



T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELASTİK ZEMİNE OTURAN KİRİŞ MODELLERİNİN DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU VE BİLGİSAYAR DESTEKLİ ANALİZİ

Sema BODUR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz-2014
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Sema BODUR

Tarih:28.08.2014

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ELASTİK ZEMİNE OTURAN KİRİŞ MODELLERİNİN DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU VE BİLGİSAYAR DESTEKLİ ANALİZİ

Sema BODUR

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Galip OTURANÇ

2014, 64 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Galip OTURANÇ
Prof. Dr. Aşır GENÇ
Doç. Dr. Yıldıray KESKİN

Bu tezde çalışmasında elastik zemine oturan kirişlerin diferansiyel denklemleri incelendi. Konu ile ilgili genel tanımlamalar ve açıklamalar yapıldı. Problemle ilgili çalışmalar özetlendi, bu çalışmalar hakkında bilgi verildi. Zemin – kiriş çeşitleri için genel diferansiyel denklem oluşturuldu. Diferansiyel dönüşüm metodu (DTM) hakkında temel tanım ve teoremler verildi. Son olarak bu diferansiyel denklemlerin çözümü analitik ve diferansiyel dönüşüm metodu ile çözülerek Maple 13 programında grafiksel karşılaştırılmaları verildi.

Anahtar Kelimeler: Elastik eğri, Diferansiyel Dönüşüm Metodu, Kiriş, Maple 13

ABSTRACT

MS THESIS

COMPUTER – AIDED ANALYSIS OF BEAM MODELS RESTING ON ELASTIC FOUNDATIONS BY DIFFERENTIAL TRANSFORM METHOD

Sema BODUR

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN MATHEMATICS

Advisor: Prof. Dr. Galip OTURANÇ

2014, 64 Pages

Jury
Prof. Dr. Galip OTURANÇ
Prof. Dr. Aşır GENÇ
Doç. Dr. Yıldıray KESKİN

In this thesis, the study of differential equations of beams on elastic foundation was discussed. General definitions and descriptions concerning the subject were made. Studies about the problem were summerized, and information about these studies was provided. General differential equation was created for the varieties of ground-beam. Basic definitions and theorems concerning Differential Transform Method (DTM) were given. Lastly, the solutions of these differential equations were solved by analytical and differential transform method with their graphical comparisons given on Maple 13 program..

Keywords: Beam, Elastic curve, Differential Transform Method, Maple 13

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması, Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Prof. Dr. Galip Oturanç danışmanlığında hazırlanarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne yüksek lisans tezi olarak sunulmuştur.

Bu çalışma 6 bölümden oluşmaktadır. Tezin 1. bölümü Giriş, Problemin tanımına ve Kaynak Araştırması'na ayrılmıştır. 2. bölümde tez içerisinde kullanılacak genel bilgilere yer verilmiştir. 3. bölümde diferansiyel dönüşüm metodu tanıtılmıştır. 4. bölümde problemin genel diferansiyel denklemleri ve bunların dönüşüm karşılıkları verilmiştir. 5. bölümde verilen diferansiyel denklemeler için sayısal uygulamalara yer verilmiştir. Analitik ve dönüşüm sonuçları Maple13'de yapılan grafiklerle karşılaştırılmıştır. 6. bölüm sonuçlar ve öneriler kısmından oluşmaktadır. Ek-1 kısmında ise yazılan Maple13 kodunun bir örneği verilmiştir.

Yüksek lisans eğitimim boyunca bilgileriyle ve tecrübesiyle bana yol gösteren ,çalışma disiplini aşılayan, yapıcı önerileriyle çalışmaya büyük katkıda bulunan saygıdeğer danışmanım Sayın Prof. Dr. Galip Oturanç'a, sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Tez çalışması süresince tecrübelerinden yararlanma fırsatı veren ve birlikte çalışmaktan mutluluk duyduğum Sayın Doç. Dr. Kanat Burak Bozdoğan'a teşekkür ederim. Ayrıca Doç. Dr. Seval Çatal ve Doç. Dr. Vecdi Aytaç'a yardımlarından dolayı teşekkür ederim. Maddi ve manevi her zaman bana destek veren babam Orhan Bodur'a , Aileme ve benden desteğini hiç esirgemeyen, her zaman iyi niyetiyle yanımda olan sevgili kardeşim Semra Bodur'a en içten duygularımla teşekkür eder ve şükranlarımı sunarım.

Sema BODUR
KONYA-2014

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

SİMGELER ..... **ix**

1. GİRİŞ **1**

1.1. Problemin Tanımlanması 1
1.2. Problem Üzerine Yapılan Çalışmalar 2
1.3. Çalışmanın Amacı 5

2. ELASTİK ZEMİN MODELLERİ VE KİRİŞ TEORİLERİ **6**

2.1. Zemin Modelleri 6
2.1.1. Winkler zemini 6
2.1.2. Pasternak Zemini 8
2.2. Kiriş Teorileri 9
2.2.1. Euler - Bernoulli kiriş teorisi 9
2.2.2. Timoshenko Kiriş Teorisi 9

3. DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU (DTM) **10**

4. DENKLEMLERİNİN ÇIKARILMASI VE DTM KARŞILIKLARI **21**

4.1. Pasternak Zeminine Oturan Euler-Bernoulli Kirişi 25
4.2. Eksenel Yük Altında Winkler Zeminine Oturan Euler-Bernoulli Kirişi 25
4.3. Winkler Zeminine Oturan Euler - Bernoulli Kirişi 25
4.4. Eksenel Yük Altında Pasternak Zeminine Oturan Euler - Bernoulli Kirişi 26
4.5. Winkler Zeminine Oturan Timoshenko Kirişi 26
4.6. Eksenel Yük Altında Winkler Zeminine Oturan Timoshenko Kirişi 27
4.7. Pasternak Zeminine Oturan Timoshenko Kirişi 27
4.8. Sınır Koşulları 28
4.8.1. Sabit mesnet 28
4.8.2. Ankastre mesnet 29
4.8.3. Serbest uç 29

5. UYGULAMALAR **31**

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER **53**

6.1. Sonuçlar 53
6.2. Öneriler 53

EK-1 ..... **54**

KAYNAKLAR 60

ÖZGEÇMİŞ 64

SİMGELER

Simgeler

E : Kiriş elastisite modülü
I : Eylemsizlik momenti
G : Kayma modülü
A : Kiriş kesit alanı
dx : Kiriş elemanın uzunluğu
l : Kiriş boyu
k : Zemin yatak katsayısı
γ : Zemin karakterine bağlı boyutsuz sabit
$\bar{\gamma}_o$: Zemin karakterine bağlı boyutsuz sabit
M : Eğilme momenti
q_0 : Yayılı yük
ψ : Kesit eğimini ölçen bir koordinat
κ : Kesit şekline bağlı şekil değiştirme katsayısı
$GA\kappa$: Kayma rijitliği
N : Eksenel yük
B : Pasternak zeminine ait parametre (kayma)
P : Tekil yük
R : Eğrilik yarıçapı
∇^2 : Laplace operatörü
$y(x)$: Düşey doğrultudaki çökme
$C, D, F, G, H, J, K, L, P, R, S, T$: Sabitler

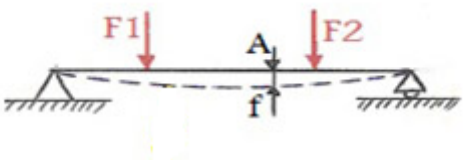
Kısaltmalar

DTM : Diferansiyel Dönüşüm Metodu

1. GİRİŞ

1.1. Problemin Tanımlanması

Eğilmeyle zorlanan bir kirişin, başlangıçta doğru olan ekseni, zorlanmadan sonra bir eğri halini alır. Bu eğri, ***elastik eğri*** olarak tanımlanır (İnan, 2001).



Şekil 1.1 Elastik Eğri

Elastik zemine oturan kiriş ve plak problemleri uygulama alanının genişliği nedeniyle oldukça fazladır. Demiryolları, füze ve roket rampaları olarak askeri alanda, uçak - uzay sanayisinde, makine mühendisliğinde çeşitli fabrika kren ve makinaların zemine sabitlenmesinde, diş hekimliği ve biyomekanikte, kıyı - liman yapılarında, sıvı ve gazların iletiminde kullanılan iletim hatlarında, uçak hangarlarında, soğuk bölgelerde yapılan binalarda, nükleer enerji santrallerinde, özel amaçlı (kargo ve süpersonik) uçakların inebileceği hava alanı inşaatlarında kullanılmaktadır (Bodur ve ark., 2012).

Elastik zemin problemlerinde kirişle zemin etkileşim içinde olduğundan, sistemin davranışını inceleyebilmek için öncelikle bazı kabullerin yapılması, yani bir zemin modelinin baştan kabul edilmesi gerekmektedir. Bunun nedeni, zeminin karışık ve belirsiz elastik özelliklere sahip olması ve plastik deformasyon yapabilmesidir. Elastik zemine oturan kirişlere ait çalışmalarda esas hipotez, genellikle zemin tepkileri hakkında yapılan hipotezler olmuştur (İnan, 2001). Elastik zemine oturan kirişlerin analizi üç aşamadan oluşur. Bu aşamalar; yapının davranışı ve zemin tipiyle ilgili temel kabullerin yapılması, zemin katsayısı, kiriş boyutu ve malzemesi gibi gerekli büyüklükleri seçilmesi ve son aşama olarak problemin matematiksel olarak kesin veya yaklaşık çözülmesidir.

Uygulama alanının çokluğu elastik zemin üzerine oturan kirişlerin detaylı bir biçimde incelenmesini gerektirmiştir. Bu incelemelerde zeminin karmaşık elastik ve

plastik deformasyon yapabilme özelliği bir takım zorluklar oluşturmuştur. Bundan dolayı elastik zemine oturan kirişlerin analizinden önce zeminle ilgili bir takım idealleştirmeler yapılması gerekmektedir. Bu da matematiksel çözümlerin doğruluğunu daima sınırlar. Elastik zemin üzerine oturan kirişler teorisi üstünde çalışmış araştırmacılar zeminin fiziksel ve mekanik özelliklerini çeşitli şekillerde düşünmüş ve modellemişlerdir. Değişik zemin modellerine göre değişik hipotezler vardır (Özdemir, 2009).

1.2. Problem Üzerine Yapılan Çalışmalar

Günümüze kadar elastik zemine oturan kirişlerin ve plakların hesabı çeşitli sayısal yöntemler kullanılarak yapılmıştır. Bu çalışmalarda daha çok, sonlu farklar, sonlu elemanlar, sınır elemanlar, Ritz, Galerkin yöntemi, sayısal ya da çok ölçekli pertürbasyon yöntemlerin kullanıldığı perturbasyon teknikleri, kollokasyon, varyasyonel teknikler ve seriler ile yapılmış çözümleri içermektedir (Civalek, 2009).

M. Hetenyi 1946'da Winkler zemin tipi üzerinde araştırma yapmıştır. Kitabında yatak katsayısının sayısal değerleri ile ilgili hiçbir bilgi vermemiş, daha ziyade kesin çözümler üzerinde durmuştur. Ancak kesin çözümler zaman kaybına yol açtığı için, birçok araştırmacı bu zaman kaybını yok etmek amacıyla daha hızlı sonuç veren çeşitli idealleştirmeler ve daha genel olan başka metotlar geliştirerek problemleri çözmeye çalışmışlardır.

M. İnan 1964'de başlangıç değerleri metodu ile daire eksenli çubuklar için taşıma matrisini elde etmiştir. Fakat elastik zemine oturan daire eksenli çubuk olması halinde 6. dereceden bir diferansiyel denklemin karakteristik denkleminin köklerini kapalı olarak bulamadığı için bu durumun taşıma matrisine ulaşamamıştır. Ama elastik zemine oturan doğru eksenli çubuklar için 1996'da kapalı bir taşıma matrisi vermiştir.

C.K. Mirand ve K. Nair 1966'da sonlu uzunlukta kirişlerin diferansiyel denkleminin özel fonksiyonlarla çözümünü yaparak buna ilişkin sayısal örnekler vermişlerdir.

N. Gajendar 1967'de dairesel ve dikdörtgen plakların non-lineer titreşim frekanslarının hesaplandığı çalışmada Galerkin metodu kullanılmıştır.

J.H. Munther 1970'de sonlu ve sonsuz uzunluktaki kirişlerin davranış şekillerini sonlu elemanlar yöntemi ile incelemiş ve elde edilen sonuçları, Durelli ve Parks'ın

yaptığı fotoelastik çalışmadan elde edilen sonuçlarla birlikte çizilen eğrilerin üzerinde göstermiştir.

İki parametreli zemin modelinin dikkate alındığı çalışmada T.Y. Yang 1972, ince dikdörtgen plakların lineer statik hesabını yapmış ve çeşitli noktalardaki düşey deplasmanlar ile eğilme değerleri elde edilmiştir. Sonlu elemanlar metodu ile elastik zemine oturan plakların lineer statik hesabı yapılmış ve eğilme momenti ile deplasmanlar bulunmuştur .

E. Kıral 1974'de elastik zemine oturan daire eksenli çubuklara ait genel denklemleri kanonik bir hale indirgeyerek kapalı bir çözüme ulaşmışlardır.

S. Datta 1976'da tarafından yapılan çalışmada elastik zemine oturan daire ve dikdörtgen şeklinde geometrilere sahip plakların lineer olmayan titreşimi analitik olarak incelenmiştir. Galerkin metodu ile lineer olmayan titreşim frekansları elde edilmiştir. Basit ve ankastre mesnet koşulları için çözüm yapılmıştır. İki parametreli elastik zemine oturan ince plakların statik hesabı sınır elamanlar metodu ile yapılmıştır. Dördüncü mertebeden olan sisteme ait yönetici diferansiyel denklem her biri ikinci mertebeden olan Poisson ve Helmholtz gibi bilinen iki forma indirgenmiş ve sınır elemanlar metodu ile çözülmüştür.

M.S. Cheung 1978'de tarafından yapılan çalışmada elastik zemine oturan dikdörtgen plakların sonlu elemanlar ile çözümü sunulmuştur. Lineer statik analizin yapıldığı çalışmada eğilme momentleri ve gerilmeler hesaplanmıştır.

Y. Nath 1979'da çalışmada elastik zemine oturan dikdörtgen plakların lineer olmayan titreşimi incelenmiştir. Plağın lineer olmayan dinamik hesabı için gerekli hareket denklemi Von- Karman plak denklemi olarak elde edilmiş ve bu denklem sonlu farklar metodu ile çözülmüştür.

Massalas ve Kafousias 1979'da yaptıkları çalışmada, kübik nonlineeriteye sahip zemine oturan basık silindirik panelin eğilmeli titreşimi incelenmiştir. Büyük deplasman teorisi ile elde edilen yönetici denklem çok ölçekli perturbasyon tekniği ile lineerleştirilmiş ve elde edilen denklem Galerkin metodu ile çözülmüştür.

Bakioğlu ve Özkan 1980'de yaptıkları çalışmada temellerin çökmeleri ile eğilme momenti arasındaki diferansiyel denklemi, sonlu farklar şeklinde yazıp, taban basıncının bu noktalar arasında parabolük değiştiğini varsaymıştır.

B.Y. Ting 1982'de Winkler zemini üzerindeki elastik mesnetli sonlu kirişin diferansiyel denkleminin bir çözümünü ortaya koymuştur.

Y. Nath ve R.K. Jain 1983'de tarafından yapılan çalışmada Winkler-Pasternak elastik zemine oturan basık küresel kabuğun lineer olmayan dinamik analizi sürekli adım yük fonksiyonu için elde edilmiştir. Kabuk yönetici denklemi Donnel kabuk teorisi ile çıkartılmıştır. Elde edilen kısmi türevli nonlineer hareket denklemi Taylor serisine açılarak lineerleştirilmiştir. Daha sonra konum (uzay) değişkenleri Chebyshev serileri, zaman değişkeni ise Houbolt sayısal integrasyon metodu yardımıyla integre edilerek lineer bir denklem takımına dönüştürülmüş ve çözülmüştür.

J.T. Katsikadelis ve A.E. Armenakas 1984'de çalışmalarında sınır entegral denklemlerinin nümerik değerlendirilmesi ile sınır entegral denklem metodunu, elastik zemine oturan herhangi bir şekildeki basit destekli plakların analizinde uygulamışlardır. Elde edilen sayısal sonuçlar, analitik çözümlerden elde edilen sonuçlarla karşılaştırıldığında, sınır entegral denklem metodunun daha avantajlı olduğu ortaya konmuştur.

P.C. Dumir ve A. Bhaskar 1988'de Winkler ve Pasternak tipi elastik zemine oturan dikdörtgen plakların lineer olmayan statik hesabını yapmışlardır. Çalışmada ortogonal nokta kollokasyon metodunu kullanmışlardır.

D. Karamanlidis ve V. Prakash 1988'de iki parametreli elastik yarı düzleme oturan kirişlerin burkulma ve titreşimini analitik ve sonlu elemanlar yöntemlerinden yaralanarak incelemiş ve birtakım mesnetlenme şekilleri için öz frekansları bulmuşlardır.

