü Rician-Nakagami sönümlemeli kanalda da geçerlidir.

Bulunan bu sonuçları desteklemek için bilgisayar benzetimi yapılarak, uzay-zaman kafes kodlarının hata başarım eğrileri çizdirilmiştir. Kod olarak, rank ve determinant ölçütüne göre tasarlanmış olan TSC [5] ve iz ölçütüne göre tasarlanmış olan CVY [12] uzay-zaman kafes kodları kullanılmıştır. Kanal olarak ise Rician-Nakagami modeline uygun olarak, Canadian Mobile Satellite kanalı seçilmiştir [29]. Bu kanal için farklı gölgeleme türlerine ilişkin gölgeleme parametrelerinin değerleri Tablo 4.2'de verilmiştir.

Tablo 4.2. Farklı gölgeleme türleri için Rician-Nakagami kanal parametreleri [29]

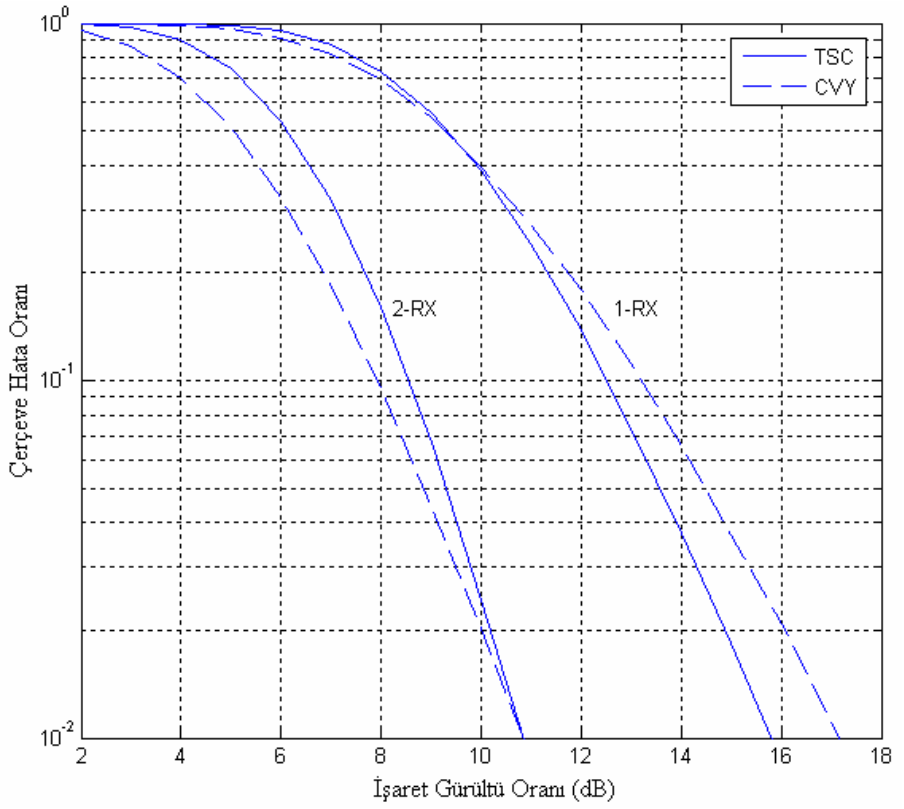
Gölgeleme / Parametreler	Hafif	Ortalama	Yoğun
m	19.4	10.1	0.739
Ω	1.29	0.835	$8.97e^{-4}$

Şekil 4.5'ten görüldüğü gibi, uzay-zaman kafes kodları hafif gölgeleme altında en iyi performansı sağlamaktadır. Ortalama gölgeleme altında hafife yakın bir performans sağlamakta, yoğun gölgeleme altında ise en kötü performansı göstermektedir. Ayrıca yoğun gölgelemedeki performans ile Rayleigh kanaldaki performans çok yakın çıkmaktadır.

