KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

SHEARLET TEORİSİ VE MEDİKAL VERİLERE UYGULAMASI

CÜNEYT YAZICI

KOCAELİ 2015

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

SHEARLET TEORİSİ VE MEDİKAL VERİLERE UYGULAMASI

CÜNEYT YAZICI

Yrd.Doç.Dr. Hülya KODAL SEVİNDİR
Danışman, Kocaeli Üniv. .....

Prof.Dr. Zahir MURADOĞLU
Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv. .....

Yrd.Doç.Dr. Ali Fuat YENİÇERİOĞLU
Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv. .....

Prof.Dr. Halis AYGÜN
Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv. .....

Doç.Dr. Cemil ÖZ
Jüri Üyesi, Sakarya Üniv. .....

Tezin Savunulduğu Tarih: 11.02.2015

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜRLER

Beni yetiştiren, yaptığım her işte ve aldığım her kararda yanımda olan, benim için fedakârlıktan hiç ama hiçbir zaman kaçınmayan, bu noktaya gelmemde birinci derecede emeği olan annem Süheyla YAZICI'yı rahmetle anıyor ve bana verdiği her şey için çok ama çok teşekkür ediyorum. Hiçbir fedakârlıktan kaçınmadan benim bu noktaya gelmemde çok büyük emeği olan ve hayatım boyunca hep yanımda olan babam Cemal YAZICI'ya teşekkürü bir borç bilirim.

Beni bu konuya yönlendiren, bana her konuda yardımını esirgemeyen ve karşılaşılan güçlüklerin aşılmasında yol gösterici olan danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Hülya KODAL SEVİNDİR'e, teşekkür ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim. Ayrıca tez izleme sürecinde emeği geçen Sayın Prof. Dr. Zahir MURADOĞLU'na ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Ali Fuat YENİÇERİOĞLU'na teşekkürü bir borç bilirim. Yine üzerimde emeği olan Sayın Prof. Dr. Ahmet KÜÇÜK'e, Sayın Prof. Dr. Halis AYGÜN'e teşekkürlerimi sunarım.

Yine bu tez konumda bana yardımcı olan shearlet teorisinin gelişiminde pay sahibi olmuş değerli bilim adamı Dr. Wang-Q Lim'e teşekkürü bir borç bilirim. Aynı zamanda tezde kullandığım medikal görüntülerin temin edilmesinde bana her türlü olanağı sağlayan Kocaeli Üniversitesi Araştırma ve Uygulama Hastanesi'ne çok teşekkür ederim. Dostluklarını ve yardımlarını esirgemeyen Öğr. Gör. Mevlüt SEVİNDİR'e ve arkadaşlarım Yrd. Doç. Dr. Vildan ÇETKİN'e, Uzman Dr. Aslı EŞME'ye, Arş. Gör. Ufuk SARIDEDE'ye ve Arş. Gör. Süleyman ÇETİNKAYA'ya teşekkürlerimi sunarım.

Bu tezi yazarken her türlü sıkıntıma katlanan ve bana sonsuz destek olan başarımda pay sahibi hayat arkadaşım, can yoldaşım eşim Vildan YAZICI'ya, bu hayata sımsıkı tutunmamı sağlayan hayatımın anlamı canım oğlum Ulaş YAZICI'ya teşekkürü bir borç bilirim.

Ocak – 2015 Cüneyt YAZICI

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜRLER i
İÇİNDEKİLER ii
ŞEKİLLER DİZİNİ iv
TABLOLAR DİZİNİ v
SİMGELER DİZİNİ VE KISALTMALAR vii
ÖZET xi
ABSTRACT xii
GİRİŞ 1
1. GENEL BİLGİLER 4
1.1. Çoklu Ölçekli Yöntemlerin Tarihçesi 4
1.2. Sinyal ve Görüntü İşleme 5
1.3. Medikal Sinyaller ve Görüntüler 8
1.4. Shearlet Dönüşümüne Giden Yol 10
1.5. Önceki Çalışmalar 11
2. TEORİK BİLGİLER 15
2.1. Dalgacık dönüşümü 15
2.2. Shearlet dönüşümü 27
3. MALZEME VE YÖNTEM 36
3.1. Kullanılan Medikal Sinyal ve Görüntüler 37
3.2. Temel Tanım ve Teoremler 40
3.2.1. Yeniden elde etme modeli 44
4. BULGULAR VE TARTIŞMA 49
4.1. EEG Verisinin Spektral Analizi 49
4.2. Shearlet ve Dalgacık Dönüşümü ile Medikal Görüntülerde Gürültü Temizleme 57
4.3. Dairesel Maske Kullanarak Shearlet ve Dalgacık Dönüşümü ile Kaybolan Veriyi Yeniden Elde Etme 62
4.4. Yatay Maske Kullanarak Shearlet ve Dalgacık Dönüşümü ile Kaybolan Veriyi Yeniden Elde Etme 68
4.4.1. Yatay maske uygulamasının asimptotik analizi 68
4.4.2. Yatay maske uygulaması 80
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 88
KAYNAKLAR 91
KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER 96
ÖZGEÇMİŞ 98

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. $\{\psi_{a,s,t}\}$'nin geometrik gösterimi 33
Şekil 2.2. $\{\psi_{a,s,t}\}$'nin ölçeklenmiş geometrik gösterimi 33
Şekil 2.3. $\{\psi_{a,s,t}\}$'nin ölçeklenmiş ve shear uygulanmış geometrik gösterimi 33
Şekil 3.1. Bir boyutlu örnek bir EEG verisi 37
Şekil 3.2. Batın ön duvarından çekilen ultrason görüntüsü 38
Şekil 3.3. Kardiyak BT tetkikine ait büyük damar ve kalp odacıklarının görüntüsü 38
Şekil 3.4. Damar çevresi dokusu görüntüsü 39
Şekil 3.5. Röntgen görüntüsü 39
Şekil 3.6. Mamografi görüntüsü 40
Şekil 4.1. Çoklu çözülme analizinde dalgacık dönüşümü ile 7. seviyede ağaç modeli 50
Şekil 4.2. S1 hastasının EEG verisinin bir kanalına 7. seviyede db4 dalgacık dönüşümünün uygulanması 50
Şekil 4.3. S2 hastasının EEG verisinin bir kanalına 7. seviyede db4 dalgacık dönüşümünün uygulanması 51
Şekil 4.4. S3 hastasının EEG verisinin bir kanalına 7. seviyede db4 dalgacık dönüşümünün uygulanması 51
Şekil 4.5. S1 hastasının EEG verisinin bir kanalına 7. seviyede db4 dalgacık dönüşümünün uygulandıktan sonraki histogramı 52
Şekil 4.6. S2 hastasının EEG verisinin bir kanalına 7. seviyede db4 dalgacık dönüşümünün uygulandıktan sonraki histogramı 52
Şekil 4.7. S3 hastasının EEG verisinin bir kanalına 7. seviyede db4 dalgacık dönüşümünün uygulandıktan sonraki histogramı 53
Şekil 4.8. S1, S2 ve S3 hastalarının her bir seviyedeki enerji katsayılarının kros-korelasyonu 54
Şekil 4.9. a) S1 hastasının, b) S2 hastasının ve c) S3 hastasının 2-boyutlu skalogramları 54
Şekil 4.10. a) S1 hastasının, b) S2 hastasının ve c) S3 hastasının 3-boyutlu skalogramları 55
Şekil 4.11. Temporal nöbet geçiren bir hastanın bir kanalına db4 dalgacık dönüşümü uygulandıktan sonra a) (d4)-(d7) detaylarını içeren toplam enerji, b)-e) her bir detaydaki bağıl enerjiler 56
Şekil 4.12. a)-i)Temporal nöbet geçiren Şekil 4.11'daki hastanın EEG verisinin bir kanalının her bir detayındaki bağıl enerjilerinin beşer saniye arayla anlık görüntüleri 57
Şekil 4.13. Batın ön duvarından çekilen ultrason görüntüsünün a) esas hali, b) gürültülü hali, c) dalgacık uygulandıktan sonraki hali, d) shearlet uygulandıktan sonraki hali 58
Şekil 4.14. Kardiyak BT tetkikine ait büyük damar ve kalp odacıklarının görüntüsünün a) esas hali, b) gürültülü hali, c) dalgacık

uygulandıktan sonraki hali, d) shearlet uygulandıktan sonraki hali 59
Şekil 4.15. Mamografi görüntüsünün a) esas hali, b) gürültülü hali, c) dalgacık uygulandıktan sonraki hali, d) shearlet uygulandıktan sonraki hali..... 60
Şekil 4.16. a) Batın ön duvarından çekilen ultrason görüntüsü kroskorelasyonu, b) Kardiyak BT tetkikine ait büyük damar ve kalp odacıklarının görüntüsü kroskorelasyonu, c) Mamografi görüntüsü kroskorelasyonu 62
Şekil 4.17. Dairesel maske 64
Şekil 4.18. a) Damar çevresi dokusu görüntüsü, b) dairesel maskenin uygulanmış hali, c) dalgacık dönüşümü ile görüntünün elde edilmesi, d) shearlet dönüşümü ile görüntünün elde edilmesi..... 64
Şekil 4.19. a) Röntgen görüntüsü, b) dairesel maskenin uygulanmış hali, c) dalgacık dönüşümü ile görüntünün elde edilmesi, d) shearlet dönüşümü ile görüntünün elde edilmesi 65
Şekil 4.20. a) Mamografi görüntüsü, b) dairesel maskenin uygulanmış hali, c) dalgacık dönüşümü ile görüntünün elde edilmesi, d) shearlet dönüşümü ile görüntünün elde edilmesi..... 66
Şekil 4.21. a) Damar çevresi dokusu Görüntüsü kros-korelasyonu b) Röntgen Görüntüsü kros-korelasyonu, c) Mamografi Görüntüsü kros-korelasyonu..... 67
Şekil 4.21. (Devam) a) Damar çevresi dokusu Görüntüsü kros-korelasyonu b) Röntgen Görüntüsü kros-korelasyonu, c) Mamografi Görüntüsü kros-korelasyonu..... 68
Şekil 4.22. $\mathcal{M}_h$ yatay maske fonksiyonunun görüntüsü..... 69
Şekil 4.23. Yatay maske..... 81
Şekil 4.24. a) Damar çevresi dokusu görüntüsü, b) yatay maskenin uygulanmış hali, c) dalgacık dönüşümü ile görüntünün elde edilmesi, d) shearlet dönüşümü ile görüntünün elde edilmesi..... 82
Şekil 4.25. a) Röntgen görüntüsü, b) yatay maskenin uygulanmış hali, (c) dalgacık dönüşümü ile görüntünün elde edilmesi, d) shearlet dönüşümü ile görüntünün elde edilmesi 83
Şekil 4.26. a) Mamografi görüntüsü, b) yatay maskenin uygulanmış hali, c) dalgacık dönüşümü ile görüntünün elde edilmesi, d) shearlet dönüşümü ile görüntünün elde edilmesi 84
Şekil 4.27. a) Kardiyak BT görüntüsü, b) yatay maskenin uygulanmış hali, c) dalgacık dönüşümü ile görüntünün elde edilmesi, d) shearlet dönüşümü ile görüntünün elde edilmesi 85
Şekil 4.28. a) Damar çevresi dokusu görüntüsü kros-korelasyonu, b) Röntgen görüntüsü kros-korelasyonu, c) Mamografi görüntüsü kros-korelasyonu, d) Kardiyak BT görüntüsü kros-korelasyonu..... 86
Şekil 4.28. (Devam) a) Damar çevresi dokusu görüntüsü kros-korelasyonu, b) Röntgen görüntüsü kros-korelasyonu, c) Mamografi görüntüsü kros-korelasyonu, d) Kardiyak BT görüntüsü kros-korelasyonu..... 87

TABLOLAR DİZİNİ

Tablo 4.1. S1, S2 ve S3 hastalarının her bir seviyedeki enerji katsayıları 53
Tablo 4.2. Dalgacık ve shearlet dönüşümü kullanılarak gürültü temizleme kod şeması 58
Tablo 4.3. Batın ön duvarından çekilen ultrason görüntüsüne gürültü temizlemek için uygulanan dalgacık ve shearlet dönüşümleri için hesaplanan PSNR değerleri 61
Tablo 4.4. Kardiyak BT tetkikine ait büyük damar ve kalp odacıklarının görüntüsüne gürültü temizlemek için uygulanan dalgacık ve shearlet dönüşümleri için hesaplanan PSNR değerleri 61
Tablo 4.5. Mamografi görüntüsüne gürültü temizlemek için uygulanan dalgacık ve shearlet dönüşümleri için hesaplanan PSNR değerleri 61
Tablo 4.6. Dairesel maske kodu şeması 63
Tablo 4.7. Dalgacık ve Shearlet dönüşümü kullanılarak kayıp edilen verinin yeniden elde edilmesi kod şeması 63
Tablo 4.8. Görüntülere uygulanan dalgacık ve shearlet dönüşümleri için hesaplanan PSNR değerleri 67
Tablo 4.9. Yatay maske kodu şeması 80
Tablo 4.10. Dalgacık ve shearlet dönüşümü kullanılarak kayıp edilen verinin yeniden elde edilmesi kod şeması 81
Tablo 4.11. Görüntülere uygulanan dalgacık ve shearlet dönüşümleri için hesaplanan PSNR değerleri 86

SİMGELER DİZİNİ VE KISALTMALAR

$\mathcal{A}_2$: Afin grup
A_a : Parabolik ölçekleme matrisi
$A_a{}^{-1}$: A_a'nın ters elemanı
A_a^h : Yatay maske durumunu incelemek için kullanılan olan parabolik ölçekleme matrisi
A_a^v : Dikey maskeleme durumunda kullanılan parabolik ölçekleme matrisi
B : Shear matrisi
D : Ölçekleme operatörü
D_{A_a} : Genişleme operatörleri ailesi
$d\lambda$: $\mathcal{A}_2$'nin sol Haar ölçümü
$d\mu$: Sol-invaryant Haar ölçümü
D_M : Genişleme operatörü
D_{S_s} : Shearing operatörü
f : Herhangi bir fonksiyon
$\hat{f}$: f fonksiyonun Fourier dönüşümü
$\check{F}_j$: Meyer dalgacık fonksiyonunun ve Shearlet fonksiyonunun j seviyesine karşılık gelen filtresi
γ : Frekans
$\|\hat{f}(\gamma)\|$: f fonksiyonundaki γ frekansının yoğunluğu
F : Fourier dönüşümü
$\mathcal{F}^{-1}$: Ters Fourier dönüşümü
G : Genişleme grubu
G_j : F_j'nin ters Fourier dönüşümü
$GL_2(\mathbb{R})$: Tersi olan 2x2 boyutlu matrisler uzayı
h : Yatay maskenin genişliği
$\mathcal{H}$: Hilbert uzayı
H_0 : 1-periyodik fonksiyon
H_1 : H_0'a bağlı fonksiyon
$\mathcal{H}_M$: Sinyalin bilinmeyen kısımını içeren alt uzay
$\mathcal{H}_K$: Sinyalin bilinen kısımını içeren alt uzay
I : $\mathbb{R}^+$'nın alt kümesi
k_1 : 1. değişkene göre eşik değeri parametresi
k_2 : 2. değişkene göre eşik değeri parametresi
$L^1(\mathbb{R})$: $\mathbb{R}$ üzerinde integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$L^1(\mathbb{R}^n)$: $\mathbb{R}^n$ üzerinde integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$L^2(\mathbb{R})$: $\mathbb{R}$ üzerinde karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
L : Gerçek görüntü
$l^2(\mathbb{Z})$: $\mathbb{Z}$ üzerinde karesi toplanabilir diziler kümesi
$\mathrm{MAX_I}$: Görüntüye ait matrisin elemanlarının maksimum değeri
$\mathcal{M}_h$: Yatay maske fonksiyonu

$\widehat{\mathcal{M}_h}$: $\mathcal{M}_h$ yatay maske fonksiyonunu Fourier dönüşümü
M^t : M matrisinin transpozesi
N_1 : 1. değişkene göre sınır parametresi
N_2 : 2. değişkene göre sınır parametresi
P_K : $\mathcal{H}_K$ alt uzayına karşılık gelen orthogonal izdüşüm fonksiyonu
P_M : $\mathcal{H}_M$ alt uzayına karşılık gelen orthogonal izdüşüm fonksiyonu
S : Shearlet grubu
s : Yön değişkeni
$S\mathcal{H}(\psi)$: Sürekli shearlet sistemi
$SH_\psi H$: Heaviside basamak fonksiyonunun sürekli shearlet dönüşümü
S_s : Shearing matrisi
S_s^h : Yatay maske durumunu incelemek için kullanılacak olan shearing matrisi
S_s^v : Dikey maskeleme durumunda kullanılan shearing matrisi
sinc : Sinüse bağlı parçalı bir fonksiyon
$\overline{\text{span}}\{D^j T_k \varphi\}_{k\in\mathbb{Z}}$: $\{D^j T_k \varphi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ailesini geren uzay
Sup : Supremum (üst sınırların en küçüğü)
supp : Support (sonlu dayanak)
$\mathcal{T}_j$: Eşik değerleri kümesi
$\mathcal{T}_j^c$: Eşik değerleri kümesinin tümleyeni
T_k : k'ya bağlı öteleme operatörü
$\{T_k\varphi\}_{k\in\mathbb{Z}}$: V_0 için bir ortonormal taban
T_ψ : Sürekli dalgacık dönüşümü
T_t : t'ye bağlı öteleme operatörü
$\mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^2))$: $L^2(\mathbb{R}^2)$ üzerindeki birim operatörler gurubu
$\{v_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$: $L^2(\mathbb{R})$'nin kapalı alt uzaylarının bir dizisi
$C^\infty(R)$: $\mathbb{R}$ üzerinde her mertebeden türevlenebilen sürekli fonksiyonlar uzayı
$w\mathcal{L}$: Kaybedildikten sonra yeniden elde edilen görüntü
$w\mathcal{L}_j$: $w\mathcal{L}$'nin filtre şekli
$W(\xi)$: Bir boyutlu Meyer dalgacık fonksiyonunun Fourier dönüşümü
W^d : Köşegen dalgacık fonksiyonu
W^h : Yatay maske durumunu incelemek için kullanılacak olan dalgacık fonksiyonu
W^v : Dikey maske durumunu incelemek için kullanılacak olan dalgacık fonksiyonu
$W_\psi H$: Heaviside basamak fonksiyonunun sürekli dalgacık dönüşümü
$\subset$: Alt küme
Φ^* : Analiz operatörü, Φ'nin eşlenik operatörü
$\Phi = \{\varphi_i\}_{i\in I}$: Ayrılabilir bir $\mathcal{H}$ Hilbert uzayındaki vektörler ailesi
α : Matrisin eş yönlü olup olmadığını kontrol eden parametre
$\mathbb{1}_\mathbb{R}$: $\mathbb{R}$ üzerinde gösterge fonksiyonu

β_j : j seviyesinde belirlenmiş eşik değeri
$\phi(\omega)$: Bir boyutlu Meyer ölçekleme fonksiyonu
$\hat{\phi}(\xi)$: Bir boyutlu Meyer ölçekleme fonksiyonunun Fourier dönüşümü
$\mu_c(\Lambda, \Phi_1; \Phi_2)$: Cluster coherence (kümelenme uyumluluğu parametresi)
$*$: Convolution (konvolüsyon)
$\star$: Cross-correlation (kros-korelasyon)
$\times$: Çarpma işlemi
ψ : Dalgacık fonksiyonu
$\bar{\psi}$: Dalgacık fonksiyonunun kompleks eşleniği
σ^v : Dikey maskeleme durumunda kullanılan shearlet fonksiyonu
δ : Dirac delta fonksiyonu
$\oplus$: Direk toplam
$\langle \cdot, \cdot \rangle$: Euclid iç çarpımı
δ_j : Filtrelenmiş katsayılar için δ-seyrekliği
$\psi_{a,t}$: Ölçeklenmiş ve ötelenmiş dalgacık fonksiyonlar ailesi
θ : Gausyen gürültüsü
∇ : Gradyan
$\forall$: Her
κ : $\mathcal{H}_M$'deki yoğunluk
Λ : Katsayıların bir indeks kümesi
ξ_1 : x yönündeki koordinat
ξ_2 : y yönündeki koordinat
o : Küçük o notasyonu
σ : $L^2(\mathbb{R}^2)$ üzerinde S nin birim gösterimi
ρ : Maskenin genişliği
$|\,.\,|$: Mutlak değer
$\varphi^{(n)}$: n-yinci mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon
$\|\,.\,\|$: Norm
$\psi_{a,s,t}$: Ölçeklenmiş, ötelenmiş ve shear uygulanmış shearlet ailesi
π : Pi sayısı
∞ : Sonsuz
$\|\ \|_\infty$: Sonsuz normu
$\sum$: Toplam sembolü
$\lceil x \rceil$: x'den büyük ya da eşit olan en küçük tamsayı
$\hat{\sigma}^h$: Yatay maskeleme durumunda kullanılacak olan shearlet fonksiyonu
$\sigma^{\iota}_{j,\ell,k}$: Shearlet sistemi

KISALTMALAR

a1-a7 : EEG Sinyaline Dalgacık Dönüşümü Uygulandıktan Sonra Her Bir Seviyedeki Yaklaşım Kısmı
BT : Bilgisayarlı Tomografi

d1-d7	: EEG Sinyaline Dalgacık Dönüşümü Uygulandıktan Sonra Her Bir Seviyedeki Detayları
db4	: Daubechies-4 Dalgacık Dönüşümü
EEG	: Elektroensefalogram
EKG	: Elektrokardiyogram
fMRI	: Fonksiyonel Manyetik Rezonans Görüntüleme
HVS	: Human Visual System (İnsanlarda Görme Sistemi)
LoG	: Laplacian of Gaussian (Gausyen'in Laplasyeni)
MR	: Manyetik Rezonans Görüntüleme
MSE	: Mean Squared Error (Karekök Ortalama Hatası)
PSNR	: Peak Signal-to-Noise Ratio (Tepe İşaretin Gürültüye Oranı)
PW	: Paley-Wiener Uzayı
S1	: Epilepsi Nöbeti Geçirmeyen Hasta
S2	: Epilepsi Nöbeti Geçiren Hasta
S3	: Çoklu Epilepsi Nöbeti Geçiren Hasta
X-ışını	: Röntgen

SHEARLET TEORİSİ VE MEDİKAL VERİLERE UYGULAMASI

ÖZET

Matematiksel yöntemlerin gelişimi ile tıp bilimindeki zorlukların üstesinden gelmek daha kolay hale gelmiştir. Sinyal ve görüntü işleme alanında son yıllarda ortaya çıkan matematiksel gelişmeler oldukça dikkat çekicidir. Bu anlamda, en son geliştirilen çoklu ölçekli yöntem olan shearlet dönüşümü ile çok önemli mesafe kat edilmiştir. Shearlet dönüşümü sayesinde, tıp bilimindeki zorlukların üstesinden gelinmesi çalışmaları hız kazanmıştır. Daha etkili sonuçlar elde edilmeye başlanmıştır.

Bu tezde, shearlet dönüşümü, bir diğer dönüşümle, dalgacık dönüşümü ile kıyaslanarak medikal görüntüler üzerinde oluşacak bozulmaların ve kayıpların giderilmesi açısından, literatürde yer almayan önemli sonuçlar elde edildi. Görüntü işleme uygulamaları içerisinde, medikal görüntüler üzerinde kayıp olan verinin yeniden elde edilmesi üzerine matematiksel teori açısından asimptotik analiz yapıldı. Ayrıca, hem medikal görüntüler üzerinde gürültü temizleme hem de kayıp olan verinin yeniden elde edilmesi üzerine yönelik uygulamalar yapıldı. Bu amaçla uygun kodlar yazıldı ve karşılaştırmalar yapıldı. Elde edilen bütün sonuçlar incelendiğinde, shearlet dönüşümünün dalgacık dönüşümüne göre daha etkili olduğu sonucuna ulaşıldı. Ayrıca, bu tezde shearlet dönüşümünün dayanağı olan dalgacık dönüşümünün bir boyutlu medikal sinyal üzerine uygulamalar yapıldı. Elde edilen sonuçların literatürdeki sonuçlarla uyumlu olduğu tespit edildi.

Anahtar Kelimeler: Dalgacık Dönüşümü, Gürültü Temizleme, Kayıp Verinin Yeniden Elde Edilmesi, Medikal Görüntü, Shearlet Dönüşümü.

SHEARLET THEORY AND APPLICATIONS TO MEDICAL DATAS

ABSTRACT

Along improvement of mathematical methods, solving some medical problems related to imaging has become much easier. In recent years mathematical developments in the signal and image processing area is highly intriguing. Shearlets emerged in the last decade among the most successful frameworks for the efficient representation of multidimensional data. There have been a number of successful applications of this method recently.

In this thesis, shearlet and wavelet transformations are applied to some medical data and application results of two methods are compared. Applications include image improvement and inpainting of some medical data. The results show that shearlets are able to inpaint larger gaps than wavelets. Moreover, asymptotic analysis of the shearlet transformation for the horizontal masking case is obtained.

Keywords: Wavelet Transform, Denoising, Inpainting, Medical Image, Shearlet Transform.

GİRİŞ

Günümüzde hemen hemen her bilim dalında olduğu gibi tıp biliminde de matematiksel yöntemlerin kullanımının gün geçtikçe arttığı gözlenmektedir. Medikal sinyallerin ve görüntülerin analizi matematiksel yöntemlerin gelişmesi ile daha da kolay hale gelmiştir. Çok boyutlu verinin etkili bir şekilde temsil edilmesi için yapılan çalışmalar içerisinde başarılı olanların son halkası olan matematiksel dönüşüm shearlet dönüşümüdür. Çoğunlukla çok boyutlu duruma hakim olan geleneksel çoklu ölçekli yöntemlerin kenarları belirlemede ve eş yönlü olmayan özeliklerde çok etkili olmadığının farkına varılmasından sonra, onların eksikliklerinin üstesinden gelmek için birkaç yöntem tanıtılmıştır. Bunların içerisinde shearlet dikkat çekicidir. Çünkü shearlet dönüşümü istenilen özellikleri bütünüyle sağlar; üreteç fonksiyonlarının tek ya da sonlu bir kümesine sahiptir; çoklu boyutlu veri için optimal seyrek ifadeler sunar; sonlu dayanağa sahip fonksiyonlarda kullanmak mümkündür; algoritmanın hızını arttırır.

Bilim adamları çoğu kez 21. yüzyılı verinin çağı olarak ifade ederler. Günümüzde, teknolojik ilerlemeler ile verinin kazanımı daha kolay ve daha az maliyetli olduğu için verinin etkili bir şekilde incelenmesini ve işlenmesini gerektiren astronomik, tıbbi, meteorolojik, depremsel ve gözlem verisini içeren pek çok veri ile çalışılmaktadır. Matematiksel bir bakış açısıyla, veri modellenebilir. Örnek olarak, fonksiyonlar, nokta kümeleri ya da graflar verilebilir. Pratik uygulamalardaki hemen hemen tüm verilerde istenen temel bir özellik, çıkartılması ya da belirlenmesi gereken uygun bilginin az sayıda parametre ile ifade edilmesidir. Böylece bu bilgi, temel olarak, uygun bir ifade ile sadece birkaç terimden faydalanılarak açıklanabilir. Bu gözlem sadece veri depolaması ve iletilmesi gibi konular için değil, aynı zamanda özellik tayin etme, sınıflandırma gibi konular için de çok önemlidir. Belirli bir veri sınıfını seyrek bir şekilde gösteren bir ifade bulunması için, geometriye dayanan özelliklerinin anlaşılması gerekir. Bundan dolayı, bu verileri etkili bir şekilde

incelemek ve işlemek, geometrik yapılarını doğru bir şekilde anlayıp keşfetmenin önemli bir temel noktasıdır.

Çoklu ölçekli çalışmaların en yenisi olan shearlet teorisi yukarıda söz edilen ihtiyaçlardan dolayı ortaya çıkmıştır. Shearlet, eş yönlü olmayan (anizotropik) özellikleri seyrek bir şekilde gösterme yeteneği sayesinde, çok değişkenli verinin değişik sınıflarının optimal gösterimine imkan verir. Ayrıca, geleneksel Fourier ve dalgacık sistemlerinin eksikliklerinin ötesine geçmek amacıyla, büyük ve daha yüksek boyutlu bir veri için inceleme ve uygulama araçlarının yeni bir üretecini oluşturmak amacıyla son 8 yıl süresince gelişen yoğun bir araştırmanın sonucu olarak ortaya çıkmıştır. Bu alandaki araştırmanın öncülerinden biri David L. Donoho'dur. Donoho daha yüksek boyutlu geleneksel çoklu ölçekli sistemlerin ve dalgacığın, geometrik çoklu ölçek analiziyle yer değiştirmesi gerektiğini gözlemlemiştir. Son 8 yılda elde edilen shearlet teorisinin ve uygulamalarının sunulmasıyla uygulamalı matematikteki araştırmaların en etkin ve ilgi çekici alanlarından biri ortaya çıkmıştır.

Bölüm 1'de çoklu ölçekli yöntemlerin tarihçesi verilip, sinyal ve görüntü işleme anlatıldı. Ayrıca medikal sinyal ve görüntüler hakkında bilgi verilip, literatür taraması yapıldı.

Bölüm 2'de tezin konusuyla ilgili teorik bilgiler verildi. Bu bağlamda dalgacık ve shearlet dönüşümlerinin teorileri tanıtıldı.

Bölüm 3'de kullanılan medikal sinyal ve görüntüler tanıtıldı. Tezde uygulanan yönteme yardımcı olan temel tanım ve teoremlerle yeniden elde etme modeli anlatıldı.

Bölüm 4'de EEG verisinin spektral analizi yapılıp, medikal verilerde shearlet ve dalgacık dönüşümleri ile gürültü temizleme ve kayıp veriyi yeniden elde etme uygulamaları yapıldı. Kayıp veriyi yeniden elde etme uygulamasında dairesel ve yatay maskeler kullanıldı. Her iki durumda da iki ayrı dönüşüm yöntemi için elde edilen sonuçlar karşılaştırıldı. Ayrıca, kayıp veriyi yeniden elde etme uygulaması

için yatay maske durumu için matematiksel açıdan asimptotik analiz yapıldı. Nümerik algoritmalar uygulanarak sonuçlar elde edildi.

Bölüm 5'de bu tezde elde edilen bütün sonuçlar ve öneriler tartışıldı.

Bu tez çalışmasının amacı, literatürde önemli bir yere sahip olan görüntü işleme uygulamalarından gürültü temizleme ve kayıp veriyi yeniden elde etme problemine, medikal görüntüler kullanılarak, son yıllarda ortaya çıkmış ve çoklu ölçekli yöntemlerin en yenisi olan shearlet dönüşümünü uygulamaktır. Medikal verilerin kullanılması tıbbi açıdan son derece önemli olduğundan shearlet dönüşümünden elde edilen sonuçları literatüre kazandırmak oldukça yararlı olacaktır.

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Çoklu Ölçekli Yöntemlerin Tarihçesi

Yaklaşık 25 yıldır modern dalgacık teorisinin ortaya çıkması, sinyallerin etkili gösteriminin gelişmesinde çok önemli olmuştur. Dalgacık dönüşümünün bu denli başarılı olmasının arkasındaki iki önemli sebep, Fourier yöntemine göre tekilliklerde daha etkili olması ve sıklıkla görülen çok geniş bir sinyal sınıfı için gerekli olan yaklaşımı optimal seviyede sağlamalarıdır. Sürekli ve sayısal durumun böylesine birleştirilmiş işlemine olanak sağlayan ana özellik bir çoklu çözülme analizidir. Bu analiz reel değişkenli fonksiyonlar ve sayısal sinyallerin bölgeleri arasında direk bir geçişe olanak sağlar. Bu durum, ayrıca sayısal sinyal işlemeciler tarafından geliştirilen filtre bankalarının teorisi ile de uyumludur. Dalgacık teorisinin bir diğer başarısı da zengin matematiksel yapısıdır. Bütün bu özelliklerin sonucunda dalgacık, görüntü ve sinyal işlemede abartısız bir şekilde devrim yapmıştır.

Dalgacığın bu başarısına rağmen, dalgacık çok değişkenli veri ile ilgilenildiğinde çok etkili değildir. Gerçekte, dalgacık ifadeleri sadece nokta tabanlı tekilliklerle yaklaşım verisi için optimaldir ve eğriler boyunca oluşan tekillikler gibi eşit ölçüde iyi dağılmış tekilliklerle başa çıkamamaktadır. Bunun nedeni dalgacığın izotropik (eş-yönlü) verilere uygulanabilmesidir. Dalgacıklar tek ya da sonlu sayıda üreteçlerle eş-yönlü bir şekilde genişleyerek üretilirler. Bununla birlikte, iki ya da daha yüksek boyutlarda, yüzey sınırlarının kenarları gibi, parçalı süreksizliklerde etkili değildir ve bunun bir sonucu olarak dalgacık, çok değişkenli veri durumunda optimalden uzaklaşmaktadır. Dalgacık ve geleneksel çoklu ölçekli sistemlerin yetersiz oluşu, matematikçileri, mühendisleri ve uygulamalı bilimcileri yoğun bir çalışmaya itmiştir. Bu amaçla yönsel fitre bankaları Bamberger ve Smith [1] tarafından ve 2-boyutlu yönsel dalgacıklarda Antoine ve Ark. [2] tarafından geliştirilmiştir. Daha gelişmiş bir yaklaşım, kompleks dalgacığın tanıtılmasıyla çok yakın bir geçmişte sunulmuştur [3,4]. Bununla birlikte, uygulamalarda sıklıkla dalgacık daha iyi çalıştığı halde, bu yöntemler eş yönlü olmayan özelliklerle oluşturulan çok değişkenli verinin seyrek

yaklaşımlarını optimal bir şekilde sağlamamaktadır. Bunu başaramamanın temel nedeni bu yaklaşımların dalgacık yaklaşımının doğru bir şekilde çok boyutlu genişletmeleri olamamasından kaynaklanmaktadır.