Z. Celep 1988'de Winkler zemini üzerinde dikdörtgensel elastik plakların davranışını analiz etmiştir. Galerkin metodunu kullanarak problem cebirsel denklem sisteminin çözümüne indirgenmiştir.

D.A. Dillard 1989'da tarafından yapılan çalışmada Winkler elastik zemine oturan dikdörtgen ve kare plakların eğilme hesabı analitik olarak gerçekleştirilmiştir. Sistem yönetici denklemi 6. mertebeden bir diferansiyel denklem olup çözüme seriler yardımıyla ulaşılmıştır. Çalışmada tekil yük ve tekil moment etkileri dikkate alınmıştır. Lineer vizkoelastik zemine oturan dairesel plakların eğilme hesabı Laplace dönüşümü yardımıyla gerçekleştirilmiştir .

Y.C. Lai ve arkadaşları 1992'de elastik zemine oturan kirişlerin dinamik analizini, kütle ve rijitlik matrislerinin hesap edilmesi amacıyla yeni bir formülasyon geliştirerek, sonlu elemanlar metoduyla yapmış ve kiriş doğal frekansını elde etmişlerdir.

Qin 1994'de yaptığı çalışmasında kare bir plağın çeşitli noktalarındaki deplasmanları ve eğilme momentleri Winkler ve Pasternak zemin türü için incelenmiştir. Çalışmada Hibrit bir sonlu eleman modeli önerilmiştir.

G.M. Özdoğan 1995'de sadece basınç aktaran iki parametreli elastik bir Pasternak zeminine oturan, ağırlıksız dairesel bir plağın tekil, yayılı ve şerit düşey yükler altındaki davranış şekillerini incelemiştir. Yükleme durumlarına bağlı olarak ortaya çıkan bölgeler göz önünde bulundurularak yönetici denklemler bulunmuş ve çözümler karmaşık argümanlı Bessel fonksiyonlarından yaralanarak, plağın yarıçapına göre tam batma ve batmama durumları için incelenmiştir.

H.S. Shen 2000'de tabakalı kompozit dikdörtgen plakların lineer olmayan eğilme hesabı, üniform yayılı yük ve termal etkiler dikkate alınarak yapılmıştır. Kayma etkilerini denklemlere ilave eden Pasternak zemin modeli (iki parametreli) kullanılan çalışmada, sayısal çözümleme için Galerkin-Perturbasyon kombinasyonu kullanılmıştır.

Diferansiyel quadrature metotlarının herhangi biriyle çözülmüş elastik zemine oturan kabuk problemine literatürde rastlanmamıştır. Liu 2000 yılında yaptığı çalışmada Winkler elastik zemine oturan kalın dikdörtgen plakların Reissner plak teorisine göre elde edilen yönetici denklem diferansiyel quadrature elemanlar yöntemi ile lineer statik hesabını incelemiştir.

R. Buczkowski ve W. Torbacki 2001 yılında Reissner - Mindlin plak teorisi kullanılarak iki parametreli elastik zemine oturan dikdörtgen plaklar için 9 düğüm noktalı bir katı (solid) sonlu eleman geliştirilmiş ve lineer statik analiz yapılmıştır.

1.3. Çalışmanın Amacı

Bu tez çalışmasında, elastik zemin üzerine oturan kiriş modelleri problemleri incelenmiştir. Çalışmada, en yaygın olarak kullanılan Winkler ve Pasternak zeminleri, bu zeminler üzerine oturan Euler-Bernouilli ve Timoshenko kirişler için genel diferansiyel denklemi oluşturulmuştur. Ele alınan problemlerdeki temel denklemlerden elastik eğri fonksiyonları elde edilmiş ve bilinmeyen sabitler sınır koşulları yardımıyla belirlenmiştir. Bu denklemlerin çözümünde Diferansiyel Dönüşüm Metodu (DTM) kullanılarak hesap kolaylığı sağlanmıştır. Ayrıca yapılan uygulamada modeller için aynı koşullar altında çökmeler DTM ile hesaplanmıştır. Hesaplamalarda Maple13 programı kullanmıştır. Burada yapılan kabuller; malzeme lineer elastik olarak alınmış, burulma ve dinamik etkiler ihmal edilmiştir.

2. ELASTİK ZEMİN MODELLERİ VE KİRİŞ TEORİLERİ

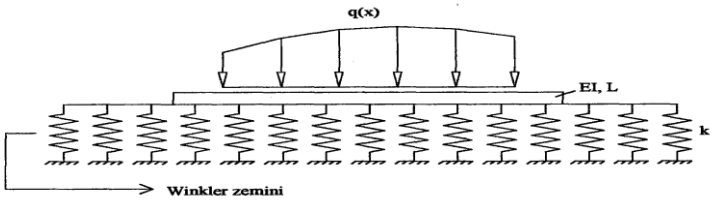
2.1. Zemin Modelleri

2.1.1. Winkler zemini

Tek parametreli zemin modeli olan Winkler zemin modeli 1867 yılında Winkler tarafından ortaya konmuştur. Winkler çalışmasında, zeminin birbirine sonsuz yakın, elastik ve lineer yaylardan oluştuğunu kabul etmiştir (Şekil 2.1). Bu hipotez oldukça basit olup, kiriş ve plak problemlerinde geniş bir uygulama alanı bulmuştur. Buna göre *w(x, y)* düşey doğrultuda çökme olarak alınırsa, zemin direnci

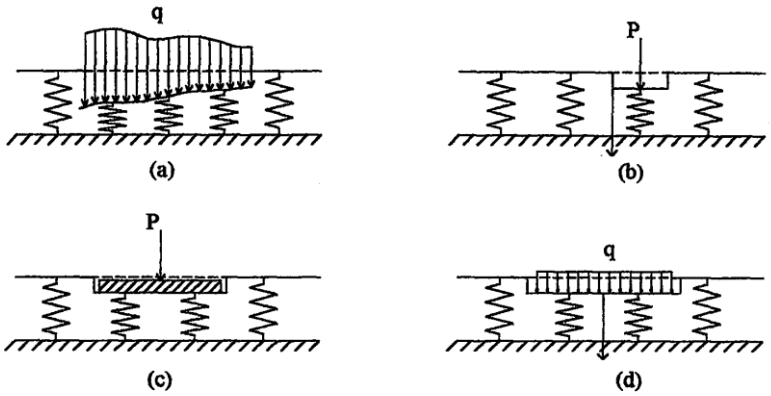
$$p(x, y) = k\, w(x, y) \tag{2.1}$$

olarak alınır. (2.1) denklemindeki *k*, elastik yay katsayısı olup uygulamada, yatak katsayısı veya zemin parametresi olarak adlandırılır. Bu parametre, çökme bir birim olduğunda, birim genişlikteki birim alana gelen tepki kuvvetini ifade eder. Winkler hipotezine göre, zeminin homojen olmamasından dolayı, yatak katsayısı noktadan noktaya değişebilir. Bu nedenle yatak katsayısı bir yatay düzlemin çeşitli noktalarında, birbirinden farklı değerler alabileceği gibi, derinliğin artması ile de değişebilir. Diğer bir husus da, zemine etkiyen kuvvetlerin yalnız etkidiği noktada şekil değiştirme oluşturmasıdır. Bu durumda zemini oluşturduğu kabul edilen, sonsuz yakın yayların yalnız doğrudan yüklendiklerinde çöküp tepki gösterdikleri, ancak her yayın komşu yayların yüklenme ve çökmesinden etkilenmediği öngörülmektedir. Zemin tamamen süreksiz bir ortam olarak değerlendirilmektedir (Kılıç, 2006). Zeminin fiziksel özellikleri böyle basit bir bağıntı ile ifade edilmekten daha karışık bir durum arz eder. Yalnız belirli durumlar için zeminin elastik bir ortam olarak davrandığı görülür.



Şekil 2.1. Winkler Zemini

Winkler modelinin en büyük eksikliği yaylar arasındaki etkileşimi dikkate almaması, yani yükün etkidiği yay bir miktar çökerken diğer yaylarda bir değişiklik olmadığını, zemine etkiyen kuvvetlerin sadece etki ettikleri noktada şekil değişimi yaptığını kabul etmesidir (Şekil 2.2). Bu durumda elastik zeminin üzerindeki herhangi bir yapı elemanının yapmış olduğu yer değiştirmeye yüklü alanın dışındaki zeminin etkisi olmamaktadır. Oysa elastik tabakanın yüzeyindeki bir noktada oluşan yer değiştirme sadece o noktaya etki eden kuvvetten değil aynı zamanda diğer noktalardaki kuvvetlerden de etkilenmektedir (Özgan, 2000).



Şekil 2.2. Winkler modeline göre yer değiştirme durumlar
(a) Düzgün yayılı olmayan yük altında zeminin yer değiştirme durumu
(b) Tekil yük altında zeminin yer değiştirme durumu
(c) Rijit bir tabaka ile aktarılan yük altında zeminin yer değiştirme durumu
(d) Düzgün yayılı yük altında zeminin yer değiştirme durumu (Özgan, 2000)

Mühendislikte Winkler hipotezine dayanarak iyi sonuçlar veren bazı önemli problemler vardır. Bina döşemeleri ve köprü tabliyelerinin karakteristik konstrüksiyonu olan ızgara sistemler, bir ve iki doğrultuda sürekli temeller, gemi kaburgaları, dönel kabuklar, yatay yük etkisindeki düşey kazıklar ve palplanşlar bunlara bazı önemli örneklerdir. Özellikle temel sistemlerinde Winkler hipotezini doğrulayan bazı önemli hususlar görülmüştür. Bu düşüncelerden hareketle, basitliğine rağmen Winkler hipotezinin, gerçek temel zemini durumunu bazı karmaşık bağıntılarla verilen hipotezlere göre gerçeğe daha yakın bir şekilde ifade ettiği sonucuna varılabilir (Keskinel,1970).

2.1.2. Pasternak Zemini

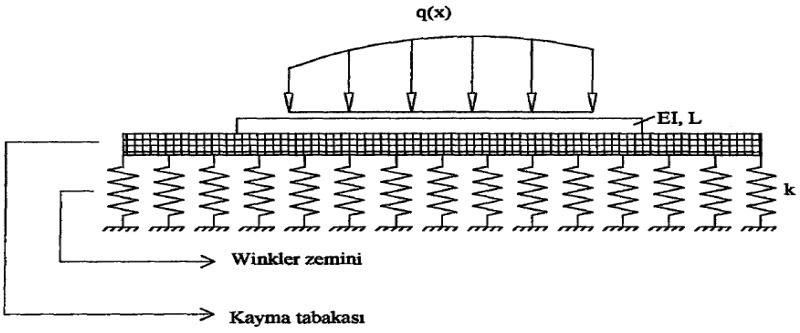
Pasternak zemini kesme etkisininde dikkate alındığı iki parametreli bir zemin türüdür. İlk parametre, Winkler modelinde olduğu gibi yay rijitliğini temsil ederken, ikinci parametre lineer- elastik yayların etkileşimini temsil etmektedir (Şekil 2.3).

Pasternak modelinde kirişte eğilme ihmal edilirken, çökmenin tamamıyla kirişin kayma deformasyona bağlı olarak ortaya çıktığı kabul edilmektedir (Civalek, 2004). Pasternak modeli, iki boyutlu modeller arasında en yaygın olarak kullanılanlardan biridir. Bu modele göre zeminin tepki fonksiyonu, ∇^2 Laplace operatörünü, G elastik zeminin kayma modülünü göstermek üzere

$$p(x,y) = k\,w(x,y) - G\nabla^2 w(x,y) \tag{2.2}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{2.3}$$

ifadesiyle verilmektedir.



Şekil 2.3. Pasternak Modeli

İki parametreli modellerin dezavantajlarına değinecek olursak; statik modellerdir, zemindeki dinamik etkileri dikkate almazlar. Sadece zeminin düşey yöndeki direncini tanımlarlar. Zemin içerisindeki değişimi dikkate almazlar. Modeldeki parametreler gerçek olmayan kuramsal ifadelerdir. Bu parametrelerin alabileceği değerlerle zemin özellikleri arasında kesin bir ilişki yoktur (Özgan, 2000).

2.2. Kiriş Teorileri

Eksenine düşey yönde etkiyen yükleri taşıyan, kalınlık ve genişlikleri uzunluklarına göre daha az olan narin yapı elemanlarına **kiriş** denir.

Yüklemeden sonra kirişin düz ekseni çökme eğrisi denen bir eğriye eğilir. Bu olaya **kirişin eğilmesi** denir.

2.2.1. Euler - Bernoulli kiriş teorisi

Kübik yer değiştirmeleri esas alan deplasman yöntemi olan ve basitliği nedeniyle mühendisler tarafından en çok kullanılan teoridir. Burada kayma şekil değiştirmeleri dikkate alınmaz. Yani şekil değiştirmeden önce ortalama düzleme dik olan kesitin şekil değişiminden sonra da dik kaldığı varsayılır.

2.2.2. Timoshenko Kiriş Teorisi

Bu teori kayma gerilmelerinin etkilerini göz önüne alır. Yani şekil değiştirmeden önce ortalama düzleme dik olan kesit şekil değişiminden sonra bu düzlemle bir açı yapar, ancak düzlem kesit yine düzlem kalır (Bernoulli-Navier hipotezi). Timoshenko'nun hesap yöntemi Euler hesap yönteminde ihmal edilen kesme kuvvetinin de işe katılmasıyla geliştirilmiştir. Özellikle kısa ve yüksek kirişler, yani açıklık/yükseklik oranı düşük olan kirişler için Euler-Bernoulli teorisine göre daha doğru sonuçlar verir (Yazıcı, 2009).

3. DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU (DTM)

Diferansiyel çözüm yöntemi lineer, lineer olmayan, adi türevli, kısmı türevli, başlangıç değer çözüm problemleri, sürekli olmayan sınır şartlarına sahip problemler ve *n* boyutlu kısmı diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılabilir. Bu yöntem Taylor serisi açılımına dayanan bir seri çözüme dayalı dönüşüm yöntemidir. Bu sayede denklem sistemlerini daha hızlı bir şekilde yakınsak sonuçları elde edilebilmektedir. Belirli dönüşüm kuralları uygulanır. Diferansiyel denklemler ve sınır koşulları esas fonksiyonun diferansiyel dönüşümü olan bir dizi denkleme dönüşür. Elde edilen denklemlerin çözümü problemin sonucunu verir. Metodun en önemli özelliklerinden biri diferansiyel denklemleri cebirsel denklemlere dönüştürüyor olmasıdır ve elde edilen cebirsel denklemler de bazı basit işlemlerle kolaylıkla sistematik bir şekilde çözülebilmesidir (Keskin, 2005; Özkan ve Keskin, 2005).

Diferansiyel Dönüşüm Metodu (DTM) ilk olarak Zhou (1986) tarafından ortaya konmuştur. Zhou, bu metodu elektrik yayılım analizinde hem lineer hem de lineer olmayan başlangıç değer problemlerinin çözümünde kullandı. Daha sonra Chen (1999), lineer ve lineer olmayan başlangıç değer problemleri için kapalı seri çözüm formları elde ederek metodu geliştirdi.

Bir boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi adi türevli diferansiyel denklemlerin ve denklem sistemlerinin çözümü için, iki ve üç boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi kısmi türevli diferansiyel denklemlerin ve denklem sistemlerinin çözümü için *n* boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi ise denklem sistemlerini ve bazı kısmi türevli diferansiyel denklemleri çözmekte kullanılır (Keskin, 2005; Eser, 2008).

Tanım :

$y: I \to R$ fonksiyonu; $I = (a,b) \subset R$ biçiminde tanımlanan I 'da analitik bir fonksiyon olsun. Analitik fonksiyonun tanımından, $y(x)$ fonksiyonunun herhangi bir $x_0 \in I$ noktası civarındaki kuvvet serisi

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k (x - x_0)^k \tag{3.1}$$

dir. Bu seri x_0 noktası civarında $y(x)$'e yakınsamaktadır. Kuvvet serisinin ve analitik fonksiyonunun sonsuz diferansiyellenebilir olmasından;

$$P_k = \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!} \tag{3.2}$$

biçimindedir. (3.1) ve (3.2) 'den

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{3.3}$$

dir. Bu şartlar altında $y(x)$ orijinal fonksiyonunun ; $Y(k)$ Diferansiyel Dönüşümü,

$$Y(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k y(x)}{dx^k}\right]_{x=x_0} \tag{3.4}$$

biçiminde tanımlanır. $Y(k)$ 'nın ters diferansiyel dönüşümü ise:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k \tag{3.5}$$

olup, (3.4) ve (3.5)'den;

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k y(x)}{dx^k}\right]_{x=x_0} x^k \tag{3.6}$$

olur.Yukarıda görüldüğü gibi diferansiyel dönüşüm metodu Taylor seri açılımı yaklaşımından elde edilir (Özkan, 2005).