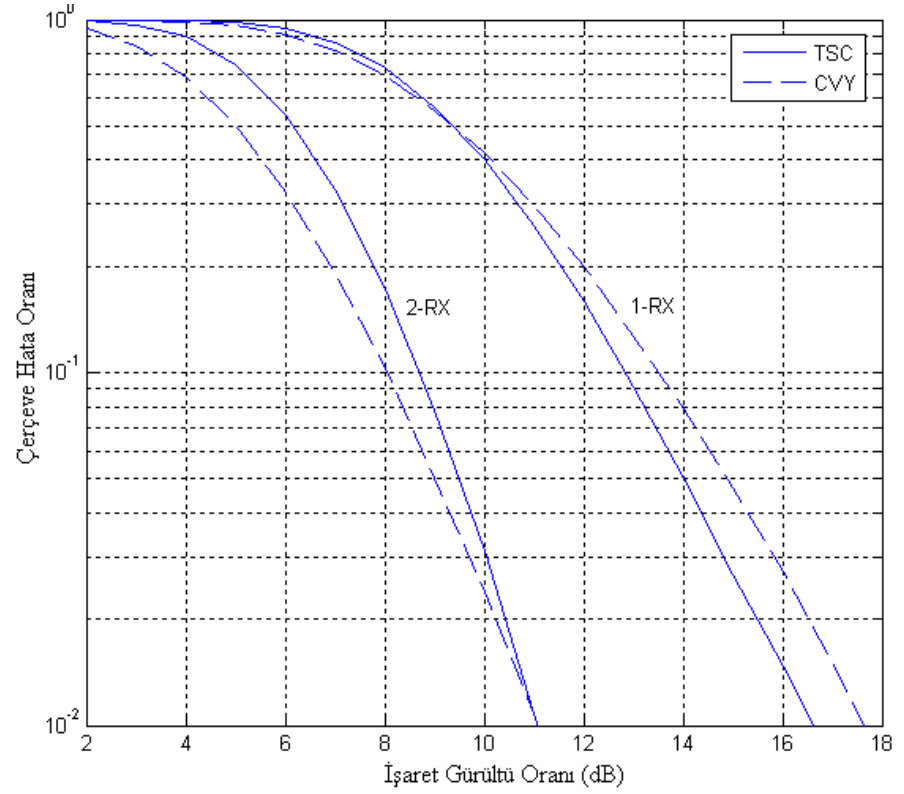


Şekil 4.5 TSC kodun Rician-Nakagami kanaldaki performansı

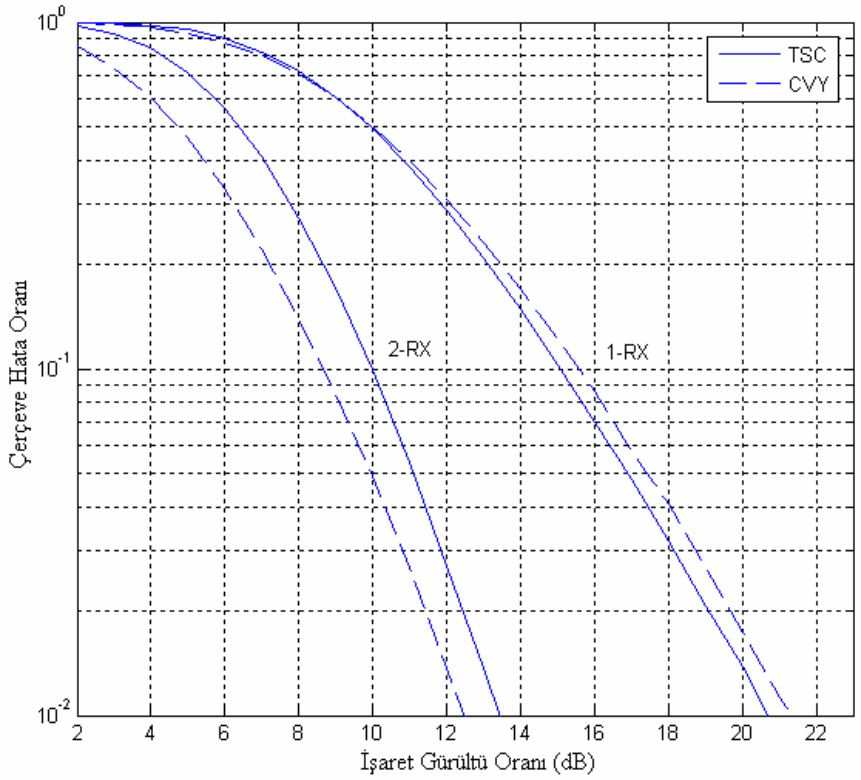
n_T=2 verici, n_R=1 alıcı antenli ve n_T=2 verici, n_R=2 alıcı antenli TSC ile CVY uzay-zaman kafes kodlarının hafif, ortalama ve yoğun gölgelemeli Rician-Nakagami kanaldaki performanslarının karşılaştırılması, sırasıyla Şekil 4.6, Şekil 4.7 ve Şekil 4.8'de verilmiştir. Şekil 4.6'dan görüldüğü gibi, çeşitleme derecesinin küçük olduğu (2 verici, 1 alıcı antenli) durumda TSC kodu CVY kodundan daha iyi performans göstermektedir. Çeşitleme derecesinin büyük olduğu (2 verici, 2 alıcı antenli) durumda ise CVY kodu TSC kodundan daha iyi bir hata başarımına sahiptir. Bu durum, Şekil 4.7 ile Şekil 4.8'den açıkça görüldüğü gibi ortalama ve yoğun gölgeleme durumları için de geçerlidir. Bu sonuçlar, çeşitleme derecesinin küçük olduğu durumda rank ve determinant ölçütünün, çeşitleme derecesinin büyük olduğu durumda ise iz ölçütünün geçerli olduğunu göstermektedir.



Şekil 4.6 TSC ve CVY kodlarının hafif gölgelemeli Rician-Nakagami kanaldaki performanslarının karşılaştırılması



Şekil 4.7 TSC ve CVY kodlarının ortalama gölgelemeli Rician-Nakagami kanaldaki performanslarının karşılaştırılması



