



T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİHİRLİ SAYILARIN NÜKLEER TABAKA MODELİNE GÖRE BELİRLENMESİ

Figen BOSTANCI

YÜKSEK LİSANS

FizikAnabilim Dalı

Eylül–2014
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Figen BOSTANCI

Tarih:

SİHİRLİ SAYILARIN NÜKLEER TABAKA MODELİNE GÖRE BELİRLENMESİ

ÖZET

YÜKSEK LİSANS

Figen BOSTANCI

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Rıza OĞUL

2014, 47Sayfa

Jüri

Prof. Dr. Rıza OĞUL

Doç. Dr. Nihal BÜYÜKÇİZMECİ

Doç. Dr. Ömer DERELİ

Nükleer kabuk modeli, sıvı damlası modeli ve Fermi gaz modeli gibi temel nükleer modelleri inceledik. Nükleer kabuk modelini kullanarak, Hamiltoniyen içinde harmonik salınıcı potansiyelini kullanarak, bir çok atomik çekirdek için kapalı kabuk sihirli sayılarını elde etmek için, tek-parçacık durumları için Schrödinger dalga denklemini çözdük. Sonuçların, sihirli sayıların elde edilmesinde yeterince tatmin edici olmadığı görüldü. Bu güçlüğü yenmek için Hamiltoniyen içine spin-yörünge terimini ekleyerek deneysel sihirli sayıları elde etmeye çalıştık ve bu sefer tatmin edici sonuçları elde ettik.

Anahtar Kelimeler:kabuk model, nükleer modeller, sihirli sayılar, spin-yörünge etkileşmesi

DETERMINATION OF MAGIC NUMBERS WITHIN NUCLEAR SHELL MODEL

ABSTRACT

MS THESIS

Figen BOSTANCI

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCEOF
SELÇUK UNIVERSITY
DEPARTMENT of PHYSICS
Supervisor: Prof. Dr.Rıza OĞUL
2014, 47 Pages

Jury
Prof. Dr. Rıza OĞUL
Assoc. Prof. Dr. Nihal BÜYÜKÇİZMECİ
Assoc. Prof. Dr. Ömer DERELİ

We have reviewed fundamental nuclear models such as shell model, liquid drop model, and Fermi gas model. Using harmonic ossilator potential in the Hamiltonian we solved the Schrödinger equation for single particle states to obtain magic numbers for several closed shells within nuclear shell model. It is seen that the results are not satisfactory enough to reproduce the magic numbers. In order to overcome this challenge we included spin-orbit interaction term in the Hamiltonian to reproduce experimental magic numbers. This time the results were satisfactory.

Keywords: Magic numbers, nuclear models, **s**hell model, spin-orbit interactioni

ÖNSÖZ

"Sihirli Sayıların Nükleer Tabaka Modeline Göre Belirlenmesi" adlı bu çalışma Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Çalışmalarım boyunca yardım ve desteğini esirgemeyen hocam Prof. Dr. Rıza Oğul'a ve her koşulda destekçim olan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

FigenBOSTANCI

KONYA–2014

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

SİMGELER VE KISALTMALAR ..... **viii**

1.GİRİŞ **1**

2.NÜKLEER MODELLER **5**

2.1.Yarı-Deneysel Kütle Formülü 5
2.2.Sıvı Damlası Modeli 7
2.3.Dejenere Gaz Modeli 11
2.4. Nükleer Madde Tanımı ve Fermi Gaz Modeli 23
2.5.Nükleer Kabuk Modelleri (Shell Model) 31

3.SİHİRLİ SAYILARIN NÜKLEER TABAKA MODELİNE GÖRE AÇIKLANMASI **34**

3.1. Giriş 34
3.2. Harmonik Osilatör Potansiyeli ile Nükleon Enerji Düzeylerinin Hesaplanması 36
3.3.Spin-Yörünge Etkileşme Teriminin Katkısı 40
3.4. Sonuçlar 43

KAYNAKLAR **45**

ÖZGEÇMİŞ **47**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

ℓ:açısal momentum kuantum sayısı
α: alfa
k: dalga sayısı
E: enerji
α:etkileşme şiddeti
E_f: fermi enerjisi
N:kuanta sayısı
p:momentum
D: nötron fazlalığı
n:radyal kuantum sayısı
W_0:salınım açısal frekansı
$\vec{S}$:spinaçısalmomentum vektörü
W_l: titreşimin açısal frekansı
$\vec{J}$: toplamaçısal momentum vektörü
$\vec{L}$:yörüngesel açısal momentum vektörü

Kısaltmalar

MeV:Mega (Milyon) Elektron Volt

GeV: Giga Elektron Volt

1. GİRİŞ

Atomik çekirdeklerin fiziksel özelliklerinin açıklanmasında birçok model kullanılır. Her bir model farklı özellikleri açıklayabilmektedir. Bu modellerden sıvı damlası modeli nükleonların çekirdeğe bağlanma enerjisini açıklamak için iyi bir yaklaşımdır. Ayrıca sıvı-gaz faz geçişleri ile açıklanabilen nükleer parçalanma ürünleri sıvı damlası modeline dayanan istatistiksel yaklaşımlarla açıklanabilmektedir. Diğer taraftan, nükleer tabaka modeli (Shell model) nükleonların enerji düzeylerinin belirlenmesinde, manyetik ve kuadropol momentinin hesaplanmasında iyi sonuçlar verir (Ring ve ark., 2004). Bütün bu özelliklerin anlaşılması için, önce iki nükleon arasındaki etkileşme kuvvetinin bilinmesi gerekir. Ayrıca, iki serbest nükleon arasındaki etkileşme ile çekirdekteki iki nükleon arasındaki etkileşmenin farklı olduğu noktalar vardır. Örneğin, çekirdek birçok parçacığın oluşturduğu bağlı bir sistemdir ve nükleonlar bazen, kendisi dışındaki nükleonların etkileşmeleri sonucu oluşan ortalama bir alanda (meanfield) hareket ediyormuş gibi ele alınabilir. Schrödinger denklemi ile iki parçacık sistemi olan Hidrojen atomunun veya Döteronun enerji düzeyleri çok iyi şekilde belirlenirken parçacık sayısı arttıkça problem daha karmaşık hale gelir (Elton, 1959).

Sıvı damlası modeli ile atomik çekirdeklerin parçalanması incelenmelerinde de geniş ölçüde kullanılır. Bu konular nükleer fizikle birlikte Astrofizikte Süpernova patlamaları ve büzülmesi, nötron yıldızları ve steallar maddenin dinamiği gibi konuları çalışmak için önemlidir. Bu alanda hızlandırıcılarda gerçekleştirilen nükleer ağır iyon parçalanması deneylerinin sonuçlarına göre teorik modeller geliştirilmiştir ve bu modellerden birisi de istatistiksel parçalanma modelidir. Bu çalışmada atom çekirdeğinin parçalanması dinamiği istatistiksel yaklaşımlarla incelenmiştir. İstatistiksel yaklaşımın nükleer fizik alanında uygulanması, ilk kez Niels Bohr tarafından bileşik çekirdek kavramı kullanılarak, Weisskopf tarafından buharlaşma modeli, Fong tarafından istatistiksel fisyon ve Fermi-Landau tarafından çok katlı parçacık üretim teoremi kullanılarak yapılmıştır. Çok-parçacık salkım (cluster) yaklaşımı ilk kez A. Mekijan tarafından istatistiksel termodinamik kullanılarak çalışılmıştır (Mekjian, 1978). Biz bu çalışmada nükleer sıvı damlası modeli üzerine kurulan sıvı-gaz faz geçişleri teorisini kullanarak nükleer parçalanma dinamiğini çalıştık. Bir çekirdek uyarıldığı zaman (bu uyarma iki çekirdeği çarpıştırarak ya da bir çekirdeği proton, nötron ve alfa parçacıkları ile bombardıman ederek yapılabilir) sıcak ve yoğun nükleer madde oluşur. Bu sıcak ve yoğun madde kısa menzilli itici nükleon-nükleon etkileşmeleri sonucunda

genişlemeye başlar. Bu genişleme sırasında bu madde belli bir yerde termodinamik dengeye ulaşır, bunun sonucu olarak sıvı ve gaz fazındaki nükleer damlacıklar ve kabarcıklar oluşur. Bu şekilde oluşan yüksek sıcaklık ve basınç altında nükleer maddenin davranışı sıvı-gaz faz geçişleri teorisi ile incelenebilir. Bu şekilde nükleer maddenin hal denklemi belirlenerek olası sıvı-gaz faz geçişleri araştırılabilir. Nükleer fizik deneyleri modern hızlandırıcılarda yapılmaktadır. Bu hızlandırıcıların parçacıklara kazandırdığı uyarma enerjisi, MeV mertebesi ile birkaç GeV (Giga Elektron Volt) mertebesi aralığındadır. Orta ve yüksek enerjide ağır iyonlar, pionlar ve yüksek şiddetli proton ışınları üretilebilmektedir. Hedef çekirdek ile hedefe gönderilen çekirdek (projectile nuclei) veya hızlandırılan parçacıkların esnek olmayan (deep-inelastic) çarpışmaları, nükleer sistemi, nükleer taban durumdan uyarılmış durumdaki ara nükleer sisteme dönüştürebilir. Uyarma enerjisi yeterince yüksekse, çekirdeğin iç özellikleri, özellikle kabuk yapısı önemini kaybeder ve çekirdek veya hadronik maddenin uyarılmış durumdaki özellikleri araştırılabilir. İki iyonun çarpışıp kaynaşması sonucunda sistem termodinamik dengeye ulaşır. Böylece bileşik sıcak çekirdek oluşmuş olur. Standart bileşik çekirdek durumu sadece düşük uyarma enerjilerinde geçerlidir. Çünkü bu durumda hafif parçacıkların buharlaşması ve fisyon kanalları baskındır. Düşük enerjilerde bileşik çekirdekte nükleon başına 1-2 MeV uyarılma enerjisi depo edilir. Bileşik çekirdek belli bir süre yaşadıktan sonra buharlaşma veya fisyona uğrayarak bozunur. Hedef çekirdeğe gönderilen çekirdeğin veya hızlandırılmış parçacığın enerjisi arttıkça, bileşik çekirdekte depo edilen uyarılma enerjisi ve bileşik çekirdeğin sıcaklığı da artar. Ayrıca, çarpışma sonucu oluşan bileşik çekirdek sıkışır ve sistemin yoğunluğu artar. Bu yüzden yüksek enerjilerde bileşik çekirdeği, sıkışmış ve sıcak bir ara durum gibi düşünebiliriz. Bu ara durumun hayatta kalma süresi, bileşik çekirdekte depo edilen uyarılma enerjisine ve basıncına bağlıdır. Yüksek uyarılma enerjilerinde, yüksek sıcaklık ve basınçtan dolayı sistem genişleme sürecine girmeden tamamen proton ve nötronlarına ayrışır. Bu durum buharlaşma veya patlama olarak adlandırılabilir. İlk sıcaklık ve basınç çok fazla değilse sistem, genişleme süreci sonunda parçalanma yerine irili ufaklı parçalara ayrılır. Bu parçalar nükleer damlalar olarak kabul edilir. Bu olay nükleer çok katlı parçalanma (‘‘nuclear multifragmentation’’) olarak adlandırılır(Bondorf ve ark.,1995, Botvina ve ark., 1985, Botvina ve ark.,1995, Botvina ve ark.,2002, Botvina ve ark.,2004). Son yıllarda nükleer parçalanma için çok çeşitli modeller önerilmiştir. Bugünkü modeller şu şekilde gruplandırılabilir.

1. Olasılık Modelleri: Örnek olarak en küçük bilgi ilkesi, Percolation Teori, vb. gösterilebilir (Aichelin ve ark., 1984).

2. Makroskopik Modeller:Örnek olarak, Faz-Geçişleri Teorisi, Fisher Yoğunlaşma Teorisi vb. verilebilir(Goodman ve ark., 1984, Fisher 1967).

3. Mikroskobik Dinamik Modeller: Örnek olarak Zamana Bağlı Hartree-Fock Teorisi, Moleküler Dinamik Model, Kuantum Moleküler Dinamik Model gösterilebilir(Knoll ve Strack 1984, Peilert ve ark., 1989).

4. Kinetik Modeller: Örnek olarak Boltzmann-Uehling-Uhlenbeck (BUU), Vlasov-Uehling-Uhlenbeck (VUU) denklemleri, kararsız modlar yaklaşımı ve dalgalanma yaklaşımları vardır(Aichelin ve Bertsch 1985, Aichelin 1986, Bauer ve ark., 1986, Bauer ve ark., 1987, Bauer ve ark., 1992, Pethick ve Ravenhall 1987).

5.Farklı türlerde istatistiksel modeller (FREESCO, MMMC, SMM, vb.) bulunmaktadır(Mekjian 1978, Randrup ve Koonin 1981).

6. Hibrit modeller (Reaksiyonun farklı aşamalarında farklı modeller kullanılmaktadır) bulunmaktadır (Botvina ve ark., 1985).

Atomik çekirdekler uyarıldıkları zaman uyarılma enerjisi depolar ve kuvvetli etkileşen bu sistemler bu uyarılmalara karşı kollektif hareketler yaparak cevap verirler. Genellikle, kompleks sistemlerin karmaşık yapıları nedeniyle bu uyarılmalar sonucunda düzensiz ya da kargaşalı (caotic) hareketler yapması beklenirken, basit kollektif hareketler yaptıkları gözlenmiştir. Kollektif hareketler titreşim cinsinden ifade edilebilir. Eğer bulk modülü pozitifse sistem denge civarında salınımlar yapar, negatifse faz geçişlerine karşı kararsız hale gelir, noneq. states. 1947 fotonükleer reaksiyonlarda (gamma,n) toplam uyarılma enerjisi Ex=15-20 MeV'de fotonun kuvvetle absorbe edildiği yani giant resonans gözlendi. PDR (Pygmy Dipole Rezonans Ex= 8-12 MeV) ve GDR (Giant Dipole Rezonans 15-20MeV).Kuantum mekaniğinde, kararlı titreşimler bozon serbestlik dereceleri ile açıklanır. İlk bakışta bu durum, özellikle fermiyonlardan oluşan bir sistemin uyarılmaları gözönüne alındığında şaşırtıcıdır.Kollektif salınımlar mezoskopik sistemlerde görülür: He^3 sıvısındaki zero-sound fononları veya metalik klusterlardaki plasmonlar gibi. Atom çekirdeği de fononlar olarak bilinen büyük kollektif titreşim hareketleri gösterir. Dev dipol rezonanslar protonların nötronlara karşı dev kollektif hareketleri olarak anlaşılmıştır , bu tıpki metallerdeki plazmonlar, Fermi sıvılarındaki zero sounda benzetilerek sıkışma modunun monopole titreşimi gibi anlaşılmasıdır ve Giant-quadrupole rezonans da iki sıvı molekülünün kesişimindeki dalgaya benzetilen yüzey titreşimi gibi anlaşılmıştır (Chomaz, 1997).