Bu tanımdan hareketle aşağıdaki teoremleri verebiliriz :

Teorem 3.1.1. [Chen, 1996]

Tek bileşenli $w(x), u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x) = u(x) \pm v(x) \tag{3.7}$$

ise sırasıyla $W(k)$, $U(k)$ ve $V(k)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k) = U(k) \pm V(k) \tag{3.8}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.1.2. [Chen, 1996]

Tek bileşenli $w(x)$ ve $u(x)$ fonksiyonlarını alalım . $c \in R$ olmak üzere eğer

$$w(x) = c\,u(x) \tag{3.9}$$

ise sırasıyla $W(k)$ ve $U(k)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k) = cU(k) \tag{3.10}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.1.3. [Chen, 1996]

Tek bileşenli $w(x)$ ve $u(x)$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x) = \frac{d}{dx}u(x) \tag{3.11}$$

ise sırasıyla $W(k)$ ve $U(k)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k) = (k+1)U(k+1) \tag{3.12}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.1.4. [Chen, 1996]

Tek bileşenli $w(x)$ ve $u(x)$ fonksiyonlarını alalım. $r \in N$ olmak üzere eğer

$$w(x) = \frac{d^r u(x)}{dx^r} \tag{3.13}$$

ise sırasıyla $W(k)$ ve $U(k)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k) = (k+1)(k+2)...(k+r)U(k+r) = \frac{(k+r)!}{k!}U(k+r) \tag{3.14}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.1.5. [Chen, 1996]

Tek bileşenli $w(x)$ ve $u(x)$ fonksiyonlarını alalım. $r \in N$ olmak üzere eğer

$$w(x) = u(x)v(x) \tag{3.15}$$

ise sırasıyla $W(k)$, $U(k)$ ve $V(k)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k) = \sum_{r=0}^{k} U(r)V(k-r) \tag{3.16}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.1.6. [Chen, 1996]

Tek bileşenli $w(x)$ fonksiyonunu alalım. $m \in N$ olmak üzere eğer

$$w(x) = x^m \tag{3.17}$$

ise sırasıyla $W(k)$ verilen fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$W(k) = \delta(k-m) = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & aksi\ halde \end{cases} \tag{3.18}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.1.7. [Chen, 1996]

Tek bileşenli $w(x)$, $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x) = u(x)\frac{d^2}{dx^2}v(x) \tag{3.19}$$

ise sırasıyla $W(k), U(k)$ ve $V(k)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k) = \sum_{r=0}^{k}(k-r+2)(k-r+1)U(r)V(k-r+2) \tag{3.20}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.1.8. [Chen, 1996]

Tek bileşenli $w(x)$, $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x) = \frac{d}{\partial x} u(x) \frac{d}{\partial x} v(x) \tag{3.21}$$

ise sırasıyla $W(k)$, $U(k)$ ve $V(k)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k) = \sum_{r=0}^{k} (r+1)(k-r+1)U(r+1)V(k-r+1) \tag{3.22}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.1.9. [Chen, 1996]

Tek bileşenli, $u(x)$, $v(x)$ ve $s(x)$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x) = u(x)v(x)s(x) \tag{3.23}$$

ise sırasıyla $W(k)$, $U(k)$, $V(k)$ ve $S(k)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k) = U(k) \otimes V(k) \otimes S(k) = \sum_{r=0}^{k} \sum_{t=0}^{k-r} U(r)V(t)S(k-r-t) \tag{3.24}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.1.10. [Chen, 1996]

Tek bileşenli $w(x)$, $u(x)$, $v(x)$ ve $s(x)$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x) = u(x)v(x)\frac{d^2}{dx^2}s(x) \tag{3.25}$$

ise sırasıyla $W(k)$, $U(k)$, $V(k)$ ve $S(k)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k-r}(k-r-t+2)(k-r-t+2)U(r)V(t)S(k-r-t+2) \tag{3.26}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.1.11. [Chen, 1996]

Tek bileşenli $w(x)$ fonksiyonunu alalım. $\lambda \in R$ olmak üzere eğer

$$w(x) = a^{\lambda x} \tag{3.27}$$

ise $W(k)$ verilen fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$W(k) = \frac{\lambda^k (\ln a)^k}{k!} \tag{3.28}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.1.12. [Abdel-Halim, 2004]

Tek bileşenli $w(x)$ fonksiyonunu alalım. $\lambda \in R$ olmak üzere eğer

$$w(x) = e^{\lambda x} \tag{3.29}$$

ise $W(k)$ verilen fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$W(k)=\frac{\lambda^k}{k!} \tag{3.30}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.1.13. [Oturanç ve Keskin, 2011]

Tek bileşenli $w(x)$ fonksiyonunu alalım. $\lambda\in R$ olmak üzere eğer

$$w(x)=e^{\lambda x+b} \tag{3.31}$$

ise $W(k)$ verilen fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$W(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^b \tag{3.32}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.1.14. [Oturanç ve Keskin, 2011]

Tek bileşenli $w(x)$ fonksiyonunu alalım. Eğer

$$w(x)=sh(\lambda x) \tag{3.33}$$

ise $W(k)$ verilen fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$W(k)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^k}{k!} & k \text{ tek ise}\\ 0 & k \text{ çift ise}\end{cases} \tag{3.34}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.1.15. [Oturanç ve Keskin, 2011]

Tek bileşenli $w(x)$ fonksiyonunu alalım. Eğer

$$w(x) = ch(\lambda x) \tag{3.35}$$

ise $W(k)$ verilen fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$W(k) = \begin{cases} 0 & k \text{ tek ise} \\ \dfrac{\lambda^k}{k!} & k \text{ çift ise} \end{cases} \tag{3.36}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.1.16. [Abdel-Halim, 2004]

Tek bileşenli $w(x)$ fonksiyonunu alalım. $a,b \in R$ olmak üzere eğer

$$w(x) = \sin(ax+b) \tag{3.37}$$

ise $W(k)$ verilen fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$W(k) = \frac{a^k}{k!}\sin\left(\frac{\pi}{2}k + b\right) \tag{3.38}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.1.17. [Abdel-Halim, 2004]

Tek bileşenli $w(x)$ fonksiyonunu alalım. $a,b \in R$ olmak üzere eğer

$$w(x) = c\cos(ax+b) \tag{3.39}$$

ise $W(k)$ verilen fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$W(k)=\frac{a^k}{k!}\cos\left(\frac{\pi}{2}k+b\right) \tag{3.40}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.1.18. [Arikoglu, 2005]

Tek bileşenli $w(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarını alalım. $k\in N$ olmak üzere eğer

$$w(x)=\int_{x_0}^{x}u(t)dt \tag{3.41}$$

ise $W(k)$ ve $U(k)$ verilen fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$W(k)=\frac{U(k-1)}{k} \tag{3.42}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.1.19. [Arikoglu, 2005]

Tek bileşenli $w(x)$, $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarını alalım. $k\in N$ olmak üzere eğer

$$w(x)=v(x)\int_{x_0}^{x}u(t)dt \tag{3.43}$$

ise $W(k)$, $U(k)$ ve $V(k)$ verilen fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k)=V(k)\otimes\frac{U(k-1)}{k} \tag{3.44}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.1.20. [Arikoglu, 2005]

Tek bileşenli $w(x)$, $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x) = \int_{x_0}^{x} u(t)v(t)dt$$

ise $W(k)$, $U(k)$ ve $V(k)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k) = \frac{U(k-1) \otimes V(k-1)}{k} \tag{3.45}$$

eşitliği sağlanır.

4. DENKLEMLERİNİN ÇIKARILMASI VE DTM KARŞILIKLARI

Şekil 4.1 (a)'da görüldüğü gibi kesme kuvveti, eğilme momenti ve yayılı yüke maruz kalan bir kiriş elemanını gözönüne alalım. Kirişin kütle merkezinin yer değiştirmesi "*y*" ile ölçülmekte ve kütle merkezi ekseninin eğimi de dy/dx ile verilmektedir. Eğilme nedeniyle oluşan kesit eğimini ölçmek için yeni bir koordinat ψ tanımlanmaktadır. Bernoulli-Euler gelişiminde, bu aynı zamanda kütle merkezi ekseninin eğimi dy/dx ile aynıdır, dolayısıyla özel bir koordinat gereksinilmemektedir. Kütle merkezi eksenin eğimi dy/dx ile gösterilmektedir. Bunun iki bileşeninin olduğu göz önünde tutulmaktadır. İlki, bahsedildiği gibi eğilme etkisinden kaynaklanan ψ 'dır. İkincisi ise, kayma etkisinden kaynaklanan $\bar{\gamma}_0$ 'dır.

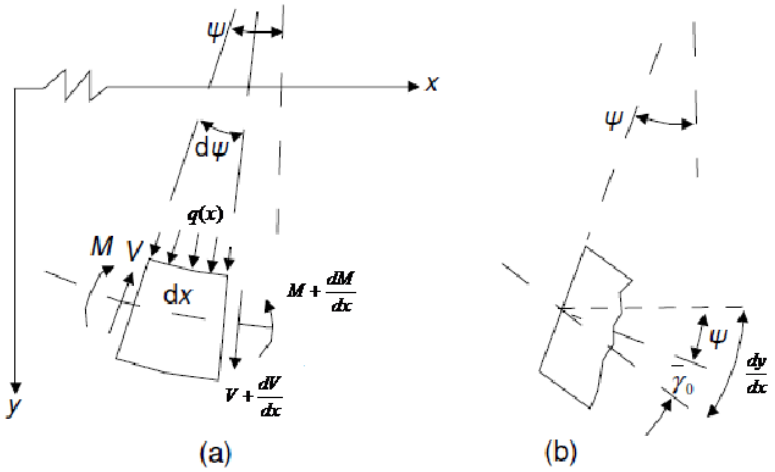
Böylece;

$$\frac{dy}{dx} = \psi + \bar{\gamma}_0 \tag{4.1}$$

yazılır. Bu gelişmede düzlem kesitlerin yine düzlem kaldığının farzedildiğini fakat kütle merkezi düzlemine dik olmadığını belirtmek gerekir. Eğilme momenti ve eğrilik arasındaki ilişki;

$$\frac{M}{EI} = \frac{-d\psi}{dx} \tag{4.2}$$

ile ifade edilir. Bu ifade $Rd\psi = dx$ ifadesinden türetilmektedir. Burada R eğrilik yarıçapıdır. Bununla birlikte $1/R = d\psi/dx$ 'dir. (4.2) ifadesi Bernoulli-Euler için (4.1) ifadesinin benzeridir.



Şekil 4.1. (a) Yüke maruz kalan kirişin diferansiyel elemanı ve **(b)** ilave kayma deformasyonun kinematiksel detayları

$\bar{\gamma}_0$ 'ı tanımlamak için, Timoshenko tezinin esası şu şekildedir. Kesitteki kesme kuvveti, aşağıdaki ifadede görüldüğü gibi, kayma deformasyonu cinsinden verilmektedir.

$$V = \int_A \tau dA = G \int_A \bar{\gamma} dA \tag{4.3}$$

Eğer $\bar{\gamma}_o$ kütle merkezi eksenindeki kayma deformasyonu ise, $G\bar{\gamma}_0 A$ kesme kuvvetini verecektir. Bununla birlikte, bu değer kesit boyunca değişken gerilme dağılımı integrasyonu ile elde edilen değere (4.3) eşit olmayacaktır. Bu değeri dengeye getirmek için , bir uyum katsayısı κ tanımlanmaktadır.

$$V = G \int_A \bar{\gamma} dA = (G \bar{\gamma}_0 A)\kappa \tag{4.4}$$

κ 'nın değeri kesitin şekline bağlı olacaktır ve her kesit için genellikle gerilme analizi yoluyla tanımlanmalıdır. Bu parametre genellikle (Timoshenko) kayma katsayısı olarak tanımlanmaktadır. $\bar{\gamma}_o$ için (4.1) eşitliğinden elde edilen ifadenin (4.4)'de yerine konulması;

$$V = AG\kappa(\frac{dy}{dx} - \psi) \tag{4.5}$$

eşitliğini verir (Develi, 2007). (4.5) ifadesine eksenel kuvvetin etkisi katılırsa;

$$V = GA\kappa(\frac{dy}{dx} - \psi) - N\frac{dy}{dx} \tag{4.6}$$

yazılır. Hareket denklemi düşey doğrultuda yazıldığında;

$$-V + (V + \frac{dV}{dx}dx) + qdx = 0 \tag{4.7}$$

ya da

$$\frac{dV}{dx} + q = 0 \tag{4.8}$$

elde edilir. Burada ki V yerine (4.6)'daki değeri yazılırsa;

$$GA\kappa(\frac{d\psi}{dx} - \frac{d^2y}{dx^2}) + N\frac{d^2y}{dx^2} = q \tag{4.9}$$

elde edilir. Aynı zamanda

$$GA\kappa(\frac{dy}{dx} - \psi) + EI\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0 \tag{4.10}$$

yazılır. Pasternak zemini için (Taha ve Nassar, 2014);

$$q(x) = -ky + B\frac{d^2y}{dx^2} + q_0 \tag{4.11}$$

ifadesini (4.9) 'da yerine yazılırsa;

$$GA\kappa\left(\frac{d\psi}{dx}-\frac{d^2y}{dx^2}\right)+(N-B)\frac{d^2y}{dx^2}+ky=q_0 \tag{4.12}$$

elde edilir. Buradan $\frac{d\psi}{dx}$ çekilirse;

$$\frac{d\psi}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{(N-B)}{GA\kappa}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{ky}{GA\kappa}+\frac{q_0}{GA\kappa} \tag{4.13}$$

yazılır. (4.10) denklemi bir kez daha *x*'e göre türetilirse;

$$GA\kappa\left(\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{d\psi}{dx}\right)+EI\frac{d^3\psi}{dx^3}=0 \tag{4.14}$$

(4.13) ifadesindeki $\frac{d\psi}{dx}$ iki kez *x*'e göre türetilirse;

$$\frac{d^3\psi}{dx^3}=\frac{d^4y}{dx^4}-\frac{(N-B)}{GA\kappa}\frac{d^4y}{dx^4}-\frac{k}{GA\kappa}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{GA\kappa}\frac{d^2q_0}{dx^2} \tag{4.15}$$

elde edilir. (4.15) ve (4.13) ifadeleri (4.14) denkleminde yerine yazılırsa genel denklem;

$$EI\left[1-\frac{(N-B)}{GA\kappa}\right]\frac{d^4y}{dx^4}-\left[\frac{EIk}{GA\kappa}+B-N\right]\frac{d^2y}{dx^2}+ky=q_0-\frac{EI}{GA\kappa}\frac{d^2q_0}{dx^2} \tag{4.16}$$

olur. Genel denklemimizin DTM karşılığı ise aşağıdaki gibidir;

$y(x)\longrightarrow Y[k]$, $q_0\longrightarrow Q_0[k]$, $\frac{d^2q_0}{dx^2}\longrightarrow Q_2[k]$ alınırsa

$$\left(EI-\frac{EIN}{GA\kappa}+\frac{EIB}{GA\kappa}\right)(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)Y[k+4]+\left(N-B-\frac{EIk}{GA\kappa}\right)(k+1)(k+2)Y[k+2]$$
$$+kY[k]=Q_0[k]-\frac{EI}{GA\kappa}Q_2[k] \tag{4.17}$$

4.1. Pasternak Zeminine Oturan Euler-Bernoulli Kirişi

(4.16) denkleminde *N=0* ve $GA\kappa = \infty$ alınırsa zemin Pasternak kiriş Euler - Bernoulli olur ve diferansiyel denklemi;

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} - B\frac{d^2y}{dx^2} + ky = q_0 \tag{4.18}$$

(4.18) ifadesinin DTM karşılığı;

$y(x) \longrightarrow Y(k), \quad q_0 \longrightarrow Q_0[k]$ alınırsa

$$EI(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)Y[k+4] - B(k+1)(k+2)Y[k+2] + kY[k] = Q_0[k] \tag{4.19}$$

4.2. Eksenel Yük Altında Winkler Zeminine Oturan Euler-Bernoulli Kirişi

(4.16) denkleminde *B=0* ve $GA\kappa = \infty$ alınırsa Eksenel yük altında zemin Winkler kiriş Euler - Bernoulli olur ve diferansiyel denklemi;

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} + N\frac{d^2y}{dx^2} + ky = q_0 \tag{4.20}$$

(4.20) ifadesinin DTM karşılığı;

$y(x) \longrightarrow Y(k), \quad q_0 \longrightarrow Q_0[k]$ alınırsa

$$EI(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)Y[k+4] + N(k+1)(k+2)Y[k+2] + kY[k] = Q_0[k] \tag{4.21}$$

4.3. Winkler Zeminine Oturan Euler - Bernoulli Kirişi

(4.16) denkleminde *N=0, B=0* ve $GA\kappa = \infty$ alınırsa zemin Winkler kiriş Euler - Bernoulli olur ve diferansiyel denklemi;

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}+ky=q_0 \tag{4.22}$$

(4.22) ifadesinin DTM karşılığı;

$y(x)\longrightarrow Y(k),\quad q_0\longrightarrow Q_0[k]$ alınırsa

$$EI(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)Y[k+4]+kY[k]=Q_0[k] \tag{4.23}$$