Şekil 4.8 TSC ve CVY kodlarının yoğun gölgelemeli Rician-Nakagami kanaldaki performanslarının karşılaştırılması

4.3.2. Hızlı Sönümlemeli Kanal

Hızlı sönümlemeli kanallarda çiftsel hata olasılığının üst sınırı,

$$P\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\middle|\mathbf{H}\right)\le\frac{1}{2}\exp\left(-\sum_{t\in\rho\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\right)}\sum_{j=1}^{n_R}\left|\beta_{j,1}^{t}\right|^2\left|\mathbf{x_t}-\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right|^2\frac{E_S}{4N_0}\right) \tag{4.80}$$

biçiminde verilmektedir. Burada $\beta_{j,1}^{t}$ ifadeleri, istatistiksel bağımsız kompleks Gauss rastlantı değişkenleridir. Bu yüzden, $\left|\beta_{j,1}^{t}\right|$ ifadeleri Rician dağılımlıdır. $\left|\beta_{j,1}^{t}\right|^2$ ifadeleri de serbestlik derecesi 2 ve merkeziyetsizlik parametresi $S=\left|\mu_{j,1}^{t}\right|^2$ olan merkezi olmayan chi-square dağılımına ($\mu_{j,1}^{t}$'nin bilindiği varsayılıyor) sahiptir. Rician-Nakagami dağılımında baskın bileşen olan $\mu_{j,1}^{t}$ Nakagami dağılımlıdır. (4.80) ifadesindeki eşitsizliğin sağ tarafında $\delta_H n_R$ adet istatistiksel bağımsız merkezi olmayan chi-square dağılımlı rastlantı değişkeni bulunmaktadır. $\delta_H n_R$ değerinin büyük olduğu durumlarda ($\delta_H n_R \ge 4$) merkezi limit kuralına göre,

