



T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Yüksek Mertebeden Lineer Olmayan Fark Modellerinin Çözümleri ve Periyotları

Esra ESEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Şubat-2015

KONYA

Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yüksek Mertebeden Lineer Olmayan Fark Modellerinin Çözümleri ve Periyotları

Esra ESEN
Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç.Dr. Kemal USLU

2015, 50 Sayfa

Jüri
Yrd. Doç. Dr. Kemal USLU
Doç. Dr. İsmail KINACI
Yrd. Doç. Dr. Hasan KÖSE

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölümde, çalışma ile ilgili genel bilgi verildi.
İkinci bölümde, fark denklemleri ile ilgili yapılmış bazı çalışmalar kısaca açıklandı.
Üçüncü bölümde çalışma için gerekli temel kavramlar hakkında bilgi verildi.
Dördüncü bölümde

$$x_{n+1}=\frac{A}{y_{n-1}},\ y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-1}-x_{n-1}},\ z_{n+1}=\frac{A}{y_{n-1}}+\frac{Bx_{n-1}}{x_n y_{n-2}},\ n\geq 0$$

$$x_{n+1}=\frac{A}{y_{n-2}},\ y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-2}-x_{n-2}},\ z_{n+1}=\frac{A}{y_{n-2}}+\frac{Bx_{n-1}}{x_n y_{n-3}},\ n\geq 0$$

$$x_{n+1}=\frac{A}{y_{n-3}},\ y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-3}-x_{n-3}},\ z_{n+1}=\frac{A}{y_{n-3}}+\frac{Bx_{n-1}}{x_n y_{n-4}},\ n\geq 0$$

fark denklem sistemlerinin periodikliği araştırıldı.
Beşinci bölümde

$$x_{n+1}=\frac{A}{y_{n-k}},\ y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-k}-x_{n-k}},\ z_{n+1}=\frac{A}{y_{n-k}}+\frac{Bx_{n-1}}{x_n y_{n-(k+1)}},\ n\geq 0$$

olduğu durumlarda genel rasyonel fark denklem sisteminin çözümlerinin periyodik olduğu gösterildi.
Altıncı bölümde dördüncü bölümdeki fark denklem sistemleri ile ilgili örnekler verildi.

Anahtar Kelimeler: Asimtotik Kararlılık, Periyodiklik, Lineer Fark Denklem Sistemi

ABSTRACT

MS THESIS

THE SOLUTIONS AND PERIODS OF HIGHER ORDER NONLINEAR DIFFERENCE MODEL

Esra ESEN

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE / DOCTOR OF PHILOSOPHY IN MECHANICAL ENGINEERING

Advisor: Yrd.Doç.Dr.Kemal USLU
2015, 50 Pages

Jury
Yrd. Doç. Dr. Kemal USLU
Doç. Dr. İsmail KINACI
Yrd. Doç. Dr. Hasan KÖSE

This study consists of six sections.

In the firs section, we have given general information about study.

In the second section, we have given some information about some difference equations studied before.

In the third section, we have give information about necessary concepts for our study.

In the fourth section, we have investigated the periodical solutions of a system of difference equations

$$x_{n+1}=\frac{A}{y_{n-1}},\ y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-1}-x_{n-1}},\ z_{n+1}=\frac{A}{y_{n-1}}+\frac{Bx_{n-1}}{x_n y_{n-2}},\ n\geq 0$$

$$x_{n+1}=\frac{A}{y_{n-2}},\ y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-2}-x_{n-2}},\ z_{n+1}=\frac{A}{y_{n-2}}+\frac{Bx_{n-1}}{x_n y_{n-3}},\ n\geq 0$$

$$x_{n+1}=\frac{A}{y_{n-3}},\ y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-3}-x_{n-3}},\ z_{n+1}=\frac{A}{y_{n-3}}+\frac{Bx_{n-1}}{x_n y_{n-4}},\ n\geq 0$$

In the fifth section, we have investigated the periodical solutions of a system of general rational difference equation

$$x_{n+1}=\frac{A}{y_{n-k}},\ y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-k}-x_{n-k}},\ z_{n+1}=\frac{A}{y_{n-k}}+\frac{Bx_{n-1}}{x_n y_{n-(k+1)}},\ n\geq 0$$

In the sixth section, we have given the numerical examples fort his system of difference equations

Keywords: Asymptotic stability, Periodicity, System of the linear equation

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Yrd. Doç. Dr. Kemal USLU yönetiminde yapılarak Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Yüksek Lisans çalışmamı yönetmeyi kabul ederek bana yol gösteren saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Kemal USLU'ya hayatımın her aşamasında bana yardımcı olan aileme en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Esra ESEN
KONYA-2015

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

SİMGELER VE KISALTMALAR ..... **ix**

1. GİRİŞ **1**

2.FARK DENKLEM SİSTEMLERİ İLE İLGİLİ YAPILMIŞ ÇALIŞMALAR **2**

3.FARK DENKLEMLERİ **6**

4. FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN PERİYODİKLİĞİ **11**

4.1. $x_{n+1}=\frac{1}{y_{n-1}}$, $y_{n+1}=\frac{1}{z_{n-1}-x_{n-1}}$, $z_{n+1}=\frac{1}{y_{n-1}}+\frac{x_{n-1}}{x_n y_{n-2}}$ **FARK DENKLEM** **11**

SİSTEMİNİN PERİYODİKLİĞİ **11**

4.2. $x_{n+1}=\frac{A}{y_{n-1}}$, $y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-1}-x_{n-1}}$, $z_{n+1}=\frac{A}{y_{n-1}}+\frac{Bx_{n-1}}{x_n y_{n-2}}$ **FARK DENKLEM SİSTEMİNİN PERİYODİKLİĞİ** **14**

4.3. $x_{n+1}=\frac{1}{y_{n-2}}$, $y_{n+1}=\frac{1}{z_{n-2}-x_{n-2}}$, $z_{n+1}=\frac{1}{y_{n-2}}+\frac{x_{n-1}}{x_n y_{n-3}}$ **FARK DENKLEM SİSTEMİNİN PERİYODİKLİĞİ** **16**

4.4. $x_{n+1}=\frac{A}{y_{n-2}}$, $y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-2}-x_{n-2}}$, $z_{n+1}=\frac{A}{y_{n-2}}+\frac{Bx_{n-1}}{x_n y_{n-3}}$ **FARK DENKLEM SİSTEMİNİN PERİYODİKLİĞİ** **20**

4.5. $x_{n+1}=\frac{1}{y_{n-3}}$, $y_{n+1}=\frac{1}{z_{n-3}-x_{n-3}}$, $z_{n+1}=\frac{1}{y_{n-3}}+\frac{x_{n-1}}{x_n y_{n-4}}$ **FARK DENKLEM SİSTEMİNİN PERİYODİKLİĞİ** **24**

4.6. $x_{n+1}=\frac{A}{y_{n-3}}$, $y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-3}-x_{n-3}}$, $z_{n+1}=\frac{A}{y_{n-3}}+\frac{Bx_{n-1}}{x_n y_{n-4}}$ **FARK DENKLEM SİSTEMİNİN PERİYODİKLİĞİ** **28**

4.7. $x_{n+1}=\frac{1}{y_{n-k}}$, $y_{n+1}=\frac{1}{z_{n-k}-x_{n-k}}$, $z_{n+1}=\frac{1}{y_{n-k}}+\frac{x_{n-1}}{x_n y_{n-(k+1)}}$ **FARK DENKLEM SİSTEMİNİN PERİYODİKLİĞİ 32**

4.8. $x_{n+1}=\frac{A}{y_{n-k}}$, $y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-k}-x_{n-k}}$, $z_{n+1}=\frac{A}{y_{n-k}}+\frac{Bx_{n-1}}{x_n y_{n-(k+1)}}$ **FARK DENKLEM SİSTEMİNİN PERİYODİKLİĞİ 35**

5. $x_{n+1}=\frac{A}{y_{n-k}}$, $y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-k}-x_{n-k}}$, $z_{n+1}=\frac{A}{y_{n-k}}+\frac{Bx_{n-1}}{x_n y_{n-(k+1)}}$ **FARK DENKLEM SİSTEMİN KARARLILIĞI 38**

6. NÜMERİK ÖRNEKLER VE ŞEKİLLERİ 40

7. KAYNAKLAR 48

ÖZGEÇMİŞ 50

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{R}$: Reel sayılar

$\mathbb{N}$: Doğal sayılar

$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$: İki boyutlu reel sayılar kümesi

$\forall$: Her

$\exists$: Bazı

$<$: Küçük

$>$: Büyük

$\leq$: Küçük eşit

$\geq$: Büyük eşit

$=$: Eşit

$\neq$: Eşit değil

1. GİRİŞ

Bu tezde;

$$x_{n+1}=\frac{A}{y_{n-1}},\quad y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-1}-x_{n-1}},\quad z_{n+1}=\frac{A}{y_{n-1}}+\frac{Bx_{n-1}}{x_n y_{n-2}},\quad n\geq 0$$

$$x_{n+1}=\frac{A}{y_{n-2}},\quad y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-2}-x_{n-2}},\quad z_{n+1}=\frac{A}{y_{n-2}}+\frac{Bx_{n-1}}{x_n y_{n-3}},\ n\geq 0$$

$$x_{n+1}=\frac{A}{y_{n-3}},\quad y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-3}-x_{n-3}},\quad z_{n+1}=\frac{A}{y_{n-3}}+\frac{Bx_{n-1}}{x_n y_{n-4}},\ n\geq 0$$

fark denklem sistemlerinin $A=1, B=1$ ve $A,B\in\mathbb{R}\text{-}\{0\}$ olduğu durumlarda periyodikliği incelendi. Sonra bu sistemin en genel hali olan

$$x_{n+1}=\frac{A}{y_{n-k}},\quad y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-k}-x_{n-k}},\quad z_{n+1}=\frac{A}{y_{n-k}}+\frac{Bx_{n-1}}{x_n y_{n-(k+1)}},\ n\geq 0,\ A,B\in\mathbb{R}\text{-}\{0\}$$

genel rasyonel fark denklem sistemine ulaşılarak bu sisteminde çözümlerinin $A=1$, $B=1$ ve $A,B\in\mathbb{R}\text{-}\{0\}$ olduğu durumlarda periyodikliği incelendi.

Daha sonra

$$x_{n+1}=\frac{A}{y_{n-k}},\quad y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-k}-x_{n-k}},\quad z_{n+1}=\frac{A}{y_{n-k}}+\frac{Bx_{n-1}}{x_n y_{n-(k+1)}},\ n\geq 0,\ A,B\in\mathbb{R}\text{-}\{0\}$$

genel rasyonel fark denklem sisteminin özel şartlar altında kararlılığı incelendi.

2.BÖLÜM

2.FARK DENKLEM SİSTEMLERİ İLE İLGİLİ YAPILMIŞ ÇALIŞMALAR

Fark denklemlerinin global asimptotik kararlılığı ile ilgili literatürde son yıllarda yapılmış olan çalışmaları özetleyelim:

Schinas (1997) çalışmalarında,

$x_{n+1}=\frac{x_n+1}{x_{n-1}}$ Lyness fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğinden ve denklem sabitinden hareketle,

$$x_{n+1}=\frac{ay_n+A}{x_{n-1}},\quad y_{n+1}=\frac{bx_n+A}{y_{n-1}},\quad n\geq 0$$

$$x_{n+1}=\frac{a_ny_n+A}{x_{n-1}},\quad y_{n+1}=\frac{b_nx_n+A}{y_{n-1}},\quad n\geq 0$$

$$x_{n+1}=\frac{\max\{a_ny_n,A\}}{x_{n-1}},\quad y_{n+1}=\frac{\max\{b_nx_n,A\}}{y_{n-1}},\quad n\geq 0$$

Denklem sistemleri ve rasyonel formdaki benzer bazı fark denklemlerinin, fark denklem sistemlerinin ve maksimumlu fark denklem sistemlerinin denklem sabitlerini ve çözümlerinin periyodikliğini incelemiştir. Çalışma sonucunda; çeşitli fark denklemlerinin ve fark denklem sistemlerinin denge noktalarını, denklemlerin katsayılarının sabit olması veya periyodik birer dizi olması gibi durumlarda katsayılara ve denklemin genel terimlerine bağlı olarak elde etmiştir.

Grove ve arkadaşları (2001) çalışmalarında,

a, b, c ve d reel sayılar ve başlangıç şartları x_0 ve y_0 keyfi reel sayılar olmak üzere, $x_{n+1}=\frac{a}{x_n}+\frac{b}{y_n}$, $y_{n+1}=\frac{c}{x_n}+\frac{d}{y_n}$, $n=1,2,...$ fark denklem sisteminin, her $n\geq 0$ için iyi tanımlı olduğu $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ değerlerinin kümesini ve çözümlerinin davranışlarını araştırdılar. Bu fark denklem sisteminde, $z_n=\frac{x_n}{y_n}$ dönüşümü yaparak Riccati fark denklemine ulaştılar ve bu denklemin karakteristik denkleminin çözümlerinden hareketle a, b, c ve d reel sayıları için şartlar elde ettiler, yani denklemin good küme ve forbidden kümesine ulaştılar. Denklemin çözümleri hakkında bazı şartlar altında genellemeler elde ettiler.

Grove, Ladas, McGrath, Teixeira (2001) çalışmalarında,

$x_{n+1}=\frac{a}{x_n}+\frac{b}{y_n}$, $y_{n+1}=\frac{c}{x_n}+\frac{d}{y_n}$ rasyonel fark sisteminin çözümlerinin davranışı ve varlığı üzerinde çalışmışlardır.

Clark ve Kulenović (2002) çalışmalarında,

$x_{n+1}=\frac{x_n}{a+cy_n}$, $y_{n+1}=\frac{y_n}{b+dx_n}$, $n\geq 0$ için a, b, c ve d pozitif sayılar ve x_0, y_0 başlangıç şartları negatif olmayan sayılar olmak üzere fark denklem sisteminin çözümlerinin global kararlılık özelliklerini ve asimptotik davranışlarını incelemişlerdir

Çınar (2004) çalışmaları,

$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}}{-1+x_n x_{n-1}}$, $n\geq 0$ fark denkleminin çözümlerini, bu çözümlerinin başlangıç şartlarına göre durumları ve bu çözümlerin lokal asimptotik kararlılığını incelemiştir.

Çınar ve Yalçınkaya (2004) çalışmalarında,

$x_{n+1}=\frac{1}{z_n}$, $y_{n+1}=\frac{1}{x_{n-1}}$, $z_{n+1}=\frac{1}{x_{n-1}}$ fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin periyodikliğini incelediler ve $\{x_n, y_n, z_n\}$ çözümlerinin üç periyotlu olduğunu ispat ettiler.

Çınar (2004) çalışmalarında,

$x_{n+1}=\frac{1}{y_n}$, $y_{n+1}=\frac{y_n}{x_{n-1}y_{n-1}}$ fark denklem sisteminin çözümlerinin dört periyotlu olduğunu elde etmiştir.

Çınar ve Yalçınkaya (2004) çalışmalarında,

$x_{n+1}=\frac{1}{z_n}$, $y_{n+1}=\frac{1}{x_{n-1}y_{n-1}}$, $z_{n+1}=\frac{1}{x_{n-1}}$ fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin periyodiklik özelliğini incelediler. $\{x_n\}$ ve $\{z_n\}$ çözümlerinin üç periyotlu, $\{y_n\}$ çözümlerinin ise on iki periyotlu olduğunu ispat ettiler.

Camouzis ve Papaschinopoulos (2004) çalışmalarında,

$x_{n+1}=1+\frac{x_n}{y_{n-m}}$, $y_{n+1}=1+\frac{y_n}{x_{n-m}}$, $n\geq 0$ fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin davranışlarını incelemişlerdir.

Douraki, Dehghan, Razzghi (2006) çalışmalarında,

$x_{n+1}=\frac{A}{x_{n-k}}+\frac{B}{x_{n-3k}}$; $A,B\in(0,\infty)$; $x_{-3k+1},x_{-3k+2},...,x_0\in(0,\infty)$ çözümlerinin k periyotlu olduğunu göstermişlerdir.

Özban (2006) çalışmasında;

$x_{n+1}=1+\frac{x_n}{y_{n-k}}$, $y_{n+1}=1+\frac{y_n}{x_{n-m}y_{n-m-k}}$, $n\geq 0$ fark denklem sisteminin bütün pozitif çözümlerinin periyodikliğini araştırmış ve ispat etmiştir.

Iricanin ve Stevic (2006) çalışmalarında;

$$x_{n+1}^{(1)}=\frac{1+x_n^{(2)}}{x_{n-1}^{(3)}},\quad x_{n+1}^{(2)}=\frac{1+x_n^{(3)}}{x_{n-1}^{(4)}},\quad \ldots\quad ,x_{n+1}^{(k)}=\frac{1+x_n^{(1)}}{x_{n-1}^{(2)}}$$

$$x_{n+1}^{(1)}=\frac{1+x_n^{(2)}+x_{n-1}^{(3)}}{x_{n-2}^{(4)}},\quad x_{n+1}^{(2)}=\frac{1+x_n^{(3)}+x_{n-1}^{(4)}}{x_{n-2}^{(5)}},\quad \ldots\quad ,x_{n+1}^{(k)}=\frac{1+x_n^{(1)}+x_{n-1}^{(2)}}{x_{n-2}^{(3)}}\quad k\in\mathbb{N}$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerini elde etmişlerdir.