2004 yılında Cand'es ve Donoho [5] tarafından curveletin geliştirilmesiyle önemli bir aşama kat edilmiştir. Curvelet dönüşümü seyrek yaklaşımları ya da eş yönlü olmayan özellikleri gösteren iki değişkenli fonksiyonlar sınıfı için optimal yaklaşım sağlayan ilk önemli sistem olmuştur. Curvelet, dalgacığın yaptığı gibi sadece çeşitli ölçeklerde tanımlanmamıştır; aynı zamanda daha sık ölçeklerde yön parametresinin sayısını arttırarak çeşitli yönlerde tanımlanmıştır. Curvelet yaklaşımının iki temel sorunu vardır: Birincisi, bu sistem, üreteç fonksiyonlarının tek ya da sonlu kümesine uygulanan sayılabilir sayıda birçok operatörün etkisinden türetilmemiştir; ikincisi, bu operatörler ile üretilen sistem sayısal durumdan sürekli duruma direk bir geçişe izin vermez.

Contourlet, curvelet dönüşümünün tamamıyla kesikli bir filtre bankası olarak Do ve Vetterli [6] tarafından 2005 yılında geliştirilmiştir. Bu yaklaşım, standart dalgacık uygulamalarına benzer bir avantaj sunar. Bununla birlikte, uygun bir sürekli teori bu yaklaşımda yeterliliğini yitirmektedir.

Shearlet dönüşümü 2006 yılında, Guo, Kutyniok, Labate, Lim, and Weiss tarafından tanıtılmıştır [7,8]. Bu yaklaşım, dalgacık dönüşümünün çok değişkenli veri için düzgün bir genişletilmesi olarak birleşik dalgacık diye adlandırılan [9,10,11] afin benzeri sistemlerin daha geniş bir sınıfı içerisinde elde edilmiştir. Sheraletin ayırt edici özelliklerinden biri, curvelet tarafından kullanılan yönlerin aksine, yönsel seçiciliği kontrol etmek için shearing parametresinin kullanılmasıdır. Bu, temelde farklı bir kavramdır; çünkü shearlet sistemlerine bir tek ya da sonlu sayıda üreteçten türetilebilmeye izin verir ve shear matrisinin özelliğinden dolayı sürekli ve sayısal bölgenin ortak bir işlemine olanak sağlar.

1.2. Sinyal ve Görüntü İşleme

Sinyal işleme, sinyalde bulunan bilgilerin elde edilmesi için kullanılan teknikleri içerir. Sinyal işleme, sistem analizi ve sentezi için, sistemlerin sinyallerde yaptığı

değişimlerin bulunması veya sinyalde istenen değişiklikleri yerine getirecek bir sistemin tasarlanması işidir. Bir sinyalin özellikleri zamanla değişmiyorsa, bunlara durağan sinyaller denir. Durağan sinyalleri incelemek için Fourier dönüşümü kullanılır. Bu sinyaller Fourier dönüşümü altında sinüs ve kosinüs dalgalarının lineer bileşimine ayrışırlar. Fourier analizi bir sinyali frekans bileşenlerine ayrıştırır ve her bir bileşenin etkisini saptar [12]. t sürekli bir değişken olmak üzere bir f(t) sinyali için zamandaki frekans bileşeni yersel olarak incelenebilir. Eğer aralıklar arasında, sinyalin frekans bileşeni önemli ölçüde değişiyorsa, Fourier dönüşümüyle bu işaretin analiz edilmesi halinde, bu dönüşüm bütün zaman eksenini kaplar ve verideki yüksek frekans bilgisinin kaybolması gibi işaretteki her türlü yersel düzensizlikleri kaldırır. Bu nedenle durağan olmayan işaretler ve gerçek zaman işaretlerinin incelenmesinde Fourier dönüşümü tek başına yeterli değildir. Durağan olmayan işaretler için zaman-frekans analiz metodu kullanılması işaretin zamana karşı ani frekans bileşenlerinin karakterize edilebilmesini sağlar.

Çevremizde incelenmesi gereken birçok sinyal mevcuttur. Biyolojik işaretler, insan sesi, makine titreşimleri, müzik gibi birçok sinyalin, kodlanması, sıkıştırılması, temizlenmesi, modellenmesi gibi işlemler yapılmaktadır. Bu amaçla sinyal işleyicileri birçok dönüşüm tekniği kullanmaktadır. Bunlar içerisinde Hilbert Short-Time, Wigner, Dalgacık dönüşümleri, parametrik yöntemler söylenebilir. Her birinin kendine özgü avantaj ve dezavantajları vardır. En eski dönüşüm yöntemi Fourier Dönüşüm yöntemidir. Birçok sinyal zaman alanında gösterilir. Zaman aralığında bir sinyalin çizilmesi zaman-genlik gösterimi ile ifade edilir. Bu gösterim çoğu zaman sinyal işlemede iyi bir gösterim olmamaktadır. Çoğu durumlarda ayırt edilebilir önemli bilgiler frekans bileşenlerinde gizlidir. Fourier dönüşümü, sinyalin frekans bileşenlerini bize verir. Yani sinyalde ne kadarlık bir frekans mevcut olduğunu gösterir. Fakat bu frekansların hangi zaman aralığında olduğunu gösteremez. Eğer sinyal durağan ise, bu bilgiler gerekli değildir. Çünkü durağan sinyallerde zamana göre frekans değişmez. Eğer sinyalin zamana göre frekansı değişiyorsa, bunlara durağan olmayan sinyaller denir. Fourier dönüşümü de durağan olmayan sinyallerde ne tür bir spektral bileşen olduğunu öğrenmek için kullanılabilir, fakat nerede oluştuğunu söyleyemez [13].

Görüntü işleme, alıcılardan gelen görüntünün bilgisayara aktarılıp üzerinde herhangi bir işlem yapılması ve ardından görüntüleyici çıkışa iletilmesidir. Başka bir deyişle, dijital bir resim haline getirilmiş olan gerçek yaşamdaki görüntülerin, bir girdi resim olarak işlenerek, o resmin özelliklerinin ve görüntüsünün daha net anlaşılması için değiştirilerek yeni bir resmin oluşturulmasıdır.

Görüntü işlemenin birçok uygulama alanı mevcuttur. Bunlardan bazıları şu şekilde sıralanabilir: Bilgisayar görüşü (Computer vision) uygulamaları, uzaktan algılama uygulamaları (uydu görüntüleri üzerinde nüfus yoğunluğu, yerleşim yerleri, çevre kirliliği vs. gibi çevresel şartların tespiti, ulusal güvenlikte kullanılması), endüstriyel uygulamalar (bir üretim bandında üretilen ürünün otomatik test edilmesi; örneğin, bir kart üzerindeki devre elemanlarının varlığının veya bağlantı yollarının sağlamlığının tespiti), elektron mikroskobu ile çekilmiş yarı iletken devre elemanı fotoğraflarından hasar tespiti, güvenlik uygulamaları (yüz tanıma, parmak izi tanıma, plaka tanıma, banknot tanıma), medikal görüntüleme (MR, Röntgen, fMRI), astronomi uygulamaları, radar uygulamaları, uydu görüntüleri üzerinde hava gözlem ve tahmin uygulamaları, jeolojik uygulamalar (mineral ve petrol arama, sualtı görüntüleme), arkeolojik uygulamalar (nadir kalıntılara ait bulanık fotoğrafların iyileştirilmesi), bilgisayarda üretilen görüntüler (fraktallar).

Görüntü işlemede birçok işlem yapılabilir. Gürültü temizlemek, parlaklığı ayarlamak, koyuluk ayarlamak, görüntü keskinleştirmek ve bulanıklaştırmak, doğru renk ayarlamak, keskin hatları belirlemek ve kaybolan görüntüyü yeniden elde etmek (inpainting) bunlara örnek olarak gösterilebilir.

Gerçekleştirilen hemen hemen her araştırmada, kayıp ya da eksik veri potansiyeli vardır. Eksik ya da kayıp veri çeşitli sebeplerden oluşabilir. Veri kaybı yaygın bir durumdur ve veriyi kullanarak ulaşılan sonuçlar üzerinde önemli bir etki yaratabilir. Bu durumda görüntünün temsil edilebilirliği azalıp görüntü ile ilgili çıkarımlar değişebilir. Mümkünse veri kaybını kayıt esnasında önlemek için çalışılabilir. Bununla birlikte özellikle medikal veri üzerinde çalışırken bu pratik bir çözüm olmayabilir.

Görüntülerdeki kayıp veriyi elde etmek, hem sinyal hem de görüntü işleme alanlarında birçok uygulamaya sahip önemli bir ters problemdir. Kayıp olan verinin yeniden elde edilmesinin birçok örneği vardır: Güvenilmez şekilde iletilmiş görüntülerdeki kayıp olan blokların doldurulması, eski fotoğraflardaki çiziklerin giderilmesi, görüntüleri büyütmek, daha iyi sıkıştırma için görüntülerdeki değerleri tahmin etme bunlar arasında gösterilebilir. Birçok kez medikal doktorlar kayıt esnasında önemli veri kaybı olabileceğini belirtmişlerdir. Kayıp veriyi yeniden elde etme, her ne sebeple olursa olsun kayıt işleminin tekrar mümkün olamayacağı durumlarda önemli bir seçim olacaktır.

1.3. Medikal Sinyaller ve Görüntüler

Birçok medikal sinyal ve görüntü, onları anlayıp yorumlamak ihtiyacı nedeniyle bilim adamlarının ilgisini çekmektedir. Bu medikal sinyaller ve görüntüler arasında elektroensefalogram (EEG), elektrokardiyogram (EKG), manyetik rezonans görüntüleme (MR), bilgisayarlı tomografi (BT), X-ışını (röntgen) ve mamografi söylenebilir. Bu sinyallerin ve görüntülerin yorumlanması, hayatımızı tehdit eden medikal hastalıkların tanısında kolaylık sağlar. Bu medikal sinyalleri ve görüntüleri kısaca tanıyalım.

Nöbetler ya da krizler kısa bir zaman aralığı için genellikle kişinin nasıl davranacağını veya nasıl hissettiğini etkileyen, beyindeki elektriksel aktivitenin aniden artması veya yükselip düşmesi şeklinde tanımlanabilir. Epilepsi tekrarlayan nöbetlerle bilinen yaygın bir sinirsel bozukluktur. Dalgacık dönüşümü kullanılarak çeşitli ayrışım seviyelerinde farklı enerji dağılımlarıyla tanımlanan 40 dan fazla epilepsi çeşidi vardır. Elektroensefalogram (EEG) serebral korteks sinir hücreleri tarafından üretilen elektriksel potansiyelin bir kaydıdır. Kaydedilen EEG değişen elektrik alanının yersel dağılımının grafiksel gösterimini sağlar. Matematiksel prizma ya da mikroskop olarak da bilinen dalgacık dönüşümü EEG nin analizi ve doğru anlaşılması için kullanılabilmektedir. Tıp tarihindeki en eski elektrofizyolojik yöntemlerden biri olan EEG, özellikle epilepsi, ansefalit ve ensefalopati gibi hastalıkların tanı ve izlenmesinde vazgeçilmezliğini kanıtlamıştır. Öte yandan elektrofizyolojiksel yöntemler içinde en çok yanlış yorumlanandır. EEG kafatası

üzerine yerleştirilen çoklu elektrotlar tarafından kaydedilir. Genellikle 20-40 dakika arasında süren bir kayıttır.

Elektrokardiyogram (EKG) kalbin içindeki elektriksel aktivitenin kaydıdır. Kalp, kasılması için kalp kasına doğru yayılan küçük elektriksel uyarılar üretir. Bu uyarılar EKG makinesi tarafından tespit edilebilir. Makine her kalp atışı meydana geldiğinde elektriksel uyarıları artırır. Daha sonra bu uyarılar bir kâğıda ya da bilgisayara kaydedilir. Elde edilen grafikteki sivrilikler ve eğimler incelenir.

X-ışınları doktorlara hastalığın tanısını koymada yardımcı olan bir noninvaziv (yani hastaya dışarıdan uygulanan) medikal testtir. X-ışınları ile görüntüleme vücudun iç organlarını görüntülemek için küçük dozda iyonize edilmiş radyasyona vücudu maruz bırakır. X-ışınları medikal görüntülemedeki bilinen en eski yöntemdir.

Mamogramlar X-ışını filminden üretilen meme dokusunun görüntüleridir. Meme kanserinin erken teşhisinde önemli rol oynarlar. Meme kanserinden ölümlerin azalmasına yardım ederler. Mamografi düşük enerjili X-ışını kullanan bir işlemdir. İnsan memesini incelemede bir tanı ve tarama aracı olarak kullanılır. Radyologlar herhangi bir anormal bulgular için görüntüyü incelerler. Bilgisayar destekli algılama sistemleri dijital bir mamografik görüntü kullanır. Daha sonra bilgisayar yazılımı, kanserin varlığına işaret edebilen kitle, kireçlenme ya da yoğunluğun olduğu anormal bölgeleri araştırır. Bilgisayar destekli algılama sistemleri görüntülerdeki bu bölgeleri vurgular ve daha fazla incelemesi gereken yerler için radyologları uyarır.

Manyetik rezonans görüntüleme (MR) insan veya hayvanların beyin veya omurilikteki sinir aktivitesi ile ilişkili kan dolaşımsal (hemodinamik) yanıtın (kan akışındaki değişim) ölçmek için kullanılan özel bir tarama türüdür. Beyin görüntülemenin son zamanlarda en çok gelişen çeşitlerinden biridir. Fonksiyonel manyetik rezonans görüntüleme (fMRI) 1990'ların başında, vücuda nispeten düşük giren herhangi bir mikrobun dokulara yayılma kapasitesi, radyasyona maruz kalma yokluğu ve nispeten geniş kullanılabilirlik nedeniyle beyin görüntüleme alanında hakim hale gelmiştir.

Yumuşak dokular için görüntüleme alternatifleri bilgisayarlı eksensel tomografidir (BT tarama). BT taramaları X-ışınlarının özel bir çeşididir. Vücudun içindeki yapıların resimlerini, çoklu X-ışını görüntülerinden veriyi alan ve onları resimlere dönüştüren bir bilgisayar ile oluşturur. BT taraması geleneksel X-ışınlarıyla görüntülenemeyen bazı yumuşak doku ve diğer yapıları ortaya çıkarabilir. Tipik bir X-ışını makinesinde olduğu gibi aynı dozda radyasyon kullanılarak BT taraması ile vücudun bütün bir kısmı yaklaşık 100 kat daha net görülebilir şekilde yapılabilir. BT kemik yapılarını görüntülemek için çok iyidir. İç kulakların incelenmesinde genellikle tercih edilen görüntüleme yöntemidir. İşitme kanallarının içindeki tümörler kolayca tespit edilebilir ve çoğu hastada salyangoz tam bir şekilde gösterilebilir. BT'nin kullanımı birçok ülkede son yirmi yılda önemli ölçüde artmıştır. BT bir tanı aracı olarak ve müdahaleli yöntemler için bir rehber olarak tıpta kullanılır. Bazen damar içi iyotlu kontrast gibi kontrast maddeler kullanılır. Bu kan damarları gibi yapıları detaylandırmak için yararlıdır. Kontrast madde kullanmak dokular hakkında fonksiyonel bilgi elde etmek için yardımcı olur.

1.4. Shearlet Dönüşümüne Giden Yol

Bir görüntüde sınırlar ve tekillikler oldukça önemli bilgileri taşırlar. Görüntü işlemede, bilgisayar görüntülemede ve yapı tanımada analiz ve sınırların belirlenmesi esas amaçlardandır. Sınır belirlemede önemli bir nokta sınır kavramının hem görsel hem de fiziksel bir kavram oluşudur. Fiziksel sınırlar nesnelerin topolojik ve geometrik özelliklerinde süreksizliğe karşılık gelirler. Görsel kenarlar, görüntülerde genellikle keskin yoğunluk değişimi olarak belirlenir. Bu kavramda bazı belirsizlikler vardır. Çoğu durumda bir görüntü üç boyutlu bir nesnenin iki boyutlu gösterimidir. Bir dijital görüntüde, piksel kavramı soyut nokta kavramı yerine ve kesikli bir fonksiyon ise sürekli yoğunluk fonksiyonu yerine kullanılır. Bir görüntü işleme sisteminin nihai amacı, orijinal 3-boyutlu nesne hakkında görüntüden bilgi almaktır.

Görüntü işleme çalışmasında görüntü verisini yorumlamaya çalıştığımızda bazı problemlerle karşılaşılır. Video işlemede, insanlarda görme sistemine benzerlikler vardır (Human Visual System-HVS). Görüntü işlemede, bu bağlantıyı ilk araştıranlar problemi formülüze eden Marr ve arkadaşları [14] gösterilebilir. HVS' nin başarısı

kısmen görüntüdeki düzenliliklere bağlıdır. Bu düzenlilikler HVS'ye görüntünün fiziksel özellikleri hakkında doğru çıkarımlar elde etmesine izin verir. HVS'nin görüntüleri nasıl gösterdiği ve sınırları nasıl belirlediği soruları merak uyandırır. Bu amaçla [14]'de nörofizyolojik çalışmalara dayalı bir yaklaşım geliştirilmiştir. Yine [14]'de bir görüntüde yoğunluk değişimi ve sınırların farklı ölçekler üzerinde olacağı gözlemlenmiştir. Buradan şu önemli sonuç ortaya çıkmıştır: HVS'de ön taslağın oluşumunun modellenmesi için sunulan yaklaşım bir çoklu ölçek yaklaşımıdır. Kenarları belirlemeyi tanımlamadaki temel araç Gausyen'in Laplasyenidir (Laplacian of Gaussian-LoG). Bu durumda görüntüdeki yönlerin durumu hakkında ne söylenebilir? Buna [14]'deki yaklaşım eş yönlü yersel filtrelere dayanan bir çözüm ortaya koymuş, fakat pek çok soruyu cevapsız bırakmıştır.

Dalgacık ölçeklemesi u görüntüsündeki bir kenarı bulmak için ∇u gradyanının büyük olduğu değerlerde aranır. Bu işlem görüntüdeki gürültüye çok hassastır. Gürültüye hassasiyeti azaltmak için u görüntüsünün önce belli bir ölçekte bir G Gaussian (ya da Gausyen benzeri) fonksiyonuyla konvolüsyonu alınır. Sonra $a \in \mathbb{R}$ ölçek parametresi olmak üzere $\nabla(\mathrm{u} * \mathrm{G}_a)$ gradyeni hesaplanır. Burada $\mathrm{G}_a(\mathrm{t}) = \mathrm{G}\left(a^{-1}\mathrm{t}\right)$ dir. Kenar noktalar, gradyenin lokal maksimumu olarak belirlenirler. Bu kenar belirleme, sürekli dalgacık dönüşümü kullanılarak aşağıdaki gibi formüle edilebilir;

$$\psi = \nabla G. \tag{1.1}$$

Bu durumda,

$$\nabla(u * G_a)(t) = u * \nabla G_a(t) = u * a^{-1}\psi_a(t) = \int_{\mathbb{R}} u(t)a^{-1}\psi\big(a^{-1}(x-t)\big)dx \tag{1.2}$$

elde edilir.

1.5. Önceki Çalışmalar

Sinyal ve görüntü işleme uygulamalı matematikte oldukça önemlidir. Bu alanda shearlet ve dalgacık dönüşümü ile yapılmış önemli çalışmalar mevcuttur. Daubechies

[15] çalışmasında dalgacık dönüşümünün teorik yapısıyla ile ilgili temel ve çok önemli bir kaynak sunmuştur. Dalgacık dönüşümü için literatürde EEG analizi ile ilgili önemli çalışmalar mevcuttur. Adeli ve Ark., D'Attellis ve Ark. ve Gigola ve Ark. [16,17,18]'de dalgacık dönüşümünü kullanarak EEG analizi üzerine çalışmalar yapmışlardır. Hallez ve Ark. [19]'da EEG kaynak incelemesinde direkt probleme dayalı bir çalışma sunmuşlardır. Buna karşın Grech ve Ark. [20]'de EEG kaynak incelemesinde ters probleme dayalı bir çalışma sunmuşlardır. Hsu [21]'de, Kumar ve Ark. [22]'de ve Lima ve Ark. [23]'de EEG nin analiz edilip epileptik nöbetlerin sınıflandırılması ve belirlenmesi amacıyla dalgacık dönüşümü ile yapay sinir ağı ve destek vektör makinesi (support vector machine) dayalı çalışmalar gerçekleştirmişlerdir. Bu alandaki çalışmaların nihai amacı epileptik nöbetlerin tahmini için bir mekanizma geliştirmektir. Bu tezde ilk aşamada dalgacık dönüşümünün EEG sinyali üzerine bir çalışması yapıldı. Yapılan bu çalışmada Magosso ve Ark. [24]'de yaptığı EEG nin incelenmesinde dalgacık tabanlı enerji yaklaşımı ile benzer sonuçlar elde edildi. Kocaeli Üniversitesi Araştırma ve Uygulama Hastanesi'nden alınan EEG verileri kullanıldı.

Mallat ve Hwang [25] tekillik belirleme ve dalgacık ile sinyal ve görüntü işleme üzerine bir çalışma gerçekleştirmişlerdir. Bu amaçla gürültü temizleme uygulaması sunmuşlardır. Mallat ve Zhong [26] ise, görüntüler üzerindeki çoklu kenarların dalgacık ile belirlenmesi ve kenarlardan görüntünün tekrar karakterize edilmesi üzerine çalışma yapmışlardır. Mallat [27] kitabında dalgacık dönüşümü kullanarak sinyal işleme üzerine önemli bir kaynak sunmuştur. Donoho [28]'de dalgacık ile eşik değeri belirleyip gürültü temizleme üzerine çalışmıştır. Donoho ve Ark. [29]'da harmonik analiz ve veri sıkıştırma arasındaki etkileşimlerle ile ilgili önemli bir çalışma yapmışlardır.

Kittipoom ve Kutyniok [30]'da sonlu dayanaklı shearlet elemanlarının oluşturulması üzerine ve Kutyniok ve Lim [31]'de sonlu dayanaklı shearlet elemanlarının optimum seviyede seyrekliği üzerine çalışmışlardır. Easley ve Ark. [32]'de, Gomathi ve Kumar [33]'de ve Lim [34]'de ayrık shearlet dönüşümü üzerine çalışmışlardır. Easley ve Ark. [32]'de ayrık shearlet dönüşümünü kullanarak dalgacık dönüşümünün görüntülerin kenar bölgelerinde oluşan süreksizliklerdeki noksanlığının aksine daha

etkili uygulamalar vermişlerdir. Gomathi ve Kumar [33]'de ayrık shearlet dönüşümünden yararlanarak görüntünün yeniden elde edilmesi problemi için bir uygulama gerçekleştirmişlerdir. Lim [34]'de ayrık shearlet dönüşümünü sonlu dayanaklı shearlet elemanlarıyla ilişkilendirmiş ve gürültü temizleme uygulaması vermiştir. Lim ve Ark. [35]'deki araştırmasında, bant-sınırlı shearlet ve sonlu dayanaklı shearlet üzerine bir uygulama sunmuşlardır. Häuser ve Steidl [36]'da shearlet dönüşümünü anlatan ve uygulamalı örnekler veren önemli bir kaynak sunmuşlardır.

Colonna ve Ark. [37]'de shearlet dönüşümünden yararlanarak, radon dönüşümü problemine yenilik katmışlardır. Gürültü temizleme uygulamaları sunmuşlardır. Donoho ve Kutyniok [38]'de geometrik ayrışma problemini analiz etmişlerdir. Dalgacık ve shearlet dönüşümlerine dayalı incelemede bulunmuşlardır. Guo ve Labate [39]'da Shearlet dönüşümünden yararlanarak çok boyutlu verinin gösterimi için daha az veriyle optimum sonuç almışlardır. Kutyniok ve Labate [40]'da sürekli shearlet dönüşümünü sürekli dalgacık dönüşümünün oluşumuna benzer şekilde oluşturarak filtre elemanları kümesinin kararlılığını ispatlamışlardır. Bu durumu noktasal tekilliklerde ve eğri boyunca oluşan tekilliklerde incelemişlerdir. Kutyniok ve Lim [41]'de dalgacık ve shearlet dönüşümlerini kullanarak görüntü ayrıştırma problemini incelemişlerdir. Patel ve Ark. [42]'de görüntüler üzerinde değerlendirme yapmak için shearlet dönüşümüne dayalı yeni bir ters konvolüsyon algoritması vermişlerdir. Yi ve Ark. [43]'de kenarların belirlenmesi ve incelenmesine dayalı bir shearlet yaklaşımı geliştirmişlerdir. Häuser ve Steidl [44]'de shearlet dönüşümüne dayalı bir parçalama modeli kurmuşlar ve bu modeli kullanarak uygulamalar vermişlerdir. Kutyniok [45]'de birleşmiş çizgi-film benzeri ve dokuma yapılarının ayrımının teoriksel çalışmasını kümelenmiş yığılmaya dayalı olarak yapmıştır. Kutyniok ve Labate [46]'da çok değişkenli veri için çoklu çözülme analizini shearlete dayalı olarak incelemişlerdir.

Shearlet dönüşümü ile ilgili bu gelişmelere rağmen henüz Matlab paket programına dahil edilmiş bir ara yüz bulunmamaktadır. Bu tezdeki uygulamalarda yazılan kodlar [47] sitesinden yararlanılarak elde edildi ve kısmen eklemeler yapıldı. Easley ve Ark. [48]'de gürültü temizleme için shearlet tabanlı Toplam varyasyon (total variation)

algoritması sunmuşlardır. Yapılan uygulamalarla bu algoritmanın etkinliğini göstermişlerdir. Guo ve Ark. [49]'da görüntülerdeki gürültülerin giderilmesine yönelik shearlete dayalı bir çalışma yapmışlardır. Easley ve Labate [50]'de shearlet dönüşümünü kullanarak çeşitli görüntü işleme uygulamaları üzerine çalışmışlardır. Gürültü temizleme ve görüntü zenginleştirme ile ilgili çok sayıda uygulama yapmışlardır.

Bu tezde, gürültü temizleme uygulaması ele alınmış ve [50]'deki uygulamadaki sonuçlara benzer sonuçlar elde edildi. [50]'de çeşitli görüntülere gürültü temizleme ve görüntü zenginleştirme uygulamaları yapılmıştır. Yapılan uygulamalarda [50]'den farklı olarak gürültü temizleme uygulamalarında çeşitli medikal görüntüler kullanıldı.

Häuser ve Ma [51]'de depremle ilgili (seismic) veriyi ele almış kayıp veriyi yeniden elde etme problemini shearlete dayalı bir yeniden oluşturma algoritması ile incelemişlerdir. Bu algoritmada dikey maske kullanmışlardır. King ve Ark. [52]'de kümelenmiş yığılmadan yararlanarak verinin ayrıştırılması ve yeniden elde edilmesi problemini incelemişlerdir. King, Kutyniok ve Zhuang [53]'de kümelenmiş yığılmaya dayalı olarak yeniden elde etme problemini incelemişlerdir. Bu incelemedeki model oluşturmada dikey maske kullanmışlardır. Asimptotik analiz yapmış ve shearlet ve dalgacık yöntemlerini karşılaştırmışlardır. King ve Ark. [54]'de görüntülerdeki kaybolan veriyi yeniden elde etme problemini karesel ve dikey maske uygulamalarıyla ele almışlardır. Genzel ve Kutyniok [55]'de kayıp veriyi yeniden elde etme problemi için evrensel shearlet sistemleriyle asimptotik analizini yapmışlardır. Yine bu incelemede model olarak dikey maske kullanılmıştır. Bu tezde, [51,53,54,55]'deki durumdan farklı olarak literatürde yer almayan yatay maske durumunda görüntünün elde edilmesi problemi medikal görüntüler kullanılarak ele alındı. Yatay maske için asimptotik analiz yapıldı. Yatay maske için kod yazıldı ve bulunan sonuçlar shearlet ve dalgacık dönüşümleriyle karşılaştırıldı. Bu tezde, yine [51,53,54,55]'de uygulanmayan kayıp veriyi yeniden elde etme problemi için dairesel maske kodu yazıldı ve medikal görüntüler kullanılarak uygulama sonuçları karşılaştırıldı.

2. TEORİK BİLGİLER

Bu bölümde, tez kapsamında çalışılan shearlet matematik dönüşümü hakkında bilgi verilecektir. Shearlet dönüşümü dalgacık tabanlı bir dönüşüm olarak inceleneceğinden önce dalgacık dönüşümü hakkında bilgi verilecektir.

2.1. Dalgacık dönüşümü

Tanım 2.1. $f \in L^1(\mathbb{R})$ fonksiyonu için Fourier dönüşümü,

$$\hat{f}(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x\gamma} dx \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanır. $\|\hat{f}(\gamma)\|$ normu f fonksiyonundaki γ frekansının yoğunluğunu ölçer.

Tanım 2.2. Paley-Wiener uzayı (PW), $L^2(\mathbb{R})$ nin bir alt uzayı olarak,

$$\text{PW} \coloneqq \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \text{supp}\hat{f} \subseteq \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \right\} \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.1. [15] (Shannon örnekleme teoremi, 1950),

$$\{\text{sinc}(. - k)\}_{k\in\mathbb{Z}} = \{T_k \text{sinc}\}_{k\in\mathbb{Z}} \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlı fonksiyon dizisi Paley-Wiener uzayı için bir ortonormal taban oluşturur. Burada T_k, $T_k f(x) = f(x - k)$ şeklinde tanımlanan öteleme operatörü ve $\text{sinc}(x)$ fonksiyonu da,

$$\text{sinc}(x) \coloneqq \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, & x \neq 0 \\ 1 \quad\quad , & x = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca, $\forall f \in \text{PW}$ için $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)\, T_k \text{sinc}$ ve f fonksiyonu sürekli ise $\forall x \in \mathbb{R}$ için,

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)\, T_k \text{sinc}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)\, \text{sinc}(x-k) \tag{2.5}$$

sağlanır.

Tanım 2.3. $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ olsun. $f * g$ konvolüsyonu aşağıdaki şekilde tanımlanan bir fonksiyondur;

$$(f * g)(y) \coloneqq \int_{-\infty}^{\infty} f(y-x)g(x)dx\,. \tag{2.6}$$

Yardımcı Teorem 2.1. [53] $(f * g)(y)$ iyi tanımlıdır ve $f * g \in L^1(\mathbb{R})$'dir.

Teorem 2.2. [53] $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ olsun. Bu durumda,

$$\widehat{f * g}(\gamma) = \hat{f}(\gamma)\hat{g}(\gamma) \tag{2.7}$$

dir.

$D: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ ölçekleme operatörü,

$$(Df)(x) = 2^{\frac{1}{2}} f(2x) \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumu $j \in \mathbb{Z}$ için genelleştirirsek,

$$\left(D^j f\right)(x) = 2^{\frac{j}{2}} f\left(2^j x\right) \tag{2.9}$$

elde edilir. $\Psi \in L^2(\mathbb{R})$ fonksiyonu için,

$$\Psi_{j,k}(x) \coloneqq \left(D^j T_k \Psi\right)(x) = 2^{\frac{j}{2}} T_k \Psi\left(2^j x\right) = 2^{\frac{j}{2}} \Psi\left(2^j x - k\right), \qquad j,k \in \mathbb{Z} \tag{2.10}$$

olsun.

Tanım 2.4. Bir dalgacık $\left\{\Psi_{j,k}\right\}_{j,k\in\mathbb{Z}} = \left\{D^j T_k \Psi\right\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ fonksiyonlar ailesi $L^2(\mathbb{R})$ için ortonormal taban oluşturan bir Ψ fonksiyonudur. Bu durumda, Ψ bir dalgacık ise, $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$ için,

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \Psi_{j,k}\rangle \Psi_{j,k} = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \langle f, D^j T_k \Psi\rangle D^j T_k \Psi \tag{2.11}$$

sağlanır. Bu durum sadece sınırlı sayıda fonksiyonlar için geçerlidir.

Örnek 2.1. Haar dalgacığı (1910),

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \le x \le 1 \\ 0 & \text{Diğer Durumlarda} \end{cases} \tag{2.12}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon Haar dalgacık fonksiyonudur.

Tanım 2.5. Bir çoklu çözülme analizi (multiresolution) $L^2(\mathbb{R})$ nin kapalı alt uzaylarının bir $\left\{v_j\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ dizisi ve $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ fonksiyonu ile aşağıdaki özellikleri sağlayacak şekilde oluşturulur.

(i) $\ldots V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \ldots$

(ii) $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$ ve $\overline{\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = \{0\}$

(iii) $V_{j+1} = DV_j = \{Df : f \in V_j\}$

(iv) $\forall k \in \mathbb{Z}$ için $f \in V_0 \Rightarrow T_k f \in V_0$

(v) $\{T_k \varphi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ailesi V_0 için bir ortonormal tabandır.

Yardımcı Teorem 2.2. [15] Bir V_j uzayı için

(i) $V_j = D^j V_0$

(ii) $V_j = \overline{\text{span}}\{D^j T_k \varphi\}_{k\in\mathbb{Z}}$

sağlanır.

İspat. $j > 0$ için,

$$V_j = DV_{j-1} = D^2 V_{j-2} = \cdots = D^j V_0 \tag{2.13}$$

elde edilir. $V_0 = \overline{\text{span}}\{T_k \varphi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ özelliği kullanılırsa,

$$V_j = D^j V_0 = D^j(\overline{\text{span}}\{T_k \varphi\}_{k\in\mathbb{Z}}) = \left(\overline{\text{span}}\{D^j T_k \varphi\}_{k\in\mathbb{Z}}\right) \tag{2.14}$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 2.2' ye göre V_j uzaylarını φ fonksiyonu belirlemektedir.

Yardımcı Teorem 2.3. [15] Çoklu çözülme analizinde oluşan φ fonksiyonunu ele alınsın. Bu durumda,

$$\hat{\varphi}(2\gamma) = H_0(\gamma)\hat{\varphi}(\gamma) \tag{2.15}$$

olacak şekilde 1-periodik olan $H_0 \in L^2(0,1)$ fonksiyonu vardır.