4.4. Eksenel Yük Altında Pasternak Zeminine Oturan Euler - Bernoulli Kirişi

(4.16) denkleminde $GA\kappa=\infty$ alınırsa Eksenel yük altında zemin Pasternak kiriş Euler - Bernoulli olur ve diferansiyel denklemi;

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}+(N-B)\frac{d^2y}{dx^2}+ky=q_0 \tag{4.24}$$

(4.24) ifadesinin DTM karşılığı;

$y(x)\longrightarrow Y(k),\quad q_0\longrightarrow Q_0[k]$ alınırsa

$$EI(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)Y[k+4]+(N-B)(k+1)(k+2)Y[k+2]+kY[k]=Q_0[k] \tag{4.25}$$

4.5. Winkler Zeminine Oturan Timoshenko Kirişi

(4.16) denkleminde *N=0* ve *B=0* alınırsa zemin Winkler kiriş Timoshenko olur ve diferansiyel denklemi;

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}-\frac{EIk}{GA\kappa}\frac{d^2y}{dx^2}+ky=q_0-\frac{EI}{GA\kappa}\frac{d^2q_0}{dx^2} \tag{4.26}$$

(4.26) ifadesinin DTM karşılığı;

$y(x) \longrightarrow Y[k]$, $q_0 \longrightarrow Q_0[k]$, $\frac{d^2 q_0}{dx^2} \longrightarrow Q_2[k]$ alınırsa

$$EI(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)Y[k+4] - (\frac{EIk}{GA\kappa})(k+1)(k+2)Y[k+2] + kY[k] = Q_0[k] + \frac{EI}{GA\kappa} Q_2[k]$$

(4.27)

4.6. Eksenel Yük Altında Winkler Zeminine Oturan Timoshenko Kirişi

(4.16) denkleminde *B=0* alınırsa Eksenel yük altında zemin Winkler kiriş Timoshenko olur ve diferansiyel denklemi;

$$(EI - \frac{EIN}{GA\kappa})\frac{d^4 y}{dx^4} + (N - \frac{EIk}{GA\kappa})\frac{d^2 y}{dx^2} + ky = q_0 - \frac{EI}{GA\kappa}\frac{d^2 q_0}{dx^2} \qquad (4.28)$$

(4.28) ifadesinin DTM karşılığı;

$y(x) \longrightarrow Y[k]$, $q_0 \longrightarrow Q_0[k]$, $\frac{d^2 q_0}{dx^2} \longrightarrow Q_2[k]$ alınırsa

$$(EI - \frac{EIN}{GA\kappa})(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)Y[k+4] + (N - \frac{EIk}{GA\kappa})(k+1)(k+2)Y[k+2] + kY[k] = Q_0[k] - \frac{EI}{GA\kappa} Q_2[k]$$

(4.29)

4.7. Pasternak Zeminine Oturan Timoshenko Kirişi

(4.16) denkleminde *N=0* alınırsa zemin Pasternak kiriş Timoshenko olur ve diferansiyel denklemi;

$$(EI - \frac{EIB}{GA\kappa})\frac{d^4 y}{dx^4} + (-B - \frac{EIk}{GA\kappa})\frac{d^2 y}{dx^2} + ky = q_0 - \frac{EI}{GA\kappa}\frac{d^2 q_0}{dx^2} \qquad (4.30)$$

(4.30) ifadesinin DTM karşılığı;

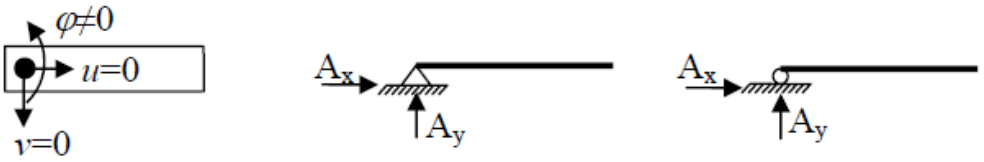
$$y(x) \longrightarrow Y[k]\ ,\quad q_0 \longrightarrow Q_0[k]\ ,\quad \frac{d^2 q_0}{dx^2} \longrightarrow Q_2[k] \text{ alınırsa}$$

$$(EI - \frac{EIB}{GA\kappa})(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)Y[k+4] + (-B - \frac{EIk}{GA\kappa})(k+1)(k+2)Y[k+2] + kY[k]$$
$$= Q_0[k] - \frac{EI}{GA\kappa}Q_2[k]$$
(4.31)

4.8. Sınır Koşulları

4.8.1. Sabit mesnet

Sabit mesnetlerde çubuk, dış ortama serbestçe dönebilecek şekilde bağlanmıştır (Şekil 4.2) . Bu mesnetin *u, v* yer değiştirmeleri sıfırdır (Memmedov ve Gürel, 2007).



Şekil 4.2. Sabit Mesnet

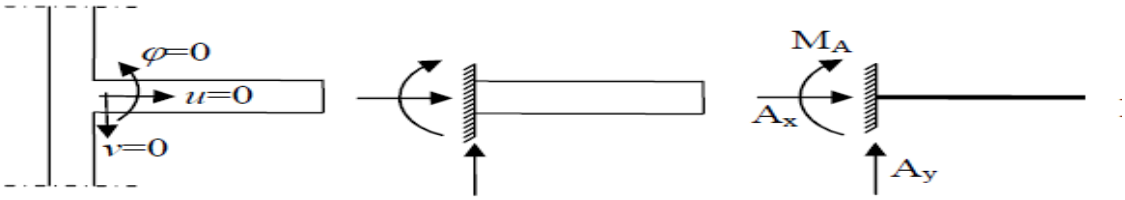
Sabit mesnet için sınır koşulları;

$$x = 0 \rightarrow \quad \text{y=0 ve } EI\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{EI}{GA\kappa}\left(B\frac{d^2y}{dx^2} - N\frac{d^2y}{dx^2} - ky + q_0(x)\right) \tag{4.32}$$

$$x = l \rightarrow \quad \text{y=0 ve } EI\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{EI}{GA\kappa}\left(B\frac{d^2y}{dx^2} - N\frac{d^2y}{dx^2} - ky + q_0(x)\right) \tag{4.33}$$

4.8.2. Ankastre mesnet

Ankastre mesnette çubuk, sonsuz rijit bir ortama yer değiştirme yapmayacak şekilde bağlanmıştır (Şekil 4.3). Bu mesnet türünde *u*, *v* yer değiştirmeleri ile φ açısal yer değiştirme, yani dönme, sıfırdır (Nash ve Potter, 2010).



Şekil 4.3. Ankastre Mesnet

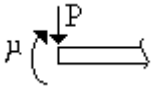
Ankastre mesnet için sınır koşulları;

$$x=0 \rightarrow \quad \text{y=0 ve } \frac{dy}{dx}+\frac{EI}{GA\kappa}\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{EI}{(GA\kappa)^2}\left(B\frac{d^3y}{dx^3}-N\frac{d^3y}{dx^3}-k\frac{dy}{dx}+\frac{dq_0}{dx}\right) \qquad (4.34)$$

$$x=l \rightarrow \quad \text{y=0 ve } \frac{dy}{dx}+\frac{EI}{GA\kappa}\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{EI}{(GA\kappa)^2}\left(B\frac{d^3y}{dx^3}-N\frac{d^3y}{dx^3}-k\frac{dy}{dx}+\frac{dq_0}{dx}\right) \qquad (4.35)$$

4.8.3. Serbest uç

Serbest uç da çubuğun ucu tamamen serbest olduğu için şartlar geometrik tipten değildir; uç kesite etkiyen kuvvet ve kuvvet çiftinin verilen belirli değerlere eşit olması burası için sınır şartlarından ibarettir (Şekil 4.4). Bu mesnet türünde kesme kuvveti ve eğilme momenti sıfırdır (Kayan, 1992).



Şekil 4.4. Serbest uç

Serbest uç için sınır koşulları;

$$x=0 \rightarrow EI\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{EI}{GA\kappa}\left(B\frac{d^2y}{dx^2}-N\frac{d^2y}{dx^2}-ky+q_0(x)\right)$$

$$EI\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{EI}{GA\kappa}\left(B\frac{d^3y}{dx^3}-N\frac{d^3y}{dx^3}-k\frac{dy}{dx}+\frac{dq_0}{dx}\right)+N\frac{dy}{dx} \tag{4.36}$$

$$x=l \rightarrow \quad EI\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{EI}{GA\kappa}\left(B\frac{d^2y}{dx^2}-N\frac{d^2y}{dx^2}-ky+q_0(x)\right)$$

$$EI\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{EI}{GA\kappa}\left(B\frac{d^3y}{dx^3}-N\frac{d^3y}{dx^3}-k\frac{dy}{dx}+\frac{dq_0}{dx}\right)+N\frac{dy}{dx} \tag{4.37}$$

5. UYGULAMALAR

Dördüncü bölümde elde edilen, elastik zemine oturan kirişler için genel denkleminin çözümü için Maple 13 programı kullanılarak nümerik sonuçlar elde edilmiştir.

Uygulama 5.1

Deneysel olarak elde edilen bilgiler kullanılarak nümerik değerler aşağıdaki gibi kullanılmıştır. Tüm zemin–yapı modellerinin aynı koşullar altında çökmeleri hesaplanmıştır. Kirişin uzunluğu bu uygulamada $\ell = 1$ *m* ve kirişin her iki tarafı sabit mesnetlenmiş şeklinde alınmıştır. Kirişin uzunluğunun kısa alınması Timeshonko kirişinin kısa ve yüksek kirişlerde etkisini gösterdiğindendir.

Nümerik değerler; $E = 2.10^7$ *kN/m*^{2}, $I = 0.0333$ *m*^{4}, $B = 6000$ *kN*, $k = 2400$ *kN/m*^{2}, $q_0(x) = 2.5$ *kN/m*, $G = 8.10^6$ *kN/m*^{2}, $N = 20$ *kN* ve $\kappa = 0.86$

$$EI[1-\frac{(N-B)}{GA\kappa}]\frac{d^4y}{dx^4}-[\frac{EIk}{GA\kappa}+B-N]\frac{d^2y}{dx^2}+ky=q_0-\frac{EI}{GA\kappa}\frac{d^2q_0}{dx^2}$$

genel denklemini yukarıda verilen nümerik değerlere göre inceleyelim. Buna göre denklemin DTM karşılıkları aşağıdaki gibi

$$y(x)\longrightarrow Y[k]\ ,\quad q_0\longrightarrow Q_0[k]\ ,\quad \frac{d^2q_0}{dx^2}\longrightarrow Q_2[k]$$ alınırsa

$$y'(0)\longrightarrow Y(1)$$

$$y''(0)\longrightarrow 2Y(2)$$

$$y'''(0)\longrightarrow 6Y(3)$$

alınırsa

a-) $N = 0$ *kN* ve $GA\kappa = \infty$ alındığında Pasternak zeminine oturan Euler-Bernouilli kirişi sayısal uygulaması için denklem;

$$666000.0000\,y^{iv}(x)-6000\,y''(x)+2400\,y(x)=2.5 \qquad (5.1)$$

Sabit mesnet altında koşullar ise

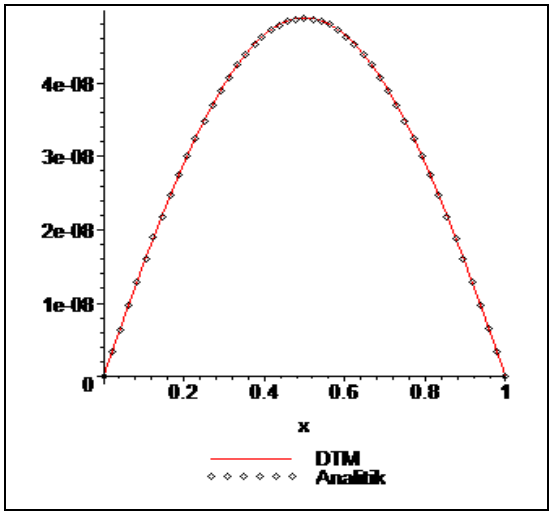
$x=0$'da $y(0)=0$ ve $y''(0)=0$ (5.2)

$x=1$'de $y(1)=0$ ve $y''(1)=0$ (5.3)

olup koşul şartlarına DTM uygulanırsa;

$$Y(0)=0,\ Y(1)=\frac{C}{1!},\ Y(2)=0,\ Y(3)=\frac{D}{3!} \quad (5.4)$$

olur. Problemin tanımlanan aralıktaki analitik çözüm grafiği ile DTM çözüm grafiği Şekil 5.1'de görüldüğü gibi üst üste çakıştığı görülmektedir.



Şekil 5.1.

b-) $B=0$ *kN* ve $GA\kappa = \infty$ alındığında Eksenel yük altında Winkler zeminine oturan Euler-Bernouilli kirişi sayısal uygulaması için denklem;

$$666000.0000\,y^{iv}(x)+20\,y''(x)+2400\,y(x)=2.5 \quad (5.5)$$

Sabit mesnet altında koşullar ise

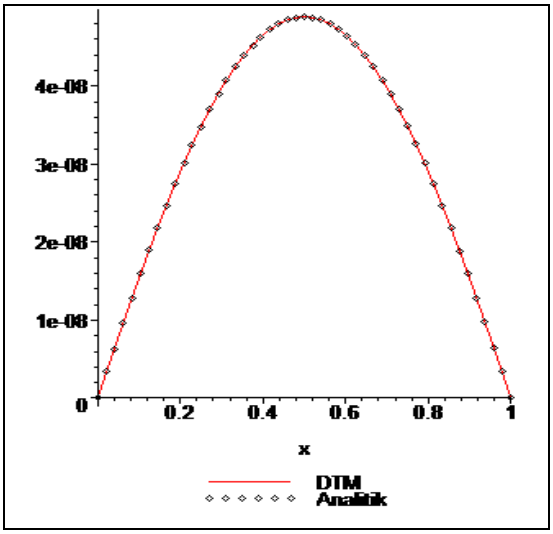
$x=0$'da $y(0)=0$ ve $y''(0)=0$ (5.6)

$x=1$'de $y(1)=0$ ve $y''(1)=0$ (5.7)

olup koşul şartlarına DTM uygulanırsa;

$$Y(0)=0,\ Y(1)=\frac{F}{1!},\ Y(2)=0,\ Y(3)=\frac{G}{3!} \quad (5.8)$$

olur. Problemin tanımlanan aralıktaki analitik çözüm grafiği ile DTM çözüm grafiği Şekil 5.2'de görüldüğü gibi üst üste çakıştığı görülmektedir.



Şekil 5.2.

c-) $B=0$ *kN*, $N = 0$ *kN* ve $GA\kappa = \infty$ alındığında Winkler zeminine oturan Euler-Bernouilli kirişi sayısal uygulaması için denklem ;

$$666000.0000y^{iv}(x)+2400y(x)=2.5 \quad (5.9)$$

Sabit mesnet altında koşullar ise

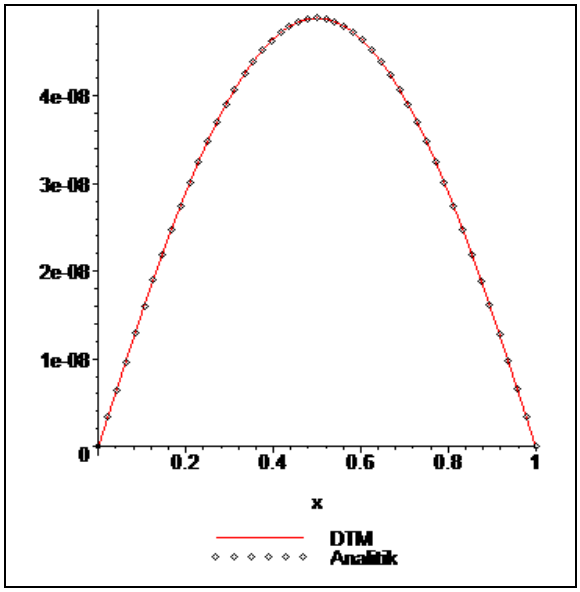
$x=0$'da $y(0)=0$ ve $y''(0)=0$ (5.10)

$x=1$'de $y(1)=0$ ve $y''(1)=0$ (5.11)

olup koşul şartlarına DTM uygulanırsa;

$$Y(0)=0,\ Y(1)=\frac{H}{1!},\ Y(2)=0,\ Y(3)=\frac{J}{3!} \tag{5.12}$$

olur. Problemin tanımlanan aralıktaki analitik çözüm grafiği ile DTM çözüm grafiği Şekil 5.3'de görüldüğü gibi üst üste çakıştığı görülmektedir.