Papaschinopoulos ve arkadaşları (2007) çalışmalarında;

$a_i,b_i,(i=1,2,...,k)$ pozitif sabitler , $k\geq 3$ tamsayı ve bütün başlangıç şartları pozitif olmak üzere,

$$x_1(n+1)=\frac{a_k x_k(n)+b_k}{x_{k-1}(n-1)},$$

$$x_2(n+1)=\frac{a_1 x_1(n)+b_1}{x_k(n-1)},$$

.

.

.

$$x_i(n+1)=\frac{a_{i-1}x_{i-1}(n)+b_{i-1}}{x_{i-2}(n-1)},\ i=3,4,...,k$$

denklem sisteminin çözümlerini incelemişlerdir.

Şimşek ve arkadaşları (2009) çalışmalarında;

$x_{n+1}=\max\left\{\frac{A}{x_n},\frac{y_n}{x_n}\right\}$, $y_{n+1}=\max\left\{\frac{A}{y_n},\frac{x_n}{y_n}\right\}$, $n\geq 0$ fark denklem sisteminin çözümlerini incelemişlerdir.

Taşkara N., Uslu K. Ve Tollu D.T (2001) çalışmalarında;

$x_{n+1} = \frac{p_n x_n + x_{n-(k+1)}}{q_n + x_{n-(k+1)}}$, $k \in \mathbb{N}$, $x_{-k-1}, x_{-k}, ... \in \mathbb{R}$ başlangıç şartları olmak üzere fark denkleminin periyodikliği ve genelleştirilmiş çözümü için gerek ve yeter şartları incelemiştir. Ayrıca, genel çözümün $(k+1)$ periyotlu olduğunu göstermişlerdir.

3.FARK DENKLEMLERİ

Tanım 3.1 $n \in \mathbb{N}$ bağımsız değişken ve x bilinmeyen fonksiyon olmak üzere

$$F(n, x(n), x(n+1), ..., x(n+k)) = 0 \tag{3.1}$$

eşitliğine bir fark denklemi denir.

Tanım 3.2 Bir fark denkleminde bilinmeyen fonksiyonun mevcut en büyük ve en küçük argümentlerinin farkına o denklemin mertebesi denir (Elaydi,1995).

Tanım 3.3 $a_1(n), a_2(n), ..., a_k(n)$ katsayıları ile $g(n)$, $n \geq n_0$ için tanımlı reel değerli fonksiyonlar ve $[n_0, \infty) = \{n_0, n_0+1, n_0+2, ...\}$ üzerinde $a_k(n) \neq 0$ olmak üzere

$$x(n+k) + a_1(n)x(n+k-1) + ... + a_k(n)x(n) = g(n) \tag{3.2}$$

biçimindeki bir denkleme k yıncı basamaktan lineer fark denklem denir. Bu denklem, $g(n) \equiv 0$ olduğu zaman homogen denklem, aksi durumda homogen olmayan denklem olarak adlandırılır. Buna göre k yıncı basamaktan bir lineer homogen fark denklem

$$x(n+k) + a_1(n)x(n+k-1) + ... + a_k(n)x(n) = 0 \tag{3.3}$$

Şeklinde ifade edilir. Ayrıca, bütün $a_i(n)$ katsayıları $a_i(n) \equiv a_i$ şeklinde sabitse, (3.2) denklemine sabit katsayılı, aksi halde değişken katsayılı fark denklem denir (Elaydi,1995).

Tanım 3.4 $f_1(n), f_2(n), ..., f_r(n)$ fonksiyonları $n \geq n_0$ için tanımlı olsunlar.

Her $n \geq n_0$ için

$$c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n) + ... + c_r f_r(n) = 0 \tag{3.4}$$

olacak biçimde hepsi birden sıfır olmayan $c_1, c_2, ..., c_r$ sabitleri var ise, bu durumda $\{f_1(n), f_2(n), ..., f_r(n)\}$ cümlesine $[n_0, \infty)$ üzerinde lineer bağımlıdır denir. (3.4) eşitliği her $n \geq n_0$ için sadece ve sadece $c_1 = c_2 = ... = c_r = 0$ durumunda sağlanıyorsa, $\{f_1(n), f_2(n), ..., f_r(n)\}$ cümlesine $[n_0, \infty)$ üzerinde lineer bağımsızdır denir (Elaydi,1995).

3.1. Lineer Fark Denklemleri

Tanım 3.1.1. Bir fark denkleminde bağımlı değişken birinci dereceden ise bu denkleme Lineer Fark Denklemi denir. Genel olarak lineer fark denklemleri;

$$y_{n+k} + a_{k-1}y_{n+k-1} + ... + a_0 y_n = F(n)$$

şeklinde gösterilir.

Lineer fark denklemleri katsayılarının durumuna göre isimlendirilirler.

- Eğer $F(n)=0$ ise denkleme Lineer Homojen Fark Denklemi denir.
- $a_0, a_1, a_2, ..., a_k$ katsayıları sabit iseler, denkleme Sabit Katsayılı Lineer Fark Denklemi denir.
- $a_0, a_1, a_2, ..., a_k$ katsayıları bağımsız değişkenin fonksiyonları iseler denkleme Değişken Katsayılı Lineer Fark Denklemi denir (Elaydi,1995).

3.2. Fark Denklemleri İçin Genel Tanımlar ve Teoremler

Teorem 3.2.1. I reel sayıların herhangi bir alt aralığı olmak üzere, $f: I \times I \to I$ sürekli diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Her $x_{-1}, x_0 \in I$ başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}) \quad n \geq 0 \tag{3.2.1}$$

denklemi bir tek $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümüne sahiptir (Elaydi,1995).

Tanım 3.2.1 Eğer $\bar{x}$ noktası için $f(\bar{x}, \bar{x}) = \bar{x}$ ise $\bar{x}$ 'e f 'nin denge noktası denir. Eğer $\forall n \geq 0$ için $\bar{x} = x_n$ ise o zaman $\bar{x}$ 'e f 'nin sabit noktası denir (Elaydi,1995).

Tanım 3.2.2 Eğer $\forall n > 0$ için $x_{-1}, x_0 \in J$ iken $x_n \in J$ olacak şekilde bir $J \subset I$ alt aralığı varsa, bu aralığa (3.2.1) denkleminin değişmez aralığı denir (Elaydi,1995).

Tanım 3.2.3 $\bar{x}$ (3.2.1) denkleminin denge noktası olmak üzere:

- Eğer $x_{-1}, x_0 \in J$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için, $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < \delta$ iken her $n \geq 0$ için, $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, x denge noktası kararlıdır denir.
- Eğer x denge noktası kararlı ve $x_{-1}, x_0 \in J$ iken $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ olacak şekilde, $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < \gamma$ şartını sağlayan $\gamma > 0$ sayısı varsa, $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır denir.
- Eğer her $x_{-1}, x_0 \in J$ iken $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ ise, $\bar{x}$ denge noktasına çekim noktası denir.
- Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve çekim noktası ise, $\bar{x}$ denge noktası global asimptotik kararlıdır denir.
- Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı değil ise, kararsızdır denir.

- Eğer $x_{-1}, x_0 \in J$ iken $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < \gamma$ ve bazı $N \geq -1$ sayıları için $|x_N - \bar{x}| \geq r$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa, $\bar{x}$ denge noktasına repeller denir (Elaydi,1995).

Tanım 3.2.4. Eğer $\{x_n\}$ dizisi için $x_{n+p} = x_n$ ise, $\{x_n\}$ dizisi p periyotludur denir ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır (Elaydi,1995).

Tanım 3.2.5. Eğer $\{x_n\}$ dizisinde sonlu sayıda terim hariç tutulduğunda, geriye kalan sonsuz sayıdaki terim için $x_{n+p} = x_n$ ise, $\{x_n\}$ dizisine er geç p periyotludur denir ve p sayısı bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır (Elaydi,1995).

Tanım 3.2.6. (3.2.1) denkleminde, $f(x_n, x_{n-1})$ fonksiyonunu $f(u,v)$ şeklinde alalım:

$$r = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{x})}{\partial u} \text{ ve } s = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{x})}{\partial v}$$

olmak üzere;

$$y_{n+1} = ry_n + sy_{n-1} \tag{3.2.2}$$

Denklemi elde edilir. Bu denkleme (3.2.1) denkleminin $\bar{x}$ denge noktası civarındaki lineer denklemi adı verilir.

(3.2.2) denkleminin karakteristik denklemi ise:

$$\lambda^2 - r\lambda - s \tag{3.2.3}$$

dır (Elaydi,1995).

Teorem 3.2.2.(Lineer Kararlılık Teoremi)

Eğer (3.2.3) denkleminin her iki kökü de mutlak değerce 1'den küçük ise, $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

- Eğer (3.2.3) denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1'den büyük ise, $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır.
- (3.2.3) denkleminin her iki kökünün de mutlak değerce 1'den küçük olmasi için gerek ve yeter şart $|r| < 1 - s < 2$ olmasıdır. Bu durumda, $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.
- (3.2.3) denkleminin her iki kökünün de mutlak değerce 1' den büyük olması için gerek ve yeter şartlar $|s| > 1$ ve $|r| < |1 - s|$ olmasıdır. Bu durumda, $\bar{x}$ denge noktası repellerdir.

- Her $x_{-1}, x_0 \in I$ için eğer $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ ise; o zaman $\bar{x}$ denge noktası global çekimlidir denir.
- Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve global çekimli ise $\bar{x}$'e global asimptotik kararlıdır denir.
- (3.2.3) denkleminin, bir kökünün mutlak değerce 1'den büyük, diğer kökünün mutlak değerce 1'den küçük olması için gerek ve yeter şartlar $r^2 + 4s > 0$ ve $|r| > |1-s|$ olmasıdır. Bu durumda, $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır (Chatterjee ve ark. 2003).

Aşağıdaki lineer olmayan fark denklem sistemleri ile ilgili çalışmalar Nasri ve ark(2005) dan alınmıştır.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f_1(x_n, y_n, z_n) \\ y_{n+1} &= f_2(x_n, y_n, z_n) \\ z_{n+1} &= f_3(x_n, y_n, z_n) \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

fark denklem sistemi verilsin.

Tanım 3.2.7. Eğer $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ aşağıdaki şartları sağlarsa, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in I_1 \times I_2 \times I_3$ noktasını (3.2.4) denklem sisteminin denge noktası olarak adlandırılır.

$$\begin{aligned} \bar{x} &= f_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ \bar{y} &= f_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ \bar{z} &= f_3(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Tanım 3.2.8. $\forall \varepsilon > 0$ için $\|(x_0, y_0, z_0) - (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\| < \delta$ iken $((x_0, y_0, z_0) \in I_1 \times I_2 \times I_3)$

$\forall n \geq 0$ için $\|(x_n, y_n, z_n) - (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\| < \varepsilon$

olacak şekilde $\delta > 0$ mevcut ise (3.2.4) sisteminin denge noktası olan $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ kararlıdır denir. Aksi halde ise kararsızdır.

Tanım 3.2.9 Eğer sistemin denge noktası kararlı ve $\forall (x_0, y_0, z_0) \in I_1 \times I_2 \times I_3$ için

$\|(x_0, y_0, z_0) - (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\| < \gamma$

olacak şekilde $\gamma > 0$ varsa ve

$\lim_{x\to\infty} \|(x_n, y_n, z_n) - (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\| = 0$

ise (3.2.4) sisteminin denge noktası asimptotik kararlıdır.

Tanım 3.2.10. Eğer sistemin denge noktası kararlı ve $\forall (x_0, y_0, z_0) \in I_1 \times I_2 \times I_3$ için

$\lim_{x\to\infty} \|(x_n, y_n, z_n) - (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\| = 0$

ise (3.2.4) sisteminin denge noktası olan $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ global asimptotik kararlıdır denir.

Teorem 3.2.3. (3.2.4) denklem sisteminin $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ denge noktasında jakobiyen matrisi

$$J(\overline{x},\overline{y},\overline{z})=\begin{vmatrix} \left(\frac{df_1}{dx}\right)_{(\overline{x},\overline{y},\overline{z})} & \left(\frac{df_1}{dy}\right)_{(\overline{x},\overline{y},\overline{z})} & \left(\frac{df_1}{dz}\right)_{(\overline{x},\overline{y},\overline{z})} \\ \left(\frac{df_2}{dx}\right)_{(\overline{x},\overline{y},\overline{z})} & \left(\frac{df_2}{dy}\right)_{(\overline{x},\overline{y},\overline{z})} & \left(\frac{df_2}{dz}\right)_{(\overline{x},\overline{y},\overline{z})} \\ \left(\frac{df_3}{dx}\right)_{(\overline{x},\overline{y},\overline{z})} & \left(\frac{df_3}{dy}\right)_{(\overline{x},\overline{y},\overline{z})} & \left(\frac{df_3}{dz}\right)_{(\overline{x},\overline{y},\overline{z})} \end{vmatrix}$$

olup, bu jakobiyen matrisinin karakteristik polinomu

$$P(\lambda)=\det\left[J(\overline{x},\overline{y},\overline{z})-\lambda I\right]=0$$

ile verilsin.

Bu polinomda aşağıdaki eşitlikler doğrudur;

- $P(\lambda)$ nın bütün kökleri 1 den küçükse denge noktası $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ kararlıdır.
- $P(\lambda)$ nın köklerinden en az biri 1 den büyükse denge noktası $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ kararsızdır.

4.BÖLÜM

4. FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN PERİYODİKLİĞİ

4.1. $x_{n+1}=\frac{1}{y_{n-1}}$, $y_{n+1}=\frac{1}{z_{n-1}-x_{n-1}}$, $z_{n+1}=\frac{1}{y_{n-1}}+\frac{x_{n-1}}{x_n y_{n-2}}$ FARK DENKLEM SİSTEMİNİN PERİYODİKLİĞİ

Bu bölümde;

$$x_{-1},x_0,y_{-2},y_{-1},y_0,z_{-1},z_0\in(0,\infty) \text{ ve } z_i\neq x_i,\ i=\{-1,0\} \tag{4.1.1}$$

olmak üzere,

$$x_{n+1}=\frac{1}{y_{n-1}},\ y_{n+1}=\frac{1}{z_{n-1}-x_{n-1}},\ z_{n+1}=\frac{1}{y_{n-1}}+\frac{x_{n-1}}{x_n y_{n-2}},\ n\geq 0 \tag{4.1.2}$$

fark denklem sisteminin çözümleri incelenmiştir.

Teorem 4.1.1. $x_{-1},x_0,y_{-2},y_{-1},y_0,z_{-1},z_0\in(0,\infty)$ ve $z_i\neq x_i,\ i=\{-1,0\}$ olmak üzere, (4.1.2) denklem sisteminin çözümü $\{x_n,y_n,z_n\}$ olsun. Bu durumda (4.1.2) denklem sisteminin bütün çözümleri altı periyotlu ve periyodiktir.