İspat. Tanım 2.5' in sırasıyla (v), (i) ve (iii) özellikleri uygulanırsa,

$$\varphi \in V_0 \subset V_1 = DV_0 \tag{2.16}$$

dir. Buradan,

$$D^{-1}\varphi \in V_0 \tag{2.17}$$

ve buradan da,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} D^{-1}\varphi \in V_0 \tag{2.18}$$

elde edilir. Tanım 2.5' in (v). özelliğinden, $\{T_k\varphi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ailesi V_0 için bir ortonormal tabandır. Buradan $\{T_{-k}\varphi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ailesi de V_0 için bir ortonormal tabandır. $\mathcal{F}$ ile Fourier dönüşümü gösterilsin. Buradan,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} D^{-1}\varphi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k T_k \varphi \tag{2.19}$$

olacak şekilde $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ katsayıları mevcuttur. Böylece,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{F} D^{-1}\varphi = \mathcal{F} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k T_{-k}\varphi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \mathcal{F} T_{-k}\varphi \tag{2.20}$$

ve,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{F} D^{-1}\varphi = \mathcal{F} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k T_{-k}\varphi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \mathcal{F} T_{-k}\varphi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k E_k \mathcal{F}\varphi \tag{2.21}$$

elde edilir. $\mathcal{F} D^{-1} = D\mathcal{F}$ özelliği uygulanırsa,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} D\mathcal{F}\varphi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k E_k \mathcal{F}\varphi \tag{2.22}$$

ya da,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2}\hat{\varphi}(2\gamma) = \sum c_k E_k(\gamma)\hat{\varphi}(\gamma) \tag{2.23}$$

elde edilir. Buradan,

$$\hat{\varphi}(2\gamma) = \sum c_k e^{2\pi i k\gamma} \hat{\varphi}(\gamma) \tag{2.24}$$

elde edilir. $H_0(\gamma) \coloneqq \sum c_k e^{2\pi i k\gamma}$ alınırsa, bu durumda,

$$\hat{\varphi}(2\gamma) = H_0(\gamma)\hat{\varphi}(\gamma) \tag{2.25}$$

elde edilir. H_0 1-peryodik, ve $H_0 \in L^2(0,1)$'dir.

Teorem 2.3. [15] $H_0 \in L^2(0,1)$ olmak üzere $H_1(\gamma) \coloneqq \overline{H_0\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)} e^{-2\pi i\gamma}$ eşitliği sağlanır.

Teorem 2.4. [15] $\hat{\psi}(2\gamma) = H_1(\gamma)\hat{\varphi}(\gamma)$ ile ψ fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda ψ bir dalgacıktır. Yani $\{D^j T_k \psi\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ ailesi $L^2(\mathbb{R})$ için bir ortonormal taban oluşturur.

Teorem 2.3' de tanımlanan $H_1(\gamma)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi incelensin;

$$H_o(\gamma) = \sum c_k E_k(\gamma) = \sum c_k e^{2\pi i k\gamma} \tag{2.26}$$

eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} H_1(\gamma) &= \overline{H_0\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)} e^{-2\pi i\gamma} \\ &= \overline{\sum c_k e^{2\pi i k\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)}}\, e^{-2\pi i\gamma} \\ &= \sum \overline{c_k}\, \overline{e^{\pi i k} e^{2\pi i k\gamma}} e^{-2\pi i\gamma} \\ &= \sum c_k (-1)^k e^{-2\pi i k\gamma} e^{-2\pi i\gamma} \\ &= \sum d_k e^{2\pi i k\gamma} \end{aligned} \tag{2.27}$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.4. [15] $H_1(\gamma) = \sum d_k e^{2\pi i k\gamma}$ olsun. Bu durumda ψ dalgacık fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılır;

$$\psi(x) = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k \varphi(2x+k) = \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k D T_{-k}\varphi(x)\,. \tag{2.28}$$

Bir çoklu çözülme analizi φ fonksiyonunun uygun bir seçimiyle belirlenir. Bir φ fonksiyonu verildiğinde ψ dalgacık fonksiyonu $(H_0 \longrightarrow H_1 \longrightarrow \psi)$ şeklinde oluşturulabilir.

Yardımcı Teorem 2.5. [15] $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ fonksiyonunun bir çoklu çözülme analizi oluşturduğunu varsayalım. $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ olsun ve $\{T_k\psi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ailesi V_0 için bir ortonormal taban olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar gerçeklenir.

(i) Her $j \in \mathbb{Z}$ için $\{D^j T_k\psi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ fonksiyonları V_j için bir ortonormal taban oluşturur.

(ii) $\{D^j T_k\psi\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ fonksiyonları $L^2(\mathbb{R})$ için bir ortonormal taban oluşturur. Bu durumda ψ fonksiyonu bir dalgacıktır.

(iii) $\{T_k\varphi\}_{k\in\mathbb{Z}} \cup \{D^j T_k\psi\}_{j\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}}$ fonksiyonları $L^2(\mathbb{R})$ için bir ortonormal taban oluşturur. Buradan,

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, T_k\varphi\rangle T_k\varphi + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, D^j T_k\psi\rangle D^j T_k\psi \tag{2.29}$$

elde edilir.

Tanım 2.6. Bir $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ fonksiyonuna $(-\infty,\infty)$ kümesi üzerinde,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0 \tag{2.30}$$

ise, dalgacık denir.

Uyarı 2.1. $\hat{\psi}(\omega)$, ψ'nin Fourier dönüşümü olmak üzere, $\psi \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$ fonksiyonu için,

$$c_\psi = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \tag{2.31}$$

sağlanıyorsa, Denklem (2.31) koşuluna dalgacık kabul edilebilirlik koşulu denir.

Aşağıdaki yardımcı teorem yardımıyla dalgacıkların bir çeşidini oluşturmak mümkün olacaktır.

Yardımcı Teorem 2.6. [15] $\varphi^{(n)} \in L_2(\mathbb{R})$ olmak üzere φ sıfırdan farklı n≥1 n-yinci mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\psi(x) = \varphi^{(n)}(x) \tag{2.32}$$

bir dalgacıktır.

Örnek 2.2. (Meksika Şapkası Dalgacığı).

$$\psi(x) = (1 - x^2)e^{-x^2/2} \tag{2.33}$$

denklemiyle tanımlanan fonksiyon Meksika Şapkası Dalgacığı olarak bilinir. $\psi(x)$, Yardımcı Teorem 2.6'daki Denklem (2.32)'yi sağlar, yani,

$$\psi(x) = -\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-x^2/2}\right) = (1 - x^2)e^{-x^2/2} \tag{2.34}$$

olur. Yardımcı Teorem 2.6'dan $\psi(x)$ bir dalgacıktır.

Teorem 2.5. [15] ψ bir dalgacık ve φ sınırlı integrallenebilir bir fonksiyon olsun, bu durumda $\psi * \varphi$ konvolüsyon fonksiyonu bir dalgacıktır.

İspat.

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi * \varphi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x-t)\varphi(t)dt\right|^2 dx$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x-t)||\varphi(t)|dt\right)^2 dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x-t)||\varphi(t)|^{1/2}|\varphi(t)|^{1/2}\,dt\right)^2 dx \tag{2.35}$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x-t)|^2|\varphi(t)|dt\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(t)|\,dt\right)dx$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(t)|dt\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x-t)|^2|\varphi(t)|\,dxdt$$

$$\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(t)|\,dt\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2dx < \infty$$

olduğundan $\psi * \varphi \in L_2(\mathbb{R})$ elde edilir.

Öte yandan, Teorem 2.2'den,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|\widehat{\psi * \varphi}(\omega)\right|^2}{|\omega|} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|\hat{\psi}(\omega)\hat{\varphi}(\omega)\right|^2}{|\omega|}d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|\hat{\psi}(\omega)\right|^2}{|\omega|}|\hat{\varphi}(\omega)|^2 d\omega \tag{2.36}$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\left|\hat{\psi}(\omega)\right|^2}{|\omega|}\,d\omega\right)\sup|\hat{\varphi}(\omega)|^2 < \infty.$$

Buradan $\psi * \varphi$ bir dalgacıktır.

Tanım 2.7. ψ dalgacığına dayalı bir $f \in L_2(\mathbb{R})$ fonksiyonunun T_ψ Sürekli Dalgacık Dönüşümü, aşağıdaki şekilde tanımlanır. Burada, $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ ve $\bar{\psi}$ kompleks eşleniği ifade eder;

$$T_\psi f(a,t) = |a|^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} f(x)\bar{\psi}\left(\frac{x-b}{a}\right) dx. \tag{2.37}$$

Uyarı 2.2.

(i) $\psi_{a,t}(x)$ fonksiyonu,

$$\psi_{a,t}(x) = |a|^{-1/2}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right), a > 0,\ t \in \mathbb{R} \tag{2.38}$$

ile verilen fonksiyonların bir ailesi olarak ele alınırsa, bu durumda, $T_\psi f(a,t)$ ifadesi,

$$T_\psi f(a,t) = \langle f, \psi_{a,t}\rangle \tag{2.39}$$

şeklinde f ile $\psi_{a,t}$ nin iç çarpımı olarak yazılabilir. Burada ψ fonksiyonu ana dalgacık fonksiyonu olarak adlandırılır.

(ii) Dalgacık dönüşümü, f ile $\psi_{a,t}(x)$ nin iç çarpımı olarak ifade edildiğinden, lineerdir. $T_\psi f(a,t)$ asimptotik olarak f nin tekilliklerinin yerini işaret eder.

Örnek 2.3. $\mathbb{R}$ üzerinde ψ dalgacık fonksiyonu verilsin. δ, $\mathbb{R}$ üzerinde Dirac delta fonksiyonu olsun. Bu durumda, δ Dirac delta fonksiyonunun sürekli dalgacık dönüşümü aşağıdaki gibidir;

$$T_\psi \delta(a,t) = \langle \delta, \psi_{a,t}\rangle = \psi_{a,t}(0). \tag{2.40}$$

Örnek 2.4. $\mathbb{R}$ üzerinde ψ dalgacık fonksiyonu verilsin. Denklem (2.41) ile tanımlanan Heaviside basamak fonksiyonunun sürekli dalgacık dönüşümü Denklem (2.42)'deki gibidir;

$$h(x) = \begin{cases} 1 & ,\ x \geq 0 \\ 0 & ,\ x < 0. \end{cases} \tag{2.41}$$

$$T_\psi h(a,t) = \langle \hat{h}, \hat{\psi}_{a,t} \rangle = \sqrt{a} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi i \xi} \overline{\hat{\psi}(a\xi)} e^{-2\pi i \xi t} d\xi = \sqrt{a} \int_{\mathbb{R}} \hat{\gamma}(\eta) e^{-2\pi i \eta \frac{t}{a}} d\eta \qquad (2.42)$$

Burada,

$$\hat{\gamma}(\eta) = \frac{1}{2\pi i \eta} \overline{\hat{\psi}(\eta)} \qquad (2.43)$$

şeklindedir.

Dalgacık Teorisinin 2-boyutlu duruma genişletilmesi için temel grup teorisi bilgilerine ihtiyaç vardır. Bu amaçla, $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ olmak üzere $L^2(\mathbb{R}^2)$ üzerindeki sürekli afin sistemleri,

$$\left\{ \psi_{M,t} = T_t D_M^{-1} \psi = |detM|^{1/2} \, \psi\big(M(.-t)\big) : (M,t) \in Gx\mathbb{R}^2 \right\} \qquad (2.44)$$

şeklinde tanımlansın. Bu tanımda, G tersi olan 2x2 boyutlu matrisler uzayı $GL_2(\mathbb{R})$ nin bir alt grubudur. D_M operatörü, $L^2(\mathbb{R}^2)$ üzerinde,

$$D_M \psi(x) = |detM|^{-1/2} \psi(M^{-1}x), M \in GL_2(\mathbb{R}) \qquad (2.45)$$

şeklinde tanımlanmış genişleme operatörü ve T_t operatörü $L^2(\mathbb{R}^2)$ üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanmış öteleme operatörüdür;

$$T_t \psi(x) = \psi(x-t), \qquad t \in \mathbb{R}^2. \qquad (2.46)$$

Her $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonunun $\big(\langle f, \psi_{M,t} \rangle\big)_{M,t}$ katsayılarından tekrar elde edilebilmesi için ψ üzerindeki koşulların belirlenmesi gerekir. Bu amaçla, aşağıdaki gibi bir grup yapısıyla $\psi_{M,t}$ nin elemanları oluşturulmalıdır;

$$(M,t).(M',t') = (MM', t + Mt'). \qquad (2.47)$$

Bu şekildeki bir grup kümesi $\mathcal{A}_2$ ile gösterilir ve $\mathbb{R}^2$ üzerinde afin grup diye adlandırılır.

Teorem 2.6. [56] $d\mu$, $G \subset GL_2(\mathbb{R})$ üzerindeki bir sol-invaryant Haar ölçümü ve $d\lambda$, $\mathcal{A}_2$'nin bir sol Haar ölçümü olsun. Ayrıca $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonu,

$$\int_G \left|\hat{\psi}(M^T\xi)\right|^2 |detM|\, d\mu(M) = 1 \tag{2.48}$$

kabul edilebilirlik koşulunu sağlasın. Bu durumda, her $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonu,

$$f = \int_{\mathcal{A}_2} \langle f, \psi_{M,t}\rangle\, \psi_{M,t} d\lambda(M,t) \tag{2.49}$$

formülü ile yeniden elde edilir.

Tanım 2.8. Yukarıdaki teoremin koşulları sağlandığında $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonuna sürekli bir dalgacıktır denir. Bu durumda sürekli dalgacık dönüşümü,

$$L^2(\mathbb{R}^2) \ni f \to T_\psi f(M,t) = \langle f, \psi_{M,t}\rangle, (M,t) \in \mathcal{A}_2 \tag{2.50}$$

şeklinde tanımlanır. G genişleme grubu $G = \{aI_2 : a > 0\}$ şeklinde izotropik genişlemeler durumuna karşılık geldiğinde özel bir durum elde edilir. Bu durumda, ψ için kabul edilebilirlik koşulu aşağıdaki şekilde olur;

$$\int_{a>0} \left|\hat{\psi}(a\xi)\right|^2 \frac{da}{a} = 1. \tag{2.51}$$

Böylece izotropik sürekli dalgacık dönüşümü $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonu için,

$$T_\psi f(a,t) = a^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\, \overline{\psi\left(a^{-1}(x-t)\right)}\, dx\,, \qquad a > 0\,, t \in \mathbb{R}^2 \tag{2.52}$$

şeklinde olacaktır.

Örnek 2.5. $\mathbb{R}^2$ üzerinde ψ dalgacık fonksiyonu verilsin. Denklem (2.53) ile tanımlanan Heaviside basamak fonksiyonunun sürekli dalgacık dönüşümü aşağıdaki gibidir;

$$h(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & , \ x_1 \geq 0 \\ 0 & , \ x_1 < 0 \end{cases} \tag{2.53}$$

$$W_\psi H(a,(t_1,t_2)) = \langle H, \psi_{a,t} \rangle = \langle \widehat{H}, \widehat{\psi}_{a,t} \rangle$$

$$\begin{aligned} &= a \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{H}(\xi_1,\xi_2)\overline{\widehat{\psi}(a\xi_1, a\xi_2)} e^{-2\pi i(\xi_1 t_1 + \xi_2 t_2)} d\xi_1 d\xi_2 \\ &= a \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\delta_2(\xi_1,\xi_2)}{2\pi i \xi_1} \overline{\widehat{\psi}(a\xi_1, a\xi_2)} e^{-2\pi i(\xi_1 t_1 + \xi_2 t_2)} d\xi_1 d\xi_2 \\ &= a \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi i \xi_1} \overline{\widehat{\psi}(a\xi_1, 0)} e^{-2\pi i \xi_1 t_1} d\xi_1 \\ &= a \int_{\mathbb{R}} \hat{\gamma}(\eta) e^{-2\pi i \eta \frac{t_1}{a}} \, d\eta. \end{aligned} \tag{2.54}$$

1-boyutlu duruma benzer şekilde,

$$\hat{\gamma}(\eta) = \frac{1}{2\pi i \eta} \overline{\widehat{\psi}(a\eta, 0)} \tag{2.55}$$

alınmıştır.

2.2. Shearlet dönüşümü

Shearlet sistemi tanıtılmadan önce yapısının merkezindeki fikirler incelenmek istenirse, bu durum farklı ölçeklerde elemanlar üretmek için uygun bir ölçekleme operatörü, yönlerini değiştirmek için ortogonal bir operatör ve 2-boyutlu düzlemde bu elemanları yer değiştirmek için bir öteleme operatörünün birleşimini

(kombinasyonunu) gerektirir. Ölçekleme operatörünün eş yönlü olmaması beklendiğinden D_{A_a} , $a > 0$, genişleme operatörleri ailesinden yararlanılır ve parabolik ölçekleme matrisi A_a ise,

$$A_a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix} \tag{2.56}$$

şeklinde ele alınır. Burada genişleme operatörü iki boyutlu dalgacık dönüşümünde tanımlanan operatördür. A_a yerine, daha genel matrisler olan (köşegen(a, a^{α})), $\alpha \in (0,1)$ matrisi eş yönlü olup olmadığını kontrol eden $\alpha \in (0,1)$ parametresiyle kullanılabilir. Bununla birlikte, $\alpha = 1/2$ değeri önemlidir. Parabolik ölçekleme görüntülerin seyrek yaklaşımlarını optimal bir şekilde elde etmek için istenilir. Ayrıca yönleri değiştirmek için ortogonal bir ötelemeye gereksinim duyulur. Ortogonal iletim için D_{S_s}, $s \in R$ shearing operatörü seçilir. Burada S_s shearing matrisi aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$S_s = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.57}$$

Shearing matrisi açılardan ziyade eğimlerle birleşmiş s değişkenini kullanarak yönleri ifade eder.

Son olarak öteleme operatörü için dalgacık dönüşümünde tanımlanan standart T_t operatörü kullanılır. Bu üç operatör birleştirilerek sürekli shearlet sistemleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.9. $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ için $S\mathcal{H}(\psi)$ sürekli shearlet sistemi,

$$S\mathcal{H}(\psi) = \left\{\psi_{a,s,t} = T_t D_{A_a} D_{S_s} \psi : a > 0, s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^2\right\} \tag{2.58}$$

şeklinde tanımlanır. Yukarıdaki sistemlerin önemli yapısal bir özelliği elemanlarının afin sistemler sınıfından olmasıdır. Dalgacık sistemlerinin grup gösterim teorisine benzer şekilde sürekli shearlet sistemlerinin teorisi afin grubunun ve onun

genelleştirmelerinin birim gösterimlerinin teorisi ile geliştirilebilir. Bu ilişki şu şekilde ifade edilebilir: Shearlet grubu S ile gösterilsin ve $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ kümesi üzerinde aşağıdaki grup çarpımı tanımlansın;

$$(a,s,t)(a',s',t') = \left(aa', s + s'\sqrt{a}, t + S_s A_a t'\right). \tag{2.59}$$

$\sigma: S \to \mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^2))$ birim gösterimi aşağıdaki şekilde tanımlansın, $\sigma(a,s,t)\psi = T_t D_{A_a} D_{S_s}\psi$, burada $\mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^2))$, $L^2(\mathbb{R}^2)$ üzerindeki birim operatörlerin grubunu ifade eder, bir $S\mathcal{H}(\psi)$ sürekli shearlet sistemi,

$$S\mathcal{H}(\psi) = \{\sigma(a,s,t)\psi : (a,s,t) \in S\} \tag{2.60}$$

şeklinde yazılabilir.

Yardımcı Teorem 2.7. [40] $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ kümesi üzerindeki $(a,s,t)(a',s',t') = \left(aa', s + s'\sqrt{a}, t + S_s A_a t'\right)$ grup çarpımı ele alınsın. Bu durumda, $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ kümesi bu grup çarpımıyla bir grup oluşturur.

İspat. $\forall (a,s,t).(a',s',t') \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ için $(a,s,t)(a',s',t') = \left(aa', s + s'\sqrt{a}, t + S_s A_a t'\right) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ olduğundan $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ kümesi grup işlemine göre kapalıdır. $(1,0,0)$ elemanının bu grubun birim elemanı olduğu açıktır. Ters eleman özelliğini göstermek için $\forall (a,s,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ alınarak,

$$(a,s,t)^{-1} = \left(\frac{1}{a}, -\frac{s}{\sqrt{a}}, -{A_a}^{-1}{S_s}^{-1}t\right) \tag{2.61}$$

olduğu gösterilebilir.

$$(a,s,t).\left(\frac{1}{a}, -\frac{s}{\sqrt{a}}, -{A_a}^{-1}{S_s}^{-1}t\right) = \left(a.\frac{1}{a}, s + \left(-\frac{s}{\sqrt{a}}\right).\sqrt{a}, t - S_s.A_a.{A_a}^{-1}{S_s}^{-1}t\right)$$
$$= (1,0,t-t) = (1,0,0) \tag{2.62}$$

ve,

$$\left(\frac{1}{a},-\frac{s}{\sqrt{a}},-{A_a}^{-1}{S_s}^{-1}t\right)(a,s,t)=\left(\frac{1}{a}a,-\frac{s}{\sqrt{a}}+s\frac{1}{\sqrt{a}},-{A_a}^{-1}{S_s}^{-1}t+\ S_{-\frac{s}{\sqrt{a}}}A_{\frac{1}{a}}t\right) \tag{2.63}$$

$$=(1,0,0)$$

elde edilir. Böylece, $\forall(a,s,t)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$ için bu grup işlemine göre bir ters eleman vardır. Yukarıdaki ifadede aşağıda elde edilen eşitlik kullanılmıştır;

$$S_{-\frac{s}{\sqrt{a}}}A_{\frac{1}{a}}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{s}{\sqrt{a}}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{a} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a} & -\frac{s}{a}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -s\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{2.64}$$

$$={A_a}^{-1}{S_s}^{-1}\ .$$

$\forall(a,s,t),(a',s',t'),(a'',s'',t'')\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$ için bu grubun birleşme özelliğinin olduğu gösterilebilir. Yani,

$$\begin{aligned}\big((a,s,t)(a',s',t')\big)(a'',s'',t'')&=\big(aa',s+s'\sqrt{a},t+S_sA_at'\big)(a'',s'',t'')\\&=\big(aa'a'',s+s'\sqrt{a}+s''\sqrt{aa'},t+S_sA_at'+S_{s+s'\sqrt{a}}A_{aa'}t''\big)\\&=\Big(a(a'a''),s+\big(s'+s''\sqrt{a'}\big)\sqrt{a},t+S_sA_a(t'+S_{s'}A_{a'}t'')\Big)\\&=(a,s,t)\big(aa'',s'+s''\sqrt{a'},t'+S_{s'}A_{a'}t''\big)\\&=(a,s,t)\big((a',s',t')(a'',s'',t'')\big)\end{aligned} \tag{2.65}$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadede aşağıda elde edilen eşitlik kullanılmıştır. Birim eleman, ters eleman ve birleşme özellikleri sağlandığından $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$ kümesi bu grup çarpımıyla bir grup oluşturur;

$$S_s A_a S_{s'} A_{a'} = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & s' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & \sqrt{a'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & s\sqrt{a} \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & s'\sqrt{a'} \\ 0 & \sqrt{a'} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} aa' & s'a\sqrt{a'} + s\sqrt{aa'} \\ 0 & \sqrt{aa'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s + s'\sqrt{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} aa' & 0 \\ 0 & \sqrt{aa'} \end{pmatrix} \quad (2.66)$$
$$= S_{s+s'\sqrt{a}} A_{aa'}.$$

Yardımcı Teorem 2.8. [57] $\sigma: S \to \mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^2))$ fonksiyonu,

$$\sigma(a,s,t)\psi(x) = \psi_{a,s,t}(x) = a^{-\frac{3}{4}}\psi\left({A_a}^{-1}{S_s}^{-1}(x-t)\right) \quad (2.67)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, σ fonksiyonu $L^2(\mathbb{R}^2)$ üzerinde S nin birim gösterimidir.

İspat. $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ ve $x \in \mathbb{R}^2$ olsun. Bu durumda,

$$\sigma(a,s,t)(\sigma(a',s',t')\psi)(x) = a^{-\frac{3}{4}}\sigma(a',s',t')\psi\left({A_a}^{-1}{S_s}^{-1}(x-t)\right)$$
$$= (aa')^{-\frac{3}{4}}\psi\left({A_{a'}}^{-1}{S_{s'}}^{-1}\left({A_a}^{-1}{S_s}^{-1}(x-t)-t'\right)\right)$$
$$= (aa')^{-\frac{3}{4}}\psi\left({A_{a'}}^{-1}{S_{s'}}^{-1}{A_a}^{-1}{S_s}^{-1}\left(x-(t+S_s A_a t')\right)\right) \quad (2.68)$$
$$= (aa')^{-\frac{3}{4}}\psi\left({A_{aa'}}^{-1}{S_{s+s'\sqrt{a}}}^{-1}\left(x-(t+S_s A_a t')\right)\right)$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadede aşağıda elde edilen eşitlik kullanılmıştır;

$${A_{a'}}^{-1}{S_{s'}}^{-1}{A_a}^{-1}{S_s}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a'} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a'}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -s' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{a'} & -\frac{s'}{a'} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a'}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{s}{a} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{aa'} & -\frac{s}{aa'} - \frac{s'}{a'\sqrt{a}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{aa'}} \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

ve,

$$A_{aa'}{}^{-1}S_{s+s'\sqrt{a}}{}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{aa'} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{aa'}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -s-s'\sqrt{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{aa'} & -\frac{s}{aa'}-\frac{s'}{a'\sqrt{a}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{aa'}} \end{pmatrix}. \tag{2.70}$$

Buradan,

$$A_{a'}{}^{-1}S_{s'}{}^{-1}A_{a}{}^{-1}S_{s}{}^{-1} = A_{aa'}{}^{-1}S_{s+s'\sqrt{a}}{}^{-1} \tag{2.71}$$

elde edilir.

$I = \sigma(a,s,t)^*\sigma(a,s,t)$ eşitliğinde $\sigma(a,s,t)^* = \sigma((a,s,t)^{-1})$ olacaktır. Bu durumda, σ fonksiyonu $L^2(\mathbb{R}^2)$ üzerinde S nin birim gösterimidir.

Tanım 2.10. $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ için $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ nin sürekli shearlet dönüşümü,

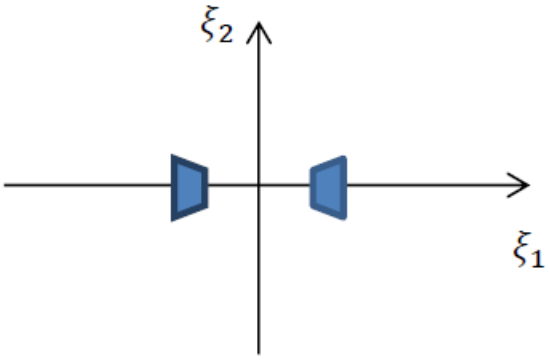
$$L^2(\mathbb{R}^2) \ni f \to S\mathcal{H}_\psi f(a,s,t) = \langle f, \sigma(a,s,t)\psi\rangle, \qquad (a,s,t) \in S \tag{2.72}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece, $S\mathcal{H}_\psi$, f fonksiyonunu $a > 0$ ölçek değişkeni, $s \in R$ yön değişkeni ve $t \in \mathbb{R}^2$ konum değişkeni ile ilişkili $S\mathcal{H}_\psi f(a,s,t)$ katsayılarına dönüştürür.

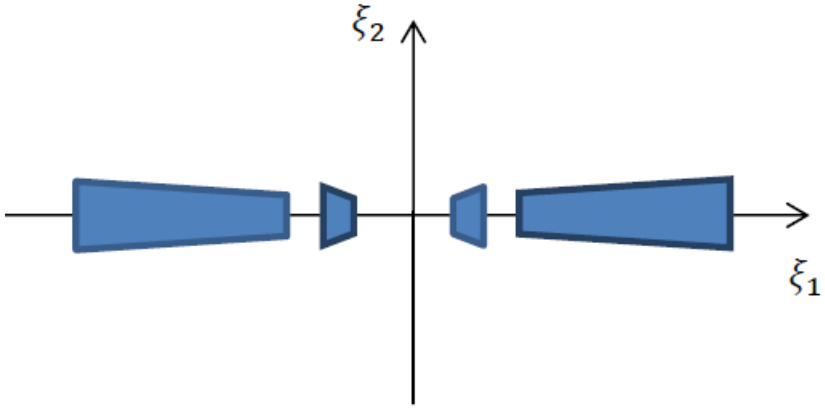
Tanım 2.11. Eğer $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonu, $\hat{\psi} \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\left|\hat{\psi}(\xi_1,\xi_2)\right|^2}{\xi_1^2} d\xi_2 d\xi_1 < \infty \tag{2.73}$$

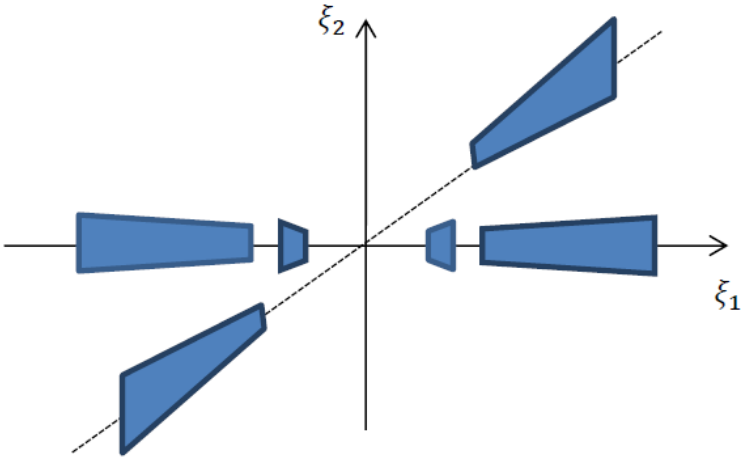
koşulunu sağlarsa, kabul edilebilir bir shearlet denir. $\{\psi_{a,s,t}\}$ elemanlarının geometrik yapıları Şekil 2.1, Şekil 2.2 ve Şekil 2.3' den incelenebilir.



Şekil 2.1. $\{\psi_{a,s,t}\}$'nin geometrik gösterimi



Şekil 2.2. $\{\psi_{a,s,t}\}$'nin ölçeklenmiş geometrik gösterimi



Şekil 2.3. $\{\psi_{a,s,t}\}$'nin ölçeklenmiş ve shear uygulanmış geometrik gösterimi

$\mathcal{A}_2$, $\mathbb{R}^2$ üzerindeki tam afin gruplar kümesi olmak üzere, $\Lambda \subset \mathcal{A}_2$,

$$\Lambda = \{(M,t): M \in G, t \in \mathbb{R}^2\} \tag{2.74}$$

şeklinde tanımlansın. G $\subset$ G$L_2(\mathbb{R})$ olmak üzere G kümesi,

$$\mathrm{G} = \left\{ M = M_{as} = \begin{pmatrix} a & -\sqrt{a}s \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix}, a \in I, s \in S \right\} \tag{2.75}$$

şeklinde tanımlansın. Burada I, $\mathbb{R}^+$'nın alt kümesidir ve S de $\mathbb{R}$'nin alt kümesidir. M matrisi,

$$M = B.A \tag{2.76}$$

şeklindedir. B matrisi,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.77}$$

şeklinde shear matrisi ve A matrisi,

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix} \tag{2.78}$$

şeklinde köşegen matristir. A matrisi parabolik ölçekleme matrisidir. Kabul edilebilirlik koşulunu sağlayan ψ fonksiyonu,

$$\hat{\psi}(\xi) = \hat{\psi}(\xi_1, \xi_2) = \hat{\psi}_1(\xi_1)\, \hat{\psi}_2\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right) \tag{2.79}$$

şeklinde tanımlansın. Buradan M^t matrisi,

$$M^t = \begin{pmatrix} a & 0 \\ -\sqrt{a}s & \sqrt{a} \end{pmatrix} \tag{2.80}$$

$$\Rightarrow M^t(\xi_1,\xi_2)^t = \begin{pmatrix} a & 0 \\ -\sqrt{a}s & \sqrt{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a\xi_1 \\ -\sqrt{a}s\xi_1 + \xi_2\sqrt{a} \end{pmatrix} \tag{2.81}$$
$$= \left(a\xi_1, \sqrt{a}(\xi_2 - s\xi_1)\right)^t$$

şeklinde elde edilir. Böylece,

$$\hat{\psi}(M^t(\xi_1,\xi_2)^t) = \hat{\psi}\left(\left(a\xi_1, \sqrt{a}(\xi_2 - s\xi_1)\right)^t\right)$$
$$= \hat{\psi}_1(a\xi_1)\hat{\psi}_2\left(\frac{\sqrt{a}(\xi_2 - s\xi_1)}{a\xi_1}\right) \tag{2.82}$$
$$= \hat{\psi}_1(a\xi_1)\hat{\psi}_2\left(a^{-1/2}\left(\frac{\xi_2}{\xi_1} - s\right)\right)$$

elde edilir.

Örnek 2.6. Denklem (2.53) ile tanımlanan Heaviside basamak fonksiyonunun sürekli shearlet dönüşümü aşağıdaki gibidir;

$$SH_\psi H(a,s,t) = \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{H}(\xi_1,\xi_2)\overline{\hat{\psi}_{a,s,t}}(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2$$
$$= a^{\frac{3}{4}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi i\xi_1}\overline{\hat{\psi}_1}(a\xi_1)\overline{\hat{\psi}_2}\left(a^{-1/2}s\right)e^{2\pi i\xi_1 t_1}d\xi_1 \tag{2.83}$$
$$= a^{\frac{3}{4}}\overline{\hat{\psi}_2}\left(a^{-1/2}s\right)\int_{\mathbb{R}} \hat{\gamma}(\eta)e^{2\pi i\eta\frac{t_1}{a}}d\eta.$$

Burada,

$$\hat{\gamma}(\eta) = \frac{1}{2\pi i\eta}\overline{\hat{\psi}_1}(\eta) \tag{2.84}$$

alınmıştır.