Şekil 5.3.

d-) $GA\kappa = \infty$ alındığında Eksenel yük altında Pasternak zeminine oturan Euler-Bernouilli kirişi sayısal uygulaması için denklem ;

$$666000.0000\,y^{iv}(x)-5980\,y''(x)+2400\,y(x)=2.5 \tag{5.13}$$

Sabit mesnet altında koşullar ise

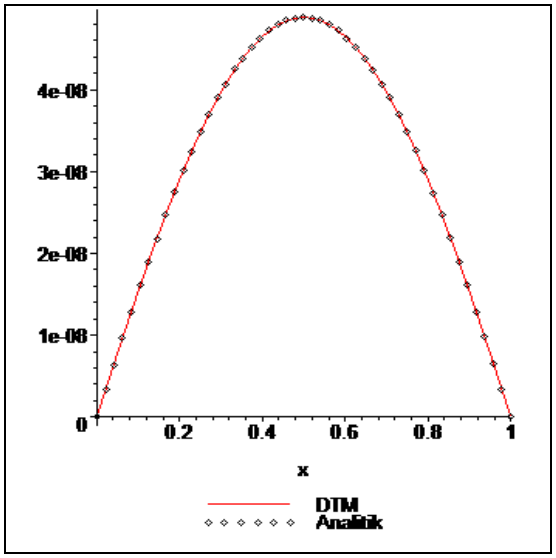
$x=0$'da $y(0)=0$ ve $y''(0)=0$ (5.14)

$x=1$'de $y(1)=0$ ve $y''(1)=0$ (5.15)

olup koşul şartlarına DTM uygulanırsa;

$$Y(0)=0,\ Y(1)=\frac{K}{1!},\ Y(2)=0,\ Y(3)=\frac{L}{3!} \tag{5.16}$$

olur. Problemin tanımlanan aralıktaki analitik çözüm grafiği ile DTM çözüm grafiği Şekil 5.4'de görüldüğü gibi üst üste çakıştığı görülmektedir.



Şekil 5.3.

e-) *N=0 kN* ve *B=0 kN* alındığında Winkler zeminine oturan Timoshenko kirişi sayısal uygulaması için denklem;

$$666000.0000\,y^{iv}(x)-5980\,y''(x)+2400\,y(x)=2.5 \tag{5.17}$$

Sabit mesnet altında koşullar ise

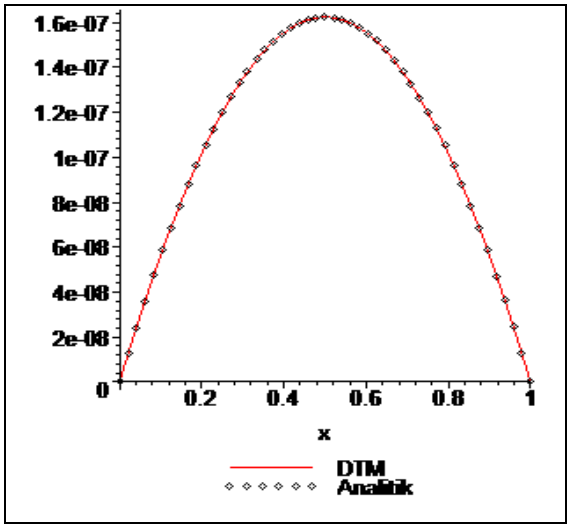
$$x=0\text{'da}\ \ y(0)=0\ \text{ ve }\ 0.2752000000.10^{7}\,y''(0)-2400\,y(0)=-2.5 \tag{5.18}$$

$$x=1\text{'de}\ \ y(1)=0\ \text{ ve }\ 0.2752000000.10^{7}\,y''(1)-2400\,y(1)=-2.5 \tag{5.19}$$

olup koşul şartlarına DTM uygulanırsa;

$$Y(0)=0,\ Y(1)=\frac{M}{1!},\ Y(2)=-0.4542151163.10^{-6},\ Y(3)=\frac{L}{3!} \tag{5.20}$$

olur. Problemin tanımlanan aralıktaki analitik çözüm grafiği ile DTM çözüm grafiği Şekil 5.5'de görüldüğü gibi üst üste çakıştığı görülmektedir.



Şekil 5.5.

f-) *N=0 kN* alındığında Pasternak zeminine oturan Timoshenko kirişi sayısal uygulaması için denklem;

$$667452.0349y^{iv}(x)-6580.813954y''(x)+2400y(x)=2.5 \tag{5.21}$$

Sabit mesnet altında koşullar ise

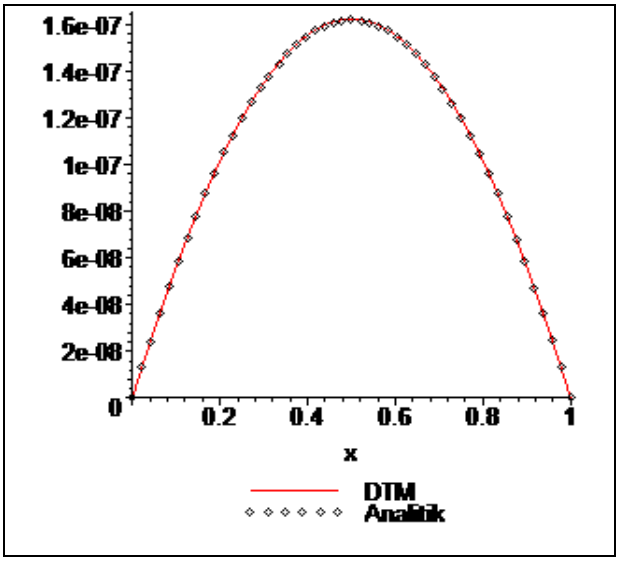
$$x=0\text{'da}\ \ y(0)=0\ \text{ ve }\ 0.2758000000.10^{7}y''(0)-2400y(0)=-2.5 \tag{5.22}$$

$$x=1\text{'de}\ \ y(1)=0\ \text{ ve }\ 0.2758000000.10^{7}y''(1)-2400y(1)=-2.5 \tag{5.23}$$

olup koşul şartlarına DTM uygulanırsa;

$$Y(0)=0,\ Y(1)=\frac{P}{1!},\ Y(2)=-0.9064539521.10^{-6},\ Y(3)=\frac{R}{3!} \tag{5.24}$$

olur. Problemin tanımlanan aralıktaki analitik çözüm grafiği ile DTM çözüm grafiği Şekil 5.6'da görüldüğü gibi üst üste çakıştığı görülmektedir.



Şekil 5.6.

g-) *B=0 kN* alındığında Eksenel yük altında Winkler zeminine oturan Timoshenko kirişi sayısal uygulaması için denklem;

$$665995.1599\,y^{iv}(x) - 560.8139535\,y''(x) + 2400\,y(x) = 2.5 \tag{5.25}$$

Sabit mesnet altında koşullar ise

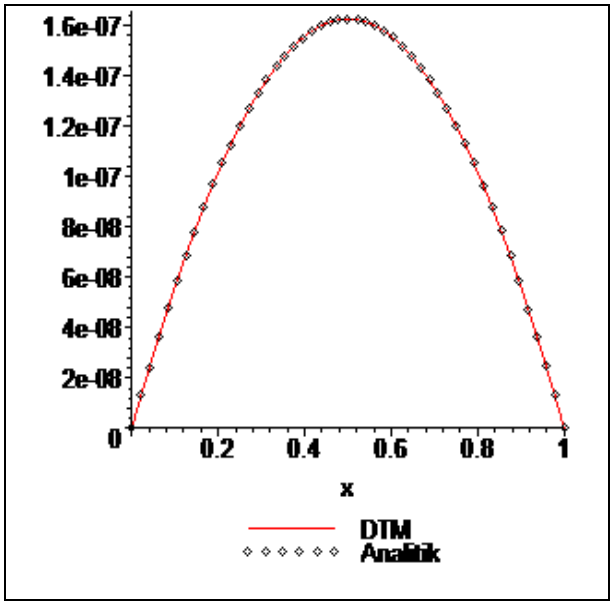
$$x=0\text{'da } y(0) = 0 \text{ ve } 0.2751980000.10^{7}\,y''(0) - 2400\,y(0) = -2.5 \tag{5.26}$$

$$x=1\text{'de } y(1) = 0 \text{ ve } 0.2751980000.10^{7}\,y''(1) - 2400\,y(1) = -2.5 \tag{5.27}$$

olup koşul şartlarına DTM uygulanırsa;

$$Y(0) = 0,\ Y(1) = \frac{S}{1!},\ Y(2) = -0.4542184173.10^{-6},\ Y(3) = \frac{T}{3!} \tag{5.28}$$

olur. Problemin tanımlanan aralıktaki analitik çözüm grafiği ile DTM çözüm grafiği Şekil 5.7'de görüldüğü gibi üst üste çakıştığı görülmektedir.



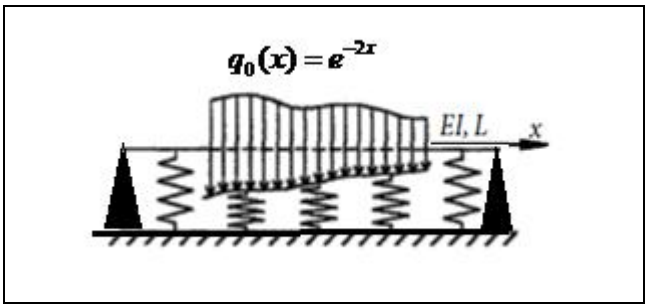
Şekil 5.7.

Şekillerdeki x ekseni kirişin uzunluğunu y eksenini ise x değerlerindeki çökmeyi göstermektedir. Yapılan özel denklemlerin maksimum çökmelerini Çizelge 5.1'deki gibidir.

Çizelge 5.1. *x=0.5* 'deki çökme değerlerinin karşılaştırılması

$\ell = 0.5$	**Analitik**	**DTM**	**Hata=|Analitik -DTM|**
a	$0.4884541405.10^{-7}$	$0.4891999187.10^{-7}$	$0.7457782.10^{-10}$
b	$0.4888692418.10^{-7}$	$0.4887533620.10^{-7}$	$0.1158798.10^{-10}$
c	$0.4887021633.10^{-7}$	$0.4887518702.10^{-7}$	$0.497069.10^{-11}$
d	$0.4882492480.10^{-7}$	$0.4883061292.10^{-7}$	$0.568810.10^{-11}$
e	$0.1624285615.10^{-6}$	$0.1624246265.10^{-6}$	$0.39350.10^{-12}$
f	$0.1619237425.10^{-6}$	$0.1621629829.10^{-6}$	$0.2392404.10^{-10}$
g	$0.1624232935.10^{-6}$	$0.1624116704.10^{-6}$	$0.116231.10^{-11}$

Uygulama 5.2 :



Şekil 5.8.

Şekil 5.8'de Winkler zeminine oturan $q_0(x) = e^{-2x}$ *kN/m* yük altında, koşulu iki taraftan sabit mesnetlenmiş Euler- Bernouilli kirişi gözükmektedir. Uygulamada *B=0 kN, N = 0 kN* ve $GA\kappa = \infty$ alınırsa diferansiyel denklemi;

$$EIy^{iv}(x) + ky(x) = q_0(x) \tag{5.29}$$

olur. Kirişin uzunluğunu $\ell = 2$ *m* ve $E=2.1.10^8$ *kN/m*^{2} , $I=444.1.10^{-5}$ *m*^{4}, *k=100 kN/m*^{2} bilinen nümerik değerler girdi olarak alınırsa;

$$932610.0000y^{iv}(x) + 100y(x) = e^{-2x} \tag{5.30}$$

Sabit mesnet altında koşullar ;

x=0'da $y(0) = 0$ ve $y''(0) = 0$ (5.31)

x=2'de $y(2) = 0$ ve $y''(2) = 0$ (5.32)

olur. Buna göre denklemin DTM karşılıkları aşağıdaki gibi

$$y(x) \longrightarrow Y[k] \ , \quad q_0 \longrightarrow Q_0[k] \text{ alınırsa}$$

$$y'(0) \longrightarrow Y(1)$$

$$y''(0) \longrightarrow 2Y(2)$$

$$y'''(0) \longrightarrow 6Y(3)$$

olup koşul şartlarına DTM uygulanırsa;

$$Y(0)=0,\ Y(1)=\frac{C}{1!},\ Y(2)=0,\ Y(3)=\frac{D}{3!} \tag{5.33}$$

olur. (5.33) 'deki

$$C=y'(0)=1!Y(1),\ D=y'''(0)=3!Y(3)$$

ile gösterilen sabitler daha sonra sınır şartları kullanılarak elde edilecek olan sabitlerdir. (5.30) denkleminin DTM karşılığı;

$$932610.0000(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)Y[k+4]+100Y[k]=Q_0[k]$$

olup $Y[k+4]$'ü çekersek;

$$Y[k+4]=\frac{1}{932610.0000}*\frac{k!}{(k+4)!}\left[Q_0[k]-100*Y[k]\right] \tag{5.34}$$

rekürans bağıntısı elde edilir. (5.34) kullanılarak;

$Y_4 := 0.4467748219\ 10^{-7}$

$Y_5 := -0.1787099288\ 10^{-7} - 0.8935496438\ 10^{-6}\ C$

$Y_6 := 0.5956997627\ 10^{-8}$

$Y_7 := -0.1701999321\ 10^{-8} - 0.2127499152\ 10^{-7}\ \mathrm{D}$

$Y_8 := 0.4254969788\ 10^{-9}$

$Y_9 := -0.9455488423\ 10^{-10} + 0.3168376850\ 10^{-13}\ C$

$Y_{10} := 0.1891097684\ 10^{-10}$

$Y_{11} := -0.3438359426\ 10^{-11} + 0.2880342591\ 10^{-15}\ \mathrm{D}$

$$Y_{12} := 0.5730599041\ 10^{-12}$$

$$Y_{13} := -0.8816306220\ 10^{-13} - 0.1979791613\ 10^{-21}\ C$$

$$Y_{14} := 0.1259472316\ 10^{-13}$$

$$Y_{15} := -0.1679296422\ 10^{-14} - 0.9427579106\ 10^{-24}\ \mathrm{D}$$

$$Y_{16} := 0.2099120528\ 10^{-15}$$

$$Y_{17} := -0.2469553563\ 10^{-16} + 0.3716474980\ 10^{-30}\ C$$

$$Y_{18} := 0.2743948401\ 10^{-17}$$

$$Y_{19} := -0.2888366740\ 10^{-18} + 0.1086688590\ 10^{-32}\ \mathrm{D}$$

Bulunan bu değerler DTM tanımında kullanılırsa; aranan $y(x)$ fonksiyonu;

$$\begin{aligned} \mathrm{y}(x) = {} & C\,x + \frac{\mathrm{D}\,x^3}{6} + 0.4467748219\ 10^{-7}\ x^4 \\ & + (-0.1787099288\ 10^{-7} - 0.8935496438\ 10^{-6}\ C)\ x^5 + 0.5956997627\ 10^{-8}\ x^6 \\ & + (-0.1701999321\ 10^{-8} - 0.2127499152\ 10^{-7}\ \mathrm{D})\ x^7 + 0.4254969788\ 10^{-9}\ x^8 \\ & + (-0.9455488423\ 10^{-10} + 0.3168376850\ 10^{-13}\ C)\ x^9 + 0.1891097684\ 10^{-10}\ x^{10} \\ & + (-0.3438359426\ 10^{-11} + 0.2880342591\ 10^{-15}\ \mathrm{D})\ x^{11} + 0.5730599041\ 10^{-12}\ x^{12} \\ & + (-0.8816306220\ 10^{-13} - 0.1979791613\ 10^{-21}\ C)\ x^{13} + 0.1259472316\ 10^{-13}\ x^{14} \\ & + (-0.1679296422\ 10^{-14} - 0.9427579106\ 10^{-24}\ \mathrm{D})\ x^{15} \end{aligned}$$

(5.35)

Görüldüğü gibi elde edilen çözüm fonksiyonu *C* ve *D* sabitlerine bağlıdır. (5.35) 'deki *C* ve *D* sabitlerini bulabilmek için (5.32) 'de gösterilen $x = 2$ noktasındaki sınır koşulları kullanılır. Yani; (5.35) 'deki bulunan fonksiyonun $y(2)$ ve $y''(2)$ değerleri hesap edilir ve bu değerler (5.32) 'deki sınır şartlarına eşitlenirse, *C* ve *D* sabitleri;

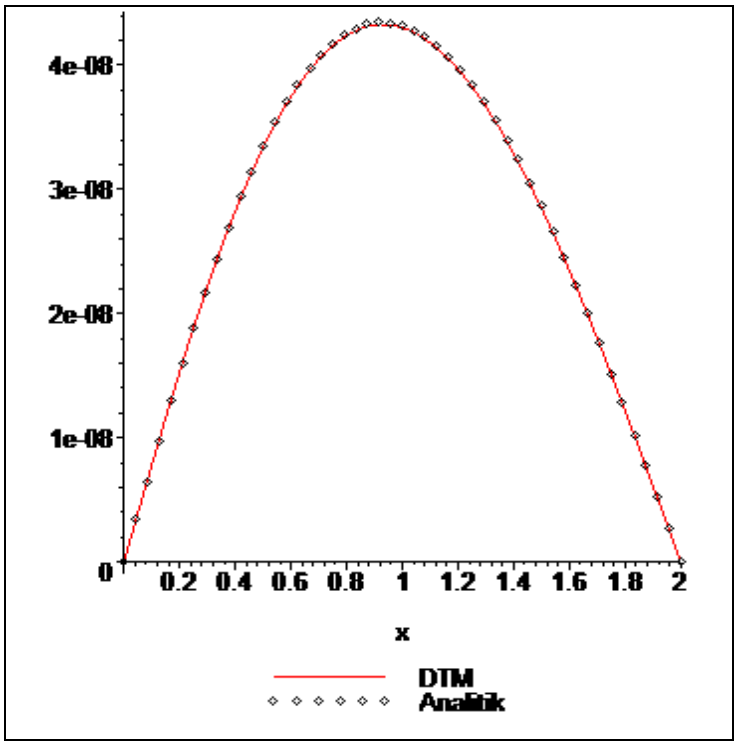
$$C = 0.7899622859.10^{-7} \quad \text{ve} \quad D = -0.4042242970.10^{-6} \qquad (5.36)$$

bulunur. (5.36) 'daki elde edilen *C* ve *D* sabitleri (5.35) 'de yerine yazılır ve aşağıdaki seri çözüm bulunur.

$$
\begin{aligned}
y(x) = {} & 0.7899622859\ 10^{-7}\,x - 0.6737071617\ 10^{-7}\,x^3 + 0.4467748219\ 10^{-7}\,x^4 \\
& - 0.1787106347\ 10^{-7}\,x^5 + 0.5956997627\ 10^{-8}\,x^6 - 0.1701990721\ 10^{-8}\,x^7 \\
& + 0.4254969788\ 10^{-9}\,x^8 - 0.9455488423\ 10^{-10}\,x^9 + 0.1891097684\ 10^{-10}\,x^{10} \\
& - 0.3438359426\ 10^{-11}\,x^{11} + 0.5730599041\ 10^{-12}\,x^{12} - 0.8816306220\ 10^{-13}\,x^{13} \\
& + 0.1259472316\ 10^{-13}\,x^{14} - 0.1679296422\ 10^{-14}\,x^{15}
\end{aligned}
$$

(5.37)

Problemin tanımlanan aralıktaki analitik çözüm grafiği ile (5.37) 'deki bulunan çözüm fonksiyonunun grafiği Şekil 5.9'da birbirine çok yakın olduğu görülmektedir.