$$Z = \sum_{t\in\rho(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})} \sum_{j=1}^{n_R} \left|\beta_{j,l}^{t}\right|^2 . \left|\mathbf{x_t} - \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right|^2 \tag{4.81}$$

biçiminde tanımlanan Z rastlantı değişkeni, ortalama ve varyansı

$$\mu_Z = \sum_{t\in\rho(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})} \sum_{j=1}^{n_R} \left|\mathbf{x_t} - \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right|^2 \left(2\sigma^2 + \left|\mu_{j,l}^{t}\right|^2\right) \tag{4.82}$$

$$\sigma_Z^2 = \sum_{t\in\rho(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})} \sum_{j=1}^{n_R} \left|\mathbf{x_t} - \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right|^4 \left(4\sigma^4 + 4\sigma^2 \left|\mu_{j,l}^{t}\right|^2\right) \tag{4.83}$$

olan Gauss dağılımlı bir rastlantı değişkenine yaklaşmaktadır [16]. Koşulsuz hata olasılığının elde edilmesi için (4.80) ifadesinin Z Gauss rastlantı değişkenine göre beklenen değerinin alınması gerekmektedir. Duruğumsu sönümlemeli kanal için yapılan işlemlerin benzeri burada da uygulanırsa,

$$P\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}\middle|\mu_{j,l}^{t}\right) \le \frac{1}{4}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left[\sum_{t\in\rho(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})} \sum_{j=1}^{n_R} \left|\mathbf{x_t} - \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right|^2 \left(2\sigma^2 + \left|\mu_{j,l}^{t}\right|^2\right)\right]^2}{\sum_{t\in\rho(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})} \sum_{j=1}^{n_R} \left|\mathbf{x_t} - \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t}\right|^4 \left(4\sigma^4 + 4\sigma^2 \left|\mu_{j,l}^{t}\right|^2\right)}\right) \tag{4.84}$$

elde edilmektedir. (4.84) ifadesinin Nakagami dağılımlı $\mu_{j,l}^{t}$ 'ye göre beklenen değeri alınırsa, koşulsuz hata olasılığının üst sınırı bulunmaktadır. Duruğumsu sönümlemeli kanal için yapılan işlemlerin benzeri burada uygulanırsa, koşulsuz hata olasılığı üst sınırı,

$$P(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}) \le \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k} \frac{f^k(a)}{(k-n)!n!}(-1)^{k-n}\,\Gamma\left(m+0.5\right)^{k-n}$$

$$\text{x}\ \Gamma(m)^{n-k-1}\left(\frac{\Omega}{m}\right)^{k/2}\Gamma\left(m+\frac{n}{2}\right) \tag{4.85}$$

biçiminde bulunmaktadır. Burada f(μ) işlevi,

$$f(\mu) = \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\left[\sum_{t \in \rho(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})} \sum_{j=1}^{n_R} \left| \mathbf{x_t} - \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t} \right|^2 \left(2\sigma^2 + \left| \mu_{j,1}^t \right|^2 \right) \right]^2}{\sum_{t \in \rho(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})} \sum_{j=1}^{n_R} \left| \mathbf{x_t} - \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t} \right|^4 \left(4\sigma^4 + 4\sigma^2 \left| \mu_{j,1}^t \right|^2 \right)} \right) \tag{4.86}$$

olarak tanımlanmaktadır. (4.85)'teki koşulsuz hata olasılığı üst sınırı, basitlik olması açısından $f^k(a)$ cinsinden

$$P(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}) \leq \sum_{k=0}^{\infty} B_k f^k(a) \tag{4.87}$$