3. MALZEME VE YÖNTEM

Bu kısımda tezde kullanılan malzeme ve yöntemlerden bahsedilecektir. Bir boyutlu EEG verisine dalgacık dönüşümü uygulanarak spektral analiz yapıldı. Medikal görüntülere gürültü temizleme problemi için dalgacık ve shearlet dönüşümü uygulandı. Kayıp veriyi yeniden elde etme (inpainting) problemine shearlet ve dalgacık dönüşümlerinin dairesel maskeleme ve yatay maskeleme (görüntünün elemanlarına yatay bir şerit olarak uygulanan maske) durumunda uygulanması gerçekleştirildi. Nümerik algoritmalarda kararlılık için yapılan değerlendirmeler görsel ya da medikal veriler için Tepe İşaretin Gürültüye Oranı (Peak Signal-to-Noise Ratio ya da kısaca PSNR) ile ölçülebilmektedir.

Tanım 3.1. Tepe işaretin gürültüye oranı (PSNR) ifadesi bir sinyalin mümkün olan en büyük değeri ile onun gösteriminde etken olan gürültüye/bozulmaya oranını ifade eder. En yaygın ifadesi karekök ortalama hatası (mean squared error ya da kısaca MSE) ile yapılmaktadır. Bir görüntünün elemanları matris elemanları gibi düşünüldüğünden iki görüntüye ait olan mxn boyutlu I ve K matrisleri için MSE ve PSNR aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\mathrm{MSE} = \frac{1}{mn}\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}[I(i,j)-K(i,j)]^2 \quad , \tag{3.1}$$

$$\mathrm{PSNR} = 10\log_{10}\left(\frac{MAX_I{}^2}{\mathrm{MSE}}\right) \quad . \tag{3.2}$$

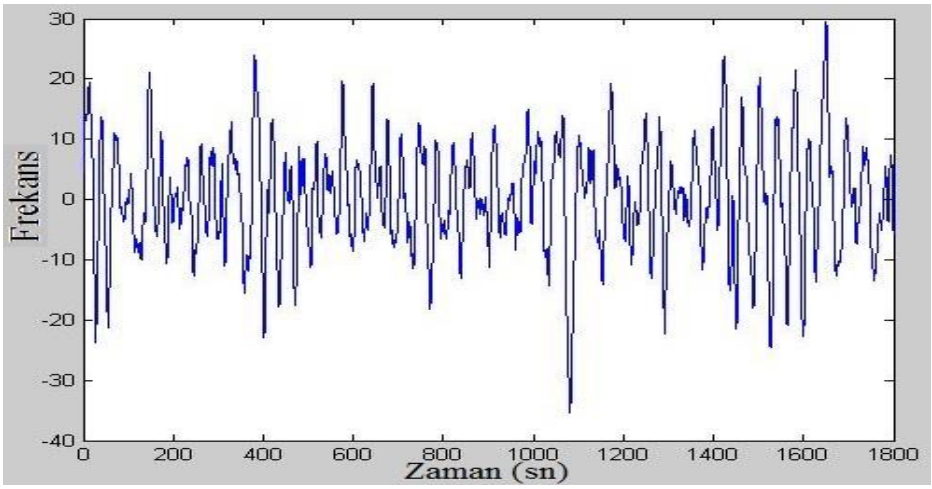
Burada MAX_I görüntüye ait matrisin elemanlarının maksimum değerini ifade eder. EEG sinyali ile ilgili uygulamalarda kullanılacak olan skalogram kavramı aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 3.2. Skalogramlar, farklı ölçekler için dalgacık katsayılarının karelerinin grafiksel gösterimi şeklinde tanımlanır. Skalogramlar daha fazla detay gösterir. Skalogramlar 2 ve 3 boyutlu olarak elde edilebilirler. Skalogramlar sinyalin iyi bir yer-frekans gösterimine olanak sağlar.

Tanım 3.3. Sinyal ve görüntü işlemede kros-korelasyon, iki dalga formunun bir fonksiyon olarak benzerliklerinin bir ölçümüdür. Kros-korelasyon iki veri ile ilgili görsel kıyaslama yapmaya olanak sağlar.

3.1. Kullanılan Medikal Sinyal ve Görüntüler

Tezde kullanılan EEG verileri ve medikal görüntüler Kocaeli Üniversitesi Araştırma ve Uygulama Hastanesi'nden temin edildi. Yapılan bu uygulamalar, 2010/003 kodlu "EEG Sinyallerinin Spektral Analizinde Dalgacık ve Fourier Dönüşümleri" isimli projede KOÜ Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından desteklendi. Örnek bir EEG verisinin grafiği Şekil 3.1'de görülmektedir.



Şekil 3.1. Bir boyutlu örnek bir EEG verisi

Tezde kullanılan medikal görüntüler, batın ön duvarından çekilen ultrason görüntüsü (Şekil 3.2), kardiyak BT tetkikine ait büyük damar ve kalp odacıklarının görüntüsü (Şekil 3.3), damar çevresi dokusu görüntüsü (Şekil 3.4), röntgen görüntüsü (Şekil 3.5) ve mamografi görüntüsü (Şekil 3.6)'dür.



Şekil 3.2. Batın ön duvarından çekilen ultrason görüntüsü



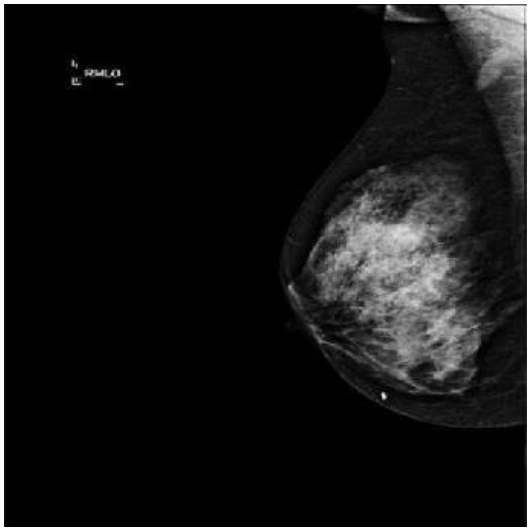
Şekil 3.3**.** Kardiyak BT tetkikine ait büyük damar ve kalp odacıklarının görüntüsü



Şekil 3.4. Damar çevresi dokusu görüntüsü



Şekil 3.5. Röntgen görüntüsü



Şekil 3.6. Mamografi görüntüsü

3.2. Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde kayıp veriyi yeniden elde etme problemine shearlet ve dalgacık dönüşümlerinin yatay maskeleme durumunda matematiksel açıdan incelenmesi için yararlanılacak olan temel tanım ve teoremler verilecektir. Yatay maske durumunun matematiksel açıdan incelenmesi amacıyla oluşturulacak olan model anlatılacaktır. Dalgacık dönüşümü için Meyer dalgacık fonksiyonu kullanılacaktır. Meyer dalgacık fonksiyonunu oluşturmak için kullanılacak olan yardımcı fonksiyon $v \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ fonksiyonu $v(\cdot) + v(1-\cdot) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(\cdot)$ eşitliğini sağlayacak şekilde Denklem (3.3) ile tanımlanmıştır;

$$v(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} . \tag{3.3}$$

$\mathbb{1}_{\mathbb{R}}(\cdot)$ ile ifade edilen fonksiyon aşağıdaki şekilde tanımlanan gösterge fonksiyonudur;

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in A^c \end{cases} . \tag{3.4}$$

$v \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ fonksiyonu ile tanımlanan $\psi(\omega)$ Meyer dalgacığı aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\psi(\omega)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin\left(\frac{\pi}{2}v\left(\frac{3|\omega|}{2\pi}-1\right)\right)e^{j\omega/2}, & 2\pi/3<|\omega|<4\pi/3,\\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos\left(\frac{\pi}{2}v\left(\frac{3|\omega|}{4\pi}-1\right)\right)e^{j\omega/2}, & 4\pi/3<|\omega|<8\pi/3,\\ 0, & \text{Diğer Durumlarda.}\end{cases} \tag{3.5}$$

Bir boyutlu Meyer dalgacık fonksiyonunun Fourier dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$W(\xi)=\begin{cases}e^{-\pi i\xi}\sin\left[\frac{\pi}{2}v(3|\xi|-1)\right], & 1/3\le\xi\le 2/3,\\ e^{-\pi i\xi}\cos\left[\frac{\pi}{2}v\left(\frac{3}{2}|\xi|-1\right)\right], & 2/3\le\xi\le 4/3,\\ 0, & \text{Diğer Durumlarda.}\end{cases} \tag{3.6}$$

Bir boyutlu Meyer ölçekleme fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\phi(\omega)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, & |\omega|<2\pi/3,\\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos\left(\frac{\pi}{2}v\left(\frac{3|\omega|}{2\pi}-1\right)\right)e^{j\omega/2}, & 2\pi/3<|\omega|<4\pi/3,\\ 0, & \text{Diğer Durumlarda.}\end{cases} \tag{3.7}$$

Bir boyutlu Meyer ölçekleme fonksiyonunun Fourier dönüşümü,

$$\hat{\phi}(\xi)\ =\begin{cases}1, & |\xi|\le\frac{1}{3},\\ \cos\left[\frac{\pi}{2}v(3|\xi|-1)\right], & \frac{1}{3}\le|\xi|\le\frac{2}{3},\\ 0, & \text{Diğer Durumlarda}\end{cases} \tag{3.8}$$

şeklinde tanımlanır. $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ için Fourier dönüşümü,

$$\mathcal{F}f\coloneqq\hat{f}=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{-2\pi i\langle\cdot,x\rangle}dx \tag{3.9}$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ifadesi standart Euclid iç çarpımını ifade eder. Ters Fourier dönüşümü ise,

$$\mathcal{F}^{-1}f \coloneqq \check{f} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)e^{-2\pi i\langle\cdot,\xi\rangle}d\xi \tag{3.10}$$

şeklinde tanımlanır.

Yatay maske durumunu incelemek için kullanılacak olan dalgacık fonksiyonu W^h ile gösterilirse, $W^h \in C^\infty \cap L^2(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonu,

$$W^h(\xi) = W(\xi_1)\hat{\phi}(\xi_2) \tag{3.11}$$

şeklinde tanımlanır. Diğer durumlar için kullanılan fonksiyonlar $W^v, W^d \in C^\infty \cap L^2(\mathbb{R}^2)$ için,

$$W^v(\xi) = \hat{\phi}(\xi_1)W(\xi_2), \tag{3.12}$$

$$W^d(\xi) = W(\xi_1)W(\xi_2) \tag{3.13}$$

şekillerinde tanımlanır. Ortonormal Meyer dalgacık sistemi,

$$\{\psi_\lambda\}\colon \lambda = (\iota, j, k), \iota \in \{h, v, d\}, j \in \mathbb{Z}, \qquad k \in \mathbb{Z}^2 \tag{3.14}$$

şeklinde tanımlanır ve $\hat{\psi}_\lambda(\xi)$ fonksiyonu,

$$\hat{\psi}_\lambda(\xi) = 2^{-j}W^\iota\left(\xi/2^j\right)e^{-2\pi ik\xi/2^j}, \quad \lambda = (\iota, j, k) \tag{3.15}$$

şeklinde tanımlanır.

Yatay maske durumunu incelemek için kullanılacak olan parabolik ölçekleme matrisi A_a^h ve shearing matrisi S_s^h aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$A_a^h = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

ve,

$$S_s^h = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

Dikey maskeleme durumunda ise kullanılan parabolik ölçekleme matrisi A_a^v ve shearing matrisi S_s^v aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$A_a^v = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

ve

$$S_s^v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

Yatay maskeleme durumunda kullanılacak olan $\hat{\sigma}^h$ shearlet fonksiyonu,

$$\hat{\sigma}^h(\xi_1, \xi_2) = W(\xi_1) V\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right) \tag{3.20}$$

şeklinde tanımlanır. Dikey maskeleme durumunda ise kullanılan $\hat{\sigma}^v$ shearlet fonksiyonu,

$$\hat{\sigma}^v(\xi_1, \xi_2) = W(\xi_2) V\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right) \tag{3.21}$$

şeklinde tanımlanır. Yukarıdaki denklemlerde kullanılan $V \in L^2(\mathbb{R})$ fonksiyonu $\hat{V} \in C^\infty(\mathbb{R})$, supp$\hat{V} \subseteq [-1,1]$ ve,

$$\sum_{k=-1}^{1} \left|\hat{V}(\xi + \pi k)\right|^2 = 1, \quad \xi \in [-1,1] \tag{3.22}$$

özelliklerini sağlayan bir fonksiyondur. $\hat{\sigma}_\eta$ notasyonuyla aşağıdaki denklem ifade edilir;

$$\hat{\sigma}_\eta = 2^{3j/4}\sigma^\iota\left(S_\ell^\iota A_{2^j}^\iota \cdot -k\right),\ \ \eta = (\iota, j, k, \ell). \tag{3.23}$$

Burada $\iota \in \{h, v\},\ j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}^2,$ ve $\ell \in \mathbb{Z}$ dir. Bu durumda shearlet sistemi,

$$\{\phi(\cdot - k): k \in \mathbb{Z}^2\} \cup \{\sigma_\eta: \iota \in \{h, v\}, j \in \mathbb{Z}, j \geq 0, k \in Z^2, \text{ve } \ell \in \mathbb{Z}, |\ell| \leq \lceil 2^{j/2} \rceil\} \tag{3.24}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\lceil x \rceil$ ifadesi x'den büyük ya da eşit olan en küçük tamsayıyı ifade eder.

3.2.1. Yeniden elde etme modeli

Görüntünün yeniden elde edilmesi aşamasının doğru bir şekilde yapılıp değerlendirilmesi için kullanılacak modelin dikkatli seçilmesi gerekir. Bu amaçla $\mathcal{H}$ Hilbert uzayı, $\mathcal{H}_M$ kaybolan kısım ve $\mathcal{H}_K$ bilinen kısım olmak üzere aşağıdaki gibi iki uzayın direk toplamı şeklinde yazılabilir;

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_M \oplus \mathcal{H}_K. \tag{3.25}$$

$x^0 \in \mathcal{H}$ sinyali verildiğinde, x^0 sinyalinin bilinmeyen kısmı $\mathcal{H}_M$ alt uzayında ve bilinen kısmı ise $\mathcal{H}_K$ alt uzayında yer alır. P_M ve P_K bu alt uzaylara karşılık gelen orthogonal izdüşüm dönüşümlerini gösterirler. Bu durumda veriyi tekrar elde etme problemi, $P_K x^0$ 'ın bilindiğini varsayıp x^0 'ı tekrar elde etme şeklinde formüle edilebilir. Bu durumda görüntüyü yeniden elde etme aşaması için ardışık yaklaşımlar yöntemi kullanılacaktır. Yatay maske uygulanması esnasında, j seviyesinde dalgacık ya da shearlet filtrelerinden biri uygulanıp j seviyesinde görüntünün yeniden elde edilmiş $\left(f_j\right)_j$ dizileri oluşturulacaktır;

$$\left(f_j\right)_j = \left(P_{\boldsymbol{R}^2/\mathcal{M}_k} w\mathcal{L}_j\right)_j. \tag{3.26}$$

Eşik değeri belirleme aşaması ise şu şekilde gerçekleşir. j seviyesinde belirlenmiş β_j eşik değeri için $\mathcal{T}_j = \{i: |\langle f_j, \phi_j \rangle| \geq \beta_j\}$ kümesi dikkate alınarak ardışık yaklaşımlar uygulanır. Bu durumda yeniden elde edilmiş görüntü j seviyesinde,

$$L_j = \Phi \mathbb{1}_{\mathcal{T}_j} \Phi^* w \mathcal{L}_j \tag{3.27}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 3.4. Ayrılabilir bir $\mathcal{H}$ Hilbert uzayındaki $\Phi = \{\varphi_i\}_{i \in I}$ vektörler ailesi eğer her $x \in \mathcal{H}$ için,

$$\sum_{i \in I} |\langle x, \varphi_i \rangle|^2 = \|x\|^2 \tag{3.28}$$

koşulunu sağlıyorsa, $\mathcal{H}$ için bir Parseval çatısı oluşturur. Φ^* eşlenik operatörüne de analiz operatörü denir.

Tanım 3.5. Φ fonksiyonu bir Parseval çatısı ve Λ da katsayıların bir indeks kümesi olsun. Bu durumda $\mathcal{H}_M$'deki yoğunluk,

$$\kappa = \kappa(\Lambda, \mathcal{H}_M) = \sup_{f \in \mathcal{H}_M} \frac{\|\mathbb{1}_\Lambda \Phi^* f\|_1}{\|\Phi^* f\|_1} \tag{3.29}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.6. $\delta > 0$ olsun. Bir $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında Φ Parseval çatısı verilsin. Bu durumda $x \in \mathcal{H}$,

$$\|\mathbb{1}_{\Lambda^c} \Phi^* x\|_1 \leq \delta \tag{3.30}$$

koşulu sağlanıyorsa, Λ indeksine göre Φ'de δ- seyrek olarak tanımlanır.

Şimdi $\mathcal{H}_M$ üzerindeki $\kappa(\Lambda, \mathcal{H}_M)$ yoğunluğu ve μ_c parametresi arasında bir ilişki verilebilir. $P_M\Phi$ ve $P_K\Phi$ İzdüşüm çatı elemanlarını ifade etsin. Bu durumda,

$$\mu(\Phi_1, \Phi_2) = \max_j \max_i \left|\langle \varphi_{1i}, \varphi_{2j} \rangle\right| \tag{3.31}$$

şeklindedir. Bu ifadeden yola çıkılarak aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 3.7. $\Phi_1 = \{\varphi_{1i}\}_{i\in I}$ ve $\Phi_2 = \{\varphi_{2j}\}_{j\in J}$ bir $\mathcal{H}$ Hilbert uzayının iki ailesi ve $\Lambda \subseteq I$ olsun. Bu durumda, Λ ya gore Φ_1 ve Φ_2 nin $\mu_c(\Lambda, \Phi_1; \Phi_2)$ kümelenme uyumluluğu (cluster coherence) parametresi,

$$\mu_c(\Lambda, \Phi_1; \Phi_2) = \max_{j\in J} \sum_{i\in\Lambda} \left|\langle \varphi_{1i}, \varphi_{2j} \rangle\right| \tag{3.32}$$

şeklinde tanımlanır.

Yardımcı Teorem 3.1. [53] $\kappa(\Lambda, \mathcal{H}_M)$ yoğunluğu ile μ_c kümelenme uyumluluğu arasında aşağıdaki ilişki elde edilir;

$$\kappa(\Lambda, \mathcal{H}_M) \le \mu_c(\Lambda, P_M\Phi\,; P_M\Phi\,) = \mu_c(\Lambda, P_M\Phi\,; \Phi\,). \tag{3.33}$$

Yardımcı Teorem 3.2. [53] $\mathcal{T}$ ve x^* yatay maske uygulaması algoritmasında hesaplanan iki parametre olsun ve $\delta > 0$ için x^0, $\mathcal{T}$'ye göre Φ'de seyrek olsun. Bu durumda,

$$\|x^* - x^0\|_2 \le \mathrm{c}[\delta + \|\mathbb{1}_{\mathcal{T}}\Phi^* P_M x^0\|_1] \tag{3.34}$$

elde edilir.

Yatay maskeleme yöntemiyle oluşturulacak modelde L gerçek görüntüyü $w\mathcal{L}$ de yeniden elde edilen görüntüyü ifade etsin. Yeniden elde edilecek olan $w\mathcal{L}$'nin

oluşturulacak olan yatay maske kısmındaki modelde etkisini görmek için aşağıdaki bağıntı kullanılabilir;

$$\langle w\mathcal{L}, f\rangle = \int_{-\rho}^{\rho} w(x_2) f(0, x_2) dx_2 \,. \tag{3.35}$$

Burada 2ρ genişliği ifade etmektedir. $w\mathcal{L}$'nin Fourier dönüşümü,

$$\langle \widehat{w\mathcal{L}}, f\rangle = \langle w\mathcal{L}, \hat{f}\rangle = \int_{\mathbb{R}} w(\xi_2) \int_{\mathbb{R}} f(\xi_1, \xi_2) d\xi_2 \, d\xi_1 \tag{3.36}$$

şeklinde tanımlanır.

$\check{F}_j$ iki boyutlu Meyer dalgacık fonksiyonunun ve Shearlet fonksiyonunun j seviyesine karşılık gelen filtresi olsun. Bu filtrenin F_j Fourier dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$F_j = \sum_{\iota \in \{h,v,d\}} W^{\iota}\left(2^{-j}\xi\right). \tag{3.37}$$

$w\mathcal{L}$'nin filtre şekli $w\mathcal{L}_j$ ile ifade edilsin. Bu durumda,

$$w\mathcal{L}_j = w\mathcal{L} \star \check{F}_j = \int_{\mathbb{R}^2} w\mathcal{L}(\cdot - t)\, \check{F}_j(t) dt \tag{3.38}$$

şeklinde gösterilebilir. Burada Denklem (3.38) kros-korelasyonu ifade eder.

Aşağıdaki yardımcı teorem $w\mathcal{L}_j$'nin normunun değerlendirilmesine olanak sağlamaktadır.

Yardımcı Teorem 3.3. [53] Herhangi bir $c > 0$ için,

$$\left\| w\mathcal{L}_j \right\|_2 \geq c2^{j/2}, \quad j \to \infty \tag{3.39}$$

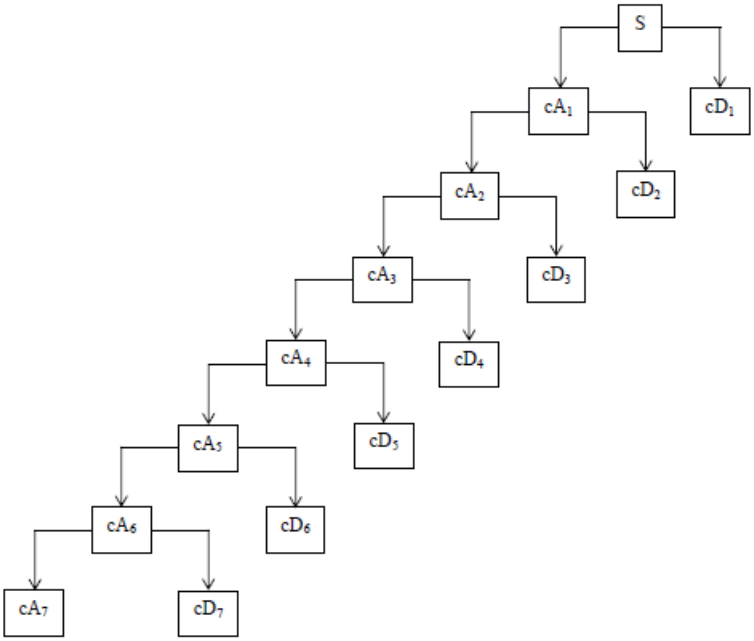
sağlanır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

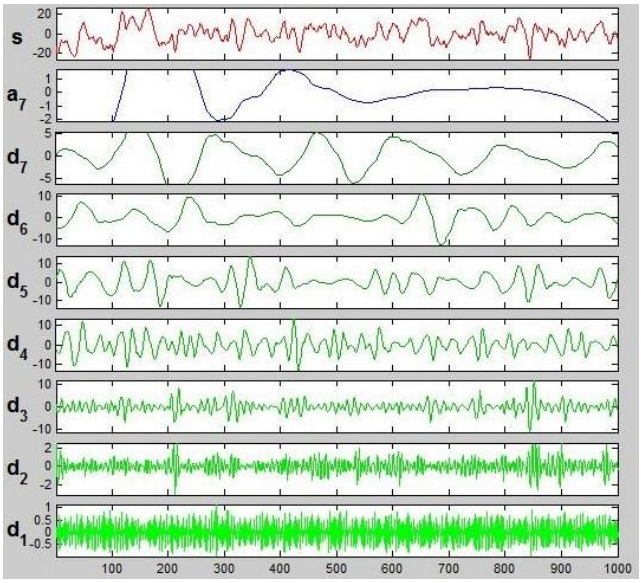
Bu bölümde, ilk önce medikal sinyallerden EEG sinyaline dalgacık dönüşümü uygulanıp elde edilen sonuçlar incelendi. Kullanılan EEG verilerine Matlab paket programında uygun kodlar yazılarak sonuçlar elde edildi. Matlab paket programındaki dalgacık kodlarından yararlanıldı. Dalgacık dönüşümünün 1-boyutlu veriler için uygunluğunun ilk aşama olarak incelenmesi uygun görüldü [58]. Daha sonra shearlet ve dalgacık dönüşümlerinin medikal görüntülerdeki gürültüleri temizlemedeki etkinliklerinin araştırılması yapıldı [59]. Bu amaçla Matlab paket programı ve [47]'deki kodlardan yararlanıldı. Bir diğer inceleme olarak, önce kayıp veriyi yeniden elde etme problemine literatürde yer almayan dairesel maske ve daha sonra yatay maske uygulamaları yapıldı. Yatay maske uygulaması ilk önce matematiksel teori açısından asimptotiksel olarak incelendi. Uygulamalı sonuçların karşılaştırılmasında skalogram, PSNR ve kros-korelasyondan yararlanıldı.

4.1. EEG Verisinin Spektral Analizi

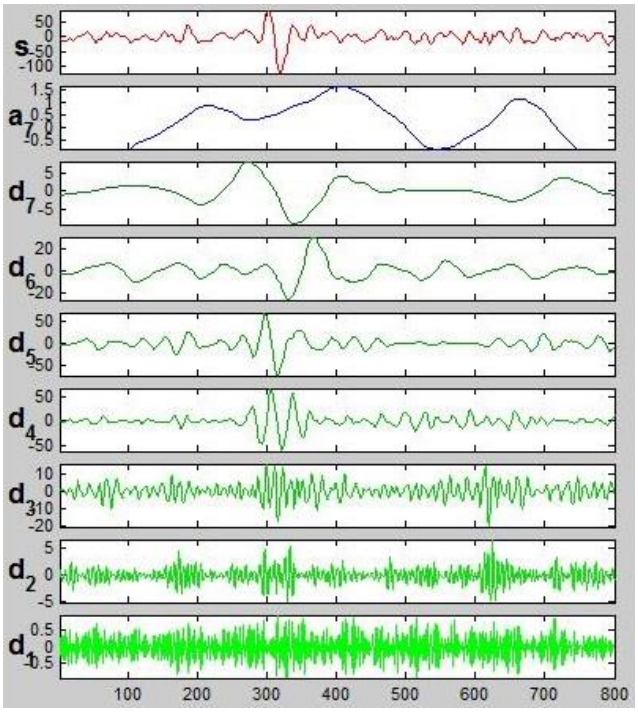
Bu bölümde, Kocaeli Üniversitesi Araştırma ve Uygulama Hastanesi'nden alınan EEG verileri için kullanılacak olan 7. Seviyedeki ağaç modelinin çoklu çözülme analizi Şekil 4.1'de gösterildi. Kullanılan EEG verilerinden epilepsi nöbeti geçirmeyen (S1) Şekil 4.2, tekli epilepsi nöbeti geçiren (S2) Şekil 4.3 ve çoklu epilepsi nöbeti geçiren (S3) Şekil 4.4 hastalarının 18 kanal üzerinden çekilen EEG verilerinin bir kanalına 7. seviyede db4 dalgacık dönüşümü kullanıldı. Bu dönüşüm sayesinde EEG sinyali her bir seviyede detaylı olarak incelendi. Sinyal yaklaşım ve detay kısımlarına ayrıştırıldı. Bu ayrışım algoritmadaki çoklu çözülme analizi sayesinde yapıldı. Sinyal ilk etapta detay (d1) ve yaklaşım (a1) kısımlarına ayrıştırıldı. Daha sonra yaklaşım (a1) kısmı tekrar algoritmayla detay (d2) ve yaklaşım (a2) kısımlarına ayrıştırıldı. Bu ayrışım kaçıncı seviyeye kadar devam edilmek isteniyorsa o seviyeye kadar devam eder. Şekillerde 7. seviyeye kadar yapıldı. Yani (d1)-(d7) ve (a7) seviyelerindeki sinyaller gösterildi.



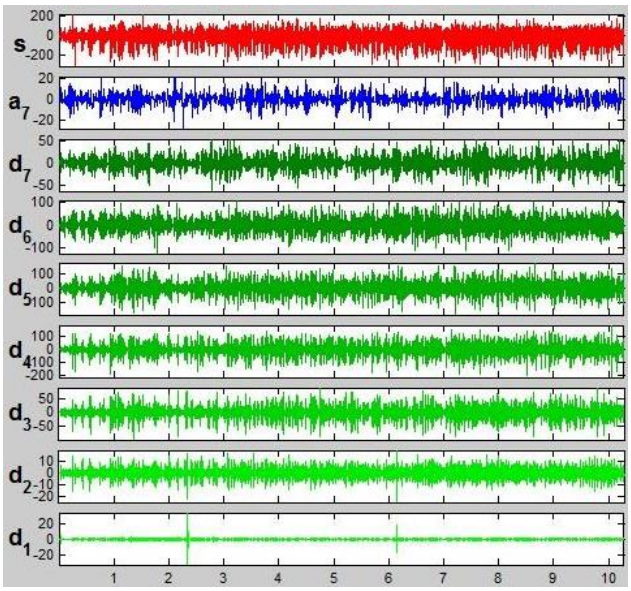
Şekil 4.1. Çoklu çözülme analizinde dalgacık dönüşümü ile 7. seviyede ağaç modeli



Şekil 4.2. S1 hastasının EEG verisinin bir kanalına 7. seviyede db4 dalgacık dönüşümünün uygulanması



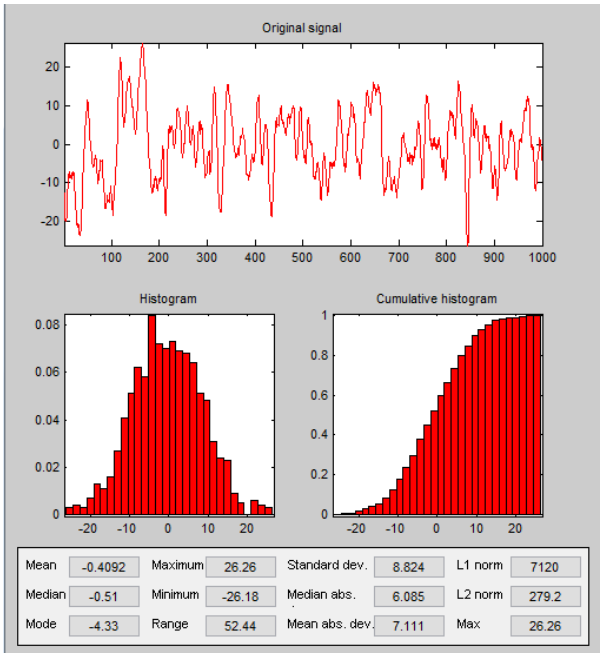
Şekil 4.3. S2 hastasının EEG verisinin bir kanalına 7. seviyede db4 dalgacık dönüşümünün uygulanması



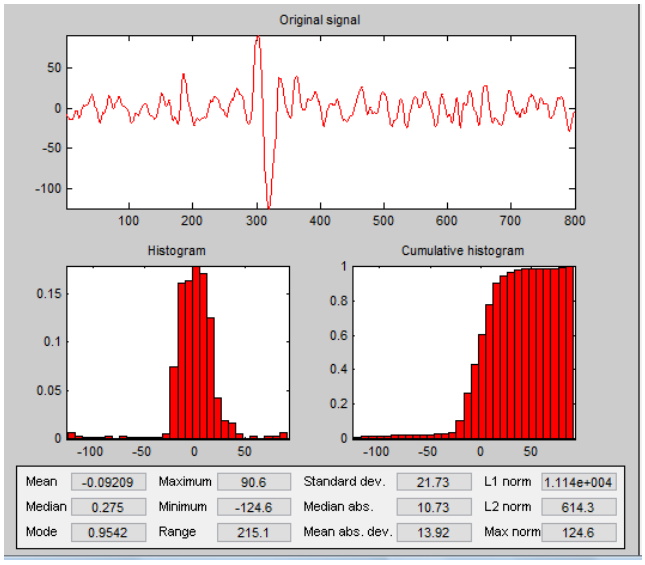
Şekil 4.4. S3 hastasının EEG verisinin bir kanalına 7. seviyede db4 dalgacık dönüşümünün uygulanması

Şekil 4.5, Şekil 4.6 ve Şekil 4.7 ile Kocaeli Üniversitesi Araştırma ve Uygulama Hastanesi'nden alınan EEG verilerinden epilepsi nöbeti geçirmeyen, tekli epilepsi nöbeti geçiren ve çoklu epilepsi nöbeti geçiren hastaların bir kanallarına db4 dalgacık

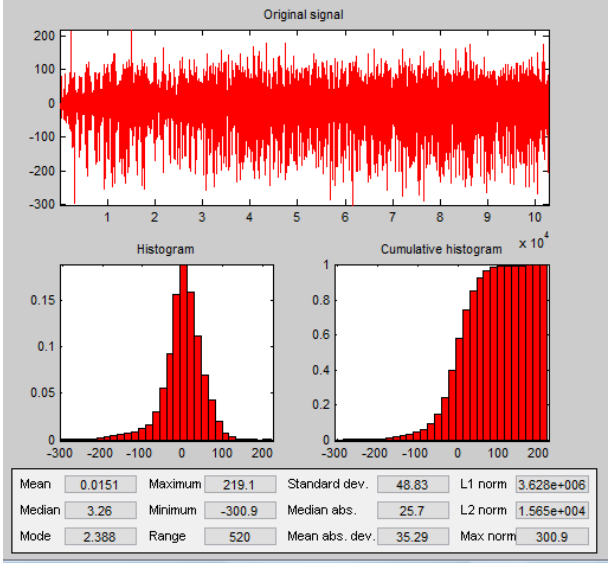
dönüşümü uygulandıktan sonraki histogramları gösterildi. Bu histogramlar sayesinde EEG sinyalinin parametrik değerleri hakkında bilgi sahibi olunabilir.