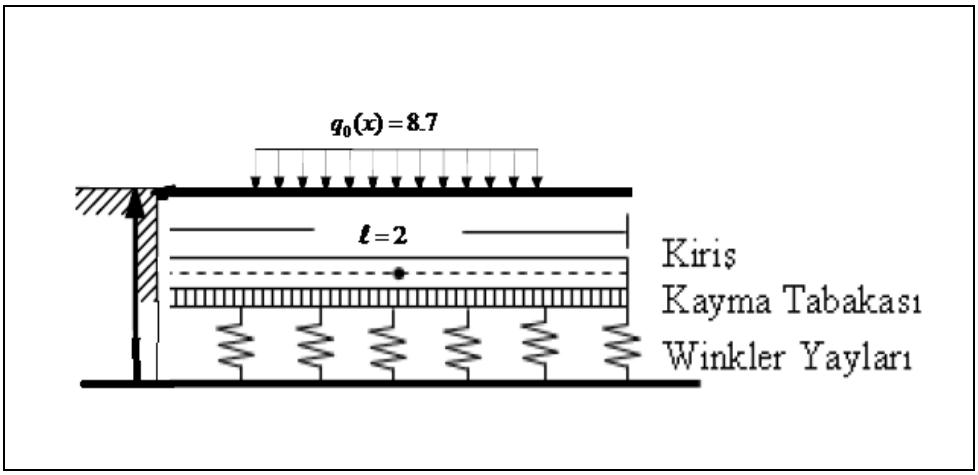
Şekil 5.9.

x'in değişen değerlerine çökmeler Çizelge 5.2'deki gibidir.

Çizelge 5.2.

x değerleri	Analitik	DTM	Hata=|Analitik -DTM|
0.2	$0.1536821540.10^{-7}$	$0.1532640572.10^{-7}$	$0.4180968.10^{-10}$
0.4	$0.2835033224.10^{-7}$	$0.2826937668.10^{-7}$	$0.8095556.10^{-10}$
0.6	$0.3759773354.10^{-7}$	$0.3748279193.10^{-7}$	$0.11494161.10^{-9}$
0.8	$0.4255336390.10^{-7}$	$0.4241220652.10^{-7}$	$0.14115738.10^{-9}$
1	$0.4316069450.10^{-7}$	$0.4303384858.10^{-7}$	$0.12684592.10^{-9}$
1.2	$0.3983930269.10^{-7}$	$0.3967966156.10^{-7}$	$0.15964113.10^{-9}$
1.6	$0.2360105497.10^{-7}$	$0.2348487894.10^{-7}$	$0.11617603.10^{-9}$

Uygulama 5.3



Şekil 5.10.

Şekil 5.10'da Pasternak zeminine oturan $q_0(x) = 8.7$ *kN/m* yük altında, koşulu bir tarafından ankastre mesnet ile diğer ucu serbest olan Euler- Bernouilli kirişi gözükmektedir. Uygulamada, *N = 0 kN* ve $GA\kappa = \infty$ alınırsa diferansiyel denklemi;

$$EIy^{iv}(x) - By''(x) + ky(x) = q_0(x) \tag{5.38}$$

olur. Kirişin uzunluğunu $\ell = 2$ *m* ve $E=25.10^8$ *kN/m*^{2} , *B= 6000 kN*, *I=0.0333 m*^{4}, $k=500$ *kN/m*^{2} bilinen nümerik değerler girdi olarak alınırsa;

$$0.8325000000.10^{8}\, y^{iv}(x) - 6000\, y''(x) + 500\, y(x) = 8.7 \tag{5.39}$$

Ankastre mesnet altında koşullar ;

$x=0$'da $y(0) = 0$ ve $y'(0) = 0$ (5.40)

Serbest uç altında koşullar;

$x=2$'de $y''(2) = 0$ ve $y'''(2) = 0$ (5.41)

olur. Buna göre denklemin DTM karşılıkları aşağıdaki gibi

$$y(x) \longrightarrow Y[k] \ , \quad q_0 \longrightarrow Q_0[k] \quad \text{alınırsa}$$

$$y'(0) \longrightarrow Y(1)$$

$$y''(0) \longrightarrow 2Y(2)$$

$$y'''(0) \longrightarrow 6Y(3)$$

olup koşul şartlarına DTM uygulanırsa;

$$Y(0) = 0\,,\ Y(1) = 0\,,\ Y(2) = \frac{C}{2!}\,,\ Y(3) = \frac{D}{3!} \tag{5.42}$$

olur. Buradaki

$$C = y''(0) = 2!Y(2)\,,\ D = y'''(0) = 3!Y(3)$$

ile gösterilen sabitler daha sonra sınır şartları kullanılarak elde edilecek olan sabitlerdir. (5.39) denkleminin DTM karşılığı;

$$0.832500000.10^{8}(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)Y[k+4] - 6000(k+1)(k+2)Y[k+2] + 100Y[k] = Q_0[k]$$

olup $Y[k+4]$'ü çekersek;

$$Y[k+4]=\frac{1}{0.832500000.10^{8}}\left[\frac{k!}{(k+4)!}(Q_0[k]-100Y[k])+6000*\frac{(k+2)!}{(k+4)!}Y[k+2]\right] \quad (5.43)$$

rekürans bağıntısı elde edilir. (5.43) kullanılarak;

$Y_4 := 0.4354354355\ 10^{-8} + 0.3003003004\ 10^{-5}\ C$

$Y_5 := 0.6006006006\ 10^{-6}\ \mathrm{D}$

$Y_6 := 0.1046091136\ 10^{-13} - 0.8334460586\ 10^{-8}\ C$

$Y_7 := -0.1190637227\ 10^{-8}\ \mathrm{D}$

$Y_8 := -0.1555336918\ 10^{-16} - 0.2146220797\ 10^{-13}\ C$

$Y_9 := -0.2384689775\ 10^{-14}\ \mathrm{D}$

$Y_{10} := -0.2492108232\ 10^{-22} + 0.9914721845\ 10^{-17}\ C$

$Y_{11} := 0.9013383498\ 10^{-18}\ \mathrm{D}$

$Y_{12} := 0.7849493134\ 10^{-26} + 0.1626379286\ 10^{-22}\ C$

$Y_{13} := 0.1251060991\ 10^{-23}\ \mathrm{D}$

$Y_{14} := 0.9338679199\ 10^{-32} - 0.2472242471\ 10^{-26}\ C$

$Y_{15} := -0.1648161649\ 10^{-27}\ \mathrm{D}$

$Y_{16} := -0.1076501977\ 10^{-35} - 0.2978688911\ 10^{-32}\ C$

$Y_{17} := -0.1752169951\ 10^{-33}\ \mathrm{D}$

$Y_{18} := -0.1017275846\ 10^{-41} + 0.2014812074\ 10^{-36}\ C$

$Y_{19} := 0.1060427408\ 10^{-37}\ \mathrm{D}$

Bulunan bu değerler DTM tanımında kullanılırsa; aranan $y(x)$ fonksiyonu;

$$
\begin{aligned}
y(x) = {} & \frac{C\,x^2}{2} + \frac{D\,x^3}{6} + (0.4354354355\ 10^{-8} + 0.3003003004\ 10^{-5}\ C)\,x^4 \\
& + 0.6006006006\ 10^{-6}\ D\,x^5 + (0.1046091136\ 10^{-13} - 0.8334460586\ 10^{-8}\ C)\,x^6 \\
& - 0.1190637227\ 10^{-8}\ D\,x^7 + (-0.1555336918\ 10^{-16} - 0.2146220797\ 10^{-13}\ C)\,x^8 \\
& - 0.2384689775\ 10^{-14}\ D\,x^9 + (-0.2492108232\ 10^{-22} + 0.9914721845\ 10^{-17}\ C)\,x^{10} \\
& + 0.9013383498\ 10^{-18}\ D\,x^{11} + (0.7849493134\ 10^{-26} + 0.1626379286\ 10^{-22}\ C)\,x^{12} \\
& + 0.1251060991\ 10^{-23}\ D\,x^{13} + (0.9338679199\ 10^{-32} - 0.2472242471\ 10^{-26}\ C)\,x^{14} \\
& - 0.1648161649\ 10^{-27}\ D\,x^{15}
\end{aligned}
$$

(5.44)

Görüldüğü gibi elde edilen çözüm fonksiyonu *C* ve *D* sabitlerine bağlıdır. (5.44) 'deki *C* ve *D* sabitlerini bulabilmek için (5.41) 'de gösterilen $x = 2$ noktasındaki sınır koşulları kullanılır. Yani; (5.44) 'deki bulunan fonksiyonun $y''(2)$ ve $y'''(2)$ değerleri hesap edilir ve bu değerler (5.41) 'deki sınır şartlarına eşitlenirse, *C* ve *D* sabitleri;

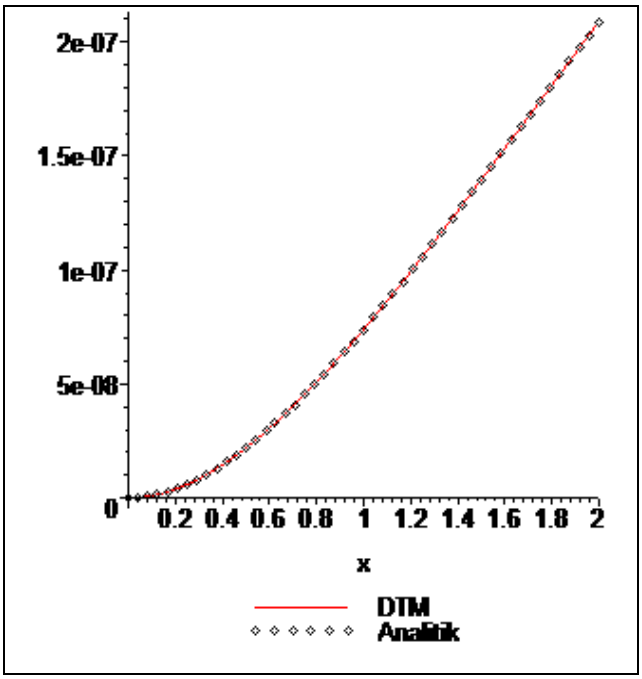
$$C = 0.2090125795.10^{-6} \quad \text{ve} \quad D = -0.2090180472.10^{-6} \tag{5.45}$$

bulunur. (5.45) 'de elde edilen *C* ve *D* sabitleri (5.44) 'de yerine yazılır ve aşağıdaki seri çözüm bulunur.

$$
\begin{aligned}
y(x) = {} & 0.1045062898\ 10^{-6}\,x^2 - 0.3483634120\ 10^{-7}\,x^3 + 0.4354982020\ 10^{-8}\,x^4 \\
& - 0.1255363647\ 10^{-12}\,x^5 + 0.8718904254\ 10^{-14}\,x^6 + 0.2488646681\ 10^{-15}\,x^7 \\
& - 0.1555785505\ 10^{-16}\,x^8 + 0.4984431999\ 10^{-21}\,x^9 - 0.2284878073\ 10^{-22}\,x^{10} \\
& - 0.1883959817\ 10^{-24}\,x^{11} + 0.7852892471\ 10^{-26}\,x^{12} - 0.2614943253\ 10^{-30}\,x^{13} \\
& + 0.8821949423\ 10^{-32}\,x^{14} + 0.3444955293\ 10^{-34}\,x^{15}
\end{aligned}
$$

(5.46)

Problemin tanımlanan aralıktaki analitik çözüm grafiği ile (5.46) 'daki bulunan çözüm fonksiyonunun grafiği Şekil 5.11'de birbirine çok yakın olduğu görülmektedir.



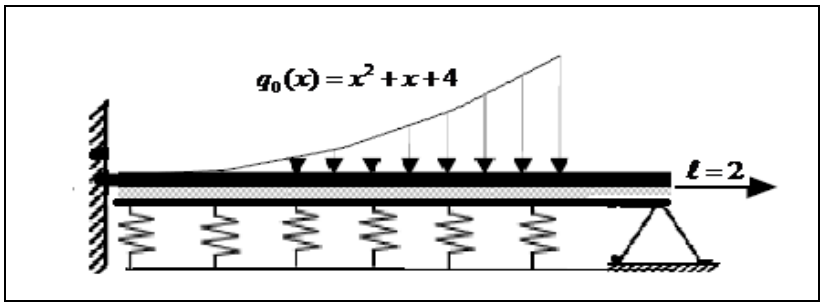
Şekil 5.11.

x'in değişen değerlerine çökmeler Çizelge 5.3'deki gibidir.

Çizelge 5.3.

x değerleri	Analitik	DTM	Hata=|Analitik -DTM|
0.2	$0.3922003841.10^{-8}$	$0.3908528794.10^{-8}$	$0.13475047.10^{-10}$
0.4	$0.1456564949.10^{-7}$	$0.1460296682.10^{-7}$	$0.3731733.10^{-10}$
0.6	$0.3063896156.10^{-7}$	$0.3066201096.10^{-7}$	$0.2304940.10^{-10}$
0.8	$0.5085941242.10^{-7}$	$0.5083158062.10^{-7}$	$0.2783180.10^{-10}$
1	$0.7401816975.10^{-7}$	$0.7402481403.10^{-7}$	$0.664428.10^{-11}$
1.2	$0.9938630599.10^{-7}$	$0.9932206491.10^{-7}$	$0.6424108.10^{-10}$
1.6	$0.1534024405.10^{-6}$	$0.1533860945.10^{-6}$	$0.163460.10^{-10}$
2	$0.2090012230.10^{-6}$	$0.2090107106.10^{-6}$	$0.94876.10^{-11}$

Uygulama 5.4



Şekil 5.12.