olarak yazılabilmektedir. k değişkeninin artan değerleri için B_k ifadesi hızla azalacağından dolayı hata olasılığı üst sınırı değeri fazla etkilenmemektedir. (4.87) ifadesinde k'nın sıfırdan büyük değerlerinin ele alınması, üst sınır değerinde belirgin bir değişime sebep olmamaktadır. Dolayısıyla hata olasılığı üst sınırı,

$$P(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}) \leq \frac{1}{4} f(a) \tag{4.88}$$

biçiminde yazılabilir. f(a) ifadesi ise,

$$f(a) = \exp\left(-\frac{1}{2} n_R \frac{\left[\sum_{t \in \rho(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})} \left| \mathbf{x_t} - \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t} \right|^2 \right]^2}{\sum_{t \in \rho(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})} \left| \mathbf{x_t} - \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t} \right|^4} \frac{\left(2\sigma^2 + a^2 \right)^2}{\left(4\sigma^4 + 4\sigma^2 a^2 \right)} \right) \tag{4.89}$$

şeklinde elde edilmektedir. Uzay-zaman kafes kodunun,

$$\frac{E_S}{4N_0} \geq \frac{\sum_{t \in \rho(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})} \left| \mathbf{x_t} - \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t} \right|^2}{\sum_{t \in \rho(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})} \left| \mathbf{x_t} - \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t} \right|^4} \tag{4.90}$$

koşulunu sağlayacak kadar yüksek işaret gürültü oranlarında çalıştığı varsayımı yapılırsa [16], f(a) ifadesi

$$f(a) = \exp\left(-\frac{1}{2} n_R \frac{\left(2\sigma^2 + a^2\right)^2}{4\sigma^2\left(\sigma^2 + a^2\right)} \frac{E_S}{4N_0} d_E^2 \right) \tag{4.91}$$

biçiminde bulunmaktadır. Burada d_E^2, aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$d_E^2 = \sum_{t \in \rho(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}})} \left| \mathbf{x_t} - \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{t} \right|^2 = \sum_{t=1}^{L} \sum_{i=1}^{n_T} \left| x_t^i - \hat{x}_t^i \right|^2 . \tag{4.92}$$

(4.91) ifadesi (4.88)'de yerine konursa, hızlı sönümlemeli Rician-Nakagami kanal için çiftsel hata olasılığının üst sınırı bulunmaktadır:

$$P(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}) \le \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{1}{2} n_R \frac{\left(2\sigma^2 + a^2\right)^2}{4\sigma^2\left(\sigma^2 + a^2\right)} \frac{E_S}{4N_0} d_E^2 \right). \tag{4.93}$$

Görüldüğü gibi yüksek işaret gürültü oranlarındaki hata olasılığı değerinde, karesel Öklid uzaklığı d_E^2 etkindir. Hata başarımını iyileştirmek için karesel Öklid uzaklığının en küçük değerinin olabildiğince büyük yapılması gerekmektedir. Bu tasarım ölçütü, rn_R değerinin büyük olduğu durumdaki duruğumsu sönümlemeli kanallar için geçerli olan iz ölçütü ile aynıdır. Her ikisi de karesel Öklid uzaklığının en küçük değerinin olabildiğince büyük olmasını önermektedir. Anlaşılacağı gibi, çeşitleme derecesinin büyük olduğu durumda ($\delta_H n_R \ge 4$) hızlı sönümlemeli Rayleigh kanal için geçerli olan tasarım ölçütü (iz ölçütü), hızlı sönümlemeli Rician-Nakagami kanalda da geçerlidir.