Şekil 4.5. S1 hastasının EEG verisinin bir kanalına 7. seviyede db4 dalgacık dönüşümünün uygulandıktan sonraki histogramı



Şekil 4.6. S2 hastasının EEG verisinin bir kanalına 7. seviyede db4 dalgacık dönüşümünün uygulandıktan sonraki histogramı

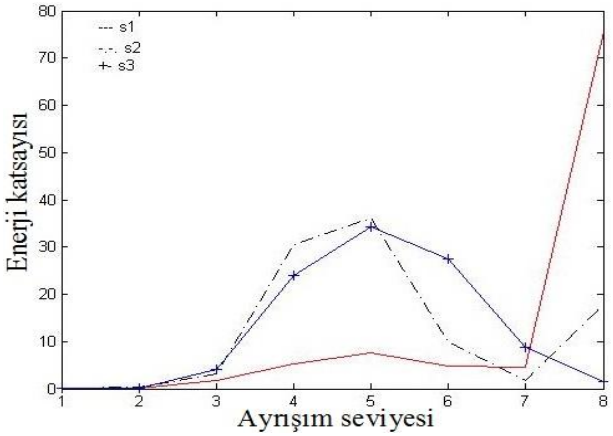


Şekil 4.7. S3 hastasının EEG verisinin bir kanalına 7. seviyede db4 dalgacık dönüşümünün uygulandıktan sonraki histogramı

Tablo 4.1'de S1, S2 ve S3 hastalarının EEG verisinin bir kanalına db4 dalgacık dönüşümü uygulandıktan sonra her bir seviyedeki enerji katsayıları gösterildi. Bu katsayı değerleri (d1)-(d7) arasında birbirine yakın bulundu. Fakat (a7) değerinin diğerlerine göre oldukça büyük olduğu görüldü. Yani nöbet geçirmeyen bir hastanın (a7) değeri oldukça yüksek iken, tekli nöbet geçiren hastada düşük, çoklu nöbet geçiren bir hastada ise oldukça düşük olduğu gözlemlendi. Bu durum da [24] ile uyumlu olacak şekilde hastanın nöbet geçirme durumu hakkında yorum yapma olanağı sağladı. Tespitler Kocaeli Üniversitesi Tıp Fakültesi Nöroloji ABD uzman doktorları ile teyit edildi. Şekil 4.8'de Tablo 4.1'deki enerji katsayı değerlerinin kros-korelasyonu gösterildi.

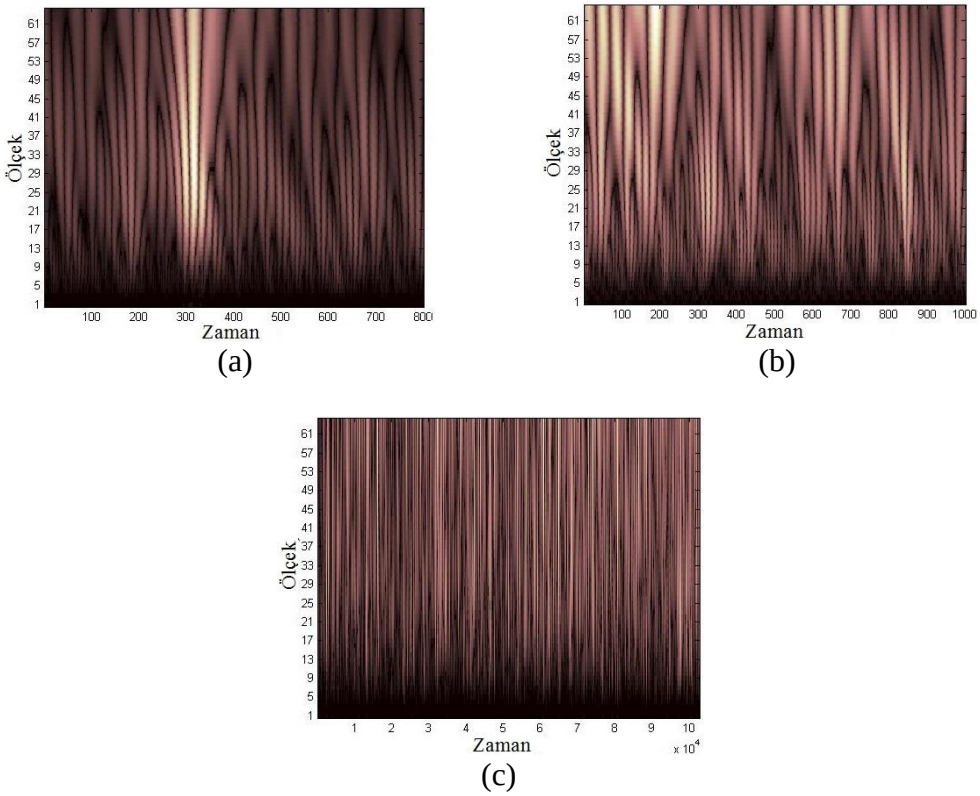
Tablo 4.1. S1, S2 ve S3 hastalarının her bir seviyedeki enerji katsayıları

	d1	**d2**	**d3**	**d4**	**d5**	**d6**	**d7**	**a7**
S1	0,0672	0,1789	1,8362	5,3261	7,6873	4,8232	4,4783	75,6027
S2	0,0211	0,3198	3,1970	50,5837	36,1856	9,9477	1,7802	17,9649
S3	0,0049	0,1459	4,0375	23,8916	34,3125	27,4314	8,7653	1,4108

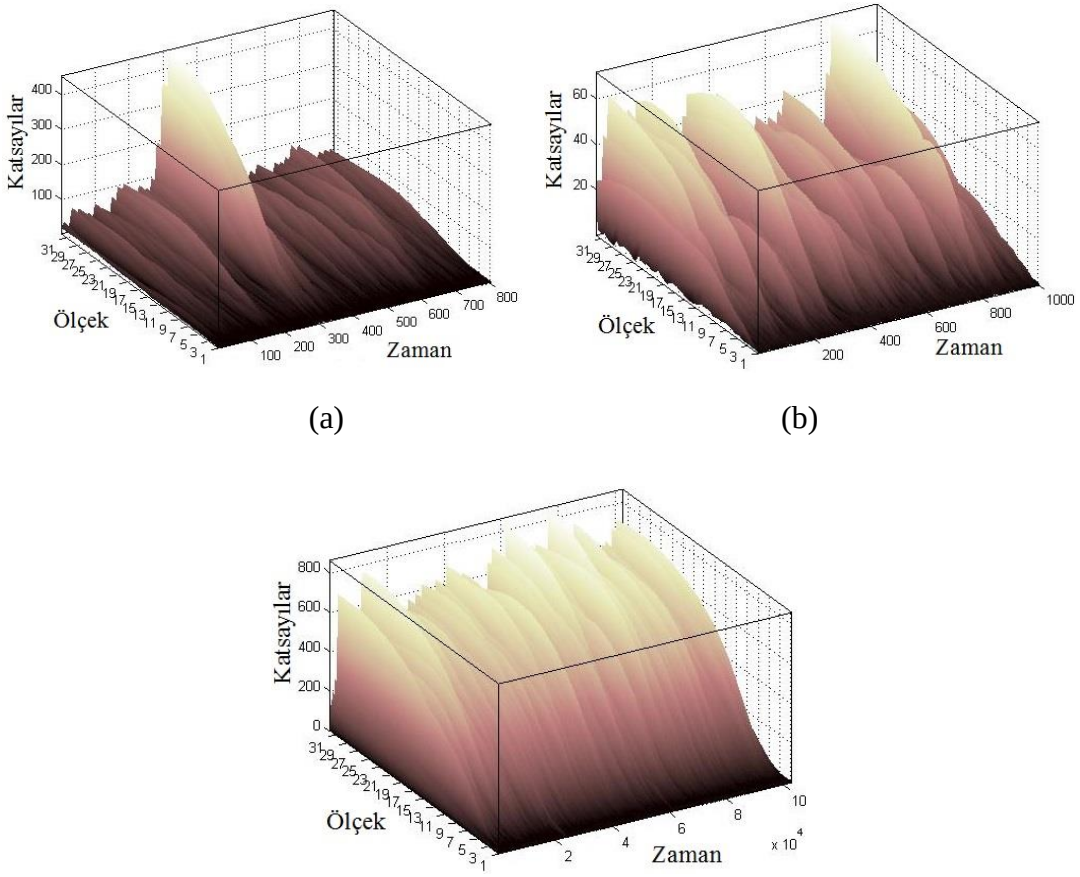


Şekil 4.8. S1, S2 ve S3 hastalarının her bir seviyedeki enerji katsayılarının kros-korelasyonu

Şekil 4.9 ve Şekil 4.10 ile S1, S2 ve S3 hastalarının sırasıyla 2-boyutlu ve 3-boyutlu skalogramları gösterildi. Nöbet geçirmeyen hastalarla tekli nöbet geçiren ve çoklu nöbet geçiren hastaların ayrımı bu skalogramlar ile de yapıldı. Şekillerdeki sivrilikler ayrım açısından önemlidir. Skalogramlar yersel olarak daha net bilgi verdikleri için bu ayrışımları yapmaya olanak sağlamaktadırlar.

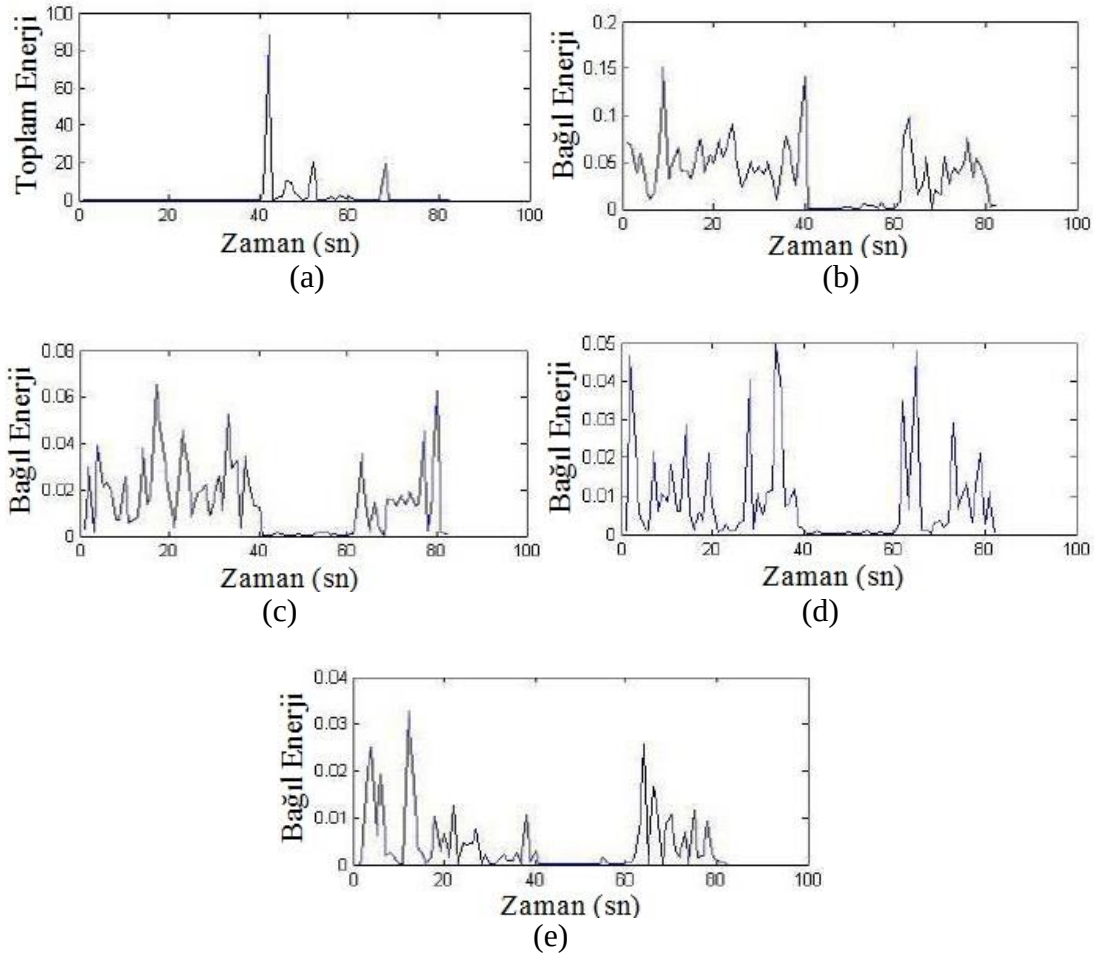


Şekil 4.9. a) S1 hastasının, b) S2 hastasının ve c) S3 hastasının 2-boyutlu skalogramları



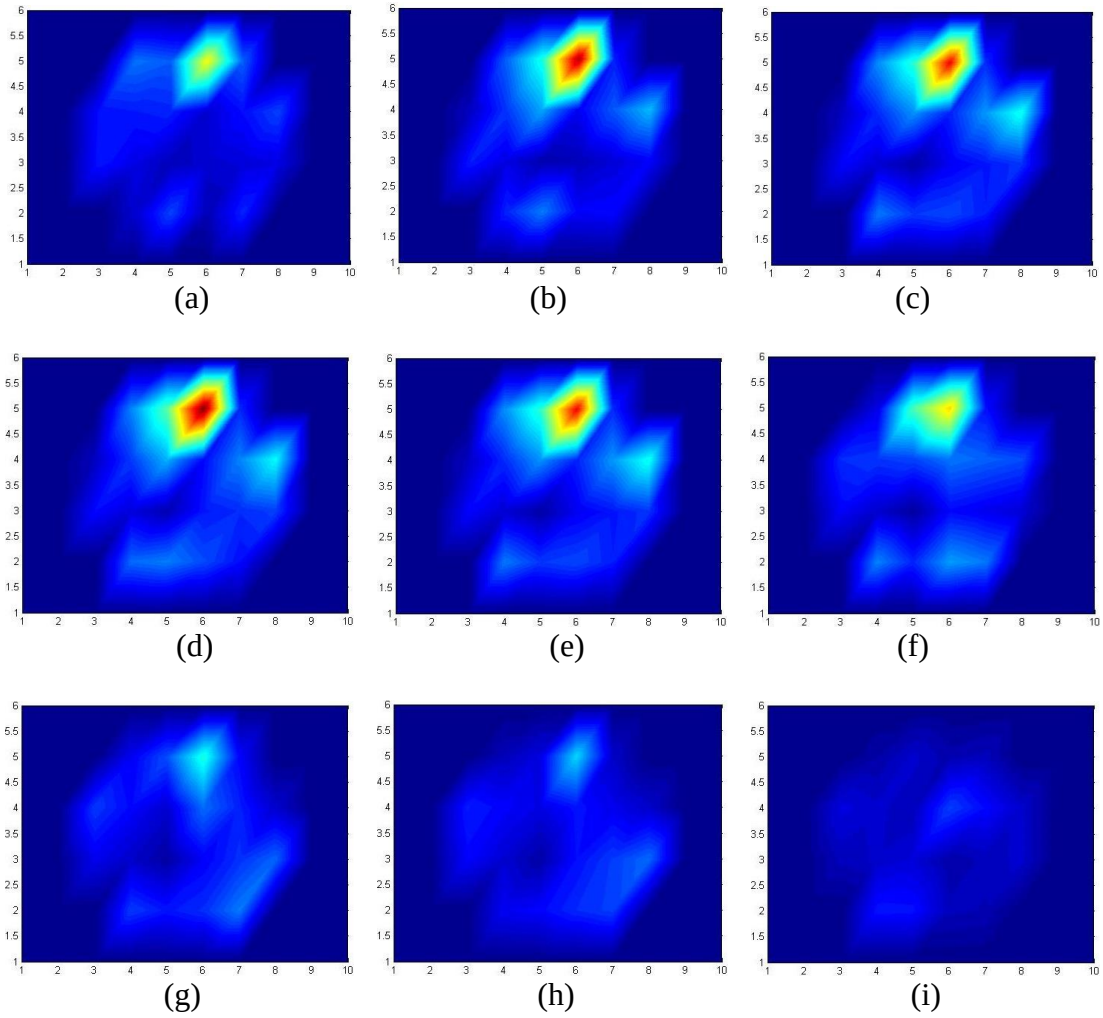
Şekil 4.10. a) S1 hastasının, b) S2 hastasının ve c) S3 hastasının 3-boyutlu skalogramları

Bir diğer uygulamada Şekil 4.11 ve Şekil 4.12'deki EEG verisi kullanıldı. Kullanılan bu EEG verisi yukarıdaki uygulamalarda kullanılan EEG verilerinden farklıdır. Burada kullanılan EEG verisi temporal (beynin belli bir bölgesinde) nöbet geçiren bir hastadan alındı. Bu EEG verisi ile nöbet öncesi, nöbet anı ve nöbet sonrası incelendi. Şekil 4.11 ile bu hastanın nöbet geçirdiği bir kanalındaki (d4)-(d7) detay seviyelerinin her birinin bağıl enerjisi ve (d4)-(d7) detay seviyelerini içeren toplam enerji gösterildi. Bu enerjiler incelendiğinde toplam enerjide 40. saniyede yani nöbet anında yükselen değerin (d4)-(d7) detay seviyelerinin her birinde düştüğü gözlemlendi. Bu durum ile nöbet anında kafatasındaki toplam enerjinin artarken detay seviyelerindeki bağıl enerjinin düştüğü tespiti yapıldı.



Şekil 4.11. Temporal nöbet geçiren bir hastanın bir kanalına db4 dalgacık dönüşümü uygulandıktan sonra a) (d4)-(d7) detaylarını içeren toplam enerji, b)-e) her bir detaydaki bağıl enerjiler

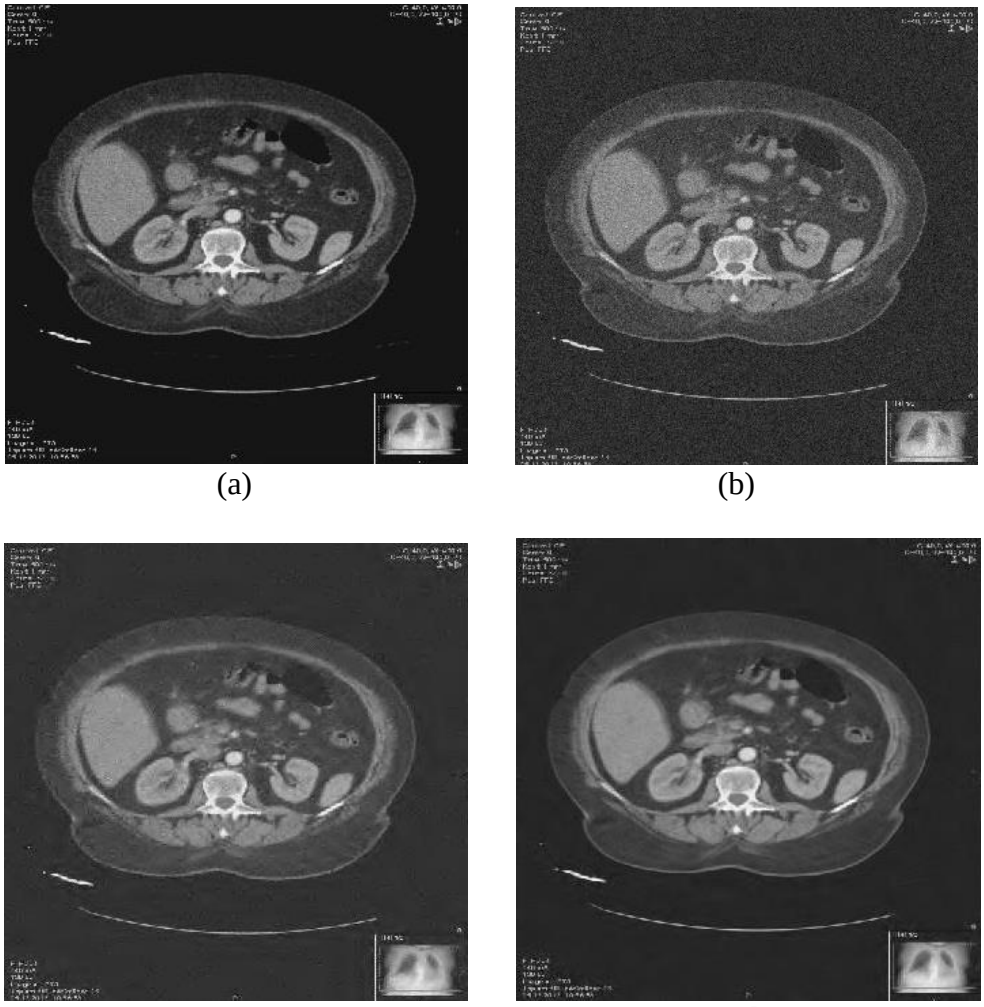
Kafatası üzerindeki bölgelerde bağıl enerjinin nasıl dağıldığının daha iyi anlaşılması için her bir detay seviyelerinden elde edilen bağıl enerji Şekil 4.12'de gösterildi. Şekil 4.12 ile kafatasının farklı bölgelerinde nöbetin öncesindeki bağıl enerji durumu ile nöbet esnasındaki bağıl enerji ve nöbetten sonraki bağıl enerjinin durumu incelendi. Şekil 4.12'den, geçirilen nöbetin temporal olmasına bağlı olarak nöbetin geçirildiği bölgede nöbet anı başlamadan önce bağıl enerji yavaş yavaş artmaya başladığı ve nöbet anında maksimuma (kırmızı renk) ulaştığı gözlemlendi. Nöbet bittikten sonra ise tekrar yavaşlamaya başladığı gözlemlendi. Bu durum [24] ile uyumlu olarak elde edildi.



Şekil 4.12. a)-i)Temporal nöbet geçiren Şekil 4.11'daki hastanın EEG verisinin bir kanalının her bir detayındaki bağıl enerjilerinin beşer saniye arayla anlık görüntüleri

4.2. Shearlet ve Dalgacık Dönüşümü ile Medikal Görüntülerde Gürültü Temizleme

Bu bölümde, 3. Bölümdeki medikal görüntülerden batın ön duvarından çekilen ultrason görüntüsü (Şekil 3.2), kardiyak BT tetkikine ait büyük damar ve kalp odacıklarının görüntüsü (Şekil 3.3) ve Mamografi görüntüsüne (Şekil 3.6) gürültü temizleme uygulaması yapıldı. Bu uygulama için yazılan kod şeması Tablo 4.2'de gösterildi. Bu uygulama için öncelikle eldeki görüntülere $\theta = 0{,}05$ Gausyen gürültüsü eklenerek görüntüler bozuldu. Gürültülü hale getirilen bu görüntülere Matlab paket programından ve [47]'den yararlanılarak yazılan Matlab kodu ile gürültü temizlendi. Temizlenen bu görüntüler Şekil 4.13, Şekil 4.14 ve Şekil 4.15 verildi.



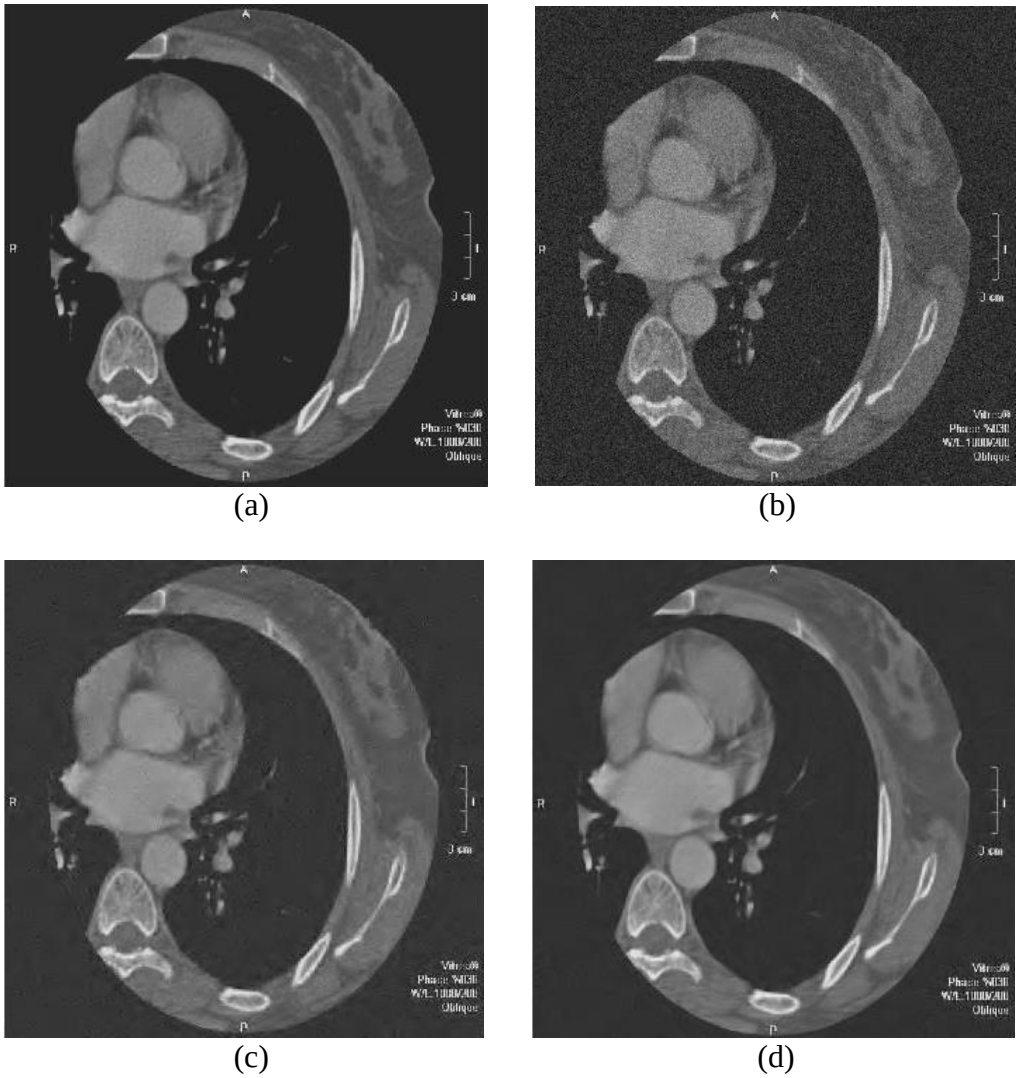
(a) (b)

(c) (d)

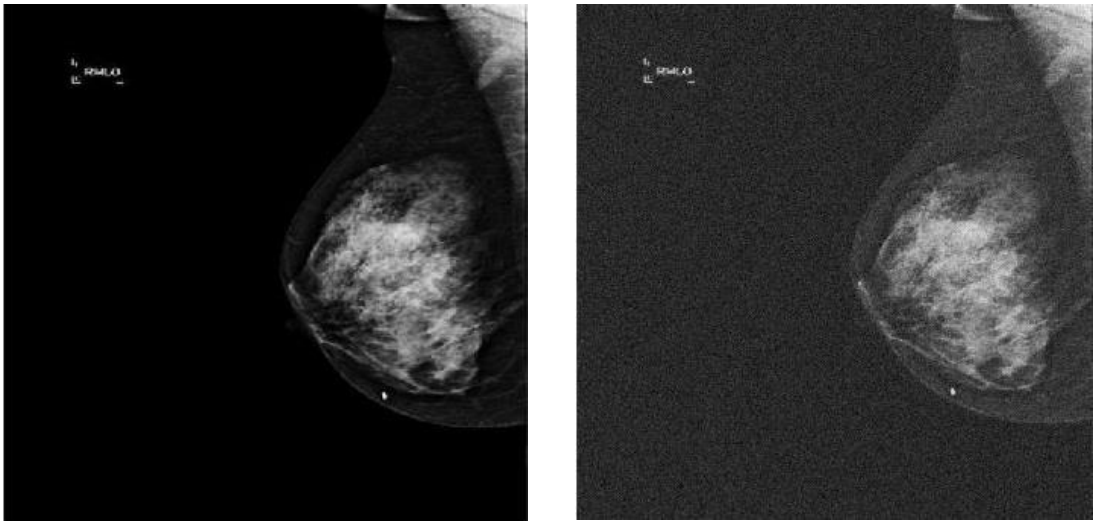
Şekil 4.13**.** Batın ön duvarından çekilen ultrason görüntüsünün a) esas hali, b) gürültülü hali, c) dalgacık uygulandıktan sonraki hali, d) shearlet uygulandıktan sonraki hali

Tablo 4.2. Dalgacık ve shearlet dönüşümü kullanılarak gürültü temizleme kod şeması

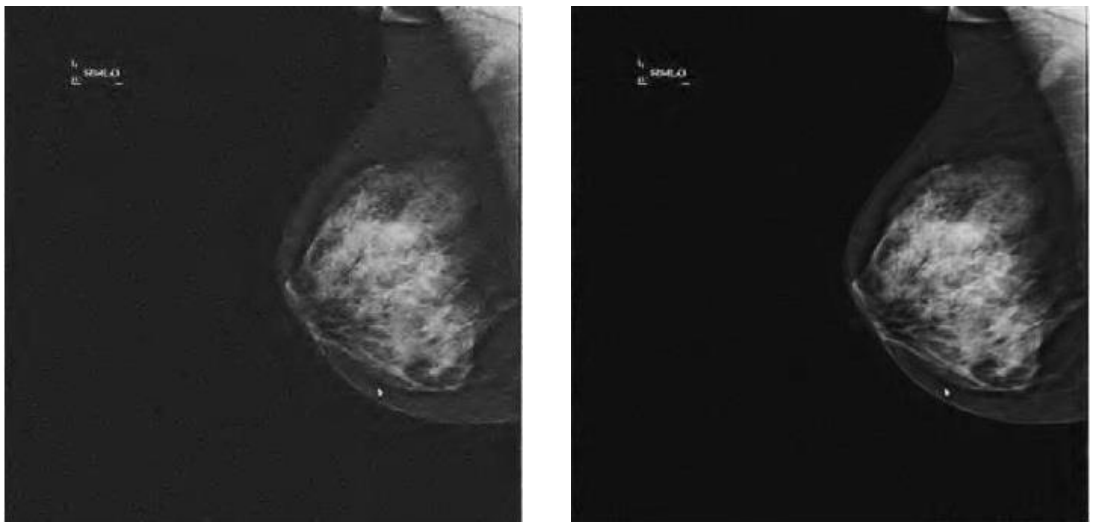
Kullanılan Parametreler:
• Medikal görüntü • Gausyen gürültü Parametresi • Dalgacık filtresi • Shearlet filtresi
Algoritma:
1. Medikal görüntüye Gausyen gürültü eklenmesi 2. Dalgacık /Shearlet filtresi kullanılarak gürültünün temizlenmesi 3. Tepe işaretin gürültüye oranının (PSNR) hesaplanması
Çıktı:
• Gürültülü görüntü • Sırasıyla dalgacık ve shearlet filtreleri kullanılarak gürültüden arındırılıp yeniden elde edilen görüntü • Tepe işaretin gürültüye oranı (PSNR) değeri



Şekil 4.14**.** Kardiyak BT tetkikine ait büyük damar ve kalp odacıklarının görüntüsünün a) esas hali, b) gürültülü hali, c) dalgacık uygulandıktan sonraki hali, d) shearlet uygulandıktan sonraki hali



(a) (b)



(c) (d)

Şekil 4.15. Mamografi görüntüsünün a) esas hali, b) gürültülü hali, c) dalgacık uygulandıktan sonraki hali, d) shearlet uygulandıktan sonraki hali

Elde edilen bu şekillerden [50]'deki sonuçlarla uyumlu olan medikal görüntülerde oluşacak gürültülerin giderilmesinde dalgacık ve shearlet dönüşümlerinin kullanılabileceği sonucu ortaya çıktı. Shearlet ve dalgacık dönüşümlerinin hangisinin daha etkin olduğunun anlaşılması için elimizdeki görüntülere sırasıyla $\theta = 0{,}05$, $\theta = 0{,}07$, $\theta = 0{,}09$ Gausyen gürültüleri eklendi. Daha sonra shearlet ve dalgacık dönüşümleriyle bu gürültüler temizlenerek PSNR değerleri hesaplandı. Elde edilen sonuçlar Tablo 4.3, Tablo 4.4 ve Tablo 4.5'de gösterildi.