Mikroskopik yaklaşımda, bu BOZONLAR bozon kuantum sayısına sahip FERMİYON-ÇİFTLERİ şeklinde tanımlanır. Ancak, olası fermiyon çifti sayısı fermiyon antisimetrizasyonlarının bozonik davranışı bozmayacak miktarda çok fazla olması gerekir. Aslında bozonik bir sistemde fermiyonlar Pauli ilkesi nedeniyle sistemin bozonik yapısından sapmalara neden olmaz. Dev rezonans özellikleri ve zero-sound ve sonlu sıcaklıkların nükleer reaksiyonlardaki rolü incelenir.Son zamanlara kadar, multifonon durumlar olarak adlandırılan ikincil ve daha üst kuantalar gözlenememişti. Bu nedenle dev rezonansın multipole uyarılmalarının gözlenmesi bir bilmece olarak kalmıştı. Multipole kollektif uyarılmaların mevcut olmaması bizim dev rezonansı anlamamızda zaafiyet yaratırdı. 1977'lerde dipinelastik ağır iyon çarpışmalarındaki enerji kaybı multiphonon uyarılmaları ile ilişkilendirildi ve bu yapıların dev rezonansın multiple uyarılmalarından dolayı olabileceği iddia edildi. Bu uyarılmaların kesin izleri çok yakın zamanda gözlendi (Chomaz, 1997).

Modellerdeki çok çeşitlilik, çalışılan olayın karmaşık karakterini yansıtır. 80'li yıllardan buyana yapılan çalışmalar, hiçbir modelin orta ve yüksek enerjideki bir reaksiyonda çok uyarılmış nükleer sistemlerin bozunma, oluşum ve gelişiminin yeterli tarifini tek başına vermediğini gösterir. Reaksiyonun seçilen bazı özelliklerini tanımlayan çeşitli yaklaşımları geliştirmek problemi çözmek için en uygun yol gözükmektedir. Buna göre her bir teorik modelin sonuçları ile deneysel sonuçlar sistematik olarak karşılaştırılmalıdır.Sonuç olarak hiçbir model tek başına çekirdekler hakkında bilinen bütün özellikleri açıklayamaz ve bu sebepten bu modellerin bir kısmı sırası ile incelenecektir.

2. NÜKLEER MODELLER

2.1. Yarı-Deneysel Kütle Formülü

Sıvı damlası modelinin başarılı olduğu durum atomik çekirdeklerin kütlesinin bu modele göre bulunmasıdır. Bir atomun kütlesi genellikle atomun çekirdeğinin kütlesi ile verilir, bunun nedeni elektronların kütlesinin atomun çekirdeğini oluşturan proton ve nötronların kütlesi yanında ihmal edilebilir boyutlarda olmasındandır. Çekirdeğin kütlesinin tam olarak ölçülmesi için bağlanma enerjisini etkileyen, Coulomb itmesi, yüzey gerilim etkisi, simetri enerjisi etkisi ve teklik çiftlik etkisi gibi etkenleri de içine alan gerçekçi bir formül türetmek gerekir. Böyle bir eşitliği türetmek için önce atomu oluşturan bileşenlerin kütleleri yazılır ve sonra gerekli düzeltme terimleri ilave edilir(Oğul ve Eren, 2007).Böyle bir formüle ilk yaklaşım, çekirdeği bir sıvı damlasına benzeterek Weizsacker tarafından 1935 yılında teklif edilmiştir. Buna göre, eğer bir sıvı damlası iki kat fazla sıvı taşırsa iki kat da bağlanma enerjisi taşır.

Yarı deneysel kütle formülü aşağıdaki terimlerin toplamı olarak yazılabilir:**Hacim Terimi:** Bir atomik çekirdekte A sayıda nükleon varsa

$$M_1 = -a_1 A \tag{2.1}$$

şeklinde bir bağ enerjisi olur. (-) işareti çekirdekte A arttıkça toplam bağ enerjisinin artması için daha fazla kütlenin enerjiye dönüşmesi gerektiğini anlatır.

Yüzey Gerilim Etkisi: Çekirdek yüzeyindeki nükleonlar merkezdekilere nazaran daha zayıf bağlandıkları için bağlanma enerjisini küçültücü bir etkisi vardır. Bu da yüzey gerilim enerjisini r yarıçaplı ve S yüzey gerilim katsayısı cinsinden

$$M_2=4\pi r^2 S=4\pi(r_0 A^{1/3})^2 S$$
$$=(4\pi r_0{}^2 S)A^{2/3}=a_2 A^{2/3} \tag{2.2}$$

gibi hesaplanır.

Coulomb Terimi:Çekirdekteki protonlar artı yüklü olduğu için birbirlerini iterler ve bu da bağ enerjisini azaltır. Çekirdekteki yük dağılımını yaklaşık olarak tekdüze alırsak böyle yüklü bir kürenin elektriksel potansiyel enerjisi, kürenin sonsuz küçük dilimlerinin integrasyonu şeklinde hesaplanır.

$$M_3 = \int_0^R \frac{(4\pi r^2 \rho dr)\left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho\right)}{r} = \frac{3}{5}\frac{Z^2 e^2}{R} = \frac{3}{5}\frac{e^2}{r_0}\frac{Z^2}{A^{1/3}} \quad (2.3)$$

Burada $\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ve "R=$r_0A^{1/3}$ "bağıntıları kullanılmıştır. Burada aslında $\frac{1}{2}Z(Z-1)$tane etkileşen proton çifti gözönüne alınmalıdır. Böyle bir protonu küresel gibi düşünürsek bu da bir enerji fazlalığı getirir ve Z tane proton oluşum enerjisi $3Ze^2/5R$ olarak bulunur. Bunu (M_3)'den çıkartırsak

$$M_3 = \frac{3}{5}\frac{e^2}{R}Z(Z-1) \cong \frac{3}{5}\frac{e^2}{r_0}\frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} = \text{a}_3\frac{Z^2}{A^{1/3}} \quad (2.4)$$

Asimetri Terimi: Bu terim proton ve nötron sayıları arasındaki farkın büyüklüğüne bağlıdır. En kararlı çekirdeklerde proton ve nötron sayıları birbirine yakındır yani bağ enerjileri kuvvetlidir. Bu fark arttıkça bağ enerjisi azalır. O halde A=2Z'den uzaklaştıkça pozitif bir terim

$$M_4 = \text{a}_4\frac{(A-2Z)^2}{A} \quad (2.5)$$

eklenir.

Teklik-çiftlik etkisi: Proton ve nötron sayısının tek veya çift oluşu da bağ enerjisini etkiler. Örneğin tek-tek çekirdeklerden sadece dört tane kararlı $_1H^2$, $_3Li^6$, $_5B^{10}$ ve $_7N^{14}$ çekirdekleri vardır. Tek-A çekirdekleri için sadece bir tane kararlı izobar varken, çift-A çekirdekleri için iki veya daha fazla kararlı izobar (çift N ve çift Z) vardır. İzobarlar için deneysel kütle parabolleri aşağıdaki gibidir.

Tablo2.1.Nükleon sayısının tek ve çift oluşuna göre karalı izotop sayısı

A	Z	N	İzotop Sayısı
Çift	Çift	Çift	156
Tek	Çift	Tek	50
Tek	Tek	Çift	48
Çift	Tek	Tek	5

Buna göre kütle eşitliğine δ(A,Z) gibi bir terim eklenmelidir. Böylece λ

$$\lambda = \begin{cases} -1 & A\ çift, Z\ çift, en\ kararlı \\ 0 & orta\ kararlı \\ +1 & A\ çift, Z\ tek, en\ kararsız \end{cases}$$

şeklinde tanımlanarak en deneysel uygun terim $\delta(A,Z)=\lambda a_5 A^{-3/4}$ ile verilmektedir. Bu beş etki teriminin toplamı Weizsacker'in yarı deneysel kütle formülünü verir:

$$BE = -a_1 A + a_2 A^{\frac{2}{3}} + a_3 Z^2 A^{-1/3} + a_4 \left(\frac{A}{2} - Z\right)^2 / A + \lambda a_5 A^{-3/4} \quad (2.6)$$

buradaki deneysel değerlere ayarlanmış parametriler

a_1=15.75MeV

a_2=17.8MeV

a_3=0.710MeV (2.7)

a_4=23.7MeV

a_5=34MeV

Bir atomun kütlesini yarı deneysel kütle formülü (BE)i kullanarak

$$M(A,Z)=m_H Z+m_n(A-Z)-\overline{BE}/c^2 \quad (2.8)$$

şeklinde yazabiliriz (Oğul ve Eren, 2007).

2.2. Sıvı Damlası Modeli

Atomlar arası kuvvetler kısa menzilde çekici, uzun menzilde iticidir (LennardJohnes potansiyeli). Sıvı damlasını oluşturan moleküller arası kuvvet çekirdekteki nükleonlar arası kuvvetle benzer davranış gösterdiği için, atom çekirdeğindeki nükleonlar (proton ve nötronlar) sıvı damlasını oluşturan sıvı moleküllerine benzetilmiştir. Nükleonların çekirdeğe bağlanma enerjisini veren yarı deneysel kütle formülünün başarısı iyi bir model olduğunu gösterir. Bu model, çekirdek enerjilerini ve çekirdeğin kararlılığını incelemeye uygunudur. Sıvı damlası modeli tam bir küre şeklindedir. Sıvı damlası modeli, aynı zamanda çekirdeklerin bazı uyarılmış hallerini incelemek için de kullanılır. Ancak burada yalnız sıvı damlasının ne çeşit deformasyonlar altında nükleer fisyon olayını açıklayabildiği incelenecektir (Cansoy, 1978).

Temel halde çekirdeğin, yarıçapı R olan (keskin yüzeyli) bir küre olduğu düşünülebilir. Uyarılmış bir halde bulunan çekirdeğin küre şekli bozulur (deforme olur). Bu deformasyonun çok küçük olduğu kabul edilirse, $|q| \ll 1$ olmak üzere, kürenin yarıçapı qR kadar değişir. Kürenin küresel koordinatlardaki denklemi r=R olduğundan, deformasyondan sonra çekirdek yüzeyinin denklemi r=R+qR veya r=R(1+q) olur. Küresel koordinatlarda çekirdek yüzeyinin denklemi r=r(θ, φ) şeklinde olmalıdır ve dolayısıyla q=q(θ, φ) olmalıdır. q=q(θ, φ) küresel harmonikler cinsinden

$$q(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} q_{lm} Y_{lm}(\theta,\varphi) \tag{2.9}$$

şeklinde açılabilir (Ring ve ark., 2004). Buradaq$_{lm}$lerkomplekstir ve $|q| \ll 1$ olabilmesi için $|q_{lm}| \ll 1$ olmalıdır. Eğer deformasyon zamanla değişiyorsa q$_{lm}$ler zamanın bir fonksiyonudur. Kararlı bir çekirdekte yüzey deformasyonlarının değişiminin harmonik titreşimler halinde olduğu ve q$_{lm}$lerin zamana bağlılığının

$$\ddot{q}_{lm} + w_l^2 q_{lm} = 0 \tag{2.10}$$

diferansiyel denklemi ile yazılabilir; burada W$_l$, titreşimin açısal frekansıdır. Üniform bir yük dağılımına sahip ve yüzey gerilim katsayısı α olan bir sıvı damlası için titreşim frekansının

$$W_l^2 = \frac{l(l-1)}{\rho R^3}\left[\alpha(l+2) - \frac{3}{2\pi}\frac{Z^2e^2}{R^3}\frac{1}{2l+1}\right] \tag{2.11}$$

bağıntısı ile verildiği gösterilebilir; burada Ze sıvı damlasının toplam elektrik yükü, ρ sıvı damlasının kütle yoğunluğu ve R de titreşimin denge durumunda damlanın küresel yüzeyinin yarıçapıdır (Cansoy, 1978).

Çekirdek yüzeyinin denklemi (2.9)'a göre

$$r = R\left[1 + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-1}^{1} q_{lm}\ Y_{lm}(\theta,\varphi)\right] \tag{2.12}$$

veya

$$r = R\left[1 - \frac{q_{0,0}}{\sqrt{4\pi}} + \sum_{m=-1}^{1} q_{1m} Y_{1m}(\theta,\varphi) + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} q_{lm} Y_{1m}(\theta,\varphi)\right] \tag{2.13}$$

şeklinde yazılabilir. (2.13) de parantezin içindeki ikinci terim çekirdeğin toplam hacminin değişimine bağlıdır ve eğer çekirdeğin toplam hacminin deformasyon esnasında sabit kaldığı düşünülürse $q_{0,0}$=0 olur. Üçüncü terim ise, çekirdeğin bir bütün halinde yaptığı öteleme hareketidir. Bizi öteleme hareketi değil, sadece saf çekirdek deformasyonları ilgilendirdiğinden q_{lm}=0 olmalıdır. Böylece (2.11) ile verilen, çekirdeğin yüzeyinin saf deformasyonlarına ait titreşim frekansları l=0 ve l=1 için sıfır olur. Buraya kadar ki sonuçlar klasik mekaniğe dayanır ve ispatları çok uzun olduğu için yazılmayacaktır.

En alçak seviyedeki uyarılmış haller l> 2 için q_{lm}=0 ve $q_{2m} \neq 0$ ile verilir ve (2.13) bağıntısı

$$r=R[1+\sum_{m=-2}^{2} q_{2m}Y_{2m}(\theta,\varphi)] \tag{2.14}$$

şeklini alır. (2.14) bağıntısı ile ifade edilen deformasyonlara kuvadrupol deformasyonlar adı verilir. Diğer yandan (2.11) bağıntısı da l=2 için

$$w_2^2 = \frac{2}{\rho R^3}\left[4\alpha - \frac{3}{10\pi}\frac{Z^2e^2}{R^3}\right] \tag{2.15}$$

gösterilebilir. Çekirdeğin kararlı kalabilmesi için, yüzey deformasyon hareketlerinin harmonik titreşimlerden ibaret, yani, periyodik olması gerekir. Bu da ancak W_2nin reel veya w_2^2 nin pozitif olması ile mümkündür. Çünkü (2.10) denkleminin

$$q_{2m} = (q_{2m})_0 e^{-iw_2 t}, \quad q_{2m} = (q_{2m})_0 e^{iw_2 t} \tag{2.16}$$

şeklindeki çözümünde μ reel ve pozitif bir büyüklük olmak üzere W_2=i μ yazılırsa

$$q_{2m} = (q_{2m})_0 e^{+\mu t} \text{ve} q_{2m} = (q_{2m})_0 e^{-\mu t} \tag{2.17}$$

bulunur; bu da çekirdek yüzeyinin bazı kısımlarının devamlı dışarı doğru, bazı kısımlarının da devamlı içeri doğru harekete başladığını ifade eder, yani, çekirdek bölünmeye başlamış demektir. O halde çekirdeğin kararlılık şartı

$$4\alpha - \frac{3}{10\pi}\frac{\mathrm{Z}^2 e^2}{\mathrm{R}^3} > 0 \tag{2.18}$$

veya

$$\frac{\mathrm{Z}^2 e^2}{R^3} < \frac{40}{3}\pi\alpha \tag{2.19}$$

şeklinde yazılabilir. $R^3=r_0{}^3A$ olduğundan

$$\frac{Z^2 e^2}{R^3} = \frac{Z^2}{A}\cdot\frac{e^2}{r_0^3} = \frac{5}{3}a_3\frac{Z^2}{A}\cdot\frac{1}{r_0^2} \tag{2.20}$$

yazılabilir. Diğer yandan, yüzey gerilimi

$$a_2 A^{2/3} = \alpha \cdot 4\pi R^2 = 4\pi r_0^2 \alpha A^{2/3} \tag{2.21}$$

şeklinde yazılabilir; o halde

$$a_2=4\pi r_0^2\ \alpha \tag{2.22}$$

elde edilir. Böylece, (2.19) kararlılık şartı

$$\frac{1}{\mathrm{r}_0^2}\cdot\frac{5}{3}a_3\frac{\mathrm{Z}^2}{A} < \frac{40}{3}\pi\frac{a_2}{4\pi\mathrm{r}_0^2} \tag{2.23}$$

veya

$$\frac{5}{3}a_3\frac{\mathrm{Z}^2}{A} < \frac{10}{3}a_2 \tag{2.24}$$

veya

$$\frac{\mathrm{Z}^2}{A} < \frac{2\mathrm{a}_2}{\mathrm{a}_3} \tag{2.25}$$

şeklinde yazılır. a_2=17.804 MeV ve a_3=0.7103 MeV olduğundan

$$\frac{2a_2}{a_3} = \frac{35.608}{0.7103} \cong 50.13 \tag{2.26}$$

bulunur ve kararlılık şartı olarak

$$\frac{Z^2}{A} < 50.13 \tag{2.27}$$

sonucuna varılır. Şüphesiz

$$\frac{Z^2}{A} > 50.13 \tag{2.28}$$

şartı da kendiliğinden fisyon yapma şartıdır. Bu şart sağlandığı zaman, fisyon yalnız kendiliğinden olmakla kalmaz aynı zamanda ani olur.