İspat: (4.1.1) başlangıç şartları altında (4.1.2) denklem sisteminin bütün çözümleri pozitiftir. Böylece (4.1.2) denklem sisteminden yararlanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$x_{n+1}=\frac{1}{y_{n-1}},\quad y_{n+1}=\frac{1}{z_{n-1}-x_{n-1}},\quad z_{n+1}=\frac{1}{y_{n-1}}+\frac{x_{n-1}}{x_n y_{n-2}},$$

$$x_{n+2}=\frac{1}{y_n},\quad y_{n+2}=\frac{1}{z_n-x_n},\quad z_{n+2}=\frac{1}{y_n}+x_n,$$

$$x_{n+3}=z_{n-1}-x_{n-1},\quad y_{n+3}=\frac{x_n y_{n-2}}{x_{n-1}},\quad z_{n+3}=z_{n-1}-x_{n-1}+\frac{1}{y_{n-1}},$$

$$x_{n+4}=z_n-x_n,\quad y_{n+4}=\frac{1}{x_n},\quad z_{n+4}=z_n-x_n+\frac{1}{y_n},$$

$$x_{n+5}=\frac{x_{n-1}}{x_n y_{n-2}},\quad y_{n+5}=y_{n-1},\quad z_{n+5}=\frac{x_{n-1}}{x_n y_{n-2}}+z_{n-1}-x_{n-1},$$

$$x_{n+6}=x_n,\quad y_{n+6}=y_n,\quad z_{n+6}=z_n,$$

Teorem 4.1.2 $x_{-1}, x_0, y_{-2}, y_{-1}, y_0, z_{-1}, z_0 \in (0,\infty)$ ve $z_i \neq x_i$, $i = \{-1, 0\}$, $x_{-1} = s$, $x_0 = t$, $y_{-2} = p$, $y_{-1} = q$, $y_0 = r$, $z_{-1} = k$, $z_0 = l$ başlangıç şartları altında (4.1.2) denklem sisteminin çözümleri $\{x_n, y_n, z_n\}$ olsun. Bu durumda $n \geq 0$ için (4.1.2) denklem sisteminin bütün çözümleri aşağıda verilmiştir.

$$x_{6n+1} = \frac{1}{q}, \qquad y_{6n+1} = \frac{1}{k-s}, \qquad z_{6n+1} = \frac{1}{q} + \frac{s}{tp},$$

$$x_{6n+2} = \frac{1}{r}, \qquad y_{6n+2} = \frac{1}{l-t}, \qquad z_{6n+2} = \frac{1}{r} + t,$$

$$x_{6n+3} = k - s, \qquad y_{6n+3} = \frac{tp}{s}, \qquad z_{6n+3} = k - s + \frac{1}{q},$$

$$x_{6n+4} = l - t \qquad y_{6n+4} = \frac{1}{t}, \qquad z_{6n+4} = l - t + \frac{1}{r},$$

$$x_{6n+5} = \frac{s}{tp}, \qquad y_{6n+5} = q, \qquad z_{6n+5} = \frac{s}{tp} + k - s,$$

$$x_{6n+6} = t, \qquad y_{6n+6} = r, \qquad z_{6n+6} = l,$$

İspat: (4.1.1) başlangıç şartlarına göre (4.1.2) denklem sisteminin bütün çözümleri pozitiftir. Böylece $n = 0$ için bu çözümün sağlandığı açıktır. Şimdi n için teoremin doğru olduğunu varsayalım.

$$x_{6n+1} = \frac{1}{q}, \qquad y_{6n+1} = \frac{1}{k-s}, \qquad z_{6n+1} = \frac{1}{q} + \frac{s}{tp},$$

$$x_{6n+2} = \frac{1}{r}, \qquad y_{6n+2} = \frac{1}{l-t}, \qquad z_{6n+2} = \frac{1}{r} + t,$$

$$x_{6n+3} = k - s, \qquad y_{6n+3} = \frac{tp}{s}, \qquad z_{6n+3} = k - s + \frac{1}{q},$$

$$x_{6n+4} = l - t \qquad y_{6n+4} = \frac{1}{t}, \qquad z_{6n+4} = l - t + \frac{1}{r},$$

$$x_{6n+5} = \frac{s}{tp}, \qquad y_{6n+5} = q, \qquad z_{6n+5} = \frac{s}{tp} + k - s,$$

$$x_{6n+6} = t, \qquad y_{6n+6} = r, \qquad z_{6n+6} = l,$$

Böylece yukarıdaki eşitlikten yararlanılarak $(n+1)$ için doğruluğunu gösterelim.

$$x_{6n+7}=\frac{1}{y_{6n+5}}=\frac{1}{q}, \qquad y_{6n+7}=\frac{1}{z_{6n+5}-x_{6n+5}}=\frac{1}{k-s}, \qquad z_{6n+7}=\frac{1}{y_{6n+5}}+\frac{x_{6n+5}}{x_{6n+6}y_{6n+4}}=\frac{1}{q}+\frac{s}{tp},$$

$$x_{6n+8}=\frac{1}{y_{6n+6}}=\frac{1}{r}, \qquad y_{6n+8}=\frac{1}{z_{6n+6}-x_{6n+6}}=\frac{1}{l-t}, \qquad z_{6n+8}=\frac{1}{y_{6n+6}}+\frac{x_{6n+6}}{x_{6n+7}y_{6n+5}}=\frac{1}{r}+t,$$

$$x_{6n+9}=\frac{1}{y_{6n+7}}=k-s, \qquad y_{6n+9}=\frac{1}{z_{6n+7}-x_{6n+7}}=\frac{tp}{s}, \qquad z_{6n+9}=\frac{1}{y_{6n+7}}+\frac{x_{6n+7}}{x_{6n+8}y_{6n+6}}=k-s+\frac{1}{q},$$

$$x_{6n+10}=\frac{1}{y_{6n+8}}=l-t \qquad y_{6n+10}=\frac{1}{z_{6n+8}-x_{6n+8}}=\frac{1}{t}, \qquad z_{6n+10}=\frac{1}{y_{6n+8}}+\frac{x_{6n+8}}{x_{6n+9}y_{6n+7}}=l-t+\frac{1}{r},$$

$$x_{6n+11}=\frac{1}{y_{6n+9}}=\frac{s}{tp}, \qquad y_{6n+11}=\frac{1}{z_{6n+9}-x_{6n+9}}=q, \qquad z_{6n+11}=\frac{1}{y_{6n+9}}+\frac{x_{6n+9}}{x_{6n+10}y_{6n+8}}=\frac{s}{tp}+k-s,$$

$$x_{6n+12}=\frac{1}{y_{6n+10}}=t, \qquad y_{6n+12}=\frac{1}{z_{6n+10}-x_{6n+10}}=r, \qquad z_{6n+12}=\frac{1}{y_{6n+10}}+\frac{x_{6n+10}}{x_{6n+11}y_{6n+9}}=l,$$

Böylece tümevarım metodu ile ispat tamamlanmış olur.

4.2. $x_{n+1}=\frac{A}{y_{n-1}}$, $y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-1}-x_{n-1}}$, $z_{n+1}=\frac{A}{y_{n-1}}+\frac{Bx_{n-1}}{x_n y_{n-2}}$ FARK DENKLEM SİSTEMİNİN PERİYODİKLİĞİ

Bu bölümde;

$$x_{-1},x_0,y_{-2},y_{-1},y_0,z_{-1},z_0\in(0,\infty),\ z_i\neq x_i,\ i=\{-1,0\}\ \text{ve}\ A,B\in\mathbb{R}-\{0\} \tag{4.2.1}$$

olmak üzere,

$$x_{n+1}=\frac{A}{y_{n-1}},\ y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-1}-x_{n-1}},\ z_{n+1}=\frac{A}{y_{n-1}}+\frac{Bx_{n-1}}{x_n y_{n-2}},\ n\geq 0 \tag{4.2.2}$$

fark denklem sisteminin çözümleri incelenmiştir.

Teorem 4.2.1. $A,B\in\mathbb{R}-\{0\}$, $x_{-1},x_0,y_{-2},y_{-1},y_0,z_{-1},z_0\in(0,\infty)$ ve $z_i\neq x_i$, $i=\{-1,0\}$ olmak üzere, (4.2.2) denklem sisteminin çözümü $\{x_n,y_n,z_n\}$ olsun. Bu durumda (4.2.2) denklem sisteminin bütün çözümleri altı periyotlu ve periyodiktir.

İspat: (4.2.1) başlangıç şartları altında (4.2.2) denklem sisteminin bütün çözümleri pozitiftir. Böylece (4.2.2) denklem sisteminden yararlanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$x_{n+1}=\frac{A}{y_{n-1}},\quad y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-1}-x_{n-1}},\quad z_{n+1}=\frac{A}{y_{n-1}}+\frac{Bx_{n-1}}{x_n y_{n-2}},$$

$$x_{n+2}=\frac{A}{y_n},\quad y_{n+2}=\frac{B}{z_n-x_n},\quad z_{n+2}=\frac{A}{y_n}+\frac{B}{A}x_n,$$

$$x_{n+3}=\frac{A}{B}(z_{n-1}-x_{n-1}),\quad y_{n+3}=\frac{x_n y_{n-2}}{x_{n-1}},\quad z_{n+3}=\frac{A}{B}(z_{n-1}-x_{n-1})+\frac{B}{y_{n-1}},$$

$$x_{n+4}=\frac{A}{B}(z_n-x_n),\quad y_{n+4}=\frac{A}{x_n},\quad z_{n+4}=\frac{A}{B}(z_n-x_n)+\frac{B}{y_n},$$

$$x_{n+5}=\frac{Ax_{n-1}}{x_n y_{n-2}},\quad y_{n+5}=y_{n-1},\quad z_{n+5}=\frac{Ax_{n-1}}{x_n y_{n-2}}+z_{n-1}-x_{n-1},$$

$$x_{n+6}=x_n,\quad y_{n+6}=y_n,\quad z_{n+6}=z_n,$$

Teorem 4.2.2 $A,B\in\mathbb{R}\text{-}\{0\}$ ve $x_{-1},x_0,y_{-2},y_{-1},y_0,z_{-1},z_0\in(0,\infty)$, $z_i\neq x_i$, $i=\{-1,0\}$, $x_{-1}=s$, $x_0=t$, $y_{-2}=p$, $y_{-1}=q$, $y_0=r$, $z_{-1}=k$, $z_0=l$ başlangıç şartları altında

(4.2.2) denklem sisteminin çözümleri $\{x_n, y_n, z_n\}$ olsun. Bu durumda $n \geq 0$ için (4.2.2) denklem sisteminin bütün çözümleri aşağıda verilmiştir.

$$x_{6n+1} = \frac{A}{q}, \quad y_{6n+1} = \frac{B}{k-s}, \quad z_{6n+1} = \frac{A}{q} + \frac{Bs}{tp},$$

$$x_{6n+2} = \frac{A}{r}, \quad y_{6n+2} = \frac{B}{l-t}, \quad z_{6n+2} = \frac{A}{r} + \frac{Bt}{A},$$

$$x_{6n+3} = \frac{A}{B}(k-s), \quad y_{6n+3} = \frac{tp}{s}, \quad z_{6n+3} = \frac{A}{B}(k-s) + \frac{B}{q},$$

$$x_{6n+4} = \frac{A}{B}(l-t), \quad y_{6n+4} = \frac{A}{t}, \quad z_{6n+4} = \frac{A}{B}(l-t) + \frac{B}{r},$$

$$x_{6n+5} = \frac{As}{tp}, \quad y_{6n+5} = q, \quad z_{6n+5} = \frac{As}{tp} + k - s,$$

$$x_{6n+6} = t, \quad y_{6n+6} = r, \quad z_{6n+6} = l,$$

İspat: (4.2.1) başlangıç şartlarına göre (4.2.2) denklem sisteminin bütün çözümleri pozitiftir. Böylece $n = 0$ için bu çözümün sağlandığı açıktır. Şimdi n için teoremin doğru olduğunu varsayalım.

$$x_{6n+1} = \frac{A}{q}, \quad y_{6n+1} = \frac{B}{k-s}, \quad z_{6n+1} = \frac{A}{q} + \frac{Bs}{tp},$$

$$x_{6n+2} = \frac{A}{r}, \quad y_{6n+2} = \frac{B}{l-t}, \quad z_{6n+2} = \frac{A}{r} + \frac{Bt}{A},$$

$$x_{6n+3} = \frac{A}{B}(k-s), \quad y_{6n+3} = \frac{tp}{s}, \quad z_{6n+3} = \frac{A}{B}(k-s) + \frac{B}{q},$$

$$x_{6n+4} = \frac{A}{B}(l-t), \quad y_{6n+4} = \frac{A}{t}, \quad z_{6n+4} = \frac{A}{B}(l-t) + \frac{B}{r},$$

$$x_{6n+5} = \frac{As}{tp}, \quad y_{6n+5} = q, \quad z_{6n+5} = \frac{As}{tp} + k - s,$$

$$x_{6n+6} = t, \quad y_{6n+6} = r, \quad z_{6n+6} = l,$$

Böylece yukarıdaki eşitlikten yararlanılarak $(n+1)$ için doğruluğunu gösterelim.

$$x_{6n+7} = \frac{A}{y_{6n+5}} = \frac{A}{q}, \quad y_{6n+7} = \frac{B}{z_{6n+5} - x_{6n+5}} = \frac{B}{k-s}, \quad z_{6n+7} = \frac{A}{y_{6n+5}} + \frac{Bx_{6n+5}}{x_{6n+6}y_{6n+4}} = \frac{A}{q} + \frac{Bs}{tp},$$

$$x_{6n+8} = \frac{A}{y_{6n+6}} = \frac{A}{r}, \quad y_{6n+8} = \frac{B}{z_{6n+6} - x_{6n+6}} = \frac{B}{l-t}, \quad z_{6n+8} = \frac{A}{y_{6n+6}} + \frac{Bx_{6n+6}}{x_{6n+7}y_{6n+5}} = \frac{A}{r} + \frac{Bt}{A},$$

$$x_{6n+9} = \frac{A}{y_{6n+7}} = A(k-s), \quad y_{6n+9} = \frac{B}{z_{6n+7} - x_{6n+7}} = \frac{tp}{s}, \quad z_{6n+9} = \frac{A}{y_{6n+7}} + \frac{Bx_{6n+7}}{x_{6n+8}y_{6n+6}} = \frac{A}{B}(k-s) + \frac{B}{q}$$

$$x_{6n+10} = \frac{A}{y_{6n+8}} = \frac{A}{B}(l-t), \quad y_{6n+10} = \frac{B}{z_{6n+8} - x_{6n+8}} = \frac{A}{t}, \quad z_{6n+10} = \frac{A}{y_{6n+8}} + \frac{Bx_{6n+8}}{x_{6n+9}y_{6n+7}} = \frac{A}{B}(l-t) + \frac{B}{r},$$

$$x_{6n+11}=\frac{A}{y_{6n+9}}=\frac{As}{tp}, \qquad y_{6n+11}=\frac{B}{z_{6n+9}-x_{6n+9}}=q, \qquad z_{6n+11}=\frac{A}{y_{6n+9}}+\frac{Bx_{6n+9}}{x_{6n+10}y_{6n+8}}=\frac{As}{tp}+k-s,$$

$$x_{6n+12}=\frac{A}{y_{6n+10}}=t, \qquad y_{6n+12}=\frac{B}{z_{6n+10}-x_{6n+10}}=r, \qquad z_{6n+12}=\frac{A}{y_{6n+10}}+\frac{Bx_{6n+10}}{x_{6n+11}y_{6n+9}}=l,$$

Böylece tümevarım metodu ile ispat tamamlanmış olur.

4.3. $x_{n+1}=\frac{1}{y_{n-2}}$, $y_{n+1}=\frac{1}{z_{n-2}-x_{n-2}}$, $z_{n+1}=\frac{1}{y_{n-2}}+\frac{x_{n-1}}{x_n y_{n-3}}$ **FARK DENKLEM SİSTEMİNİN PERİYODİKLİĞİ**

Bu bölümde;

$$x_{-2},x_{-1},x_0,y_{-3},y_{-2},y_{-1},y_0,z_{-2},z_{-1},z_0\in(0,\infty) \text{ ve } z_i\neq x_i,\ i=\{-2,-1,0\} \tag{4.3.1}$$

olmak üzere,

$$x_{n+1}=\frac{1}{y_{n-2}},\ y_{n+1}=\frac{1}{z_{n-2}-x_{n-2}},\ z_{n+1}=\frac{1}{y_{n-2}}+\frac{x_{n-1}}{x_n y_{n-3}},\ n\geq 0 \tag{4.3.2}$$

fark denklem sisteminin çözümleri incelenmiştir.

Teorem 4.3.1 $x_{-2},x_{-1},x_0,y_{-3},y_{-2},y_{-1},y_0,z_{-2},z_{-1},z_0\in(0,\infty)$ ve $z_i\neq x_i,\ i=\{-2,-1,0\}$ olmak üzere, (4.3.2) denklem sisteminin çözümü $\{x_n,y_n,z_n\}$ olsun. Bu durumda (4.3.2) denklem sisteminin bütün çözümleri sekiz periyotlu ve periyodiktir.