5. SONUÇLAR

Bu tezde, uzay-zaman kafes kodlarının gölgeleme etkisi altındaki (Rician-lognormal ve Rician-Nakagami kanallardaki) hata olasılıkları ve tasarım ölçütleri çeşitleme derecesine göre incelenmiştir. Uzay-zaman kafes koduna ait rank değeri ile alıcı anten sayısı çarpımının 4'e eşit veya 4'ten büyük olduğu durumda (büyük çeşitleme derecesi), uzay-zaman kafes kodlarının duruğumsu ve hızlı sönümlemeli Rician-lognormal kanallar için hata olasılığı üst sınırı elde edilmiştir. Bu üst sınır analiz edilerek, büyük çeşitleme dereceleri için Rician-lognormal kanalda iz ölçütünün geçerli olduğu gösterilmiştir. Bu sayede Rician-lognormal kanalda, rank ve determinant ölçütünün sadece uzay-zaman kafes koduna ait rank değeri ile alıcı anten sayısı çarpımının 4'ten küçük olduğu durumda (küçük çeşitleme derecesi) geçerli olduğu da gösterilmiş olmaktadır. Bu sonuçları desteklemek için bilgisayar benzetimleri yapılmıştır. Benzetimlerde, rank ve determinant ölçütüne dayalı olan TSC kodu ile iz ölçütüne dayalı olan CVY kodu karşılaştırılmıştır. Bu kodların, küçük ve büyük çeşitleme derecesi durumunda duruğumsu sönümlemeli Rician-lognormal kanaldaki hata başarımı analiz edilmiştir. Küçük çeşitleme derecesi durumunda, üç farklı gölgeleme (hafif, ortalama, yoğun) için de rank ve determinant ölçütüne dayalı olan kod, iz ölçütüne dayalı koddan daha iyi performans sağlamıştır. Büyük çeşitleme derecesi durumunda ise, üç farklı gölgeleme için de iz ölçütüne dayalı olan kod, rank ve determinant ölçütüne dayalı koddan daha iyi performans sağlamıştır.

Çalışmanın daha sonraki kısımlarında ise, büyük çeşitleme derecesi durumunda uzay-zaman kafes kodlarına ilişkin duruğumsu ve hızlı sönümlemeli Rician-Nakagami kanallar için hata olasılığı üst sınırı elde edilmiştir. Bu üst sınır analiz edilerek büyük çeşitleme dereceleri için Rician-Nakagami kanalda da iz ölçütünün geçerli olduğu gösterilmiştir. Bu sayede Rician-Nakagami kanalda, rank ve determinant ölçütünün sadece küçük çeşitleme derecesi için geçerli olduğu da gösterilmiş olmaktadır. Ayrıca, küçük çeşitleme derecesi durumunda uzay-zaman

kafes kodlarının hızlı sönümlemeli Rician-Nakagami kanaldaki çiftsel hata olasığının tam değeri elde edilmiş ve uzaklık-çarpım ölçütünün geçerli olduğu gösterilmiştir.

Sonuç olarak, uzay-zaman kafes kodlarının Rician-lognormal ve Rician-Nakagami sönümlemeli kanallardaki performansının çeşitleme derecesine bağlı olduğu gösterilmiştir. Rayleigh kanallar için kullanılan tasarım ölçütleri ile bu kanallar için tasarlanmış olan uzay-zaman kafes kodların, Rician-lognormal ve Rician-Nakagami kanallarda da kullanılabileceği ortaya konmuştur.

KAYNAKLAR

[1] **Shannon, C. E.,** 1948. A mathematical theory of communication, *Bell System Technical Journal,* **vol. 27,** 379-423, 623-656.

[2] **Vucetic, B. and Yuan, J.,** 2003. Space-Time Coding, Wiley, New York.

[3] **Foschini, G. J. and Gans, M. J.**, 1998. On limits of wireless communications in a fading environment when using multiple antennas, *Wireless Personal Communications,* **vol. 6,** 311-335.

[4] **Telatar, E.**, 1999. Capacity of multi-antenna Gaussian channels, *European Transactions on Telecommunications,* **vol. 10, no. 6,** 585-595.