En ağır çekirdeklerin bu limite yaklaşması ilginçtir. ^{238}U için $\frac{Z^2}{A}$=35.563'tür. (2.27) şartı, gözlenenlerden daha ağır çekirdeklerin bulunmayışının esas sebebi olarak düşünülebilir. (2.27) in kullanılması ile, Z≅140 ve A≅390 oluncaya kadar ani fisyonun meydana gelemeyeceğiaçıklanabilir (Cansoy, 1978).

2.3. Dejenere Gaz Modeli

Nükleon çiftlerinin arasındaki kuvvetler ihmal edilirse ve nükleonlardan her birine tesir eden toplam kuvvet, bütün nükleonların belirli V hacmine sahip $R = r_0 A^{1/3}$yarıçapındaki bir küre içine hapsedilmiş olması ile belirlenirse, bu durumda çekirdek kendisini işgal eden parçacıkların söz konusu küresel kap içerisinde serbestçe hareket edebildiği bir gaz olarak bakılabilir. Böyle bir inceleme ile çekirdek tamamen dejenere bir gaz olarak düşünülebilir. Bu durumda çekirdek tamamen dejenere bir gaz olarak ortaya çıkar ve klasik gazdakinin tersine bütün en aşağı enerji seviyeleri doldurulur. Çünkü bir çekirdeğin hacmi kadar küçük bir hacme kapatılmış bir gazda enerji seviyelerinin aralıkları birkaç MeV(Mega Elektron Volt) mertebesindedir. İlk birkaç uyarılmış halin uyarılma enerjileri bundan daha büyük olamayacağından, temel hal ve ilk birkaç uyarılmış hal hemen hemen tamamen dejenere olmalıdır. Böyle bir gazın kuantum istatistiğine göre incelenmelidir ve parçacıklar anti-simetrik

olduklarından Fermi-Dirac istatistiği kullanılmalıdır. Parçacıkların birbiriyle etkileşmediği düşünüldüğünde, dışarlama ilkesi tam olarak uygulanmaktadır ve herhangi iki parçacık tam olarak aynı kuantum sayılarına sahip olamaz. Parçacıklar iki spin halinden birinde (spin yukarı veya spin aşağı durum) bulunabildiklerinden her momentum halinde en fazla iki parçacık bulunabilir. Bu model yüzey etkilerini tamamen ihmal eder ve böyle enerji seviyeleri gibi sayısal sonuçlar çoğu kez doğru değildir.

Dejenere bir Fermi-Dirac gazının klasik bir gazdan gerçekten çok farklı olduğuna dikkat edilmelidir. Eğer klasik bir gazda sıcaklık sabit basınçta düşürülürse, parçacıklar arasındaki çarpışmalar sıklaşır ve böylece parçacıkların ortalama serbest yörüngesi gazın hacim boyutlarına nazaran daha kısa olur. Dejenere birFermi-Dirac gazında bütün en aşağı haller işgal edilmiştir. Böylece parçacıklar arasındaki büyük kuvvetlerin normal bir sonucu olan momentum ve enerji transferi Paulidışarlama ilkesi tarafından yasaklanır. Çünkü eğer bir parçacık momentumu ve enerjisini bir diğerine transfer ederse, bu diğer parçacık diğer bir hale geçmelidir, bu diğer hal ise tamamen dejenere bir gazda önceden işgal edilmiştir. Böylece dejenere bir Fermi-Dirac gazında bir parçacığın ortalama serbest yörüngesi hacim boyutlarına nazaran daha uzundur. Önce, gazdaki verilmiş bir E enerjisinden veya verilmiş bir p momentumundan daha küçük bir enerjiye veya bir momentuma sahip bir cins parçacıklara (nötronlara veya protonlara) ait hallerin sayısını hesaplayacağız. Parçacıkların, hacmi V ve bir kenarının uzunluğu L olan küp şeklindeki bir kutu içerisinde hareket ettikleri düşünülürse sonuca kolayca varılabilir. Aynı hacme sahip küresel bir kutu için sonuç orta ve ağır çekirdeklerde yüzde 25 kadar daha aşağıdadır, fakat burada yalnız büyüklük mertebelerine baktığımızda sonuçları doğrudan doğruya veren küp şeklindeki bir kutu kullanacağız.

Her bir parçacığın dalga denklemi

$$\nabla^2\psi + \frac{2M}{\hbar^2}E\psi = 0 \qquad (2.29)$$

şeklinde elde edilir. Eğer

$$\left.\begin{array}{c} 2ME = p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \\ p_x = \hbar k_{x,} \quad p_y = \hbar k_{y,} \quad p_z = \hbar k_z \quad p = \hbar k \\ \frac{2M}{\hbar^2} E = k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \end{array}\right\} \tag{2.30}$$

bağıntıları kullanılırsa (2.29) denklemi

$$\frac{\partial 2\,\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial 2\,\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial 2\,\psi}{\partial z^2}+(k_x{}^2+k_y{}^2+k_z{}^2)\,\psi=0 \tag{2.29`}$$

şeklinde de yazılabilir. Eğer (2.29`) denkleminde

$$\Psi(x,y,z)\equiv u(x)v(y)w(z) \tag{2.31}$$

yazılacak ve her iki taraf ψ ye bölünecek olursa

$$(\frac{1}{u}+\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{u}}{\mathrm{dx}^2}+k^2{}_x)+(\frac{1}{v}+\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{v}}{\mathrm{dy}^2}+k^2{}_y)+(\frac{1}{w}+\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{w}}{\mathrm{dz}^2}+k^2{}_z)=0 \tag{2.32}$$

Değişkenlere ayrılmış denklemi vardır. Böylece aşağıdaki adi diferansiyel denklemler ve genel çözümleri elde edilir:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{u}}{\mathrm{dx}^2}+k_x^2u=0 \;\longrightarrow u=B_1\cos k_x x+B_2\sin k_x x$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{v}}{\mathrm{dy}^2}+k_y^2v=0 \longrightarrow v=C_1\cos k_y y+C_2\sin k_y y$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{w}}{\mathrm{dz}^2}+k_w^2=0 \longrightarrow w=D_1\cos k_z z+D_2\sin k_z z$$

Böylece (2.29`) denkleminin genel çözümü

$$\Psi=A(B\cos k_x x+\sin k_x x)(C\cos k_y y+\sin k_y y)(D\cos k_z z+\sin k_z z)$$

şeklinde elde edilebilir, daima A≠0 olmalıdır. Parçacıklardan her biri kübün içerisine hapsedilmiş olduğundan, dalga fonksiyonu kübün altı duvarının her birinde sıfır olmalıdır:

$\Psi(0,y,z)= \Psi(x,0,z)= \Psi(x,y,0)=0$

$\Psi(L,y,z)= \Psi(x,L,z)= \Psi(x,y,L)=0$

Bu sınır şartlarından ilk üçü kullanılırsa

$0= \Psi(0,y,z)=AB(C\cos k_y y+\sin k_y y)(D\cos k_z z+\sin k_z z) \longrightarrow B=0$

$0= \Psi(x,0,z)=AC(B\cos k_x x+\sin k_x x)(D\cos k_z z+\sin k_z z) \longrightarrow C=0$

$0= \Psi(x,y,0)=AD(B\cos k_x x+\sin k_x x)(C\cos k_y y+\sin k_y y) \longrightarrow D=0$

elde edilir. O halde (2.29`) nün çözümü

$$\Psi=A\sin k_x x\sin k_y y\sin k_z z \tag{2.33}$$

şeklinde elde edilir. Şimdi de yukardaki sınır şartlardan son üçü kullanılırsa

$0=\Psi(L,y,z)=A\sin k_x L\sin k_y y\sin k_z z \longrightarrow \sin k_x L=0 \longrightarrow k_x L=\pi n_x$

$0= \Psi(x,L,z)=A\sin k_x x\sin k_y L\sin k_z z \longrightarrow \sin k_y L=0 \longrightarrow k_y L=\pi n_y$

$0= \Psi(x,y,L)=A\sin k_x x\sin k_y y\sin k_z L \longrightarrow \sin k_z L=0 \longrightarrow k_z L=\pi n_z$

veya

$$k_x=\frac{\pi}{L}n_x,\ k_y=\frac{\pi}{L}n_y, k_z=\frac{\pi}{L}n_z \tag{2.34}$$

şeklinde elde edilir ve burada n_x,n_y,n_z pozitif tam sayılardır. (Negatif tam sayılar yeni çözümler vermez). (2.34) bağıntıları (2.32) bağıntılarının sonuncusunda yerine yazılırsa gazın

$$E=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ML^2}(n_x^2+n_y^2+n_z^2) \tag{2.35}$$

şeklindeki, kuantize enerji seviyeleri bulunabilir. Enerjileri E den veya momentumları p den veya dalga sayıları k'dan küçük olan haller

$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 < k^2$yani $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 < \frac{L^2}{\pi^2}k^2$ (2.36)

ile verilir. Bu eşitsizliği sağlayan farklı (n_x, n_y, n_z)kombinasyonlarının sayısı, yarıçapı $\frac{L}{\pi}k$olan bir kürenin bir oktanın (yani sekizde birinin) içinde bulunan birim aralıklı bir kübik kafesin köşe noktalarının sayısı ile verilir; buradaki oktan $n_x, n_y, n_z >$ 0oluşundan ortaya çıkar. Fakat söz konusu kübik kafesin köşe noktalarının sayısı (n_x, n_y, n_z) uzayında oktanın hacminden ibarettir. Şimdi (n_x, n_y, n_z)uzayında Kartezyen koordinatlar demek olan (n_x, n_y, n_z)yerine (r,θ,φ) küresel koordinatlara geçilirse:

$$n_x = rsin\theta\cos\varphi, \qquad n_y = rsin\theta\sin\varphi \qquad n_z = rcos\theta$$

bulunur ve böylece

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = r^2 \tag{2.37}$$

yazılabilir. O halde (2.36) bağıntısı,

$$r < \frac{L}{\pi}k \tag{2.36'}$$

şeklinde de gösterilebilir. Oktan içerisinde bulunan ve yarıçapları r ile r+dr arasında olan küre oktanları arasındaki kafes noktalarının sayısı, bu küre oktanları arasındaki hacme eşit olacağından,

$$N(r)dr = \frac{1}{8}d\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) \equiv \frac{1}{2}\pi r^2 dr \tag{2.38}$$

yazılabilir. (2.37) bağıntısı kullanılarak (2.35) bağıntısı

$$E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ML^2}r^2$$

şeklinde elde edilebilir. Bu bağıntıdan

$$E^{1/2} = \frac{\pi\hbar}{2^{1/2}\, M^{1/2} L} r, \qquad dE = \frac{\pi^2\hbar^2}{ML^2} r dr$$

bağıntıları ve dolayısı ile

$$E^{\frac{1}{2}} dE = \frac{\pi^3\hbar^3}{2^{\frac{1}{2}} M^{\frac{3}{2}} L^3} r^2 dr \equiv \frac{2^{\frac{1}{2}}\pi^2\hbar^3}{M^{\frac{3}{2}} L^3} . \frac{1}{2} \pi r^2 dr$$

bağıntısı elde edilir. Bu son bağıntı (2.38) bağıntısı ile karşılaştırılırsa

$$E^{\frac{1}{2}} dE = \frac{2^{\frac{1}{2}}\pi^2\hbar^3}{M^{\frac{3}{2}} L^3} N(r) dr \qquad (2.39)$$

şeklinde yazılır. Yarıçapları r ile r+dr arasında olan oktanlar arasındaki kafes noktalarının sayısı, enerjileri E ile E+dE arasında olan parçacıkların sayısına eşit olmalıdır. Çünkü sistemin dejenereliği, (2.35) bağıntısı gereğince muhtelif (n_x, n_y, n_z)kombinasyonları için aynı bir E enerjisinin elde edilebilmesine dayanır; ve böyle belirli bir E enerjisi de belirli bir r yarıçapı verir. O halde

N(r)dr=N(E)dE

yazılabilir ve (2.39) bağıntısından

$$N(E)dE = \frac{M^{\frac{3}{2}} V}{2^{\frac{1}{2}}\pi^2\hbar^3} E^{\frac{1}{2}} dE \qquad (2.40)$$

elde edilir; burada $V=L^3$bağıntısı kullanılmıştır.
(2.36) bağıntısındaki k dalga sayısı maksimum bir k_{max} dalga sayısını ifade etmektedir ve$k^2 < k_{max}^2$ veya

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 < k_{max}^2$$

yazmak daha doğrudur. Bu maksimum kmax dalga sayısına tekabül eden (maksimum) enerjiye Fermi enerjisi adı verilir veE_f ile gösterilir. O halde

$$E_f = \frac{\hbar^2 k_{max}^2}{2M}$$

yazılabilir. Her bir enerji halinde 1/2 spinine sahip iki parçacık bulunabildiğini hatırlayarak,E_f maksimum enerjisine kadar bütün enerjilere sahip parçacıkların toplam sayısı şöyle bulunabilir:

$$N=\int_0^{E_f} 2N(E)dE = 2\frac{M^{3/2}V}{2^{1/2}\pi^2\hbar^3}\int_0^{E_f} E^{1/2}\,dE = \frac{2^{1/2}M^{3/2}V}{\pi^2\hbar^3}.\frac{2}{3}E_f^{3/2}$$

$$N = \frac{2^{3/2}M^{3/2}V}{3\pi^2\hbar^3}E_f^{3/2} \qquad (2.40')$$

buradan

$$\frac{N}{V} = \frac{2^{3/2}M^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3}E_f^{3/2}$$

veya

$$E_f = \frac{3^{2/3}\pi^{4/3}\hbar^2}{2M}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} \qquad (2.41)$$

elde edilir. Burada $\frac{N}{V}$, parçacıkların sayısal yoğunluğudur. Şimdi sistemdeki parçacıkların toplam enerjisini bulalım; şüphesiz toplam enerji, parçacık başına ortalama $\vec{E}$ enerjisi ile parçacıkların N toplam sayısının çarpımıdır:

$$N\bar{E} = \int_0^{E_f} 2N(E)EdE = \frac{2^{1/2}M^{3/2}V}{\pi^2\hbar^3}\int_0^{E_f} E^{3/2}\,dE = \frac{2^{1/2}M^{3/2}V}{\pi^2\hbar^3}.\frac{2}{5}E_f^{5/2}$$

$$E_t = N\bar{E} = \frac{2^{3/2}M^{3/2}V}{3\pi^2\hbar^3}E_f^{3/2}.\frac{3}{5}E_f.$$

Buradan, (2.40′) bağıntısından faydalanarak,

$$N\bar{E} = N.\frac{3}{5}E_f$$

elde edilir. O halde, parçacık başına ortalama enerjinin ifadesi

$$\bar{E} = \frac{3}{5}E_f \tag{2.42}$$

şeklinde olur. Buraya kadar sadece bir cins parçacığa ait hesaplar yapıldı. Parçacıkların toplam sayısı N olduğuna göre bu parçacıkların nötronlar oldukları söylenebilir. N yerine Z alınmak suretiyle protonlar için de benzer formüller yazılabilir.