Tablo 4.3. Batın ön duvarından çekilen ultrason görüntüsüne gürültü temizlemek için uygulanan dalgacık ve shearlet dönüşümleri için hesaplanan PSNR değerleri

Gausyen gürültüleri	**Dalgacık dönüşümü PSNR**	**Shearlet dönüşümü PSNR**
$\theta = 0{,}05$	31,1096dB	32,6291dB
$\theta = 0{,}07$	29,343dB	31,6190dB
$\theta = 0{,}09$	28,3425dB	30,1483dB

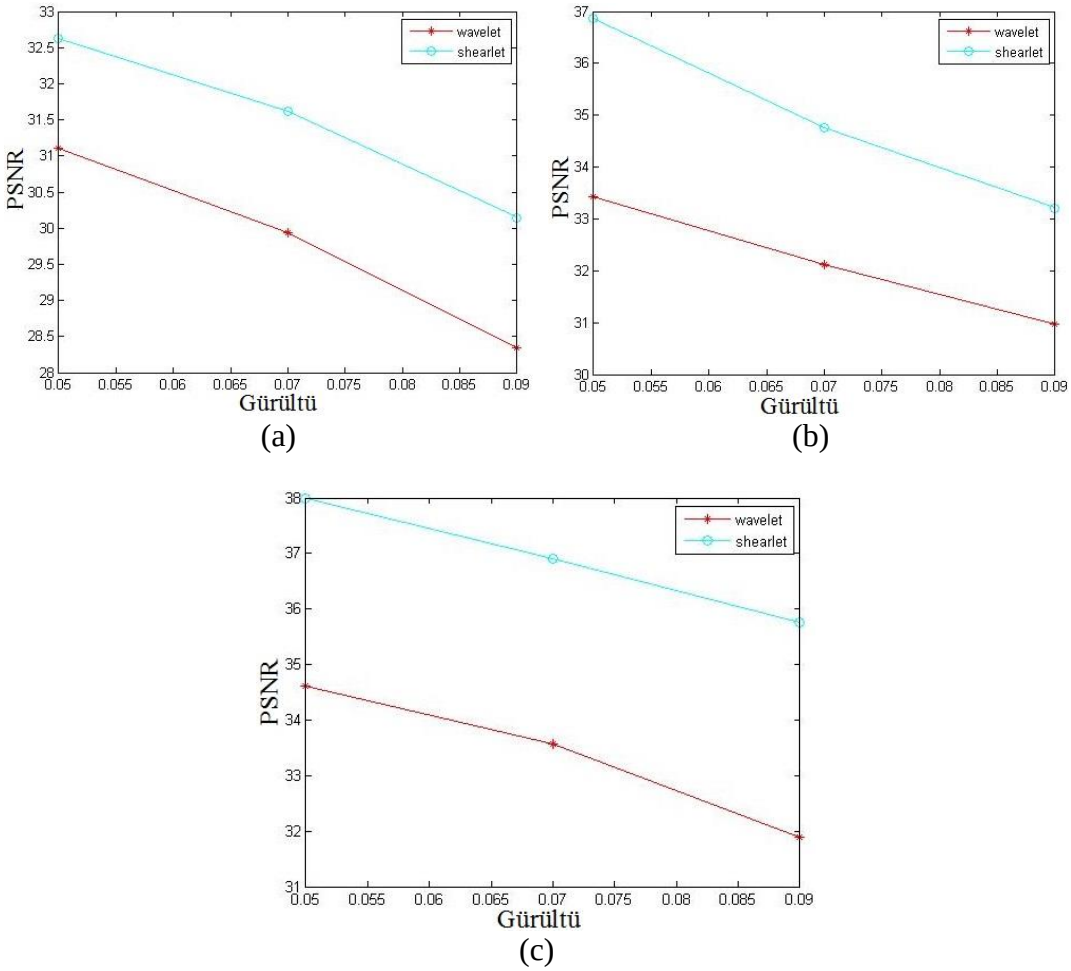
Tablo 4.4. Kardiyak BT tetkikine ait büyük damar ve kalp odacıklarının görüntüsüne gürültü temizlemek için uygulanan dalgacık ve shearlet dönüşümleri için hesaplanan PSNR değerleri

Gausyen gürültüleri	**Dalgacık dönüşümü PSNR**	**Shearlet dönüşümü PSNR**
$\theta = 0{,}05$	33,4200dB	36,8636dB
$\theta = 0{,}07$	32,1171dB	34,7621dB
$\theta = 0{,}09$	30,9715dB	33,2118dB

Tablo 4.5. Mamografi görüntüsüne gürültü temizlemek için uygulanan dalgacık ve shearlet dönüşümleri için hesaplanan PSNR değerleri

Gausyen gürültüleri	**Dalgacık dönüşümü PSNR**	**Shearlet dönüşümü PSNR**
$\theta = 0{,}05$	34,6218dB	37,9900dB
$\theta = 0{,}07$	33,5672dB	36,9007dB
$\theta = 0{,}09$	31,8905dB	35,7509dB

Bu etkinliğin daha iyi görülmesi için Tablo 4.3, Tablo 4.4 ve Tablo 4.5'den elde edilen bu PSNR değerlerinin kros-korelasyonları Şekil 4.16'da gösterildi. Bütün bu elde edilen tablolar ve Şekil 4.16'dan [50]'deki sonuçlarla uyumlu olarak bütün gürültü temizleme uygulamaları için PSNR değerleri daha büyük olan shearlet dönüşümünün dalgacık dönüşümüne göre daha etkili olduğu anlaşıldı. Etki eden gürültünün değişmesinin medikal görüntülerde oluşacak gürültülerin giderilmesinde shearlet dönüşümünün dalgacık dönüşümüne göre daha etkili olduğu sonucunu değiştirmediği anlaşıldı.



Şekil 4.16. a) Batın ön duvarından çekilen ultrason görüntüsü kroskorelasyonu, b) Kardiyak BT tetkikine ait büyük damar ve kalp odacıklarının görüntüsü kroskorelasyonu, c) Mamografi görüntüsü kroskorelasyonu

4.3. Dairesel Maske Kullanarak Shearlet ve Dalgacık Dönüşümü ile Kaybolan Veriyi Yeniden Elde Etme

Bu bölümde kayıp veriyi yeniden elde etme (inpainting) problemine shearlet ve dalgacık dönüşümlerinin uygulaması yapıldı. Kayıp veri tüm alanlardaki veri analizinde önemli bir problemdir. Kayıp veriyi yeniden elde etme probleminde literatürde yakın zamanda yapılan iki çalışma dikkat çekicidir [53,54]. [54]'de shearlet ve dalgacık dönüşümlerinin kayıp veriyi yeniden elde etme probleminde kullanımının matematiksel teorisi çalışılmış ve shearlet ve dalgacık dönüşümlerinin sonuçları kıyaslanmıştır. [53]'de dikey, kare ve rastgele maskeleme yöntemleri üzerine uygulama çalışmaları yapılmıştır. Tezin bu kısmında, bu makalelerde çalışılmamış olan ve literatürde de yer almayan dairesel maskeleme durumunda

görüntünün iyileştirilmesi ve yeniden elde edilmesi için [47]'den yararlanılarak Matlab kodu yazıldı ve yapılan uygulama sonuçları karşılaştırıldı. Bu kodların şemaları Tablo 4.6 ve Tablo 4.7'de gösterildi.

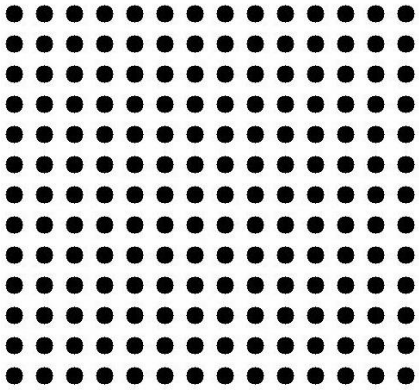
Tablo 4.6. Dairesel maske kodu şeması

Kullanılan Parametreler:
• Yarıçap parametresi h. • Görüntü boyutu parametreleri. • Görüntü boyutu kadar sıfırlardan oluşan matris parametresi. • Adım uzunluğu.
Algoritma:
1. Yarıçapı h olan maskenin oluşturulması. 2. Bu h yarıçaplı maskenin verilen adım uzunluğu ile görüntünün bütün taraflarına yayılması.
Çıktı:
• Dairesel maske.

Tablo 4.7. Dalgacık ve Shearlet dönüşümü kullanılarak kayıp edilen verinin yeniden elde edilmesi kod şeması

Kullanılan Parametreler:
• Medikal görüntü. • Dairesel Maske. • İterasyon Parametresi. • Dalgacık/ Shearlet Dönüşümü Fonksiyonları.
Algoritma:
1. Medikal görüntüye dairesel maske uygulanarak veri kayıp edilmesi. 2. Ardışık yaklaşımlar yöntemini kullanarak eşik değeri belirlenmesi. 3. Dalgacık/ Shearlet dönüşümü kullanılarak verinin yeniden elde edilmesi. 4. Tepe işaretin gürültüye oranının (PSNR) hesaplanması.
Çıktı:
• Maskelenmiş görüntü. • Maskelerden arındırılıp yeniden elde edilen görüntü. • Tepe işaretin gürültüye oranı (PSNR) değeri.

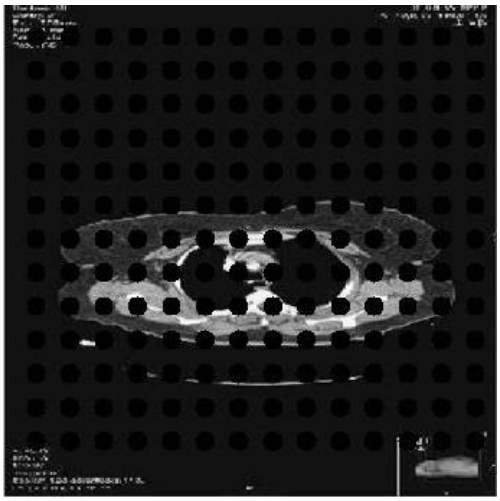
Bölüm 3'de verilen Şekil 3.4, Şekil 3.5 ve Şekil 3.6'daki medikal görüntülere maskeleme sonrası görüntünün yeniden elde edilmesi amacıyla Matlab kodu yazılan dairesel maskeleme uygulandı. Uygulanan bu maske Şekil 4.17'de gösterildi. Bu uygulamaların sonucunda dalgacık ve shearlet dönüşümüyle elde edilen görüntüler de Şekil 4.18, Şekil 4.19 ve Şekil 4.20'de gösterildi.



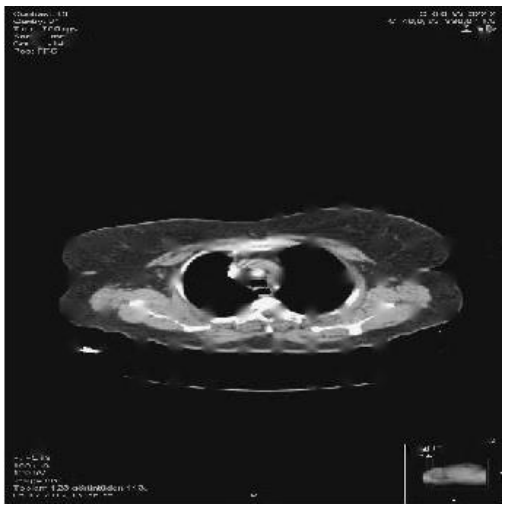
Şekil 4.17. Dairesel maske



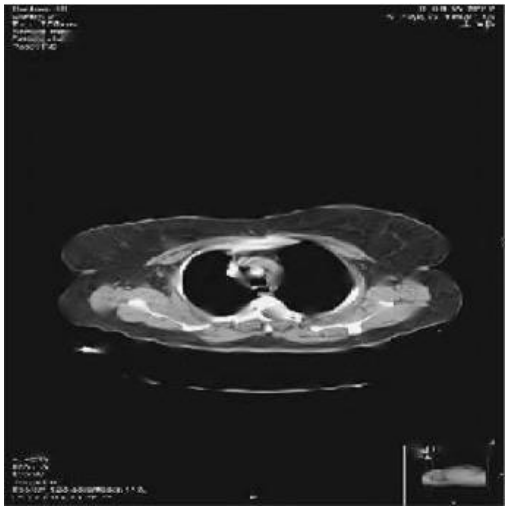
(a)



(b)

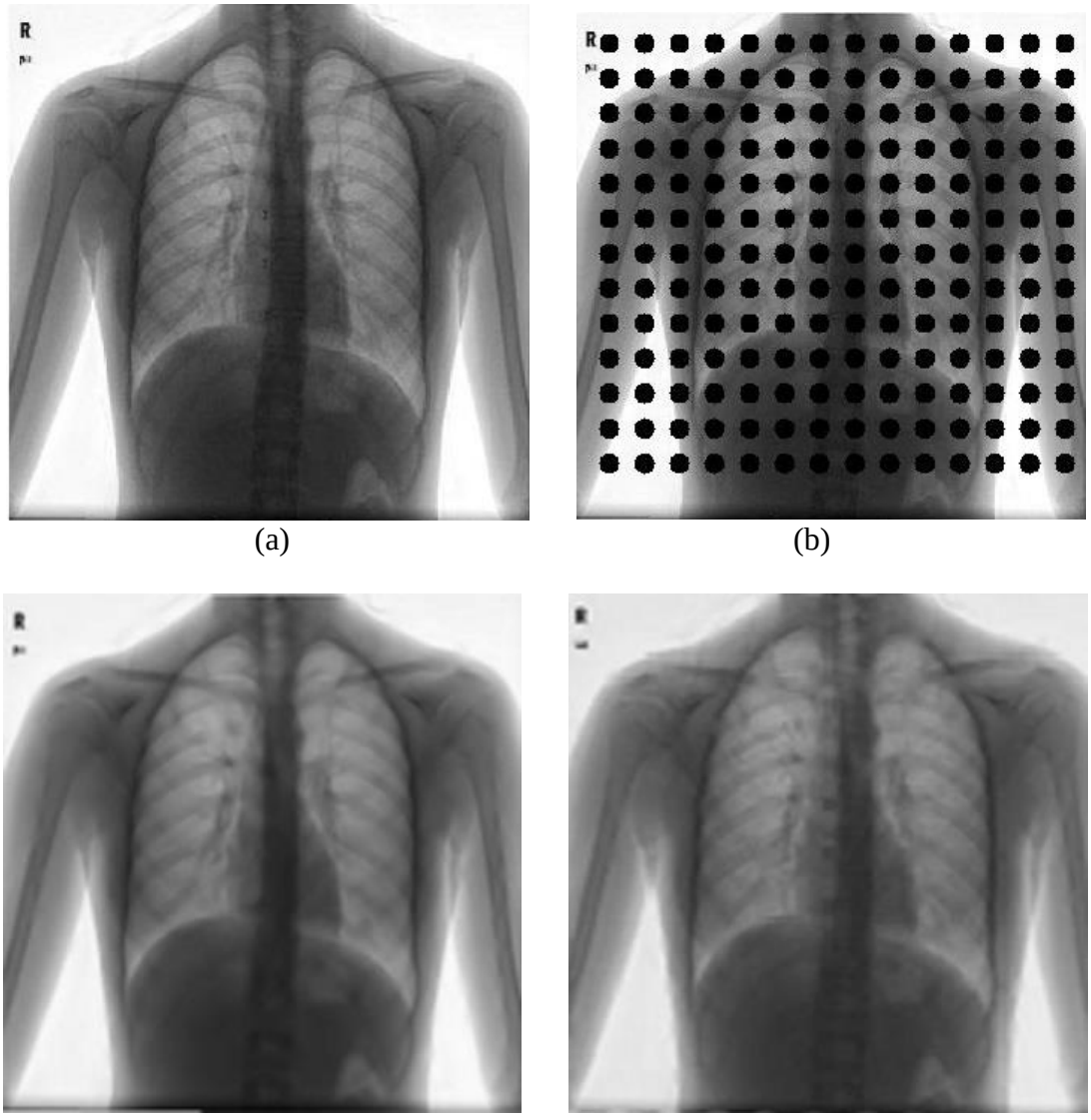


(c)

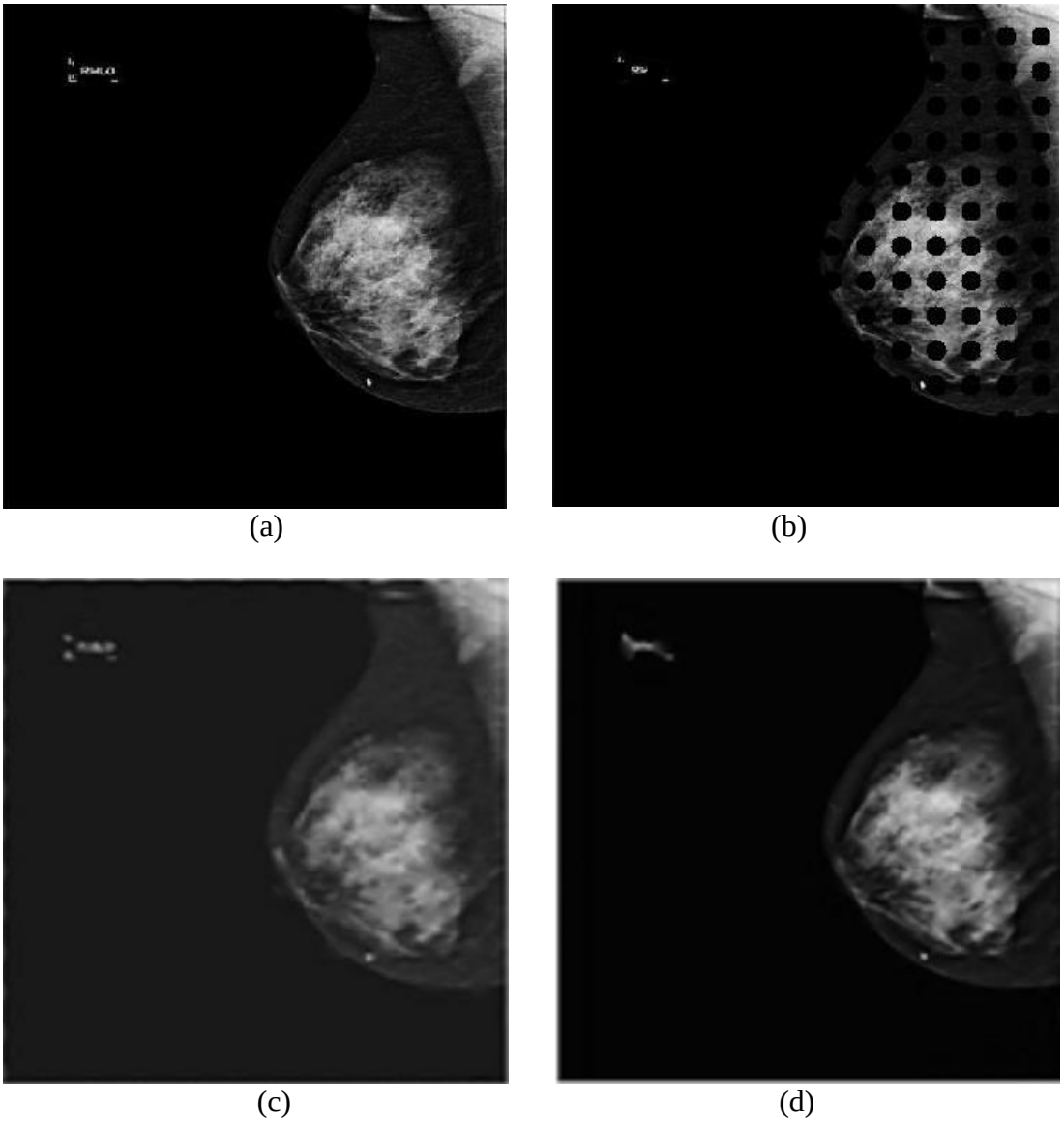


(d)

Şekil 4.18. a) Damar çevresi dokusu görüntüsü, b) dairesel maskenin uygulanmış hali, c) dalgacık dönüşümü ile görüntünün elde edilmesi, d) shearlet dönüşümü ile görüntünün elde edilmesi



Şekil 4.19. a) Röntgen görüntüsü, b) dairesel maskenin uygulanmış hali, c) dalgacık dönüşümü ile görüntünün elde edilmesi, d) shearlet dönüşümü ile görüntünün elde edilmesi



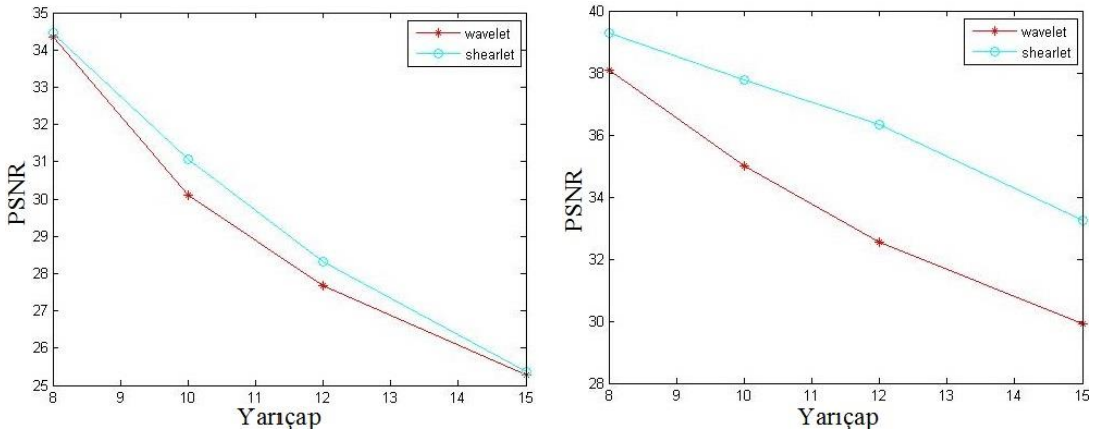
Şekil 4.20. a) Mamografi görüntüsü, b) dairesel maskenin uygulanmış hali, c) dalgacık dönüşümü ile görüntünün elde edilmesi, d) shearlet dönüşümü ile görüntünün elde edilmesi

Elde edilen Şekil 4.18, Şekil 4.19 ve Şekil 4.20'den dalgacık ve shearlet dönüşümlerinin medikal görüntülerde oluşan dairesel görüntü kaybının giderilmesinde kullanılabileceği tespit edildi. Dairesel maskeleme uygulamasında hangi yöntemin daha etkin olduğunun anlaşılması için h=10 yarıçaplı dairesel maske uygulaması sonucunda her iki yöntem için PSNR değerleri hesaplandı ve elde edilen PSNR değerleri Tablo 4.8'de gösterildi.

Tablo 4.8. Görüntülere uygulanan dalgacık ve shearlet dönüşümleri için hesaplanan PSNR değerleri

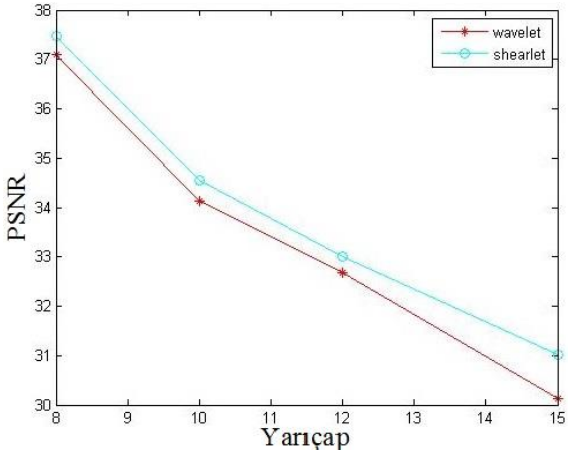
Görüntüler	Dalgacık dönüşümü PSNR	Shearlet dönüşümü PSNR
Damar çevresi dokusu görüntüsü	30,1067dB	31,0688dB
Röntgen görüntüsü	35,0087dB	37,7624dB
Mamografi görüntüsü	33,2025dB	33,5571dB

Tablo 4.8'de yer alan PSNR değerlerine göre bu iki yöntem birbiriyle karşılaştırıldığında, [54]'dekinden farklı maske yöntemi uygulanarak PSNR değerlerinin daha büyük olduğu görülen shearlet dönüşümünün medikal görüntülerde oluşacak dairesel şekildeki kayıpları yeniden elde etmede dalgacık dönüşümüne göre daha etkili olduğu anlaşıldı. Ayrıca eldeki görüntülere h=8, h=10, h=12 ve h=15 yarıçaplı dairesel maskeler uygulandı ve PSNR değerleri elde edildi. Elde edilen bu PSNR değerleri için çizilen kros-korelasyonlar Şekil 4.21'de gösterildi. Şekil 4.21'deki kros-korelasyonlardan yarıçap boyutunun değişmesinin PSNR değerleri daha yüksek olan shearlet dönüşümünün dalgacık dönüşümüne göre daha etkili olduğu sonucunu değiştirmediği anlaşıldı.



(a) (b)

Şekil 4.21. a) Damar çevresi dokusu Görüntüsü kros-korelasyonu b) Röntgen Görüntüsü kros-korelasyonu, c) Mamografi Görüntüsü kros-korelasyonu



(c)

Şekil 4.21.(Devam) a) Damar çevresi dokusu Görüntüsü kros-korelasyonu b) Röntgen Görüntüsü kros-korelasyonu, c) Mamografi Görüntüsü kros-korelasyonu

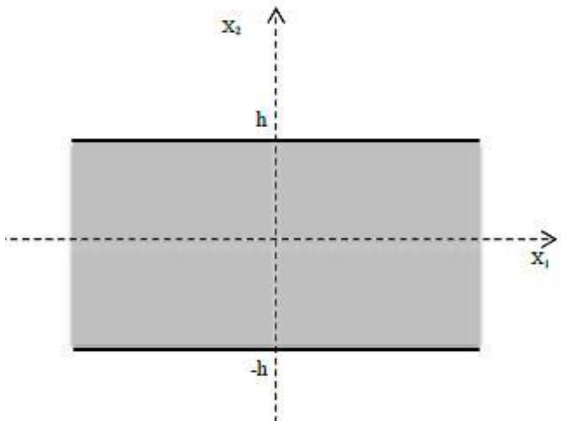
4.4. Yatay Maske Kullanarak Shearlet ve Dalgacık Dönüşümü ile Kaybolan Veriyi Yeniden Elde Etme

Tezin bu bölümünde ilk önce [51-55] makalelerinde çalışılmamış olan ve literatürde de yer almayan yatay maskeleme durumu için shearlet ve dalgacık dönüşümlerinin matematiksel teorisi çalışıldı. Daha sonra, yatay maskeleme durumunda görüntünün iyileştirilmesi ve yeniden elde edilmesi için Matlab kodu yazıldı ve yapılan uygulama sonuçları karşılaştırıldı.

4.4.1. Yatay maske uygulamasının asimptotik analizi

Tezin bu kısmında yatay maskeleme durumunda kayıp veriyi yeniden elde etme problemi ele alındı ve shearlet ve dalgacık dönüşümlerinin matematiksel analiz olarak karşılaştırılması yapıldı. Bu karşılaştırmada asimptotiksel analiz kullanıldı. Algoritmada yatay maske uygulanmış görüntüden görüntüyü yeniden elde etme aşamasında ardışık yaklaşımlar (iterative thresholding) yöntemi kullanıldı. Bu aşamada Bölüm 3'de verilen temel tanım ve teoremlerden ve yeniden elde etme modelinden yararlanıldı.

$\mathcal{M}_h(x_1, x_2) = \mathbb{1}_{\{|x_2| \le h\}}$ fonksiyonu ile $2h$ genişliğindeki $\mathcal{M}_h$ yatay maske fonksiyonu gösterildi. Bu fonksiyon ile uygulanan maske Şekil 4.22'de gösterildi.



Şekil 4.22. $\mathcal{M}_h$ yatay maske fonksiyonunun görüntüsü

Yardımcı Teorem 4.1. $\mathcal{M}_h$ yatay maske fonksiyonunun $\widehat{\mathcal{M}_h}$ Fourier dönüşümü,

$$\widehat{\mathcal{M}_h} = 2h\text{sinc}(2h\xi_2)\delta(\xi_1) \tag{4.1}$$

şeklinde elde edilir.

İspat. $\mathcal{M}_h$ yatay maske fonksiyonu, Denklem (2.53) ile tanımlı Heaviside fonksiyonu ile,

$$\mathcal{M}_h = H\big((x_1, x_2) + (0, h)\big) - H\big((x_1, x_2) - (0, h)\big) \tag{4.2}$$

şeklinde ifade edilir. Buradan, Denklem (4.2)'nin yardımıyla $\mathcal{M}_h$ yatay maske fonksiyonunun Fourier dönüşümü,

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{M}_h} &= \big(e^{2\pi i h\xi_2} - e^{-2\pi i h\xi_2}\big)(2\pi i\xi_2)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x_1\xi_1} dx_1 \\ &= 2\sin(2\pi h\xi_2)/(2\pi\xi_2) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x_1\xi_1} dx_1 = 2h\text{sinc}(2h\xi_2) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x_1\xi_1} dx_1 \\ &= 2h\text{sinc}(2h\xi_2)\delta(\xi_1)\end{aligned} \tag{4.3}$$

şeklinde elde edilir.

δ_j ile filtrelenmiş katsayılar için δ-seyrekliği ifade edilirse, ardışık yaklaşımlara temel oluşturan bu ifade aşağıdaki gibi gösterilir;

$$\delta_j = \sum_{\lambda \in \mathcal{T}_j^c} \left| \langle w\mathcal{L}_j, \Psi_\lambda \rangle \right|. \tag{4.4}$$

Burada $\mathcal{T}_j$ katsayıları ardışık yaklaşım algoritmasındaki belirlenmiş katsayılardır. Görüntünün yeniden elde edilmesi j seviyesindeki filtreler üzerinde gerçekleştirilsin ve L_j ile gösterilsin. $w\mathcal{L}_j$ ile filtrelenmiş gerçek görüntü belirtilsin, yani $w\mathcal{L} \star \check{F}_j$ olsun. Burada L, orijinal gerçek görüntüdür. Gösterilmeye çalışılacak olan sonuç aşağıdaki gibidir;

$$\frac{\left\| L_j - w\mathcal{L}_j \right\|_2}{\left\| w\mathcal{L}_j \right\|_2} \to 0, \qquad j \to \infty. \tag{4.5}$$

Bu durum ise h_j genişliğinin asimptotik davranışına bağlıdır.

Yardımcı Teorem 4.2. [53] $j \to \infty$ olduğunda $h_j = o\left(2^{-j}\right)$ için $\{\beta_j\}_j$ eşik değerleri $j \geq j_0$ için aşağıdaki koşulu sağlayacak şekilde vardır;

$$\left\{k: |k_1| \leq \rho 2^{j(1+n_1)}, |k_2| \leq \rho 2^{jn_1}\right\} \subseteq \mathcal{T}_j \,. \tag{4.6}$$

Yardımcı Teorem 4.3. [53] $j \to \infty$ olduğunda,

$$\delta_j = \sum_{k \in \mathcal{T}_j^c} \left| \langle w\mathcal{L}_j, \Psi_\lambda \rangle \right| = o\left(\left\| w\mathcal{L}_j \right\|_2 \right) \tag{4.7}$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.4. $j \to \infty$ olduğunda $h_j = o\left(2^{-j}\right)$ için,

$$\sum_{k\in\mathcal{T}_j}\left|\langle\mathcal{M}_{h_j}w\mathcal{L}_j,\Psi_\lambda\rangle\right| = o\left(2^{j/2}\right) \tag{4.8}$$

elde edilir.

İspat. İlk önce $\left|\langle\mathcal{M}_{h_j}w\mathcal{L}_j,\Psi_\lambda\rangle\right|$ terimi değerlendirilsin. G_j, F_j'nin ters Fourier dönüşümü olsun. Kros-korelasyon teoreminden ve,

$$G_j(x) = G_j(-x) \tag{4.9}$$

özelliğinden,

$$\langle\widehat{\mathcal{M}}_{h_j}\star\widehat{w}\mathcal{L}_j,\widehat{\Psi}_\lambda\rangle = \langle\mathcal{M}_{h_j}w\mathcal{L}_j,\Psi_\lambda\rangle \tag{4.10}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{M}_{h_j}w\mathcal{L}_j,\Psi_\lambda\rangle &= \langle\mathcal{M}_{h_j}G_j\star w\mathcal{L},\Psi_\lambda\rangle\\ &= \langle\mathcal{M}_{h_j}w\mathcal{L},G_j\star\Psi_\lambda\rangle\\ &= \langle\widehat{\mathcal{M}}_{h_j}\star\widehat{w}\mathcal{L},F_j\widehat{\Psi}_\lambda\rangle\end{aligned} \tag{4.11}$$

sonucuna ulaşıldı. F_j filtre fonksiyonu için,

$$\widehat{w}\mathcal{L}_j(\xi) = \widehat{w}\mathcal{L}(\xi)F_j(\xi) = \widehat{w}\mathcal{L}(\xi)\,F(\xi/2^j) \tag{4.12}$$

şeklinde ele alınsın. $\widehat{\Psi}_\lambda$ fonksiyonu da,

$$\widehat{\Psi}_\lambda = 2^{-j}W^h\left(\xi/2^j\right)e^{-2\pi i\langle k,\xi/2^j\rangle} \tag{4.13}$$

şeklinde ele alınsın.