[5] **Tarokh, V., Seshadri, N. and Calderbank, A. R.**, 1998. Space-time codes for high-data-rate wireless communication: Performance criterion and code construction, *IEEE Trans. Inform. Theory,* **vol. 44,** 744-765.

[6] **Alamouti, S. M.**, 1998. A simple transmit diversity technique for wireless communications, *IEEE Journal Select. Areas Commun.*, **vol. 16, no. 8**, 1451-1458.

[7] **Baro, S., Bauch, G. and Hansmann, A.**, 2000. Improved codes for space-time trellis-coded modulation, *IEEE Commun. Lett.,* **vol. 4, no. 1,** 20-22.

[8] **Chen, Z., Vucetic, B. S., Yuan, J. and Lo, K. L.**, 2002. Space-time trellis codes for 4-PSK with three and four transmit antennas in quasi-static flat fading channels, *IEEE Commun. Lett.,* **vol. 6, no. 2,** 67-69.

[9] **Chen, Z., Vucetic, B., Yuan, J. and Lo, K. L.**, 2002. Space-time trellis codes for 8-PSK with two, three and four transmit antennas in quasi-static flat fading channels, *IEE Electron. Lett.,* **vol. 38, no. 10,** 462-464.

[10] **Chen, Z., Vucetic, B., Yuan, J. and Lo, K. L.**, 2002. Space-time trellis codes with two, three and four transmit antennas in quasi-static flat fading channels, *Proc. of IEEE ICC'02,* New York, May 2002, s. 1589-1595.

[11] **Yan, Q. and Blum, R. S.**, 2002. Improved space-time convolutional codes for quasi-static slow fading channels, *IEEE Trans. Wireless Commun.,* **vol. 1, no. 4,** 563-571.

[12] **Chen, Z., Yuan, J. and Vucetic, B.**, 2001. Improved space-time trellis coded modulation scheme on slow Rayleigh fading channels, *IEE Electron. Lett.,* **vol. 37, no. 7,** 440-441.

[13] **Chen, Z., Yuan, J. and Vucetic, B.**, 2001. An improved space-time trellis coded modulation scheme on slow Rayleigh fading channels, *Proc. of IEEE ICC'01,* Helsinki, Finland, June 2001, s. 1110-1116.

[14] **Yuan, J., Vucetic, B., Chen, Z. and Firmanto, W.**, 2001. Performance of space-time coding on fading channels, *Proc. of IEEE ISIT'01,* Washington, DC, June 2001, s. 153.

[15] **Firmanto, W.**, **Vucetic, B. S. and Yuan, J.,** 2001. Space-time TCM with improved performance on fast fading channels, *IEEE Commun. Lett.,* **vol. 5, no. 4**, 154-156.

[16] **Yuan, J., Chen, Z., Vucetic, B. and Firmanto, W.**, 2003. Performance and design of space-time coding in fading channels, *IEEE Trans. Commun.,* **vol. 51, no. 12,** 1991-1996.

[17] **Uysal, M. and Georghiades, C. N.,** 2002, Effect of shadowing on the performance of space-time trellis coded systems, *IEEE VTC'02*, Vancouver, Canada, October 2002, s. 2163-2167.

[18] **Uysal, M. and Georghiades, C. N.,** 2004, Effect of shadowing on the performance of space-time trellis coded systems, *IEEE Trans. Wireless Commun.,* **vol. 3, no. 4,** 1037-1042.

[19] **Uysal, M.,** 2004, Pairwise error probability of space-time codes in Rician-Nakagami channels, *IEEE Commun. Lett.,* **vol. 8, no. 3,** 132-134.

[20] **Stüber, G. L.,** 2001. Principles of Mobile Communication (2nd Edition), Kluwer Academic Publishers, Boston.

[21] **Rappaport, T. S.,** 2002. Wireless Communications Principles and Practice (2nd Edition), Prentice-Hall PTR, Upper Saddle River, NJ.