$V = \frac{4}{3}\pi r_0^3 A$olduğundan, (2.41) bağıntısı

$$E_f = \frac{3^{2/3}\pi^{4/3}\hbar^2}{2M}\frac{1}{\left(\frac{4}{3}\pi\right)^{2/3} r_0^2}\left(\frac{N}{A}\right)^{2/3}$$

veya

$$E_f = \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{\hbar^2}{2Mr_0^2}\left(\frac{N}{A}\right)^{\frac{2}{3}}$$

şeklinde yazılabilir. Eğer C=$\left(\frac{9\pi}{4}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{\hbar^2}{2Mr_0^2}$ koyacak olursak nötronlara ve protonlara ait Fermi enerjileri

$$E_{fn} = C\left(\frac{N}{A}\right)^{2/3}, E_{fp} = C\left(\frac{Z}{A}\right)^{2/3} \tag{2.43}$$

ve toplam enerjiler de

$$E_{tn} = \frac{3}{5}NE_{fn} = \frac{3}{5}C\frac{N^{5/3}}{A^{2/3}}, \quad E_{tp}\,\frac{3}{5}ZE_{fp} = \frac{3}{5}C\frac{Z^{5/3}}{A^{2/3}} \tag{2.44}$$

şeklinde olur. Burada C≅52 MeVdir.

Artık bir çekirdeğin E(N, Z) toplam kinetik enerjisini veren formülü yazabiliriz:

$$E_{tn} + E_{tp} = \frac{3}{5}\frac{C}{A^{\frac{2}{3}}}\left(N^{\frac{5}{3}} + Z^{\frac{5}{3}}\right) \tag{2.45}$$

Şimdi verilmiş bir A için minimum toplam kinetik enerjiyi arayalım. N+Z=A olduğunu hatırlayarak

$$\delta E = \frac{3}{5}\frac{C}{A^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{5}{3}N^{\frac{2}{3}}\delta N + \frac{5}{3}Z^{\frac{2}{3}}\delta Z\right)$$

veya

$$\delta E = \frac{C}{A^{\frac{2}{3}}}\left(N^{\frac{2}{3}}\,\delta N + Z^{\frac{2}{3}}\delta Z\right), \quad \delta N + \delta Z = 0$$

yazılabilir. Böylece,

$$\delta E = \frac{C}{A^{\frac{2}{3}}}\left(N^{\frac{2}{3}} - Z^{\frac{2}{3}}\right)\delta N = 0$$

şartı N=Z=$\frac{A}{2}$ şartını verir. O halde

$$E_{min} = E\left(\frac{1}{2}A,\ \frac{1}{2}A\right) = \frac{3}{5}.\frac{C}{A^{2/3}}.2.\left(\frac{A}{2}\right)^{5/3} \equiv \frac{3}{5}2^{1/3}C\,\frac{A}{2} \equiv \frac{3}{5}\frac{C}{2^{2/3}}A \tag{2.46}$$

veya

$$E_{min} \cong 20A\ MeV (2.46')$$

elde edilir. Böylece, minimum toplam kinetik enerji halinde çekirdekteki bir nükleonun ortalama kinetik enerjisi 20 MeV olur. Diğer yandan, (2.43) ve (2.44) bağıntılarına

nazaran$E_{fn} = E_{fp} = E_f$ ve $E_{tn} = E_{tp} = \frac{1}{2}E_t$ olacağından, E(N, Z) $\equiv E_t = \frac{3}{5}AE_f$ ve gene $\bar{E} = \frac{3}{5}E_f$ olur. O halde, nükleon başına maksimum kinetik enerji $E_f = \frac{5}{3}\bar{E} = \frac{100}{3} \cong 33\ MeV$ olur. Bu sonuç, dalga boylarını düşünerek elde edilen sonuçlardan biraz daha büyüktür. Orta ve ağır çekirdeklerde son nükleonun bağ enerjisinin 8 MeV kadar olduğuna dikkat edilirse, ortalama potansiyel kuyusunun derinliği yaklaşık olarak 41 MeV olur.

Yukarıdaki hesaplar bir izobara ait minimum toplam kinetik enerji için yapıldı. Minimum toplam kinetik enerji için çekirdek en kararlı haldedir ve Z=N=$\frac{A}{2}$ için gerçekleşir; o halde, nötron veya proton fazlalığı olmadığı zaman çekirdek en kararlı halde bulunur. Eğer bir nötron veya proton fazlalığı varsa toplam kinetik enerji minimum toplam kinetik enerjiden itibaren bir miktar artar. Şimdi bu artmayı verilmiş bir izobar için, yani, verilmiş bir A için hesaplayalım. Eğer söz konusu artma f_A ile gösterilirse

$$f_A = E(N,Z) - E_{min} = E(N,Z) - \left(\frac{1}{2}A, \qquad \frac{1}{2}A\right)$$

yazılabilir; bu ifadede (2.45) ve (2.46) bağıntıları yerlerine yazılırsa

$$f_A = \frac{3}{5}.\frac{C}{A^{2/3}}\left[N^{5/3} + Z^{5/3} - 2\left(\frac{A}{2}\right)^{5/3}\right]$$

elde edilir. Şimdi nötron fazlalığını D ile gösterelim; o halde D=$\frac{1}{2}(N - Z)$ yazılabilir. Bu bağıntı ile A=N+Z bağıntısından N ve Z çözülürse

$$N = \frac{1}{2}A + D, \qquad Z = \frac{1}{2}A - D$$

bulunur. O halde,

$$f_A = \frac{3}{5}.\frac{C}{A^{2/3}}\left[\left(\frac{1}{2}A + D\right)^{5/3} + \left(\frac{1}{2}A - D\right)^{5/3} - 2\left(\frac{1}{2}A\right)^{5/3}\right]$$

sonucuna varılır. Herhangi bir gerçek çekirdek için D küçük olduğundan, f_A 'yı D^2'ye kadar seriye açabiliriz. Eğer

$F(t) \equiv t^{\frac{5}{3}}$

$$\left(\frac{1}{2}A + D\right)^{\frac{5}{3}} \equiv F\left(\frac{1}{2}A + D\right)$$

alınırsa, F fonksiyonu $\frac{1}{2}A$ civarında Taylor serisine açılabilir:

$$F\left(\frac{1}{2}A + D\right) \cong F\left(\frac{1}{2}A\right) + DF'\left(\frac{A}{2}\right) + \frac{1}{2}D^2F''\left(\frac{A}{2}\right)$$

diğer yandan,

$F(t)= t^{5/3}, \quad F'(t) = \frac{5}{3}t^{2/3}, \quad F''(t) = \frac{5}{3}.\frac{2}{3}t^{-1/3}$

olduğundan,

$$\left(\frac{1}{2}A + D\right)^{5/3} \cong \left(\frac{1}{2}A\right)^{\frac{5}{3}} + D.\frac{5}{3}.\left(\frac{1}{2}A\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}D^2.\frac{5}{3}.\frac{2}{3}.\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1/3}$$

ve benzer şekilde

$$\left(\frac{1}{2}A - D\right)^{5/3} \cong \left(\frac{1}{2}A\right)^{\frac{5}{3}} - D.\frac{5}{3}.\left(\frac{1}{2}A\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}D^2.\frac{5}{3}.\frac{2}{3}.\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1/3}$$

elde edilir. Buradan

$$\left(\tfrac{1}{2}A + D\right)^{5/3} + \left(\tfrac{1}{2}A - D\right)^{5/3} \cong 2.\left(\tfrac{1}{2}A\right)^{\frac{5}{3}} + D^2.\tfrac{10}{9}.\left(\tfrac{1}{2}A\right)^{-1/3}$$

veya

$$\left(\frac{1}{2}A+D\right)^{5/3}+\left(\frac{1}{2}A-D\right)^{5/3}-2.\left(\frac{1}{2}A\right)^{\frac{5}{3}}\cong\frac{10}{9}.\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1/3}D^2\equiv\frac{10.2^{1/3}}{9}\frac{D^2}{A^{1/3}}$$

bulunur. O halde,

$$f_A\cong\frac{3.10.2^{\frac{1}{3}}}{5.9}.\frac{C}{A^{\frac{2}{3}}}.\frac{D^2}{A^{1/3}}$$

veya

$$f_A\cong\frac{1}{3}.2^{4/3}C\frac{D^2}{A}$$

veya

$$f_A\cong\frac{1}{3}.2^{\frac{4}{3}}C\frac{\left(\frac{1}{2}A-Z\right)^2}{A}\cong44\frac{\left(\frac{1}{2}A-Z\right)^2}{A}\ MeV \qquad (2.47)$$

elde edilir. $f_A$daima pozitiftir, yani, E_{min} gerçekten minimum toplam kinetik enerjidir. Diğer yandan, potansiyel kuyusunun derinliği N, Z ve A'dan bağımsız olduğu için, N=Z=$\frac{A}{2}$ şartını sağlayan çekirdek en küçük enerjiye sahip olan izobardır.

D'nin ifadesi ile karşılaştırılacak olursa $T_3=-D$ ilginç sonucu elde edilir. O halde (2.47) bağıntısı

$$f_A=44.\frac{T_3^2}{A} \qquad (2.47')$$

şeklinde de yazılabilir, yani, minimum enerjiye nazaran artmalar izo-spinin karesiyle orantılıdır.

Buraya kadar protonlar arasındaki Coulomb etkileşmesi ihmal edildi. Üniform olarak elektrikle yüklü çekirdek yarıçapı R olan bir küre şeklinde ise, çekirdek içerisindeki protonlardan her biri

$$V = \frac{Z}{2}\frac{e}{R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Elektrostatik potansiyeli altında hareket eder. Bu da proton kuyusunun dibini nötron kuyusunun dibine nazaran eV kadar yükseltir. R=$r_0 A^{1/3}$ olduğunu hatırlayarak

$$eV = \frac{Ze^2}{2r_0 A^{1/3}}\left(3 - \frac{r^2}{r_0^2 A^{2/3}}\right) \tag{2.48}$$

yazılabilir. Ağır bir çekirdek için bu fark oldukça büyüktür. Mesela, ^{208}Pb için elektrostatik potansiyel merkezde 25 MeV'den çekirdek yüzeyinden 16 MeV'e kadar değişir. Bu sebepten ağır bir çekirdekte protonların sayısı nötronların sayısından daha azdır (Cansoy, 1978).

2.4. Nükleer Madde Tanımı ve Fermi Gaz Modeli

Atom çekirdeğinin karmaşık yapısının hesaplamaları daha kolaylaştırmak için bazı varsayımlar yapılmıştır. Daha önce incelenen yarı-deneysel kütle formülünde bir tek nükleon başına düşen enerjiyi tekrar yazarsak

$$\frac{E}{A} = -16 + 18.56A^{-\frac{1}{3}} + 0.717Z^2A^{-\frac{4}{3}} + 23.7(\frac{A}{2} - Z)^2/A^2 + 34\ \lambda A^{-7/4} \tag{2.49}$$

Şimdi bu terimde nükleon sayısı A'nın sonsuza gittiğini ve protonlar arasındaki Coulomb itmesini ihmal edersek bu yeni çekirdek maddesine Sonsuz Nükleer Madde denir. Son 20 yılda bu madde üzerine çok sayıda araştırma yapılmıştır. Çünkü söz konusu madde, sadece çekirdek maddesi olarak kalmaz ve nötron yıldızlarının yapısında, süpernovanın büzülmesi ve patlaması teorisinde de araştırma konusudur. Simetrik nükleer maddede proton ve nötron sayısı eşit alınır ve proton oranı x_p=0.5 olarak alınır. Nötron yıldızlarında x_p çok daha düşük orandadır. Yarı-deneysel kütle formülünde $A \rightarrow \infty$alınırsa nükleon başına bağlanma enerjisi -16 MeV olarak bulunur. Böylece, bazen literatürde (infinitenuclearmatter) sonsuz nükleer madde terimi bu yüzden kullanılır. Sonlu nükleer maddede ise (finitenuclearmatter) coulomb etkileşmesi, yüzey gerilimi gibi etkiler dışarlanamaz, bu durumda doymuş bir çekirdek için

bağlanma enerjisi -8 MeV civarındadır. Ayrıca elektronun ağır çekirdekten saçılma deneylerinde doymuş bir çekirdeğin merkezi civarında sayısal yoğunluğu $n_0 = 0.16 fm^{-3}$ olarak bulunmuştur. O halde sonsuz nükleer madde için (T=0) (1fm=$10^{-13} cm$)

$$E_f = \frac{\hbar^2 k_f^2}{2m}$$

$$\frac{E}{A} = -16\ MeV$$

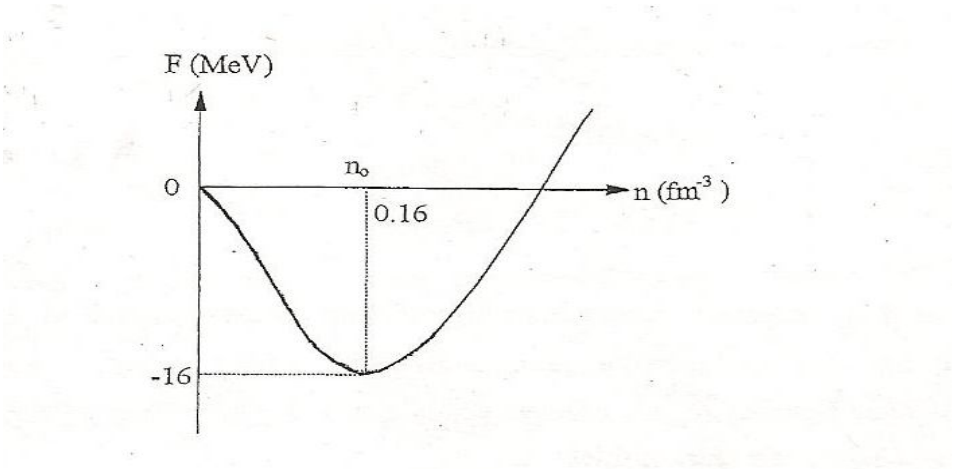
$$n_0 = 0.16\ fm^{-3} = 0.16 \frac{nükleon}{fm^3} = 0.16 \times 10^{39} \frac{nükleon}{cm^3} \tag{2.50}$$

Değeri alınır. Buna karşılık gelen Fermi momentumu k_f ve indirgenmiş yarıçap r_0

$$k_f = 1.36\ fm^{-1}$$

$$r_0 = \left(\frac{3n_0}{4\pi}\right)^{1/3} = 1.2\ fm \tag{2.51}$$

elde edilir. T=0'daki bir sistem için, F serbest enerjisi E'ye eşit olur. bu durumda serbest enerji-yoğunluk grafiği şekildeki gibi olur.