İspat: (4.3.1) başlangıç şartları altında (4.3.2) denklem sisteminin bütün çözümleri pozitiftir. Böylece (4.3.2) denklem sisteminden yararlanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$x_{n+1}=\frac{1}{y_{n-2}}, \qquad y_{n+1}=\frac{1}{z_{n-2}-x_{n-2}}, \qquad z_{n+1}=\frac{1}{y_{n-2}}+\frac{x_{n-1}}{x_n y_{n-3}},$$

$$x_{n+2}=\frac{1}{y_{n-1}}, \qquad y_{n+2}=\frac{1}{z_{n-1}-x_{n-1}}, \qquad z_{n+2}=\frac{1}{y_{n-1}}+x_n,$$

$$x_{n+3}=\frac{1}{y_n}, \qquad y_{n+3}=\frac{1}{z_n-x_n}, \qquad z_{n+3}=\frac{1}{y_n}+\frac{1}{y_{n-2}},$$

$$x_{n+4}=z_{n-2}-x_{n-2}, \qquad y_{n+4}=\frac{x_n y_{n-3}}{x_{n-1}}, \qquad z_{n+4}=z_{n-2}-x_{n-2}+\frac{1}{y_{n-1}},$$

$$x_{n+5}=z_{n-1}-x_{n-1}, \qquad y_{n+5}=\frac{1}{x_n}, \qquad z_{n+5}=z_{n-1}-x_{n-1}+\frac{1}{y_n},$$

$$x_{n+6}=z_n-x_n, \qquad y_{n+6}=y_{n-2}, \qquad z_{n+6}=z_n-x_n+z_{n-2}-x_{n-2},$$

$$x_{n+7}=\frac{x_{n-1}}{x_n y_{n-3}}, \qquad y_{n+7}=y_{n-1}, \qquad z_{n+7}=\frac{x_{n-1}}{x_n y_{n-3}}+z_{n-1}-x_{n-1},$$

$$x_{n+8}=x_n, \qquad y_{n+8}=y_n, \qquad z_{n+8}=z_n,$$

Teorem 4.3.2. $x_{-2},x_{-1},x_0,y_{-3},y_{-2},y_{-1},y_0,z_{-2},z_{-1},z_0\in(0,\infty)$ ve $z_i\neq x_i$, $i=\{-2,-1,0\}$ $x_{-2}=k$, $x_{-1}=l$, $x_0=m$, $y_{-3}=p$, $y_{-2}=q$, $y_{-1}=r$, $y_0=s$, $z_{-2}=t$, $z_{-1}=h$, $z_0=g$ başlangıç şartları altında (4.3.2) denklem sisteminin çözümleri $\{x_n,y_n,z_n\}$ olsun. Bu durumda $n\geq 0$ için (4.3.2) denklem sisteminin bütün çözümleri aşağıda verilmiştir.

$$x_{8n+1}=\frac{1}{q}, \qquad y_{8n+1}=\frac{1}{t-k}, \qquad z_{8n+1}=\frac{1}{q}+\frac{l}{mp},$$

$$x_{8n+2}=\frac{1}{r}, \qquad y_{8n+2}=\frac{1}{h-l}, \qquad z_{8n+2}=\frac{1}{r}+m,$$

$$x_{8n+3}=\frac{1}{s}, \qquad y_{8n+3}=\frac{1}{g-m}, \qquad z_{8n+3}=\frac{1}{s}+\frac{1}{q},$$

$$x_{8n+4}=t-k, \qquad y_{8n+4}=\frac{mp}{l}, \qquad z_{8n+4}=t-k+\frac{1}{r},$$

$$x_{8n+5}=h-l, \qquad y_{8n+5}=\frac{1}{m}, \qquad z_{8n+5}=h-l+\frac{1}{s},$$

$$x_{8n+6}=g-m, \qquad y_{8n+6}=q, \qquad z_{8n+6}=g-m+t-k,$$

$$x_{8n+7}=\frac{l}{mp}, \qquad y_{8n+7}=r, \qquad z_{8n+7}=\frac{l}{mp}+h-l,$$

$$x_{8n+8}=m, \qquad y_{8n+8}=s, \qquad z_{8n+8}=g,$$

İspat: (4.3.1) başlangıç şartları altında (4.3.2) denklem sisteminin bütün çözümleri pozitiftir. Böylece $n=0$ için bu çözümün sağlandığı açıktır. Şimdi n için teoremin doğru olduğunu varsayalım.

$$x_{8n+1}=\frac{1}{q}, \qquad y_{8n+1}=\frac{1}{t-k}, \qquad z_{8n+1}=\frac{1}{q}+\frac{l}{mp},$$

$$x_{8n+2}=\frac{1}{r}, \qquad y_{8n+2}=\frac{1}{h-l}, \qquad z_{8n+2}=\frac{1}{r}+m,$$

$$x_{8n+3}=\frac{1}{s}, \qquad y_{8n+3}=\frac{1}{g-m}, \qquad z_{8n+3}=\frac{1}{s}+\frac{1}{q},$$

$$x_{8n+3}=\frac{1}{s}, \qquad y_{8n+3}=\frac{1}{g-m}, \qquad z_{8n+3}=\frac{1}{s}+\frac{1}{q},$$

$$x_{8n+4}=t-k, \qquad y_{8n+4}=\frac{mp}{l}, \qquad z_{8n+4}=t-k+\frac{1}{r},$$

$$x_{8n+5}=h-l, \qquad y_{8n+5}=\frac{1}{m}, \qquad z_{8n+5}=h-l+\frac{1}{s},$$

$$x_{8n+6}=g-m, \qquad y_{8n+6}=q, \qquad z_{8n+6}=g-m+t-k,$$

$$x_{8n+7}=\frac{l}{mp}, \qquad y_{8n+7}=r, \qquad z_{8n+7}=\frac{l}{mp}+h-l,$$

$$x_{8n+8}=m, \qquad y_{8n+8}=s, \qquad z_{8n+8}=g,$$

Böylece yukarıdaki eşitlikten yararlanılarak $(n+1)$ için doğruluğunu gösterelim.

$$x_{8n+9}=\frac{1}{y_{8n+6}}=\frac{1}{q}, \qquad y_{8n+9}=\frac{1}{z_{8n+6}-x_{8n+6}}=\frac{1}{t-k},$$

$$z_{8n+9}=\frac{1}{y_{8n+6}}+\frac{x_{8n+7}}{x_{8n+8}y_{8n+5}}=\frac{1}{q}+\frac{l}{mp},$$

$$x_{8n+10}=\frac{1}{y_{8n+7}}=\frac{1}{r}, \qquad y_{8n+10}=\frac{1}{z_{8n+7}-x_{8n+7}}=\frac{1}{h-l},$$

$$z_{8n+10}=\frac{1}{y_{8n+7}}+\frac{x_{8n+8}}{x_{8n+9}y_{8n+6}}=\frac{1}{r}+m,$$

$$x_{8n+11}=\frac{1}{y_{8n+8}}=\frac{1}{s}, \qquad y_{8n+11}=\frac{1}{z_{8n+8}-x_{8n+8}}=\frac{1}{g-m},$$

$$z_{8n+11}=\frac{1}{y_{8n+8}}+\frac{x_{8n+9}}{x_{8n+10}y_{8n+7}}=\frac{1}{s}+\frac{1}{q},$$

$$x_{8n+12}=\frac{1}{y_{8n+9}}=t-k, \qquad y_{8n+12}=\frac{1}{z_{8n+9}-x_{8n+9}}=\frac{mp}{l},$$

$$z_{8n+12}=\frac{1}{y_{8n+9}}+\frac{x_{8n+10}}{x_{8n+11}y_{8n+8}}=t-k+\frac{1}{r},$$

$$x_{8n+13}=\frac{1}{y_{8n+10}}=h-l, \qquad y_{8n+13}=\frac{1}{z_{8n+10}-x_{8n+10}}=\frac{1}{m},$$

$$z_{8n+13}=\frac{1}{y_{8n+10}}+\frac{x_{8n+11}}{x_{8n+12}y_{8n+9}}=h-l+\frac{1}{s},$$

$$x_{8n+14}=\frac{1}{y_{8n+11}}=g-m, \qquad y_{8n+14}=\frac{1}{z_{8n+11}-x_{8n+11}}=q,$$

$$z_{8n+14}=\frac{1}{y_{8n+11}}+\frac{x_{8n+12}}{x_{8n+13}y_{8n+10}}=g-m+t-k,$$

$$x_{8n+15}=\frac{1}{y_{8n+12}}=\frac{l}{mp}, \qquad y_{8n+15}=\frac{1}{z_{8n+12}-x_{8n+12}}=r,$$

$$z_{8n+15}=\frac{1}{y_{8n+12}}+\frac{x_{8n+13}}{x_{8n+14}y_{8n+11}}=\frac{l}{mp}+h-l,$$

$$x_{8n+16}=\frac{1}{y_{8n+13}}=m, \qquad y_{8n+16}=\frac{1}{z_{8n+13}-x_{8n+13}}=s,$$

$$z_{8n+16}=\frac{1}{y_{8n+13}}+\frac{x_{8n+14}}{x_{8n+15}y_{8n+12}}=g,$$

Böylece tümevarım metodu ile ispat tamamlanmış olur.

4.4. $x_{n+1}=\frac{A}{y_{n-2}},\ y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-2}-x_{n-2}},\ z_{n+1}=\frac{A}{y_{n-2}}+\frac{Bx_{n-1}}{x_n y_{n-3}}$ FARK DENKLEM SİSTEMİNİN PERİYODİKLİĞİ

Bu bölümde;

$$x_{-2},x_{-1},x_0,y_{-3},y_{-2},y_{-1},y_0,z_{-2},z_{-1},z_0\in(0,\infty),\ z_i\neq x_i,\ i=\{-2,-1,0\},\ A,B\in\mathbb{R}-\{0\} \quad (4.4.1)$$

olmak üzere,

$$x_{n+1}=\frac{A}{y_{n-2}},\ y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-2}-x_{n-2}},\ z_{n+1}=\frac{A}{y_{n-2}}+\frac{Bx_{n-1}}{x_n y_{n-3}},\ n\geq 0 \quad (4.4.2)$$

fark denklem sisteminin çözümleri incelenmiştir.

Teorem 4.4.1. $A,B\in\mathbb{R}-\{0\}, x_{-2},x_{-1},x_0,y_{-3},y_{-2},y_{-1},y_0,z_{-2},z_{-1},z_0\in(0,\infty)$ ve $z_i\neq x_i$, $i=\{-2,-1,0\}$ olmak üzere, (4.4.2) denklem sisteminin çözümü $\{x_n,y_n,z_n\}$ olsun. Bu durumda (4.4.2) denklem sisteminin bütün çözümleri sekiz periyotlu ve periyodiktir.

İspat: (4.4.1) başlangıç şartları altında (4.4.2) denklem sisteminin bütün çözümleri pozitiftir. Böylece (4.4.2) denklem sisteminden yararlanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$x_{n+1}=\frac{A}{y_{n-2}},\quad y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-2}-x_{n-2}},\quad z_{n+1}=\frac{A}{y_{n-2}}+\frac{Bx_{n-1}}{x_n y_{n-3}},$$

$$x_{n+2}=\frac{A}{y_{n-1}},\quad y_{n+2}=\frac{B}{z_{n-1}-x_{n-1}},\quad z_{n+2}=\frac{A}{y_{n-1}}+\frac{B}{A}x_n,$$

$$x_{n+3}=\frac{A}{y_n},\quad y_{n+3}=\frac{B}{z_n-x_n},\quad z_{n+3}=\frac{A}{y_n}+\frac{B}{y_{n-2}},$$

$$x_{n+4}=\frac{A}{B}(z_{n-2}-x_{n-2}),\quad y_{n+4}=\frac{x_n y_{n-3}}{x_{n-1}},\quad z_{n+4}=\frac{A}{B}(z_{n-2}-x_{n-2})+\frac{B}{y_{n-1}},$$

$$x_{n+5}=\frac{A}{B}(z_{n-1}-x_{n-1}),\quad y_{n+5}=\frac{A}{x_n},\quad z_{n+5}=\frac{A}{B}(z_{n-1}-x_{n-1})+\frac{B}{y_n},$$

$$x_{n+6}=\frac{A}{B}(z_n-x_n),\quad y_{n+6}=y_{n-2},\quad z_{n+6}=\frac{A}{B}(z_n-x_n)+z_{n-2}-x_{n-2},$$

$$x_{n+7}=\frac{Ax_{n-1}}{x_n y_{n-3}},\quad y_{n+7}=y_{n-1},\quad z_{n+7}=\frac{Ax_{n-1}}{x_n y_{n-3}}+z_{n-1}-x_{n-1},$$

$$x_{n+8}=x_n,\quad y_{n+8}=y_n,\quad z_{n+8}=z_n,$$

Teorem 4.4.2. $A,B\in\ \mathbb{R}-\{0\}$, $x_{-2},x_{-1},x_0,y_{-3},y_{-2},y_{-1},y_0,z_{-2},z_{-1},z_0\in(0,\infty)$ ve $z_i\neq x_i$, $i=\{-2,-1,0\}$ $x_{-2}=k$, $x_{-1}=l$, $x_0=m$, $y_{-3}=p$, $y_{-2}=q$, $y_{-1}=r$, $y_0=s$, $z_{-2}=t$, $z_{-1}=h$, $z_0=g$ başlangıç şartları altında (4.4.2) denklem sisteminin çözümleri $\{x_n,y_n,z_n\}$ olsun. Bu durumda $n\geq 0$ için (4.4.2) denklem sistemlerinin bütün çözümleri aşağıda verilmiştir.

$$x_{8n+1}=\frac{A}{q},\qquad y_{8n+1}=\frac{B}{t-k},\qquad z_{8n+1}=\frac{A}{q}+\frac{Bl}{mp},$$

$$x_{8n+2}=\frac{A}{r},\qquad y_{8n+2}=\frac{B}{h-l},\qquad z_{8n+2}=\frac{A}{r}+\frac{B}{A}m,$$

$$x_{8n+3}=\frac{A}{s},\qquad y_{8n+3}=\frac{B}{g-m},\qquad z_{8n+3}=\frac{A}{s}+\frac{B}{q},$$

$$x_{8n+4}=\frac{A}{B}(t-k),\qquad y_{8n+4}=\frac{mp}{l},\qquad z_{8n+4}=\frac{A}{B}(t-k)+\frac{B}{r},$$

$$x_{8n+5}=\frac{A}{B}(h-l),\qquad y_{8n+5}=\frac{A}{m},\qquad z_{8n+5}=\frac{A}{B}(h-l)+\frac{B}{s},$$

$$x_{8n+6}=\frac{A}{B}(g-m),\qquad y_{8n+6}=q,\qquad z_{8n+6}=\frac{A}{B}(g-m)+t-k,$$

$$x_{8n+7}=\frac{Al}{mp},\qquad y_{8n+7}=r,\qquad z_{8n+7}=\frac{Al}{mp}+h-l,$$

$$x_{8n+8}=m,\qquad y_{8n+8}=s,\qquad z_{8n+8}=g,$$

İspat: (4.4.1) başlangıç şartlarına göre (4.4.2) denklem sisteminin bütün çözümleri pozitiftir. Böylece $n=0$ için bu çözümün sağlandığı açıktır. Şimdi n için teoremin doğru olduğunu varsayalım.

$$x_{8n+1}=\frac{A}{q},\qquad y_{8n+1}=\frac{B}{t-k},\qquad z_{8n+1}=\frac{A}{q}+\frac{Bl}{mp},$$

$$x_{8n+2}=\frac{A}{r},\qquad y_{8n+2}=\frac{B}{h-l},\qquad z_{8n+2}=\frac{A}{r}+\frac{B}{A}m,$$

$$x_{8n+3}=\frac{A}{s},\qquad y_{8n+3}=\frac{B}{g-m},\qquad z_{8n+3}=\frac{A}{s}+\frac{B}{q},$$

$$x_{8n+4}=\frac{A}{B}(t-k),\qquad y_{8n+4}=\frac{mp}{l},\qquad z_{8n+4}=\frac{A}{B}(t-k)+\frac{B}{r},$$

$$x_{8n+5}=\frac{A}{B}(h-l),\qquad y_{8n+5}=\frac{A}{m},\qquad z_{8n+5}=\frac{A}{B}(h-l)+\frac{B}{s},$$

$$x_{8n+6}=\frac{A}{B}\left(g-m\right),\qquad y_{8n+6}=q,\qquad z_{8n+6}=\frac{A}{B}\left(g-m\right)+t-k,$$

$$x_{8n+7}=\frac{Al}{mp},\qquad y_{8n+7}=r,\qquad z_{8n+7}=\frac{Al}{mp}+h-l,$$

$$x_{8n+8}=m,\qquad y_{8n+8}=s,\qquad z_{8n+8}=g,$$

Böylece yukarıdaki eşitlikten yararlanılarak $\left(n+1\right)$ için doğruluğunu gösterelim.

$$x_{8n+9}=\frac{A}{y_{8n+6}}=\frac{A}{k},\qquad y_{8n+9}=\frac{B}{z_{8n+6}-x_{8n+6}}=\frac{B}{t-k},$$

$$z_{8n+9}=\frac{A}{y_{8n+6}}+\frac{Bx_{8n+7}}{x_{8n+8}y_{8n+5}}=\frac{A}{q}+\frac{Bl}{mp},$$

$$x_{8n+10}=\frac{A}{y_{8n+7}}=\frac{A}{r},\qquad y_{8n+10}=\frac{B}{z_{8n+7}-x_{8n+7}}=\frac{B}{h-l},$$

$$z_{8n+10}=\frac{A}{y_{8n+7}}+\frac{Bx_{8n+8}}{x_{8n+9}y_{8n+6}}=\frac{A}{r}+\frac{B}{A}m,$$

$$x_{8n+11}=\frac{A}{y_{8n+8}}=\frac{A}{s},\qquad y_{8n+11}=\frac{B}{z_{8n+8}-x_{8n+8}}=\frac{B}{g-m},$$

$$z_{8n+11}=\frac{A}{y_{8n+8}}+\frac{Bx_{8n+9}}{x_{8n+10}y_{8n+7}}=\frac{A}{s}+\frac{B}{q},$$

$$x_{8n+12}=\frac{A}{y_{8n+9}}=\frac{A}{B}\left(t-k\right),\qquad y_{8n+12}=\frac{B}{z_{8n+9}-x_{8n+9}}=\frac{mp}{l},$$

$$z_{8n+12}=\frac{A}{y_{8n+9}}+\frac{Bx_{8n+10}}{x_{8n+11}y_{8n+8}}=\frac{A}{B}\left(s-t\right)+\frac{B}{r},$$

$$x_{8n+13}=\frac{A}{y_{8n+10}}=\frac{A}{B}\left(h-l\right),\qquad y_{8n+13}=\frac{B}{z_{8n+10}-x_{8n+10}}=\frac{A}{m},$$

$$z_{8n+13}=\frac{A}{y_{8n+10}}+\frac{Bx_{8n+11}}{x_{8n+12}y_{8n+9}}=\frac{A}{B}\left(h-l\right)+\frac{B}{s},$$

$$x_{8n+14}=\frac{A}{y_{8n+11}}=\frac{A}{B}\left(g-m\right),\qquad y_{8n+14}=\frac{B}{z_{8n+11}-x_{8n+11}}=q,$$

$$z_{8n+14}=\frac{A}{y_{8n+11}}+\frac{Bx_{8n+12}}{x_{8n+13}y_{8n+10}}=\frac{A}{B}\left(g-m\right)+t-k,$$

$$x_{8n+15}=\frac{A}{y_{8n+12}}=\frac{Al}{mp},\qquad y_{8n+15}=\frac{B}{z_{8n+12}-x_{8n+12}}=r,$$

$$z_{8n+15}=\frac{A}{y_{8n+12}}+\frac{Bx_{8n+13}}{x_{8n+14}y_{8n+11}}=\frac{Al}{mp}+h-l,$$

$$x_{8n+16}=\frac{A}{y_{8n+13}}=m,\qquad y_{8n+16}=\frac{B}{z_{8n+13}-x_{8n+13}}=s,$$

$$z_{8n+16}=\frac{A}{y_{8n+13}}+\frac{Bx_{8n+14}}{x_{8n+15}y_{8n+12}}=g,$$

Böylece tümevarım metodu ile ispat tamamlanmış olur.