[22] **Horn, R. A. and Johnson, C. R.,** 1985. Matrix Analysis, Cambridge University Press, New York.

[23] **Proakis, J. G.,** 2000. Digital Communications (4th Edition), McGraw-Hill, Boston.

[24] **Papoulis, A.,** 1991. Probability, Random Variables, and Stochastic Processes (3rd Edition), McGraw-Hill, New York.

[25] **Ventura-Traveset, J., Caire, G., Biglieri, E. and Taricco, G.**, 1997. Impact of diversity reception on fading channels with coded modulation-Part I: Coherent detection, *IEEE Trans. Commun.,* **vol. 45, no. 5,** 563-572.

[26] **Tao, M. and Cheng, R. S.**, 2001. Improved design criteria and new trellis codes for space-time coded modulation in slow flat fading channels, *IEEE Commun. Lett.,* **vol. 5, no. 7,** 313-315.

[27] **Loo, C.**, 1985. A statistical model for a land mobile satellite link, *IEEE Trans. Veh. Technol.,* **vol. 34,** 122-127.

[28] **Jamali, S. H. and Le-Ngoc, T.,** 1994. Coded Modulation Techniques for Fading Channels, Kluwer Academic Publishers, Boston.

[29] **Abdi, A., Lau, W. C., Alouini, M.-S. and Kaveh, M.**, 2003. A new simple model for land mobile satellite channels: First- and second-order statistics, *IEEE Trans. Wireless Commun.,* **vol. 2, no. 3,** 519-528.

[30] **Simon, M. K. and Alouini, M.-S.,** 2000. Digital Communication Over Fading Channels: A Unified Approach to Performance Analysis, Wiley, New York.

[31] **Turin, G. L.**, 1960. The characteristic function of Hermetian quadratic forms in complex normal random variables, *Biometrika,* **vol. 47,** 199-201.

[32] **Mathai, A. M. and Provost, S. B.,** 1992. Quadratic Forms in Random Variables: Theory and Applications, Dekker, New York.

[33] **Spiegel, M. R. and Liu, J.,** 1999. Mathematical Handbook of Formulas and Tables (2nd Edition), McGraw-Hill, New York.

[34] **Simon, M. K.**, 2001. Evaluation of average bit error probability for space-time coding based on a simpler exact evaluation of pairwise error probability, *J. Commun. Networks,* **vol. 3, no. 3,** 257-264.

[35] **Loo, C., Matt, E. E, Butterworth, J. S. and Duffer, M.**, 1986. Measurements and modeling of land-mobile satellite signal statistics, *Vehicular Technology Conf.,* Dallas, TX, May 1986, s. 262-267.

[36] **Nakagami, M.,** 1960. The m-distribution: A general formula of intensity distribution of rapid fading, in *Statistical Methods in Radio Wave Propagation,* Ed. Hoffman, W.G., Pergamon, England.

ÖZGEÇMİŞ

Barlas BAŞARAN, 03/06/1980 tarihinde İstanbul'da doğdu. Orta öğrenimini Kadıköy Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 1999 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi, Elektrik-Elektronik Fakültesi, Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümü'nde lisans eğitimine başladı. 2003'te lisans eğitimini tamamlayarak, aynı yıl aynı üniversitenin Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektronik ve Haberleşme Anabilim Dalı, Telekomünikasyon Mühendisliği Programı'nda yüksek lisans eğitimine başladı. Haziran 2004'te Telsim Mobil Telekomünikasyon Hizmetleri A.Ş., RAN/NMC-Kalite Departmanı'nda çalışmaya başladı. Halen aynı şirkette Kalite Mühendisi olarak çalışmaya devam etmektedir.

Lisans bitirme çalışmasını, "GSM'de Hücresel Planlama" üzerine yapmıştır. Yüksek lisans tezi ise "Uzay-Zaman Kafes Kodlarının Gölgelemeli Kanallardaki Hata Başarım Analizi" üzerinedir.