Şekil 2.1. T=0 için nükleer maddenin parçacık başına enerji-yoğunluk grafiği

Böyle bir sistemde, basınç aşağıdaki bağıntıyla verilir.

$$p = kT\left[\frac{d(In\ Q)}{dV}\right]_{N,T} = kT\left[\frac{d(InZ_N)}{dV}\right]_{N,T} = -\left(\frac{dA}{dV}\right)_{N,T}$$

$$= \frac{n^2}{\beta}\left[\frac{d(\beta A/N)}{dn}\right] \qquad (2.52)$$

Burada aşağıdaki termodinamik kanonik topluluk bağıntıları yazılır:

Bölüşüm fonksiyonu Q(N, V, T)=$(2\pi mkT/h^2)^{3N/2}.\frac{Z_N}{N!}$

Şekillenim integrali $Z_N = \int \dots \int exp(-\beta U(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}, \dots, \overrightarrow{r_N})\, d\overrightarrow{r_1} \dots d\overrightarrow{r_N}$

Helmholtz serbest enerjisi A=$-kTInQ$

Kimyasal potansiyel $\mu = \left(\frac{dA}{dN}\right)_{V,T}$

İç enerji $E = kT^2\left[\frac{d(InQ)}{dT}\right]_{N,V} = N^*\left[\frac{d(\frac{\beta A}{N})}{d\beta}\right]_{N,V}$

Bölüşüm fonksiyonu $\sum(V,T,\mu) = \sum_{N=0}^{\infty} \lambda^N\, Q(N,V,T)$

Basınç PV=kTIn$\boldsymbol{\Sigma}$

N=kT$\left[\frac{d(In\Sigma)}{d\mu}\right]_{V,T}$

Entalpi G=Nμ=E+PV-TS (2.53)

Şekil 2.1 de $n < n_0$ bölgesinde basınç negatiftir ve sistem dengede değildir ve n_0 yoğunluklu parçalara ayrılırken bu parçalar arasında boşluklar oluşur. $n > n_0$bölgesinde basınç pozitiftir ve sistem denge yoğunluğuna ulaşıncaya kadar (denge yoğunluğunda basınç sıfır olur) genişler.

Atom çekirdeği proton ve nötronlardan oluşmuştur. Her iki parçacık da ½ spine sahip olduğu için fermiyondur ve Fermi-Dirac istatistiğine uyarlar. Başlangıç olarak

çekirdek maddesini (veya nükleer maddeyi), yoğunluğu dışardan fix edilen etkileşmeyen parçacıklar grubu olarak ele alabiliriz. Bu Fermi-Dirac istatistiğini kullanmak için bir kanonik bölüşüm fonksiyonu tanımlar. Bunun için E(N, V) sistemin toplam enerjisi ve $n_0 = n_k(E_j)$ sistem E_j kuantum durumunda iken k'ıncı kuantum durumundaki e_k enerjili parçacıkların sayısı olsun. Sistemin kuantum durumu $[n_k]$ seti ile belirlenir. Bölüşüm fonksiyonu

$$Q(N,V,T)\sum_j exp\left(-\beta E_j\right) = \sum_{n_k} exp(-\beta \sum_k \varepsilon_k n_k) \tag{2.54}$$

şeklinde yazılır.

N=$\sum n_k$ toplam parçacık sayısıdır. Toplam enerji de $E_j = \sum_k \varepsilon_k n_k$ olur. Toplam parçacık sayısına getirilen kısıtlamadan kurtulmak için Grand kanonik topluluk kullanılır ve bu toplulukta N sıfırdan sonsuza bütün değerleri alabilir. $\lambda = exp(\beta\mu)$kullanırsak

$$\sum(V,T,\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} exp(\beta\mu N)Q(N,V,T) = \sum_{N=0}^{\infty} \lambda^N \sum_{n_k} exp(-\beta\Sigma\varepsilon_k n_k)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n_k}\prod_k [\lambda exp(-\beta\varepsilon_k)]^{n_k} \tag{2.55}$$

Şimdi toplam n_k=0 ve $n_k = n_{max}$ değerleri arasında alınır. Bir kuantum durumunda bozonlar için parçacık sayısına bir sınır getirilmez, fermiyonlar için ise $n_{max} = 1$ olmalı, çünkü her bir kuantum durumunda sadece bir parçacık olabilir. Böylece Grand kanonik bir topluluk için $\bar{N}$ parçacık sayısı ortalaması, E enerji, P basınç, ve S entropi için tekrar aşağıdaki bağıntıları yazabiliriz.

$$\bar{N} = N = \sum_n n_{k=kT\left(\frac{dIn\Sigma}{d\mu}\right)_{V,T}=\sum_k \lambda exp(-\beta\varepsilon_k)/1\pm exp(-\beta\varepsilon_k)}$$

$$n_k = 1/\left[\pm 1 + exp\left(\beta^*(\varepsilon_k - \mu)\right)\right], exp[\beta^*(\mu - \varepsilon_k)] = n_k/(1 \mp n_k)$$

$$E = \sum_k \varepsilon_k n_{k=} \sum \varepsilon_k \,/\, \left[\pm 1 + exp\left(\beta^*(\varepsilon_k - \mu)\right)\right]$$

$$PV = \pm kT \sum_k In\left(1 \pm exp\left(\beta^*(\mu - \varepsilon_k)\right)\right) = \mp kT \sum_k In(1 \mp n_k) \quad (2.56)$$

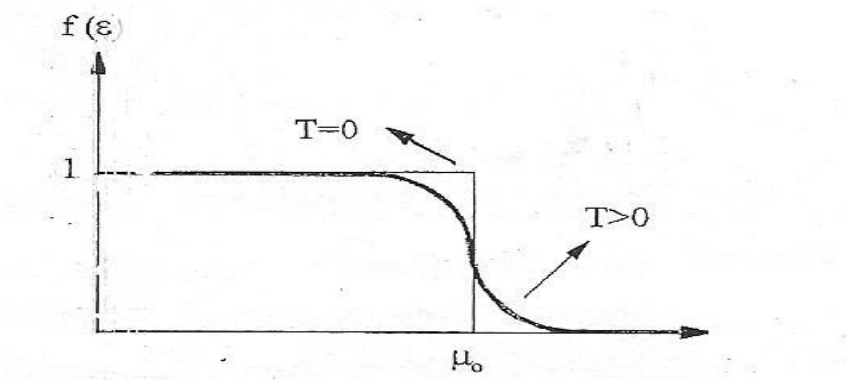
Entropi için entalpi denklemlerinden faydalanılır ve

$$T.S = -kT \sum n_k In(n_k) - n_k In(1 \mp n_k) \pm In(1 \mp n_k) \quad (2.57)$$

$\varepsilon_k$parametresi sürekli olduğu için, olasılık işgal fonksiyonu $f(\varepsilon)$ yi aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz(Fermiyonlar için).

$$f(\varepsilon) = 1/\left[1 + exp\left(\beta^*(\varepsilon - \mu)\right)\right] \quad (2.58)$$

T=0 da $\varepsilon < \mu$ olan tüm enerji düzeyleri dolu $\varepsilon > \mu$ olanlar ise tamamen boştur. μparametresi sıcaklığın fonksiyonudur, $\mu = \mu(T)$ genelde fermi enerjisi cinsinden $E_f = \mu(T)$ şeklinde tanımlanır ve aynı zamanda bir nükleon için $E_f = k_f^2/2m$ olarak da yazılır.



Şekil 2.2. T=0 ve T>0 için fermi fonksiyonunun ε ye göre grafiği

Belli ve eşit sayıda nötron ve protonun a kenarlı V hacimli bir küp içine konulduğunu düşünelim. İzospin bileşeni dışında proton ve nötronlar eşit parçacıklar olarak düşünülebilir. İzospinin iki bileşeni spinin de iki bileşeni olduğu için momentum uzayında Pauli ilkesi gereğince her bir kuantum durumunda en çok 4 nükleon vardır (g=4).

Üç boyutlu sonsuz potansiyel kuyusu içindeki bir parçacığın enerji durumları,

$$\varepsilon = \frac{h^2}{8ma^2}\left(n_x + n_y + n_z\right), \qquad n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3, \ldots$$

ile verilir.

Bu denklem R yarıçaplı bir küre denklemidir ve $R^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$ dir. $n_x,\ n_y\ ve\ n_z$pozitif tam sayılar olduğu için R yarıçaplı kürenin 1/8 indeki nokta sayısı $\frac{\pi}{6}\left(\frac{8ma^2\varepsilon}{\hbar^2}\right)^{3/2}$ şeklindedir. Buna göre parçacık durum sayısı yoğunluğu;

$$n = \frac{N}{V} = \frac{g}{(2\pi)^3}\int_0^{k_F} n_p\, d^3k = \frac{2}{3}\frac{k_F^3}{\pi^2}$$

burada g=4 ve $\varepsilon = \frac{h^2k^2}{2m}$ dir. Parçacık durum sayısı aşağıdaki gibi olur.

$$N = 8\pi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} V\int_0^{\mu_0} \varepsilon^{1/2}\, d\varepsilon = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} V(\mu_0)^{\frac{3}{2}} \tag{2.59}$$

$$\mu_0 = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{2/3} n^{2/3}$$

T=0 da tek parçacık ortalama kinetik enerjisi Fermi enerjisinin 3/5'i kadardır.

$$\varepsilon_0 = \frac{E}{N} = 8\pi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} V\int_0^{\mu_0} \varepsilon^{3/2}\, d\varepsilon = \frac{3}{5}\mu_0 \tag{2.60}$$

Sıcaklığa bağlı olan $\mu(T)$ kimyasal potansiyelini parçacık sayısının korunumlu olmasını göze alarak

$$\text{N}=8\pi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} V\int_0^{\infty} \varepsilon^{1/2} f(\varepsilon)\, d\varepsilon \Rightarrow \int_0^{\infty} \varepsilon^{1/2} f(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{2}{3}(\mu_0)^{3/2} \tag{2.61}$$

olarak yazarız ve bu değer bulunduktan sonra diğer bütün termodinamik fonksiyonlar hesaplanır. Bu hesaplamalar nümerik olarak ya da integral içindeki fonksiyonları Taylor serisine açarak yapılabilir. Fermi integralleri ile birlikte T>0 için aşağıdaki termodinamik fonksiyonları

$$\frac{E(T)}{N} = \frac{3}{5}\mu_0\left[1 + \frac{5}{12}\pi^2\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2 - \frac{1}{16}\pi^4\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^4 \dots\right]$$

$$\mu(T) = \mu_0\left[1 - \frac{1}{12}\pi^2\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2 - \frac{1}{80}\pi^4\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^4 \dots\right]$$

$$\frac{PV(T)}{N} = \frac{2}{5}\mu_0\left[1 + \frac{5}{12}\pi^2\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2 - \frac{1}{16}\pi^4\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^4 \dots\right] \quad (2.62)$$

Ve A=E-TS bağıntısından gidilerek

$$\frac{A(T)}{N} = \frac{3}{5}\mu_0\left[1 - \frac{5}{12}\pi^2\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2 + \frac{1}{48}\pi^4\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^4 \dots\right]$$

$$\frac{S(T)}{N} = \frac{\mu_0}{T}\left[\frac{1}{12}\pi^2\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2 - \frac{1}{20}\pi^4\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^4 \dots\right] \quad (2.63)$$

eşitliklerini yazabiliriz.

Fermi gazı içindeki nükleonlar Paulidışarlama ilkesi gereğince kısa menzilde itme özelliği gösterir. Pauli ilkesinin etkisini iki cisim yoğunluk matrisleri ile aşağıdaki gibi açıklayabiliriz. Bu yoğunluk matrisleri, klasik dağılım fonksiyonlarının kuantum mekaniğindeki karşılığıdır. Eğer N-parçacıklı sistemin $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots \vec{r}_N)$dalga fonksiyonu biliniyorsa böyle bir sistem fiziksel olarak tanımlanabilir. Tek parçacık operatörü

$$B = \sum_{k=1}^{N} b(k) \quad (2.64)$$

ile tanımlanırsa B'nin matris elemanları

$$\langle\psi_f|B|\psi_i\rangle = \sum_{k=1}^{N}\int \psi_f^*(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_k, \dots, \vec{r}_N)b(k)\psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_k{}', \dots, \vec{r}_N)d\vec{r}_1 d\vec{r}_N d\vec{r}_k{}'$$

$$= N\int \psi_f^*(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)b(1)\,\psi_i(\vec{r}_1', \dots, \vec{r}_N)d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_N d\vec{r}_k{}' \quad (2.65)$$

Burada operatör sadece birinci parçacık üzerine etkir. Bu durumda tek parçacık yoğunluk matrisi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\rho^{(1)}\left(\vec{r},\overrightarrow{r'}\right) = \int \psi_f^*(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3,\dots,\vec{r}_N)\psi_i(\vec{r}_1',\vec{r}_2,\vec{r}_3,\dots,\vec{r}_N)d\vec{r}_2 \dots d\vec{r}_N \tag{2.66}$$

$$\langle\psi_f|B|\psi_i\rangle = N\int d\vec{r}\, d\vec{r}' b(\vec{r},\vec{r}')\rho_{fi}^{(1)}(\vec{r},\overrightarrow{r'})$$

Buradaki b($\vec{r},\overrightarrow{r'}$) operatörü en genel şekilde yazılmıştır ve yerel (lokalize) olmamış bir operatör de olabilir. Kuşkusuz (2.64) şeklinde yazılamayan operatörler de vardır. Buna örnek, konuma bağlı olan nükleon-nükleon etkileşme potansiyeli V($\vec{r},\overrightarrow{r'}$)'dir. Bu operatör iki-parçacık operatörüdür.

$$V = \sum_{k<l} V_{kl} \tag{2.67}$$

o halde iki-parçacık yoğunluk matrisi tanımlanmaktadır.