4.5. $x_{n+1}=\dfrac{1}{y_{n-3}}$, $y_{n+1}=\dfrac{1}{z_{n-3}-x_{n-3}}$, $z_{n+1}=\dfrac{1}{y_{n-3}}+\dfrac{x_{n-1}}{x_n y_{n-4}}$ **FARK DENKLEM SİSTEMİNİN PERİYODİKLİĞİ**

Bu bölümde;

$$x_{-3},x_{-2},x_{-1},x_0,y_{-4},y_{-3},y_{-2},y_{-1},y_0,z_{-3},z_{-2},z_{-1},z_0\in(0,\infty),\ z_i\neq x_i, i=\{-3,-2,-1,0\} \quad (4.5.1)$$

olmak üzere,

$$x_{n+1}=\frac{1}{y_{n-3}},\ y_{n+1}=\frac{1}{z_{n-3}-x_{n-3}},\ z_{n+1}=\frac{1}{y_{n-3}}+\frac{x_{n-1}}{x_n y_{n-4}},\ n\geq 0 \quad (4.5.2)$$

fark denklem sisteminin çözümleri incelenmiştir.

Teorem 4.5.1. $x_{-3},\ x_{-2},\ x_{-1},\ x_0,\ y_{-4},\ y_{-3},\ y_{-2},\ y_{-1},\ y_0,\ z_{-3},\ z_{-2},\ z_{-1},\ z_0\in$ ve $z_i\neq x_i$, $i=\{-3,-2,-1,0\}$ olmak üzere, (4.5.2) denklem sisteminin çözümü $\{x_n,y_n,z_n\}$ olsun. Bu durumda (4.5.2) denklem sisteminin bütün çözümleri on periyotlu ve periyodiktir.

İspat: (4.5.1) başlangıç şartları altında (4.5.2) denklem sisteminin bütün çözümleri pozitiftir. Böylece (4.5.2) denklem sisteminden yararlanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$x_{n+1}=\frac{1}{y_{n-3}},\quad y_{n+1}=\frac{1}{z_{n-3}-x_{n-3}},\quad z_{n+1}=\frac{1}{y_{n-3}}+\frac{x_{n-1}}{x_n y_{n-4}},$$

$$x_{n+2}=\frac{1}{y_{n-2}},\quad y_{n+2}=\frac{1}{z_{n-2}-x_{n-2}},\quad z_{n+2}=\frac{1}{y_{n-2}}+x_n,$$

$$x_{n+3}=\frac{1}{y_{n-1}},\quad y_{n+3}=\frac{1}{z_{n-1}-x_{n-1}},\quad z_{n+3}=\frac{1}{y_{n-1}}+\frac{1}{y_{n-3}},$$

$$x_{n+4}=\frac{1}{y_n},\quad y_{n+4}=\frac{1}{z_n-x_n},\quad z_{n+4}=\frac{1}{y_n}+\frac{1}{y_{n-2}},$$

$$x_{n+5}=z_{n-3}-x_{n-3},\quad y_{n+5}=\frac{x_n y_{n-4}}{x_{n-1}},\quad z_{n+5}=z_{n-3}-x_{n-3}+\frac{1}{y_{n-1}},$$

$$x_{n+6}=z_{n-2}-x_{n-2},\quad y_{n+6}=\frac{1}{x_n},\quad z_{n+6}=z_{n-2}-x_{n-2}+\frac{1}{y_n},$$

$$x_{n+7}=z_{n-1}-x_{n-1},\quad y_{n+7}=y_{n-3},\quad z_{n+7}=z_{n-1}-x_{n-1}+z_{n-3}-x_{n-3},$$

$$x_{n+8}=z_n-x_n,\quad y_{n+8}=y_{n-2},\quad z_{n+8}=z_n-x_n+z_{n-2}-x_{n-2},$$

$$x_{n+9}=\frac{x_{n-1}}{x_n y_{n-4}}, \qquad y_{n+9}=y_{n-1}, \qquad z_{n+9}=\frac{x_{n-1}}{x_n y_{n-4}}+z_{n-1}-x_{n-1},$$

$$x_{n+10}=x_n, \qquad y_{n+10}=y_n, \qquad z_{n+10}=z_n,$$

Teorem 4.5.2. $x_{-3},x_{-2},x_{-1},x_0,y_{-4},y_{-3},y_{-2},y_{-1},y_0,z_{-3},z_{-2},z_{-1},z_0\in(0,\infty)$ ve $z_i\neq x_i$, $i=\{-3,-2,-1,0\}$, $x_{-3}=d$, $x_{-2}=f$, $x_{-1}=g$, $x_0=h$, $y_{-4}=p$, $y_{-3}=q$, $y_{-2}=r$, $y_{-1}=s$, $y_0=t$, $z_{-3}=j$, $z_{-2}=k$, $z_{-1}=l$, $z_0=m$ başlangıç şartları altında (4.5.2) denklem sisteminin çözümleri $\{x_n,y_n,z_n\}$ olsun. Bu durumda $n\geq 0$ için (4.5.2) denklem sisteminin bütün çözümleri aşağıda verilmiştir.

$$x_{10n+1}=\frac{1}{q}, \qquad y_{10n+1}=\frac{1}{j-d}, \qquad z_{10n+1}=\frac{1}{q}+\frac{g}{hp},$$

$$x_{10n+2}=\frac{1}{r}, \qquad y_{10n+2}=\frac{1}{k-f}, \qquad z_{10n+2}=\frac{1}{r}+h,$$

$$x_{10n+3}=\frac{1}{s}, \qquad y_{10n+3}=\frac{1}{l-g}, \qquad z_{10n+3}=\frac{1}{s}+\frac{1}{q},$$

$$x_{10n+4}=\frac{1}{t}, \qquad y_{10n+4}=\frac{1}{m-h}, \qquad z_{10n+4}=\frac{1}{t}+\frac{1}{r},$$

$$x_{10n+5}=j-d, \qquad y_{10n+5}=\frac{hp}{g}, \qquad z_{10n+5}=j-d+\frac{1}{s},$$

$$x_{10n+6}=k-f, \qquad y_{10n+6}=\frac{1}{h}, \qquad z_{10n+6}=k-f+\frac{1}{t},$$

$$x_{10n+7}=l-g, \qquad y_{10n+7}=q, \qquad z_{10n+7}=l-g+j-d,$$

$$x_{10n+8}=m-h, \qquad y_{10n+8}=r, \qquad z_{10n+8}=m-h+k-f,$$

$$x_{10n+9}=\frac{g}{hp}, \qquad y_{10n+9}=s, \qquad z_{10n+9}=\frac{g}{hp}+l-g,$$

$$x_{10n+10}=h, \qquad y_{10n+10}=t, \qquad z_{10n+10}=m,$$

İspat: (4.5.1) başlangıç şartlarına göre (4.5.2) denklem sisteminin bütün çözümleri pozitiftir. Böylece $n=0$ için bu çözümün sağlandığı açıktır. Şimdi n için teoremin doğru olduğunu varsayalım.

$$x_{10n+1}=\frac{1}{q}, \qquad y_{10n+1}=\frac{1}{j-d}, \qquad z_{10n+1}=\frac{1}{q}+\frac{g}{hp},$$

$$x_{10n+2}=\frac{1}{r},\qquad y_{10n+2}=\frac{1}{k-f},\qquad z_{10n+2}=\frac{1}{r}+h,$$

$$x_{10n+3}=\frac{1}{s},\qquad y_{10n+3}=\frac{1}{l-g},\qquad z_{10n+3}=\frac{1}{s}+\frac{1}{q},$$

$$x_{10n+4}=\frac{1}{t},\qquad y_{10n+4}=\frac{1}{m-h},\qquad z_{10n+4}=\frac{1}{t}+\frac{1}{r},$$

$$x_{10n+5}=j-d,\qquad y_{10n+5}=\frac{hp}{g},\qquad z_{10n+5}=j-d+\frac{1}{s},$$

$$x_{10n+6}=k-f,\qquad y_{10n+6}=\frac{1}{h},\qquad z_{10n+6}=k-f+\frac{1}{t},$$

$$x_{10n+7}=l-g,\qquad y_{10n+7}=q,\qquad z_{10n+7}=l-g+j-d,$$

$$x_{10n+8}=m-h,\qquad y_{10n+8}=r,\qquad z_{10n+8}=m-h+k-f,$$

$$x_{10n+9}=\frac{g}{hp},\qquad y_{10n+9}=s,\qquad z_{10n+9}=\frac{g}{hp}+l-g,$$

$$x_{10n+10}=h,\qquad y_{10n+10}=t,\qquad z_{10n+10}=m,$$

Böylece yukarıdaki eşitlikten yararlanılarak $(n+1)$ için doğruluğunu gösterelim.

$$x_{10n+11}=\frac{1}{y_{10n+7}}=\frac{1}{q},\qquad y_{10n+11}=\frac{1}{z_{10n+7}-x_{10n+7}}=\frac{1}{j-d},$$

$$z_{10n+11}=\frac{1}{y_{10n+7}}+\frac{x_{10n+9}}{x_{10n+10}y_{10n+6}}=\frac{1}{q}+\frac{g}{hp},$$

$$x_{10n+12}=\frac{1}{y_{10n+8}}=\frac{1}{r},\qquad y_{10n+12}=\frac{1}{z_{10n+8}-x_{10n+8}}=\frac{1}{k-f},$$

$$z_{10n+12}=\frac{1}{y_{10n+8}}+\frac{x_{10n+10}}{x_{10n+11}y_{10n+7}}=\frac{1}{r}+h,$$

$$x_{10n+13}=\frac{1}{y_{10n+9}}=\frac{1}{s},\qquad y_{10n+13}=\frac{1}{z_{10n+9}-x_{10n+9}}=\frac{1}{l-g},$$

$$z_{10n+13}=\frac{1}{y_{10n+9}}+\frac{x_{10n+11}}{x_{10n+12}y_{10n+8}}=\frac{1}{s}+\frac{1}{q},$$

$$x_{10n+14}=\frac{1}{y_{10n+10}}=\frac{1}{t},\qquad y_{10n+14}=\frac{1}{z_{10n+10}-x_{10n+10}}=\frac{1}{m-h},$$

$$z_{10n+14}=\frac{1}{y_{10n+10}}+\frac{x_{10n+12}}{x_{10n+13}y_{10n+9}}=\frac{1}{t}+\frac{1}{r},$$

$$x_{10n+15}=\frac{1}{y_{10n+11}}=j-d, \qquad y_{10n+15}=\frac{1}{z_{10n+11}-x_{10n+11}}=\frac{hp}{g},$$

$$z_{10n+15}=\frac{1}{y_{10n+11}}+\frac{x_{10n+13}}{x_{10n+14}y_{10n+10}}=j-d+\frac{1}{s},$$

$$x_{10n+16}=\frac{1}{y_{10n+12}}=k-f, \qquad y_{10n+16}=\frac{1}{z_{10n+12}-x_{10n+12}}=\frac{1}{h},$$

$$z_{10n+16}=\frac{1}{y_{10n+12}}+\frac{x_{10n+14}}{x_{10n+15}y_{10n+11}}=k-f+\frac{1}{t},$$

$$x_{10n+17}=\frac{1}{y_{10n+13}}=l-g, \qquad y_{10n+17}=\frac{1}{z_{10n+13}-x_{10n+13}}=q,$$

$$z_{10n+17}=\frac{1}{y_{10n+13}}+\frac{x_{10n+15}}{x_{10n+16}y_{10n+12}}=l-g+j-d,$$

$$x_{10n+18}=\frac{1}{y_{10n+14}}=m-h, \qquad y_{10n+18}=\frac{1}{z_{10n+14}-x_{10n+14}}=r,$$

$$z_{10n+18}=\frac{1}{y_{10n+14}}+\frac{x_{10n+16}}{x_{10n+17}y_{10n+13}}=m-h+k-f,$$

$$x_{10n+19}=\frac{1}{y_{10n+15}}=\frac{g}{hp}, \qquad y_{10n+19}=\frac{1}{z_{10n+15}-x_{10n+15}}=s,$$

$$z_{10n+19}=\frac{1}{y_{10n+15}}+\frac{x_{10n+17}}{x_{10n+18}y_{10n+14}}=\frac{g}{hp}+l-g,$$

$$x_{10n+20}=\frac{1}{y_{10n+16}}=h, \qquad y_{10n+20}=\frac{1}{z_{10n+16}-x_{10n+16}}=t,$$

$$z_{10n+20}=\frac{1}{y_{10n+16}}+\frac{x_{10n+18}}{x_{10n+19}y_{10n+15}}=m,$$

Böylece tümevarım metodu ile ispat tamamlanmış olur.

4.6. $x_{n+1}=\dfrac{A}{y_{n-3}}$, $y_{n+1}=\dfrac{B}{z_{n-3}-x_{n-3}}$, $z_{n+1}=\dfrac{A}{y_{n-3}}+\dfrac{Bx_{n-1}}{x_n y_{n-4}}$ **FARK DENKLEM SİSTEMİNİN PERİYODİKLİĞİ**

Bu bölümde;

$$x_{-3},x_{-2},x_{-1},x_0,y_{-4},y_{-3},y_{-2},y_{-1},y_0,z_{-3},z_{-2},z_{-1},z_0\in(0,\infty),\ z_i\neq x_i,i=\{-3,-2,-1,0\} \quad (4.6.1)$$

olmak üzere,

$$x_{n+1}=\frac{A}{y_{n-3}},\ y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-3}-x_{n-3}},\ z_{n+1}=\frac{A}{y_{n-3}}+\frac{Bx_{n-1}}{x_n y_{n-4}},\ n\geq 0,\ A,B\in\mathbb{R}-\{0\} \quad (4.6.2)$$

fark denklem sisteminin çözümleri incelenmiştir.

Teorem 4.6.1. $x_{-3},x_{-2},x_{-1},x_0,y_{-4},y_{-3},y_{-2},y_{-1},y_0,z_{-3},z_{-2},z_{-1},z_0\in(0,\infty)$ ve $z_i\neq x$, $i=\{-3,-2,-1,0\}$, $A,B\in\mathbb{R}-\{0\}$ olmak üzere, (4.6.2) denklem sisteminin çözümü $\{x_n,y_n,z_n\}$ olsun. Bu durumda (4.6.2) denklem sisteminin bütün çözümleri on periyotlu ve periyodiktir.