Şekil 5.12'de Eksenel yük altında Winkler zeminine oturan $q_0(x) = x^2 + x + 4$ *kN/m* yük altında, koşulu bir tarafından ankastre mesnet ile diğer sabit mesnet olan Euler-Bernouilli kirişi gözükmektedir. Uygulamada, *B=0 kN* ve $GA\kappa = \infty$ alınırsa diferansiyel denklemi;

$$EIy^{iv}(x) + Ny''(x) + ky(x) = q_0(x) \tag{5.47}$$

olur. Kirişin uzunluğunu $\ell = 2$ *m* ve $E=25.10^6$ *kN/m*^{2} , *N=40 kN,* $I=0.03$ *m*^{4}, *k=2400 kN/m*^{2} nümerik değerler girdi olarak alınırsa;

$$750000.00y^{iv}(x) + 40y''(x) + 2400y(x) = x^2 + x + 4 \tag{5.48}$$

Ankastre mesnet altında koşullar ;

x=0'da $y(0) = 0$ ve $y'(0) = 0$ (5.49)

Sabit mesnet altında koşullar;

x=2'de $y(2) = 0$ ve $y''(2) = 0$ (5.50)

olur. Buna göre denklemin DTM karşılıkları aşağıdaki gibi

$$y(x) \longrightarrow Y[k] \ , \quad q_0 \longrightarrow Q_0[k] \text{ alınırsa}$$

$$y'(0) \longrightarrow Y(1)$$

$$y''(0) \longrightarrow 2Y(2)$$

$$y'''(0) \longrightarrow 6Y(3)$$

olup koşul şartlarına DTM uygulanırsa;

$$Y(0)=0,\ Y(1)=0,\ Y(2)=\frac{C}{2!},\ Y(3)=\frac{D}{3!} \tag{5.51}$$

olur. Buradaki

$$C=y''(0)=2!Y(2),\ D=y'''(0)=3!Y(3)$$

ile gösterilen sabitler daha sonra sınır şartları kullanılarak elde edilecek olan sabitlerdir. (5.48) denkleminin DTM karşılığı;

$$750000.00(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)Y[k+4]+40(k+1)(k+2)Y[k+2]+2400Y[k]=Q_0[k]$$

olup $Y[k+4]$'ü çekersek;

$$Y[k+4]=\frac{1}{750000.00}\left[\frac{k!}{(k+4)!}(Q_0[k]-2400Y[k])-40*\frac{(k+2)!}{(k+4)!}Y[k+2]\right] \tag{5.52}$$

rekürans bağıntısı elde edilir. (5.52) kullanılarak;

$$Y_4 := 0.2222222223\ 10^{-6} - 0.2222222223\ 10^{-5}\ C$$

$$Y_5 := 0.1111111111\ 10^{-7} - 0.4444444444\ 10^{-6}\ \mathrm{D}$$

$$Y_6 := 0.3703308641\ 10^{-8} - 0.4444440492\ 10^{-5}\ C$$

$$Y_7 := -0.1410934744\ 10^{-13} - 0.6349200704\ 10^{-6}\ \mathrm{D}$$

$$Y_8 := -0.4268073841\ 10^{-12} + 0.8465604699\ 10^{-11}\ C$$

$$Y_9 := -0.1175777909\ 10^{-13} + 0.9406227450\ 10^{-12}\ \mathrm{D}$$

$$Y_{10} := -0.2351054150\ 10^{-14} + 0.2821861962\ 10^{-11}\ C$$

$$Y_{11} := 0.1140148781\ 10^{-19} + 0.2565329056\ 10^{-12}\ \mathrm{D}$$

$$Y_{12} := 0.1159148729\ 10^{-18} - 0.3420443810\ 10^{-17}\ C$$

$$Y_{13} := 0.2192588939\ 10^{-20} - 0.2631110624\ 10^{-18}\ \mathrm{D}$$

$$Y_{14} := 0.3131267582\ 10^{-21} - 0.3758713869\ 10^{-18}\ C$$

$$Y_{15} := -0.1670546427\ 10^{-26} - 0.2505809245\ 10^{-19}\ \mathrm{D}$$

$$Y_{16} := -0.8561515807\ 10^{-26} + 0.3341089390\ 10^{-24}\ C$$

$$Y_{17} := -0.1228337867\ 10^{-27} + 0.1965346700\ 10^{-25}\ \mathrm{D}$$

$$Y_{18} := -0.1364237525\ 10^{-28} + 0.1637777998\ 10^{-25}\ C$$

$$Y_{19} := 0.7662170372\ 10^{-34} + 0.8619884196\ 10^{-27}\ \mathrm{D}$$

Bulunan bu değerler DTM tanımında kullanılırsa; aranan $y(x)$ fonksiyonu;

$$\begin{aligned}
\mathrm{y}(x) = {} & \frac{C\,x^2}{2} + \frac{\mathrm{D}\,x^3}{6} + (0.2222222223\ 10^{-6} - 0.2222222223\ 10^{-5}\ C)\,x^4 \\
& + (0.1111111111\ 10^{-7} - 0.4444444444\ 10^{-6}\ \mathrm{D})\,x^5 \\
& + (0.3703308641\ 10^{-8} - 0.4444440492\ 10^{-5}\ C)\,x^6 \\
& + (-0.1410934744\ 10^{-13} - 0.6349200704\ 10^{-6}\ \mathrm{D})\,x^7 \\
& + (-0.4268073841\ 10^{-12} + 0.8465604699\ 10^{-11}\ C)\,x^8 \\
& + (-0.1175777909\ 10^{-13} + 0.9406227450\ 10^{-12}\ \mathrm{D})\,x^9 \\
& + (-0.2351054150\ 10^{-14} + 0.2821861962\ 10^{-11}\ C)\,x^{10} \\
& + (0.1140148781\ 10^{-19} + 0.2565329056\ 10^{-12}\ \mathrm{D})\,x^{11} \\
& + (0.1159148729\ 10^{-18} - 0.3420443810\ 10^{-17}\ C)\,x^{12} \\
& + (0.2192588939\ 10^{-20} - 0.2631110624\ 10^{-18}\ \mathrm{D})\,x^{13} \\
& + (0.3131267582\ 10^{-21} - 0.3758713869\ 10^{-18}\ C)\,x^{14} \\
& + (-0.1670546427\ 10^{-26} - 0.2505809245\ 10^{-19}\ \mathrm{D})\,x^{15}
\end{aligned}$$

(5.53)

Görüldüğü gibi elde edilen çözüm fonksiyonu *C* ve *D* sabitlerine bağlıdır. (5.53) 'deki *C* ve *D* sabitlerini bulabilmek için (5.50) 'de gösterilen $x = 2$ noktasındaki sınır koşulları kullanılır. Yani; (5.53) 'deki bulunan fonksiyonun $y(2)$ ve $y''(2)$ değerleri hesap edilir ve bu değerler (5.50) 'deki sınır şartlarına eşitlenirse, *C* ve *D* sabitleri;

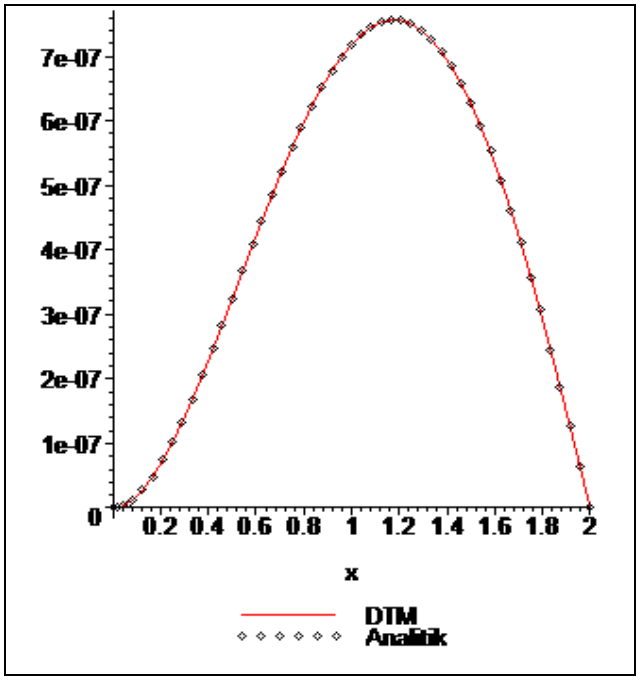
$$C = 0.3999197179.10^{-5} \quad \text{ve} \quad D = -0.9109490910.10^{-5} \tag{5.54}$$

bulunur. (5.54) ’de elde edilen C ve D sabitleri (5.53) ’de yerine yazılır ve aşağıdaki seri çözüm bulunur.

$$\begin{aligned} y(x) = {} & 0.1999598590\ 10^{-5}\, x^2 - 0.1518248485\ 10^{-5}\, x^3 + 0.2222133352\ 10^{-6}\, x^4 \\ & + 0.1111515977\ 10^{-7}\, x^5 + 0.3685534447\ 10^{-8}\, x^6 + 0.5769689263\ 10^{-11}\, x^7 \\ & - 0.4267735285\ 10^{-12}\, x^8 - 0.1176634768\ 10^{-13}\, x^9 - 0.2339768968\ 10^{-14}\, x^{10} \\ & - 0.2325482684\ 10^{-17}\, x^{11} + 0.1159011939\ 10^{-18}\, x^{12} + 0.2194985747\ 10^{-20}\, x^{13} \\ & + 0.3116235744\ 10^{-21}\, x^{14} + 0.2265959190\ 10^{-24}\, x^{15} \end{aligned}$$

(5.55)

Problemin tanımlanan aralıktaki analitik çözüm grafiği ile (5.55) ’daki bulunan çözüm fonksiyonunun grafiği Şekil 5.13’de birbirine çok yakın olduğu görülmektedir.



Şekil 5.13.

x'in değişen değerlerine çökmeler Çizelge 5.4'deki gibidir.

Çizelge 5.4.

x değerleri	**Analitik**	**DTM**	**Hata=|Analitik -DTM|**
0.4	$0.2286230332.10^{-6}$	$0.2285854571.10^{-6}$	$0.375761.10^{-10}$
0.6	$0.4217900181.10^{-6}$	$0.4217490891.10^{-6}$	$0.409290.10^{-10}$
0.8	$0.5980640206.10^{-6}$	$0.5980279486.10^{-6}$	$0.360720.10^{-10}$
1	$0.7183584092.10^{-6}$	$0.7183694632.10^{-6}$	$0.110540.10^{-10}$
1.2	$0.7553909256.10^{-6}$	$0.7553519448.10^{-6}$	$0.389808.10^{-10}$
1.6	$0.5350390292.10^{-6}$	$0.5350432970.10^{-6}$	$0.42678.10^{-11}$
1.8	$0.2926918728.10^{-6}$	$0.2926657312.10^{-6}$	$0.261416.10^{-10}$

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

6.1. Sonuçlar

Mühendislik sistemlerinin analizinde diferansiyel denklemlerin çözümü büyük bir önem taşır. Elastik zemine oturan kirişlere ait eğilme, titreşim ve burkulma denklemleri günümüze kadar pek çok sayısal yöntem ile çözülmüştür. Kullanım alanına bağlı olarak elastik zemine oturan kirişlerin çökme değerlerinin hesabı tasarımda büyük önem taşır. Sunulan bu tezde, ilk defa elastik zemine oturan kiriş modellerinin diferansiyel denklemlerinin genel hali elde edilmiştir. Genel haldeki bu denklemlerin girdileri değiştirilerek özel hale geçilmesi sağlanmıştır. Bu denklemlerin diferansiyel dönüşüm metodu ile bulunan çökme değerleri ve analitik olarak bulunan çökme değerleri bilgisayar desteği ile grafiksel olarak karşılaştırılmıştır. Böylelikle metot ile analitik sonucun birbirine yakın olduğu görülmüştür. Zemin–yapı modellerindeki çökme değerleri DTM ve analitik olarak tablo şeklinde verilmiştir. Katsayıları ve çözümü uzun olan diferansiyel denklemlerin DTM ile çözümü ile daha kısa sürede çözüldüğü görülmüştür. Bu durum, hesaplamalarda kullanılan bilgisayarın hafıza kapasitesini azaltmıştır. Elde edilen sonuçlara dayanarak, sunulan yöntemin kesin hesap aşamasında güvenle kullanılabileceğine inanılmaktadır.

6.2. Öneriler

Oluşturulan genel denklem sayesinde girdi değerlerini dinamik olarak alan, çökmeyi DTM ve analitik olarak karşılaştıran bilgisayar destekli görsel bir platform yapılabilir. Bu sayede elastik yapılarda oldukça önemli olan deneysel olarak maliyeti yüksek olan çökme değerleri daha kolay, maliyetsiz dinamik olarak hesap edilebilir. Çökmeye etki eden parametrelerin etki değerleri ölçülebilir. Bu tezde çökme değerlerinin analizi yapılmış denklemler ile burkulma analizi de yapılabilir.