$$\rho_{fi}^{(2)}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_1',\vec{r}_2') = \int \psi_f^*(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3,\dots,\vec{r}_N)\psi_i(\vec{r}_1',\vec{r}_2,\vec{r}_3,\dots,\vec{r}_N)d\vec{r}_3 \dots d\vec{r}_N \tag{2.68}$$

$$V = \frac{N(N-1)}{2}\, d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 d\vec{r}_1' d\vec{r}_2' V(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_1',\vec{r}_2')\rho_{fi}^{(2)}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_1',\vec{r}_2')$$

Burada $\frac{N(N-1)}{2}$ sayısı parçacık çiftleri arasındaki etkileşme sayısına eşittir. Her bir etkileşme diğer etkileşmelerden bağımsızdır. Tek-parçacık ve iki parçacık yoğunluk matrisleri periyodik sınır şartları kullanılarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$\rho^{(1)}(r) = \frac{1}{V} \qquad \text{(sabit tek parçacık yoğunluğu)} \tag{2.69}$$

$$\rho^{(2)}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_1',\vec{r}_2') = \rho^{(2)}(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = \left(\frac{1}{N(N-1)V^2}\right)\sum_{k_i,k_j}^{k_F}\left(1-cos2\vec{k}_{ij}.\vec{r}\right) \tag{2.70}$$

$\vec{k}_{ij} = \frac{\vec{k}_i-\vec{k}_j}{2}ve\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ şeklinde tanımlanmıştır. Toplam N/4 tane dolu durumlar üzerinden yapılır. Bu toplam yerine k_i ve k_j üzerinden integral alınırsa

$\rho^{(2)}(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = \frac{1}{V^2}$g.(x)

$$g_{\pm}(x) = 1 \pm \left(\frac{3}{x^2}\left(\frac{sinx}{x} - cosx\right)\right)^2 \text{ ve } x=k_F.r \quad (2.71)$$

bulunur. Bu türetmede spin ve izospin ihmal edilmiştir ve dalga fonksiyonu antisimetrik kabuk edilmiştir. Aynı zamanda, toplam spin ve izospin dalga fonksiyonunun antisimetrik (uzay dalga fonksiyonunun simetrik) olduğu durumu da gözönüne alırsak (2.71)'deki sonuç $g_+(x)$ olur. Sinüs ve cosinüs fonksiyonlarının küçük x değerleri için seriye açılımı yapılırsa

$$x \ll 1 \quad için \quad g_-(x) = \frac{x^2}{5}, \quad g_+(x) = 2 - \frac{x^2}{5} \quad (2.72)$$

bulunur. Böylece $g_-(x)$ terimi Pauli itmesi, $g_+(x)$ de Pauli çekme terimleri olarak bilinir. Fakat sonuç etki itme şeklindedir çünkü 10 tane simetrik birleşik spin ve izospin dalga fonksiyonuna karşılık 6 tane antisimetrik dalga fonksiyonları vardır(Oğul ve Eren, 2007) .

2.5. Nükleer Kabuk Modelleri (Shell Model)

Nükleer Fiziğin temel problemlerinden biri de atom çekirdeğinin fiziksel özelliklerini en iyi şekilde açıklayan modeller geliştirmektir. Protonların ve nötronların atom çekirdeğine bağlanma enerjisi, atom çekirdeğinin enerji düzeyleri arasındaki geçiş olasılıkları nükleer manyetik moment, kuadropol moment, titreşim, dönme ve enerji düzeyleri arasındaki geçiş (transition) özellikleri gibi temel özellikler tek bir model ile açıklanamaz. Bu nedenle çeşitli özellikler farklı çekirdek modelleri ile açıklanabilmektedir. Örneğin; sıvı damlası modeli nükleonların çekirdeğe bağlanma enerjisini iyi bir yaklaşımla açıklarken nükleer kabuk modeli (nuclear shell model) sihirli sayıların açıklanması, nükleonların enerji düzeylerinin kuantum mekaniksel olarak belirlenmesi, manyetik ve kuadropol momentin hesaplanmasında iyi bir yaklaşım oluşturur. Deneysel olarak belirlenen 2,8,20,28,50,82,26 gibi sihirli sayılara sahip çekirdeklerin daha kararlı oluşu bir başka deyimle nükleonların bağlanma enerjilerinin daha yüksek oluşu, atomlarda elektronların kapalı kabuk oluşturduklarını ve bunların

iyonlaşma enerjilerinin yüksek olduğunu çağrıştırır. Atom çekirdeğinde ise protonlar arasında çekirdek kuvvetlerine ek olarak itici Coulomb kuvvetlerinin oluşu çok nükleonlu ağır çekirdeklerde nötron sayısının daha yüksek olması sonucuna neden olur. Bu tezin amacı; deneysel olarak belirlenen sihirli sayıların nükleer tabaka modeli ile elde edilmesidir.

Bu hesaplamalarla nükleer tabaka modelinin deneysel sonuçları elde etmede ne derecede başarılı olduğu test edilmiş olacaktır. Bu da çekirdek kabuklarının kararlılığının belirlenmesinde önemlidir. Tek parçacık ayrışma enerjisi çekirdeğe en zayıf bağlanmış bir nükleonu çekirdekten koparmak için gerekli enerji olarak tanımlanır ve bu değer yaklaşık 8MeV civarında iken sihirli sayılara sahip çekirdeklerde daha yüksek ve çift sihirli çekirdeklerde ise en yüksek değere sahiptir. Bu durum atomlardaki soygazlar grubunun enerji düzeyleri ile benzerlik taşımaktadır. Bütün bu durumlar sihirli sayıların ve nükleer tabaka modeline göre tanımlanan ortalama alana karşılık gelen kabukların varlığını ispatlar.

Öncelikle nükleer tabaka modeline göre potansiyellerin özellikleri belirlenecektir. Bu potansiyellerden en çok kullanılanı Woods-Saxon ve Harmonik Osilatör potansiyelleridir. Nükleer tabaka modeline göre tanımlanan tek parçacık dalga fonksiyonları Schrödinger Dalga Denklemi yukarıda belirlenen potansiyeller için çözülecek ve Harmonik Osilatör enerji seviyeleri belirlenecektir. Bu seviyelerdeki bulunması gereken proton ve nötron sayıları kuantum mekaniksel yaklaşımlarla belirlenecektir. Daha sonra osilatör parametresi hesaplanacaktır. Bulduğumuz sonuçlar deneysel sonuçlara karşılaştırılacaktır. Buna göre sonsuz kuyu potansiyeli ve harmonik osilatör potansiyeli kullanılarak elde edilen kararlı kabuklar için sayılar ve enerji seviyeleri belirlenecektir. Daha sonra deneylerle en iyi uyumu sağlamak için spin-yörünge terimlerinin enerji düzeylerine katkıları hesaplanacaktır. Bu şekilde elde edilen tek-nükleon seviyeleri Harmonik Osilatör potansiyeli için analiz edilecektir. Bu çalışmada kullanılan yöntemler ile elde edilen tek-parçacık dalga fonksiyonlarının sihirli sayılar için iyi bir sonuç vereceği beklenmektedir. Sonuçlarımız literatürdeki çalışmalar ile birlikte değerlendirilip yorumlanacaktır. Örneğin, Ring, P.,Schuck, P., 2004 çalışmasında atomik çekirdek modelleri detaylı bir şekilde açıklanmış, tek-parçacık enerji düzeylerinin hesaplanması ortalama-alan teorisine göre açıklanmıştır. Sıvı damlası modeline göre nükleonların çekirdeğe bağlanma enerjisinin hesaplanması ve nükleer tabaka modeli (nuclear shell model) sihirli sayıların açıklanması, nükleonların enerji düzeylerinin kuantum mekaniksel olarak belirlenmesi gibi daha bir

çok özellik detaylı şekilde açıklanmıştır. Nükleer tabaka modeline göre sihirli sayıları içeren atomik çekirdeklerin kütle numaralarını ve hesaplanan büyüklükleri tablolar halinde sunmuşlardır. Daha önceki hesaplamalarla olan farklılıklar tartışılmıştır(Wabstra ve ark., 2003). Atomik çekirdeklerin kabuk yapıları "sihirli sayılarla" açıklanmış ve kabuk yapıların tek nükleon seviyeleri cinsinden açıklaması, bir proton veya bir nötronun kendisi dışında kalan tüm nükleonların etkileşmesiyle oluşan bir ortalama alanda hemen hemen bağımsız bir şekilde hareketinden kabukların oluşumu açıklanmıştır (Hinke ve ark., 2012). İstatistiksel yaklaşımlar kullanılarak atomik çekirdeklerde sihirli sayıların varlığını gösteren hesaplamalar yapmışlardır. Fraksiyonel işgal olasılıklarının hesaplanması için nükleer tabaka modeli kullanılmıştır(Lopez-Ruiz ve ark., 2010).Makroskopik-mikroskopikmethod kullanarak model parametrelerinin izospin ve kütleye bağlı durumları için yarı deneysel kütle formülü geliştirmişlerdir (Wapstra ve ark., 2003). Bu modele göre küçük nötron zengin N=16 sihirli çekirdekler incelenmiştir (Wang ve ark., 2010). Soy gazlardaki elektron kapalı kabuklarına benzer şekilde, nükleer tabaka modeli kullanarak Sn132 sihirli yapıları Sn133 tek parçacık seviyeleri kullanarak açıklamaya çalışmışlardır (Jones ve ark., 2010).N=28 kapalı kabuk yapılarının temel özelliklerini nükleer tabaka modelini baz alarak ve deneysel teknikler kullanılarak elde edilen sonuçlar kullanarak araştırmışlardır (Sorlin ve ark., 2013). Nükleer self consistent ortalama-alan teorisi kullanarak, nükleer yapıları araştırmışlardır. Sonuçları diğer nükleer modellerle elde edilen sonuçlarla karşılaştırmışlardır (Bender ve ark., 2003).Sıvı-Damlası modeli temel alınarak geliştirilen istatistiksel parçalanma modeline göre, nükleer parçalanmada simetri ve yüzey gerilim enerjilerinin parçalanmaya etkilerini SMM ensemble hesaplamaları ile incelemişler ve IMF (intermediatemassfargments) dağılımlarını hesaplayarak bu katsayıların değişimlerini belirlemişlerdir. Elde edilen sonuçları ALADIN-GSI deneysel sonuçları ile karşılaştırmışlardır. Yüzey gerilimin ve simetri enerjisinin yük ve izotopik dağılıma etkileri belirlenmiştir (Oğul ve ark., 2011).

Sıvı-Damlası modeli temel alınarak geliştirilen istatistiksel parçalanma modeline göre, Markov-chain hesaplamaları ile nükleer parçalanmada sıvı gaz geçiş bölgesindeki parçacık dağılımı değişimlerini inceleyip MSU-deney sonuçları ile karşılaştırmışlardır. Bu karşılaştırmalar sonucunda, nükleer maddenin simetri enerji katsayısının standart değerinin düşük yoğunluklarda 25 MeV'den 15 MeV ya da daha aşağı değerlere düştüğü belirlenmiştir(Oğul ve ark., 2009)

3. SİHİRLİ SAYILARIN NÜKLEER TABAKA MODELİNE GÖRE AÇIKLANMASI

3.1. Giriş

Nükleer tabaka modeline göre, her bir nükleon, kendisi dışındaki bütün nükleonların birbiriyle etkileşmesinden oluşan ortalama bir alan içinde, tek-parçacık yörüngelerinde bağımsız olarak hareket eder. Bunun nedeni Paulidışarlanma ilkesince çarpışmaların yasaklanması ve belirsizlik ilkesidir. Aslında atom çekirdeğinin kütlesel yoğunluğu çok büyük olmasına rağmen, parçacık sayısı yoğunluğu açısından yoğun bir sistem oluşturmaz. Sonsuz itici sert küre yarıçapı $2r_n \cong 0.4$fm civarında iken çekirdek yarıçapı yaklaşık olarak $r=r_0A^{1/3}$ civarındadır. Bu durumda nükleonları sert küreler olarak düşünürsek, nükleonların toplam hacminin, çekirdeğin hacmine oranı

$$\frac{V_n}{V_ç} = \frac{\frac{4}{3}\pi r_n^3 A}{\frac{4}{3}\pi r_0^3 A} = \left(\frac{0.4}{2\times 1.2}\right)^3 \approx \frac{1}{216} \tag{3.1}$$

olur. Buna göre çekirdekte nükleonlar arasındaki ortalama uzaklık bir hayli fazladır. Böylece bir nükleon, çoğu kez nükleonlar arasındaki kısa menzildeki çok kuvvetli etkileşmelerden ziyade, uzun menzildeki çekici etkileşmelerin etkisi altında kalır. Böylece kuvvetli itici etkileşmelerin çok az görüldüğü bir durum ortaya çıkar ve bu yüzden, ilk yaklaşım olarak, sistem bağımsız tek-parçacık hareketi cinsinden tanımlanabilir. Buna rağmen, çekirdeğin yüzeyi gazlara göre çok daha belirli ve keskindir, bunda da Pauli ilkesinin ve nükleonlararası kuvvetlerin özelliklerinin önemli rolü vardır. Bir nükleonun çekirdek içindeki ortalama serbest yolu, saçılma deneylerine göre, çekirdeğin boyutlarında olduğu gösteriyor. Bu da, çekirdek içinde nükleonların bağımsız parçacık hareketi yaptığının ilk delillerinden birisidir. Bu nükleonların, ortalama bir alan içinde hareket ettiğini söylemiştik. Böyle bir durum, atom fiziğinden bildiğimiz bazı sonuçları benzer şekilde çekirdek fiziğine aktarır. Örneğin, deneysel olarak gözlenen sihirli sayılara (2, 8, 20, 28, 50, 82, 126) sahip çekirdeklerin daha kararlı oluşu yani nükleonların bağlanma enerjilerinin daha yüksek oluşu, atomlarda elektronların soy gazlardaki gibi kapalı kabuk oluşturduklarını ve bunların iyonlaşma enerjilerinin yüksek olduğunu çağrıştırır. Bununla beraber protonlar arasında çekirdek kuvvetlerine ek olarak Coulomb itmesinin oluşu çok nükleonlu ağır çekirdeklerde

nötron sayısı yoğunluğunu yükseltir. Bu da çekirdek kabuklarının kararlılığını belirlemede atomlarınkine göre daha zor bir duruma neden olur. Tek-parçacık ayrışma enerjisi, çekirdeğe en zayıf bağlanmış bir nükleonu çekirdekten koparmak için gerekli enerji olarak tanımlanır. Bu çoğu çekirdekte 8 MeV civarında iken sihirli sayılara sahip çekirdeklerde daha fazladır. Çift-sihirli çekirdeklerde ise en yüksektir. Benzer duruma atomlar için soy gazlar grubunda rastlanır. Bütün bu durumlar, sihirli sayıların ve ortalama alana karşılık gelen kabukların varlığını gösterir.