İspat: (4.6.1) başlangıç şartları altında (4.6.2) denklem sisteminin bütün çözümleri pozitiftir. Böylece (4.6.2) denklem sisteminden yararlanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$x_{n+1}=\frac{A}{y_{n-3}},\quad y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-3}-x_{n-3}},\quad z_{n+1}=\frac{A}{y_{n-3}}+\frac{Bx_{n-1}}{x_n y_{n-4}},$$

$$x_{n+2}=\frac{A}{y_{n-2}},\quad y_{n+2}=\frac{B}{z_{n-2}-x_{n-2}},\quad z_{n+2}=\frac{A}{y_{n-2}}+\frac{B}{A}x_n,$$

$$x_{n+3}=\frac{A}{y_{n-1}},\quad y_{n+3}=\frac{B}{z_{n-1}-x_{n-1}},\quad z_{n+3}=\frac{A}{y_{n-1}}+\frac{B}{y_{n-3}},$$

$$x_{n+4}=\frac{A}{y_n},\quad y_{n+4}=\frac{B}{z_n-x_n},\quad z_{n+4}=\frac{A}{y_n}+\frac{B}{y_{n-2}},$$

$$x_{n+5}=\frac{A}{B}\left(z_{n-3}-x_{n-3}\right),\quad y_{n+5}=\frac{x_n y_{n-4}}{x_{n-1}},\quad z_{n+5}=\frac{A}{B}\left(z_{n-3}-x_{n-3}\right)+\frac{B}{y_{n-1}},$$

$$x_{n+6}=\frac{A}{B}\left(z_{n-2}-x_{n-2}\right),\quad y_{n+6}=\frac{A}{x_n},\quad z_{n+6}=\frac{A}{B}\left(z_{n-2}-x_{n-2}\right)+\frac{B}{y_n},$$

$$x_{n+7}=\frac{A}{B}\left(z_{n-1}-x_{n-1}\right),\qquad y_{n+7}=y_{n-3},\qquad z_{n+7}=\frac{A}{B}\left(z_{n-1}-x_{n-1}\right)+z_{n-3}-x_{n-3},$$

$$x_{n+8}=\frac{A}{B}\left(z_{n}-x_{n}\right),\qquad y_{n+8}=y_{n-2},\qquad z_{n+8}=\frac{A}{B}\left(z_{n}-x_{n}\right)+z_{n-2}-x_{n-2},$$

$$x_{n+9}=\frac{Ax_{n-1}}{x_{n}y_{n-4}},\qquad y_{n+9}=y_{n-1},\qquad z_{n+9}=\frac{Ax_{n-1}}{x_{n}y_{n-4}}+z_{n-1}-x_{n-1},$$

$$x_{n+10}=x_{n},\qquad y_{n+10}=y_{n},\qquad z_{n+10}=z_{n},$$

Teorem 4.6.2. $A,B\in\mathbb{R}-\{0\}$, $x_{-3},x_{-2},x_{-1},x_0,y_{-4},y_{-3},y_{-2},y_{-1},y_0,z_{-3},z_{-2},z_{-1},z_0\in(0,\infty)$, $z_i\neq x$, $i=\{-3,-2,-1,0\}$ $x_{-3}=d$, $x_{-2}=f$, $x_{-1}=g$, $x_0=h$, $y_{-4}=p$, $y_{-3}=q$, $y_{-2}=r$, $y_{-1}=s$, $y_0=t$, $z_{-3}=j$, $z_{-2}=k$, $z_{-1}=l$, $z_0=m$ başlangıç şartları altında (4.6.2) denklem sisteminin çözümleri $\{x_n,y_n,z_n\}$ olsun. Bu durumda $n\geq 0$ için (4.6.2) denklem sisteminin çözümleri aşağıda verilmiştir.

$$x_{10n+1}=\frac{A}{q},\qquad y_{10n+1}=\frac{B}{j-d},\qquad z_{10n+1}=\frac{A}{q}+\frac{Bg}{hp},$$

$$x_{10n+2}=\frac{A}{r},\qquad y_{10n+2}=\frac{B}{k-f},\qquad z_{10n+2}=\frac{A}{r}+\frac{B}{A}h,$$

$$x_{10n+3}=\frac{A}{s},\qquad y_{10n+3}=\frac{B}{l-g},\qquad z_{10n+3}=\frac{A}{s}+\frac{B}{q},$$

$$x_{10n+4}=\frac{A}{t},\qquad y_{10n+4}=\frac{B}{m-h},\qquad z_{10n+4}=\frac{A}{t}+\frac{B}{r},$$

$$x_{10n+5}=\frac{A}{B}\left(j-d\right),\qquad y_{10n+5}=\frac{hp}{g},\qquad z_{10n+5}=\frac{A}{B}\left(j-d\right)+\frac{B}{s},$$

$$x_{10n+6}=\frac{A}{B}\left(k-f\right),\qquad y_{10n+6}=\frac{A}{h},\qquad z_{10n+6}=\frac{A}{B}\left(k-f\right)+\frac{B}{t},$$

$$x_{10n+7}=\frac{A}{B}\left(l-g\right),\qquad y_{10n+7}=q,\qquad z_{10n+7}=\frac{A}{B}\left(l-g\right)+j-d,$$

$$x_{10n+8}=\frac{A}{B}\left(m-h\right),\qquad y_{10n+8}=r,\qquad z_{10n+8}=\frac{A}{B}\left(m-h\right)+k-f,$$

$$x_{10n+9}=\frac{Ag}{hp},\qquad y_{10n+9}=s,\qquad z_{10n+9}=\frac{Ag}{hp}+l-g,$$

$$x_{10n+10}=h,\qquad y_{10n+10}=t,\qquad z_{10n+10}=m,$$

İspat: (4.6.1) başlangıç şartlarına göre (4.6.2) denklem sisteminin bütün çözümleri pozitiftir. Böylece $n=0$ için bu çözümün sağlandığı açıktır. Şimdi n için teoremin doğru olduğunu varsayalım.

$$x_{10n+1}=\frac{A}{q}, \qquad y_{10n+1}=\frac{B}{j-d}, \qquad z_{10n+1}=\frac{A}{q}+\frac{Bg}{hp},$$

$$x_{10n+2}=\frac{A}{r}, \qquad y_{10n+2}=\frac{B}{k-f}, \qquad z_{10n+2}=\frac{A}{r}+\frac{B}{A}h,$$

$$x_{10n+3}=\frac{A}{s}, \qquad y_{10n+3}=\frac{B}{l-g}, \qquad z_{10n+3}=\frac{A}{s}+\frac{B}{q},$$

$$x_{10n+4}=\frac{A}{t}, \qquad y_{10n+4}=\frac{B}{m-h}, \qquad z_{10n+4}=\frac{A}{t}+\frac{B}{r},$$

$$x_{10n+5}=\frac{A}{B}(j-d), \qquad y_{10n+5}=\frac{hp}{g}, \qquad z_{10n+5}=\frac{A}{B}(j-d)+\frac{B}{s},$$

$$x_{10n+6}=\frac{A}{B}(k-f), \qquad y_{10n+6}=\frac{A}{h}, \qquad z_{10n+6}=\frac{A}{B}(k-f)+\frac{B}{t},$$

$$x_{10n+7}=\frac{A}{B}(l-g), \qquad y_{10n+7}=q, \qquad z_{10n+7}=\frac{A}{B}(l-g)+j-d,$$

$$x_{10n+8}=\frac{A}{B}(m-h), \qquad y_{10n+8}=r, \qquad z_{10n+8}=\frac{A}{B}(m-h)+k-f,$$

$$x_{10n+9}=\frac{Ag}{hp}, \qquad y_{10n+9}=s, \qquad z_{10n+9}=\frac{Ag}{hp}+l-g,$$

$$x_{10n+10}=h, \qquad y_{10n+10}=t, \qquad z_{10n+10}=m,$$

Böylece yukarıdaki eşitlikten yararlanılarak $(n+1)$ için doğruluğunu gösterelim.

$$x_{10n+11}=\frac{A}{y_{10n+7}}=\frac{A}{q}, \qquad y_{10n+11}=\frac{B}{z_{10n+7}-x_{10n+7}}=\frac{B}{j-d},$$

$$z_{10n+11}=\frac{A}{y_{10n+7}}+\frac{Bx_{10n+9}}{x_{10n+10}y_{10n+6}}=\frac{A}{q}+\frac{Bg}{hp},$$

$$x_{10n+12}=\frac{A}{y_{10n+8}}=\frac{A}{r}, \qquad y_{10n+12}=\frac{B}{z_{10n+8}-x_{10n+8}}=\frac{B}{k-f},$$

$$z_{10n+12}=\frac{A}{y_{10n+8}}+\frac{Bx_{10n+10}}{x_{10n+11}y_{10n+7}}=\frac{A}{r}+\frac{B}{A}h,$$

$$x_{10n+13}=\frac{A}{y_{10n+9}}=\frac{A}{s}, \qquad y_{10n+13}=\frac{B}{z_{10n+9}-x_{10n+9}}=\frac{B}{l-g},$$

$$z_{10n+13}=\frac{A}{y_{10n+9}}+\frac{Bx_{10n+11}}{x_{10n+12}y_{10n+8}}=\frac{A}{s}+\frac{B}{q},$$

$$x_{10n+14}=\frac{A}{y_{10n+10}}=\frac{A}{t},\qquad y_{10n+14}=\frac{B}{z_{10n+10}-x_{10n+10}}=\frac{B}{m-h},$$

$$z_{10n+14}=\frac{A}{y_{10n+10}}+\frac{Bx_{10n+12}}{x_{10n+13}y_{10n+9}}=\frac{A}{t}+\frac{B}{r},$$

$$x_{10n+15}=\frac{A}{y_{10n+11}}=\frac{A}{B}(j-d),\qquad y_{10n+15}=\frac{B}{z_{10n+11}-x_{10n+11}}=\frac{hp}{g},$$

$$z_{10n+15}=\frac{A}{y_{10n+11}}+\frac{Bx_{10n+13}}{x_{10n+14}y_{10n+10}}=\frac{A}{B}(j-d)+\frac{B}{s},$$

$$x_{10n+16}=\frac{A}{y_{10n+12}}=\frac{A}{B}(k-f),\qquad y_{10n+16}=\frac{B}{z_{10n+12}-x_{10n+12}}=\frac{A}{h},$$

$$z_{10n+16}=\frac{A}{y_{10n+12}}+\frac{Bx_{10n+14}}{x_{10n+15}y_{10n+11}}=\frac{A}{B}(k-f)+\frac{B}{t},$$

$$x_{10n+17}=\frac{A}{y_{10n+13}}=\frac{A}{B}(l-g),\qquad y_{10n+17}=\frac{B}{z_{10n+13}-x_{10n+13}}=q,$$

$$z_{10n+17}=\frac{A}{y_{10n+13}}+\frac{Bx_{10n+15}}{x_{10n+16}y_{10n+12}}=\frac{A}{B}(l-g)+j-d,$$

$$x_{10n+18}=\frac{A}{y_{10n+14}}=\frac{A}{B}(m-h),\qquad y_{10n+18}=\frac{B}{z_{10n+14}-x_{10n+14}}=r,$$

$$z_{10n+18}=\frac{A}{y_{10n+14}}+\frac{Bx_{10n+16}}{x_{10n+17}y_{10n+13}}=\frac{A}{B}(m-h)+k-f,$$

$$x_{10n+19}=\frac{A}{y_{10n+15}}=\frac{Ag}{hp},\qquad y_{10n+19}=\frac{B}{z_{10n+15}-x_{10n+15}}=s,$$

$$z_{10n+19}=\frac{A}{y_{10n+15}}+\frac{Bx_{10n+17}}{x_{10n+18}y_{10n+14}}=\frac{Ag}{hp}+l-g,$$

$$x_{10n+20}=\frac{A}{y_{10n+16}}=h,\qquad y_{10n+20}=\frac{B}{z_{10n+16}-x_{10n+16}}=t,$$

$$z_{10n+20}=\frac{A}{y_{10n+16}}+\frac{Bx_{10n+18}}{x_{10n+19}y_{10n+15}}=m,$$

Böylece tümevarım metodu ile ispat tamamlanmış olur.

4.7. $x_{n+1}=\frac{1}{y_{n-k}}$, $y_{n+1}=\frac{1}{z_{n-k}-x_{n-k}}$, $z_{n+1}=\frac{1}{y_{n-k}}+\frac{x_{n-1}}{x_n y_{n-(k+1)}}$ FARK DENKLEM SİSTEMİNİN PERİYODİKLİĞİ

Bu bölümde;

$$x_{-k},x_{-k+1},...,x_{-1},x_0,y_{-k-1},y_{-k},y_{-k+1},...,y_{-1},y_0,z_{-k},z_{-k+1},z_{-k+2},...,z_0\in(0,\infty) \tag{4.7.1}$$

olmak üzere,

$$x_{n+1}=\frac{1}{y_{n-k}},\ y_{n+1}=\frac{1}{z_{n-k}-x_{n-k}},\ z_{n+1}=\frac{1}{y_{n-k}}+\frac{x_{n-1}}{x_n y_{n-(k+1)}},\ n\geq 0 \tag{4.7.2}$$

fark denklem sisteminin çözümleri incelenmiştir.

Teorem 4.7.1. $k\in\mathbb{N}-\{0\}$ ve (4.7.1) başlangıç şartları altında (4.7.2) denklem sisteminin bütün çözümleri $\{x_n,y_n,z_n\}$ olsun. Bu durumda (4.7.2) denklem sisteminin bütün çözümleri $(2k+4)$ periyotlu ve periyodiktir.

İspat: (4.7.1) başlangıç şartları altında (4.7.2) denklem sisteminin bütün çözümleri pozitiftir. Böylece (4.7.2) denklem sisteminden yararlanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$x_{n+1}=\frac{1}{y_{n-k}},\qquad y_{n+1}=\frac{1}{z_{n-k}-x_{n-k}},\qquad z_{n+1}=\frac{1}{y_{n-k}}+\frac{x_{n-1}}{x_n y_{n-k-1}},$$

$$x_{n+k+1}=\frac{1}{y_n},\qquad y_{n+k+1}=\frac{1}{z_n-x_n},\qquad z_{n+k+1}=\frac{1}{y_n}+\frac{1}{y_{n-2}},$$

$$x_{n+k+2}=z_{n-k}-x_{n-k},\qquad y_{n+k+2}=\frac{x_n y_{n-k-1}}{x_{n-1}},\qquad z_{n+k+2}=z_{n-k}-x_{n-k}+\frac{1}{y_{n-1}},$$

$$x_{n+2k+2}=z_n-x_n,\qquad y_{n+k+3}=\frac{1}{x_n},\qquad z_{n+k+3}=z_{n-k+1}-x_{n-k+1}+\frac{1}{y_n},$$

$$x_{n+2k+3}=\frac{x_{n-1}}{x_n y_{n-(k+1)}},\qquad y_{n+k+4}=y_{n-k},\qquad z_{n+2k+3}=\frac{x_{n-1}}{x_n y_{n-(k+1)}}+z_{n-1}-x_{n-1},$$

$$x_{n+2k+4}=x_n,\qquad y_{n+2k+4}=y_n,\qquad z_{n+2k+4}=z_n,$$

Teorem 4.7.2. $k\in\mathbb{N}-\{0\}$ ve (4.7.1) olmak üzere $x_{-k+1}=d$, $x_{-k}=f$, $x_{-1}=g$, $x_0=h$, $y_{-k-1}=p$, $y_{-k}=q$, $y_{-k+1}=r$, $y_{-2}=s$, $y_{-1}=t$, $y_0=v$, $z_{-k+1}=j$, $z_{-k}=k$, $z_{-1}=l$,

$z_0 = m$ başlangıç şartları altında (4.7.2) denklem sisteminin çözümü $\{x_n, y_n, z_n\}$ olsun. Bu durumda (4.7.2) denkleminin bütün çözümleri aşağıda verilmiştir.

$$x_{n(2k+4)+1} = \frac{1}{q}, \qquad y_{n(2k+4)+1} = \frac{1}{k-f}, \qquad z_{n(2k+4)+1} = \frac{1}{q} + \frac{g}{hp},$$

$$x_{n(2k+4)+k+1} = \frac{1}{v}, \qquad y_{n(2k+4)+k+1} = \frac{1}{m-h}, \qquad z_{n(2k+4)+k+1} = \frac{1}{v} + \frac{1}{s},$$

$$x_{n(2k+4)+k+2} = k-f, \qquad y_{n(2k+4)+k+2} = \frac{hp}{f}, \qquad z_{n(2k+4)+k+2} = k-f+\frac{1}{t},$$

$$x_{n(2k+4)+2k+2} = m-h, \qquad y_{n(2k+4)+k+3} = \frac{1}{h}, \qquad z_{n(2k+4)+k+3} = j-d+\frac{1}{v},$$

$$x_{n(2k+4)+2k+3} = \frac{g}{hp}, \qquad y_{n(2k+4)+k+4} = q, \qquad z_{n(2k+4)+2k+3} = \frac{g}{hp}+l-g,$$

$$x_{n(2k+4)+2k+4} = h, \qquad y_{n(2k+4)+2k+4} = v, \qquad z_{n(2k+4)+2k+4} = m,$$

İspat: (4.7.1) başlangıç şartlarına göre (4.7.2) denklem sisteminin bütün çözümleri pozitiftir. Böylece $n=0$ için bu çözümün sağlandığı açıktır. Şimdi n için teoremin doğru olduğunu varsayalım.

$$x_{n(2k+4)+1} = \frac{1}{q}, \qquad y_{n(2k+4)+1} = \frac{1}{k-f}, \qquad z_{n(2k+4)+1} = \frac{1}{q} + \frac{g}{hp},$$

$$x_{n(2k+4)+k+1} = \frac{1}{v}, \qquad y_{n(2k+4)+k+1} = \frac{1}{m-h}, \qquad z_{n(2k+4)+k+1} = \frac{1}{v} + \frac{1}{s},$$

$$x_{n(2k+4)+k+2} = k-f, \qquad y_{n(2k+4)+k+2} = \frac{hp}{f}, \qquad z_{n(2k+4)+k+2} = k-f+\frac{1}{t},$$

$$x_{n(2k+4)+2k+2} = m-h, \qquad y_{n(2k+4)+k+3} = \frac{1}{h}, \qquad z_{n(2k+4)+k+3} = j-d+\frac{1}{v},$$

$$x_{n(2k+4)+2k+3} = \frac{g}{hp}, \qquad y_{n(2k+4)+k+4} = q, \qquad z_{n(2k+4)+2k+3} = \frac{g}{hp}+l-g,$$

$$x_{n(2k+4)+2k+4} = h, \qquad y_{n(2k+4)+2k+4} = v, \qquad z_{n(2k+4)+2k+4} = m,$$