$\mathcal{M}_{h_j}$, $w\mathcal{L}_j$ ve Ψ_λ'nin tanımları, değişken değiştirme ve yine kros-korelasyon teoremi kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edildi;

$$\langle \mathcal{M}_{h_j} w\mathcal{L}_j, \Psi_\lambda \rangle = \langle \widehat{\mathcal{M}}_{h_j} \star \widehat{w}\mathcal{L}_j, \widehat{\Psi}_\lambda \rangle$$

$$= 2h_j \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{sinc}(2h_j\tau_2) \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{w}(\xi_2) \left(\widehat{\Psi}_\lambda F_j\right)\big((0,\tau_2) + (\xi_1,\xi_2)\big) d\xi d\tau_2 \tag{4.14}$$

$$= 2h_j \int_{\mathbb{R}} \left[\widehat{w}(\xi_2) \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sinc}(2h_j\tau_2) F\big(\xi_1, (\xi_2+\tau_2)/2^j\big) W^h\big(\xi_1, (\xi_2+\tau_2)/2^j\big) \times \right.$$
$$\left. \times e^{-2\pi i \langle k_2, (\xi_2+\tau_2)/2^j \rangle} d\tau_2 d\xi_2 \right] x\, e^{-2\pi i \langle k_1, \xi_1 \rangle} d\xi_1.$$

Buradan,

$$\hat{G}(\xi_1) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{w}(\xi_2) 2h_j \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sinc}(2h_j\tau_2) F\big(\xi_1, (\xi_2+\tau_2)/2^j\big) \times$$
$$\times W^h\big(\xi_1, (\xi_2+\tau_2)/2^j\big) e^{-2\pi i \langle k_2/2^j, (\xi_2+\tau_2) \rangle} d\tau_2 d\xi_2 \tag{4.15}$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \widehat{w}(\xi_2) \widehat{H}_{\xi_1}(\xi_2) e^{-2\pi i \langle k_2/2^j, \xi_2 \rangle} d\xi_2$$

ve,

$$\widehat{H}_{\xi_1}(\xi_2) = 22h_j \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sinc}(2h_j\tau_2) F\big(\xi_1, (\xi_2+\tau_2)/2^j\big) W^h\big(\xi_1, (\xi_2+\tau_2)/2^j\big) \times$$
$$\times e^{-2\pi i \langle k_2, (\xi_2+\tau_2)/2^j \rangle} d\tau_2 \tag{4.16}$$

alındı. $\widehat{\mathrm{G}}$ fonksiyonunun sonlu dayanağı $[1/2\ ,2]$ kümesi üzerindedir. Buradan,

$$\left| \langle \mathcal{M}_{h_j} w\mathcal{L}_j, \Psi_\lambda \rangle \right| \leq cN_1 \left\| \hat{G} \right\|_\infty \langle |k_1| \rangle^{-N_1} \tag{4.17}$$

elde edildi. Plancherel teoremi ve w 'nin sonlu dayanaklı olması özelliklerinden,

$$\begin{aligned}\left|\int_R \widehat{w}(\xi_2)\,\widehat{H}_{\xi_1}(\xi_2)e^{-2\pi i\langle k_2/2^j,\xi_2\rangle}d\xi_2\right| &= \left|\left(\widehat{w}\widehat{H}_{\xi_1}\right)^V\right|\left(-k_2/2^j\right)\\ &= \left|\left(w\star H_{\xi_1}\right)\left(-k_2/2^j\right)\right|\\ &= \left|\int w\left(-k_2/2^j-x\right)H_{\xi_1}(x)\,dx\right|\\ &\approx c\left|\int_{-k_2/2^j-\rho}^{-k_2/2^j+\rho} H_{\xi_1}(x)dx\right|\end{aligned} \tag{4.18}$$

elde edildi. Burada $\langle|k_1|\rangle=\sqrt{1+|k_1|^2}$ alındı. Fourier dönüşümünün temel özellikleri ve kros-korelasyon teoremi kullanılarak H_{ξ_1} aşağıdaki gibi ifade edildi;

$$\begin{aligned}H_{\xi_1}(x) &= \left(\left(2h_j\mathrm{sinc}(2h_j\,\cdot)e^{-2\pi ik_2/2^j\cdot}\right)\star\left(FW^h\left(\xi_1,\cdot/2^j\right)\right)\right)^V(-x)\\ &= \left(2h_j\mathrm{sinc}(2h_j\,\cdot)e^{-2\pi ik_2/2^j\cdot}\right)^V(-x)\left(\left(FW^h\right)\left(\xi_1,\cdot/2^j\right)\right)^V(-x)\\ &= \mathbb{1}_{[-h_j,h_j]}\left(-x-k_2/2^j\right)\left(\left(FW^h\right)\left(\xi_1,\cdot/2^j\right)\right)^V(-x).\end{aligned} \tag{4.19}$$

Buradan $h_j<\rho$ olduğunda,

$$\begin{aligned}c\left|\int_{-k_2/2^j-\rho}^{-k_2/2^j+\rho} H_{\xi_1}(x)dx\right| &= c\left|\int_{k_2/2^j-h_j}^{k_2/2^j+h_j}\left(\left(FW^h\right)\left(\xi_1,\cdot/2^j\right)\right)^V(x)dx\right|\\ &= c\left|\int_{k_2-2^jh_j}^{k_2+2^jh_j}\left(\left(FW^h\right)\left(\left(\xi_1,\cdot\right)\right)\right)^V(x)dx\right|\end{aligned} \tag{4.20}$$

elde edildi. Böylece, $|(FW^h)(|(\cdot,\cdot)|)^V(x)|\le c\langle|x|\rangle^{-N_2}$ değerlendirmesi göz önünde bulundurularak,

$$\left\|\hat{G}\right\|_\infty \le c\,\langle\min\left\{\left|k_2-2^jh_j\right|,\left|k_2+2^jh_j\right|\right\}\rangle^{-N_2} \tag{4.21}$$

elde edildi. Bütün bu değerlendirmeler Denklem (4.17) ile birleştirilince,

$$\left|\langle \mathcal{M}_{h_j} w\mathcal{L}_j, \Psi_\lambda\rangle\right| \leq c\langle|k_1|\rangle^{-N_1} \langle \min\{|k_2 - 2^j h_j|, |k_2 + 2^j h_j|\}\rangle^{-N_2} \tag{4.22}$$

elde edildi. Yardımcı Teorem 4.2 kullanılarak sonuç olarak,

$$\sum_{k\in\mathcal{J}_j} \left|\langle \mathcal{M}_{h_j} w\mathcal{L}_j, \Psi_\lambda\rangle\right| \leq c \sum_{k\in\mathcal{J}_j} \langle|k_1|\rangle^{-N_1} \langle \min\{|k_2 - 2^j h_j|, |k_2 + 2^j h_j|\}\rangle^{-N_2} \leq c \tag{4.23}$$

elde edildi.

Yeniden elde edilen L_j filtresinin normalize edilmiş ℓ_2 hatası için beklenen yakınsaklık, ardışık yaklaşımlar yöntemi kullanılarak dalgacık dönüşümü ile aşağıdaki teorem ile elde edildi. Burada $x = w\mathcal{L}_j$ ve Φ fonksiyonları da j ölçeğindeki Ψ_λ dalgacıklarıdır.

Teorem 4.1. $h_j = o(2^{-j})$ için L_j filtresi Φ iki boyutlu Meyer ortonormal sistemi ile ele alınsın. Bu durumda,

$$\frac{\left\|L_j - w\mathcal{L}_j\right\|_2}{\left\|w\mathcal{L}_j\right\|_2} \to 0, \qquad j \to \infty \tag{4.24}$$

sağlanır.

İspat. Yardımcı Teorem 3.2'de $x^* = L_j$ ve $x^0 = w\mathcal{L}_j$ alındığında,

$$\begin{aligned}\left\|L_j - w\mathcal{L}_j\right\|_2 &= \left\|\Phi \mathbb{1}_{\mathcal{T}^c}\Phi^* P_K w\mathcal{L}_j - \Phi \mathbb{1}_{\mathcal{T}}\Phi^* P_M w\mathcal{L}_j\right\|_2 \\ &= \left\| \sum_{k\in\mathcal{T}_j{}^c} \left|\langle w\mathcal{L}_j, \Psi_\lambda\rangle\right| - \sum_{k\in\mathcal{T}_j} \left|\langle \mathcal{M}_{h_j} w\mathcal{L}_j, \Psi_\lambda\rangle\right| \right\|_2 \\ &\leq \left\| \sum_{k\in\mathcal{T}_j{}^c} \left|\langle w\mathcal{L}_j, \Psi_\lambda\rangle\right| \right\|_2 + \left\| \sum_{k\in\mathcal{T}_j} \left|\langle \mathcal{M}_{h_j} w\mathcal{L}_j, \Psi_\lambda\rangle\right| \right\|_2 \\ &< \underbrace{o\left(\left\|w\mathcal{L}_j\right\|_2\right)}_{\text{Yardımcı Teorem 4.3}} + \underbrace{c2^{j/2}}_{\text{Yardımcı Teorem 4.4}}\end{aligned} \tag{4.25}$$

elde edildi. Yardımcı Teorem 3.3'den,

$$\frac{\left\|L_j - w\mathcal{L}_j\right\|_2}{\left\|w\mathcal{L}_j\right\|_2} < \frac{o\left(\left\|w\mathcal{L}_j\right\|_2\right)}{\left\|w\mathcal{L}_j\right\|_2} + c_1 2^{-j/2} \to 0, \qquad j \to \infty \tag{4.26}$$

elde edildi.

Burada ise L_j filtresinin normalize edilmiş ℓ_2 hatası için beklenen yakınsaklık, shearlet ile aşağıdaki gibi tespit edildi. $\beta_j > 0$ değerleri için $\mathcal{T}_j := \{\eta = (\iota; j, \ell, k): \left|\langle w\mathcal{L}_j, \sigma_\eta\rangle\right| \geq \beta_j\}$ eşik değerlerinin katsayılar kümesi ele alındı.

Yardımcı Teorem 4.5. [53] $j \to \infty$ olduğunda $h_j = o(2^{-j/2})$ için $\{\beta_j\}_j$ eşik değeri katsayıları her $j \geq j_0$ ve bazı j_0, v_1 ve $v_2 < 1/4$ değerleri için aşağıdaki şekilde vardır;

$$\{(\iota; j, \ell, k): |k_1| \leq \rho 2^{j(1+v_1)}, |k_2| \leq \rho 2^{jv_1}, \ell = 0; \iota = v\} \subseteq \mathcal{T}_j. \tag{4.27}$$

Yardımcı Teorem 4.6. [53] $j \to \infty$ olduğunda,

$$\sum_{\eta\in\mathcal{T}_j{}^c} \left|\langle w\mathcal{L}_j, \sigma_\eta\rangle\right| = o\left(2^{j/2}\right) \tag{4.28}$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.7. $j \to \infty$ olduğunda $h_j = o(2^{-j/2})$ için,

$$\sum_{\eta \in \mathcal{I}_j} \left| \langle \mathcal{M}_{h_j} w\mathcal{L}_j, \sigma_\eta \rangle \right| = o\left(2^{j/2}\right), \qquad j \to \infty \tag{4.29}$$

elde edilir.

İspat. İlk önce $\left|\langle \mathcal{M}_{h_j} w\mathcal{L}_j, \sigma_{j,\ell,k}^{l} \rangle\right|$'nin değerlendirilmesi gerekir. Yardımcı Teorem 4.4'ün ispatına benzer şekilde ve $\mathcal{M}_{h_j}$, $w\mathcal{L}_j$ ve $\sigma_{j,\ell,k}^{l}$ 'nin tanımları, değişken değiştirme özelliği ve kros-korelasyon teoremi kullanılarak,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{M}_{h_j} w\mathcal{L}_j, \sigma_{j,\ell,k}^{h} \rangle = 2^{j/4} \int \Big[\int \hat{w}(\xi_2) 2h_j \int \operatorname{sinc}\left(2h_j\tau_2\right) F\left(\xi_1, \frac{\xi_2}{2^j}\right) W\left(\xi_1, \xi_2/2^j\right) \times \\ \times V\left(\ell + 2^{-j/2}\frac{\tau_2 + \xi_2}{\xi_1}\right) e^{-2\pi i b_2(\tau_2+\xi_2)} d\tau_2 d\xi_2 \Big] e^{-2\pi i \langle \xi_1, 2^j b_1 \rangle} d\xi_1 \end{aligned} \tag{4.30}$$

elde edildi. $\widehat{\mathrm{G}}$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde alındı;

$$\begin{aligned} \hat{G}(\xi_1) = \int \hat{w}(\xi_2) 2h_j \int \operatorname{sinc}\left(2h_j\tau_2\right) F\left(\xi_1, \frac{\xi_2}{2^j}\right) W\left(\xi_1, \xi_2/2^j\right) \times \\ \times V\left(\ell + 2^{-j/2}\frac{\tau_2 + \xi_2}{\xi_1}\right) e^{-2\pi i \langle b_2, \tau_2+\xi_2 \rangle} d\tau_2 d\xi_2. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Bu fonksiyon $[1/2\ ,2]$ kümesi üzerinde sonlu dayanağa sahiptir. Buradan,

$$\left|\langle \mathcal{M}_{h_j} w\mathcal{L}_j, \sigma_{j,\ell,k}^{h} \rangle\right| \leq c_{N_1} 2^{j/4} \left\|\hat{G}\right\|_\infty \langle |k_1| \rangle^{-N_1} \tag{4.32}$$

elde edildi. $\widehat{H}_{\xi_1}$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlandı;

$$\widehat{H}_{\xi_1}(\xi_2) = 2h_j \int \operatorname{sinc}(2h_j\tau_2)\, F(\xi_1, \xi_2/2^j) W(\xi_1, \xi_2/2^j)\, V\left(\ell + 2^{-j/2}\frac{\tau_2+\xi_2}{\xi_1}\right) \times e^{-2\pi i\langle b_2, \tau_2+\xi_2\rangle} d\tau_2. \tag{4.33}$$

$\|\hat{G}\|_\infty$ normu incelensin;

$$\|\hat{G}\|_\infty = \left|\int \hat{w}(\xi_2)\widehat{H}_{\xi_1}(\xi_2) e^{-2\pi i\langle b_2,\xi_2\rangle} d\xi_2\right|. \tag{4.34}$$

Plancherel teoremi ve w 'nin sonlu dayanak özellikleri kullanılarak,

$$\left|\int \hat{w}(\xi_2)\widehat{H}_{\xi_1}(\xi_2) e^{-2\pi i\langle b_2,\xi_2\rangle} d\xi_2\right| = \left|\left(\hat{w}\widehat{H}_{\xi_1}\right)^V(-b_2)\right| \approx c\left|\int_{-b_2-\rho}^{-b_2+\rho} H_{\xi_1}(x)dx\right| \tag{4.35}$$

elde edildi. Buradan,

$$\begin{aligned} H_{\xi_1}(x) = &\Big(\left(2h_j \operatorname{sinc}(2h_j\,\cdot)\, e^{-2\pi i b_2}\right) \\ &\star \left(F(\xi_1, \cdot/2^j) W(\xi_1, \cdot/2^j) V\left(\ell + 2^{-j/2}(\cdot/\xi_1)\right)\right)^V(-x) \\ &= \left(2h_j \operatorname{sinc}(2h_j\,\cdot)\, e^{-2\pi i b_2}\right)^V(-x) \\ &\times \left(F(\xi_1, \cdot/2^j) W(\xi_1, \cdot/2^j) V\left(\ell + 2^{-j/2}(\cdot/\xi_1)\right)\right)^V(-x) \\ &= \mathbb{1}_{[-h_j,h_j]}(-x-b_2) \\ &\times \left(F(\xi_1, \cdot/2^j) W(\xi_1, \cdot/2^j) V\left(\ell + 2^{-j/2}(\cdot/\xi_1)\right)\right)^V(-x) \end{aligned} \tag{4.36}$$

elde edildi. Böylece, $h_j < \rho$ olduğunda,

$$\left|\int_{-b_2-\rho}^{-b_2+\rho} H_{\xi_1}(x)dx\right|$$

$$= \left|\int_{b_2-h_j}^{b_2+h_j} \left(F\left(\xi_1,\cdot/2^j\right)W\left(\xi_1,\cdot/2^{j/2}\right)V\left(\ell+2^{-j/2}(\cdot/\xi_1)\right)\right)^V(-x)dx\right| \tag{4.37}$$

$$= \left|\int_{2^{j/2}(b_2-h_j)}^{2^{j/2}(b_2+h_j)} \left(F\left(\xi_1,\cdot/2^{j/2}\right)W\left(\xi_1,\cdot/2^{j/2}\right) \times\times V\left(\ell+(\cdot/\xi_1)\right)\right)^V(-x)dx\right|$$

ve $(k,\ell) \in \mathcal{T}_j$ olduğunda,

$$\left|\int_{-b_2-\rho}^{-b_2+\rho} H_{\xi_1}(x)dx\right|$$

$$= \left|\int_{k_2-2^{j/2}h_j}^{k_2+2^{j/2}h_j} \left(F\left(\xi_1,\cdot/2^{j/2}\right)W\left(\xi_1,\cdot/2^{j/2}\right) \times\times V\left(\ell+(\cdot/\xi_1)\right)\right)^V(-x)dx\right| \tag{4.38}$$

elde edildi. Buradan,

$$\left|\left(F\left(\xi_1,\cdot/2^{j/2}\right)W\left(\xi_1,\cdot/2^{j/2}\right)V\left(\ell+(\cdot/\xi_1)\right)\right)^V(-x)\right| \leq c\langle|x|\rangle^{-N_2} \tag{4.39}$$

değerlendirmesi göz önünde bulundurularak, Denklem (4.34)'den ve önceki hesaplamalardan,

$$\left\|\hat{G}\right\|_\infty \leq c\,\langle\min\left\{\left|k_2-2^{j/2}h_j\right|,\left|k_2+2^{j/2}h_j\right|\right\}\rangle^{-N_2} \tag{4.40}$$

elde edildi. Bütün bu değerlendirmeler Denklem (4.32) ile birleştirilerek,

$$\left|\langle\mathcal{M}_{h_j}w\mathcal{L}_j,\sigma_{j,\ell,k}^h\rangle\right| \leq \mathrm{c}2^{j/4}\langle|k_1|\rangle^{-N_1}\,\langle\min\left\{\left|k_2-2^{j/2}h_j\right|,\left|k_2+2^{j/2}h_j\right|\right\}\rangle^{-N_2} \tag{4.41}$$

elde edildi. Buradan da sonuç olarak $v_2 < 1/4$ olduğundan, Yardımcı Teorem 4.5'den,

$$\frac{1}{c}\sum_{\eta\in\mathcal{T}_j}\left|\langle \mathcal{M}_{h_j} w\mathcal{L}_j, \sigma_\eta\rangle\right| \le 2^{j/4}\sum_{\eta\in\mathcal{T}_j}\langle|k_1|\rangle^{-N_1}\,\langle\min\left\{\left|k_2-2^{j/2}h_j\right|,\left|k_2+2^{j/2}h_j\right|\right\}\rangle^{-N_2}$$
$$\le 2^{j(1/4+v_2)} \tag{4.42}$$

elde edildi.

Yeniden elde edilen L_j filtresinin normalize edilmiş ℓ_2 hatası için beklenen yakınsaklık, ardışık yaklaşımlar yöntemi kullanılarak shearlet dönüşümü ve aşağıdaki teorem ile elde edildi. Burada $x = w\mathcal{L}_j$ ve Φ fonksiyonları da j ölçeğindeki $\sigma^1_{j,\ell,k}$ shearletleridir.

Teorem 4.2. $h_j = o(2^{-j/2})$ için L_j filtresi, Φ iki boyutlu shearlet sistemi ile ele alınsın. Bu durumda,

$$\frac{\left\|L_j - w\mathcal{L}_j\right\|_2}{\left\|w\mathcal{L}_j\right\|_2} \to 0, \qquad j\to\infty \tag{4.43}$$

sağlanır.

İspat. Yardımcı Teorem 3.2'de $x^* = L_j$ ve $x^0 = w\mathcal{L}_j$ alınarak,

$$\begin{aligned}\left\|L_j - w\mathcal{L}_j\right\|_2 &= \left\|\Phi\mathbb{1}_{\mathcal{T}^c}\Phi^*\,P_K w\mathcal{L}_j - \Phi\mathbb{1}_{\mathcal{T}}\Phi^*\,P_M w\mathcal{L}_j\right\|_2\\ &= \left\|\sum_{\eta\in\mathcal{T}_j^c}\left|\langle w\mathcal{L}_j,\sigma_\eta\rangle\right| - \sum_{\eta\in\mathcal{T}_j^c}\left|\langle \mathcal{M}_{h_j} w\mathcal{L}_j,\sigma_\eta\rangle\right|\right\|_2\\ &\le \left\|\sum_{\eta\in\mathcal{T}_j^c}\left|\langle w\mathcal{L}_j,\sigma_\eta\rangle\right|\right\|_2 + \left\|\sum_{\eta\in\mathcal{T}_j^c}\left|\langle \mathcal{M}_{h_j} w\mathcal{L}_j,\sigma_\eta\rangle\right|\right\|_2\\ &< \underbrace{o\left(2^{j/2}\right)}_{\text{Yardımcı Teorem 4.6}} + \underbrace{o\left(2^{j/2}\right)}_{\text{Yardımcı Teorem 4.7}}\end{aligned} \tag{4.44}$$

elde edildi. Yardımcı Teorem 3.3'den,

$$\frac{\left\|L_j - w\mathcal{L}_j\right\|_2}{\left\|w\mathcal{L}_j\right\|_2} < \frac{o\left(2^{j/2}\right)}{\left\|w\mathcal{L}_j\right\|_2} + \frac{o\left(2^{j/2}\right)}{\left\|w\mathcal{L}_j\right\|_2} \to 0, \qquad j \to \infty \tag{4.45}$$

elde edildi.

Yatay maskenin genişliğinin boyutu $2^{-j/2}$ den daha hızlı bir şekilde küçüldüğünde, görüntü, asimptotik olarak çok iyi bir şekilde tekrar elde edildi. Bu durumun dalgacık dönüşümü ile yapılandan daha etkili olduğu görüldü. Sonuç olarak; shearlet dönüşümü yatay maskeleme durumunda matematiksel açıdan asimptotik olarak incelendiğinde dalgacık dönüşümüne göre daha iyi sonuç verdi. Bu durum yine bu rapor döneminde, yatay maske için yazılan kod kullanılarak da incelendi.

4.4.2. Yatay maske uygulaması

Bu bölümde kayıp veriyi yeniden elde etme (inpainting) problemine shearlet ve dalgacık dönüşümlerinin yatay maskeleme (görüntünün elemanlarına yatay bir şerit olarak uygulanan maske) durumunda uygulanması yapıldı. Yatay maskeleme durumunda görüntünün iyileştirilmesi ve yeniden elde edilmesi için Matlab kodu yazıldı ve yapılan uygulama sonuçları karşılaştırıldı. Yazılan bu kodların şemaları Tablo 4.9 ve Tablo 4.10'da gösterildi.

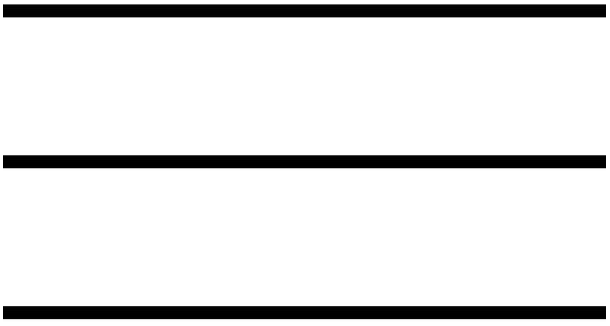
Tablo 4.9. Yatay maske kodu şeması

Kullanılan Parametreler:
• Genişlik parametresi h. • Görüntü boyutu parametreleri. • Görüntü boyutu kadar sıfırlardan oluşan matris parametresi. • Adım uzunluğu.
Algoritma:
1. Genişliği h olan maskenin oluşturulması. 2. Bu h genişlikli maskenin verilen adım uzunluğu ile görüntünün bütün taraflarına yayılması.
Çıktı:
• Yatay Maske.

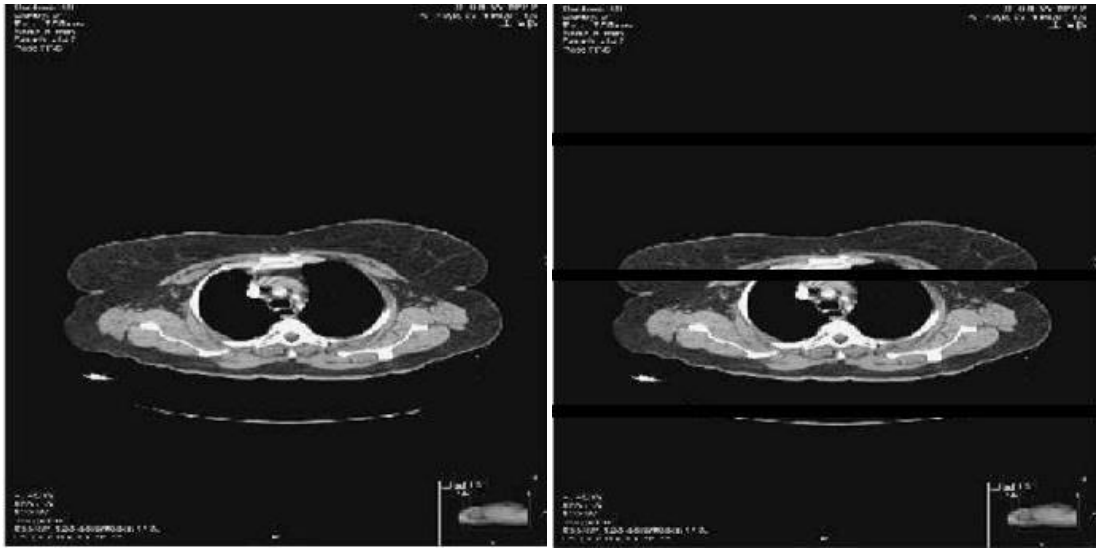
Tablo 4.10. Dalgacık ve shearlet dönüşümü kullanılarak kayıp edilen verinin yeniden elde edilmesi kod şeması

Kullanılan Parametreler:
• Medikal görüntü. • Yatay Maske. • İterasyon Parametresi. • Dalgacık/Shearlet Dönüşümü Fonksiyonları.
Algoritma:
1. Medikal görüntüye yatay maske uygulanarak veri kayıp edilmesi. 2. Ardışık yaklaşımlar yöntemini kullanarak eşik değeri belirlenmesi. 3. Dalgacık/Shearlet dönüşümü kullanılarak verinin yeniden elde edilmesi. 4. Tepe işaretin gürültüye oranının (PSNR) hesaplanması.
Çıktı:
• Maskelenmiş görüntü. • Maskelerden arındırılıp yeniden elde edilen görüntü. • Tepe işaretin gürültüye oranı (PSNR) değeri.

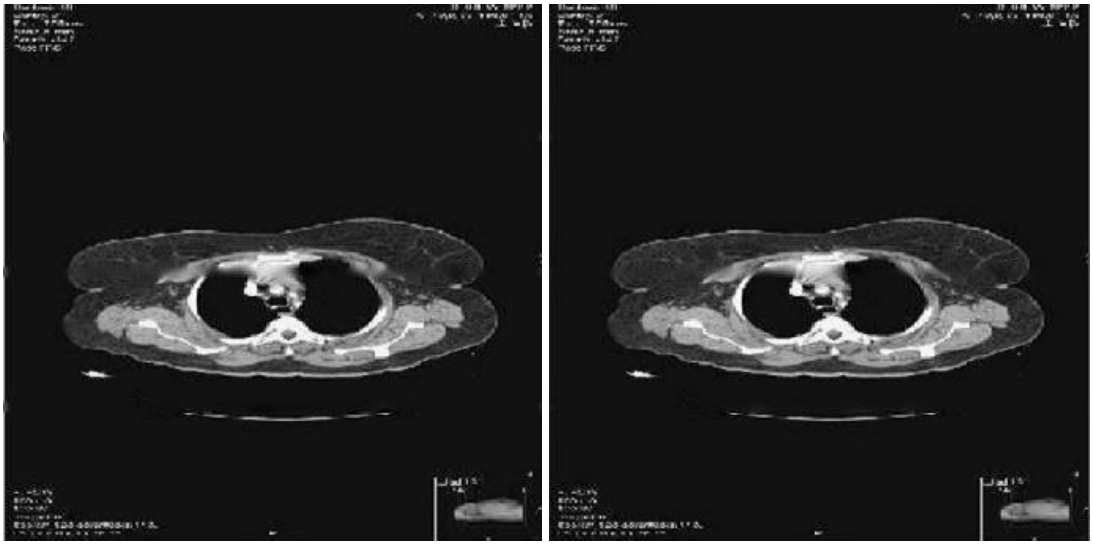
Bölüm 3'de verilen Şekil 3.3, Şekil 3.4, Şekil 3.5 ve Şekil 3.6'daki medikal görüntülere maskeleme sonrası görüntünün yeniden elde edilmesi amacıyla Matlab kodu yazılan yatay maskeleme uygulandı. Uygulanan bu maske Şekil 4.23'de gösterildi. Bu uygulamaların sonuçları da Şekil 4.24, Şekil 4.25, Şekil 4.26 ve Şekil 4.27'de gösterildi.



Şekil 4.23. Yatay maske

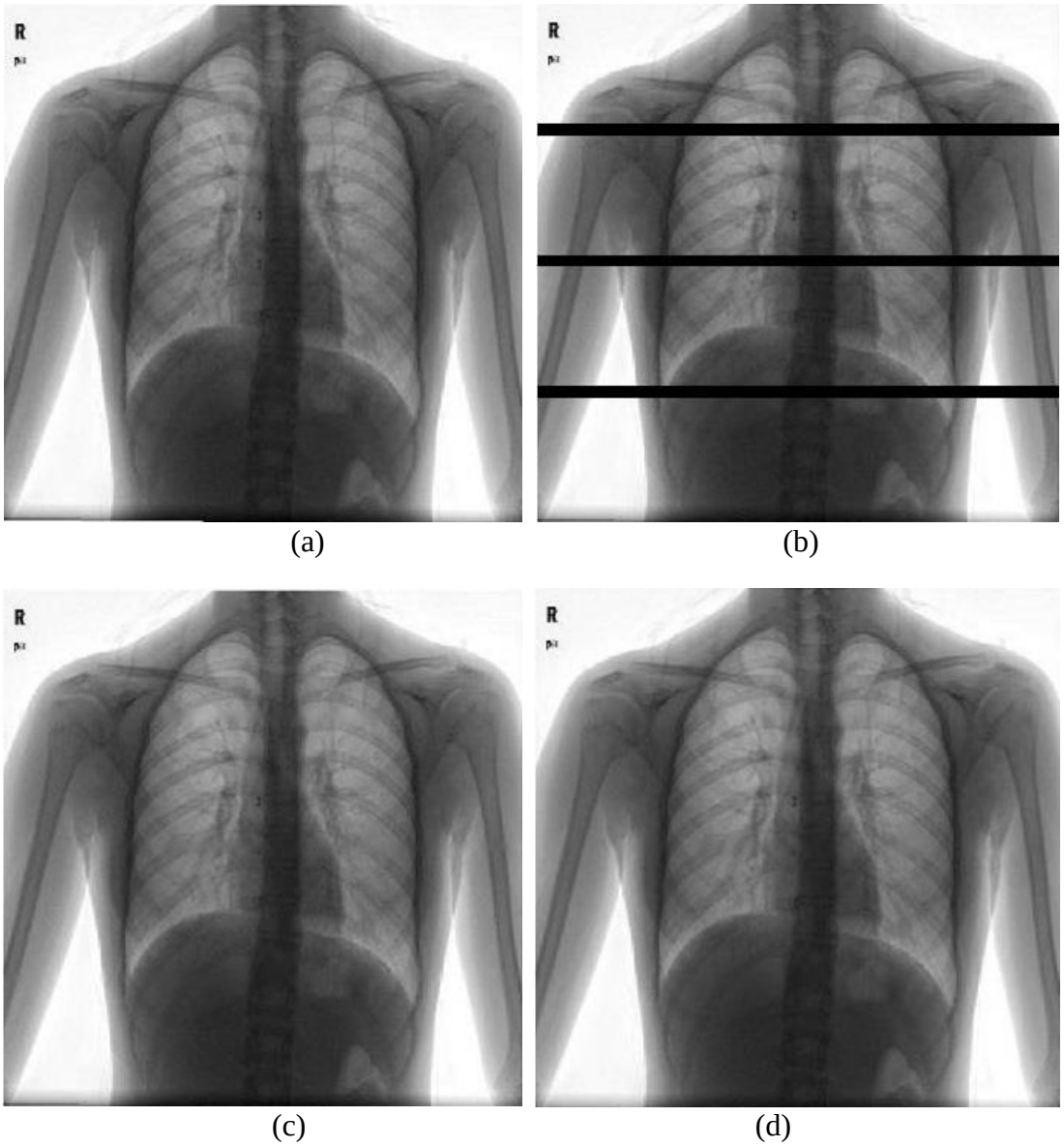


(a) (b)

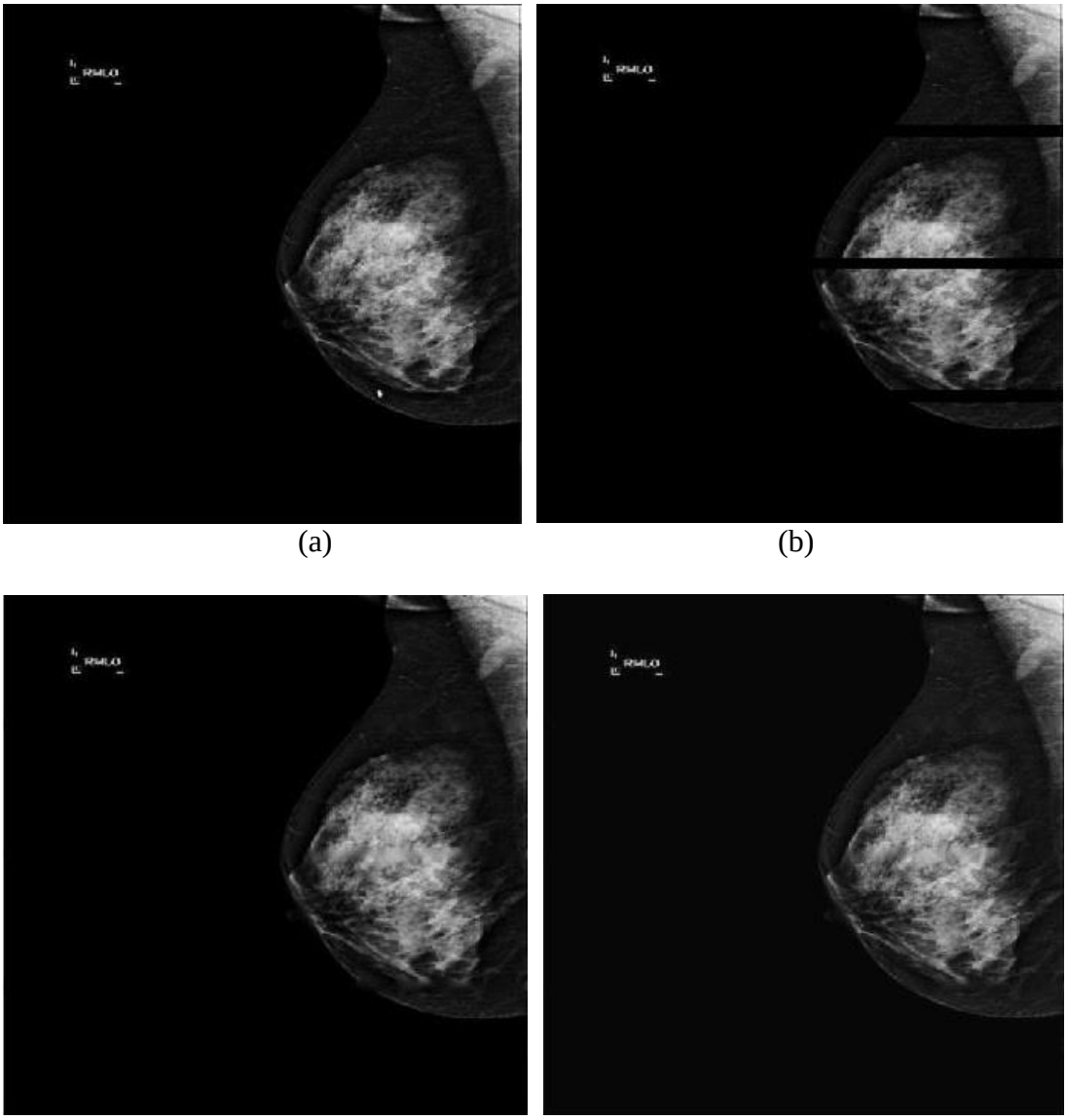


(c) (d)