EK-1

Bu bölümde verilen Maple 13 ile yazılan Uygulama 5.1 için prosedürleri verilmiştir. Yapılan çalışmada girdiler değiştirilerek diğer uygulamalar yapılabilir.

```
with(student):with(DEtools):
cöz1:=(666000.0000)*diff(u(x),x$4)+(6000.)*diff(u(x),x$2)
2400*u(x)=2.5:
ics1:= u(0)=0,u(1)=0,(D@@2)(u)(0)=0,(D@@2)(u)(1)=0:
f1:=simplify(rhs(dsolve({cöz1,ics1}))):
plot(f1,x=0..1,legend="Analitik Çözüm"):
evalf({subs(x=0.5,f1)}):
#DTM gecis
denklem1:=[E*ı-E*ı*N/GAK+E*ı*B/GAK]*Diff(y(x),x$4)+[N-B-
E*ı*a/GAK]*Diff(y(x),x$2)+a*y(x)=q(x):
E:=2*10^7:
GAK:=infinity:
N:=0:
B:=6000:
a:=2400:
q(x):=2.5:
ı:=0.0333:
m:=15:
for k  from 0 to m do
Q[k]:=coeftayl(2.5,x=0,k):
od:
Y[0]:=0: Y[1]:=C/(1!) : Y[2]:=0:Y[3]:= D/(3!):
for k from 0 to m do
Y[k+4]:=(Q[k]-a*Y[k](B*(k+1)*(k+2)*Y[k+2]))/((k+1)*(k+2)*(k+3)*(k+4)*E*ı)
 od:
s:=0:
 for k from 0 to m do
 s:=s+Y[k]*x^k: od:
evalf(solve({subs(x=1,diff(s,x$2)=0),subs(x=1,s=0)},[C,D])
g1:=subs({C=.1565417282e-6,D=-.1878230752e-5},s):
evalf({subs(x=0.5,g1)}):
 plot(g1,x=0..1,legend="DTM"):
with(plots):
fig1:=plot(f1,x=0..1,color=black,style=point,legend="Analitik"):
fig2:=plot(g1,x=0..1,color=red,legend="DTM"):
display({fig1,fig2}):

#(b' ye gecis)
cöz2:=(666000.0000)*diff(u(x),x$4)+(20.)*diff(u(x),x$2)+
2400*u(x)=2.5:
 ics2:= u(0)=0,u(1)=0,(D@@2)(u)(0)=0,(D@@2)(u)(1)=0:
 f2:=simplify(rhs(dsolve({cöz2,ics2}))):
```

```
plot(f2,x=0..1,legend="Analitik Çözüm"):
evalf({subs(x=0.5,f2)}):
#DTM gecis
denklem2:=[E*ı-E*ı*N/GAK+E*ı*B/GAK]*Diff(y(x),x$4)+[N-B-
E*ı*a/GAK]*Diff(y(x),x$2)+a*y(x)=q(x):
E:=2*10^7:
GAK:=infinity:
N:=20:
 B:=0:
 a:=2400:
 q(x):=2.5:
ı:=0.0333:
 m:=15:
 for k  from 0 to m do
Q[k]:=coeftayl(2.5,x=0,k):
 od:
Y[0]:=0: Y[1]:=F/(1!) : Y[2]:=0:Y[3]:= G/(3!):
 for k from 0 to m do
 Y[k+4]:=(Q[k]-a*Y[k]-(N*(k+1)*(k+2)*Y[k+2]))/((k+1)*(k+2)*(k+3)*(k+4)*E*ı)
od:
s:=0:
 for k from 0 to m do
s:=s+Y[k]*x^k: od: evalf(solve({subs(x=1,diff(s,x$2)=0),subs(x=1,s=0)},[F,G]))
g2:=subs({F=.1564011729e-6,G=-.1876825213e-5},s):
evalf({subs(x=0.5,g2)}):
 plot(g2,x=0..1,legend="DTM"):
 with(plots):
fig3:=plot(f2,x=0..1,color=black,style=point,legend="Analitik"):
 fig4:=plot(g2,x=0..1,color=red,legend="DTM"):
display({fig3,fig4}):

#(c' ye gecis)
cöz3:=(666000.0000)*diff(u(x),x$4)+(0.)*diff(u(x),x$2)+2400*u(x)=2.5:
ics3:= u(0)=0,u(1)=0,(D@@2)(u)(0)=0,(D@@2)(u)(1)=0:
f3:=simplify(rhs(dsolve({cöz3,ics3}))):
evalf({subs(x=0.5,f3)}):
plot(f3,x=0..1,legend="Analitik Çözüm"):
#DTM gecis
denklem3:=[E*ı-E*ı*N/GAK+E*ı*B/GAK]*Diff(y(x),x$4)+[N-B-
E*ı*a/GAK]*Diff(y(x),x$2)+a*y(x)=q(x):
 E:=2*10^7:
GAK:=infinity:
 N:=0:
 B:=0:
a:=2400:
q(x):=2.5:
 ı:=0.0333:
m:=15:
for k  from 0 to m do
Q[k]:=coeftayl(2.5,x=0,k): od:
```

```
Y[0]:=0: Y[1]:=H/(1!) : Y[2]:=0:Y[3]:= J/(3!):
 for k from 0 to m do
 Y[k+4]:=(Q[k]-a*Y[k])/((k+1)*(k+2)*(k+3)*(k+4)*E*ı)
od:
s:=0:
for k from 0 to m do
 s:=s+Y[k]*x^k: od:
evalf(solve({subs(x=1,diff(s,x$2)=0),subs(x=1,s=0)},[H,J]))
g3:=subs({H=.1564007033e-6,J=-.1876820517e-5},s):
evalf({subs(x=0.5,g3)}):
plot(g3,x=0..1,legend="DTM"):
with(plots): fig5:=plot(f3,x=0..1,color=black,style=point,legend="Analitik"):
 fig6:=plot(g3,x=0..1,color=red,legend="DTM"):
display({fig5,fig6}):

#(d'ye gecis)
cöz4:= (666000.0000)* diff(u(x),x$4)+ (-5980.)*diff(u(x),x$2)+2400*u(x)=2.5:
ics4:= u(0)=0,u(1)=0,(D@@2)(u)(0)=0,(D@@2)(u)(1)=0:
f4:=simplify(rhs(dsolve({cöz4,ics4}))):
evalf({subs(x=0.5,f4)}):
plot(f4,x=0..1,legend="Analitik Çözüm"):
#DTM gecis
 denklem4:=[E*ı-E*ı*N/GAK+E*ı*B/GAK]*Diff(y(x),x$4)+[N-B-
E*ı*a/GAK]*Diff(y(x),x$2)+a*y(x)=q(x):
 E:=2*10^7:
GAK:=infinity:
 N:=20:
 B:=6000:
a:=2400:
q(x):=2.5:
ı:=0.0333:
 m:=15:
for k  from 0 to m do
Q[k]:=coeftayl(2.5,x=0,k):
od:
 Y[0]:=0: Y[1]:=K/(1!) : Y[2]:=0:Y[3]:= L/(3!):
for k from 0 to m do
Y[k+4]:=(Q[k]-a*Y[k]-((N-
B)*(k+1)*(k+2)*Y[k+2]))/((k+1)*(k+2)*(k+3)*(k+4)*E*ı)
 od:
s:=0:
for k from 0 to m do
 s:=s+Y[k]*x^k: od:
evalf(solve({subs(x=1,diff(s,x$2)=0),subs(x=1,s=0)},[K,L]))
g4:=subs({K=.1562604042e-6,L=-.1875417509e-5},s):
evalf({subs(x=0.5,g4)}):
plot(g4,x=0..1,legend="DTM"):
 with(plots):
fig6:=plot(f4,x=0..1,color=black,style=point,legend="Analitik"):
fig7:=plot(g4,x=0..1,color=red,legend="DTM"):
```

```
display({fig6,fig7}):

 #(e'ye gecis)
cöz5:=(666000.0000)*diff(u(x),x$4)+(580.8139535)*diff(u(x),x$2)+2400*u(x)=2.5:
ics5:=(u)(0)=0,(u)(1)=0,(D@@2)(u)(0)=-.9084302326e-6,(D@@2)(u)(1)=-
.9084302326e-6:
f5:=simplify(rhs(dsolve({cöz5,ics5}))):
evalf({subs(x=0.5,f5)}):
plot(f5,x=0..1):
 #DTM gecis
denklem3:=[E*ı-E*ı*N/GAK+E*ı*B/GAK]*Diff(y(x),x$4)+[N-B-
E*ı*a/GAK]*Diff(y(x),x$2)+a*y(x)=q(x):
E:=2*10^7:
 GAK:=0.4*(8*10^6)*0.86:
 N:=0:
B:=0:
 a:=2400:
q(x):=2.5:
ı:=0.0333:
t:=-q(x)/GAK:
 h:=-E*ı*q(x)/GAK:
 m:=15:
 for k  from 0 to m do
Q[k]:=coeftayl(2.5,x=0,k):
 od:
 Y[0]:=0: Y[1]:=M/(1!) : Y[2]:=-.9084302326e-6/(2!): Y[3]:= L/(3!):
for k from 0 to m do
Y[k+4]:=(Q[k]-
a*Y[k]+((E*ı/GAK)*(k+1)*(k+2)*Y[k+2]))/((k+1)*(k+2)*(k+3)*(k+4)*E*ı)
 od:
 s:=0:
for k from 0 to m do
s:=s+Y[k]*x^k: od:
evalf(solve({subs(x=1,diff(s,x$2)=t),subs(x=1,s=0)},[M,L]))
 g5:=subs({M=.6106021604e-6,L=-.1876683898e-5},s):
 evalf({subs(x=0.5,g5)}):
plot(g5,x=0..1,legend="DTM"):
with(plots):
fig8:=plot(f5,x=0..1,color=black,style=point,legend="Analitik"):
fig9:=plot(g5,x=0..1, color=red, legend="DTM"):
display({fig8,fig9}):

 #(f'e gecis)
cöz6:= (667452.0349)* diff(u(x),x$4)+
(-6580.813954)*diff(u(x),x$2)+2400*u(x)=2.5:
ics6:=(u)(0)=0,(u)(1)=0,(D@@2)(u)(0)=-.9064539521e-6,(D@@2)(u)(1)=-
.9064539521e-6:
f6:=simplify(rhs(dsolve({cöz6,ics6}))):
 evalf({subs(x=0.5,f6)}):
plot(f6,x=0..1):
```

```
 #DTM gecis
denklem6:=[E*ı-E*ı*N/GAK+E*ı*B/GAK]*Diff(y(x),x$4)+[N-B-
E*ı*a/GAK]*Diff(y(x),x$2)+a*y(x)=q(x):
 GAK:=0.4*(8*10^6)*0.86:
 E:=2*10^7:
N:=0:
 B:=6000:
a:=2400:
q(x):=2.5:
 ı:=0.0333:
t:=-q(x)/(GAK+B):
 m:=15:
 for k  from 0 to m do
Q[k]:=coeftayl(2.5,x=0,k):
 od:
Y[0]:=0: Y[1]:=P/(1!) : Y[2]:=-.9064539521e-6/(2!): Y[3]:= R/(3!):
 for k from 0 to m do
 Y[k+4]:=(Q[k]-a*Y[k]+((E*ı*a-
N*GAK)/GAK)*(k+1)*(k+2)*Y[k+2])/((k+1)*(k+2)*(k+3)*(k+4)*E*ı*((GAK-
N)/GAK)):
od:
s:=0:
for k from 0 to m do
s:=s+Y[k]*x^k: od:
evalf(solve({subs(x=1,diff(s,x$2)=t),subs(x=1,s=0)},[P,R]))
g6:=subs({P=.6095674990e-6,R=-.1876152835e-5},s):
evalf({subs(x=0.5,g6)}):
 plot(g6,x=0..1,legend="DTM"):
with(plots):
fig9:=plot(f6,x=0..1,color=black,style=point,legend="Analitik"):
fig10:=plot(g6,x=0..1, color=red, legend="DTM"):
 display({fig9,fig10}):

 #(g'ye gecis)
 cöz7:= (665995.1599)* diff(u(x),x$4)+
(-560.8139535)*diff(u(x),x$2)+2400*u(x)=2.5:

 ics7:=(u)(0)=0,(u)(1)=0,(D@@2)(u)(0)=-.9084368346e-6,(D@@2)(u)(1)=-
.9084368346e-6:
f7:=simplify(rhs(dsolve({cöz7,ics7}))):
 evalf({subs(x=0.5,f7)}):
 plot(f7,x=0..1):
 #DTM gecis
 denklem7:=[E*ı-E*ı*N/GAK+E*ı*B/GAK]*Diff(y(x),x$4)+[N-B-
E*ı*a/GAK]*Diff(y(x),x$2)+a*y(x)=q(x):
E:=2*10^7:
 GAK:=0.4*(8*10^6)*0.86:
 N:=20:
 B:=0:
 a:=2400:
```

```
 q(x):=2.5:
ı:=0.0333:
 t:=-q(x)/(GAK-N):
m:=15:
 for k  from 0 to m do
Q[k]:=coeftayl(2.5,x=0,k):
 od:
Y[0]:=0: Y[1]:=S/(1!) : Y[2]:=-.9084368346e-6/(2!): Y[3]:= T/(3!):
 for k from 0 to m do
Y[k+4]:=(Q[k]-a*Y[k]+((E*ı*a-
N*GAK)/GAK)*(k+1)*(k+2)*Y[k+2])/((k+1)*(k+2)*(k+3)*(k+4)*E*ı*((GAK-
N)/GAK)):
od:
 s:=0:
for k from 0 to m do
s:=s+Y[k]*x^k: od: evalf(solve({subs(x=1,diff(s,x$2)=t),subs(x=1,s=0)},[S,T]))
g7:=subs({S=.6105615803e-6,T=-.1876183640e-5},s):
evalf({subs(x=0.5,g7)}):
plot(g7,x=0..1,legend="DTM"):
with(plots): fig12:=plot(f7,x=0..1,color=black,style=point,legend="Analitik"):
 fig13:=plot(g7,x=0..1, color=red, legend="DTM"):
 display({fig12,fig13}):
```

KAYNAKLAR

Abdel-Halim Hassan, I. H., 2004, Differential transformation technique for solving higher-order initial value problems, *Applied Mathematics and Computation, 154*(2), 299-311

Arikoğlu, A., Özkol, I. , 2005, Solution of boundary value problems for integro-differential equations by using differential transform method, *Applied Mathematics and Computation, 168*(2), 1145-1158

Bakioğlu , M., Özkan, T., 1980, Sonlu kalınlıkta zemin üzerine oturan yüzeysel temellerin hesabı hakkında bir yöntem , *Tübitak VII. Bil. Kong.*

Bodur, S., Peker, H.A., Oturanç, G., 2012, Analysis of Winkler's Model of Elastic Foundation Using Differential Transfrom Method, *III International Conference of the Georgian Mathematical Union*, Batumi

Buczkowski, R., Torbacki, W., 2001, Finite element modelling of thick plates on two parameter elastic foundation, *Int. J. For Num. and Anal. Meth. Geomech.,* 25, 1409-1427

Celep, Z., 1988, Rectangular plates resting on tensionless elastic foundation, *Journal of Eng. Mech.*,114, 2083-2092

Chen, C. K., Ho, S. H. , 1996, Application of differential transformation to eigenvalue problems, *Applied Mathematics and Computation,*79, 173-188

Cheung, M.S. 1978, A simplified finite element solution for the plates on elastic foundation, *Computers and Structures*, 8, 139-145.

Civalek Ö., Demir, Ç., 2009, Elastik zemine oturan kirişlerin ayrık tekil konvolüsyon ve harmonik diferansiyel quadrature yöntemleriyle analizi, *BAÜ FBE Dergisi,* 11, 56-71

Datta, S., 1976, Large amplitude free vibrations of irregular plates placed on an elastic foundation, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 11, 337-345.

Develi, A. G., 2007, Elastik zemine oturan timoshenko kirişinde titreşim problemi, Yüksek Lisans Tezi, *İstanbul Teknik Üniversitesi*, İstanbul, 15-20

Dillard, D.A., 1989, Bending of plates on thin elastomeric foundations, *J. Of Applied Mechanics, ASME*, 56, 382-386

Dumir, P.C. and Bhaskar, A.,1988, Nonlinear static analysis of rectangular plates on elastic foundations by the orthogonal point collocation method, *Comput. Method. In Applied Mech. And Engineering,* 67, 111-124

Eser, H., 2008, Gaz dinamik denklemlerine yeni bir yaklaşım: diferansiyel transform metodunun bir uygulaması, Yüksek Lisans Tezi, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,* Konya, 18-30

Gajendar, N., 1967, Large amplitude vibrations of plates on elastic foundations , *Int. J. Non -Linear Mech*, 2, 163-172

Hetenyi, M., 1946, Beams on elastic foundation, *The University of Michigan Press*, Ann Arbor, Michigan,

İnan, M. , 1996, Elastik Çubukların Genel Teorisi, *İstanbul Teknik Üniversitesi*, İstanbul,

İnan, M., 2001, Cisimlerin mukavemeti, *İstanbul Teknik Üniversitesi Vakfı*, İstanbul, 315-364

Karamanlidis, D., Prakash, V., 1988, Buckling and vibration analysis of flexible beams resting on an elastic half-space, *Earthquake Eng. and Structural Dynamics*, 16, 1103-1114

Katsikadelis, J.T., Armenakas, A.E., 1984. Plates on elastic foundations by BIE method, *Journal of Eng. Mech.*, 110, 1086-1105

Kayan, İ., 1992, Cisimlerin Mukavemeti, *İstanbul Teknik Üniversitesi İnşaat Fakültesi Matbaası,* İstanbul, 405-469

Keskin, Y., 2005, Diferansiyel dönüşüm yöntemiyle diferansiyel denklemlerin çözülmesi, Yüksek Lisans Tezi, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Konya, 5-30

Keskinel, F., 1970, Elastik zemine oturan sonlu kiriş tesir çizgileri ve sürekli temellerin çözümüne uygulanması, *İTÜ Mimarlık Fakültesi Yayını*, İstanbul, 5-65

Kılıç, V., 2006, Elastik zemine oturan plakların titreşimleri, Yüksek Lisans Tezi, *İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, İstanbul, 25-58

Kıral, E. ,1974, Elastik zemine oturan eğri eksenli düzlemsel çubuklar, *METU Journal of Pure and Applied Science*,7, 44-53

Lai, Y. C., Ting, B.Y., Lee, W.S., Becker, B.R., 1992, Dynamic response of beams on elastic foundation, *Journal of Structural Engineering*,118(3), 853-858

Liu, F-L, 2000, Rectangular thick plates on winkler foundation : Differential Quadrature element solution, *Int. J. Solids and Struc.*, 37, 1743-1763

Massalas, C. and Kafousias, N., 1979, Nonlinear vibrations of a cylindrical panel on a nonlinear elastic foundation, *Journal of Sound and Vibration*, 66(4), 507-512

Memmedov, Z., Gürel, M. A., 2007, Yapı Statiği I Çözümlü Örnekler, *Şanlıurfa,* 3-29

Miranda, C., Nair, K., 1966, Finite beams on elastic foundation, *J. Structal Division ASCE*, 108, 611-621

Munther, J. H., 1970, Photoelastic Study of Beams on Elastic Foundations, *Discussions ASCE*, Vol.96, 864-870

Nash, W. A., Potter, M. C., 2010, *Schaum's* Strength of Materials, *McGraw- Hill Companies*, United States, 97-143

Nath, Y, Jain, R.K., 1983, Nonlinear dynamic analysis of shallow spherical shells on elastic foundation, *Int. J. Mech. Sci., 25(6),* 409-419

Oturanç, G.,Keskin, Y., 2011, Diferansiyel Dönüşüm Yöntemiyle Diferansiyel Denklemlerin Çözülmesi , *Aybil Yayınları,* Konya, 97-126

Özdemir, Ö., 2009, Elastik zemine oturan kirişlerin sonlu titreşimi,Yüksek Lisans Tezi, *İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimler, Enstitüsü*, İstanbul,1-53

Özdoğan, G.M., 1995, İki parametreli elastik zemine oturan dairesel plak problemleri, Yüksek Lisans Tezi, *İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü,* İstanbul , 5-45

Özgan, K., 2000, Değiştirilmiş Vlasov modelini kullanarak elastik zemine oturan kirişlerin serbest titreşim analizi, Yüksek Lisans Tezi, *Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,*Trabzon, 5-28

Özkan, Ö., Keskin, Y., 2005, Yüksek mertebeden sınır değer problemlerinin diferansiyel dönüşüm methodu ile yaklaşık çözümleri, *In XVIII. Ulusal Matematik Sempozyumu,* İstanbul, 2-9

Qin, Q.H., 1994, Hybrid Trefftz finite element approach for plate bending on an elastic foundation, *Applied Math. Modelling*, 18,334-339

Shen, H-S., 2000, Nonlinear bending of shear deformable laminated plates under lateral pressure and thermal loading and resting on elastic foundation, *J.of Str. Anal.*, 35(2), 93-108

Taha, M. H., Nassar, M., 2014, Analysis of axially loaded tapered beams with general end restraints on two-parameter foundation, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics,* 52, 1, pp. 215-225

Ting, B. Y., 1982, Finite beams on elastic foundation with restraints, *J. St. Div. ASCE*, 108,611-621

Yang, T. Y., 1972, A finite analysis of plates on a two parameter foundation model, *Computers and Structres*, 2, 593-614

Yazıcı, E., 2009, Elastik zemine oturan tımoshenko kirişinin solu elemanlar yöntemiyle elastoplastik analizi, Yüksek Lisans Tezi, *İstanbul Teknik Üniversitesi,* İstanbul, 32-48

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Sema BODUR
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : Afyonkarahisar – 04.10.1987
Telefon : 05058684730
e-mail : sema.bodur@ege.edu.tr

EĞİTİM

Derece	**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise :	Cumhuriyet Lisesi, Afyonkarahisar	2006
Üniversite :	Selçuk Üniversitesi, Konya	2010
Yüksek Lisans :	Selçuk Üniversitesi , Konya	2014
Yüksek Lisans :	Ege Üniversitesi, İzmir	

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2	Ege Üniversitesi Mühendislik Fak.	Araş. Gör.

UZMANLIK ALANI Diferansiyel dönüşüm metodu, Graf teori

YABANCI DİLLER İngilizce

YAYINLAR

Bodur, S., Peker, H.A., Oturanç, G., 2012, Analysis of Winkler's Model of Elastic Foundation Using Differential Transfrom Method, *III International Conference of the Georgian Mathematical Union*, Batumi (Yüksek Lisans tezinden yapılmıştır)