Böylece yukarıdaki eşitlikten yararlanılarak $(n+1)$ için doğruluğunu gösterelim.

$$x_{n(2k+4)+2k+5} = \frac{1}{y_{n(2k+4)+k+4}} = \frac{1}{q}, \qquad y_{n(2k+4)+2k+5} = \frac{1}{z_{n(2k+4)+k+4} - x_{n(2k+4)+k+4}} = \frac{1}{k-f},$$

$$z_{n(2k+4)+2k+5} = \frac{1}{y_{n(2k+4)+k+4}} + \frac{x_{n(2k+4)+2k+3}}{x_{n(2k+4)+2k+4} y_{n(2k+4)+k+3}} = \frac{1}{q} + \frac{g}{hp},$$

$$x_{n(2k+4)+3k+5}=\frac{1}{y_{n(2k+4)+2k+4}}=\frac{1}{v},\qquad y_{n(2k+4)+3k+5}=\frac{1}{z_{n(2k+4)+2k+4}-x_{n(2k+4)+2k+4}}=\frac{1}{m-h},$$

$$z_{n(2k+4)+3k+5}=\frac{1}{y_{n(2k+4)+2k+4}}+\frac{x_{n(2k+4)+3k+3}}{x_{n(2k+4)+3k+4}y_{n(2k+4)+2k+3}}=\frac{1}{v}+\frac{1}{s},$$

$$x_{n(2k+4)+3k+6}=\frac{1}{y_{n(2k+4)+2k+5}}=k-f,\qquad y_{n(2k+4)+3k+6}=\frac{1}{z_{n(2k+4)+2k+6}-x_{n(2k+4)+2k+6}}=\frac{hp}{f},$$

$$z_{n(2k+4)+3k+6}=\frac{1}{y_{n(2k+4)+2k+5}}+\frac{x_{n(2k+4)+3k+4}}{x_{n(2k+4)+3k+5}y_{n(2k+4)+2k+4}}=k-f+\frac{1}{t},$$

$$x_{n(2k+4)+4k+6}=\frac{1}{y_{n(2k+4)+3k+5}}=m-h,\qquad y_{n(2k+4)+3k+7}=\frac{1}{z_{n(2k+4)+2k+7}-x_{n(2k+4)+2k+7}}=\frac{1}{h},$$

$$z_{n(2k+4)+3k+7}=\frac{1}{y_{n(2k+4)+2k+6}}+\frac{x_{n(2k+4)+3k+5}}{x_{n(2k+4)+3k+6}y_{n(2k+4)+2k+5}}=j-d+\frac{1}{v},$$

$$x_{n(2k+4)+4k+7}=\frac{1}{y_{n(2k+4)+3k+6}}=\frac{g}{hp},\qquad y_{n(2k+4)+3k+8}=\frac{1}{z_{n(2k+4)+2k+8}-x_{n(2k+4)+2k+8}}=q,$$

$$z_{n(2k+4)+4k+7}=\frac{1}{y_{n(2k+4)+3k+6}}+\frac{x_{n(2k+4)+4k+5}}{x_{n(2k+4)+4k+6}y_{n(2k+4)+3k+5}}=\frac{g}{hp}+l-g,$$

$$x_{n(2k+4)+4k+8}=\frac{1}{y_{n(2k+4)+3k+7}}=h,\qquad y_{n(2k+4)+4k+8}=\frac{1}{z_{n(2k+4)+3k+8}-x_{n(2k+4)+3k+8}}=v,$$

$$z_{n(2k+4)+4k+8}=\frac{1}{y_{n(2k+4)+3k+7}}+\frac{x_{n(2k+4)+4k+6}}{x_{n(2k+4)+4k+7}y_{n(2k+4)+3k+6}}=m,$$

Böylece tümevarım metodu ile ispat tamamlanmış olur.

4.8. $x_{n+1}=\dfrac{A}{y_{n-k}}$, $y_{n+1}=\dfrac{B}{z_{n-k}-x_{n-k}}$, $z_{n+1}=\dfrac{A}{y_{n-k}}+\dfrac{Bx_{n-1}}{x_n y_{n-(k+1)}}$ **FARK DENKLEM SİSTEMİNİN PERİYODİKLİĞİ**

Bu bölümde;

$$x_{-k},x_{-k+1},...,x_{-1},x_0,y_{-k-1},y_{-k},y_{-k+1},...,y_{-1},y_0,z_{-k},z_{-k+1},z_{-k+2},...,z_0\in(0,\infty) \tag{4.8.1}$$

olmak üzere,

$$x_{n+1}=\frac{A}{y_{n-k}},\ y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-k}-x_{n-k}},\ z_{n+1}=\frac{A}{y_{n-k}}+\frac{Bx_{n-1}}{x_n y_{n-(k+1)}},\ n\geq 0\ ,\ A,B\in\mathbb{R}-\{0\} \tag{4.8.2}$$

fark denklem sisteminin çözümleri incelenmiştir.

Teorem 4.8.1. $k\in\mathbb{N}-\{0\}$ ve (4.8.1) başlangıç şartları altında (4.8.2) denklem sisteminin bütün çözümleri $\{x_n,y_n,z_n\}$ olsun. Bu durumda (4.8.2) denklem sisteminin bütün çözümleri $(2k+4)$ periyotlu ve periyodiktir.

İspat: (4.8.1) başlangıç şartları altında (4.8.2) denklem sisteminin bütün çözümleri pozitiftir. Böylece (4.8.2) denklem sisteminden yararlanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$x_{n+1}=\frac{A}{y_{n-k}},\qquad y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-k}-x_{n-k}},\qquad z_{n+1}=\frac{A}{y_{n-k}}+\frac{Bx_{n-1}}{x_n y_{n-k-1}},$$

$$x_{n+k+1}=\frac{A}{y_n},\qquad y_{n+k+1}=\frac{B}{z_n-x_n},\qquad z_{n+k+1}=\frac{A}{y_n}+\frac{B}{y_{n-2}},$$

$$x_{n+k+2}=\frac{A}{B}\left(z_{n-k}-x_{n-k}\right),\qquad y_{n+k+2}=\frac{x_n y_{n-k-1}}{x_{n-k}},\qquad z_{n+k+2}=\frac{A}{B}\left(z_{n-k}-x_{n-k}\right)+\frac{B}{y_{n-1}},$$

$$x_{n+2k+2}=\frac{A}{B}\left(z_n-x_n\right),\qquad y_{n+k+3}=\frac{A}{x_n},\qquad z_{n+k+3}=\frac{A}{B}\left(z_{n-k+1}-x_{n-k+1}\right)+\frac{B}{y_n},$$

$$x_{n+2k+3}=\frac{Ax_{n-1}}{x_n y_{n-(k+1)}},\qquad y_{n+k+4}=y_{n-k},\qquad z_{n+2k+3}=\frac{Ax_{n-1}}{x_n y_{n-(k+1)}}+z_{n-1}-x_{n-1},$$

$$x_{n+2k+4}=x_n,\qquad y_{n+2k+4}=y_n,\qquad z_{n+2k+4}=z_n,$$

Teorem 4.8.2. $k\in\mathbb{N}-\{0\}$, $A,B\in\mathbb{R}-\{0\}$ ve (4.8.1) olmak üzere $x_{-k+1}=d$, $x_{-k}=f$, $x_{-1}=g$, $x_0=h$, $y_{-k-1}=p$, $y_{-k}=q$, $y_{-k+1}=r$, $y_{-2}=s$, $y_{-1}=t$, $y_0=v$, $z_{-k+1}=j$,

$z_{-k}=k$, $z_{-1}=l$, $z_0=m$ başlangıç şartları altında (4.8.2) denklem sisteminin çözümü $\{x_n, y_n, z_n\}$ olsun. Bu durumda (4.8.2) denkleminin bütün çözümleri aşağıda verilmiştir.

$$x_{n(2k+4)+1}=\frac{A}{q}, \qquad y_{n(2k+4)+1}=\frac{B}{k-f}, \qquad z_{n(2k+4)+1}=\frac{A}{q}+\frac{Bg}{hp},$$

$$x_{n(2k+4)+k+1}=\frac{A}{v}, \qquad y_{n(2k+4)+k+1}=\frac{B}{m-h}, \qquad z_{n(2k+4)+k+1}=\frac{A}{v}+\frac{B}{s},$$

$$x_{n(2k+4)+k+2}=\frac{A}{B}(k-f), \qquad y_{n(2k+4)+k+2}=\frac{hp}{f}, \qquad z_{n(2k+4)+k+2}=\frac{A}{B}(k-f)+\frac{B}{t},$$

$$x_{n(2k+4)+2k+2}=\frac{A}{B}(m-h), \qquad y_{n(2k+4)+k+3}=\frac{A}{h}, \qquad z_{n(2k+4)+k+3}=\frac{A}{B}(j-d)+\frac{B}{v},$$

$$x_{n(2k+4)+2k+3}=\frac{Ag}{hp}, \qquad y_{n(2k+4)+k+4}=q, \qquad z_{n(2k+4)+2k+3}=\frac{Ag}{hp}+l-g,$$

$$x_{n(2k+4)+2k+4}=h, \qquad y_{n(2k+4)+2k+4}=v, \qquad z_{n(2k+4)+2k+4}=m,$$

İspat: (4.8.1) başlangıç şartlarına göre (4.8.2) denklem sisteminin bütün çözümleri pozitiftir. Böylece $n=0$ için bu çözümün sağlandığı açıktır. Şimdi n için teoremin doğru olduğunu varsayalım.

$$x_{n(2k+4)+1}=\frac{A}{q}, \qquad y_{n(2k+4)+1}=\frac{B}{k-f}, \qquad z_{n(2k+4)+1}=\frac{A}{q}+\frac{Bg}{hp},$$

$$x_{n(2k+4)+k+1}=\frac{A}{v}, \qquad y_{n(2k+4)+k+1}=\frac{B}{m-h}, \qquad z_{n(2k+4)+k+1}=\frac{A}{v}+\frac{B}{s},$$

$$x_{n(2k+4)+k+2}=\frac{A}{B}(k-f), \qquad y_{n(2k+4)+k+2}=\frac{hp}{f}, \qquad z_{n(2k+4)+k+2}=\frac{A}{B}(k-f)+\frac{B}{t},$$

$$x_{n(2k+4)+2k+2}=\frac{A}{B}(m-h), \qquad y_{n(2k+4)+k+3}=\frac{A}{h}, \qquad z_{n(2k+4)+k+3}=\frac{A}{B}(j-d)+\frac{B}{v},$$

$$x_{n(2k+4)+2k+3}=\frac{Ag}{hp}, \qquad y_{n(2k+4)+k+4}=q, \qquad z_{n(2k+4)+2k+3}=\frac{Ag}{hp}+l-g,$$

$$x_{n(2k+4)+2k+4}=h, \qquad y_{n(2k+4)+2k+4}=v, \qquad z_{n(2k+4)+2k+4}=m,$$

Böylece yukarıdaki eşitlikten yararlanılarak $(n+1)$ için doğruluğunu gösterelim.

$$x_{n(2k+4)+2k+5}=\frac{A}{y_{n(2k+4)+k+4}}=\frac{A}{q}, \qquad y_{n(2k+4)+2k+5}=\frac{B}{z_{n(2k+4)+k+4}-x_{n(2k+4)+k+4}}=\frac{B}{k-f},$$

$$z_{n(2k+4)+2k+5}=\frac{A}{y_{n(2k+4)+k+4}}+\frac{Bx_{n(2k+4)+2k+3}}{x_{n(2k+4)+2k+4}y_{n(2k+4)+k+3}}=\frac{A}{q}+\frac{Bg}{hp},$$

$$x_{n(2k+4)+3k+5}=\frac{A}{y_{n(2k+4)+2k+4}}=\frac{B}{v},\qquad y_{n(2k+4)+3k+5}=\frac{B}{z_{n(2k+4)+2k+4}-x_{n(2k+4)+2k+4}}=\frac{B}{m-h},$$

$$z_{n(2k+4)+3k+5}=\frac{A}{y_{n(2k+4)+2k+4}}+\frac{Bx_{n(2k+4)+3k+3}}{x_{n(2k+4)+3k+4}y_{n(2k+4)+2k+3}}=\frac{A}{v}+\frac{B}{s},$$

$$x_{n(2k+4)+3k+6}=\frac{A}{y_{n(2k+4)+2k+5}}=\frac{A}{B}(k-f)\qquad y_{n(2k+4)+3k+6}=\frac{B}{z_{n(2k+4)+2k+6}-x_{n(2k+4)+2k+6}}=\frac{hp}{f},$$

$$z_{n(2k+4)+3k+6}=\frac{A}{y_{n(2k+4)+2k+5}}+\frac{Bx_{n(2k+4)+3k+4}}{x_{n(2k+4)+3k+5}y_{n(2k+4)+2k+4}}=\frac{A}{B}(k-f)+\frac{B}{t},$$

$$x_{n(2k+4)+4k+6}=\frac{A}{y_{n(2k+4)+3k+5}}=\frac{A}{B}(m-h),\qquad y_{n(2k+4)+3k+7}=\frac{B}{z_{n(2k+4)+2k+7}-x_{n(2k+4)+2k+7}}=\frac{A}{h},$$

$$z_{n(2k+4)+3k+7}=\frac{A}{y_{n(2k+4)+2k+6}}+\frac{Bx_{n(2k+4)+3k+5}}{x_{n(2k+4)+3k+6}y_{n(2k+4)+2k+5}}=\frac{A}{B}(j-d)+\frac{B}{v},$$

$$x_{n(2k+4)+4k+7}=\frac{A}{y_{n(2k+4)+3k+6}}=\frac{Ag}{hp},\qquad y_{n(2k+4)+3k+8}=\frac{B}{z_{n(2k+4)+2k+8}-x_{n(2k+4)+2k+8}}=q,$$

$$z_{n(2k+4)+4k+7}=\frac{A}{y_{n(2k+4)+3k+6}}+\frac{Bx_{n(2k+4)+4k+5}}{x_{n(2k+4)+4k+6}y_{n(2k+4)+3k+5}}=\frac{Ag}{hp}+l-g,$$

$$x_{n(2k+4)+4k+8}=\frac{A}{y_{n(2k+4)+3k+7}}=h,\qquad y_{n(2k+4)+4k+8}=\frac{B}{z_{n(2k+4)+3k+8}-x_{n(2k+4)+3k+8}}=v,$$

$$z_{n(2k+4)+4k+8}=\frac{A}{y_{n(2k+4)+3k+7}}+\frac{Bx_{n(2k+4)+4k+6}}{x_{n(2k+4)+4k+7}y_{n(2k+4)+3k+6}}=m,$$

Böylece tümevarım metodu ile ispat tamamlanmış olur.

5. $x_{n+1}=\frac{A}{y_{n-k}}$, $y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-k}-x_{n-k}}$, $z_{n+1}=\frac{A}{y_{n-k}}+\frac{Bx_{n-1}}{x_n y_{n-(k+1)}}$ FARK DENKLEM SİSTEMİN KARARLILIĞI

Bu bölümde;

$$x_{n+1}=\frac{A}{y_{n-k}},\ y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-k}-x_{n-k}},\ z_{n+1}=\frac{A}{y_{n-k}}+\frac{Bx_{n-1}}{x_n y_{n-(k+1)}},\ n\geq 0 \tag{5.1}$$

fark denklem sisteminin kararlılığı denklem sisteminin denge noktalarına göre incelenmiştir.

Teorem 5.1. $A,B\in\mathbb{R}-\{0\}$, $\bar{x}=A$ ve $\bar{x}=-A$ olmak üzere (5.1) fark denklem sisteminin denge noktaları $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(A,1,A+B)$ ve $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(-A,-1,-(A+B))$ dir.