Çekirdekteki merkezcil Coulomb potansiyeli atomun küresel şekle gelmesini sağlar. Bu durumda, elektron kabukları arasında büyük enerji farklarına sahip dejenere gruplar oluşur. Çekirdekteki nükleonlar için böyle merkezcil bir alan yoktur. Fakat böyle bir potansiyel, bütün nükleonların etkileşmesi sonucu oluşturulabilir. Böyle bir potansiyel, atomlarda da elektronların etkileşmeleri sonucu oluşur ve bu potansiyel çekirdeğin Coulomb potansiyeline eklenmelidir. Bu ortalama potansiyel Hartree-Fock yöntemi ile belirlenir. Bu ortalama potansiyel, bir nükleonun tek parçacık potansiyeli olarak tanımlanırken, o nükleonun dışında kalan bütün parçacıkların etkileşmelerinin bir sonucu olarak oluşturulur ve böylece iki-parçacık etkileşmeleri dolaylı olarak potansiyel içine girmiş olur. Hartree-Fock yöntemi ile belirlenen potansiyeller çoğu kez küresel simetrik özellik göstermediği için, küresel simetrik bir tek-nükleon potansiyeli bütün nükleonlarca oluşturulan ortak bir potansiyeli tam olarak tanımlamaz. Yine de, küresel simetrik bir tek-nükleon potansiyeli çekirdeğin taban durumunu ve buna yakın uyarılmış durumları açıklamada iyi bir yaklaşım oluşturur. Bu ortalama potansiyeller, iki-nükleon etkileşmeleri cinsinden yazılırken genelde Brueckner metodu kullanılır ve burada merdiven diyagramlarından yararlanılır. Buna ek olarak, rölativistik etkileri içine almak için RölativistikBrueckner metodu kullanılır, bazen RölativistikBruecknerHartree-Fock metodu olarak da anılır. Nükleonlar tek-parçacık yörüngelerinde, ortalama bir alan içinde hareket ederlerken, bazı durumlarda, ikili çarpışmalar yapabilirler ve bu tür çarpışmaların artık-etkileşmeler (residualinteractions) denir. Bu durumda,

$$V(i) = \sum_{i=1}^{A} V(i) = \sum_{i<j=1}^{A} V_{ij}$$

şeklinde yazabileceğimiz ortalama V(i) potansiyeline bu artık etkileşme V(i, j) potansiyeli de eklenir. Bu artık etkileşme potansiyeli i ve j nükleonunun yer, spin ve izospin gibi koordinatlarına bağlıdırlar. Üstelik bu V(i, j) potansiyeli ortalama potansiyel V(i)'ye göre daha zayıf olduğundan yaklaşık metodlarla hesaplanır. Bu durumda çekirdeğin deneysel olarak gözlenen verilerini, mikroskopik nükleon-nükleon etkileşme potansiyellerinden giderek, deneysel sonuçları doğrulayacak, V(i) ve V(i, j) potansiyellerini elde etmek gerekir. Bu potansiyeller kullanılarak, çekirdeğe ait durumların enerji düzeyleri ve dalga fonksiyonları tayin edilir ve bu dalga fonksiyonlarından da fiziksel gözlenebilirler hesaplanabilir. Bu tür hesaplamalarda, çok-parçacık dalga fonksiyonları, tek parçacık veya iki-parçacık matris elemanları da cinsinden ifade edilirler. İki-parçacık matris elemanları da açısal ve radyal matris elemanlarına ayrılarak hesaplanır (Oğul ve Eren, 2007).

3.2. HarmonikOsilatör Potansiyeli ile Nükleon Enerji Düzeylerinin Hesaplanması

Deneysel sonuçlar ve doyma özelliği bize nükleon-nükleon potansiyellerinin kısa menzilli, merkezcil ve çekici olduğunu (r<0.3fm itici sert küre) gösteriyor. Şimdi tabaka modeline göre potansiyelin nasıl olduğuna bakalım. Çekirdeğin merkezindeki bir nükleona, diğer nükleonlardan gelen katkıyı tek düze algılayacağı için bileşke net olarak sıfır kuvvet etkir.

$$F = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0 \tag{3.2}$$

Diğer taraftan, nükleer bağlanma enerjisi yüzeyden ($r=R_0$) merkeze doğru ($r<R_0$) artacaktır.

$$\frac{\partial V}{\partial r}\Big|_{r<R_0} > 0 \tag{3.3}$$

Çekirdek kuvvetleri kısa menzilli olduğu için yüzey dışında

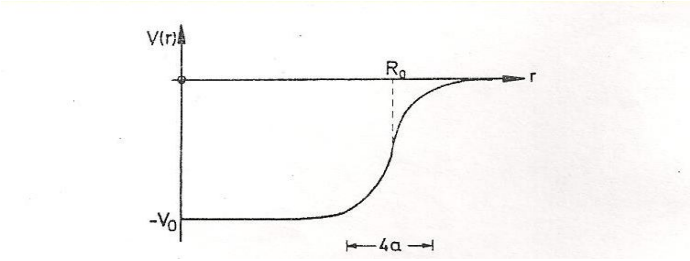
$$V(r) \cong 0,\ r>R_0 \tag{3.4}$$

Bu üç sonucu sağlayan analitik bir çözüm Fermi fonksiyonu ya da Şek. 3.1'dekiWoods-Saxon potansiyelidir.

Woods-Saxon potansiyeli

$$V(r) = -V_0 \left[1 + exp\left(\frac{r-R_0}{a}\right)\right]^{-1} \tag{3.5}$$

Burada $R_0=r_0A^{1/3}$, V_0=50 MeV, a=0.5fm, r_0=1.2 fm



Şekil 3.1. Woods-Saxon potansiyelinin şekli

Bu potansiyelin r=0 da sonlu fakat ihmal edilebilir bir eğimi vardır. Bu potansiyel için özfonksiyonlar kapalı bir şekilde verilmediğinden, hesaplamalarda daha çok aşağıdaki iki yaklaşım kullanılır.

a) HarmonikOsilatör Yaklaşımı

$$V(r) = -V_0[1 - (r/R_0)^2] = \frac{m}{2}w_0^2(r^2 - R_0^2) = -V_0 + \frac{1}{2}mw_0^2r^2 \tag{3.6}$$

$\frac{V_0}{R^2} = \frac{1}{2}mw^2$bağıntısı kullanıldı.

b) Kare Kuyu Yaklaşımı

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r \leq R_0 \quad için \\ \infty, & r > R_0 \; için \end{cases} \tag{3.7}$$

Bu üç potansiyel de küresel simetriye sahiptir. Ayrıca, (3.6) ve (3.7) sonsuz terimler içerdiği için fiziksel bir ifade gibi görünmüyorlar. Ancak tek-parçacık bağlı durumları ile ilgilenildiği zaman, sadece dalga fonksiyonunun üstel kuyrukları etkileneceğinden, bu durum o kadar önemli değildir. Schrödinger dalga denklemi

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r)\right\}\psi(r) = E_i\varphi_i(r) \tag{3.8}$$

(3.6) ve (3.7) potansiyelleri için çözülürse, HarmonikOsilatör için enerji seviyeleri

$$E_N = -V_0 + \left(N + \frac{3}{2}\right)\hbar w_0 \tag{3.9}$$

şeklinde bulunur. Burada $N = 2(n-1) + \ell$, n=1, 2, 3,… ve $\ell = 0, 1, 2,$ ...şeklindedir. n radyal kuantum sayısı, ℓaçısal momentum kuantum sayısı, N kuanta sayısı ve w_0 da salınımın açısal frekansı olarak verilir (Oğul ve Eren, 2007).

Kuantum mekaniğe göre ℓ değerine karşılık - ℓ ile +ℓ arasında $(2\ell + 1)$ tane m_ℓ ve s=1/2 için iki tane $m_s = \pm 1/2$ değerleri vardır. Böylece E_N seviyeleri için (N+1)(N+2) tane durum vardır, yani $n\hbar w$ enerjisine karşılık gelen bir kabuk (N+1)(N+2) sayıda nötron veya protonla doldurulabilir. Böylece 0, $1\hbar w, 2\hbar w, \ldots, N\hbar w$ seviyeleri sırasıyla 2, 8, 20, 40, 70, 112, 168 tane proton veya nötronla doldurulacaktır. Osilatörün verdiği sihirli sayılar, N=0, 1, 2, 3,… için,

$$S_n = \sum_{t=0}^{n}(t+1)(t+2) = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$$

Bağıntısı ile elde edilebilir. Bu durumda harmonik salınıcı potansiyeli için sihirli sayılar aşağıdaki gibi elde edilir:

H. Osilatör :2, 8, 20, 40, 70, 112, 168

Daha doğru bir teorinin osilatör ile sonsuz kuyu tarafından verilen seviyeler arasında kalan seviyeler vereceği düşünülebilir. Böylece, seviyeler arasındaki uzaklık ve hatta seviyelerin sırası biraz değişir. Osilatöre ait seviyeler aşağıdaki gibi:

Seviye	1s	1p	1d 2s	1f 2p	1g 2d 3s	1h 2f 3p
Seviyedeki sayı	2	6	10 2	14 6	18 10 2	22 14 6
Kabuktaki sayı	2	6	12	20	30	42
Toplam sayı	2	8	20	40	70	112

Eğer 1g ile 2d seviyeleri ve 3s ile 2f seviyeleri aralarında değiştirilirse aşağıdaki durum elde edilir:

Seviye	1s	1p	1d 2s	1f 2p 2d	1g 2f	1h	3s
Seviyedeki sayı	2	6	10 2	14 6 10	18 14	22	2
Kabuktaki sayı	2	6	12	30	32		
Toplam sayı	2	6	20	50	82		

Şüphesiz tamamen keyfi olan bu değiştirmelerin hiçbir teorik dayanağı yoktur. Aynı zamanda sırf bu çeşit değiştirmelerde14 ve 28 sihirli sayılarını elde etmeğe imkan yoktur (Cansoy, 1978).

Harmonikosilatörünaçısal frekansı w_0, çekirdek yarıçapı kare ortalamasından hesaplanabilir.

$$\langle r^2\rangle = \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{A}\langle\psi_i|r_i^2|\psi_j\rangle = \frac{3}{5}R^2 = \frac{3}{5}\left(1.2A^{1/3}\right)^2 \tag{3.10}$$

$$\frac{1}{2}mw_0^2\langle r^2\rangle_i = \frac{1}{2}\hbar w_0\left(N_i + \frac{3}{2}\right)$$

Bu şekilde hesaplanan sonuç

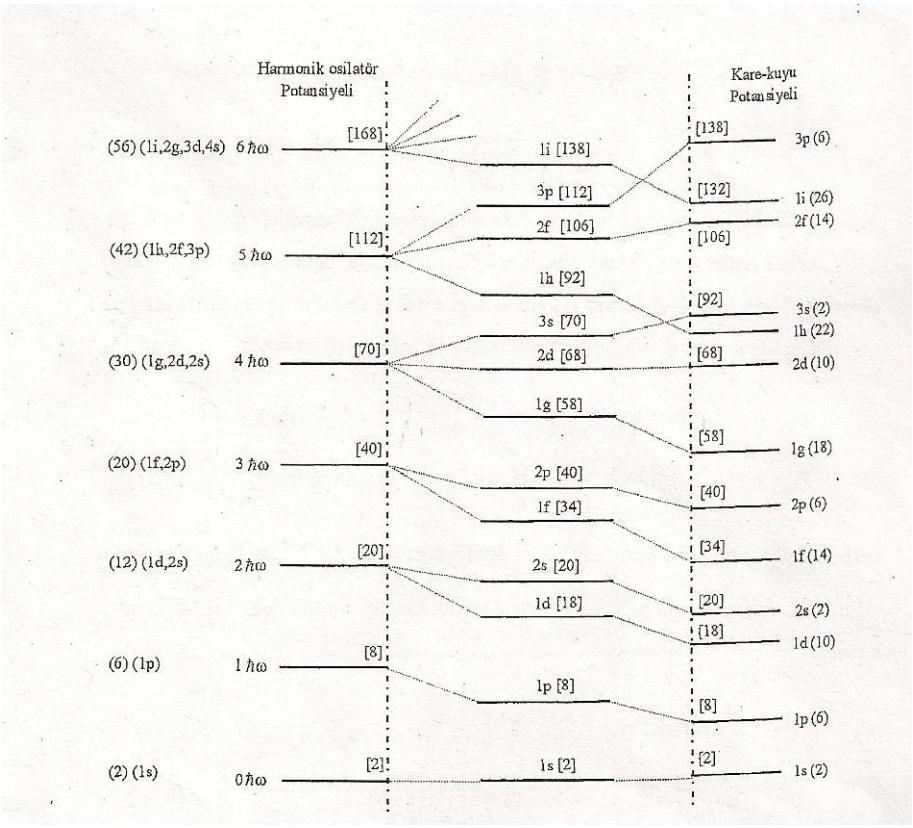
$$\hbar w_0 \cong 41.A^{-1/3}\ \text{MeV}$$

veosilatörparametrisi

$$b = \left(\frac{\hbar}{mw_0}\right)^{1/2} \cong 1.01A^{1/6}\ \text{fm}$$

şeklindedir. Bu potansiyellerin her ikisi için de V_0 sabiti, 1s düzeylerinin enerjileri aynı çizgide kalacak şekilde seçilmiştir. Böylece karşılaştırma yapmak daha kolay hale gelir (Oğul ve Eren, 2007).