Şekil 4.24. a) Damar çevresi dokusu görüntüsü, b) yatay maskenin uygulanmış hali, c) dalgacık dönüşümü ile görüntünün elde edilmesi, d) shearlet dönüşümü ile görüntünün elde edilmesi



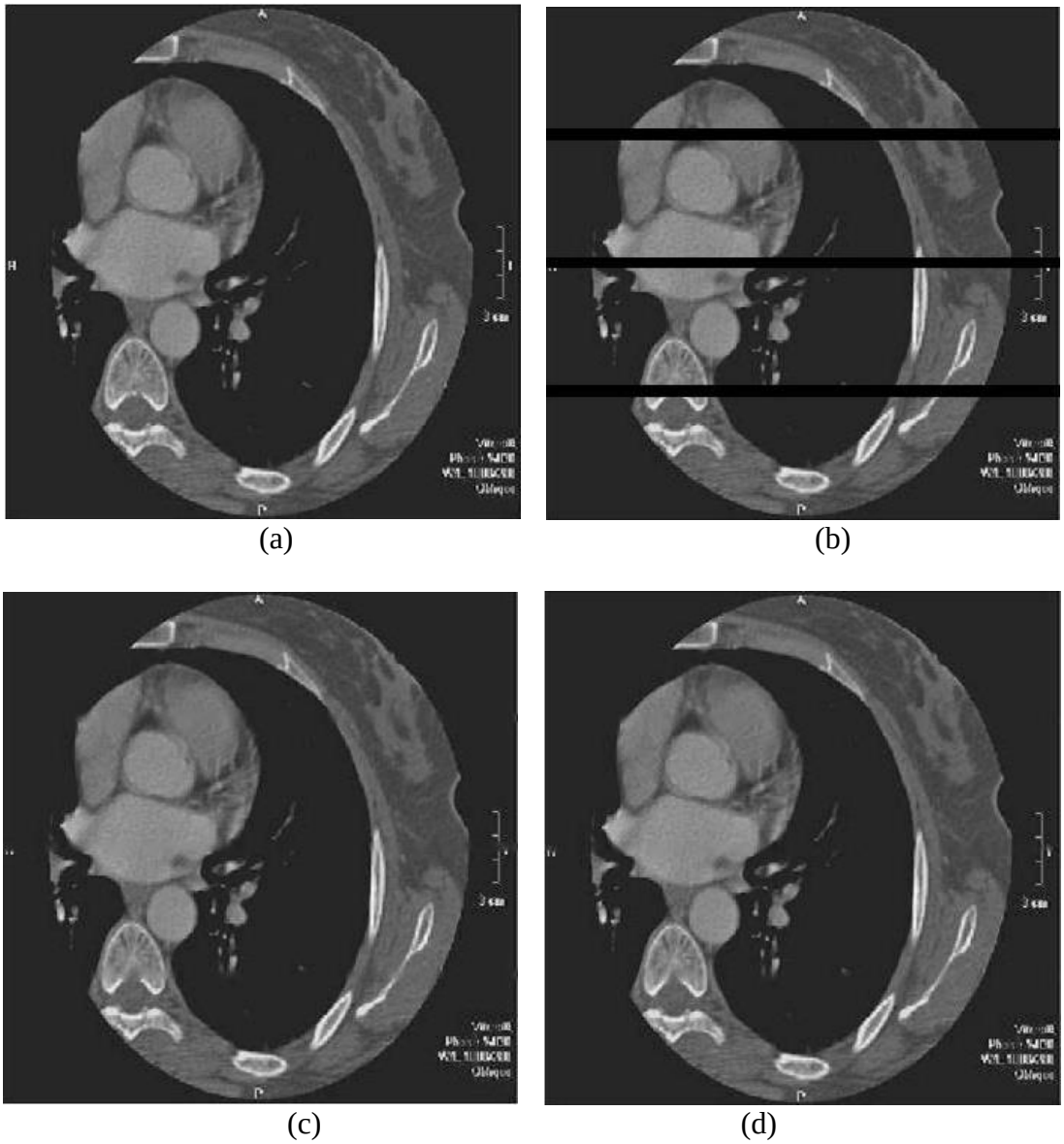
Şekil 4.25. a) Röntgen görüntüsü, b) yatay maskenin uygulanmış hali, (c) dalgacık dönüşümü ile görüntünün elde edilmesi, d) shearlet dönüşümü ile görüntünün elde edilmesi



(a) (b)

(c) (d)

Şekil 4.26. a) Mamografi görüntüsü, b) yatay maskenin uygulanmış hali, c) dalgacık dönüşümü ile görüntünün elde edilmesi, d) shearlet dönüşümü ile görüntünün elde edilmesi



(a) (b)

(c) (d)

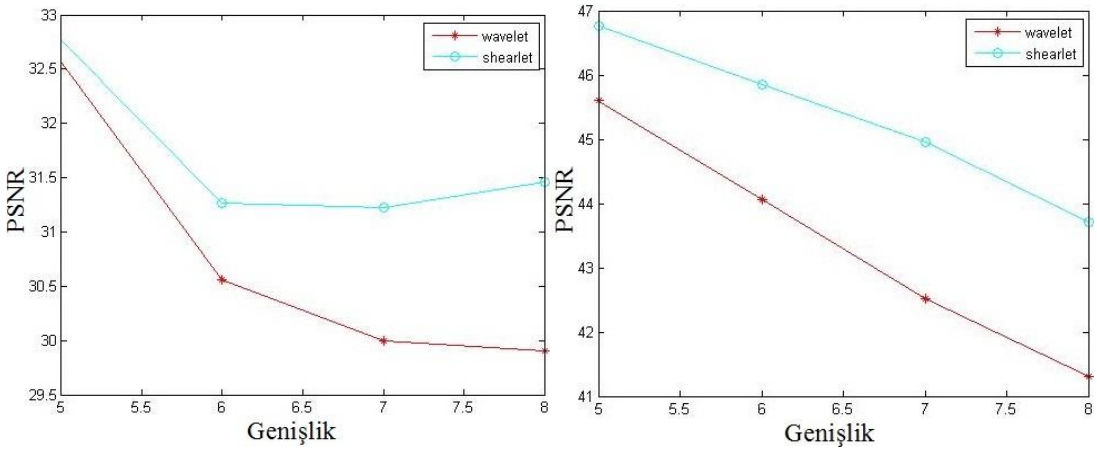
Şekil 4.27. a) Kardiyak BT görüntüsü, b) yatay maskenin uygulanmış hali, c) dalgacık dönüşümü ile görüntünün elde edilmesi, d) shearlet dönüşümü ile görüntünün elde edilmesi

Şekil 4.24, Şekil 4.5 Şekil 4.26 ve Şekil 4.27 dalgacık ve shearlet dönüşümlerinin medikal görüntülere yatay maskeleme durumunda uygulama sonuçlarının karşılaştırılmasıdır. Bu şekillerden medikal görüntülerde yatay bir şerit şeklinde ortaya çıkacak olan kayıpların giderilmesi için hem dalgacık hem de shearlet dönüşümünün kullanılabildiği anlaşıldı. Shearlet ve dalgacık dönüşümlerinden hangisinin daha etkin olduğunun anlaşılması için PSNR değerleri hesaplandı. Buna göre yapılan uygulamalardan elde edilen PSNR değerleri Tablo 4.11'de gösterildi.

Tablo 4.11. Görüntülere uygulanan dalgacık ve shearlet dönüşümleri için hesaplanan PSNR değerleri

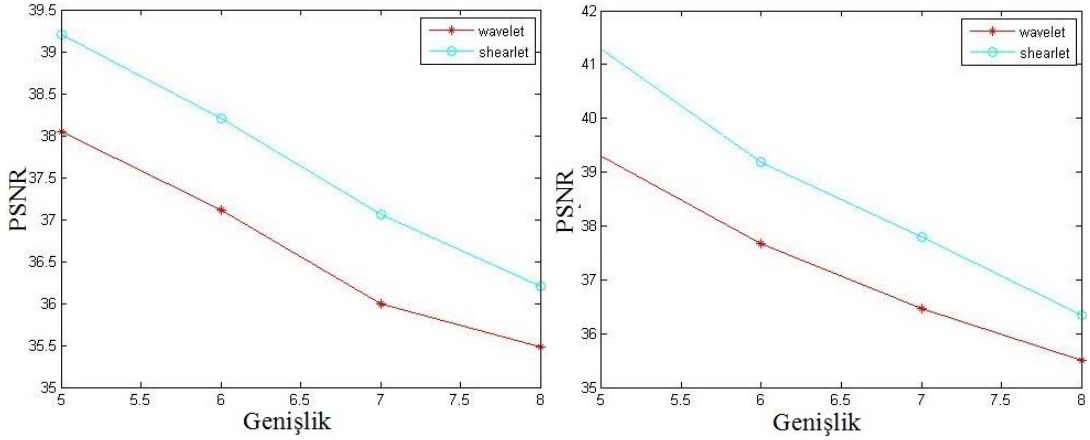
Görüntüler	**Dalgacık dönüşümü PSNR**	**Shearlet dönüşümü PSNR**
Damar çevresi dokusu görüntüsü	32,5597dB	32,7608dB
Röntgen görüntüsü	45,5972dB	46,7613dB
Mamografi görüntüsü	38,0464dB	39,2094dB
Kardiak BT Görüntüsü	39,2998dB	41,2801dB

Tablo 4.11'de yer alan PSNR değerlerine göre bu iki yöntem birbiriyle karşılaştırıldığında, PSNR değerlerinin daha büyük olduğu görülen shearlet dönüşümünün, medikal görüntülerde oluşacak yatay bir şerit şeklindeki kayıpların giderilip, görüntünün yeniden elde edilmesinde dalgacık dönüşümüne göre daha iyi sonuç verdiği anlaşıldı. Ayrıca eldeki görüntülere h=5, h=6, h=7 ve h=8 genişliklerinde yatay maske uygulandı ve PSNR değerleri elde edildi. Elde edilen bu PSNR değerleri için çizilen kros-korelasyonlar Şekil 4.28'de gösterildi.



(a) (b)

Şekil 4.28. a) Damar çevresi dokusu görüntüsü kros-korelasyonu, b) Röntgen görüntüsü kros-korelasyonu, c) Mamografi görüntüsü kros-korelasyonu, d) Kardiyak BT görüntüsü kros-korelasyonu



(c) (d)

Şekil 4.28.(Devam) a) Damar çevresi dokusu görüntüsü kros-korelasyonu, b) Röntgen görüntüsü kros-korelasyonu, c) Mamografi görüntüsü kros-korelasyonu, d) Kardiyak BT görüntüsü kros-korelasyonu

Şekil 4.28 ile, medikal görüntülere uygulanan yatay maskenin genişliğinin değişmesinin, PSNR değerleri daha yüksek olan shearlet dönüşümünün yatay şerit şeklindeki görüntü kaybının giderilmesinde dalgacık dönüşümüne göre daha etkili olduğu sonucunu değiştirmediği anlaşıldı.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde, Guo ve Ark. [7] ile Labate ve Ark. [8] tarafından 2006 yılında ortaya atılan ve uygulamalı matematikte son yıllarda oldukça önemli sonuçlar elde edilen shearlet teorisi ve onun medikal görüntülere uygulamaları üzerine çalışma yapıldı. Bu amaçla, ilk önce bir boyutlu verilerde optimal olan dalgacık dönüşümünün bir boyutlu medikal EEG verisine olan uygulaması yapıldı. Bu yapılan uygulamadaki sonuçlar Magosso ve Ark. [24] ile karşılaştırıldığında uyumlu sonuçlar elde edildi. Bu uygulamada, epilepsi nöbeti geçirme anı ile kafatasındaki bağıl enerjilerin ilişkisi araştırıldı. Ele alınan hasta verileri özellikle üç kategoriden seçildi. Bu kategoriler nöbet geçirmeyen, tek bir dikene sahip ve çoklu dikene sahip hasta verileri şeklindedir. Elde edilen sonuçlar incelendiğinde, özellikle temporal nöbet geçiren hastalar için, nöbet başlamadan hemen önce kafatasındaki nöbet geçirilen bölgede renk değişimi gözlenmeye başlandı; yani toplam enerji artmaya başladı ve nöbet anında bu değişim maksimuma ulaştı. Toplam enerjinin, nöbet bittikten sonra tekrar azalmaya başladığı da gözlendi. Burada ilginç olarak belirlenen durum ise, dördüncü seviyeden sonraki detay seviyelerinde nöbet anındaki bağıl enerjinin düştüğü sonucudur. Ayrıca bu yapılan uygulamada, en yüksek yaklaşım seviyesindeki enerji katsayısının değerine göre tek dikenli, çok dikenli nöbet geçirme ile nöbet geçirmeme arasındaki ilişki de belirlendi. Bu noktadaki temel amaç epileptik nöbetlerin tahmini için bir mekanizma geliştirmektir.

Bu tezde ikinci olarak, shearlet dönüşümünün gürültü temizleme üzerine uygulamaları yapıldı. Kocaeli Üniversitesi Araştırma ve Uygulama Hastanesi'nden temin edilen çeşitli medikal görüntülere Matlab paket programında yer almayan [47] sitesinden yararlanılarak yazılan uygun kod ile önce Gausyen gürültüsü eklendi. Daha sonra gürültülü görüntüler shearlet ve dalgacık dönüşümleriyle temizlendi. Easley ve Ark. [50] ile uyumlu sonuçlar elde edildi. Shearlet ve dalgacık dönüşümlerinden hangisinin daha etkili olduğunun anlaşılması için PSNR değerleri hesaplandı. Bu PSNR değerlerine göre kros-korelasyonlar çizildi. Elde edien PSNR

değerlerinden gürültülü medikal görüntülerin temizlenmesinde, PSNR değerleri daha büyük olan shearlet dönüşümünün dalgacık dönüşümüne göre daha etkili olduğu sonucuna ulaşıldı.

Bu tezde bir diğer uygulama olarak kaybolan verinin yeniden elde edilmesi problemi ele alındı. Bu durumda literatürde yer alan [51-55] yayınları incelendi. İlk olarak dairesel maske kodu yazıldı. Temin edilen medikal görüntülerde dairesel şekilde oluşabilecek kayıp verilerin shearlet ve dalgacık dönüşümü ile düzeltilip görüntülerin yeniden elde edilebileceği gözlendi. Bu amaçla yine Matlab paket programında yer almayan ve [47]'den yararlanılarak kod yazıldı. Önceki durumdaki gibi, bu dönüşümlerden hangisinin daha etkili olduğunun anlaşılması için PSNR değerleri hesaplandı ve bu değerlerle ilişkili olarak kros-korelasyonlar çizildi. Bu sonuçlar karşılaştırıldığında, görüntülerde oluşacak dairesel şekildeki kayıpların giderilmesinde ve görüntünün yeniden elde edilmesinde PSNR değerleri daha büyük olan shearlet dönüşümünün dalgacık dönüşümüne göre daha etkili olduğu sonucuna ulaşıldı. Bu durumun literatürde yer almayan matematiksel analiz ile de gözlenebileceği belirlendi.

Son olarak bu tezde, kaybolan verinin yeniden elde edilmesi problemi tekrar ele alındı. Bu seferde, bu durum literatürde yer almayan yatay bir şerit şeklinde verinin kaybolması durumu için ele alındı. Bunun için yatay maske kodu yazıldı. Kocaeli Üniversitesi Araştırma ve Uygulama Hastanesi'nden temin edilen çeşitli medikal görüntülere bu yatay maske uygulandı. Yine [47]'den yararlanılarak yazılan uygun kod ile medikal görüntülerdeki yatay bir şerit şeklindeki kayıpların shearlet ve dalgacık dönüşümleriyle giderilip görüntülerin tekrar elde edilebileceği gözlemlendi. Hangi dönüşümün daha etkili olduğunun anlaşılması için PSNR değerleri hesaplandı ve kros-korelasyonlar çizildi. Elde edilen sonuçlar incelendiğinde, medikal görüntülerde yatay bir şekilde oluşacak kayıpların giderilmesinde ve görüntülerin tekrar elde edilmesinde PSNR değerleri daha büyük olan shearlet dönüşümünün dalgacık dönüşümüne göre daha etkili olduğu anlaşıldı. Bu durum matematiksel analiz açısından da ele alındı. Bunun için asimptotik analizden yararlanıldı. [53]'de ele alınan modelden yararlanılarak yapılan ispatlarla asimptotik analiz bakımından shearlet dönüşümünün dalgacık dönüşümüne göre yatay maske durumunda daha

etkili olduğu sonucuna ulaşıldı. Yatay maskenin genişliğinin boyutu $2^{-j/2}$ den daha hızlı bir şekilde küçülürse, medikal görüntünün asimptotik olarak shearlet dönüşümü ile dalgacık dönüşümüne göre daha iyi bir şekilde tekrar elde edilebileceği ispatlandı. Sonuç olarak; yatay maskeleme durumu matematiksel açıdan asimptotik olarak incelendiğinde, shearlet dönüşümünün dalgacık dönüşümüne göre daha iyi sonuç verdiği anlaşıldı. Bir sonraki adım olarak literatürde yer almayan eliptik maske kodunun yazılıp bu durumun matematiksel açıdan asimptotik olarak incelenebileceği belirlendi.

KAYNAKLAR

[1] Bamberger R. H., Smith M. J. T., A Filter Bank for the Directional Decomposition of Images: Theory and Design, *IEEE Trans. Signal Process.*, 1992, **40**, 882–893.

[2] Antoine J. P., Carrette P., Murenzi R., Piette B., Image Analysis with Two-dimensional Continuous Wavelet Transform, *Signal Process.*, 1993, **31**, 241–272.

[3] Kingsbury N., Image Processing with Complex Wavelets, *Phil. Trans. Royal Society London* , 1999, **357**(1760), 2543–2560.

[4] Kingsbury N., Complex Wavelets for Shift Invariant Analysis and Filtering of Signals, *Appl. Computat. Harmon. Anal.*, 2001, **10**, 234–253.

[5] Cand`es E. J., Donoho D. L., New Tight Frames of Curvelets and Optimal Representations of Objects with Piecewise C2 Singularities, *Comm. Pure Appl. Math.*, 2002, **57,** 219–266.

[6] Do M. N., Vetterli M., The Contourlet Transform: an Efficient Directional Multiresolution Image Representation, *IEEE Trans. Image Process.*, 2005, **14**, 2091–2106.

[7] Guo K., Kutyniok G., Labate D., Sparse Multidimensional Representations Using Anisotropic Dilation and Shear Operators, Editors: Chen G., Lai M. J., *Wavelets and Splines: Athens 2005*, Nashboro Press, Nashville, 189–201, 2006.

[8] Labate D., Lim W. Q., Kutyniok G., Weiss G., Sparse Multidimensional Representation Using Shearlets, *in Wavelets XI, Edited by M. Papadakis, A. F. Laine, and M. A. Unser, SPIE Proc.*, 2005, **5914**, 254–262.

[9] Guo K., Labate D., Lim W. Q., Weiss G., Wilson E., Wavelets with Composite Dilations, *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, 2004, **10,** 78–87.

[10] Guo K., Labate D., Lim W. Q., Weiss G., Wilson E., The Theory of Wavelets with Composite Dilations, Editors: Heil C., *Harmonic Analysis and Applications*, Birkhauser, Boston, 231–250, 2006.

[11] Guo K., Lim W. Q., Labate D., Weiss G., Wilson E., Wavelets with Composite Dilations and Their MRA Properties, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 2006, **20,** 220–236.

[12] Akın M., Comparison of Wavelet Transform and FFT Methods in the Analysis of EEG Signals, *Journal of Medical Systems*, 2002, **26**, 241-247.

[13] Duffin R. J., Schaeffer A. C., A Class of Nonharmonic Fourier Series, *Trans. Amer. Math. Soc*., 1952, **72**(2), 341–366.

[14] Marr, D., Hildreth, E., Theory of Edge Detection, *Proceedings of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences*, 1980, **207**(1167), 187–217.

[15] Daubechies I., *Ten lectures on Wavelets*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 1992.

[16] Adeli H., Zhou Z., Dadmehr N., Analysis of EEG Records in an Epileptic Patient Using Wavelet Transform, *Journal of Neuroscience Methods*, 2003, **123**(1), 69-87.

[17] D'Attellis C. E., Isaacson S. I., Sirne R. O., Detection of Epileptic Events in Electroencephalograms Using Wavelet Analysis, *Annals of Biomedical Engineering***,** 1997, **25**, 286-293.

[18] Gigola S., Ortiz F., D'Attellis C. E., Silva W., Kochen S., Prediction of Epileptic Seizures Using Accumulated Energy in a Multiresolution Framework, *Journal of Neuroscience Methods*, 2004, **138**, 107–111.

[19] Hallez H., Vanrumste B., Grech R., Muscat J., De Clercq W., Vergult A., D'Asseler Y., Camilleri K. P., Fabri S. G., Huffel S. V., Lemahieu I., Review on Solving the Forward Problem in EEG Source Analysis, *Journal of NeuroEngineering and Rehabilitation*, 2007, **4**(46), 1-19.

[20] Grech R., Cassar T., Muscat J., Camilleri K. P., Fabri S. G., Zervakis M., Xanthopoulos P., Sakkalis V., Vanrumste B., Review on Solving the Inverse Problem in EEG Source Analysis, *Journal of NeuroEngineering and Rehabilitation*, 2008, **5**(25), 1-33.

[21] Hsu W. Y., EEG-based Motor Imagery Classification Using Neuro-fuzzy Prediction and Wavelet Fractal Features, *Journal of Neuroscience Methods*, 2010, **189**, 295–302.

[22] Kumar S. P., Sriraam N., Benakop P. G., Jinaga B. C., Entropies Based Detection of Epileptic Seizures with Artificial Neural Network Classifiers, *Expert Systems with Applications*, 2010, **37**, 3284-3291.

[23] Lima C. A. M., Coelho A. L. V., Chagas S., Automatic EEG Signal Classification for Epilepsy Diagnosis with Relevance Vector Machines, *Expert Systems with Applications*, 2009, **36**, 10054–10059.

[24] Magosso E., Ursino M., Zaniboni A., Gardella E., A Wavelet-based Energetic Approach for the Analysis of Biomedical Signals: Application to the Electroencephalogram and Electro-oculogram, *Applied Mathematics and Computation*, 2009, **207(**1) 42-62.

[25] Mallat S., Hwang W. L., Singularity Detection and Processing with Wavelets, *IEEE Trans. Inf. Theory*, 1992, **38**(2), 617–643.

[26] Mallat S., Zhong S., Characterization of Signals from Multiscale Edges, *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 1992, **14**(7), 710–732.

[27] Mallat S., *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, San Diego, 1998.

[28] Donoho D. L., De-noising by Soft Thresholding, *IEEE Trans. Info. Theory*,1995, **41**, 613–627.

[29] Donoho D. L., Vetterli M., DeVore R. A., Daubechies I., Data Compression and Harmonic Analysis, *IEEE Trans. Inform. Theory*, 1998, **44**, 2435–2476.

[30] Kittipoom P., Kutyniok G., Lim W. Q., Construction of Compactly Supported Shearlet Frames, *Constr. Approx.*, 2012, **35**, 21–72.

[31] Kutyniok G., Lim W. Q., Compactly Supported Shearlets Are Optimally Sparse, *J. Approx. Theory*, 2011, **163**, 1564–1589.

[32] Easley G. R., Labate D., Lim W. Q., Sparse Directional Image Representations Using the Discrete Shearlet Transform, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 2008, **25**(1), 25–46.

[33] Gomathi R., Kumar A., An Efficient GEM Model for Image Inpainting Using a New Directional Sparse Representation: Discrete Shearlet Transform, *2010 IEEE International Conference on Computational Intelligence and Computing Research (ICCIC)*, Coimbatore, India, 28-29 December 2010.

[34] Lim W. Q., The Discrete Shearlet Transform: A New Directional Transform and Compactly Supported Shearlet Frames, *Image Proc. IEEE Transactions on*, 2010, **19**(5), 1166–1180.

[35] Lim W. Q., Kutyniok G., Zhuang X., Digital Shearlet Transforms, Editors: Kutyniok G., Labate D., *Shearlets: Multiscale Analysis for Multivariate Data*, Birkhäuser, Boston, 239–282, 2012.

[36] Häuser S., Steidl G., Fast Finite Shearlet Transform: a Tutorial, Arxiv Search Interface, http://arxiv.org/pdf/1202.1773.pdf, (Ziyaret Tarihi: 10 Ekim 2014).

[37] Colonna F., Easley G. R., Guo K., Labate D., Radon Transform Inversion Using the Shearlet Representation, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 2010, **29**(2), 232–250.

[38] Donoho D. L., Kutyniok G., Microlocal Analysis of the Geometric Separation Problem, *Comm. Pure Appl. Math.*, 2013, **66**(1), 1–47.

[39] Guo K., Labate D., Optimally Sparse Multidimensional Representation Using Shearlets, *SIAM J. Math. Anal.*, 2007, **39**, 298–318.

[40] Kutyniok G., Labate D., Resolution of the Wavefront Set Using Continuous Shearlets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2009, **361**, 2719–2754.

[41] Kutyniok G., Lim W. Q., Image Separation Using Wavelets and Shearlets, *Curves and Surfaces*, 2012, **6920**, 416-430.

[42] Patel V. M., Easley G. R., Healy D. M., Jr., Shearlet-based Deconvolution, *IEEE Trans. Image Proc.*, 2009, **18**(12), 2673–2685.

[43] Yi S., Labate D., Easley G. R., Krim H., A Shearlet Approach to Edge Analysis and Detection, *IEEE Trans. Image Proc*., 2009, **18**(5), 929–941.

[44] Häuser S., Steidl G., Convex Multiclass Segmentation with Shearlet Regularization, *International Journal of Computer Mathematics*, 2013, **90**(1), 62–81.

[45] Kutyniok G., Clustered Sparsity and Separation of Cartoon and Texture, *SIAM J. Imaging Sci.*, 2013, **6**, 848–874.

[46] Kutyniok G., Labate D., Ch. Introduction to Shearlets, *Shearlets: Multiscale Analysis for Multivariate Data*, Birkhäuser, Boston, 1–38, 2012.

[47] www.shearlab.org (Ziyaret Tarihi: 20 Mayıs 2010).

[48] Easley G. R., Labate D., Colonna F., Shearlet-Based Total Variation for Denoising, *IEEE Trans. Image Processing*, 2009, **18**(2), 260–268.

[49] Guo Q., Yu S., Chen X., Liu C., Wei W., Shearlet-based Image Denoising Using Bivariate Shrinkage with Intra-band and Opposite Orientation Dependencies, *IEEE Conference Publications*, 2009, **1**, 863–866.

[50] Easley G. R., Labate D., Image Processing Using Shearlets, Editors: Kutyniok G., Labate D., *Shearlets: Multiscale Analysis for Multivariate Data*, Birkhäuser, Boston, 283–325, 2012.

[51] Häuser S., Ma J., Seismic Data Reconstruction via Shearlet-Regularized Directional Inpainting, http://www.mathematik.uni-kl.de/uploads/tx_sibibtex/seismic.pdf, (Ziyaret Tarihi: 10 Eylül 2013).

[52] King E. J., Kutyniok G., Zhuang X., Analysis of Data Separation and Recovery Problems Using Clustered Sparsity, *SPIE Proceedings: Wavelets and Sparsity XIV*, 2011, **8138**, 1-11.

[53] King E. J., Kutyniok G., Zhuang X., Analysis of Inpainting via Clustered Sparsity and Microlocal Analysis, *J. Math. Imaging Vis.*, 2014, **48**, 205–234.

[54] King E. J., Kutyniok G., Lim W.Q, Image Inpainting: Theoretical Analysis and Comparison of Algorithms, *SPIE Proceedings*, 2013, **8858**, 1-11.

[55] Genzel M., Kutyniok G., Asymptotic Analysis of Inpainting via Universal Shearlet Systems, Arxiv Search Interface, http://arxiv.org/pdf/1405.3747v2.pdf, (Ziyaret Tarihi: 5 November 2014).

[56] Grossmann A., Morlet J., Paul T., Transforms Associated to Square Integrable Group Representations I: General Results, *J. Math. Phys.*, 1985, **26**, 2473–2479.

[57] Dahlke S., Kutyniok G., Maass P., Sagiv C., Stark H. G., The Uncertainty Principle Associated with the Continuous Shearlet Transform, *International Journal on Wavelets Multiresolution and Information Processing*, 2008, **6**, 157-181.

[58] Kodal Sevindir H., Yazici C., Siddiqi A. H., Aslan Z., On Analysis of Electroencephalogram by Multiresolution-Based Energetic Approach, *AIP Conf. Proc.*, 2013, **1558**, 2482-2486.

[59] Kodal Sevindir H., Yazici C., An Image Denoising Application Using Shearlets, *AIP Conf. Proc.*, 2013, **1558**, 2478-2482.

KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER

Web of Science'da Taranan Makale Bilgileri:

[1] **Yazici C.**, Kodal Sevindir H., A Correction for Computing Matrix-Valued Nevanlinna-Pick Interpolation Problem, *AIP Conf. Proc.*, 2013, **1558**, 2474-2478.

[2] Kodal Sevindir H., **Yazici C.**, An Image Denoising Application Using Shearlets, *AIP Conf. Proc.*, 2013, **1558**, 2478-2482.

[3] Kodal Sevindir H., **Yazici C.**, Siddiqi A. H., Aslan Z., On Analysis of Electroencephalogram by Multiresolution-Based Energetic Approach, *AIP Conf. Proc.*, 2013, **1558**, 2482-2486.

[4] Kodal Sevindir H., **Yazici C.**, Yazici V., Mathematics Anxiety of Secondary School Students: A Case Study for Kocaeli Area, *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 2014, **152**, 630-636.

[5] Kodal Sevindir H., **Yazici C.**, Yazici V., Mathematics Anxiety: A Case Study for Kocaeli University, *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 2014, **152**, 637-641.

[6] Kodal Sevindir H., **Yazici C.**, Examining the Factors Affecting the Selection of Mathematics Profession: A Case Study, *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 2014, **152**, 642-647.

[7] Kodal Sevindir H., **Yazici C.**, Çetinkaya S., A Study on Physical Exercise Habit, *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 2014, **152**, 648-652.

Diğer İndekslerde Taranan Makale Bilgileri:

[1] Siddiqi A.H., Kodal Sevindir H., **Yazici C.**, Kutlu A., Spectral Analysis of Eeg Signals By Using Wavelet And Harmonic Transforms, *İstanbul Aydın Üniversitesi Dergisi Fen Bilimleri*, 2012, **3**, 1-20.

Tam Metin Basılan Uluslararası Bildiriler:

[1] Kodal Sevindir H., **Yazici C.**, On Displacement Operator Approach for Superfast Algorithm Design, Editors: Çağıl G., Kubat C., Öztemel E., Taşkın H., *The Proceedings of 6th International Symposium on Intelligent and Manufacturing Systems*, Sakarya, 278-288, 2008.

[2] Kodal Sevindir H., **Yazici C.**, An Effective Algorithm for Matrix Valued Interpolation Problem, Editors: Siddiqi A. H., Aslan Z., Dökmen F., Duru N., Kodal Sevindir H., Pembe Özer N., *Proceeding of IVth International*

Workshop on Applications of Wavelets to Real World Problems, Sesim Ofset, Kocaeli, 276-283, 2010.

Özet Basılan Uluslararası Bildiriler:

[1] Kodal Sevindir H., **Yazici C.**, Budak H., Meral T., Yazici V., A Study on Secondary School Students' Mathematics Anxiety in Terms of Demographic Factors, *6 th International Processing and Wavelet on Real World Applications Conference*, İstanbul, 28-29 September 2012.

[2] Kodal Sevindir H., **Yazici C.**, Comparison of Wavelet and Shearlet Transforms for Medical Images, *International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling*, İstanbul, 2-5 June 2013.

Özet Basılan Ulusal Bildiriler:

[1] Kodal Sevindir H., **Yazici C.**, Yerdeğiştirme Operatörleri, *3. Ankara Matematik Günleri Sempozyumu*, Ankara, 22-23 Mayıs 2008.

[2] Kodal Sevindir H., **Yazici C.**, On Analysis of Brain Signals Using Wavelet Transform, *XXIII. Ulusal Matematik Sempozyumu*, Kayseri, 4-7 Ağustos 2010.

[3] Küçük A., Arı A. A., **Yazici C.**, Matematik Eğitiminde Çabalayarak Öğrenenler ve Onların Bazı Karakteristik Özellikleri, *23. Ulusal Eğitim Bilimleri Kurultayı*, Kocaeli, 4-6 Eylül 2014.

Poster Bilgileri:

[1] Siddiqi A. H., Kodal Sevindir H., **Yazici C.**, Aslan Z., Budak H., Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System for Epileptic Seizure Prediction Using Wavelet Feature Extraction, *6 th International Processing and Wavelet on Real World Applications Conference*, İstanbul, 28-29 September 2012.

Yönettiği veya Görevli Olduğu Proje Bilgileri:

[1] KOÜ Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi destekli 2010/003 kodlu "EEG Sinyallerinin Spektral Analizinde Dalgacık ve Fourier Dönüşümleri" isimli projede 30 ay süreli araştırmacı olarak görev aldım.

Uluslararası Yayınevleri ya da Kuruluşlarca Basılmış Kitaplarda Editörlük veya Bölüm Yazarlığı:

[1] Siddiqi A. H., Kodal Sevindir H., Aslan Z., **Yazici C.**, Relevance of Wavelets and Inverse Problems to Brain, Editors: Siddiqi A. H., Singh R. C., Manchanda P., *Mathematics in Science and Technology*, World Scientific Publishing, 402-429, 2011.

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Artvin' de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Artvin' de tamamladı. Lise öğrenimini Kocaeli' de tamamladı. 2002 yılında girdiği Kocaeli Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2006 yılında bölüm ve fakülte birincisi olarak mezun oldu. 2006 yılında Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı'nda yüksek lisans öğrenimine başladı. 2008 yılında başarıyla mezun olduktan sonra aynı yıl Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Doktora Programı'nda öğrenimine başladı. 2007 yılından beri Kocaeli Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı'nda Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır. Evli ve bir çocuk babasıdır.