İspat: (5.1) fark denklem sisteminin denge noktalarını bulurken,

$$\bar{x}=\frac{A}{\bar{y}},\ \bar{y}=\frac{B}{\bar{z}-\bar{x}},\ \bar{z}=\frac{A}{\bar{y}}+\frac{B.\bar{x}}{\bar{x}.\bar{y}} \tag{5.2}$$

denklem sistemi oluşturulur. Bu sistem düzenlenirse,

$$\bar{x}.\bar{y}=A,\ \bar{y}(\bar{z}-\bar{x})=B,\ \bar{x}.\bar{y}.\bar{z}=\bar{x}(A+B) \tag{5.3}$$

denklemleri elde edilir. Buradan $\bar{x}\neq 0$ olduğu için

$$\bar{x}.\bar{y}=A,\ \bar{y}.\bar{z}=A+B \tag{5.4}$$

denklem sistemi bulunmuş olur. $\bar{x}=A$ ve $\bar{x}=-A$, $A\in\mathbb{R}-\{0\}$ özel şartları altında bu sistem çözülürse (5.1) fark denklem sisteminin denge noktaları

$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(A,1,A+B)$ ve $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(-A,-1,-(A+B))$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(A,1,A+B)$ ve $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(-A,-1,-(A+B))$ denge noktalarının jakobiyen matrisi ve karakteristik polinomları aşağıda incelenmiştir.

$$J(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{A}{\bar{y}^2} & 0 \\ \frac{B}{(\bar{z}-\bar{x})^2} & 0 & -\frac{B}{(\bar{z}-\bar{x})^2} \\ 0 & -\frac{A+B}{\bar{y}^2} & 0 \end{bmatrix}$$

Bu matriste $\bar{x}=A$, $\bar{y}=1$, $\bar{z}=A+B$ ve $\bar{x}=-A$, $\bar{y}=-1$, $\bar{z}=-(A+B)$ değerleri yerine yazıldığında

$$J(A,1,A+B)=J(-A,-1,-(A+B))=\begin{bmatrix}0 & -A & 0\\ \frac{1}{B} & 0 & -\frac{1}{B}\\ 0 & -(A+B) & 0\end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Bu matrisin karakteristik polinomu ve bu polinomun kökleri aşağıda verilmiştir.

$$\begin{vmatrix}\lambda & A & 0\\ -\frac{1}{B} & \lambda & \frac{1}{B}\\ 0 & A+B & \lambda\end{vmatrix}=0$$

$\lambda^3-\lambda=0$

$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=0,\ \lambda_3=1$ olduğundan verilen sistemin çözümleri $n\to\infty$ giderken $+1,-1$ değerleri arasında kalır. Yani bu sistem kararlıdır.

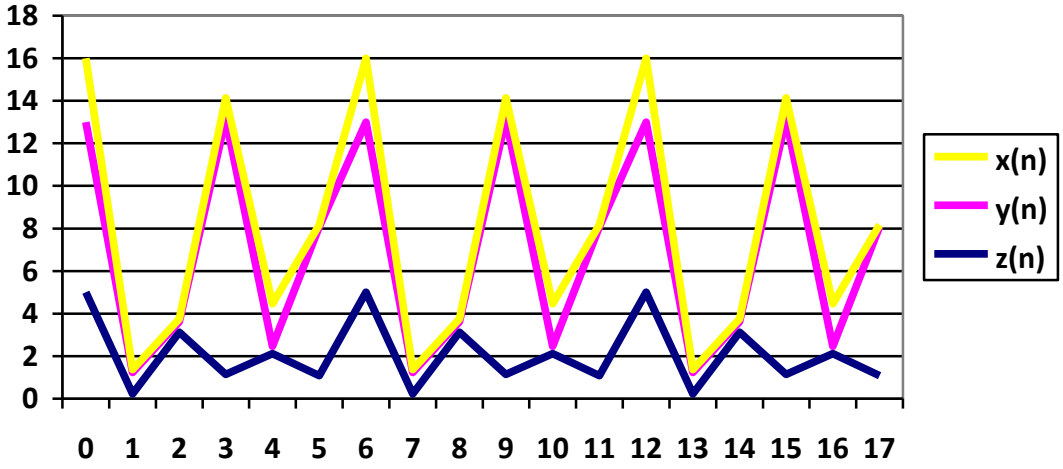
6. BÖLÜM

6. NÜMERİK ÖRNEKLER VE ŞEKİLLERİ

Örnek 6.1. (5.1) fark denklem sisteminde $A=1$, $B=1$, $k=1$ ve başlangıç şartları $x_{-1}=1$, $x_0=3$, $y_{-2}=4$, $y_{-1}=7$, $y_0=8$, $z_{-1}=2$, $z_0=5$ olsun. Aşağıdaki tablodan sistemin altı periyotlu ve periyodik olduğu görülür.

n	x_n	y_n	z_n
1	0,142857	1	0,226190
2	0,125	0,5	3,125003
3	1	12,000048	1,142857
4	2	0,333333	2,125
5	0,083333	7,000007	1,083333
6	3	8	5
7	0,142857	1	0,226190
8	0,125	0,5	3,125003
9	1	12,000048	1,142857
10	2	0,333333	2,125
11	0,083333	7,000007	1,083333
12	3	8	5
13	0,142857	1	0,226190
14	0,125	0,5	3,125003
15	1	12,000048	1,142857
16	2	0,333333	2,125
17	0,083333	7,000007	1,083333
18	3	8	5

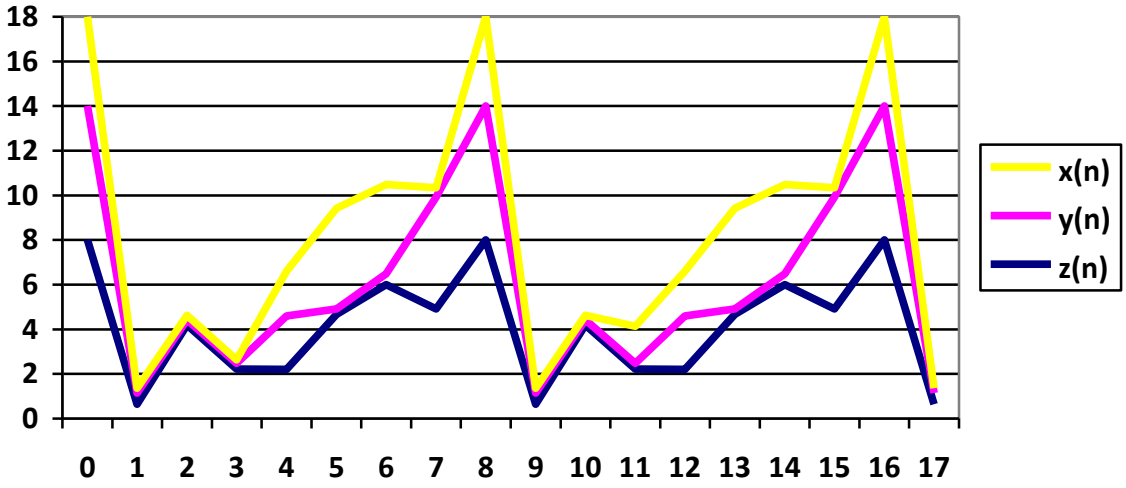
Şekil 6.1.



Örnek 6.2. (5.1) fark denklem sisteminde $A=1$, $B=1$, $k=2$ ve başlangıç şartları $x_{-2}=1$, $x_{-1}=2,5$, $x_0=4$, $y_{-3}=1,5$, $y_{-2}=4,5$, $y_{-1}=5$, $y_0=6$, $z_{-2}=3$, $z_{-1}=7$, $z_0=8$ olsun. Aşağıdaki tablodan sistemin sekiz periyotlu ve periyodik olduğu görülür.

n	x_n	y_n	z_n
1	0,222222	0,5	0,638888
2	0,2	0,222222	4,2000004
3	0,166666	0,25	2,222222
4	2	2,400003	2,2
5	4,500004	0,249999	4,66667
6	4	0,486486	6
7	0,416666	5	4,91667
8	4	6	8
9	0,222222	0,5	0,638888
10	0,2	0,222222	4,200004
11	0,166666	0,25	2,222222
12	2	2,400003	2,2
13	4,500004	0,249999	4,66667
14	4	0,486486	6
15	0,416666	5	4,91667
16	4	6	8
17	0,222222	0,5	0,638888
18	0,2	0,222222	4,200004

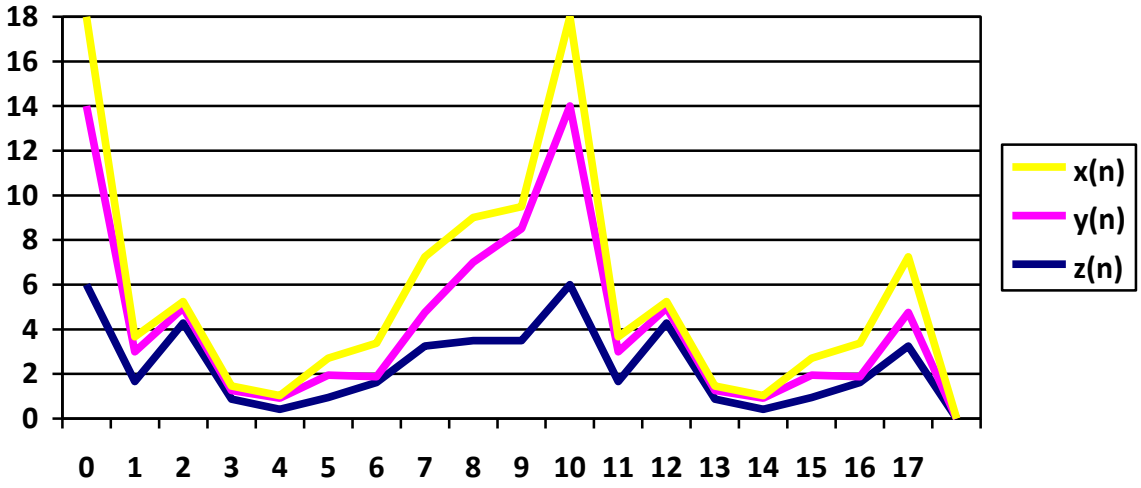
Şekil 6.2.



Örnek 6.3. (5.1) fark denklem sisteminde $A=1$, $B=1$, $k=3$ ve başlangıç şartları $x_{-3}=0,25$, $x_{-2}=0,5$, $x_{-1}=3$, $x_0=4$, $y_{-4}=0,75$, $y_{-3}=1,5$, $y_{-2}=3,5$, $y_{-1}=5$, $y_0=8$, $z_{-3}=1$, $z_{-2}=2$, $z_{-1}=5,5$, $z_0=6$ olsun. Aşağıdaki tablodan sistemin on periyotlu ve periyodik olduğu görülür.

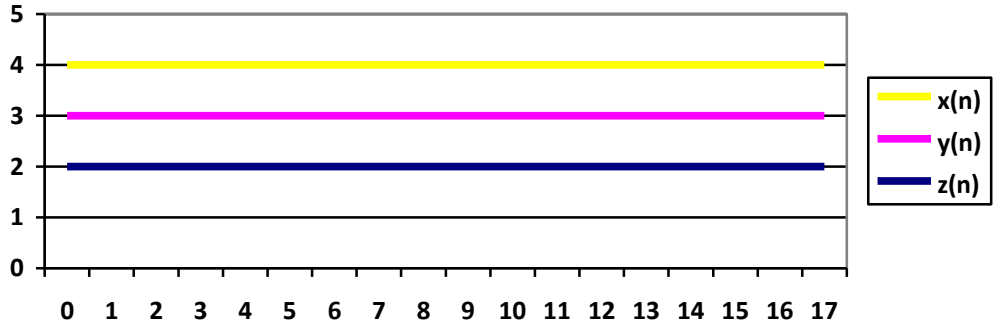
n	x_n	y_n	z_n
1	0,666666	1,333333	1,666666
2	0,285714	0,666666	4,285718
3	0,2	0,4	0,866666
4	0,125	0,5	0,410714
5	0,75	1	0,95
6	1,500001	0,249999	1,625001
7	2,5	1,500001	3,25
8	2	3,500003	3,500001
9	1	5	3,5
10	4	8	6
11	0,666666	1,333333	1,666666
12	0,285714	0,666666	4,285718
13	0,2	0,4	0,866666
14	0,125	0,5	0,410714
15	0,75	1	0,95
16	1,500001	0,249999	1,625001
17	2,5	1,500001	3,25
18	2	3,500003	3,500001

Şekil 6.3.

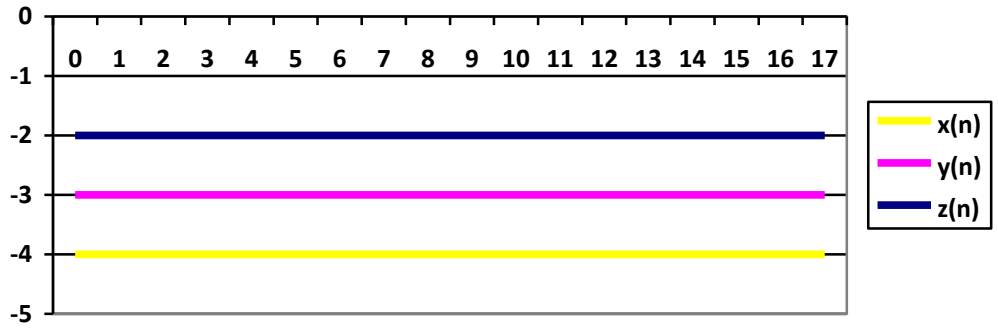


Örnek 6.4. (5.1) fark denklem sisteminde $A=1$, $B=1$, $k=1$ ve başlangıç şartları $(x_0, y_0, z_0)=(1,1,2)$ ve $(x_0, y_0, z_0)=(-1,-1,-2)$ denge noktaları alınırsa grafikler aşağıdaki gibi olur.

Şekil 6.4.1.



Şekil 6.4.2.



Sonuçlar

Bu çalışmada, daha önce çalışılmış olan fark sistemlerinden faydalanılarak lineer olmayan fark modellerinin çözümleri ve periyotlari incelenmiştir. Sonuçlar nümerik örneklerle desteklenmiştir.

Öneriler

Bu çalışmada incelenilen lineer olmayan fark sistemlerinin daha genel fark modelleri oluşturulabilir. Oluşturulan bu fark denklem sisteminin davranışları, kararlığı, denge noktaları incelenebilir.

7. KAYNAKLAR

Camouzis, E. and Papaschinopoulos, G. 2004, Global asymptotic behavir of positive solutions on the system of rational difference equations, $x_{n+1}=1+\frac{x_n}{y_{n-m}}$, $y_{n+1}=1+\frac{y_n}{x_{n-m}}$, $n\geq 0$, *Applied Mathematical Letters, vol.* 17 (no.6), 733-737.

Elaydi, 1995, An Introduction to difference equations, Springer.

Grove, E. A., Ladas, G., McGrath L. C. and Teixeria, C. T. 2001, Existence and behavior of solutions of a rational system, *Commun. Appl. Nonlinear Anal. 3(1),* 1-25.

Taşkara, N., Uslu, K. and Tollu, D.T. 2010, The periodicity and solutions of the rational difference equations with periodic coefficients, *Computers & Mathematics with Applications, Vol.62(4) 1807-1813.*

Çınar, C. and Yalcınkaya, İ. 2004, On the positive solutions of difference equation system $x_{n+1}=\frac{1}{z_n}$, $y_{n+1}=\frac{1}{x_{n-1}}$, $z_{n+1}=\frac{1}{x_{n-1}}$, *International Mathematical Journal,* (Vol.5), no.5.

Çınar, C. 2004, On the difference equation $x_{n+1}=\frac{x_{n-1}}{-1+x_n x_{n-1}}$, Applied Mathematics, and Computation,158(3), 813-816.

Clark, D. and Kulenovic, M. R. S. 2002, A coupled system of rational difference equations, *Computers and Analysis Applications* 43, 849-867.

Papaschinopoulos, G. And Schinas, C. J. 1998, On a system of two nonlinear difference equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 219, 415-426.*

Schinas, C. J. 1997, Invariants for difference equations and system of difference equations of rational form, *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 216, 164-179.*

Şimşek, D., Demir, B. and Çinar, C. 2009, On the solutions of the system of the difference equation $x_{n+1}=\max\left\{\frac{A}{x_n},\frac{y_n}{x_n}\right\}$, $y_{n+1}=\max\left\{\frac{A}{y_n},\frac{x_n}{y_n}\right\}$, Discrete *Dynamics in Nature and Society, Article ID 325296, 11 pages.*

Özban, A. Y. 2006, On the positive solutions of the system of rational difference equations $x_{n+1}=1+\frac{x_n}{y_{n-k}}$, $y_{n+1}=1+\frac{y_n}{x_{n-m}y_{n-m-k}}$, $n\geq 0$, *Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol.323, 126-32.*

Yalçınkaya, İ., Cinar, C. and Simsek, D. 2008, Global asymptotic stability of a system of difference equations, *Applicable Analysis, vol. 87(no.6), 677-687.*

Yang X. , Lai H, Evans D. J., Mebson G. M., 2004, Global asymptotic stability stability in a rational recursive sequence, *Applied Mathematics and Computation 158, 703-716.*

Ladas, G.1995, *Intervals for Generalized Lyness Equations Appl. 209-214.*

Kulenovic, M. R. S. and Ladas, G. 2002, Dynamics of second order rational difference equations with open problems and conjecture, Bocaraton, London.

Agarwal, R. P. 2000, Difference equations and inequalities, Marcel Dekker, Inc. , New York,

Kılıklı, G. 2011, Lineer Olmayan Fark Sisteminin Çözümleri ve Davranışları, S.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Esra ESEN
Uyruğu	**:**	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Manisa-29.12.1991
Telefon	**:**	05547353721
Faks	**:**	
e-mail	**:**	esraesen8@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	**Ömer Seyfettin Lisesi**	**2009**
Üniversite	:	**Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya**	**2013**
Yüksek Lisans	:	**Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya**	**2015**
Doktora	:	-	-

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2013-2014	Açı Dersaneleri	Öğretmen
2014-2015	Form Kampüs Dersaneleri	Öğretmen

YABANCI DİLLER

İngilizce

YAYINLAR

Uslu K., Esen E., The solutions and periods of two nonlinear discrete models, Asian Journal of Applied Sciences vol.3, no.1, 2015.