3.3.Spin-Yörünge Etkileşme Teriminin Katkısı



Şekil 3.2. Sonsuz kuyu potansiyeli ve harmonik osilatör potansiyeli için belirlenen sihirli sayılar ve enerji seviyeleri

Şekil (3.2)'e bakıldığı zaman her iki potansiyelin de deneysel sihirli sayılar olan 2, 8, 20, 40, 50, 82, 126 değerlerini tam olarak vermediği gözlenir. Bu demektir ki gerek harmoniksalınıcı, gerekse kare kuyu potansiyelleri gerçekçi potansiyeller değildir. Bu sihirli sayıları elde etmek için merkezcil potansiyele spin yörünge teriminin de eklenmesi gerekir. Böylece

$$V(r) = -V_0 + \frac{1}{2}mw^2r^2 - \frac{2\alpha}{\hbar^2}\overrightarrow{L}\cdot\vec{S} \qquad (3.11)$$

Burada α etkileşme şiddeti ile ilgili bir $\vec{L}$ yörüngesel açısal momentum vektörü, $\vec{S}$ de spin açısal momentum vektörüdür. Toplam açısal momentum vektörünün $\vec{J}=\vec{L}+\vec{S}$ şeklinde yazıldığını biliyoruz.

$$\vec{J}\cdot\vec{J}=\left(\vec{L}+\vec{S}\right)\cdot\left(\vec{L}+\vec{S}\right)\rightarrow\vec{L}\cdot\vec{S}=\frac{1}{2}(J^2-L^2-S^2) \tag{3.12}$$

eşitliği yazılabilir. Şimdi V(r) içindeki bu $\vec{L}\cdot\vec{S}$ terimini hesaplayalım. Toplam açısal momentum özfonksiyonları $|j,m\rangle$, yörüngesel açısal momentum özfonksiyonları $Y_\ell^{m_\ell}(\theta,\phi)$ ve spin açısal momentum özfonksiyonları $\chi_{\frac{1}{2},m_s}$ cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\left|j,m\right\rangle=\sum_{m_\ell,m_s}\langle\tfrac{1}{2},m_s,\ell,m_\ell|\tfrac{1}{2},\ell,j,m\rangle Y_\ell^{m_\ell}(\theta,\phi)\chi_{\frac{1}{2},m_s} \tag{3.13}$$

Bu durumda, kuantum mekaniği derslerinden, açısal momentum operatörlerinin özdeğerlerinin aşağıdaki gibi verildiğini biliyoruz.

$$\vec{L}\cdot\vec{S}\left|j,m\right\rangle=\frac{1}{2}\hbar^2[j(j+1)-\ell(\ell+1)-s(s+1)]\,|j,m\rangle \tag{3.14}$$

Burada $m_s=\pm\frac{1}{2}$ olduğu için, $j=\ell\pm\frac{1}{2}$ gibi iki değer olabilir. Böylece

$$\begin{aligned}&j=\ell+\tfrac{1}{2}\text{için}\vec{L}\cdot\vec{S}\left|j,m\right\rangle=\frac{1}{2}\hbar^2\ell|j,m\rangle\\&j=\ell-\tfrac{1}{2}\text{için }\vec{L}\cdot\vec{S}\left|j,m\right\rangle=-\frac{1}{2}\hbar^2(\ell+1)|j,m\rangle\end{aligned} \tag{3.15}$$

özdeğerleri elde edilir. Burada $\ell\neq0$ durumu göz önüne alınmıştır, çünkü $\ell=0$ için $\vec{L}\cdot\vec{S}$ terimi sıfıra eşit olur. Böylece (3.5) denkleminde V(r) tek-nükleon potansiyeli içindeki $\vec{L}\cdot\vec{S}$ terimi iki-nükleonun toplam açısal momentumunun iki ayrı değeri için hesaplanmış olur. Bu durumda enerji özdeğerleri sırasıyla

$$\begin{aligned}&E_{n\ell j}=-V_0+\hbar w\left(2n+\ell-\tfrac{1}{2}\right)-\alpha\ell\ \ (j=\ell+\tfrac{1}{2}\quad\text{için})\\&E_{n\ell j}=-V_0+\hbar w\left(2n+\ell-\tfrac{1}{2}\right)-\alpha(\ell+1)\quad(j=\ell-\tfrac{1}{2}\quad\text{için})\end{aligned} \tag{3.16}$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda taban durumda n=0 ve $\ell=0$ için $E_{00\pm\frac{1}{2}}$ enerjisini çıkarırsak, taban durumu ile olan enerji farkı her iki durum için aşağıdaki gibi bulunur.

$$E_{n,\ell,\ell+\frac{1}{2}} - E_{0,0,\frac{1}{2}} = \hbar w(2n+\ell) - \alpha\ell$$
$$E_{n,\ell,\ell-\frac{1}{2}} - E_{0,0,-\frac{1}{2}} = \hbar w(2n+\ell) - \alpha(\ell+1) \qquad (3.17)$$

Burada $\alpha > 0$ alınırsa $j = \ell - \frac{1}{2}$ durumlarının enerjilerinin $j = \ell + \frac{1}{2}$ durumlarının enerjilerinden daha yüksek olduğu görülür. Bu durumda osilatör enerji düzeylerinin dejenere olması kısmen bozulmuş olup, $|j,m\rangle$ durumlarının m ile dejenere olduğu görülür. Bu dejenere durum sayısı $j = \ell - \frac{1}{2}$ için $(2j+1) = 2(\ell+1)$ ve $j = \ell + \frac{1}{2}$ için $(2j+1) = 2\ell$ şeklindedir. Şu ana kadar α çarpanını bir sabit gibi değil $\vec{r}$ nin bir radyal fonksiyonu gibi ele alırsak spin yörünge potansiyeli V_{LS} aşağıdaki gibi yazılır.

$$V_{LS} = -\frac{2\alpha(r)}{\hbar^2}\vec{L}\cdot\vec{S} \qquad (3.18)$$

Bu durumda daha önce bulunan enerji özdeğerleri değişmez fakat $j = \ell + \frac{1}{2}$ ile $j = \ell - \frac{1}{2}$ durumları arasındaki enerji farkı aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$E_{\ell-\frac{1}{2}} - E_{\ell+\frac{1}{2}} = \alpha_{n\ell}(2\ell+1),\ \alpha_{n\ell} = \int R_{n\ell}^2(\vec{r})\alpha(\vec{r})d\vec{r} \qquad (3.19)$$

Tablo 3.1 Spin- Yörünge potansiyellerini içeren harmonikosilatör potansiyeli için tek nükleon seviyeleri

N	n		Kuantum durumu	$E_{nlj} - E_{00\frac{1}{2}}$	N_j	$\sum N_j$
0	1	0	$1s_{1/2}$	0	2	2
1	1	1	$1p_{3/2}$	$\hbar w - \alpha$	4	
	1	1	$1p_{1/2}$	$\hbar w - 2\alpha$	2	8
2	1	2	$1d_{5/2}$	$2\hbar w - 2\alpha$	6	
	2	0	$2s_{1/2}$	$2\hbar w$	2	
	1	2	$1d_{3/2}$	$2\hbar w - 3\alpha$	4	20
3	1	3	$1f_{7/2}$	$3\hbar w - 3\alpha$	8	28
	2	1	$2p_{3/2}$	$3\hbar w - \alpha$	4	
	2	1	$2p_{1/2}$	$3\hbar w - 2\alpha$	2	
	1	3	$1f_{7/2}$	$3\hbar w - 4\alpha$	6	40
4	1	4	$1g_{9/2}$	$4\hbar w - 4\alpha$	10	50
	2	2	$2d_{5/2}$	$4\hbar w - 2\alpha$	6	
	3	0	$3s_{1/2}$	$4\hbar w$	2	
	2	2	$2d_{3/2}$	$4\hbar w - 3\alpha$	4	
	1	4	$1g_{9/2}$	$4\hbar w - 5\alpha$	8	
5	1	5	$1h_{11/2}$	$5\hbar w - 5\alpha$	12	82

Böylece spin-yörünge etkileşme terimi hesaplara katıldığı zaman deneysel olarak elde edilen değerlere daha çok yaklaşılmış olduğu tablo 3.1 de olduğu gibi görülür. Bu tabloda tek nükleon düzeyleri ve sihirli sayılar verilmiştir (Oğul ve Eren, 2007).

3.4. Sonuçlar

N=0, 1, 2 için ilk üç tabaka seviyelerinin spin yörüngeye ayrılması çok küçük olacağından $\vec{L}\cdot\vec{S}$terimihesaplara katılmadan bulunan değerlere çok yakındır. Fakat N nin daha yüksek değerleri için, α çarpanının değerlerine bağlı olarak farklı sonuçlar elde edilir. αçarpanı proton ve nötron sayılarına ve n, ℓ kuantum sayılarına bağlıdır. w çarpanı ise, proton ve nötron sayılarına bağlı olabilir. Deneysel sonuçlar α çarpanının sabit bir n değeri için ℓ kuantum sayısı arttıkça azaldığını göstermiştir. Bu deneysel sonuçlar değişik çekirdekler için taban durum üzerindeki tek-nükleon seviyeleri için tablo 3.2 deki gibi gözlenmiştir. Tablo 3.1 de elde edilen sihirli sayılar ayrı ayrı tabakalarda değil bir tabaka içinde belli bir düzey dolduğu zaman elde edilmektedir.

Sihirli sayıları birbirinden tamamen ayrılmış tabakalarda elde etmek için α çarpanının değerlerini bir tabakadan diğerine geçildiği zaman değiştirmek gerekir. Bu α çarpanı değişikliğini yapmak yerine harmonikosilatör potansiyelinin tabanını düzleştirerek başka bir deyişle harmonikosilatör ve kare kuyu arasında bir potansiyel seçersek sihirli sayıların ayrı ayrı bir tabaka oluşturduğu görülür. Bu, şekilde görüldüğü gibi belli bir tabaka içindeki enerji seviyeleri içinde en yüksek ℓ ve $j = \ell + \frac{1}{2}$ kuantum sayılarına sahip olan seviyenin enerjisi V_{LS}spin yörünge terimi etkisiyle alçalır ve bir alt osilatör düzeyine yaklaşır. Böylece şekilde görülen ayrık tabaka oluşturan sihirli sayılar bulunmuş olur. Ayrıca, enerjisi azalan bu seviyenin paritesi$(-1)^{\ell}$yaklaştığı osilatör tabakasındaki seviyelerin paritelerinden farklıdır. Görüldüğü gibi sihirli sayıların bu modelle açıklanabilmesi nükleer tabaka modelinin bir başarısıdır (Oğul ve Eren, 2007).

Tablo 3.2. Spin-Yörünge parametresinin deneysel değerleri

n/ℓ	1	2	3	4	5	6
1	-	1.15	0.93	0.76	0.46	0.44
2	0.68	0.58	0.26	0.28	-	-
3	0.39	0.19	-	-	-	-

Sonuç olarak, hiçbir model tek başına çekirdekler hakkında bilinen bütün özellikleri açıklayamaz. Bu nedenle sihirli sayıların elde edilmesinde Nükleer Kabuk Modeli başarılı olmuştur.

KAYNAKLAR

Aichelin, J., Hüfner, J., ve Ibarra, R., 1984, Cold breakup of spectator residues in nucleus-nucleus collisions at high energy. Phys. Rev. C 30:107-118.

Aichelin, J. ve Bertsch, G. F., 1985, Numerical simulation of medium energy heavy ion reactions. Phys. Rev. C 31:1730-1738.

Aichelin, J., 1986, Three heavy fragments observed in simulations of medium heavy ion reaction. Phys., Lett B 175:120-124.

Bauer, W. ve ark., 1986, Energetic photons from intermediate energy proton-and heavy-ion-induced reactions. Phys., Rev. C 34:2127-2133.

Bauer, W., Bertsch, G. F. ve Das Gupta, S., 1987, Fluctuations and clustering in heavy-ion collisions. Phys., Rev. Lett. 58:863-866.

Bauer, W., Gelbke, C. K. ve Pratt, S., 1992, Hadronic interferometry in heavy-ion collisions. Ann. Rev. Nuc., Part. Sci. 42:77-98.

Bender M. ve ark., 2003, Self-consistentmean-fieldmodelsfornuclearstructure, Rev. Mod. Phys., V75, 121-180.

Bondorf, J. P., Botvina, A. S., Iljinov, A. S., Mishustin, I. N. ve Sneppen, K., 1995, Statistical multifragmentation of nuclei. Phys., Rep. 57:133-221.

Botvina, A. S., Iljinov, A. S., Mishustin, I. N., 1985, Multifragmentation of nuclei at excitatiom energies ~10 MeV/nucleon. (Yad. Fiz. 42:1127-1137) Sov. J. Nucl. Phys., 42(5):712.

Botvina, A. S. ve ark., 1995, Multifragmentation of spectators in relativistic heavy-ion reactions. Nucl. Phys., A 584:737-756.

Botvina, A. S., Lozhkin, O. V. ve Trautmann, W., 2002, Isoscaling in Light ion induced reactions and its statistical interpretation. Phys., Rev. C 65:044610-044624.

Botvina, A. S. ve Mishustin, I. N., 2004,Formation of hot heavy nuclei in supernova explosions. Phys., Lett. B 584:233-240.

Cansoy, Ç., 1978, Çekirdek Teorisi, 10, İstanbul Üniversitesi Yayınları.

Chomaz Ph., 1997 Collective Excitations in Nuclei, Lecture Notes, Ganil.

Elton L.R.B., 1959, Introductory Nuclear Theory, Wiley.

Fisher, M. E., 1967, The theory of equilibrium phenomena. Rep. Progr. Phys., 30:615-730.

Goodman, A. L., Kapusta, J. I. ve Mekjian, A. Z., 1984, Liquid-gas phase instabilities and droplet formation in nuclear reactions. Phys., Rev. C 30:851-865.

Hinke C. B., ve ark., 2012, SuperallowedGamow-Teller decay of thedoublymagicnucleus Sn-100, NATURE, V486, 341-354.

Jones K.L. ve ark., 2010,, Themagicnature of Sn-132 exploredthroughthesingle-particlestates of Sn-133. NATURE, **V**465, 454-457

Knoll, J. ve Strack, B., 1984, The dynamics of the nuclear disassembly in a field-theoretical model at finite entropies. Phys., Lett. B 149:45.

Lopez-Ruiz, R. andSanudo, J., 2010, Evidence of Magic Numbers in Nucleiby Statistical Indicators, OPEN SYSTEMS & INFORMATION DYNAMICS, V17, 279-286.

Mekjian, A. Z., 1978, Explosive nucleosynthesis, equilibrium thermodynamics, and relativistic heavy-ion collisions. Phys,. Rev. C 17:1051-1070.

Peilert, G., Stöcker, H., Greiner, W. ve Rosenhauer, A., 1989, Multifragmentation, fragment flow, and the nuclear equation of state. Phys,. Rev. C 39:1402-1419.

Pethick, C. J. ve Ravenhall, D. G., 1987, Instabilities in hot nuclear matter and the fragmentation process. Nucl. Phys., A 471:19c-34c.

Randrup, J. ve Koonin, S. E., 1981, The disassembly of nuclear matter. Nucl. Phys., A 356:223-234.

Ring P.,Schuck P., 2004, TheNuclearMany-Body problemSpringer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.

Sorlin O. ve ark., 2013, Evolution of the N=28 shellclosure: a test benchfornuclearforces, Phys., Scripta, VT152, 014003.

Oğul, R., Eren, N., 2007, Nükleer ve Reaktör Fiziği, Ders Notları, Konya.

Oğul, R., Botvina, A. S., ve ark.,2011, Isospin dependent multifragmentation of relativistic projectiles *Phys., Rev. C* 83, 024608.

Oğul, R.,Atav, U., Bulut, F., Buyukcizmeci, N., Erdogan, M., Imal, H., Botvina, A. S., andMishustin, I. N., 2009, Surface and symmetry energies in isoscaling for multifragmentation reactions,*J. Phy G: Nucl. Part. Phys.* 36, 115106

Wapstra A. H. ve ark., 2003, The AME2003 atomicmassevaluation (I). Evaluation of inputdata, adjustmentprocedures,Nucl. Phys,. A, V729, 129-336.

Wang N. ve ark., 2010, Modification of nuclearmassformulaby consideringisospineffects, Phys., Rev.C, V81, 044322.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

AdıSoyadı	**:**	Figen BOSTANCI
Uyruğu	**:**	T.C.
DoğumYeriveTarihi	**:**	Çumra-08.07.1988
Telefon	**:**	05344175912
Faks	**:**	
e-mail	**:**	figen--42-88@hotmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**BitirmeYılı**
Lise	:	CemilKeleşoğlu, Karatay, Konya	2006
Üniversite	:	SelçukÜniversitesi, Fen Fakültesi, Selçuklu, Konya	2011
YüksekLisans	:	SelçukÜniveristesi, Fen Bil. Ens., Selçuklu , Konya	2011- 2014
Doktora	:	**-**	

YABANCI DİLLER: İngilizce